U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 2, 2015

Jaime E. Villate

Porto, fevereiro de 2016

E-mail: villate@fe.up.pt

Conteúdo

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 2.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Primeiro semestre do segundo ano.

Ano académico 2015–2016, primeiro semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Maria Helena Braga e Jaime E. Villate.

Número de alunos 195.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

FÍSICA II (EIC0014)

Aula 1. 17-9-2015

Consulte as informações na página Web:

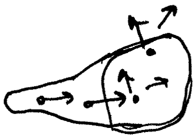
http://def.fe.up.pt/eic0014

1º teste. segunda-feira 9 de novembro, 17:30 – 19:00
2º teste. segunda-feira 14 de dezembro, 17:30 – 19:00

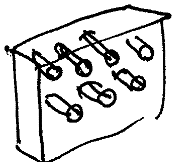
OBJETIVO

Compreender a tecnologia moderna.
Alguns exemplos de novas tecnologias:

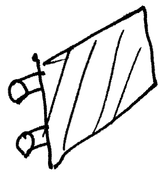
1. TV



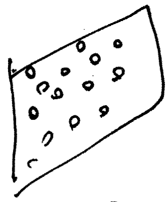
CRT (tubo de raios catódicos)



Plasma

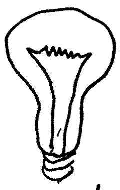


LCD (cristal líquido)



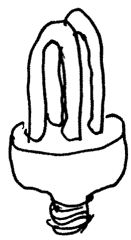
LED (díodos emissores de luz)

2. Lâmpadas

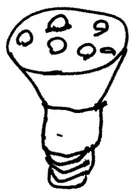


temperatura de milhares de °C

incandescente

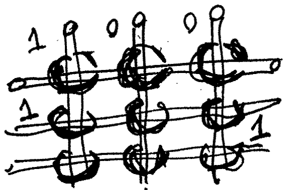


fluorescente



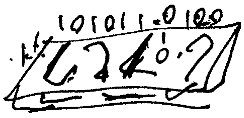
LED

3. Memorias de computador



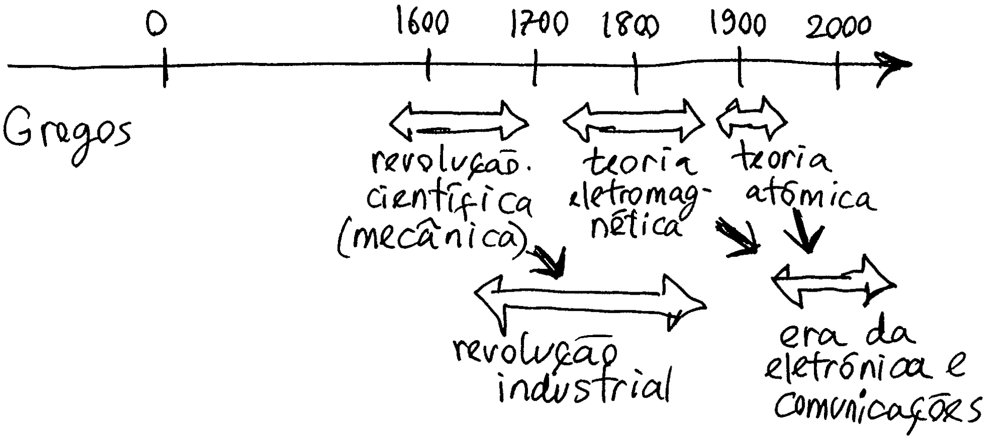
anéis de ferro

disco ferromagnético



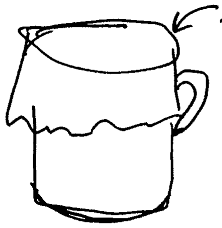
flash (semicondutores)

HISTÓRIA



ελεκτρον = elektron = âmbar, em grego

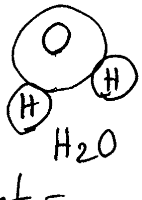
o âmbar (resina fóssil), tal como os plásticos é fácil de eletrizar, dando origem a forças elétricas



a força que mantem a folha aderente colada à caneca é a força elétrica

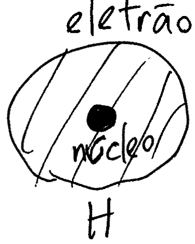
Teoria moderna da força elétrica

Moléculas



entre os iões de hidrogénio e o ião de oxigénio há força elétrica atrativa

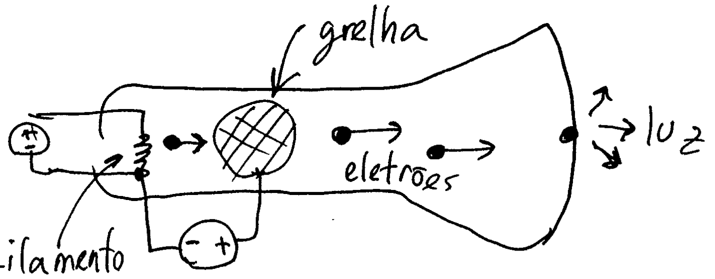
Átomos



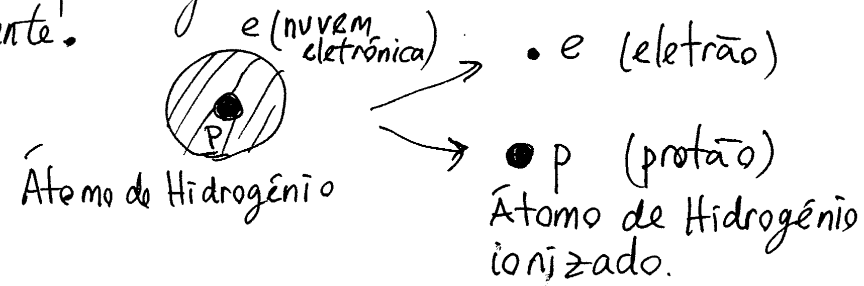
o núcleo do átomo de hidrogénio é uma partícula chamada protão

Descoberta do eletrão (1897)

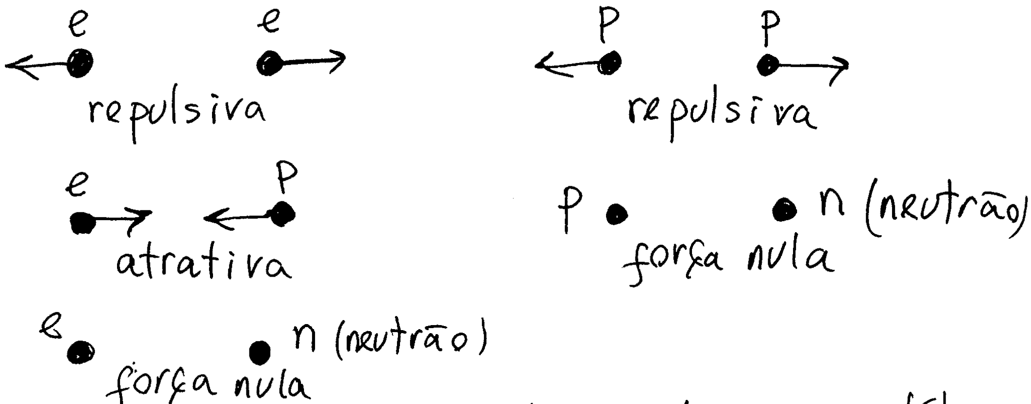
a primeira partícula atómica descoberta foi o eletrão, obtido num tubo de raios catódicos



o filamento aquecido liberta eletrões que são acelerados pela grelha e observados no ecrã fosforescente.



FORÇA ELÉTRICA



Conclui-se que há dois tipos de carga elétrica as dos protões e a dos eletrões e os neutrões não têm carga.

A força entre duas partículas, ambas com carga, é atrativa se as cargas são de tipos diferentes ou repulsiva se são do mesmo tipo.

O valor das cargas do eletrão e do protão é o mesmo (a pesar de serem de tipos diferentes) porque produzem forças do mesmo valor

força nula (a força atrativa do protão anula a repulsiva do eletrão, por terem o mesmo valor)

Como tal, é conveniente dizer que um dos tipos de carga é positiva e o outro negativa, de forma que as duas juntas anulam-se. Por razões históricas, a carga negativa é a do eletrão

(q = carga)

$q_{eletrão} = -e$

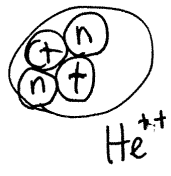
$q_{protão} = +e$

(embora a massa do protão seja 2000 vezes maior do que a do eletrão)

e = carga elementar.

Núcleos mais pesados

Hélio



2 protões + 2 neutrões

(os neutrões produzem outra força "forte" que contraria a repulsão da força elétrica)

$q_{neutrão} = 0$

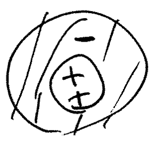
$m_{neutrão} \approx m_{protão} = 1$ u.m.a (unidade de massa atómica)

↑ massa

$\Rightarrow m_{Hélio^{++}} = 4$ u.m.a. $\quad He^{++} \leftarrow$ carga $= +2e$

$q_{Hélio^{++}} = +2\,e$

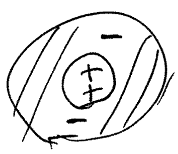
Um eletrão na vizinhança sente força atrativa, sendo absorvido pelo núcleo, que fica:



$He^{+} \rightarrow q_{He^{+}} = +e$ (uma unidade de carga)

$m_{He^{+}} \approx 4$ u.m.a. (o eletrão não altera muito a massa)

se absorver um segundo eletrão, fica:

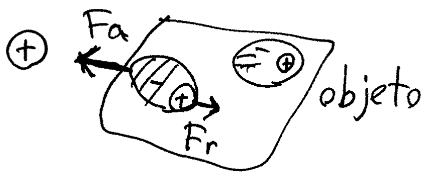


He $\quad q_{He} = 0$

$m_{He} \approx 4$ u.m.a.

Átomo neutro. Já não produz forças atrativas nos eletrões externos.

FORÇA SOBRE OBJETOS NEUTROS



num objeto neutro, a pesar de não ter carga líquida, cada molécula deforma-se e a força atrativa (Fa) nas cargas mais próximas, é sempre maior que a repulsiva (F_r) nas cargas mais afastadas

<u>A força num objeto neutro é sempre atrativa</u>

UNIDADE SI DE CARGA

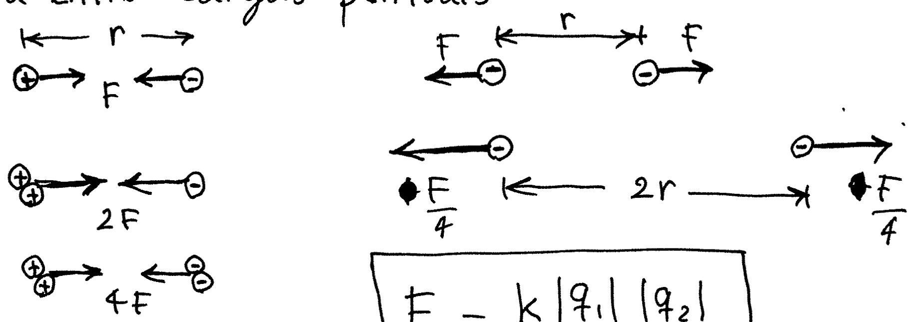
1 C (1 coulomb)

carga elementar $= e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

Aula 2. 18-9-2015

LEI DE COULOMB

Força entre cargas "pontuais"

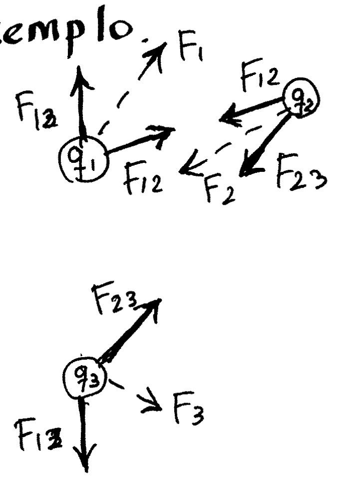


$$\boxed{F = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{K\,r^2}}$$

k = **constante de Coulomb** $= 9\times10^{9}\ \dfrac{N\cdot m^2}{C^2}$

K = constante dielétrica do meio onde estão inseridas as cargas (sem unidades).
No vácuo ou no ar seco, $K = 1$.
Em outros meios, $K > 1$

Exemplo.



$q_1 > 0$, $q_2 < 0$, $q_3 > 0$

$$F_{12} = \frac{k}{K}\,\frac{|q_1 q_2|}{d_{12}^2} \qquad \left(\begin{array}{l}\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\\ F_{12} = F_{21}\end{array}\right)$$

$$F_{13} = \frac{k}{K}\,\frac{|q_1 q_3|}{d_{13}^2}$$

$$F_{23} = \frac{k}{K}\,\frac{|q_2 q_3|}{d_{23}^2}$$

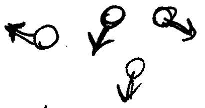
Forças resultantes sobre cada partícula:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \qquad \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \qquad \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

CONDUTORES E ISOLADORES

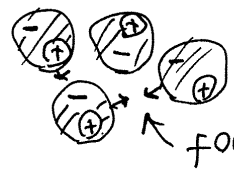
Isolador. Material sem cargas elétricas livres. Todas as partículas com carga estão ligadas a um átomo ou molécula no material.

1. gases.



moléculas neutras em movimento

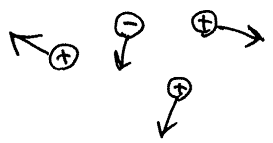
2. líquidos e sólidos



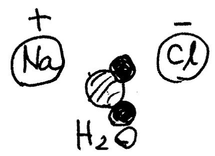
forças moleculares atrativas de muito curto alcance

Condutor. Material com partículas com carga que se podem deslocar livremente através do material.

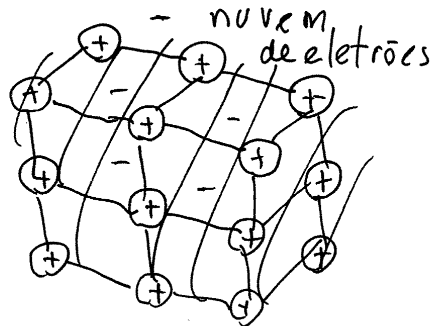
1. gases ionizados (plasmas)



2. Soluções líquidas ou sólidas.



3. Metais

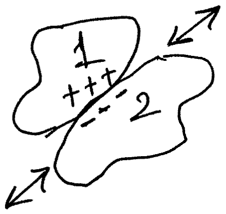


Cada átomo perde um eletrão que passa para a "nuvem eletrónica" que pode deslocar-se livremente.
Os átomos (iões positivos) estão fixos na rede cristalina.

4. Semicondutores (capítulo 2)

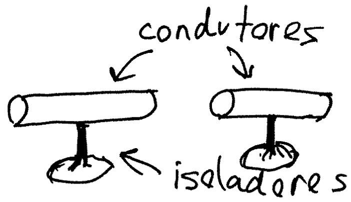
ELETRIZAÇÃO

1. Por fricção. Dois materiais friccionados entre si. O que estiver acima na série triboelétrica perde eletrões que passam para o outro. O primeiro fica com carga positiva (falta de eletrões) e o segundo com igual carga mas negativa (excesso de eletrões)



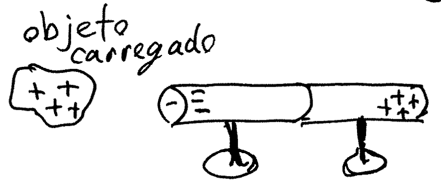
Para poder carregar assim um condutor, seria necessario que estivesse isolado, ou senão, as cargas passam rapidamente para "a terra" ficando descarregado.

2. Por indução. ⓐ



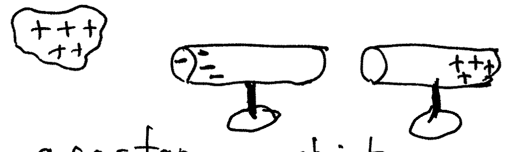
duas barras condutoras, em suportes isoladores

ⓑ



juntam-se as duas barras e aproxima-se um objeto carregado. A nuvem eletrónica desloca-se deixando carga − num extremo e carga + no extremo oposto

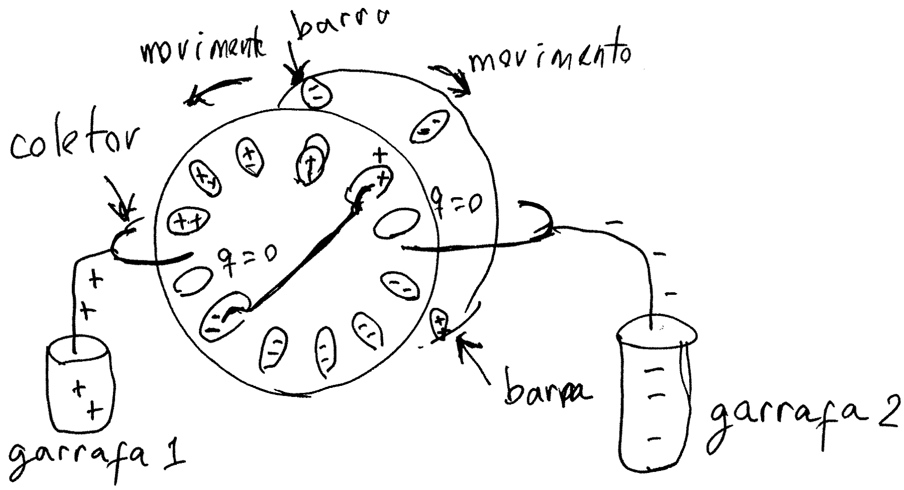
ⓒ



sem afastar o objeto, separam-se as barras d

afasta-se o objeto. As duas barras ficam carregadas com cargas de igual valor absoluto mas de sinais opostos

GERADOR DE WIMSHURST

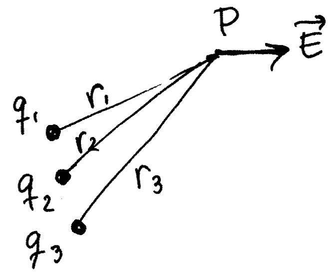


A carga em cada pequena lâmina metálica no disco induz cargas em duas lâminas do disco oposto, a seguir passa pelo colector para a garrafa (ficando a lâmina descarregada), depois recebe carga, por indução, do disco oposto e o ciclo repete-se.

A carga nas garrafas cresce rapidamente até produzir uma faísca que descarrega as garrafaz: as moléculas do ar quebram-se, criando-se um plasma que transporta as cargas e produz luz.

Aula 3. 24-9-2015

ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA



campo $\vec{E}$ num ponto P:

$$\vec{E} = \sum(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots)$$

cada carga pontual q_i produz campo com módulo:

$$E_i = \frac{k|q_i|}{K\, r_i^2}$$ (unidades força sobre carga,

Uma carga pontual q colocada em P sofre uma força: $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$

como cada uma das forças exercidas por $q_1, q_2, q_3, \ldots$, são forças centrais, são forças conservativas

$$\Longrightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_e(A) - U_e(B)$$ (não depende do percurso)

U_e é uma função da posição (com unidades de energia) chamada energia potencial elétrica

$$U_e(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ (arbitrando $U_e = 0$ no infinito)

$$\Longrightarrow U_e(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = q\int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

define-se o **potencial** elétrico:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$ (unidades de energia sobre carga)

UNIDADE SI DE POTENCIAL

$$1\,V = 1\,\frac{J}{C} \quad \text{(um volt)}$$

unidades de campo:
$$1\,\frac{N}{C} = 1\,\frac{V}{m}$$
campo E = diferença de potencial por unidade de distância

A energia elétrica de uma partícula com carga q, num ponto P onde o potencial é V_P é igual a:

$$\boxed{U_e = q\,V_P}$$

U_e pode ser positiva ou negativa. Cargas com sinais opostos têm energia de sinais opostos

Exemplos: ① A voltagem na rede elétrica pública é 220 V (voltagem = diferença de potencial, neste caso, entre os dois elétrodos numa tomada).

Se entre os elétrodos de uma tomada for transferida carga total de 1 C, a energia fornecida por essas cargas é:

$$\Delta U_e = q\,\Delta V = 1\,C \times 220\,V = 220\,J$$

② No gerador de Wimshurst, quando aparece uma faísca, ΔV é da ordem de 10^5 V e a carga transferida é da ordem dos nC. Como tal, a energia que produz a faísca é da ordem de:

$$\Delta U_e = (1\times 10^{-9}\,C)\times(10^5\,V) = 10^{-4}\,J$$

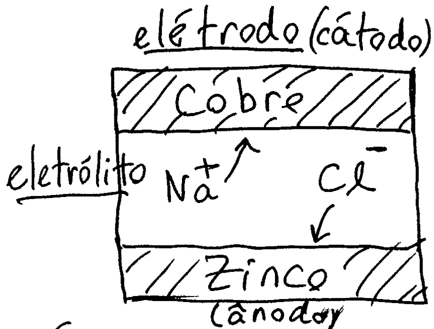
PILHAS QUÍMICAS

Luigi Galvani, séc. 18, dissecando uma rã, observou movimentos musculares bruscos quando tocava com um bisturi

Volta explicou o fenômeno como passagem de cargas elétricas do eletrólito (músculo) para dois metais diferentes (bisturi e mesa metálica)

ano 1800

pilha de volta: discos de zinco, cobre e cartão molhado em água salgada



os catiões (+) vão para o cátodo (cobre) e os aniões (−) para o ânodo. (zinco)

É necessário usar metais diferentes para que os aniões e catiões tenham a tendência a deslocarem-se para diferentes metais.

FORÇA ELETROMOTRIZ (f.e.m.)

A f.e.m., ou voltagem, da pilha é a diferença de energia de uma carga q, entre o ânodo e o cátodo, dividida pela carga.

$$\bullet\, q \begin{cases} U_{\text{ânodo}} = q V_{\text{ânodo}} \\ U_{\text{cátodo}} = q V_{\text{cátodo}} \end{cases}$$

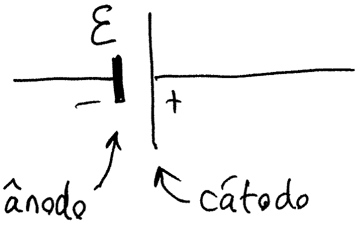
$\left(U_{\text{ânodo}} < U_{\text{cátodo}} \text{ se } q > 0 \right)$

$$\text{f.e.m.} = \mathcal{E} = \frac{U_{\text{cátodo}} - U_{\text{ânodo}}}{q} = V_{\text{cát.}} - V_{\text{ânodo}} = \Delta V$$

No caso da tomada de 220V em casa~~, a~~ f.e.m. é de 220V.

cargas positivas deslocam-se para onde o potencial é menor. Cargas negativas, para onde o

Diagrama de circuito

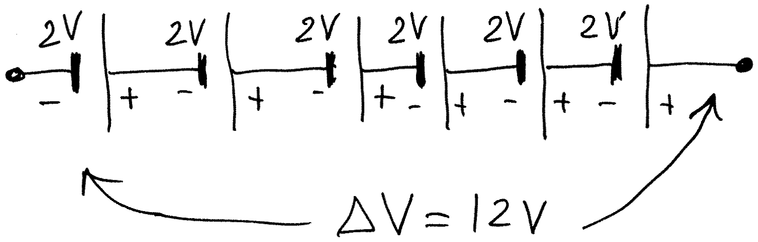


(fonte de tensão)

ε depende dos dois metales usados como elétrodos (e do eletrólito). Tem a ver com as diferenças de energia de ligação dos eletrões nos metais e costuma estar entre 1V e 2V.

FONTES EM SÉRIE

Ligando várias pilhas em série (como fez Volta, ou como numa bateria de automóvel) consegue-se aumentar o valor da f.e.m.



CARGA MÁXIMA

$$Q_{máx} = \text{carga de todos os catiões no eletrólito}$$
$$= -\,\text{carga de todos os aniões.}$$

cada vez que a pilha perde carga Δq, está a fornecer energia elétrica:

$$\Delta U_e = \Delta q\, \mathcal{E}$$

Energia máxima:

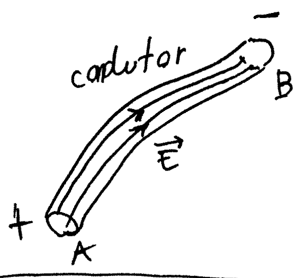
$$\boxed{U_{máx} = Q_{máx}\, \mathcal{E}}$$

Aula 4. 25-9-2015

CORRENTE ELÉTRICA

condutor ligado a uma voltagem $V_A > V_B$

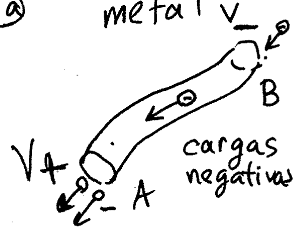
$\Rightarrow$ há linhas de campo $\vec{E}$, de A para B, que seguem o condutor (não saem do condutor porque as cargas de condução não saem pelas paredes laterais)

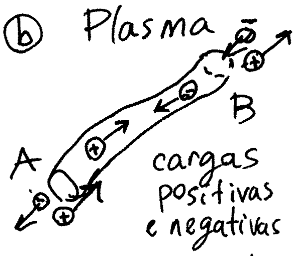


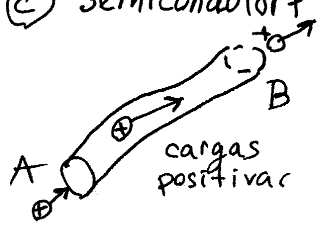
$$\boxed{\begin{array}{l} V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \\ \bar{E} = \Delta V/\Delta s \text{ (campo médio)} \end{array}}$$

Em A e B há cargas a entrar e sair

ⓐ metal ⓑ Plasma ⓒ Semicondutor P





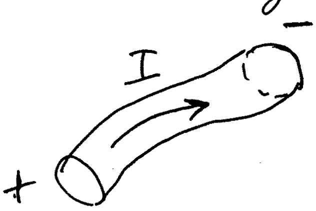


Nos 3 casos o efeito do movimento das cargas de condução é o mesmo: transportar energia elétrica de A para B.

