

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO



Setores e Rotas em Problemas de Localização - Distribuição

Luís Miguel de Sá Justo Bandeira

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Prof. José Soeiro Ferreira

Co-Orientador: Prof. Ana Maria Rodrigues

Junho de 2017

Resumo

Esta dissertação visa, no essencial, lidar com problemas de setorização que, frequentemente, também podem envolver a determinação de rotas.

Setorizar, isto é, criar setores, consiste em subdividir um determinado território em regiões geográficas de menor dimensão, geralmente, de acordo com algumas restrições. É assim necessário descrever o território com um valor quantificável, como por exemplo, pontos de recolha com capacidade conhecida.

Alguns comuns problemas de setorização estão relacionados com o dia a dia da população, porém, na maior parte, com o seu desconhecimento sobre o assunto. Por exemplo, no caso de problemas de setorização para a definição de círculos eleitorais bem como a definição de regiões para fins comerciais e entrega de produtos ou até mesmo setores para a organização de operações de emergência e segurança.

Problemas de setorização podem ser aplicados a questões com diferentes critérios que impliquem sua própria solução. Nos casos mais simples, não existem restrições aplicadas, por isso apenas é necessário criar os mesmos de acordo com algum tipo de procedimento, por exemplo, através da aplicação de um simples método heurístico.

No entanto, os problemas de setorização são, na verdade, questões multi-critério. Podendo assim existir, por exemplo, relações entre bens que podem favorecer ou prejudicar a solução para o problema. Isto também reflete na forma como é possível avaliar uma solução. Sendo este um desafio ao lidar com este tipo de questões, existem alguns critérios já conhecidos para avaliar uma solução relacionada com equilíbrio, compacidade e contiguidade dos setores resultantes.

No caso aqui apresentado é pretendida a obtenção de setores a partir de pontos de recolha de resíduos com capacidade definida, resolvendo uma questão multi-critério. Para a definição de setores é aplicado um método heurístico construtivo inspirado num fenómeno eletrostático descrito na Lei de *Coulomb*. Na segunda parte do caso de estudo é aplicado um método meta-heurístico para a determinação da rota adequada a cumprir em cada setor.

No final desta dissertação serão apresentados os resultados computacionais obtidos, bem como algumas conclusões e sugestões para trabalho futuro.

Abstract

To sectorize, i.e, create sectors, is to subdivide a given territory into districts, generally, according to some constraints. Although it is necessary to describe this territory with a quantifiable value, for example, collecting points with known demand.

Some common sectorization problems relate with population lives, mostly, with unfamiliarity about it. For example, it is the case of political districting problems in which electoral regions are defined, as well as the definition of sales and delivery regions or even emergency and security districts.

Sectorization problems can be applied to questions with different criteria implying its own solution. In most simple cases, there are no restrictions applied, so is only needed to create sectors according to some kind of procedure, for example, a simple heuristic method.

However, sectorization problems, are, indeed, multi-criteria problems. Relations between collectable goods may exist and that may favour or prejudice a solution for the problem. This also reflects in how it is possible to evaluate a solution for a districting problem. Being this a challenge when dealing with this type questions, there are some already known criteria to evaluate a solution related with equilibrium, compactness and contiguity of the resulting sectors.

In this case it is pretended to obtain sectors from waste collecting points with known demand, solving a multi-criteria question. To create districts a constructive heuristic method inspired in an electromagnetic phenomenon described in Coulomb's Law. In the second part of this case it is applied a Meta-Heuristic method to solve a Vehicle Routing Problem adequate to each sector.

In the end of this dissertation the obtained computational results will be shown as well as some conclusions and suggestions for future work will be provided.

Agradecimentos

A concretização de qualquer projeto, mesmo que individual, resulta sempre da conjugação de um conjunto diversificado de contextos, de saberes e experiências, e, especialmente, de pessoas.

Agora chegado ao fim deste percurso académico gostaria de começar por agradecer às duas pessoas que mais me apoiaram e motivaram durante a realização de todo o curso, aos meus pais.

De seguida gostaria de deixar uma palavra de profundo agradecimento aos meus orientadores, ao Professor José Soeiro Ferreira e à Professora Ana Maria Rodrigues, pela permanente disponibilidade, pela forma cuidadosa e exigente, crítica e criativa de discutir as ideias apresentadas, de orientar o trabalho que ia sendo executado, contribuindo para concretização do objetivo proposto nesta dissertação.