(as cargas positivas que saem de A fazem diminuir a energia em A e as cargas negativas que chegam a A, trazem energia negativa que faz diminuir a energia em A.)

Define-se a corrente I no sentido da transferência de energia (sentido que teriam as cargas positivas)

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



carga transferida:

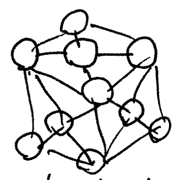
$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,dt$$

I vai sempre do ponto de maior potencial para o de menor.

UNIDADE SI DE CORRENTE

$$1\,A = 1\,\frac{C}{s} \quad \text{(um ampere)}$$

SEMICONDUTORES

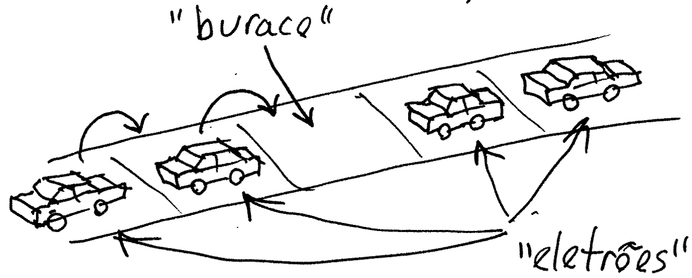


cristal de silício ou germânio

cada átomo na rede cristalina tem 4 eletrões de valência, ligados aos eletrões de outros quatro átomos vizinhos.

TIPO N. Acrescentam-se impurezas de arsênio (5 eletrões de valência) que introduzem um eletrão a mais, ficando na nuvem de eletrões de condução
⇒ cargas livres negativas, como nos metais.

TIPO P. Acrescentam-se impurezas de gálio (valência 3), que deixam um espaço fixo no cristal, que pode ser preenchido por um eletrão vizinho. Analogia: fila de trânsito parado.

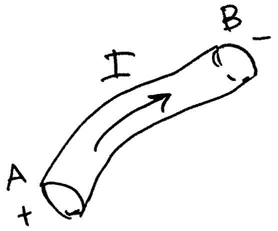


cada vez que fica um buraco livre, os carros avançam, preenchendo o buraco, que se desloca para a esquerda.

Os "buracos" na rede são como cargas positivas que se podem deslocar livremente.

A vantagem dos semicondutores é que num mesmo cristal podem criarem-se regiões P e N que permitem controlar a passagem da corrente: (díodos, transistores, válvulas) e circuitos lógicos completos dentro do cristal (circuitos integrados ou "chips").

ENERGIA E POTÊNCIA ELÉTRICA



$$\Delta V = V_A - V_B \qquad (V_A > V_B)$$

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,dt$$

energia "dissipada" no condutor entre t_1 e t_2:

$$\Delta U_e = \Delta Q\,\Delta V$$

Potência elétrica instantânea:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U_e}{\Delta t} = \Delta V \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

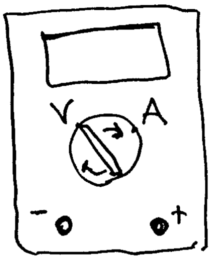
ΔV é fixa; não depende de Δt

$$\Longrightarrow \boxed{P = I\,\Delta V} \qquad (1\,\text{W} = 1\,\text{A}\cdot\text{V} = \text{um watt})$$

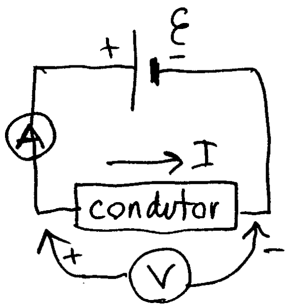
A potência dissipada num condutor com corrente é convertida em calor (efeito Joule), que pode aquecer o condutor, ou passar para o meio à volta.

Exemplo: potência contratada em casa $= 6.6$ kW $\Rightarrow I_{máx} = \frac{6600\,\text{W}}{220\,\text{V}} = 30$ A

AMPERÍMETROS E VOLTÍMETROS



Um multímetro pode usar-se para medir diferenças de potencial (voltímetro) ou correntes (amperímetro)



Para medir a voltagem num condutor ligado a uma fonte, basta tocar os dois extremos com os elétrodos do voltímetro ← V →

O voltímetro extrai umas poucas cargas do circuito e mede a energia de uma dessas cargas; não interfere muito no circuito.

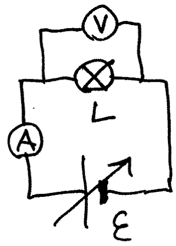
O amperímetro + ← A → −, tem de contar todas as cargas que passam, para determinar a corrente, e, por isso, tem de ser ligado em SÉRIE (abrindo o circuito no ponto onde se quer medir I). Para não interferir muito com o circuito, o amperímetro deve ser muito sensível; por ser muito sensível, se for ligado indevidamente (em paralelo) queima-se facilmente o seu fusível.

Aula 5. 1-10-2015

CARATERÍSTICA TENSÃO-CORRENTE

Relação entre a voltagem (ΔV) e a corrente (I) num dispositivo.

① lâmpada

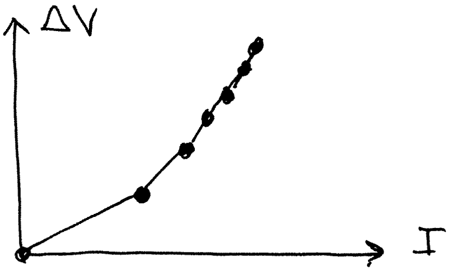


ΔV (V)	I (A)
0	0
3.24	0.116
4.69	0.144
6.24	0.170
7.78	0.194
9.44	0.216
12.27	0.253

No Maxima:

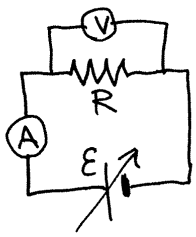
d: [[0,0],[0.116, 3.24], . . .]

plot2d([discrete, d],[style, linespoints])

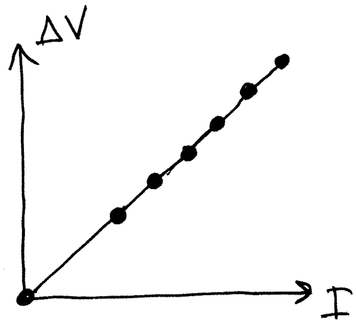


semelhante a uma parábola

② Resistência (resistor)



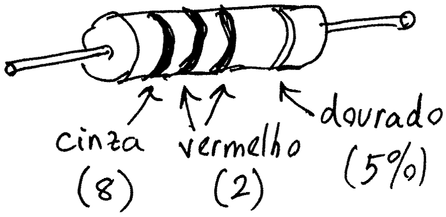
ΔV (V)	I (mA)
0	0
3.27	0.40
4.73	0.58
6.29	0.77
7.83	0.96
9.49	1.17
12.32	1.52



A caraterística é reta. O declive chama-se RESISTÊNCIA (resistance)

$$\boxed{\Delta V = RI}$$ Lei de Ohm

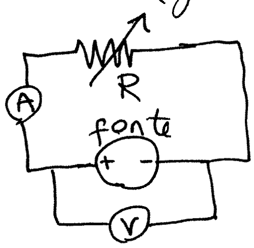
O valor da resistência está escrito na resistência, com barras de cores:

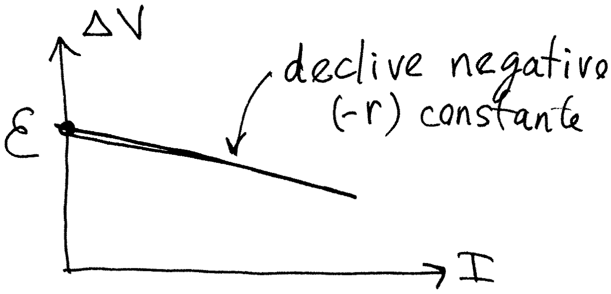


$\Rightarrow 82 \times 10^2\,\Omega$ (5% de erro)

A unidade SI de resistência é o ohm (Ω), igual a um volt sobre ampere.

③ Fonte (gerador)

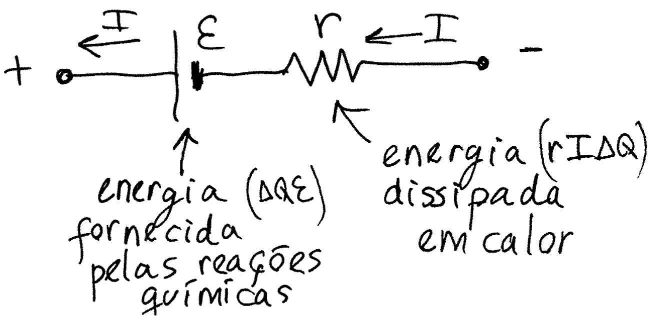




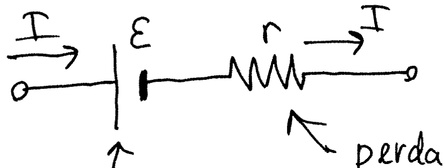
$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \varepsilon - r I}$$

r chama-se **resistência interna** e é devida a que o eletrólito, como qualquer outro condutor, dissipa parte da energia elétrica em calor, porque as cargas de condução sofrem forças dissipativas nas colisões com os átomos/moléculas.

DIAGRAMA EQUIVALENTE PARA UMA FONTE

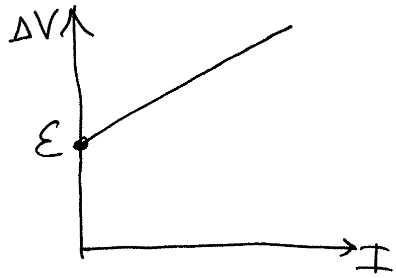


④ Receptor (pilha recarregável a ser recarregada; corrente no sentido oposto)



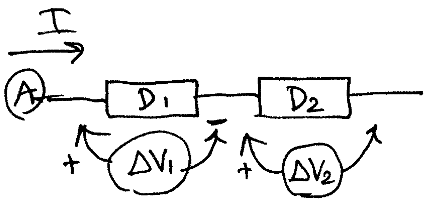
perda de energia elétrica ($\Delta Q\, \varepsilon$) absorvida nas reações químicas

perda de energia ($rI\Delta Q$) dissipada em calor

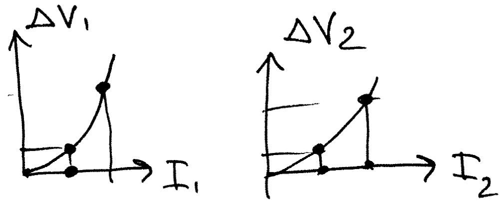


$$\boxed{\Delta V_{recetor} = \varepsilon + rI}$$

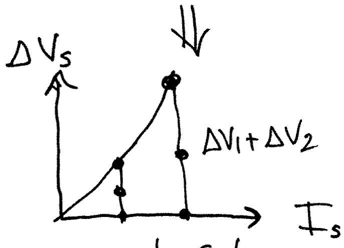
DISPOSITIVOS EM SÉRIE



$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V_s &= \Delta V_1 + \Delta V_2 \\ I_1 &= I_2 = I_s \end{aligned}}$$



$\Downarrow$

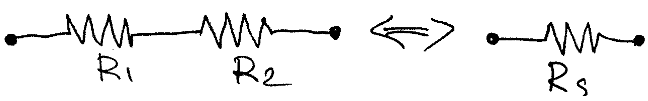


as caraterísticas somam-se

RESISTÊNCIAS

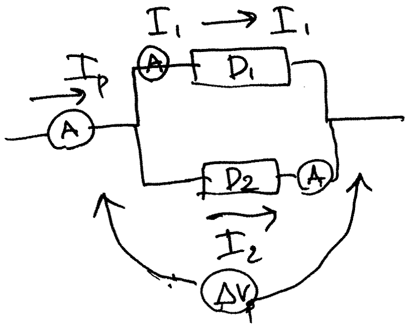
$$\begin{cases} \Delta V_1 = R_1 I_s \\ \Delta V_2 = R_2 I_s \end{cases} \Longrightarrow \Delta V_s = (R_1 + R_2)\, I_s$$

equivalente a uma única resistência $\boxed{R_s = R_1 + R_2}$

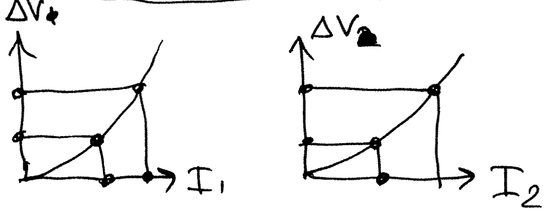


Aula 6 . 2-10-2015

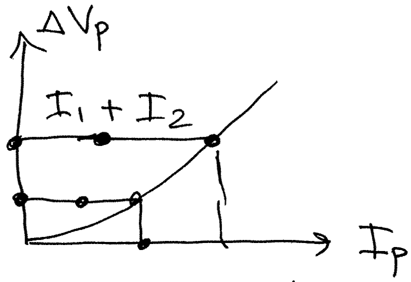
DISPOSITIVOS EM PARALELO



$$\boxed{\begin{aligned} I_p &= I_1 + I_2 \\ \Delta V_1 &= \Delta V_2 = \Delta V_p \end{aligned}}$$ (conservação da carga)



$$\Downarrow$$



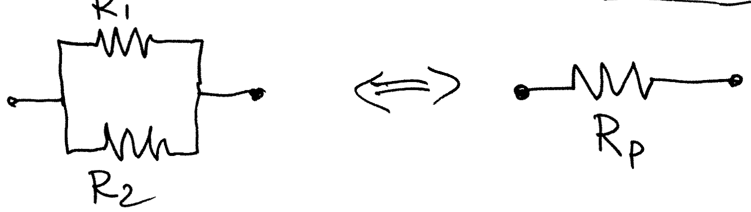
As inversas das caraterísticas $(I = f(\Delta V))$ somam-se

RESISTÊNCIAS

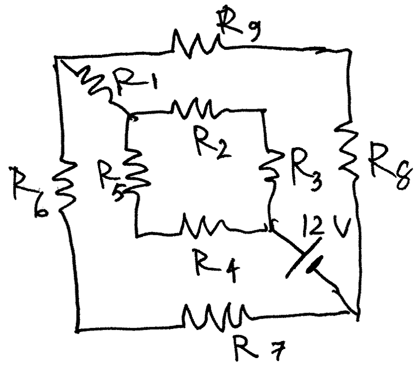
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\Delta V_p}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{\Delta V_p}{R_2} \end{cases} \Longrightarrow I_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta V_p$$

equivalente a uma única resistência:

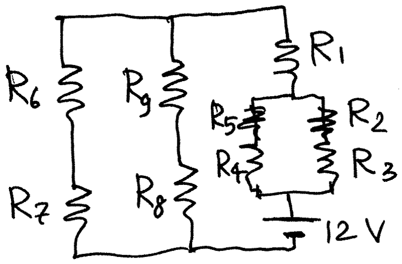
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Longrightarrow \boxed{R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$



Exemplo. As nove resistências no circuito são todas de $1\,k\Omega$. Encontre a corrente e a voltagem em cada resistência

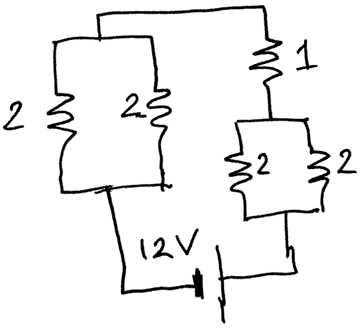


Resolução: o circuito é equivalente a:



R_6 está em série com R_7 e pode ser substituída por $R = 2\,k\Omega$

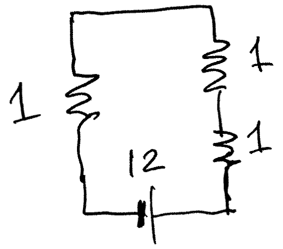
O mesmo com (R_8, R_9), (R_4, R_5) e (R_2, R_3)



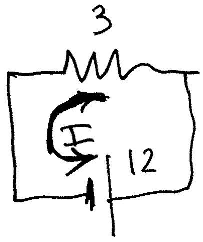
(resistências em $k\Omega \Rightarrow$ correntes em mA)

2 em paralelo com 2 é:

$$2 \| 2 = \frac{2 \times 2}{2+2} = 1$$

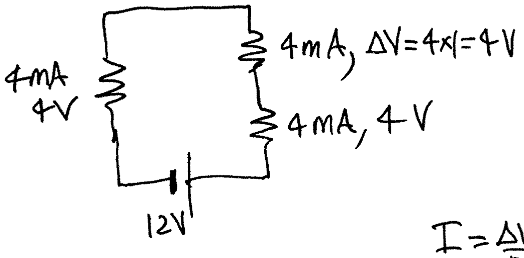


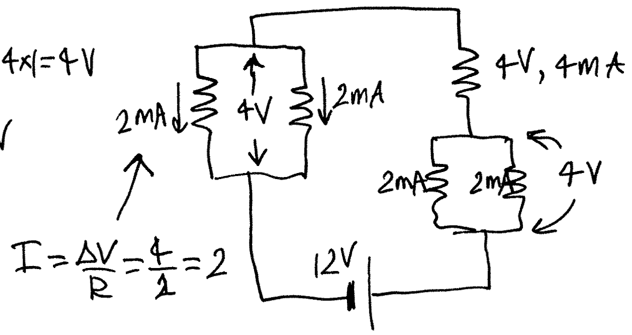
$\Longrightarrow$

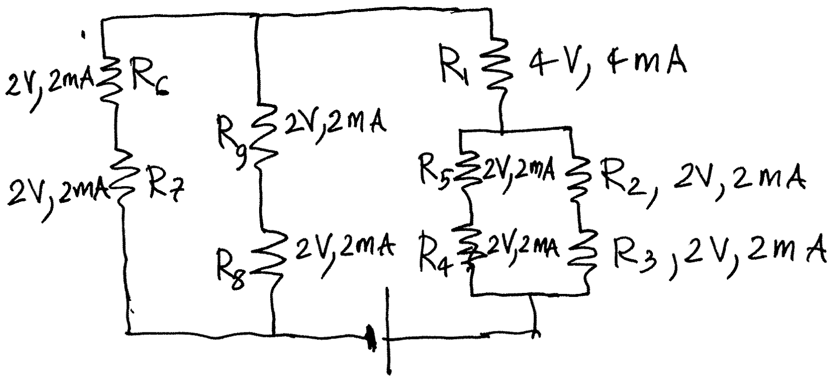


$$I = \frac{12}{3} = 4\,mA$$

Regressa-se aos circuitos anteriores, calculando em cada caso ΔV e I, usando a lei de Ohm e as regras para circuitos em série ($I_1 = I_2$, $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$) e em paralelo ($\Delta V_1 = \Delta V_2$, $I = I_1 + I_2$)

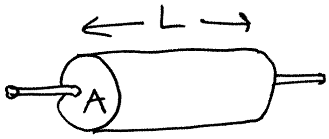






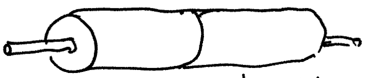
RESISTIVIDADE

Cilindro de comprimento L, área da secção A e resistência R



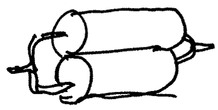
DOIS CILINDROS IGUAIS

(a) Em série



comprimento 2L
área A
resistência 2R

(b) Em paralelo



Comprimento L
área 2A
resistência $\frac{R}{2}$

Conclui-se que R é diretamente proporcional a L e inversamente proporcional a A

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A}}$$

ρ = constante própria de cada material = **RESISTIVIDADE**

ρ depende do material e da temperatura T.
Empiricamente encontra-se uma expressão aproximada:

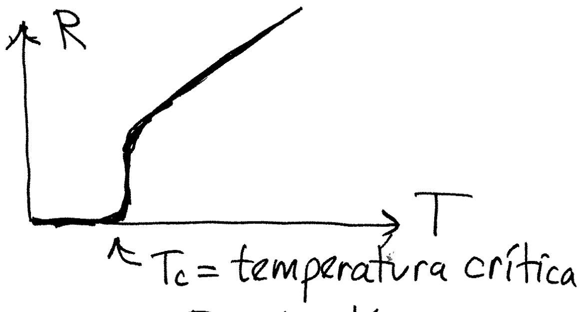
$$\boxed{R = R_{20}\left(1 + \alpha_{20}(T-20)\right)}$$

onde $R_{20} = \rho_{20}\frac{L}{A}$ é a resistência a 20°C, e ρ_{20} a resistividade a essa temperatura

α_{20} é o **coeficiente de temperatura**, próprio do tipo de material.

SUPERCONDUTIVIDADE

Em alguns materiais (supercondutores) R torna-se quase nula para T menor que uma temperatura T_c.



O Hélio é supercondutor com $T_c = 4.2$ K
Até 1986 os supercondutores conhecidos tinham $T_c < 30$ K. A partir de então, tem sido construídos materiais supercondutores com T_c superior com $T_c = 92$ K e atualmente até 203 K (2015) (0°C = 273 K)

Aula 7. 8-10-2015

CONDUTORES EM EQUILÍBRIO ELETROSTÁTICO

Num condutor isolado não pode haver corrente. As cargas que se acumulam na superfície impedem o movimento de outras cargas de condução.

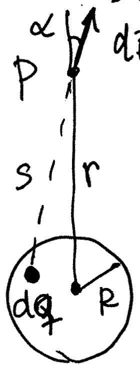
$I = 0$ implica campo $\vec{E}$ nulo e, se 1 e 2 são pontos no condutor:

$$V_2 - V_1 = \int_2^1 E\, ds = 0$$

(Para calcular V_2 integra-se E desde o condutor até infinito)

$$\boxed{\text{O potencial em qualquer ponto de um condutor isolado é o mesmo.}}$$

CAMPO DE UMA ESFERA CONDUTORA

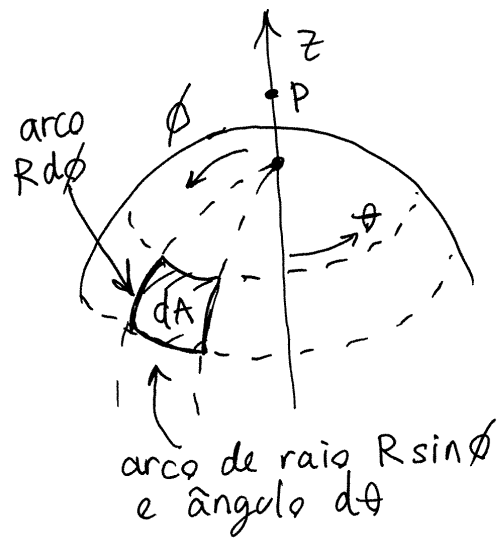


Esfera de raio R e carga Q, isolada

No ponto P, a uma distância r do centro, a carga infinitesimal dq produz campo $d\vec{E}$ inclinado um ângulo α. Apenas interessa a componente radial, $dE \cos\alpha$, porque as componentes perpendiculares de diferentes partes da esfera anulam-se.

$$dE \cos\alpha = \left(\frac{k|dq|}{K s^2}\right)\cos\alpha$$ ($dq \approx$ carga pontual)

$$|dq| = \frac{|Q|\,dA}{4\pi R^2}$$ (carga Q na superfície total $4\pi R^2$ e distribuída uniformemente)



Em coordenadas esféricas,
Onde θ e ϕ são os
ângulos esféricos:

$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$

(latitude e ângulo desde o eixo dos z)

$$\Rightarrow dA = (R\,d\phi)(R\sin\phi\, d\theta) = R^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

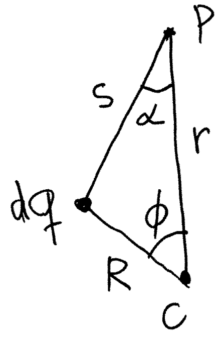
$$dE \cos\alpha = \frac{k|Q|}{4\pi K s^2} \cos\alpha \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

campo total em P:

$$E = \int dE \cos\alpha = \frac{k|Q|}{4\pi K} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha \sin\phi}{s^2} d\theta \right) d\phi$$

o integral em θ dá 2π (s e α não dependem θ)

$$\Rightarrow E = \frac{k|Q|}{2K} \int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha \sin\phi}{s^2}\, d\phi$$



r = distância desde o centro da esfera até P.
s = distância desde P até dq.

teorema do cosseno:

$$\begin{cases} R^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\alpha \\ s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi \end{cases}$$

r e R não dependem de ϕ. s e α sim dependem de ϕ

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{s^2+r^2-R^2}{2sr} \\ \sin\phi\, d\phi = d(\cos\phi) = \dfrac{s}{Rr}\, ds \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \frac{k|Q|}{4K R r^2} \int_{s_{min}}^{s_{máx}} \left(1 + \frac{r^2-R^2}{s^2}\right) ds$$

$$= \frac{k|Q|}{4K R r^2} (s_{max} - s_{min}) \left(1 + \frac{r^2-R^2}{s_{máx}\, s_{min}}\right)$$

(a) $r < R$ (dentro da esfera)

$$\begin{cases} s_{min} = R - r \\ s_{max} = R + r \end{cases} \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

(b) $r > R$ (fora da esfera)

$$\begin{cases} s_{min} = r - R \\ s_{max} = r + R \end{cases} \Rightarrow \boxed{E = \frac{k|Q|}{K r^2}}$$

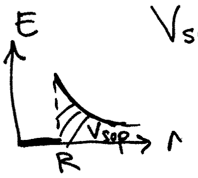
igual a uma carga pontual Q no centro

POTENCIAL DA ESFERA ISOLADA

$$V_{sup} - V_{\infty} = -\int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{Kr^2}\, dr = +\frac{kQ}{Kr}\Big|_{\infty}^{R} = \frac{kQ}{KR}$$

sem valor absoluto

zero, por definição



$$\boxed{V_{sup} = \frac{kQ}{KR}}$$

V_{sup} é diretamente proporcional a Q

O mesmo acontece em qualquer outro condutor isolado.

CAPACIDADE ELÉTRICA

$$C = \frac{Q}{V_{sup}}$$

unidades de carga sobre potencial:

$$1\,F = 1\,\frac{C}{V} \quad \text{(um farad)}$$

⇒ A capacidade da esfera é:

$$C_{esfera} = \frac{KR}{k}$$

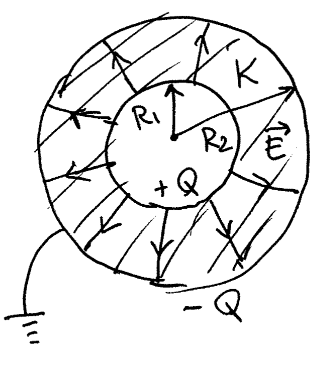
- quanto maior for C, menor energia é necessária para carregar o condutor até ficar com carga Q.
- C depende da forma geométrica e do tamanho e da constante K do isolador à volta do condutor

CONDENSADORES

dois condutores, separados por um isolador

$$C_{cond.} = \frac{Q}{\Delta V}$$

condensador esférico.. Armaduras = duas esferas metálicas



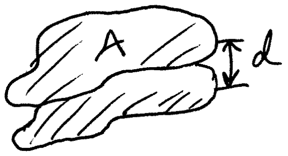
$$E = \begin{cases} \dfrac{k|Q|}{Kr^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r < R_1,\ \text{ou}\ r > R_2 \end{cases}$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{Kr^2}\,dr = \frac{kQ}{K}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

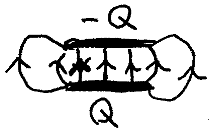
$$\boxed{C_{esf.} = \frac{K R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}}$$

Aula 8. 9-10-2015

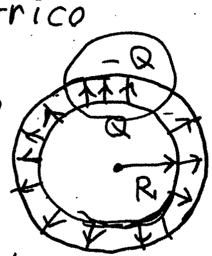
Condensador plano. Duas armaduras planas, paralelas, com a mesma área A.



Campo elétrico



analogia →



$R_1 \to \infty$ ($R_2 \simeq R_1$) $Q_{esf} \to \infty$ (carga na esfera)

condensador esférico. $E = \frac{k|Q|}{KR^2}$

mas $|Q| = \frac{A}{4\pi R_1^2}|Q_{esf}|$ finita

$$\Rightarrow E = \frac{k|Q_{esf}|}{K r^2} \approx \frac{k|Q_{esf}|}{K R_1^2} = \frac{k\left(\frac{4\pi R_1^2}{A}|Q|\right)}{K R_1^2}$$

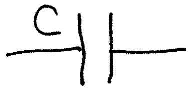
$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{4\pi k |Q|}{K A}}$$

o campo dentro do condensador plano é constante.

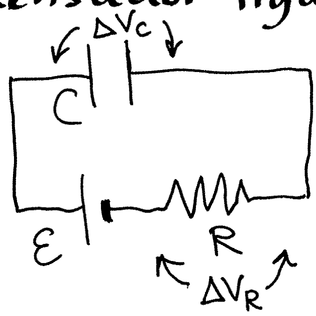
$$\Delta V = \int_0^d E\, ds = \frac{4\pi k |Q| d}{K A}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{plano} = \frac{K A}{4\pi k d}}$$

diagrama de circuito



Condensador ligado a uma fonte

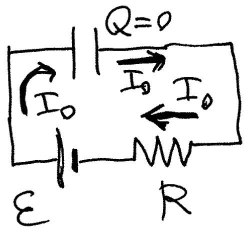


R = resistência interna da fonte mais cabos de ligação mais as armaduras

$$\Delta V_C + \Delta V_R = \mathcal{E} \qquad \begin{cases} \Delta V_R = RI \\ \Delta V_C = \dfrac{Q}{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}$$

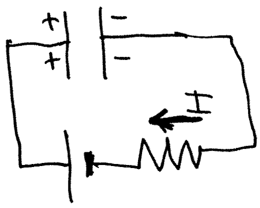
$t = 0$



Em $t = 0$, o condensador está descarregado.

$$Q = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$t > 0$

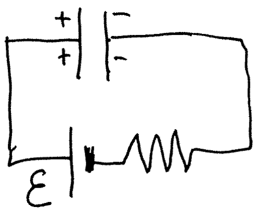


$Q > 0$.

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - \frac{Q}{C}}{R} < I_0$$

I diminui com o tempo porque Q aumenta (estado transitório)

$t \to \infty$



No instante em que Q seja igual a $\mathcal{E}C$,

$$\Rightarrow I = 0$$

$\Rightarrow$ Estado estacionário. Q permanece constante em $Q = \mathcal{E}C$

ENERGIA ARMAZENADA NO CONDENSADOR

Cada vez que aumenta a carga em dq nas armaduras, a fonte está a fornecer energia elétrica:

$$dU_e = \Delta V\, dq = \frac{q}{C}\, dq \qquad \left(q = \text{carga já existente no condensador}\right)$$

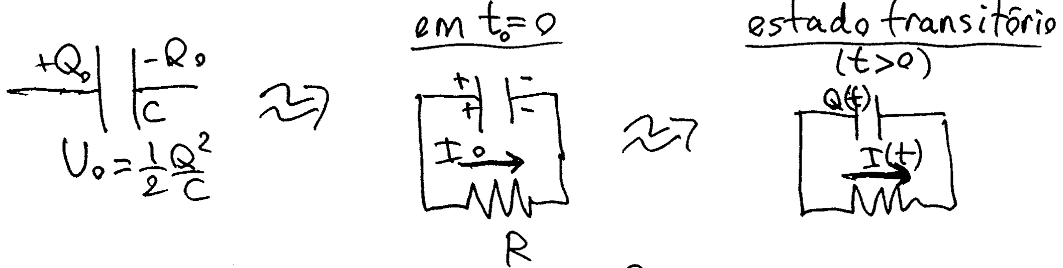
$$\Rightarrow U_e = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Sumário de condensadores:

$$\Delta V = CQ$$

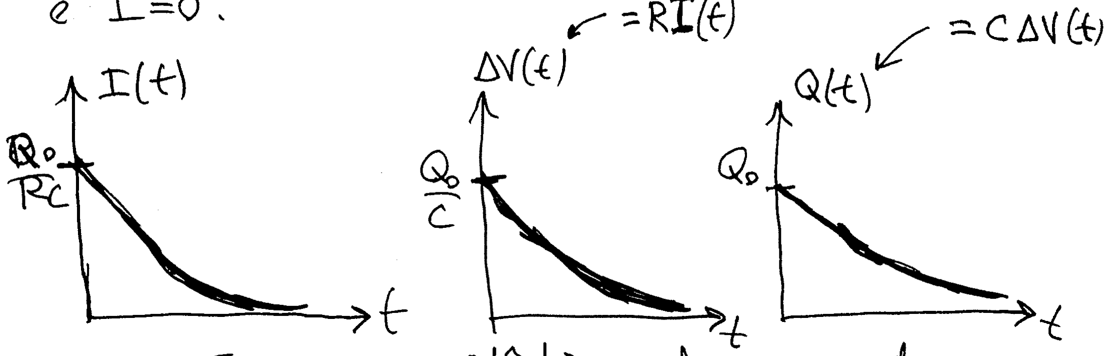
$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}Q\Delta V$$

A energia armazenada num condensador pode ser usada para produzir corrente, como se o condensador fosse uma fonte de f.e.m.



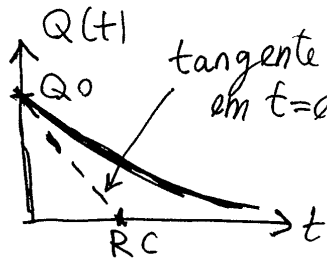
$$\Delta V_0 = \frac{Q_0}{C} \Rightarrow I_0 = \frac{Q_0}{RC} \qquad Q(t) < Q_0,\ I(t) < I_0$$

No estado estacionário $Q=0$ (condensador descarregado) e $I=0$.



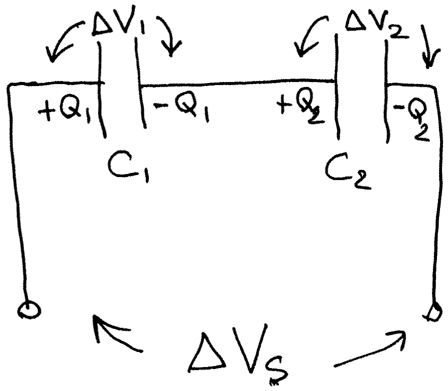
os 3 gráficos são idênticos. Apenas mudam as unidades das ordenadas.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{cargas através}\\ \text{de R}}}{I(t)} = -\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{cargas}\\ \text{que saem}\\ \text{do condens.}}}{\frac{dQ}{dt}} \Rightarrow I_0 = \frac{Q_0}{RC} = \text{-declive de } Q(t) \text{ em } t=0 \Longrightarrow$$



$\boxed{RC = \text{CONSTANTE DE TEMPO}}$ ($\Omega \cdot F$ = segundo)

CONDENSADORES EM SÉRIE

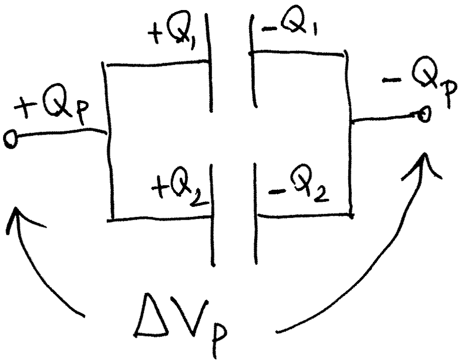


$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q_s$$

$$\Delta V_s = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q_s$$

$$\Rightarrow \Delta V_s = \frac{Q_s}{C_s} \qquad \boxed{C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

CONDENSADORES EM PARALELO



$$Q_p = Q_1 + Q_2$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_p$$

$$Q_p = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 = (C_1 + C_2)\, \Delta V_p$$

$$\Rightarrow Q_p = C_p \Delta V_p \qquad \boxed{C_p = C_1 + C_2}$$

Rigidez dielétrica

Campo máximo que pode existir num dielétrico. Se o campo $\vec{E}$ ultrapassar o valor da rigidez dielétrica, o dielétrico queima-se, ficando condutor.

Aula 9. 15-10-2015

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

Dispositivos ligados a uma ou várias fontes com f.e.m. constante. (a corrente não será necessariamente constante)

Definições

PONTO: Ligação comum entre dois dispositivos/fontes

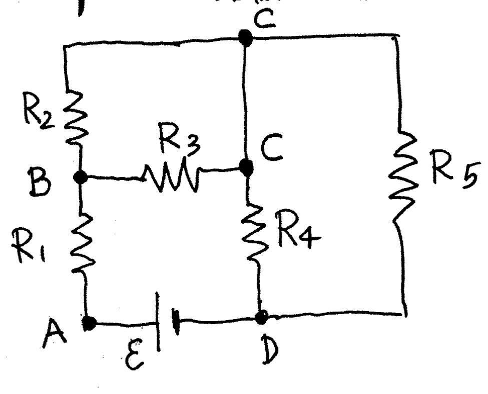
NÓ: Ligação comum entre 3 ou mais dispositivos/fontes

RAMO: Percurso entre dois pontos/nós diferentes

PERCURSO FECHADO (Loop): Percurso desde um ponto/nó até o mesmo ponto/nó, passando por vários dispositivos.

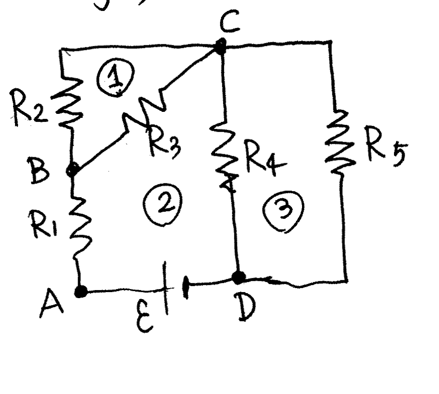
MALHA: Percurso fechado sem nenhum outro percurso fechado no seu interior.

Exemplo. Problema 12 do capítulo 3



Há um ponto: A
e ~~dois~~ três nós: B, C, D
observe-se que C aparece duas vezes no desenho, mais é um único nó porque não há nenhum dispositivo entre os dois pontos identificados com C.

Ou seja, o circuito também pode ser representado:



Há 3 malhas:

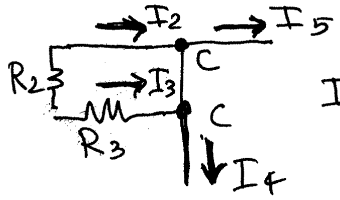
1. formada por R_2 e R_3
2. formada por R_1, R_3, R_4 e $\mathcal{E}$
3. formada por R_4 e R_5

LEIS DE KIRCHHOFF

Lei das correntes. A soma algébrica das correntes num nó é zero.

positivas as que entram e negativas as que saem, ou ao contrário

Exemplo: nó C no circuito acima

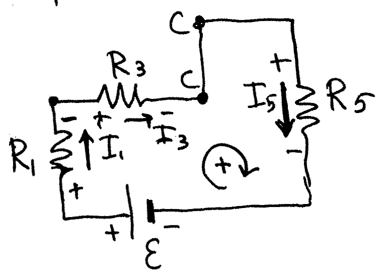


$$I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Lei das voltagens. A soma algébrica das voltagens num percurso fechado é zero.

positivas as que aumentan no sentido horário e negativas as outras, ou ao contrário

Exemplo. no circuito acima,

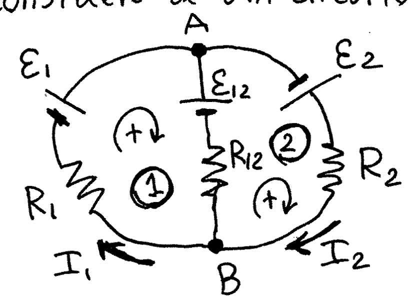


$$\mathcal{E} - \Delta V_1 - \Delta V_3 - \Delta V_5 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = 0$$

MÉTODO DAS MALHAS

Considere-se um circuito com 2 malhas:



pela lei das correntes em A (ou B

$\Rightarrow I_{12} = I_2 - I_1$ (de B para A

lei das voltagens nas duas malhas:

$$\begin{cases} -R_1 I_1 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{12} + R_{12}(I_2 - I_1) = 0 \\ \mathcal{E}_2 - R_2 I_2 - R_{12}(I_2 - I_1) + \mathcal{E}_{12} = 0 \end{cases}$$

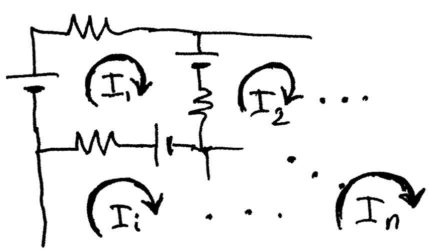
$$\begin{cases} (R_1+R_{12})I_1 - R_{12}I_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{12} \\ -R_{12}I_1 + (R_2+R_{12})I_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12} \end{cases}$$

ou, de forma matrizial,

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_{12} \\ -R_{12} & R_2+R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12} \end{bmatrix}$$

A generalização para n malhas é a seguinte:

ⓐ Definem-se **correntes de malha**: $I_1, I_2, \ldots, I_n$, todas no mesmo sentido.



ⓑ Define-se a matriz $\mathbb{R}$, de tamanho nxn, onde

R_{ii} = soma de todas as resistências na malha i.

R_{ij} = − soma das resistências no ramo fronteira entre as malhas i e j.

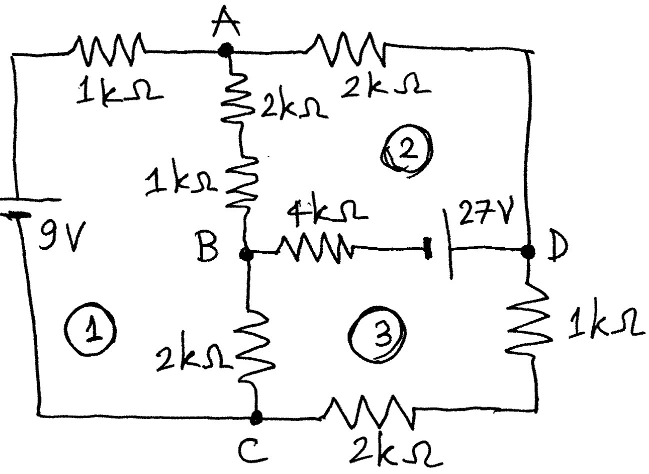
ⓒ $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$ ⓓ $\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{bmatrix}$ $\mathcal{E}_i$ = soma algébrica de todas as fontes na malha i.

ⓔ $\mathbb{R}\mathbb{I} = \mathbb{E} \Longrightarrow \mathbb{I} = \mathbb{R}^{-1}\mathbb{E}$ (solução de um sistema linear)

A corrente no ramo fronteira entre as malhas i e j é igual a $I_i - I_j$.

Os sinais ~~indicam~~ de I_i indicam o seu sentido, em relação ao sentido arbitrado ($I_i > 0 \Rightarrow$ no sentido arbitrado. $I_i < 0 \Rightarrow$ no sentido oposto).

Exemplo. Determine a corrente em cada resistência e a diferença de potencial entre os nós C e D.



<u>Resolução</u>. Numerando as malhas como mostra o diagrama, e arbitrando sentido dos ponteiros do relógio:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

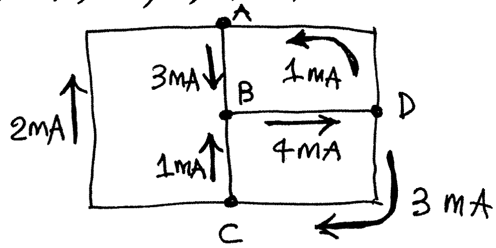
(resistências em kΩ, voltagens em V, correntes em mA)

No Maxima, a solução do sistema é:

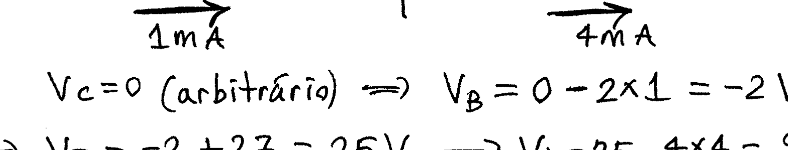
```
I : invert(matrix([6,-3,-2],[-3,9,-4],[-2,-4,9])).[9,-27,27];
```

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

correntes:



Para calcular $V_D - V_C$, escolhe-se um ramo qualquer entre C e D, por exemplo:

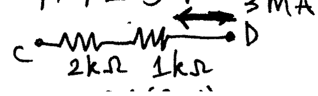


$V_C = 0$ (arbitrário) $\Longrightarrow$ $V_B = 0 - 2\times 1 = -2\ \text{V}$

$\Longrightarrow$ $V_E = -2 + 27 = 25\ \text{V}$ $\Longrightarrow$ $V_D = 25 - 4\times 4 = 9\ \text{V}$

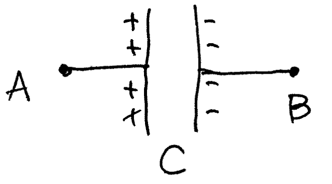
$$\boxed{V_D - V_C = 9\ \text{V}}$$

ou:



Aula 10. 16-10-2015

CIRCUITOS COM CONDENSADORES



Se num instante inicial t_0 a carga no condensador é Q_0, (positiva em A e negativa em B)

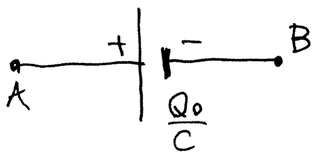
$$\Longrightarrow \Delta V_0 = \frac{Q_0}{C} \quad (V_A - V_B)$$

a corrente que passa entre A e B é:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

e pode ser em qualquer sentido (+ ou −) e ter qualquer valor

Assim sendo, o condensador é equivalente a uma fonte ideal com f.e.m. igual a Q_0/C

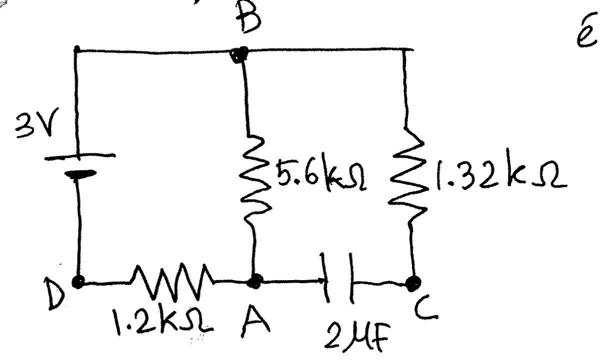


ou curto-circuito, se o condensador estiver inicialmente descarregado:

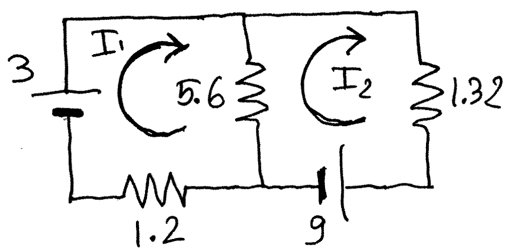
Estado estacionário. Nos circuitos de corrente contínua, há sempre um instante em que Q não pode mudar mais e, como tal, $I = \frac{dQ}{dt} = 0$ (estado estacionário). Nesse estado, $I = 0$, mas ΔV pode ter qualquer valor e sinal $\Longrightarrow$ O condensador é equivalente a um circuito Aberto.

A passagem do estado inicial para o estado estacionário é o estado transitório, que será estudado no capítulo 10.

Exemplo. No instante inicial a carga no condensador é $18\,\mu C$ (positiva em C). Determine (a) as correntes iniciais nas resistências e (b) a carga no condensador e as correntes nas resistências, no estado estacionário

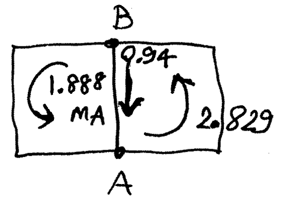


Resolução. (a) circuito equivalente em t_0 $\left(\Delta V_0 = \frac{18}{2} = 9V\right)$

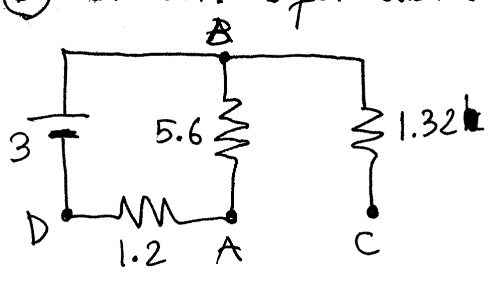


$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

```
I : list_matrix_entries(invert(matrix([6.8,-5.6],
        [-5.6,6.92])).[3,-9]);
  ↳  [-1.888,-2.829]
I12: I[1]-I[2];   →  0.940
```



(b) circuito equivalente no estado estacionário $(t \to \infty)$



$$I_{BA} = I_{AD} = \frac{3}{5.6+1.2} = 0.4412$$

$I_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; V_B = V_C$

arbitrando $V_D = 0$,

$\Rightarrow V_B = V_D + 3 = 3V$, $V_C = 3V$, $V_A = V_B - 5.6 I_{BA} = 0.5294V$

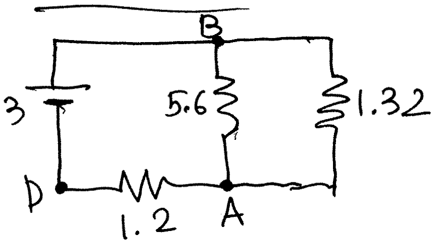
$\Rightarrow Q = C(V_C - V_A) = 2(3 - 0.5294) = 4.941\,\mu C$ (positiva em C)

MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

Num circuito com n fontes, resolvem-se n circuitos auxiliares, cada um com apenas uma das n fontes e as outras n-1 em curto-circuito. No fim somam-se algébricamente as correntes dos n circuitos auxiliares para obter as correntes do circuito.

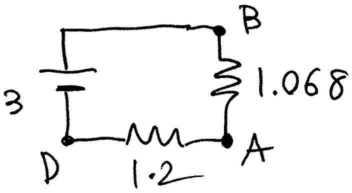
Exemplo. Resolução da alínea ⓐ no exemplo anterior, pelo método de sobreposição.

Circuito 1



$$5.6 \parallel 1.32 = \frac{5.6 \times 1.32}{5.6 + 1.32} = 1.068 \quad (\mathrm{k\Omega})$$

$\Leftrightarrow$



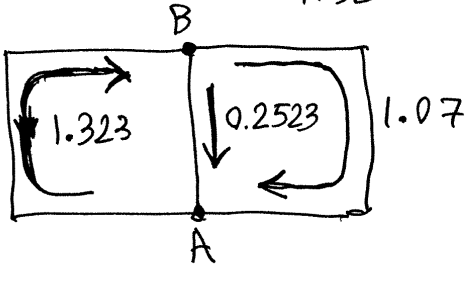
$$I_{BA} = I_{AD} = \frac{3}{1.2 + 1.068} = 1.323 \text{ mA}$$

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = 1.068 \times 1.323 = 1.413 \text{ V}$$

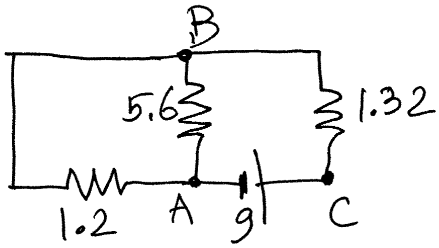
correntes nas resistências entre A e B:

$$I_1 = \frac{V_B - V_A}{5.6} = 0.2523 \qquad I_2 = \frac{V_B - V_A}{1.32} = 1.07$$

Correntes nos ramos do circuito: (em mA)

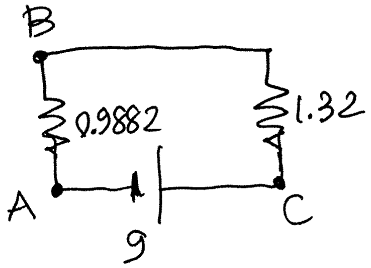


Circuito 2



$$5.6 \parallel 1.2 = \frac{5.6 \times 1.2}{5.6 + 1.2} = 0.9882$$

$\Leftrightarrow$



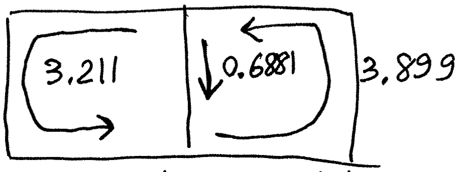
$$I_{CB} = I_{BA} = \frac{9}{0.9882 + 1.32}$$

$$= 3.899 \text{ mA}$$

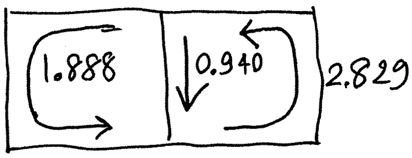
$$V_B - V_A = 3.899 \times 0.9882 = 3.853$$

$$I_1 = \frac{3.853}{1.2} = 3.211 \qquad I_2 = \frac{3.853}{5.6} = 0.6881$$

Correntes nos ramos do circuito (em mA):



somando às correntes do circuito 1, obtém-se:

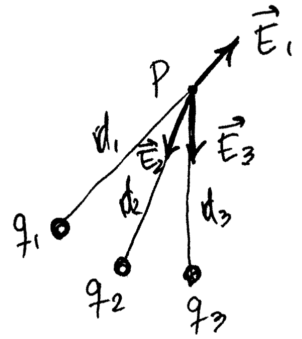


que é o mesmo resultado já obtido pelo método das malhas

geralmente, este método não é útil quando há mais do que duas malhas, porque em alguns dos circuitos auxiliares não é possível obter a resistência equivalente por simples combinações em série e paralelo, sendo necessário usar o método das malhas.