Por fim, gostaria de deixar uma última palavra especial aos meus amigos que estão sempre presentes em todas as ocasiões especiais, nos bons e nos maus momentos. Nunca esquecendo o grande grupo de onze, que valem por muitos mais, *Toretos*.

Luís Miguel Bandeira

“The best way to predict the future is to create it”

Peter Drucker

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	1
1.2	Motivação	2
1.3	Estrutura da Dissertação	3
2	Enquadramento Teórico	5
2.1	Setorização	5
2.1.1	Círculos Eleitorais, <i>Political Districting</i>	7
2.1.2	Comércio e Serviços	9
2.1.3	Limpeza de Neve e Distribuição de Sal pela via Rodoviária	10
2.1.4	Segurança	11
2.1.5	Ordenamento Escolar	11
2.1.6	Ordenamento Policial	11
2.2	Da Eletrostática à Setorização	12
2.3	Conceitos de Grafos e a sua Origem	15
2.3.1	Problema das Pontes de <i>Königsberg</i>	15
2.3.2	Grafos	16
2.3.3	Algoritmo de <i>Dijkstra</i>	16
2.3.4	Descrição do Algoritmo	17
2.4	Rotas	17
2.4.1	Prob. do Caixeiro Viajante	17
2.4.2	Vehicle Routing Problem	18
2.4.3	Capacitated Vehicle Routing Problem	20
2.5	Otimização Combinatória	21
2.5.1	Heurística	22
2.5.2	Métodos Aproximados	23
2.5.3	Meta-Heurística	24
2.6	Decisão Multicritério - <i>Multi-Criteria Decision Analysis (MCDA)</i>	29
2.6.1	Analytic Hierarchy Process	30
2.6.2	Meta - heurísticas e Algoritmos Exatos em Otimização Combinatória	31
2.6.3	<i>Multi-Attribute Utility Theory (MAUT)</i>	31
2.7	Validação de Resultados	32
2.7.1	Equilíbrio	32
2.7.2	Contiguidade	34
2.7.3	Compacidade	34
2.7.4	Desejabilidade	36

3	Setorização Multicritério	37
3.1	Definição do problema	38
3.1.1	Multicritério	38
3.2	Instâncias para o problema	39
3.3	Otimização de Rotas	39
4	Abordagem de Resolução	41
4.1	Instâncias - apresentação	41
4.1.1	Cargas	41
4.1.2	Relação entre Cargas	42
4.1.3	Grafo Conexo	42
4.1.4	Distância Mínima	43
4.2	Setorização	43
4.2.1	<i>SectorEl-MC</i>	44
4.2.2	Fase de Otimização do <i>SectorEl-MC</i>	48
4.3	Diferentes Procedimentos	52
4.3.1	Setorização Simples	52
4.3.2	Setorização Multicritério	53
4.3.3	Setorização Multicritério com Distância Real	55
4.3.4	Otimização	56
4.4	Avaliação de Resultados	56
4.4.1	Equilíbrio	57
4.4.2	Compacidade	57
4.4.3	Equilíbrio de Distâncias - CV_{dc}	57
4.5	Rotas	58
4.5.1	Resolução	58
4.6	Geração de Grafo e Matriz de Distâncias	59
4.6.1	<i>Graph Generator</i>	60
4.6.2	Aplicação do Algoritmo de <i>Dijkstra</i>	61
4.6.3	Matriz de Distâncias	61
4.6.4	Matriz de Relação	62
4.6.5	Setores	62
5	Análise de Resultados	65
5.1	Instâncias para o Problema	65
5.2	Setorização - <i>Exemplo</i>	66
5.2.1	Setorização nº 1	66
5.2.2	Setorização nº 2	70
5.3	Setorização Simples	73
5.3.1	Compacidade - CV_d	75
5.3.2	Equilíbrio - CV_q	75
5.3.3	Distância - CV_{dc}	75
5.3.4	Média	76
5.4	Setorização Multicritério	76
5.4.1	Compacidade - CV_d	78
5.4.2	Equilíbrio - CV_q	78
5.4.3	Distância - CV_{dc}	78
5.4.4	Média	79
5.5	Setorização Multicritério com Distâncias Reais	80