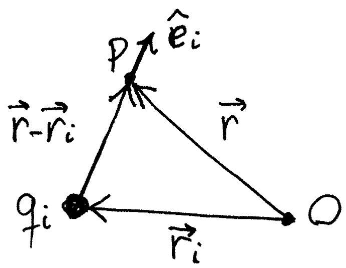
Aula 11. 22-10-2015

CAMPO ELÉTRICO



$$E_i(P) = \frac{k|q_i|}{d_i^2}$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$



$\vec{r}$: posição de P

$\vec{r}_i$: posição de q_i

$\vec{e}_i$: versor de q_i até P.

$$\Rightarrow \quad d_i = |\vec{r}-\vec{r}_i| \qquad \hat{e}_i = \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{k q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

campo total: $$\vec{E}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

componentes cartesianas

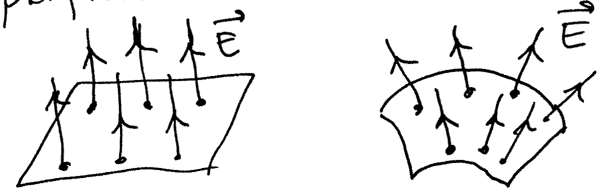
$$E_x = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(x-x_i)}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(y-y_i)}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(z-z_i)}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}$$

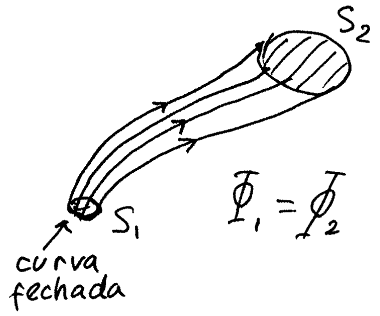
FLUXO ELÉTRICO

Superfícies perpendiculares a $\vec{E}$, e E constante na superfície



fluxo $= \Phi = EA$ (A = área da superfície)

Por analogia com um fluido incompressível, se E fosse a velocidade do fluido, Φ seria o volume de fluido que passa pela superfície, por unidade de tempo.

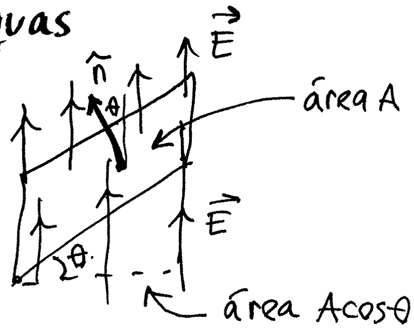


tubo de fluxo: volume delimitado pelas linhas de campo que passam por uma curva fechada, numa região onde não existem cargas.

O fluxo é o mesmo em qualquer secção transversal do tubo, $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_i$, independentemente de que sejam perpendiculares a $\vec{E}$ ou não e independentemente de que E seja constante ou não.

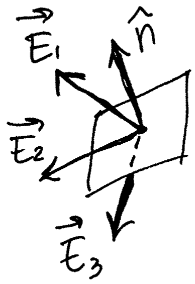
fluxo em superfícies oblíquas

o fluxo na área A é o mesmo que na área $A\cos\theta$, porque fazem parte dum tubo de fluxo



$$\Rightarrow \Phi = EA\cos\theta = (\vec{E}\cdot\hat{n})A$$

$\hat{n}$ = versor normal à superfície de área A.



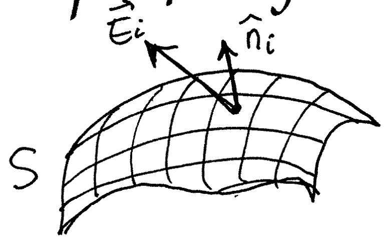
3 casos:

(1) $\vec{E}_1 \cdot \hat{n} > 0 \Rightarrow$ fluxo positivo

(2) $\vec{E}_2 \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow$ fluxo nulo

(3) $\vec{E}_3 \cdot \hat{n} < 0 \Rightarrow$ fluxo negativo

Definição geral do fluxo



Divide-se a superfície S em n pedaços pequenos com versor normal $\hat{n}_i$

$$\Rightarrow \quad \Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta A_i$$

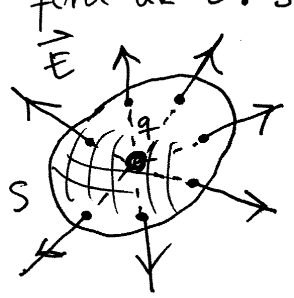
$\vec{E}_i$ = campo na pedaço de superfície com área ΔA_i

No limite $n \to \infty$,

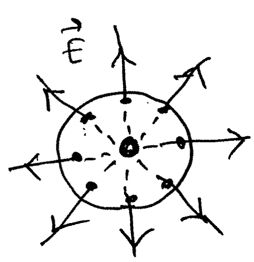
$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA \qquad \text{(integral de superfície)}$$

LEI DE GAUSS

Fluxo de uma carga pontual q, através de uma superfície fechada S. A carga pode estar ou dentro, o fora de S. Se estiver de fora:



o fluxo é o mesmo que numa esfera com centro em q:



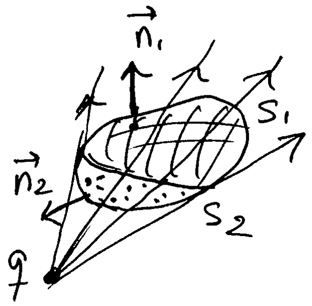
Porque as duas superfícies formam um tubo de fluxo

Na superfície da esfera de raio R, $\vec{E}$ é perpendicular e tem módulo constante:

$$E = \frac{k|q|}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \left(\frac{kq}{R^2}\right)(4\pi R^2) = 4\pi k q$$

Arbitrou-se sinal positivo, se $q>0$, ou negativo se $q<0$. Ou seja, calculou-se o fluxo que sai da superfície S.



Se a carga estiver fora de S, as linhas de campo que tocam S num único ponto dividem S em duas partes S_1 e S_2. $\Phi_1 = -\Phi_2$, porque fazem parte do mesmo tubo de fluxo, mas os versores normais, para fora, $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ verificam:

$$\vec{E}\cdot\hat{n}_1 > 0 \quad , \quad \vec{E}\cdot\hat{n}_2 < 0$$

fluxo total em S: $\quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$

Se houver n cargas pontuais, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, as que estão fora de S não produzem fluxo, mas as que estão no interior de S produzem $\Phi = 4\pi k q_i$.

Concluí-se então que: $\boxed{\Phi(S\ \text{fechada}) = 4\pi k\, q_{int}}$

q_{int} = carga interna total na superfície fechada.

Aula 12. 23-10-2015

CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO

Superfície gaussiana: $\vec{E}\cdot\hat{n} = E$ (constante), ou nulo, em toda a superfície fechada.

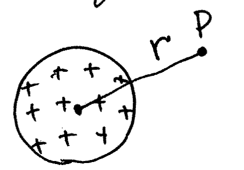
Se existir uma superfície gaussiana,

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi = EA \\ \Phi = 4\pi q_{int} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{4\pi q_{int}}{A}$$

(A = área da parte onde $E \neq 0$)

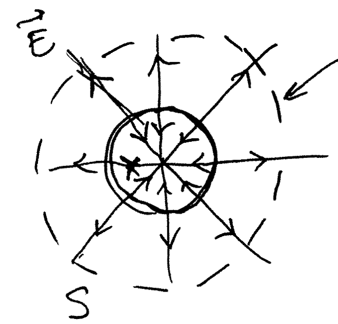
O problema é que só existem superfícies gaussianas nos sistemas com simetria

1. Simetria esférica. Esfera de raio R, com carga Q distribuída uniformemente na superfície.



Rodando a esfera à volta do seu centro, o campo em qualquer ponto P não deve mudar, devido à simetria do sistema

$\Rightarrow$ As linhas de campo são necessariamente radiais e E depende unicamente da distância r até o centro da esfera.



superfície gaussiana S = qualquer esfera, de raio r, concêntrica com a esfera de raio R.

(i) $r > R \Rightarrow q_{int} = Q$

(ii) $r < R \Rightarrow q_{int} = 0$

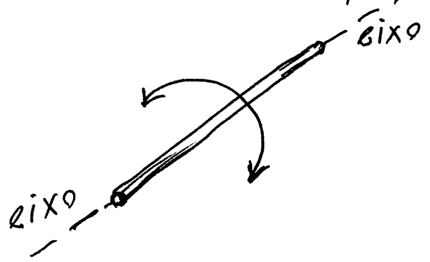
$A_S = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{4\pi q_{int}}{A_s} = \begin{cases} \dfrac{4\pi k Q}{4\pi r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

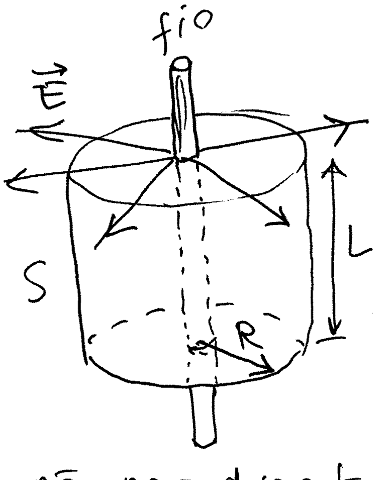
$$\boxed{E(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}}$$

(o mesmo resultado já encontrado por integração de $d\vec{E}$)

2. Simetria cilíndrica. Fio retilíneo, infinito, com carga linear λ constante (λ = carga por unidade de comprimento).



Rodando o fio à volta do seu eixo, o campo deve permanecer igual em todos os pontos. $\Rightarrow$ As linhas de campo devem ser perpendiculares ao fio e E pode depender apenas da distância R até o fio

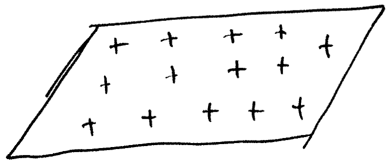


Superfícies gaussianas S = cilindros com eixo no fio, raio R e altura L.
Existe fluxo na parede curva do cilindro, mas não nas duas tampas

$$\Rightarrow A_S = 2\pi R L \qquad q_{int} = \lambda L$$

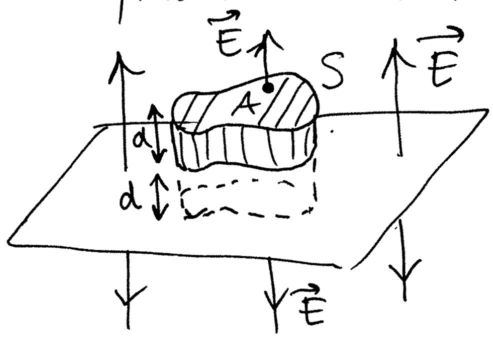
$$E = \frac{4\pi k q_{int}}{A_S} = \frac{4\pi k \lambda L}{2\pi R L} \Rightarrow \boxed{E_{fio} = \frac{2k\lambda}{R}}$$

3. Simetria plana. Campo infinito, com carga superficial σ constante (carga por unidade de área).



O campo na deve mudar quando o plano se desloca ou roda sobre si.

$\Rightarrow$ As linhas de campo devem ser perpendiculares ao plano e E pode apenas depender da distância d até o plano



Superfícies gaussianas S= cilindros com duas tampas de área A (qualquer forma), paralelas ao plano, aos dois lados deste e cada uma a uma distância d do plano.

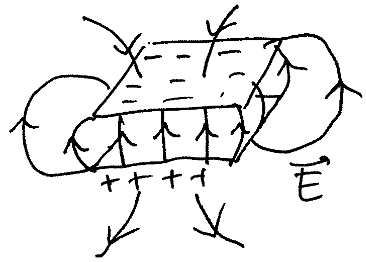
Existe fluxo apenas nas duas tampas do cilindro, e o sinal do fluxo é o mesmo nas duas tampas

$$\Rightarrow A_S = 2A \qquad q_{int} = \sigma A$$

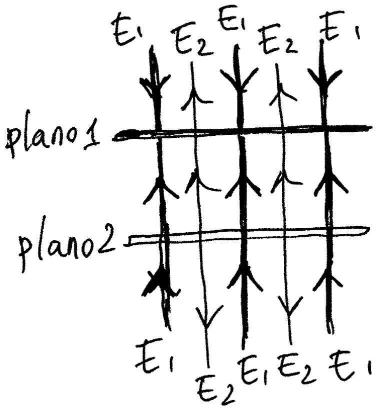
$$E = \frac{4\pi k q_{int}}{A_S} = \frac{4\pi k \sigma A}{2A} = 2\pi k \sigma$$

$$\boxed{E_{plano} = 2\pi k \sigma} \quad \text{constante!!!}$$

Condensadores planos.



se a distância entre as armaduras, d, for muito menor que o tamanho do condensador, é uma boa aproximação admitir dois planos infinitos.



O módulo dos dois campos são iguais $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = 2\pi k|\sigma|$

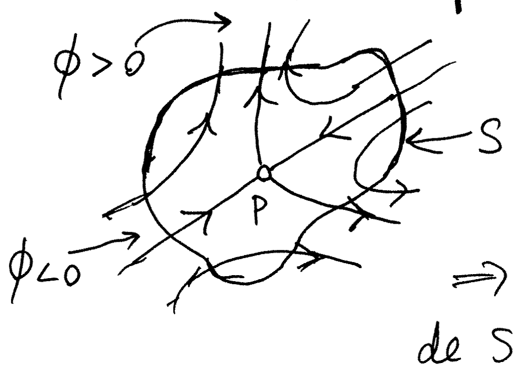
$$= \frac{2\pi k|Q|}{A}$$

Fora do condensador, os dois campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ anulam-se.

dentro do condensador, somam-se

$$\Rightarrow E_{\text{cond. plano}} = \begin{cases} 0, & \text{fora do condensador} \\ \dfrac{4\pi k|Q|}{A}, & \text{dentro do condens.} \end{cases}$$

Pontos de campo nulo.



numa superfície fechada S, à volta do ponto de campo nulo, $\Phi_S = 0$, porque não existe carga.

$\Rightarrow$ Há fluxo positivo em partes de S e negativo em outras partes.

Aula 13 . 29-10-2015

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

seja: $P=(x,y,z)$, $Q=(x+\Delta x, y, z)$, percurso de integração reto, entre P e Q $\Rightarrow$ $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}\cdot d\vec{r} = E_x\,dx$

$$\Rightarrow V(x,y,z) - V(x+\Delta x, y, z) = \int_x^{x+\Delta x} E_x\,dx = \overline{E}_x\,\Delta x$$

valor médio

no limite $\Delta x \to 0$, $\overline{E}_x$ é igual a E_x no ponto P.

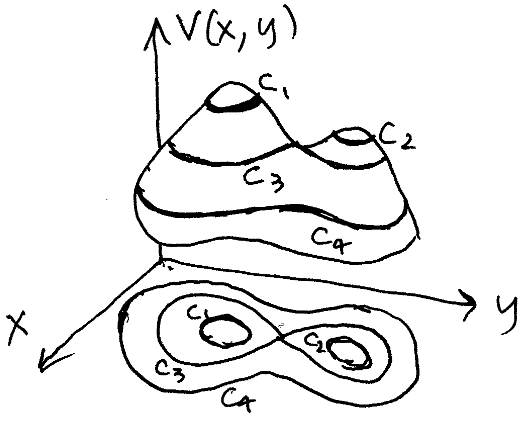
$$\Rightarrow E_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{V(x,y,z) - V(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

fazendo o mesmo com $d\vec{r} = dy\,\hat{\jmath}$ e $d\vec{r} = dz\,\hat{k}$, conclui-se:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -\vec{\nabla} V}$$

O campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial.

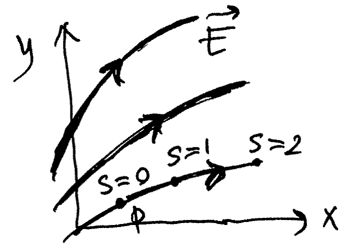
Potencial em duas dimensões , $V(x,y)$



C_1, C_2, C_3, e C_4 são CURVAS EQUIPOTENCIAIS (curvas de nível), onde o potencial é constante.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Sistemas dinâmicos. Espaço de fase → plano (x,y)



cada ponto (x,y) é considerado um "estado" que se desloca em função do comprimento de arco s da respetiva linha de campo.

Equações de evolução:
(SISTEMA GRADIENTE)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

equação das linhas de campo: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \dfrac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial x}}$

matriz jacobiana

$$J_E(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} & \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} & \dfrac{\partial E_y}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix} = -H_V$$

H_V = matriz hessiana de V (jacobiana do gradiente)

V é função contínua (se não fosse, $\vec{E}$ não estave definido)

⇒ H_V é matriz simétrica

⇒ o sistema dinâmico do campo $\vec{E}$ tem unicamente <u>valores próprios reais</u>, ou seja, unicamente nós ou pontos de sela.

$V(x,y)$ pode ser considerada função hamiltoniana de um outro sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

(SISTEMA CONSERVATIVO)
OU HAMILTONIANO

e as curvas de evolução desse sistema são então as curvas equipotenciais, definidas pela equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial y}}$$

assim sendo, o declive das curvas equipotenciais é igual a menos o inverso do declive das linhas de campo elétrico:

As curvas equipotenciais são perpendiculares às linhas de campo elétrico.

matriz jacobiana:

$$J_V(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \implies \text{traço}(J_V) = 0$$

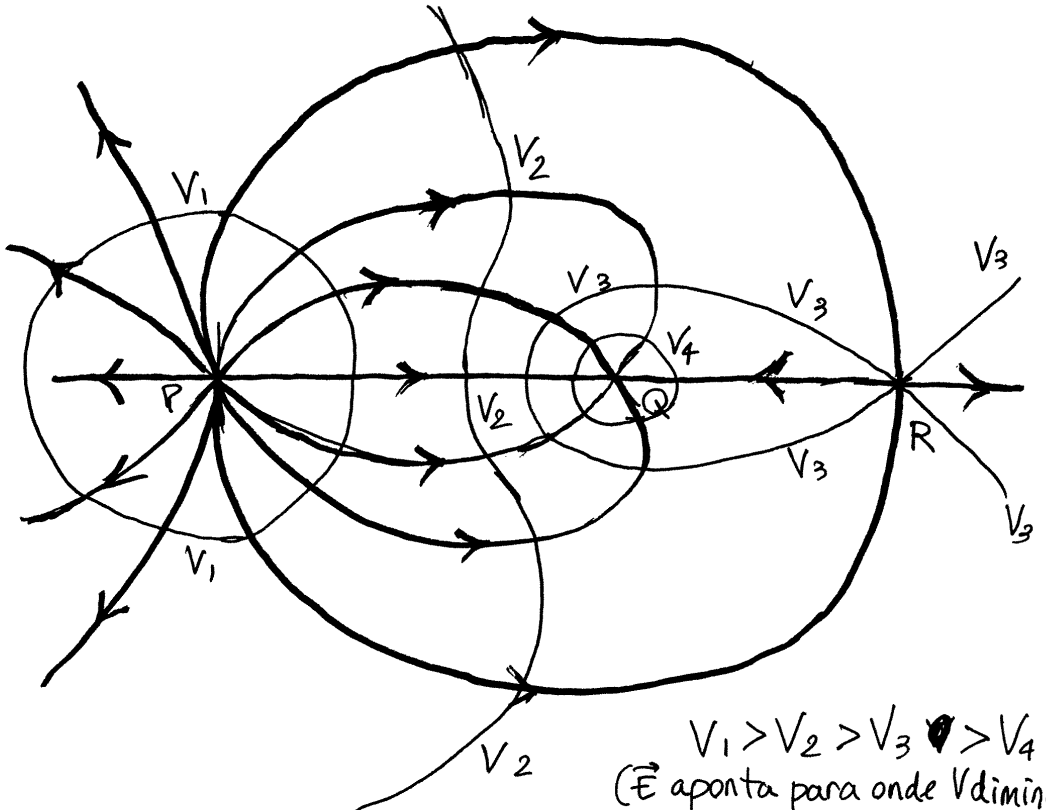
O sistema dinâmico das curvas equipotencias tem apenas valores próprios ~~complexos~~, imaginários, ou 2 reais $\lambda_1 = -\lambda_2$

$\implies$ Unicamente centros ou pontos de sela.

PONTOS CRÍTICOS

Pontos de equilíbrio dos dois sistemas dinâmicos
(sistema hamiltoniano com função hamiltoniana $V(x,y)$ e
sistema gradiente $-\vec{\nabla} V$)

Existem 3 tipos de pontos críticos, ilustrados no seguinte exemplo.



$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$
($\vec{E}$ aponta para onde V diminui)

P : nó repulsivo de $\vec{E}$ (nuvem de carga positiva) e centro de V.

Q : nó atrativo de $\vec{E}$ (nuvem de carga negativa) e centro de V.

R: ponto de sela de $\vec{E}$ e V (sem carga, com campo $\vec{E}$ nulo e potencial V_3, diferente de 0)

Aula 14. 30-10-2015

Exemplo. Determine quais dos seguintes campos vetoriais podem ser campos elétricos e, caso afirmativo, encontre o potencial.

(a) $2x\hat{\imath} + xy\hat{\jmath}$ (b) $(2x+y)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$

Resolução. (a) [Ex, Ey]: [2*x, x*y]$

JE: jacobian([Ex, Ey], [x, y]); $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$

não pode ser campo elétrico, porque a matriz não é simétrica.

(b) [Ex, Ey]: [2*x+y, x]$

JE: jacobian([Ex, Ey], [x, y]); $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

sim pode ser campo elétrico. (é campo conservativo).

solve([Ex, Ey], [x, y]): $\rightarrow$ [[x=0, y=0]]

$\Rightarrow$ um único ponto crítico, na origem.

eigenvectors(JE); $\rightarrow$ [[[1-√2, 1+√2], [1,1]], [[1, -1-√2]], [[1, √2-1]]]]

$\Rightarrow$ a origem é ponto de sela (campo nulo).

Cálculo de $V(x,y)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -2x-y \quad \Rightarrow \quad V = \int(-2x-y)\,dx$$ admitindo y constante

$$V = -x^2 - xy + f(y) \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -x + f' = -E_y = -x$$

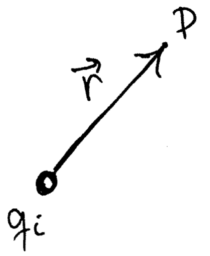
$\Rightarrow f' = 0 \quad \Rightarrow f = \text{constante}$, pode ser zero.

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y) = -x^2 - xy}$$

gráfico das equipotenciais e linhas de campo:

```
ploteq(-x^2-x*y);
```

POTENCIAL DE CARGAS PONTUAIS



Se q_i está na origem

$$\vec{E}_i = \frac{kq_i}{r^2}\hat{r}$$

percurso radial

$$V_i(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{kq_i}{r^2}\,dr$$

$$\Rightarrow V_i(\vec{r}) = \frac{kq_i}{r}$$

Se a carga na está na origem mas na posição $\vec{r}_i$,

$$V_i(\vec{r}) = \frac{k\,q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

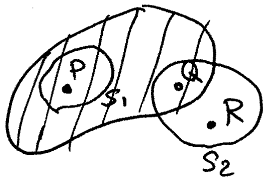
Se houver n cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$,

$$V(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\,q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2-(z-z_i)^2}}$$

CAMPO E POTENCIAL NOS CONDUTORES

No interior de um condutor isolado, $\vec{E} = \vec{0}$, porque se assim não fosse, existia corrente no condutor.

Condutor em equilíbrio



$E_P = 0$, $E_Q = 0$, E_R não tem de ser nulo.

$\Rightarrow$ O fluxo em qualquer superfície fechada dentro do condutor (S_1) é nulo.

$\Rightarrow$ Não existe carga em nenhum ponto no interior. $q_P = q_Q = 0$

Numa superfície fechada que sai fora do condutor (S_2), sim pode existir fluxo, ou seja, na superfície do condutor sim pode haver carga.

> *A carga num condutor em equilíbrio distribui-se sobre a sua superfície.*

Dentro do condutor:

$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{num percurso dentro do}\\ \text{condutor, } \vec{E} = \vec{0}\end{array}\right)$$

> *O potencial é constante em todos os pontos num condutor em equilíbrio (pontos no interior e na superfície.*

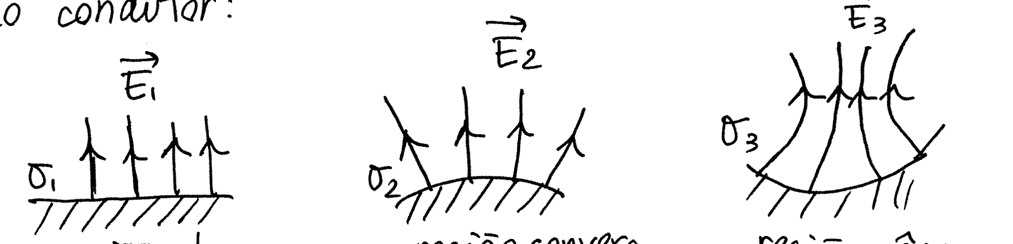
Assim sendo, a própria superfície do condutor é uma superfície equipotencial e conclui-se que:

> *O campo elétrico fora do condutor é perpendicular à superfície do condutor (ou nulo)*

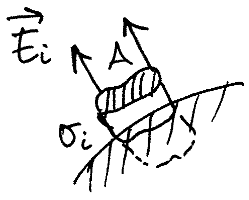
Entre dois pontos na superfície do condutor,

$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\vec{E} \text{ é perpendicular a } d\vec{r}\\ \text{num percurso sobre a}\\ \text{superfície.}\end{array}\right)$$

Considerem-se 3 regiões diferentes da superfície do condutor:



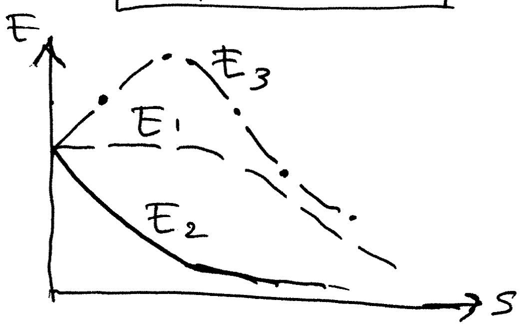
região plana região convexa região côncava



em qualquer região existe uma superfície gaussiana: cilindro com tampas de área A, muito proximas da superfície, paralelas a ela, e nos dois lados da superf.

$$\Rightarrow \phi_s = E_{sup} A = 4\pi k q_i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_{sup} = 4\pi k \sigma_i}$$

Se as cargas σ_1, σ_2 e σ_3 fossem iguais os 3 campos seriam como no gráfico.

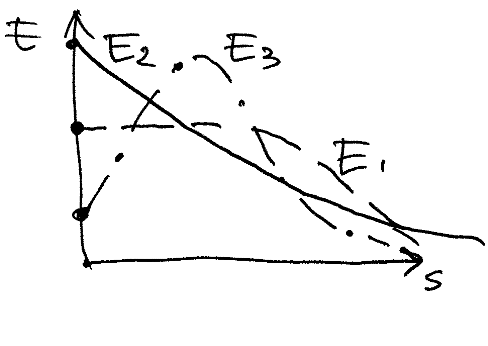


E como o potencial é a área sob cada curva,

$$\Longrightarrow V_3 > V_1 > V_2$$

mas como o potencial deve ser igual nas 3 regiões conclui-se que:

$$\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$$



A carga superficial e o campo são mais intensos nas pontas do condutor (regiões mais convexas).

PODER DAS PONTAS

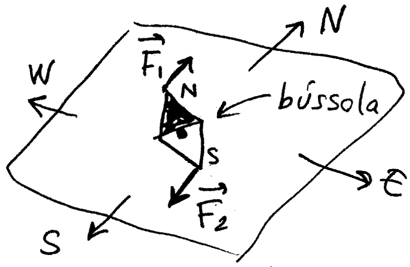
Aula 15. 12-11-2015

FORÇA MAGNÉTICA

força entre ímanes (rochas metálicas das minas de MAGNÉSIA na Grécia antiga).

atrativa entre pólos opostos e repulsiva entre pólos iguais.

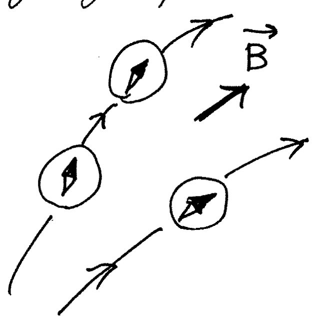
A própria Terra é um íman gigante que produz forças nos polos de uma bússola (agulha magnético)



As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ têm aproximadamente o mesmo módulo, constituindo um binário que faz rodar a bússola até ~~apontam~~ o seu polo norte apontar na direção do polo norte <u>geográfico</u> (polo sul magnético da Terra).

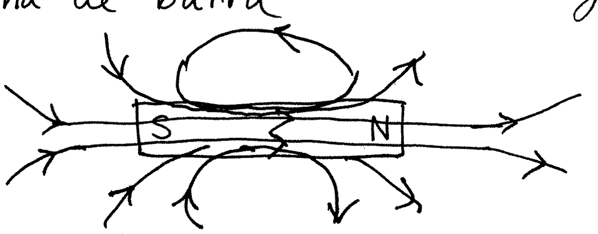
CAMPO MAGNÉTICO

campo vetorial na direção em que se orienta a bússola e no sentido de sul magnético para norte magnético.



$\vec{B}(x,y,z)$ = campo magnético.

Exemplo: campo de um íman em forma de barra



Qualquer íman tem sempre um polo norte e um polo sul.

íma original   íman partido em dois

Ou seja, não existem MONOPOLOS magnéticos. O campo $\vec{B}$ não tem nenhum nó (pontos onde as linhas de campo entram ou saem em todas as direções) nem ~~focos~~; unicamente centros ou pontos de sela:

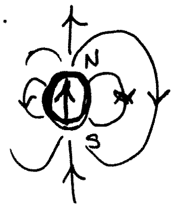
$$\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}_{\text{valores próprios}} = 0$$

(o traço da matriz jacobiana do campo $\vec{B}$ é nula.)

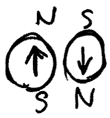
FONTES DO CAMPO ~~ELÉTRICO~~ MAGNÉTICO

(1) Spin. Cada partícula elementar é um pequeno íman.

eletrão

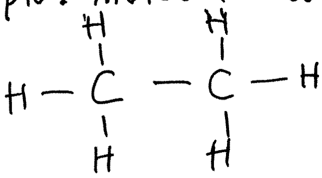


dois eletrões juntam-se com os seus spins em sentidos opostos:



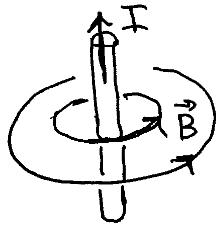
(enlace covalente)

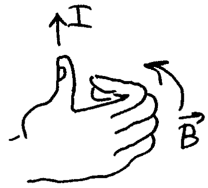
exemplo: molécula de etano (C_2H_6)



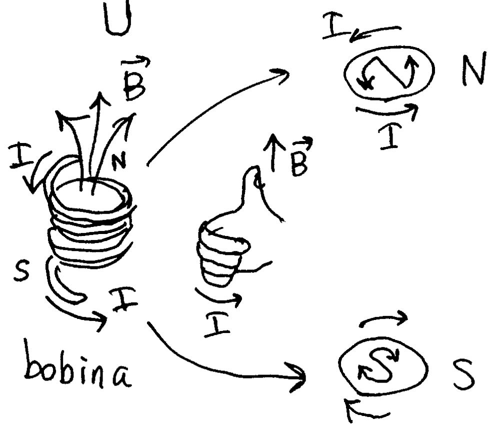
cada barra representa dois eletrões ligados, com os seus spins em sentidos opostos (um dos eletrões de valência de um átomo ligado a um eletrão de valência do átomo vizinho).

② Corrente elétrica. À volta de um fio com corrente I, cria-se um campo $\vec{B}$ com linhas de campo circulares, com centro no fio, e seguindo o sentido da regra da mão direita.



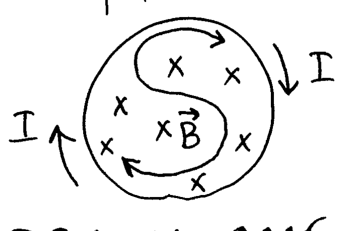


Numa bobina (fio enrolado) cria-se um campo $\vec{B}$ semelhante ao de uma barra, com polos N e S nos dois extremos da bobina.

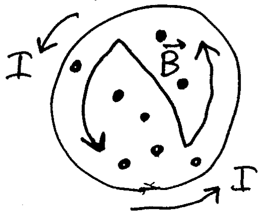


Um campo $\vec{B}$ para lá ou para cá da ~~[illegible]~~ figura, representa-se por meio de letras x ou de pontos

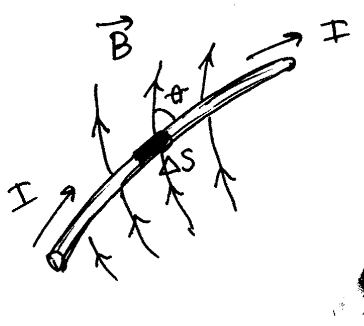
polo sul



polo norte



FORÇA MAGNÉTICA EM CABOS COM CORRENTE



A força num pedaço de cabo, de comprimento Δs, é

$$|\Delta\vec{F}| = I B \sin\theta \, \Delta s$$

onde B é uma constante, que define a intensidade do campo.

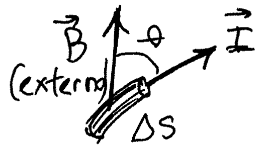
⇒ unidade SI de campo magnético:

$$1\,\frac{N}{A\cdot m} = 1\,\frac{N\cdot s}{C\cdot m} = 1\,T \quad \text{(um tesla)}$$

observe-se que: $1\,T = 1\,\dfrac{(N/C)}{(m/s)} = \dfrac{\text{campo elétrico}}{\text{velocidade}}$

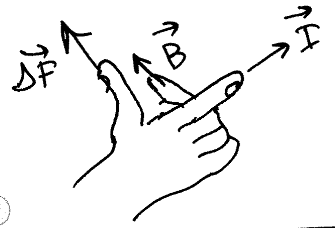
Um tesla é uma unidade muito elevada. Outra unidade usada frequentemente é o gauss (G)

$$1\,G = 10^{-4}\,T$$



módulo de $\Delta\vec{F}$ = $I B \Delta s \sin\theta$

direção de $\Delta\vec{F}$ = perpendicular ao plano de $\vec{I}$ e $\vec{B}$



sentido de $\Delta\vec{F}$ = regra da mão direita desde $\vec{I}$ até $\vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\,\Delta s}$$

A força total no segmento de fio entre os pontos P e Q é: $\vec{F} = \int_P^Q (\vec{I}\times\vec{B})\,ds$ (integral de linha ao longo do fio)

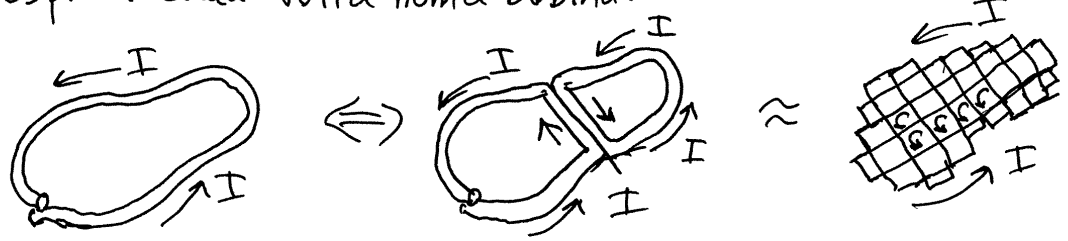
no caso particular em que $\vec{I}\times\vec{B}$ é constante,

$$\vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\,L \quad (L = \text{comprimento do fio})$$

Aula 16. 13-11-2015

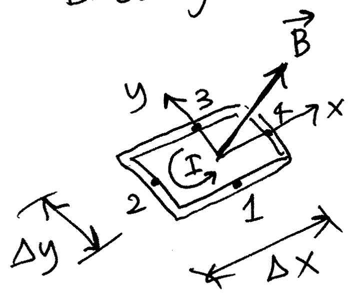
ESPIRAS E BOBINAS

espira: cada volta numa bobina.

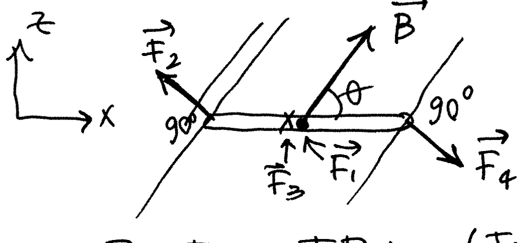


A força produzida por um campo $\vec{B}$ é a mesma que nas 2 espiras no lado direito, porque as forças nos fios vizinhos anulam-se. Dividindo várias vezes a espira, a força total é a soma das forças em muitas espiras retangulares infinitesimais.

<u>Espira retangular</u>, no plano xy e de forma que $\vec{B}$ esteja no plano xz:

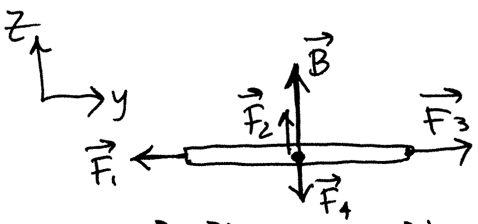


<u>vista frontal</u>



$F_2 = F_4 = IB\Delta y$ (I_2 e I_4 perpendicul. a $\vec{B}$)

<u>vista lateral</u>

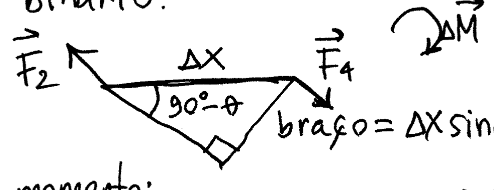


$\measuredangle(\vec{I}_1, \vec{B}) = \measuredangle(\vec{I}_3, \vec{B}) = \theta$

$F_1 = F_3 = IB\Delta X \sin\theta$

$\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ anulam-se

$\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ não produzem força resultante, mas produzem binário:

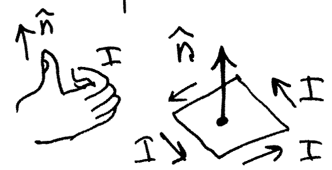


braço $= \Delta X \sin(90° - \theta)$

momento: $\Delta M = IB\Delta y \Delta X \sin(90° - \theta)$
$= IB\Delta A \sin(90° - \theta)$

$\Delta A = \Delta x \, \Delta y =$ área da espira.

O resultado de todas as forças na espira é então um binário com momento:



$$\Delta\vec{M} = I \Delta A (\hat{n} \times \vec{B})$$

versor normal no sentido da regra da mão direita segundo I. Faz ângulo $90^\circ - \theta$ com $\vec{B}$.

Na espira inicial, o momento é:

$$\vec{M} = I \iint (\hat{n} \times \vec{B}) \, dA$$

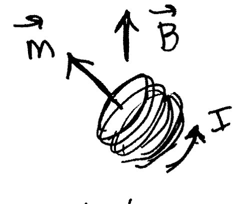
No caso de uma espira plana ($\hat{n}$ constante) e $\vec{B}$ constante,

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

onde

$$\boxed{\vec{m} = I A \hat{n}}$$

é o **momento magnético** da espira



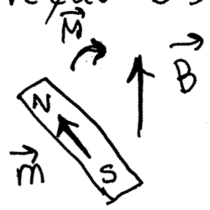
bobina

No caso de uma bobina com N espiras de área A, o momento magnético é:

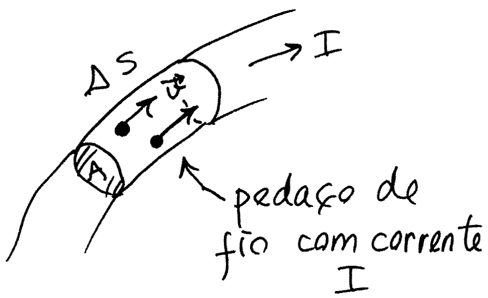
$$\vec{m}_{bobina} = N I A \hat{n}$$

e a bobina roda no sentido que faz $\vec{m}$ ~~apontar~~ rodar na direção e sentido de $\vec{B}$.

Um íman tem momento magnético a apontar do polo sul para o norte



FORÇA MAGNÉTICA SOBRE PARTÍCULAS



Num pedaço de fio de comprimento Δs há n cargas de condução, cada uma com carga q e velocidade média $\vec{v}$.

A carga total nesse pedaço é nq e o tempo que demora a passar por um ponto do fio é $\frac{\Delta s}{v}$
A corrente, carga sobre o tempo que demora a passar, é então

$$\vec{I} = \frac{nq}{\Delta s}\,\vec{v}$$

A força magnética produzida pelo campo $\vec{B}$ é:

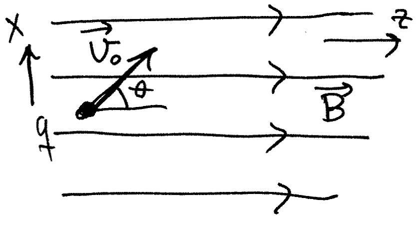
$$\vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\Delta s = nq\,(\vec{v}\times\vec{B})$$

conclui-se assim que sobre cada partícula atua uma força magnética:

$$\boxed{\vec{F}_m = q(\vec{v}\times\vec{B})}$$

(por ser perpendicular a $\vec{v}$, nunca altera o módulo de $\vec{v}$, apenas a direção)

Exemplo. Partícula com carga q e velocidade inicial $\vec{v}_0$, dentro de um campo $\vec{B}$ uniforme no sentido do eixo dos z.

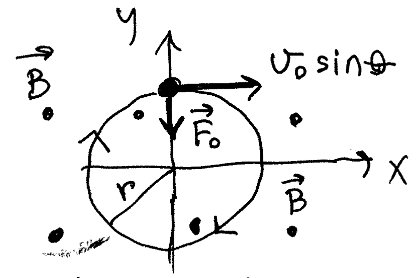


Escolhem-se x e y tal que:

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin\theta\,\hat{\imath} + v_0\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{F}_0 = q(\vec{v}_0 \times \vec{B}) = q v_0 B (\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{k}) \times \hat{k} = -q v_0 B \sin\theta$$

$\Rightarrow$ a componente z da velocidade, $v_0\cos\theta$, permanece constante. A projeção do movimento no plano xy é um movimento circular uniforme (força de módulo constante e perpendicular a $\vec{v}$)



(se $q>0$)
(sentido oposto se $q<0$)

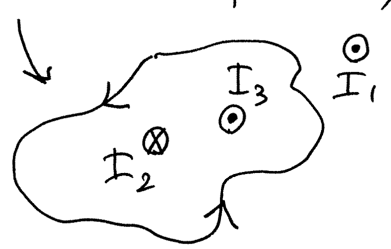
$$F = m\frac{v^2}{r}$$

$$|q| v_0 B \sin\theta = \frac{m(v_0\sin\theta)^2}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{m v_0 \sin\theta}{|q| B}}$$

LEI DE AMPÈRE

C = curva fechada, "orientada" (percorrida num sentido)

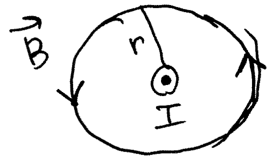


$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{int}}$$

$k_m = 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}$ (constante magnética)

I_{int} = soma algébrica das correntes através de C (neste caso, $I_3 - I_2$)

Campo de um fio com corrente I.



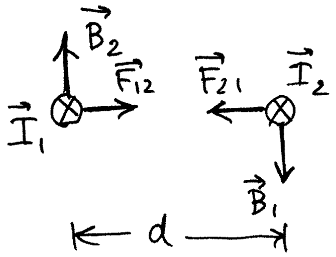
Escolhendo C igual a uma linha de campo, de raio r,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r B$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{fio} = \frac{2 k_m I}{r}}$$

Aula 17. 19-11-2015

FORÇA ENTRE FIOS RETOS PARALELOS



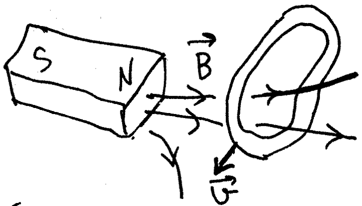
$$B_1 = \frac{2 k_m I_1}{d}$$

$$F_{12} = \frac{2 k_m I_1 I_2 L}{d} = F_{21}$$

se as correntes têm sentidos opostos, a força e repulsiva.

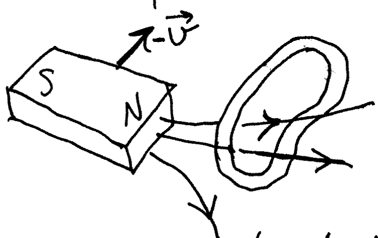
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Referencial 1



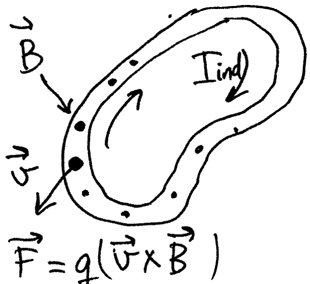
íman em repouso, espira com velocidade $\vec{v}$

Referencial 2



íman com velocidade $-\vec{v}$, espira em repouso

<u>Dentro da espira</u>



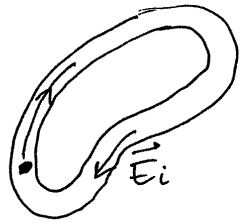
$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

origina <u>corrente induzida</u> I_{ind}

e **f.e.m. induzida**

$\mathcal{E}_i = R I_i$

↖ da espira



não há força magnética porque $\vec{v} = \vec{0}$, mas aparece campo induzido (elétrico) que explica a origem da corrente

$\vec{F} = q\vec{E}_i \quad \mathcal{E}_i = \oint E_i\, ds$

como a força deve ser igual nos dois referenciais,

$$q\vec{E}_i = q(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\boxed{\vec{E}_i = \vec{v}\times\vec{B}}$$

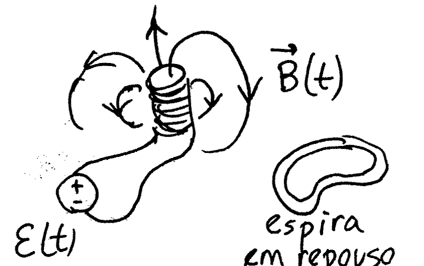
$\vec{E}_i$: no referencial com velocidade $\vec{v}$
$\vec{B}$: medido no referencial onde a espira tem velocidade $\vec{v}$

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\text{espira}} E_i ds = \oint_{\text{espira}} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$

como, em geral, $\mathcal{E}_i \neq 0$, $\Rightarrow$ $\vec{E}_i$ não é conservativo

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ são duas manifestações do mesmo campo, eletromagnético, em diferentes referenciais.

CAMPO MAGNÉTICO VARIÁVEL



eletroíman ligado a uma fonte com f.e.m. variável, $\mathcal{E}(t)$

Na espira, as linhas de campo deslocam-se e é equivalente a que o íman se desloca-se com velocidade $\vec{v}$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_i = \oint_{\text{espira}} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r} = \iint_{\substack{\text{área}\\ \text{espira}}} \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, dA$$

(teorema de Stokes)

no referencial que se desloca com as linhas de campo.

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_i = -\iint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, dA$$

A variação da área dA da espira também é equivalente a um deslocamento das linhas de campo e origina f.e.m. induzida. Em geral,

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt}}$$

lei de Faraday

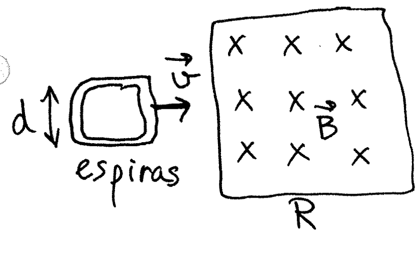
fluxo magnético

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA$$

O sinal negativo interpreta-se pela **lei de Lenz**

> A força eletromotriz induzida e a corrente induzida são no sentido do campo elétrico induzido e a corrente induzida produz campo magnético induzido que contraria a variação do fluxo magnético externo.

Exemplo 1



Bobina a atravessar uma região R, com campo $\vec{B}$ uniforme, com velocidade $\vec{v}$ constante e perpendicular a $\vec{B}$

gráfico do fluxo magnético ψ através da bobina:

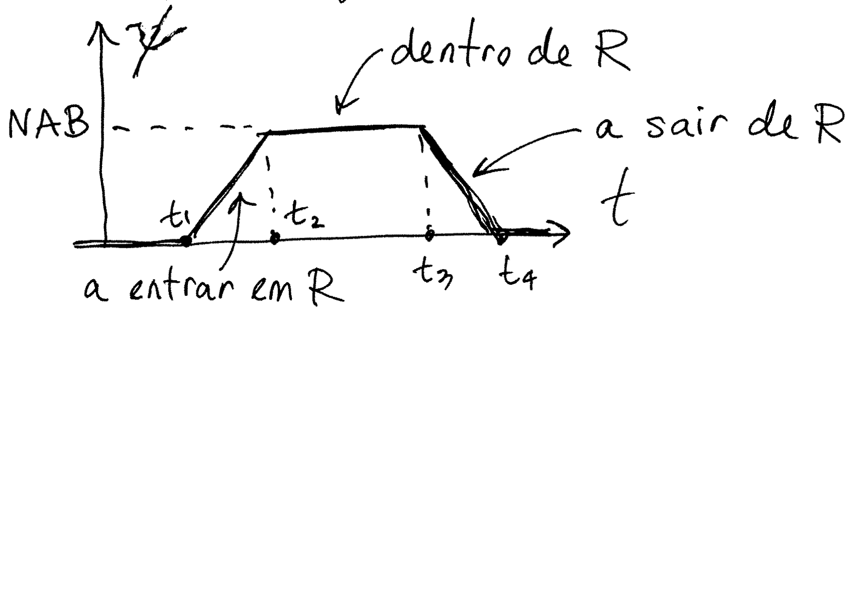
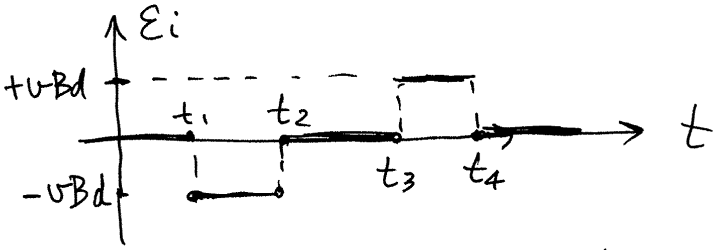
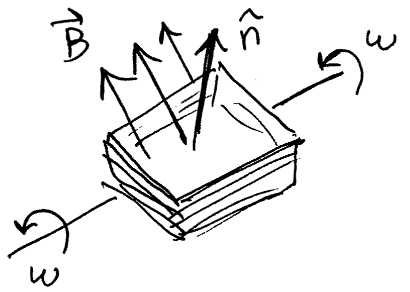


Gráfico da f.e.m. induzida



Exemplo 2. Alternador (fonte de tensão alternada)



Bobina a rodar, com velocidade angular ω constante, num campo magnético $\vec{B}$ uniforme e constante, perpendicular ao eixo de rotação

fluxo magnético: $\Psi = \iint\limits_{\text{bobina}} (\vec{B}\cdot\hat{n})\, dA = NBA\cos\theta$

(N = número de espiras; A = área de cada espira)

$\theta = \omega t + \varphi$ ← ângulo incial

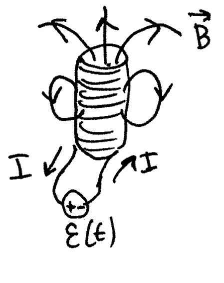
$$\Longrightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -NBA(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = NBA\omega\sin(\omega t + \varphi)}$$

tensão alternada com valor máximo $NBA\omega$ e frequência angular ω, igual à velocidade angular da bobina

Aula 18. 20-11-2015

AUTO-INDUÇÃO



Fluxo magnético através da bobina:

$$\Psi = N \iint_A (\vec{B}\cdot\hat{n})\,dA = N\overline{B}_n A$$

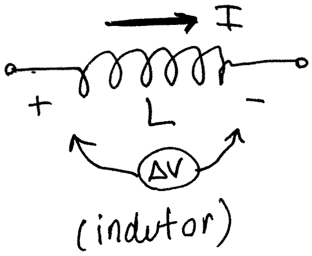
valor médio da componente normal de $\vec{B}$

$\vec{B}$ é diretamente proporcional à corrente I e ao número de espiras: $\Rightarrow \overline{B}_n = C N I$ (C = constante)

$\Psi = C A N^2 I$ $\quad \boxed{L = C A N^2}$ é uma constante própria de cada bobina, chamada **INDUTÂNCIA**

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

O efeito da auto-indução representa-se nos diagramas de circuito assim:



$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt}$$

se I aumenta, ΔV contraria a corrente. Se I diminui, ΔV reforça a corrente.