5.5.1	Compacidade - CV_d	80
5.5.2	Equilíbrio - CV_q	80
5.5.3	Distância - CV_{dc}	81
5.5.4	Média	82
5.6	Análise Global	83
5.6.1	Compacidade - CV_d	83
5.6.2	Equilíbrio - CV_q	83
5.6.3	Distância - CV_{dc}	84
5.6.4	Análise Global	85
5.7	Monção - Caso de Estudo	86
5.7.1	Resultados	87
5.8	Rotas	87
5.8.1	Setorização Simples	87
5.8.2	Setorização Multicritério	88
5.8.3	Setorização Multicritério com Distâncias Reais	90
6	Conclusões e Trabalho Futuro	93
6.1	Conclusões	93
6.2	Trabalho Futuro	95
	Referências	97

Lista de Figuras

2.1	Diagrama Conceptual [1]	6
2.2	<i>Cartoon</i> do Séc. XIX sobre <i>Gerrymandering</i>	8
2.3	Representação Vetorial da Lei de <i>Coulomb</i>	13
2.4	Representação das sete pontes de <i>Königsberg</i> - da autoria de <i>Carl Ehler</i> em 1736, numa carta enviada a <i>Euler</i>	15
2.5	Representação de um Grafo com nove vértices e dezoito arestas	16
4.1	Exemplo de Formação de Novo Setor	45
4.2	Adição de Carga a Setor	46
4.3	Exemplo de Agregação de dois Setores	47
4.4	Estrutura do Algoritmo	49
4.5	Exemplo de Remoção de um Setor	50
4.6	Exemplo de Libertação de uma Carga de um Setor	51
4.7	Conjunto de 100 Cargas dispostas no plano Cartesiano, (x,y)	59
4.8	Exemplo de Formação de Nova Aresta do Grafo à direita, a partir das Cargas, à esquerda	60
4.9	Grafo Formado a partir das Cargas de Exemplo	61
4.10	Exemplo do Menor Percurso entre duas Cargas segundo o algoritmo de Dijkstra, à direita, a azul	62
4.11	Exemplo de Formação de 4 Setores a partir de 100 Cargas	63
5.1	Setorização nº 1 - Cargas	67
5.2	Setorização nº 1 - Grafo gerado a partir das cargas	67
5.3	Setorização nº 1 - Primeira Solução	68
5.4	Setorização nº 1 - Libertação de Cargas	68
5.5	Setorização nº 1 - Solução Final	69
5.6	Setorização nº 2 - Primeira Solução	71
5.7	Setorização nº 2 - Libertação de Cargas	71
5.8	Setorização nº 2 - Solução Final	72
5.9	Setorização Simples - Melhor Solução	76
5.10	Setorização Multicritério - Melhor Solução	79
5.11	Setorização Multicritério com Distâncias Reais - Melhor Solução	82
5.12	Análise ao CV_d Global	83
5.13	Análise ao CV_q Global	84
5.14	CV_{dc} Global	85
5.15	Média Global	85
5.16	Pontos de Recolha no Concelho de Monção	86

Lista de Tabelas

2.1	Escala AHP	31
4.1	Posição e Capacidade referente a quatro Cargas	41
4.2	Relação entre Cargas	42
4.3	Arestas do Grafo	42
4.4	Distâncias de <i>Dijkstra</i>	43
5.1	Setorização Simples	74
5.2	Setorização Multicritério	77
5.3	Setorização Multicritério com Distâncias Reais	81
5.4	Capacidade Pontos de Recolha	86

Abreviaturas e Símbolos

AHP	Analytic Hierarchy Process
ARP	Arc Routing Problems
CVRP	Capacited Vehicle Routing Problem
DA	Deterministic Annealing
GA	Genetic Algorithm
ILS	Iterated Local Search
MAUT	Multi-Attribute Utility Theory
MCDA	Multi-Criteria Decision Analysis
MDR	Multi-Depot Routing
NN	Neural Networks
OC	Otimização Combinatória
PD	Political Districting
SA	Simulated Annealing
TS	Tabu Search
TSP	Traveling Salesman Problem
VRP	Vehicle Routing Problem

Capítulo 1

Introdução

Os mais recentes avanços tecnológicos têm dado um forte contributo a muitas áreas de estudo, nomeadamente, a Investigação Operacional (IO).

A IO pode contribuir, de facto, para a compreensão e resolução de problemas de Setorização, que surgem nas mais diversas situações e cuja importância é de cada vez mais reconhecida. A existência e diversificação, com aumento de complexidade, de serviços, como a recolha de Resíduos Sólidos Urbanos é um dos motivos que tem fomentado o estudo de problemas de Setorização. Este tipo de questões é assim visto e interpretado como um meio de diminuição da complexidade em matérias como a definição de rotas.