L opoe-se às mudanças bruscas da corrente.

<u>Unidade SI de indutância</u>

$$1\ \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = 1\ \text{H} \quad \text{um henry}$$

Os indutores armazenam energia (no campo magnético) que pode ser reutilizada.

Potência absorvida: $P = I(-\Delta V) = L I \frac{dI}{dt}$

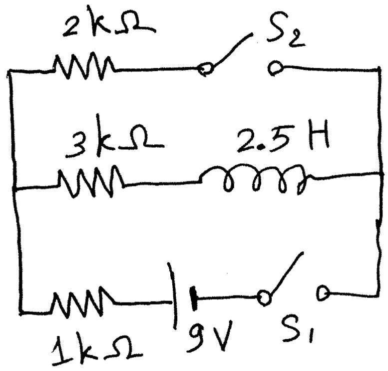
energia armazenada: $U = \int_0^t P\,dt = \int_0^I L I\, dI$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} L I^2}$$

Tal como os condensadores, podem ser elementos passivos ou ativos num circuito.

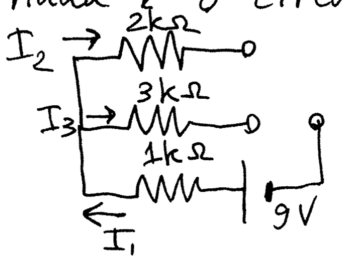
DISPOSITIVO	Condensador	Indutor
diagrama	C	L
equações	$\Delta V = \frac{Q}{C}$ $U = \frac{1}{2} C \Delta V$	$\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$ $U = \frac{1}{2} L I^2$
equivalente em t_0, se $U_0 \neq 0$	$\mathcal{E} = Q_0/C$ $I \to$ qualquer valor	I_0 (fonte de corrente) $\Delta V \to$ qualquer valor
equivalente em t_0, se $U_0 = 0$	curto-circuito $\Delta V = 0$, I qualquer	circuito aberto $I = 0$, ΔV qualquer (se $\Delta V \neq 0$)
equivalente em $t \to \infty$ num circuito de corrente contínua (estado estacionário)	circuito aberto, $I_f = 0$, ΔV_f qualquer $Q_f = C \Delta V_f$ $U_f = \frac{1}{2} C \Delta V_f$	curto-circuito $\Delta V_f = 0$, I_f qualquer $U_f = 0$

Exemplo.



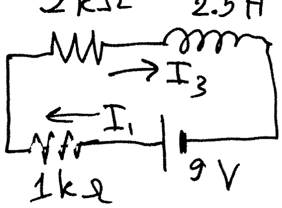
Num instante t_1 fecha-se o interruptor S_1 e num instante t_2, muito tempo após t_1, fecha-se o interruptor S_2. Determine a intensidade das correntes nas 3 resistências em t_1, t_2 e $t \to \infty$ e a energia no indutor em t_2.

<u>Resolução</u>. Em t_1 o indutor não tem energia armazenada e o circuito equivalente é:



$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$

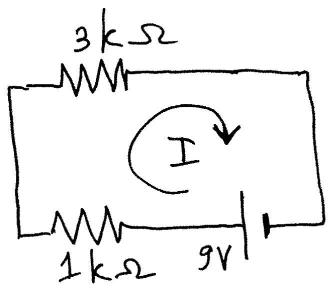
num instante t, $t_1 < t < t_2$, o circuito é:



$$I_1 = I_3 \neq 0$$

I_1 e I_3 aumentam gradualmente até o indutor atingir o estado estacionário, em que I_3 permanece constante e o indutor é equivalente a um curto-circuito.

em $t \to t_2^-$ (indutor em estado estacionário mas S_2 ainda aberto)

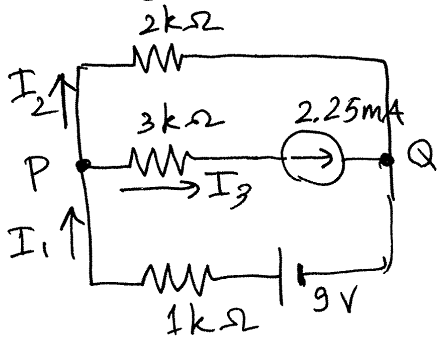


$$I = \frac{9}{4}\,\text{mA} = 2.25\,\text{mA}$$

$$I_1 = I_3 = 2.25\,\text{mA}$$

$$I_2 = 0$$

em t_2:



$I_3 = 2.25\,\text{mA}$

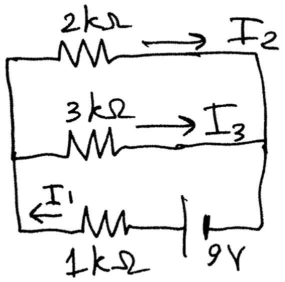
$V_P - V_Q = 2 I_2$ (ramo superior)

$V_P - V_Q = 9 - I_1$ (ramo inferior)

nó P: $I_1 = I_2 + 2.25$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2I_2 = 9 - I_1 \\ I_1 = I_2 + 2.25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 2.25 \\ I_1 = 4.5 \end{cases} \quad U = \tfrac{1}{2} 2.5 \times 2.25^2 = 6.33\mu$$

em $t \to \infty$:



$$I_1 = \frac{9}{1 + \frac{2\times 3}{2+3}} = \frac{45}{11} = 4.09\,\text{mA}$$

$$I_2 = \frac{3}{5} I_1 = \frac{27}{11} = 2.45\,\text{mA}$$

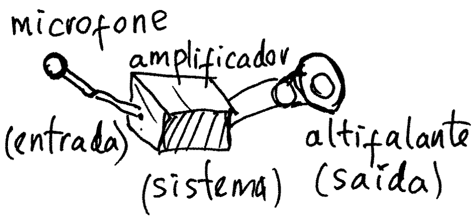
$$I_3 = \frac{2}{5} I_1 = \frac{18}{11} = 1.64\,\text{mA}$$

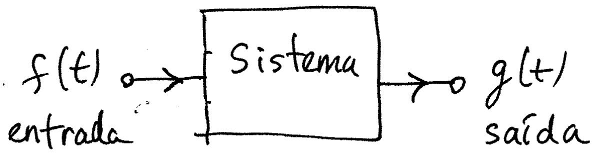
Observe-se que I_3 é contínua em t_2 e igual a 2.25mA mas I_1 e I_2 são descontínuas:

$$(I_1, I_2) = \begin{cases} (2.25\,;\,0)\,, & \text{se } t < t_2 \\ (4.09, 2.45)\,, & \text{se } t \geq t_2 \end{cases}$$

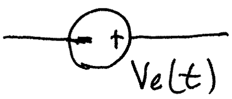
Aula 19. 26-11-2015

SINAIS E SISTEMAS

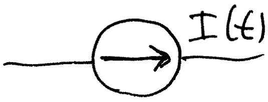




SINAIS DE ENTRADA



fonte de tensão variável; os sinais indicam que Ve é o potencial no ponto + menos o potencial no ponto −

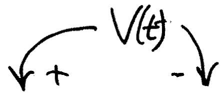


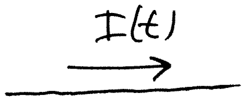
fonte de corrente variável. A seta indica o sentido quando I é positiva.

SINAIS DE SAÍDA

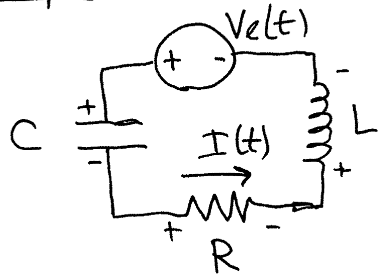
Tensão medida com um voltímetro em alguma parte do circuito.

Ou corrente medida com um amperímetro em algum ramo





Exemplo.



entrada → $V_e(t)$
saída → $I(t)$

Regra da malha: a soma das duas f.e.m. (fonte e f.e.m. induzida no indutor) igual a diminuição de potencial no condensador e na resistência

$$\Longrightarrow \quad V_e - L\frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}$$

se em t_0 o condensador está descarregado, então:

$$Q = \int_{t_0}^{t} I\, dt$$

$$\Longrightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\, dt = V_e$$

derivando os dois lados da equação, obtém-se a equação diferencial para $I(t)$:

$$\boxed{L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV_e}{dt}}$$

EDO linear, não homogénea com coeficientes constantes.

Pode ser resolvida por transformada de Laplace

$$\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\} \qquad \tilde{V}_e(s) = \mathcal{L}\{V_e(t)\}$$

$$\Longrightarrow L\left(s^2\tilde{I} - s I_0 - \dot{I}_0\right) + R\left(s\tilde{I} - I_0\right) + \frac{\tilde{I}}{C} = s\tilde{V}_e - V_{e0}$$

que é uma equação algébrica, que permite determinar $\tilde{I}$ facilmente.

Uma forma mais fácil de obter a equação diferencial e a solução, consiste em transformar a expressão (no tempo) de cada dispositivo para o domínio da frequência s (transformada de Laplace) e resolver o circuito nesse domínio.

1. Fontes

se for uma fonte de tensão contínua $\mathcal{E}$, a transformada é $\frac{\mathcal{E}}{s}$

$V_e(t) \rightarrow$ volts
$\tilde{V}_e(s) \rightarrow$ volts × segundo

2. Resistências

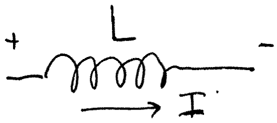
$\boxed{V = RI}$ $\qquad$ $\tilde{V} = R\tilde{I}$

funções de t $\qquad$ funções de s

unidades: $\boxed{1\,\Omega = 1\,\frac{V}{A}}$

3. Indutores

Domínio de t | Domínio de s



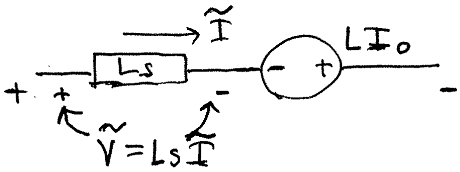
$$\boxed{V = L\,\frac{dI}{dt}}$$

unidades:

$$1\,H = 1\,\frac{V\cdot s}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{1\,H = 1\,\Omega\cdot s}$$

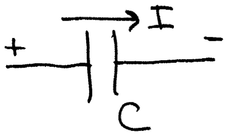
$$\mathcal{L}\left\{L\frac{dI}{dt}\right\} = Ls\tilde{I} - LI_0$$



$Z = Ls$ chama-se impedância

$$\tilde{V} = Ls\tilde{I} - LI_0$$

4. Condensadores



$Q = CV$

$\Rightarrow \boxed{I = C\frac{dV}{dt}}$

unidades:

$1F = 1\frac{A\cdot s}{V}$

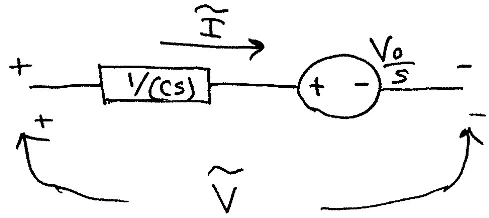
$\boxed{1F = 1\frac{s}{\Omega}}$

t | s

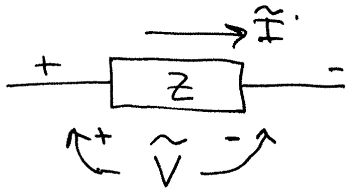
$$\mathcal{L}\left\{C\frac{dV}{dt}\right\} = Cs\tilde{V} - CV_0 = Cs\tilde{V} - Q_0$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = Cs\tilde{V} - Q_0$$

$$\Rightarrow \tilde{V} = \left(\frac{1}{Cs}\right)\tilde{I} + \frac{V_0}{s}$$



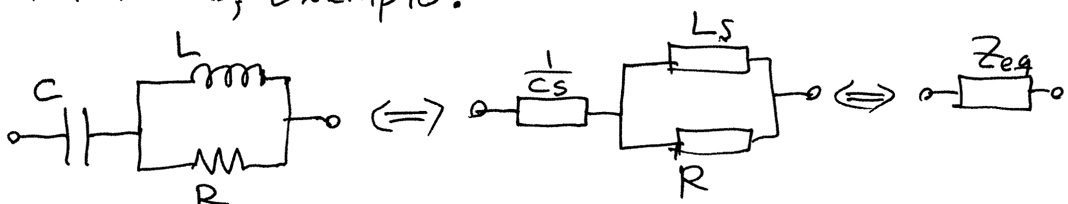
No caso de resistências, condensadores e indutores:



$\boxed{\tilde{V} = Z\,\tilde{I}}$ lei de Ohm generalizada

$$\text{Impedância} \rightarrow Z = \begin{cases} R\,, & \text{resitências} \\ Ls\,, & \text{indutores} \\ \frac{1}{Cs}\,, & \text{condensadores} \end{cases}$$

Por verificarem a mesma lei (Ohm) do que as resistências, as impedâncias combinam-se como as reistências; Exemplo:



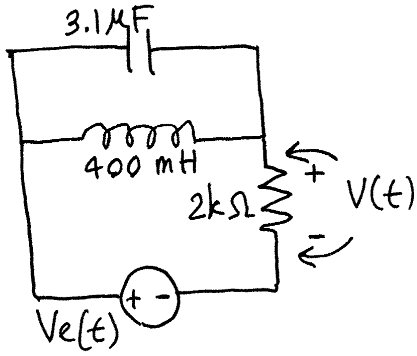
$$Z_{eq} = \frac{1}{Cs} + \frac{R\times(Ls)}{R+Ls} = \frac{RLCs^2+Ls+R}{LCs^2+RCs}$$ (unidades de resist.)

Aula 20. 27-11-2015

Exemplo.

Determine o sinal de saída $V(t)$ correspondente ao sinal de entrada:

$V_e(t) = 5\left(1 - e^{-600t}\right)$ (SI)



<u>Resolução</u>. Dando as voltagens em volts e as impedâncias em kΩ, as correntes estarão em mA.

$$\frac{1}{1\,\text{k}\Omega \cdot 1\,\text{kHz}} = 1\,\mu\text{F} \implies \text{capacidades em } \mu\text{F e frequências em kHz}$$

$$\frac{1\,\text{k}\Omega}{1\,\text{kHz}} = 1\,\text{H} \implies \text{indutâncias em H}$$

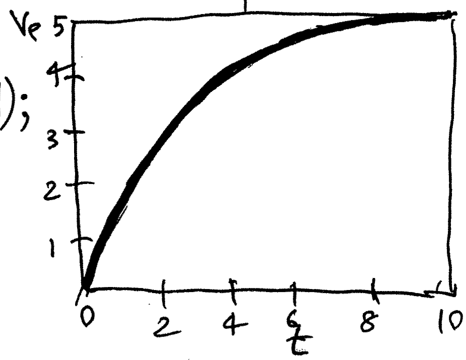
$$\frac{1}{1\,\text{kHz}} = 1\,\text{ms} \implies \text{tempo } t \text{ em ms.}$$

O sinal de entrada deve então ser expresso em volts e ms:

$$V_e = 5\left(1 - e^{-0.6t}\right)$$

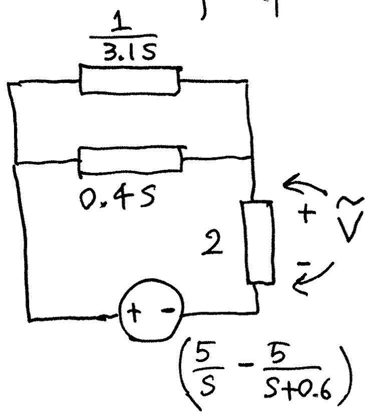
Usando o Maxima pode visualizar-se o sinal e calcular a sua transformada de Laplace:

```
Ve : 5*(1-exp(-0.6*t));
plot2d(Ve, [t,0,10], [ylabel,"Ve"]);
ve: laplace(Ve,t,s);
```



$$\implies \tilde{V}_e = 5\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.6}\right)$$

No domínio da frequência s, o circuito é:



Impedância equivalente:

```
[z1, z2, z3]: [1/(3.1*s), 0.4*s, 2]$
z: ratsimp (1/(1/z1 + 1/z2) + z3);
```

$$\Rightarrow \quad z = \frac{62s^2 + 10s + 50}{31s^2 + 25}$$

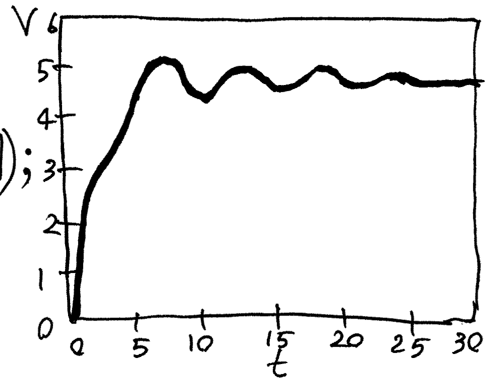
A corrente e a voltagem na resistência são:

```
i: ve/z $
v: ratsimp (z3 * i);
```

$$\longrightarrow \frac{465s^2 + 375}{155s^4 + 118s^3 + 140s^2 + 75s}$$

e, no domínio do tempo, o sinal de saída é a transformada inversa:

```
V: ilt (v, s, t);
plot2d (V, [t, 0, 30], [ylabel, "V"]);
```



O gráfico mostra oscilações amortecidas. Ou seja, independentemente do sinal de entrada, o sistema tem uma tendencia própria a oscilar.

Vejamos como seria a saída geral, para um sinal de entrada qualquer $\tilde{V}_e$:

```
remvalue(ve)$
i: ve/z$
v: ratsimp(z3*i);
```

$\Rightarrow \boxed{\tilde{V} = \dfrac{31s^2+25}{31s^2+5s+25}\tilde{V}_e}$

que pode ser escrito:

$$(31s^2+5s+25)\tilde{V} = (31s^2+25)\tilde{V}_e$$

e permite ver imediatamente qual é a equação diferencial do sistema (lembrando que no domínio da frequência, multiplicar por s equivale a derivar no domínio do tempo):

$$\boxed{31\ddot{V} + 5\dot{V} + 25V = 31\ddot{V}_e + 25V_e}$$

A equação homogénea correspondente:

$$31\ddot{V}+5\dot{V}+25V=0 \iff \begin{cases} \dot{V} = U \\ \dot{U} = -\dfrac{5U+25V}{31} \end{cases}$$

é um sistema dinâmico linear em que os valores próprios da matriz são as raízes do <u>polinómio caraterístico</u>:

$$31\lambda^2+5\lambda+25=0$$

```
solve(denom(v));
```

$\longrightarrow \lambda = -\dfrac{5}{62} \pm i\dfrac{5\sqrt{123}}{62}$

ou seja, o sistema tem um foco atrativo e oscila com frequência angular $\omega = \dfrac{5\sqrt{123}}{62}$

O sistema tem uma tendência a oscilar, mas o sinal de entrada força o sistema, deformando essas oscilações

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

É a função $H(s)$ que multiplica a $\tilde{V}_e$, na expressão geral para $\tilde{V}$ em função de $\tilde{V}_e$ (ou seja, $H = \dfrac{\tilde{V}}{\tilde{V}_e}$)

Neste exemplo:

$$H(s) = \frac{31 s^2 + 25}{31 s^2 + 5 s + 25}$$

O denominador de H é o polinómio caraterístico. Cada sistema linear é caraterizado por uma função de transferência. No domínio da frequência, o sistema representa-se pelo seguinte diagrama

$$\tilde{V}_e \longrightarrow \boxed{\;H\;} \longrightarrow \tilde{V} = H\,\tilde{V}_e$$

o sistema simplesmente multiplica a entrada por H. Se a entrada fosse igual a 1, a saída seria a função de transferência:

$$1 \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(s)$$

A transformada inversa de 1 é a função impulso unitário, $\delta(t)$. Ou seja, a função de transferência encontra-se observando a resposta do sistema a um impulso unitário. No domínio do tempo:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$$

a transformada inversa de $H\tilde{V}_e$ é a **convolução** de $h(t)$ e $V_e(t)$:

$$V_e(t) \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow V(t) = \int_0^\infty h(t-u)\,V_e(u)\,du$$

(integral de convolução)

Aula 21. 3-12-2015

Alguns casos em que ilt não encontra a transformada inversa.

① Se o numerador e o denominador são polinómios do mesmo grau; exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^2-3s+2}\right\}$$

simplifica-se a expressão para obter uma fração própria (numerador de grau menor que o denominador).

$$\frac{s^2+3}{s^2-3s+2} = \frac{(s^2-3s+2)+3s+1}{s^2-3s+2} = 1 + \frac{3s+1}{s^2-3s+2}$$

(ou usa-se partfrac)

A transformada inversa de 1 é $\delta(t)$ e a transformada inversa de $(3s+1)/(s^2-3s+2)$ sim pode ser calculada com ilt dando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^2-3s+2}\right\} = \delta(t) + 7e^{2t} - 4e^{t}$$

② Frações próprias multiplicadas por uma exponencial; exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s^2-1)\,e^{-2s}}{s^4+2s^2+1}\right\}$$

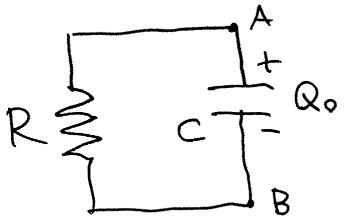
ignora-se a exponencial e calcula-se a transformada inversa da fração:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{s^4+2s^2+1}\right\} = t\cos(t)$$

A seguir, usa-se a propriedade de deslocamento no tempo:

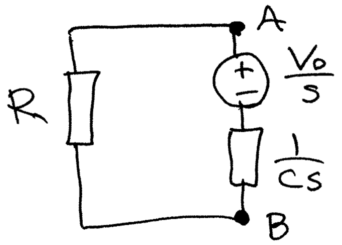
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s^2-1)\,e^{-2s}}{s^4+2s^2+1}\right\} = u(t-2)(t-2)\cos(t-2)$$

CIRCUITO RC



em $t=0$, o condensador tem carga Q_0, ou seja, $V_0 = \frac{Q_0}{C}$.

Circuito no domínio da frequência s:



Arbitrando corrente $\tilde{I}$ no sentido contrário aos ponteiros do relógio:

$$R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{V_0}{s}$$

$$RCs\,\tilde{I} + \tilde{I} = CV_0$$

$$(RCs+1)\tilde{I} = Q_0 \implies \tilde{I} = \frac{(Q_0/RC)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

A diferença de potencial no condensador, $\tilde{V}$, é a diferença de potencial entre A e B, e não apenas $\frac{\tilde{I}}{Cs}$:

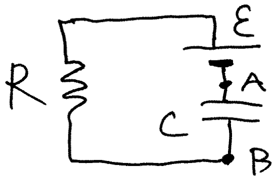
$$\tilde{V} = \tilde{V}_A - \tilde{V}_B = \frac{V_0}{s} - \frac{\tilde{I}}{Cs}$$

Ou, mais facilmente,

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \implies \tilde{V} = \frac{(Q_0/C)}{s + \frac{1}{RC}}$$

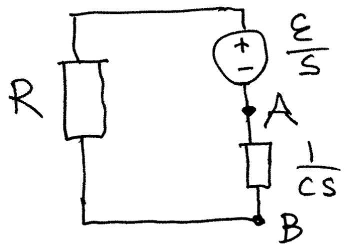
$$\boxed{V(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

circuito RC com fonte e sem carga inicial:



em $t=0$, a carga no condensador é nula.

Domínio da frequência s:



$$R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{\varepsilon}{s}$$

$$(RCs+1)\tilde{I} = \varepsilon C$$

$$\tilde{I} = \frac{(\varepsilon/R)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\implies \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\tilde{V}\ (\text{no condensador}) = \tilde{V}_B - \tilde{V}_A = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{(\varepsilon/RC))}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

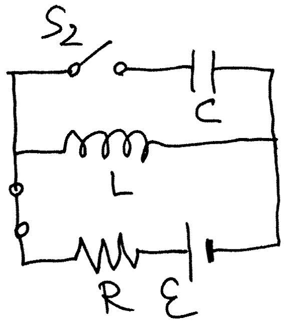
ou, melhor:

$$\tilde{V} = \frac{\varepsilon}{s} - R\tilde{I} = \varepsilon\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

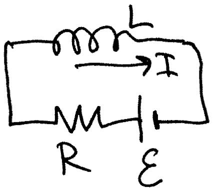
$$\implies \boxed{V(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}}\right)}$$

CIRCUITO LC

em $t<0$, S_1 está fechado e S_2 aberto.
Em $t>0$, S_1 está aberto e S_2 fechado

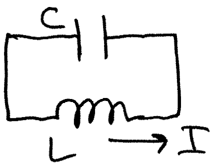


$t \leq 0$



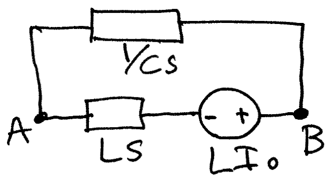
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$t > 0$



em $t=0$ o circuito inicial está em estado estacionário $\left(I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}\right)$

Circuito em $t>0$, no domínio da frequência s:



$$\Longrightarrow \quad Ls\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{Cs} = LI_0 \quad \left(\tilde{I} \text{ no sentido } \circlearrowleft\right)$$

$$\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)\tilde{I} = I_0 s$$

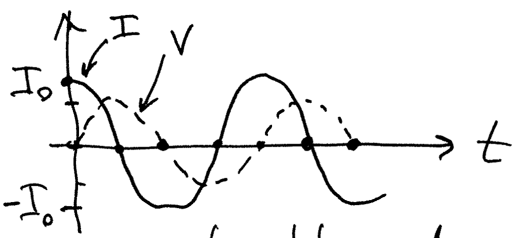
define-se uma constante $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{I} = \frac{I_0 s}{s^2 + \omega^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I(t) = I_0 \cos(\omega t)}$$

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{I_0/C}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Longrightarrow \quad V(t) = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t)$$

$$\boxed{V(t) = I_0 L\omega \sin(\omega t)}$$

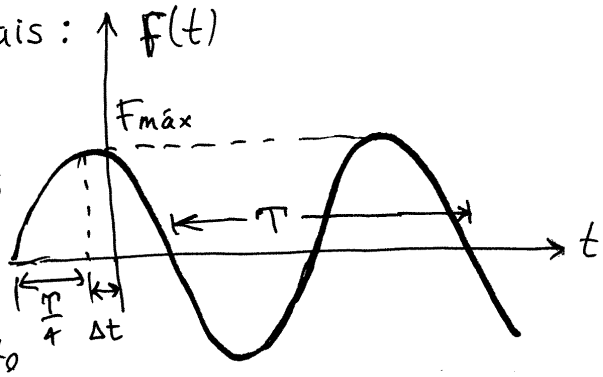


corrente alternada, com frequência angular ω

Aula 22. 4-12-2015

FASORES

funções sinusoidais:



Caraterizadas por 3 parâmetros

$$\begin{cases} F_{máx} = \text{amplitude} \\ T = \text{período} \\ \Delta t = \text{desfasamento no tempo} \end{cases}$$

Frequência angular $= \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Podem ser escritas como funções cosseno:

$$F = F_{máx}\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t+\Delta t)\right) = F_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \text{desfasamento}$$

ou ainda como funções seno:

$$F = F_{mâx}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{T}{4}+\Delta t\right)\right) = F_{máx}\sin(\omega t+\theta)$$

$$\theta = \frac{2\pi\left(\frac{T}{4}+\Delta t\right)}{T} = \frac{\pi}{2}+\varphi$$

ou, como combinação linear de seno e cosseno:

$$F = \underbrace{F_{máx}\cos\varphi}\cos(\omega t) - \underbrace{F_{máx}\sin\varphi}\sin(\omega t)$$

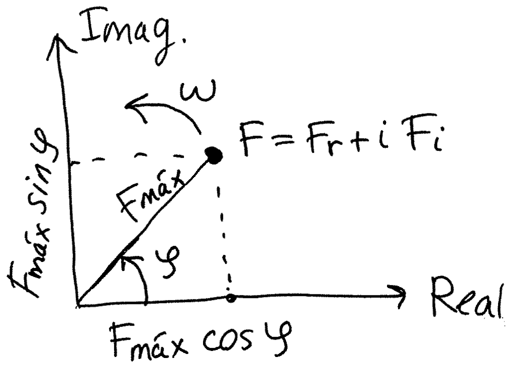
$$= F_r\cos(\omega t) - F_i\sin(\omega t) \qquad \begin{cases} F_r = F_{máx}\cos\varphi \\ F_i = F_{máx}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = \mathrm{Re}\Big((F_r + iF_i)\big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big)\Big)$$

$$\boxed{F = \mathrm{Re}\left((F_r+iF_i)\,e^{i\omega t}\right)}$$

parte real

Ou seja, cada função sinusoidal diferente é caraterizada pela sua frequência angular, ω, e pelo número complexo:



$$\mathbf{F} = F_r + i F_i \quad \text{(em } t=0\text{)}$$

chamado **FASOR** da função $F(t)$, no instante inicial $t=0$. Cada ponto no plano complexo representa uma função sinusoidal com frequência angular ω. Em $t>0$, o produto vezes $e^{i\omega t}$ faz o fasor rodar, no sentido positivo, com ~~frequência~~ velocidade angular constante ω.

O módulo do fasor $e^{i\omega t}\mathbf{F} = (F_r + iF_i)\,e^{i\omega t}$ permanece constante, igual a $F_{máx}$ e o seu argumento (ângulo com o semieixo real positivo) é $\omega t + \varphi$. Em cada instante t a função sinusoidal é a projeção do fasor no eixo real, $F_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$

O fasor no instante inicial, $\mathbf{F} = F_{máx}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ também costuma ser representado por:

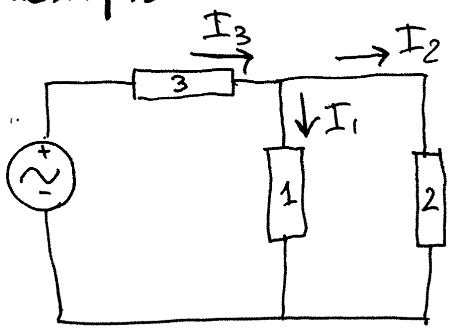
$$\boxed{\mathbf{F} = F_{máx}\angle\varphi}$$

Soma de funções sinusoidais. (com a mesma freq.)

$$F_{máx}\cos(\omega t+\varphi) + G_{máx}\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{F}e^{i\omega t}\right) + \mathrm{Re}\left(\mathbf{G}e^{i\omega t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left((\mathbf{F}+\mathbf{G})\,e^{i\omega t}\right) \quad \text{(Basta então somar os fasores)}$$

Exemplo.



Sabendo que as correntes nos dispositivos 1 e 2 são:

$I_1(t) = 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$I_2(t) = 2\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$

Determine a expressão da corrente $I_3(t)$.

Resolução.

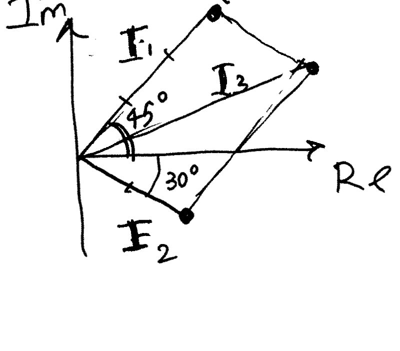
$$I_3 = I_1 + I_2 \implies \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$\mathbf{I}_1$ tem módulo 3 e argumento $\frac{\pi}{4}$: $\mathbf{I}_1 = 3\angle 45^\circ$

- A função seno é a projeção no eixo real de um fasor que está no semieixo negativo imaginário em $t=0$. Ou seja, $\mathbf{I}_2$ faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o semieixo imaginário negativo e então -30° com o semieixo real positivo: $\mathbf{I}_2 = 2\angle -30^\circ$

$$\mathbf{I}_3 = (3\angle 45^\circ) + (2\angle -30^\circ) = (3\cos 45^\circ + 2\cos(-30^\circ)) + i(3\sin 45^\circ + 2\sin(-30^\circ))$$

$$= \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\tfrac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4.013\angle 16.2^\circ$$



$$\implies \boxed{I_3(t) = 4.013\cos(\omega t + 0.283)}$$

IMPEDÂNCIA COMPLEXA

① Resistências: $V = RI$

Se $V(t)$ for uma tensão alternada $\mathbf{V} = V_{máx} \angle \varphi$ com frequência angular ω,

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{V_{máx}}{R} \cos(\omega t + \varphi)$$

Assim sendo, I também é uma função sinusoidal, com a mesma frequência angular ω e com fasor:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{V_{máx}}{R} \angle \varphi$$

② Condensadores: $I = C \dfrac{dV}{dt}$

$$V = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow I = -C\omega V_{máx} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} = i\omega C \mathbf{V}$$

③ Indutores : $V = L \dfrac{dI}{dt} \Rightarrow I = \dfrac{1}{L} \int V dt$

$$V = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow I = \frac{V_{máx}}{L\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \mathbf{I} = -\frac{i}{L\omega} \mathbf{V}$$

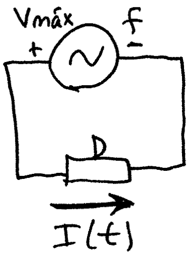
Resumindo, $\boxed{\mathbf{V} = Z(i\omega)\, \mathbf{I}}$ Lei de Ohm para fasores

$$Z(i\omega) = \begin{cases} R \text{, resistências} \\ \dfrac{1}{i\omega C} \text{, condensadores} \\ i\omega L \text{, indutores} \end{cases}$$

($Z(s)$ é uma função mas $Z(i\omega)$ é um número complexo)

Aula 23. 10-12-2015

IMPEDÂNCIA E REATÂNCIA



$$V(t) = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\omega = 2\pi f)$$

Se o dispositivo D for uma resistência, um condensador ou um indutor, mostrou-se na aula anterior que: $I(t) = I_{máx} \cos(\omega t + \theta)$

fasores da voltagem e da corrente:

$$\mathbf{V} = V_{máx} \angle \varphi \qquad \mathbf{I} = I_{máx} \angle \theta$$

lei de Ohm: $\mathbf{V} = Z(i\omega)\mathbf{I} \iff \begin{cases} V_{máx} = |Z|\, I_{máx} \\ \varphi = \phi + \theta \end{cases}$

onde ϕ é o ângulo que $Z(i\omega)$ faz com o eixo real.

A parte imaginária da impedância chama-se REATÂNCIA:

$$X = \mathrm{Imag}(Z(i\omega))$$

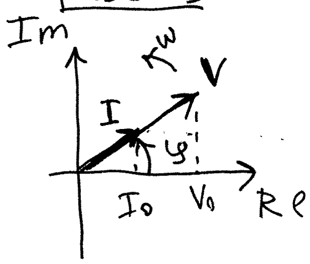
① Resistências. $Z(i\omega) = R \quad (|Z| = R,\ X = 0,\ \phi = 0)$

$\Rightarrow$ reatância nula

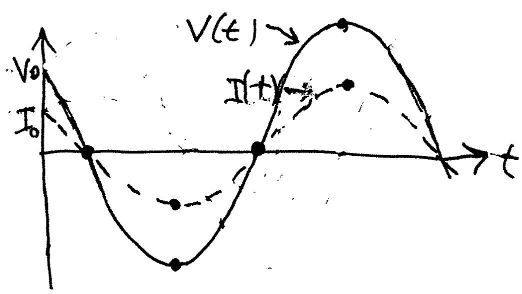
$$\begin{cases} V_{máx} = R\, I_{máx} \\ \varphi = \theta \end{cases}$$

diz-se que a voltagem e a corrente estão <u>em fase</u>.

<u>fasores</u>



<u>funções</u>



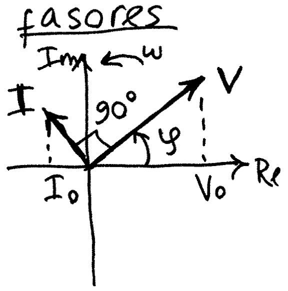
② Condensadores. $Z(i\omega) = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow X = -\frac{1}{\omega C}$ reatância CAPACITIVA (negativa)

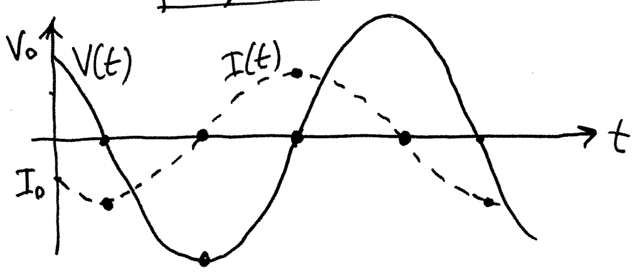
$\begin{cases} V_{máx} = \frac{I_{máx}}{\omega C} \\ \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

quanto menor ω, menor a corrente máxima.
A voltagem $V(t)$ está atrasada 90° em relação à corrente $I(t)$.

fasores



funções



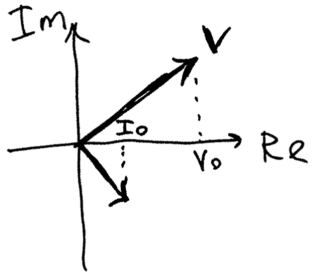
③ Indutores. $Z(i\omega) = i\omega L = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow X = \omega L$ reatância INDUTIVA (positiva)

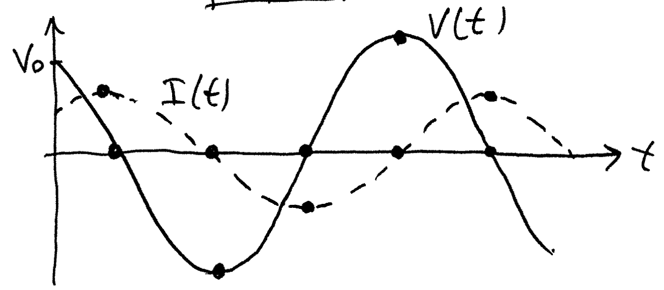
$\begin{cases} V_{máx} = \omega L I_{máx} \\ \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

quanto maior ω, menor a corrente máxim
A voltagem está adiantada 90° em relação à corrente.

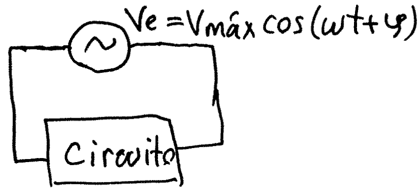
fasores



funções



CIRCUITOS COM UMA FONTE DE TENSÃO ALTERNADA



Como se mostrou no capítulo de processamento de sinais, qualquer voltagem ou corrente, em qualquer parte do circuito, pode ser obtida no domínio da frequência s, multiplicando o sinal de entrada por uma função de transferência:

$$\tilde{V}_e \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow \tilde{V} = H\tilde{V}_e$$

$$(\text{ou } \tilde{I} = H_I\tilde{V}_e)$$

Neste caso particular, usando as expressões

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

encontra-se $\tilde{V}_e$:

$$\tilde{V}_e = \mathcal{L}\{V_{máx}\cos(\omega t+\varphi)\} = \mathcal{L}\{V_{máx}\cos\varphi\cos(\omega t)\} - \mathcal{L}\{V_{máx}\sin\varphi\sin(\omega t)\}$$

$$\tilde{V}_e = \frac{d_1 s + d_2}{s^2+\omega^2} \qquad (d_1 \text{ e } d_2 \text{ são duas constantes})$$

$$\Longrightarrow \tilde{V} = \overbrace{\frac{f(s)}{C_1 s^2 + C_2 s + C_3}}^{H}\left(\frac{d_1 s + d_2}{s^2+\omega^2}\right)$$

polinómio caraterístico

frações parciais:

$$\tilde{V} = \frac{k_1 s + k_2}{s^2+\omega^2} + \frac{g(s)}{C_1 s^2 + C_2 s + C_3} \longleftarrow \text{raízes = valores próprios}$$

O segundo termo é a parte própria do circuito, independente do sinal de entrada. A transformada inversa é uma função que se aproxima de zero em $t \to \infty$, porque o sistema é linear e dissipativo, ou seja, tem um único ponto de equilíbrio, estável, em $V = \dot{V} = 0$ (origem do espaço de fase).

Esse segundo termo corresponde à <u>voltagem transitória</u>. O primeiro termo é a <u>voltagem estacionária</u>, que persiste até $t \to \infty$ e a sua transformada inversa é também uma função sinusoidal com frequência angular ω.

<u>**Exemplo.**</u> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+15}{s^2+25}\right\}$ $\qquad \dfrac{2s+15}{s^2+25} = 2\left(\dfrac{s}{s^2+5^2}\right) + 3\left(\dfrac{5}{s^2+5^2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+15}{s^2+25}\right\} = 2\cos(5t) + 3\sin(5t)$$

mas esta forma não é muito útil. É melhor:

$$\frac{2s+15}{s^2+15} = \frac{A}{s-i5} + \frac{B}{s+i5}$$

($B = A^* =$ complexo conjugado de A, porque o resultado é real)

$$A = \lim_{s \to +i5} (s-i5)\left(\frac{2s+15}{s^2+15}\right) = \lim_{s \to i5} \frac{2s+15}{s+i\omega} = \frac{i10+15}{i10} = 1 - i\frac{3}{2}$$

$$\frac{B}{s+i5} = \left(\frac{A}{s-i5}\right)^* \Rightarrow \frac{2s+15}{s^2+15} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-i\frac{3}{2}}{s-i5}\right)$$

$F = 1 - i\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \angle -0.98$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+15}{s^2+15}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{13}\angle -0.9828}{s-i5}\right)\right\} = \sqrt{13}\cos(5t - 0.9828)$$

(ver tabela no apêndice C)

Aula 24, 11-12-2015

FILTROS DE FREQUÊNCIA

V_e (fasor de entrada) $\longrightarrow \boxed{R(\omega)} \longrightarrow V = R\,V_e$ (fasor de saída) (ou $I = R V_e$ se a saída for uma corrente)

FUNÇÃO DE RESPOSTA DE FREQUÊNCIA = $R(\omega) = H(i\omega)$
é uma função complexa, com módulo $|R|$ e fase φ_R

$$\Longrightarrow \begin{cases} V_{max} = |R|\, V_{e\,máx} \\ \varphi_V = \varphi_R + \varphi_{Ve} \end{cases}$$

POTÊNCIA NOS CIRCUITOS DE C.A.

potência instantânea num elemento onde a voltagem é $V(t)$ e a corrente $I(t)$: $\quad P(t) = V(t)\,I(t)$

$$\Longrightarrow P(t) = \left(V_{máx}\cos(\omega t + \varphi)\right)\left(I_{máx}\cos(\omega t + \theta)\right)$$
$$= \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx}\left(\cos(2\omega t + \varphi + \theta) + \cos(\varphi - \theta)\right)$$

(porque $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$)

Como $\begin{cases} V_{máx} = |Z|\, I_{máx} \\ \varphi = \phi + \theta \end{cases}$ onde $Z = |Z|\angle\phi$ é a impedância do dispositivo,

$\Longrightarrow \cos(\varphi - \theta) = \cos\phi$ chama-se **fator de potência**

o valor médio de $\cos(2\omega t + \varphi + \theta)$ é:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t + \varphi + \theta)\, dt = \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi + \theta)\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

Como tal, a potência média é:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \cos\phi}$$

que também pode ser escrita em várias outras formas:

$$\bar{P} = \frac{|Z|}{2} I_{máx}^2 \cos\phi = \frac{V_{máx}^2}{2|Z|} \cos\phi = I_{ef} V_{ef} \cos\phi$$

onde $V_{ef} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}}$ e $I_{ef} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$ são a voltagem e corrente **eficaz**. Em geral, o valor **eficaz** (ou valor quadrático médio) de uma função sinusoidal $F = F_{máx} \cos(\omega t + \varphi)$ é:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F^2 dt} = \frac{F_{máx}}{\sqrt{2}}$$

O produto de V_{ef} e I_{ef} chama-se **potência aparente**

$$P_{aparente} = V_{ef} I_{ef}$$

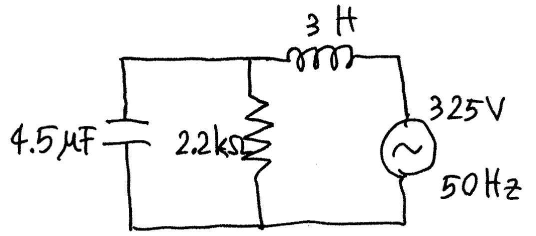
e como $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, o fator de potência é sempre positivo e entre 0 e 1. Ou seja, a potência média está sempre entre 0 e a potência aparente $V_{ef} I_{ef}$.

Note-se que:

$$\boxed{V_{ef} = |Z| I_{ef}}$$

Em Portugal, usa-se $V_{máx} = 325$ V e, assim sendo, a voltagem eficaz é 230 V. Num dispositivo com potência nominal de 50 W então: $I_{ef} \approx \frac{50}{230} \approx 217$ mA (ou menor, porque $\bar{P} \leq P_{aparente}$)

Exemplo. Determine a voltagem, a corrente e a potência média no indutor



Resolução. Unidades

$Z \to k\Omega$

$L \to H$

$\Rightarrow s \to kHz \quad (t \to ms)$

$\Rightarrow C \to \mu F$

$V \to V \Rightarrow I \to mA$

$\omega = 2\pi f = 100\pi$ Hz

mas como deve ser dada em kHz, então: $\boxed{\omega = \frac{\pi}{10}}$

No Maxima, as impedâncias do indutor, condensador e resistência são:

```
[z1, z2, z3]: [3, 1/4.5/s, 2.2]$
```

e a impedância total à saída da fonte:

```
zt: z1 + z2*z3/(z2+z3)$
```

corrente no indutor:

```
I: ratsimp(325/subst(s=%i*%pi/10, zt));
float(cabs(I));    → 890.1
float(carg(I));    → -0.971
```

$\Rightarrow \boxed{I(t) = 890.1 \cos\left(\frac{\pi}{10} t - 0.971\right)}$

voltagem no indutor:

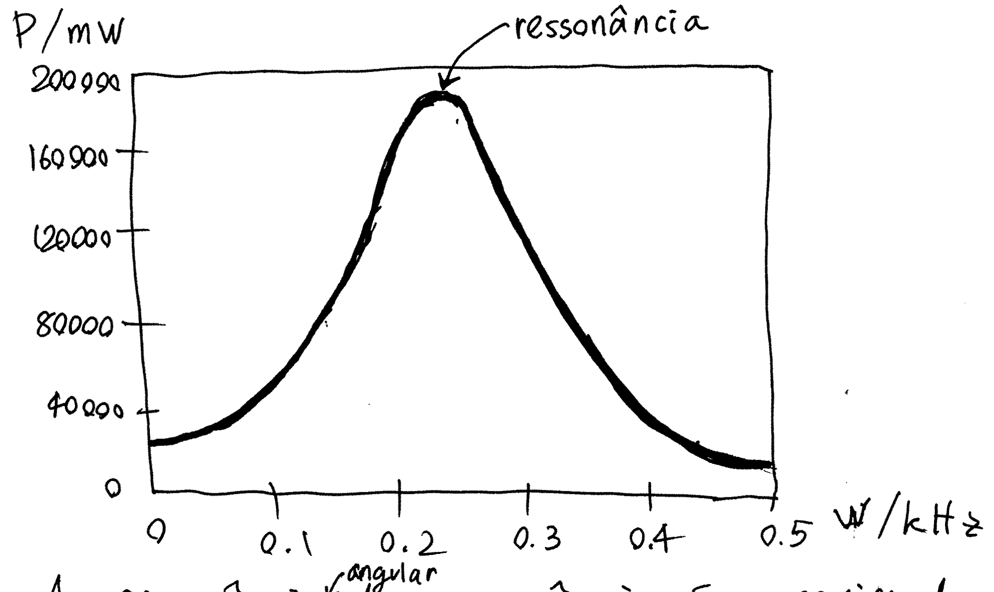
```
V: I*3*%i*%pi/10, float[cabs(V), carg(V)];
```

$\boxed{V(t) = 838.9 \cos\left(\frac{\pi}{10} t + 0.5998\right)}$

A potência média é 0, porque a fase da impedância do indutor é $\frac{\pi}{2}$!!!...

Observe-se que Vmáx é maior que os 325V da fonte, porque este é um circuito oscilador. A frequência f que conduz à potência máxima fornecida pela fonte chama-se **FREQUÊNCIA de RESSONÂNCIA**.

```
I : ratsimp(325/subst(s=%i*w, zt))$     (com qualquer freq. angular w)
P : ratsimp(0.5*325*cabs(I)*cos(carg(I)));
plot2d(P,[f,0,0.5],[xlabel,"w/kHz"],
       [ylabel,"P/mw"]);
```



A frequência angular de ressonância é aproximadamente 0.26 kHz = 260 Hz, e a potência máxima 180 W.

$$f = \frac{w}{2\pi} \implies f_{ressonância} \simeq \frac{260}{2\pi} = 41.4 \text{ Hz}$$

No caso da fonte com $f = 50$ Hz, como essa frequência está próxima da freq. de ressonância, Vmáx no indutor é elevada.

Capítulo 2

Exames

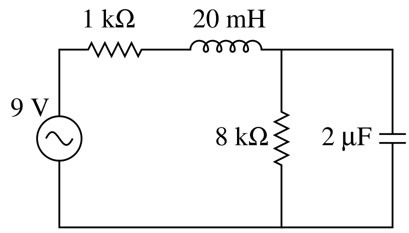
2.1 Exame de época normal

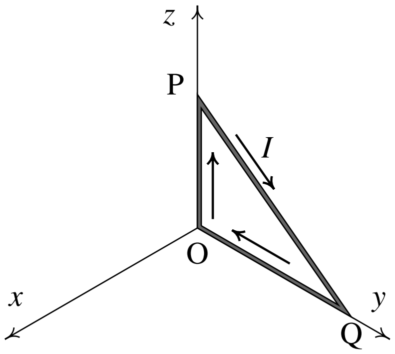
O exame realizou-se no dia 26 de janeiro de 2016. Compareceram 148 estudantes e a nota média foi 10.5 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) No circuito representado no diagrama, determine a potência média fornecida pela fonte, sabendo que esta tem frequência de 30 Hz e voltagem máxima de 9 V.

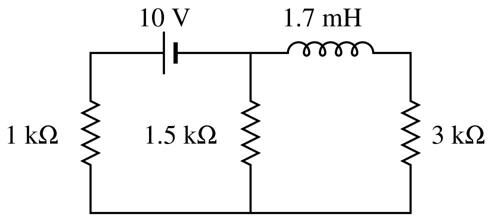




2. (4 valores) A espira triangular na figura tem um vértice na origem, o vértice P no eixo dos z, a 30 cm da origem, e o vértice Q no eixo dos y, a 40 cm da origem. Existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = 0.05\,\hat{\imath} + 0.03\,\hat{\jmath} - 0.08\,\hat{k}$ (em teslas) e na espira circula corrente de intensidade $I = 23.4$ mA, no sentido indicado na figura. (a) Calcule a força magnética sobre cada um dos três lados da espira. (b) Calcule a força magnética total sobre a espira.

PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de "Resposta". **Cotação**: certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco ou ilegível, 0.

3. No circuito representado no diagrama, determine a intensidade da corrente final (após a fonte ter estado ligada muito tempo) através da resistência de 1 kΩ.



(A) 2.5 mA **(C)** 1.0 mA **(E)** 10.0 mA
(B) 4.0 mA **(D)** 5.0 mA

Resposta: ☐

4. Uma bobina tem indutância de 32 mH e resistência de 50 Ω. Calcule o módulo da impedância da bobina, para uma tensão alternada com frequência de 150 Hz.

(A) 80.2 Ω **(C)** 29.2 Ω **(E)** 69.3 Ω
(B) 160.3 Ω **(D)** 58.4 Ω

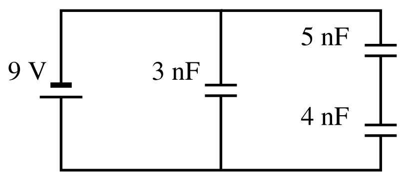
Resposta: ☐

5. Num sistema de três cargas pontuais, $q_1 = 2$ nC, $q_2 = 3$ nC e $q_3 = 2$ nC, a distância entre as cargas 1 e 2 é 2 cm, entre as cargas 1 e 3 é 3 cm, e entre as cargas 2 e 3 é 4 cm. Calcule a relação entre as forças elétricas produzidas pelas cargas 1 e 2 sobre a carga 3.

(A) 64/27 **(C)** 8/9 **(E)** 3/4
(B) 32/27 **(D)** 3/8

Resposta: ☐

6. No circuito da figura, determine o valor da carga armazenada no condensador de 5 nF.



(A) 11.25 nC **(D)** 45 nC
(B) 20 nC **(E)** 5 nC
(C) 4 nC

Resposta: ☐

7. Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam 7×10^{16} eletrões de condução durante 5 segundos. Calcule a energia fornecida pela pilha durante esse intervalo.

(A) 16.8 mJ **(C)** 53.76 mJ **(E)** 67.2 mJ
(B) 5.04 mJ **(D)** 31.92 mJ

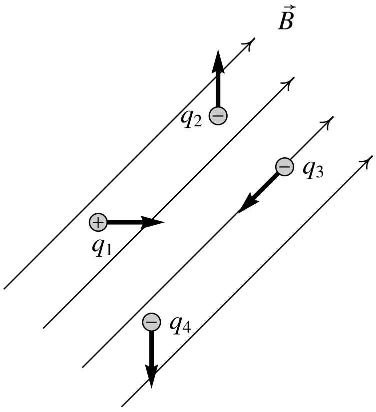
Resposta: ☐

8. Quando a temperatura é 20°C, a resistência de um fio de cobre com 2.1 mm de diâmetro é 0.42 Ω. Calcule o comprimento do fio, sabendo que a resistividade do cobre a 20°C é 17 nΩ·m.

(A) 445.0 m **(C)** 111.2 m **(E)** 85.6 m
(B) 171.1 m **(D)** 599.0 m

Resposta: ☐

9. A figura mostra as linhas de um campo magnético uniforme, no plano da folha, e quatro cargas pontuais com velocidades no mesmo plano nos sentidos dos vetores na figura. Sobre quais das cargas atua uma força magnética no sentido para cá da folha?



(A) q_1 e q_4 **(D)** Unicamente q_4
(B) q_1 e q_2 **(E)** Unicamente q_1
(C) q_2, q_3 e q_4

Resposta: ☐

10. Quando o sinal de entrada num circuito é $2\,e^{-2\,t}$, o sinal de saída é igual a $2\,e^{t/2} - 2\,e^{-2\,t}$. Encontre a função de transferência do circuito.

(A) $\dfrac{3\,s}{s-1}$ **(C)** $\dfrac{5}{2\,s-1}$ **(E)** $\dfrac{3}{s-1}$
(B) $\dfrac{5\,s}{2\,s-1}$ **(D)** $\dfrac{s}{2\,s-1}$

Resposta: ☐

11. Determine a corrente eficaz num indutor de 12 mH ligado a uma fonte ideal de tensão alternada, com tensão máxima 75 V e frequência de 30 Hz.

(A) 117.2 A **(C)** 23.4 A **(E)** 211.0 A
(B) 4.7 A **(D)** 7.8 A

Resposta: ☐

12. A carga positiva num dipolo elétrico é 4.8×10^{-19} C e encontra-se a uma distância de 6.4×10^{-10} m da carga negativa. Determine o valor do potencial elétrico num ponto que se encontra a 9.2×10^{-10} m de cada uma das cargas.

(A) 4.2 V **(C)** 5.1×10^{9} V **(E)** zero
(B) 9.4 V **(D)** 1.7 V

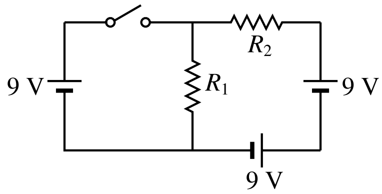
Resposta: ☐

13. Um fio retilíneo, muito comprido, com carga linear de 9 µC/m, encontra-se sobre o eixo dos z. Calcule o módulo do campo elétrico no ponto P, com coordenadas $x = 4$ m, $y = 12$ m e $z = 15$ m.

(A) 10.8 kN/C **(C)** 13.5 kN/C **(E)** 5.4 kN/C
(B) 40.5 kN/C **(D)** 12.81 kN/C

Resposta: ☐

14. No circuito da figura, $R_1 = 14$ kΩ e $R_2 = 21$ kΩ. Calcule a intensidade da corrente que circula pela resistência R_2 quando o interruptor estiver fechado.



(A) 1.286 mA **(C)** 0.514 mA **(E)** 1.932 mA
(B) 0.429 mA **(D)** 0.643 mA

Resposta: ☐

15. Quando o sinal de entrada num circuito é $V_e(t)$ e o sinal de saída é $V(t)$, a função de transferência é:
$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$
Determine a equação diferencial do circuito.

(A) $\dot{V} + 1V = \dot{V}_e + 2V_e$
(B) $\ddot{V} + 1\dot{V} + V = \dot{V}_e + 2V_e$
(C) $\ddot{V} + 1\dot{V} + 2V = \dot{V}_e + 2V_e$
(D) $\ddot{V} + 3\dot{V} + 2V = 2\,\dot{V}_e + 3V_e$
(E) $\ddot{V} + 3\dot{V} + 2V = V_e$

Resposta: ☐

16. Um quadrado com 1 cm de lado encontra-se numa região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme, com módulo de 9 kN/C, e numa direção que faz um ângulo de 60° com o quadrado. Calcule o valor absoluto do fluxo elétrico através do quadrado.

(A) 0.078 kN·m^2/C **(D)** 0.9 N·m^2/C
(B) 0.045 kN·m^2/C **(E)** 0.78 N·m^2/C
(C) 0.45 N·m^2/C

Resposta: ☐

17. Calcule a resistência de uma lãmpada incandescente de 4 W e 12 V, nas condições normais de operação.

(A) 24.0 Ω **(C)** 18.0 Ω **(E)** 14.4 Ω
(B) 36.0 Ω **(D)** 72.0 Ω

Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. Usando unidades de kΩ para a impedância e μF para a capacidade, o tempo deverá ser medido então em ms, a frequência em kHz e a indutância em H. A impedância equivalente nos terminais da fonte é então:

$$Z = 1 + 0.020\,s + \frac{8\left(\dfrac{1}{2\,s}\right)}{8 + \dfrac{1}{2\,s}} = \frac{16\,s^2 + 801\,s + 450}{800\,s + 50}$$

A frequência s, em unidades de kHz, é neste caso:

$$s = \mathrm{i}\,2\pi f = \mathrm{i}\,0.06\pi$$

Usando o Maxima, a impedância complexa é então

```
(%i1) Z: subst (s=%i*0.06*%pi, (16*s^2+801*s+450)/(800*s+50))$
```

E a potência média fornecida pela fonte é

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\mathrm{max}} I_{\mathrm{max}} \cos\varphi_Z = \frac{V_{\mathrm{max}}^2 \cos\varphi_Z}{2|Z|}$$

Ou seja:

```
(%i2) float(9^2*cos(carg(Z))/cabs(Z)/2);

(%o2)           8.15090605836866
```

Como a voltagem foi dada em volts e a impedância em kΩ, as unidades desta potência calculada são mW.

Problema 2. (*b*) É conveniente começar por calcular a alínea *b*, que ajudará no cálculo da alínea *a*. Como o campo magnético é constante, a expressão da força magnética sobre o fio retilíneo entre os pontos P e Q é

$$\vec{F}_{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PQ}}\left(\vec{I} \times \vec{B}\right) = I\left(\vec{r}_{\mathrm{PQ}} \times \vec{B}\right)$$

Onde $\overline{\mathrm{PQ}}$ é a distância entre os pontos P e Q e $\vec{r}_{\mathrm{PQ}}$ é o vetor com origem em P e fim em Q. Assim sendo, a força total sobre a espira é

$$\vec{F} = I\left(\vec{r}_{\mathrm{PQ}} \times \vec{B}\right) + I\left(\vec{r}_{\mathrm{QO}} \times \vec{B}\right) + I\left(\vec{r}_{\mathrm{OP}} \times \vec{B}\right) = I\left(\vec{r}_{\mathrm{PQ}} + \vec{r}_{\mathrm{QO}} + \vec{r}_{\mathrm{OP}}\right) \times \vec{B} = 0$$

Porque a soma dos três vetores entre os parêntesis é igual a zero.

(*a*) Usando unidades de mA para a corrente, mm para as distâncias e T para o campo, as forças calculadas estarão todas em µN. A força sobre o segmento entre O e P é:

$$\vec{F}_{\text{OP}} = 23.4\,\left(300\,\hat{k}\right) \times \left(0.05\,\hat{\imath} + 0.03\,\hat{\jmath} - 0.08\,\hat{k}\right) = -210.6\,\hat{\imath} + 351\,\hat{\jmath}$$

No segmento entre Q e O é:

$$\vec{F}_{\text{QO}} = 23.4\,\left(-400\,\hat{\jmath}\right) \times \left(0.05\,\hat{\imath} + 0.03\,\hat{\jmath} - 0.08\,\hat{k}\right) = 748.8\,\hat{\imath} + 468\,\hat{k}$$

E como a soma das três forças é nula, a força sobre o segmento entre P e Q é:

$$\vec{F}_{\text{PQ}} = -\vec{F}_{\text{OP}} - \vec{F}_{\text{QO}} = -538.2\,\hat{\imath} - 351\,\hat{\jmath} - 468\,\hat{k}$$

Perguntas

3. D

4. D

5. B

6. B

7. A

8. E

9. B

10. C

11. C

12. E

13. D

14. B

15. D

16. E

17. B

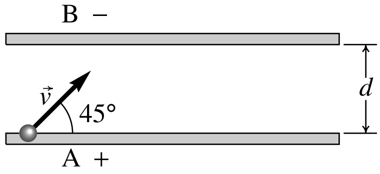
2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 11 de fevereiro de 2016. Compareceram 75 estudantes e a nota média foi 6.6 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

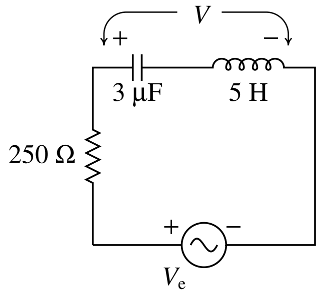
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) Num sistema de vácuo há duas lâminas metálicas A e B, planas, paralelas e muito extensas, afastadas uma distância $d = 15$ cm entre si. A diferença de potencial entre as lâminas é de 4 V (maior potencial em A do que em B). Num instante é lançado um eletrão desde a superfície de A, com velocidade inicial de módulo 1.4 Mm/s, formando um ângulo de 45° com a lâmina, como mostra a figura. Determine em qual das duas lâminas, A ou B, bate primeiro o eletrão após ter sido lançado e a que distância desde o ponto inicial (a massa do eletrão é 9.109×10^{-31} kg).

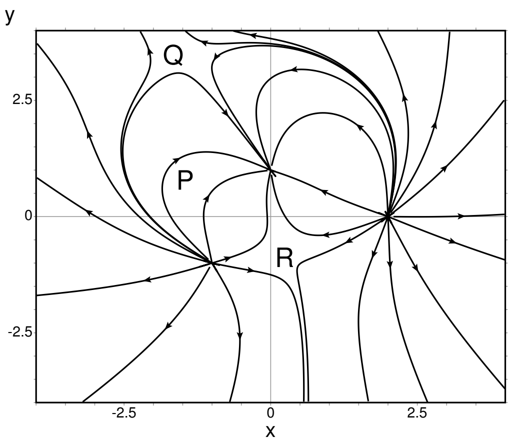


2. (4 valores) No filtro de frequências representado no diagrama, o sinal de entrada é a tensão V_e de uma fonte de tensão alternada, com frequência angular ω, e o sinal de saída é a tensão V medida no indutor e no condensador, como indica a figura. Encontre a expressão da função resposta de frequência, em função de ω.



PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de "Resposta". **Cotação**: certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco ou ilegível, 0.

3. O gráfico mostra as linhas de campo elétrico de um sistema de cargas pontuais sobre o plano xy. Se E_P, E_Q e E_R representam o módulo do campo elétrico nos pontos P, Q e R, selecione a afirmação verdadeira.



(A) $E_P > E_Q$
(B) $E_R > E_P$
(C) $E_P < E_Q$
(D) $E_Q = E_P$
(E) $E_R = E_P$

Resposta: ☐

4. Um motor elétrico, alimentado por uma fonte com força eletromotriz de 230 V, é usado para realizar um trabalho de 5.34 kJ cada 3 segundos. Admitindo que a energia elétrica é transformada a 100% em energia mecânica, a corrente necessária será:

(A) 17.03 A
(B) 11.61 A
(C) 7.74 A
(D) 30.96 A
(E) 25.54 A

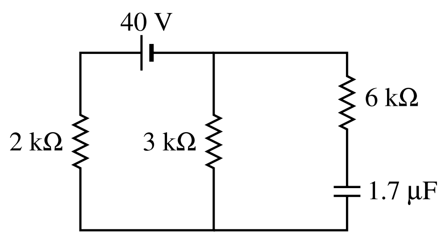
Resposta: ☐

5. Uma bobina circular com 20 espiras, todas de raio 5.0 cm, encontra-se numa região onde existe campo magnético uniforme, de módulo 0.15 T e direção que faz um ângulo de 55° com a perpendicular à bobina. Calcule o módulo do momento do binário sobre a bobina quando esta for percorrida por uma corrente de 6.8 A.

(A) 141.47 mN·m
(B) 75.22 mN·m
(C) 131.25 mN·m
(D) 113.29 mN·m
(E) 91.9 mN·m

Resposta: ☐

6. Uma fonte de tensão constante foi ligada a um condensador e 3 resistências, como mostra o diagrama. Calcule a intensidade da corrente fornecida pela fonte no instante inicial em que é ligada.



(A) 0 mA
(B) 8 mA
(C) 10 mA
(D) 20 mA
(E) 5 mA

Resposta: ☐

7. Um indutor de 0.5 H e uma resistência de 3.6 kΩ ligam-se em série a uma fonte ideal com f.e.m. de 3 V. Em unidades SI, a expressão da corrente no circuito, em função do tempo, é: $0.83 \times 10^{-3} \left(1 - e^{-7194\,t}\right)$. Calcule a diferença de potencial no indutor no instante $t = 0.139$ ms.

(A) 1.9 V
(B) 4.75 V
(C) 0.67 V
(D) 8.15 V
(E) 1.1 V

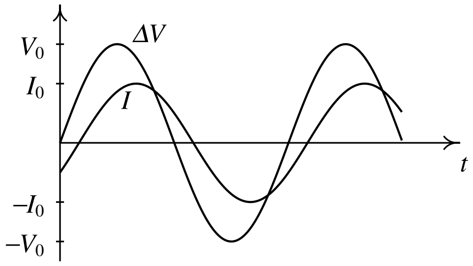
Resposta: ☐

8. Duas cargas pontuais são colocadas sobre o eixo dos x: uma carga de 2 μC em $x = -1.0$ m e outra carga de -4 μC na origem. Calcule o módulo do campo elétrico no ponto $x = 1.0$ m, no eixo dos x.

(A) 27.0 mN/μC
(B) 40.5 mN/μC
(C) 4.5 mN/μC
(D) 45.0 mN/μC
(E) 31.5 mN/μC

Resposta: ☐

9. Uma resistência de 433 Ω, um condensador de 8 μF e um indutor de indutância L são ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência angular $\omega = 250$ Hz. O gráfico mostra a tensão da fonte, ΔV, e a corrente I no circuito, em função do tempo. Qual dos valores na lista poderá ser o valor da indutância L?



(A) 1 H
(B) ∞
(C) 2 H
(D) 0
(E) 3 H

Resposta: ☐

10. Um condensador com dielétrico é carregado com uma pilha até ficar com uma diferença de potencial V_0. A seguir, desliga-se a pilha e retira-se o dielétrico; como será a diferença de potencial no condensador após ter sido retirado o dielétrico?

(A) Menor que V_0
(B) Diminuirá exponencialmente
(C) Igual a V_0
(D) Maior que V_0
(E) Nula

Resposta: ☐

11. Calcule a impedância equivalente de um indutor de 6 mH em paralelo com um condensador de 50 μF, em unidades de ohm e em função da frequência s em kHz.

(A) $\dfrac{6\,s}{0.3\,s^2+1}$
(B) $\dfrac{50\,s}{s^2+1}$
(C) $\dfrac{6\,s}{0.05\,s^2+1}$
(D) $\dfrac{0.05\,s}{6\,s^2+1}$
(E) $\dfrac{50\,s}{0.3\,s^2+1}$

Resposta: ☐

12. Uma partícula com carga elétrica desloca-se horizontalmente, na direção oeste, com velocidade de 7.3×10^6 m/s, numa região onde existe campo magnético uniforme com direção vertical, sentido de cima a baixo e módulo 5.2×10^{-4} T. Sabendo que a força magnética sobre a partícula aponta para norte e tem módulo igual a 7.9×10^{-15} N, calcule a carga da partícula.

(A) -2.08×10^{-18} C
(B) 2.08×10^{-18} C
(C) 11.09×10^{-5} C
(D) -11.09×10^{-5} C
(E) -2.08×10^{-14} C

Resposta: ☐

13. O campo elétrico numa região do espaço é $2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}$ (unidades SI). Determine o valor do fluxo elétrico através do triângulo com vértices na origem e nos pontos (5.6, 0, 0) e (0, 4.8, 0), em unidades SI.

(A) 67.2
(B) 134.4
(C) 53.76
(D) 26.88
(E) 48.38

Resposta: ☐

14. Dois condensadores com capacidades 8 μF e 16 μF são ligados em série a uma fonte de 18 V. Calcule a carga no condensador de 8 μF.

(A) 96 μC
(B) 72 μC
(C) 48 μC
(D) 120 μC
(E) 24 μC

Resposta: ☐

15. Duas resistências de 6.0 kΩ e 15.0 kΩ suportam cada uma potência máxima de 0.5 W sem se queimar. Determine a potência máxima que suporta o sistema dessas duas resistências ligadas em paralelo.

(A) 1.0 W
(B) 0.8 W
(C) 0.7 W
(D) 0.9 W
(E) 0.6 W

Resposta: ☐

16. A expressão do campo elétrico numa região do espaço é $\vec{E} = x^3\,\hat{\imath}$ (unidades SI). Calcule a diferença de potencial $V_B - V_A$, onde as coordenadas dos pontos A e B são A = (1, 0, 0) e B = (4, 0, 0).

(A) -63.75 V
(B) 63.75 V
(C) -255.0 V
(D) 255.0 V
(E) -1020.0 V

Resposta: ☐

17. Uma partícula com carga q encontra-se na origem. Qual das seguintes funções representa o potencial produzido por essa partícula ao longo do eixo dos x? (admitindo potencial nulo no infinito.

(A) $-\dfrac{k\,q}{|x|}$
(B) $\dfrac{k\,|q|}{x}$
(C) $\dfrac{k\,q}{|x|}$
(D) $-\dfrac{k\,|q|}{x}$
(E) $\dfrac{k\,q}{x}$

Resposta: ☐

2.2.2 Resolução

Problema 1. Como as lâminas são muito extensas, o campo elétrico é aproximadamente constante e com módulo

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{4}{0.15} = 26.667\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

na direção perpendicular às lâminas, de A para B. A força elétrica sobre o eletrão, com carga negativa, é também perpendicular às lâminas, mas de B para A, e tem módulo $F = |q|\,E$. A aceleração produzida pelo campo sobre o eletrão, de B para A, tem o valor constante:

$$a = \frac{|q|\,E}{m} = \frac{1.6\times 10^{-19}\times 26.667}{9.109\times 10^{-31}} = 4.684\times 10^{12}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Comparada com essa aceleração, a aceleração da gravidade pode então ser desprezada e admite-se que a energia mecânica é unicamente energia cinética mais potencial elétrica. No vácuo a energia mecânica conserva-se porque não há forças dissipativas. Se o eletrão conseguisse chegar até à lâmina B, a conservação da energia mecânica implica:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2}\left(v_\text{A}^2 - v_\text{B}^2\right) = q\,(V_\text{B} - V_\text{A})\\
&\frac{9.109\times 10^{-31}}{2}\left((1.4\times 10^6)^2 - v_\text{B}^2\right) = -1.6\times 10^{-19}(-4)\\
&v_\text{B} = 7.448\times 10^5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Mas como a aceleração na direção paralela às lâminas é nula, a componente paralela da velocidade permanece sempre igual a:

$$v_x = 1.4\times 10^6\cos(45°) = 9.899\times 10^5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

E a velocidade total nunca pode ser menor que este valor. Como a velocidade obtida em B é menor, conlcui-se que o eletrão não chegará até à lâmina B, mas seguirá uma trajetória parabólica que começa e termina na lâmina A. No ponto mais alto dessa parábola, a componente v_y da velocidade será nula, e a equação de movimento no eixo dos y é:

$$a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \quad\Longrightarrow\quad \Delta t = \frac{v_{0y}}{a_y} = \frac{9.899\times 10^5}{4.684\times 10^{12}} = 2.113\times 10^{-7}\,\text{s}$$

O tempo que demora o eletrão a regressar à lâmina A é o dobro e durante esse tempo a distância que se desloca na direção da lâmina A é:

$$\Delta x = 2\,\Delta t\,v_x = 2\times 2.113\times 10^{-7}\times 9.899\times 10^5 = 0.418\,\text{m}$$

Problema 2. Como 1 Ω = 1/(F·Hz), então 1 kΩ = 1/(μF·kHz) e pode usar-se unidades de kΩ para a resistência, μF para a capacidade e kHz para as frequências s e ω. 1 H = 1 Ω/Hz = 1 kΩ/kHz e então a indutância deve ser dada em H. A resistência, o condensador e o indutor estão em série e a impedância equivalente é:

$$Z = 0.25 + \frac{1}{3\,s} + 5\,s = \frac{15\,s^2 + 0.75\,s + 1}{3\,s}$$

A transformada de Laplace da corrente em todos os elementos do circuito é:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z} = \frac{3\,s\,\tilde{V}_e}{15\,s^2 + 0.75\,s + 1}$$

onde $\tilde{V}_e$ é a transformada do sinal de entrada. A transformada do sinal de saída é a impedância do condensador em série com o indutor, vezes a corrente:

$$\tilde{V} = \frac{15\,s^2 + 1}{3\,s}\,\tilde{I} = \frac{15\,s^2 + 1}{15\,s^2 + 0.75\,s + 1}\,\tilde{V}_e$$

A função de transferência é:

$$H(s) = \frac{\tilde{V}}{\tilde{V}_e} = \frac{15\,s^2 + 1}{15\,s^2 + 0.75\,s + 1}$$

e a função resposta de frequência é:

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{1 - 15\,\omega^2}{1 - 15\,\omega^2 + \mathrm{i}\,0.75\,\omega}$$

Perguntas

3. A

4. C

5. C

6. C

7. E

8. E

9. E

10. D

11. A

12. A

13. A

14. A

15. C

16. A

17. C

Bibliografia

Adams, S., & Allday, J. (2000). *Advanced physics.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros.* Lopes da Silva Editora: Porto, Portugal.

Blinchikoff, H. J., & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains.* Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.

Brito, L., Fiolhais, M., & C, P. (1999). *Campo Electromagnético.* Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Feynman, P. R., Leighton, R. B., & M, S. (1964). *The feynman lectures on physics.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Hecht, E. (1991). *Óptica.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Hecht, E. (1994). *Physics.* Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.

Henriques, A. B., & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo.* Lisboa, Portugal: IST Press.

Lévy-Leblond, J. M., & A, B. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas.* Lisboa, Portugal: Gradiva.

Maxima Development Team. (2015). *Maxima Manual* (5.35.1 ed.).

Mendiratta, S. K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo.* Lisboa, Portugal: Lisboa, Portugal.

Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2.* McGraw-Hill: New York, NY, USA.

Scherz, P., & Monk, S. (2013). *Practical electronics for inventors* (3a ed.). McGraw-Hill:

New York, NY, USA.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2004). *Physics* (5a ed.). New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.

Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo.* Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Villate, J. E. (2015). *Eletricidade, magnetismo e circuitos* (2a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.

Walker, J. (1975). *O grande circo da Física.* Gradiva: Lisboa, Portugal.