Além desta perspetiva operacional, as questões de Setorização intervêm em assuntos importantes para a sociedade e para as populações, como o planeamento escolar e o ordenamento territorial para patrulhamento policial.

Setorização corresponde à divisão de uma grande área geográfica em regiões de menor dimensão, regularmente, com o intuito de simplificar uma questão complexa, em questões de menor dimensão.

1.1 Objetivo

Esta dissertação tem como principal objetivo o desenvolvimento de um método de Setorização Multicritério segundo princípios heurísticos. Com o desenvolvimento desta metodologia pretende-se explorar e aferir o comportamento de uma abordagem já existente, *SectorEL*, baseada em fenómenos eletromagnéticos, a Força Eletrostática.

É pretendido desenvolver um método flexível e adaptável aos diversos problemas de setorização existentes, podendo, assim ser aplicado aos mais diversos cenários. Dentro destes cenários, procura-se também influenciar o comportamento do próprio algoritmo de acordo com a motivação para a Setorização. Serão assim encontradas soluções para a definição de Grafos Conexos e das distâncias entre qualquer par de pontos pertencente a este grafo.

No desenvolvimento desta dissertação tenciona-se ainda implementar um processo de otimização que mantenha a naturalidade da Lei de Coulomb, que revela a força já referida. Além do

desenvolvimento da mesma, procura-se comprovar a sua eficácia face ao pretendido em problemas de Setorização.

Com isto, entende-se que todo o método desenvolvido deverá ser capaz de apresentar respostas a questões de setorização com diferentes níveis de complexidade, computacional, ou ao nível da decisão que poderá influenciar.

Deve também ser eficaz na resolução do problema. Para esta aferição, as soluções apresentadas serão avaliadas de acordo com os critérios especificados, na literatura, ou definidos pelo agente decisor. Esta avaliação é passível de ser moldada, em concordância, com o fim a que se propõem a setorização.

Ainda relativamente ao foco principal desta dissertação, tem-se como objetivo a comparação dos resultados obtidos a partir dos métodos aqui implementados com os de um caso de estudo real, já abordado e presente na literatura.

Por fim, por vista a demonstrar a simplificação provocada pela integração de problemas de Setorização em outras questões, como o planeamento de rotas, serão projetadas as soluções para o Travelling Salesman Problem (TSP) a cada setor.

1.2 Motivação

Investigação Operacional é uma ciência aplicada que intervém, decididamente, no desenvolvimento de métodos de resolução de problemas concretos das organizações e que sustentem a tomada de decisão em problemas reais.

Dentro desta temática, destaca-se a Setorização pela sua enorme abrangência e aplicabilidade em diversos contextos de ação que exigem soluções cada vez mais complexas. Contextos estes que se relacionam com esta atividade ao nível da administração pública, do mundo empresarial ou mesmo político.

No contexto empresarial os problemas de Setorização podem abranger deliberações estratégicas ou até operacionais essenciais ao desenvolvimento de todo o modelo de negócio.

Como aluno do Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, o trabalho desenvolvido nesta dissertação revela-se um desafio interessante que aplica uma das matérias base do próprio curso, o Eletromagnetismo e a Força Eletrostática, à resolução de problemas com recurso a heurísticas e meta-heurísticas. Esta abrangência e diversidade de temas e conhecimento é, por si só, um fator motivador ao desenrolar de todo trabalho.

Esta dissertação é assim motivada pelo estudo e desenvolvimento de metodologias, com base em novas abordagens, para a resolução de problemas de setorização. A grande diversidade de aplicações apresentada motiva o estudo de questões multicritério, que permitam a sua fácil adaptação aos mais variados contextos em que se integram e se veem aplicadas.

Por fim, todo o trabalho realizado nesta dissertação pretende apresentar e contextualizar os problemas de Setorização num contexto de tomada de decisão ao nível operacional. Para o efeito é desenvolvida e apresentada a resolução para diversos TSP que têm por base as divisões territoriais criadas anteriormente, Setores.

1.3 Estrutura da Dissertação

Nesta secção é evidenciada toda a estrutura do documento.

Além deste capítulo introdutório, esta dissertação contém mais cinco capítulos estruturados de acordo com todo o trabalho desenvolvido.

O Capítulo 2 apresenta o enquadramento teórico necessário ao desenvolvimento de todo o trabalho desta dissertação.

O objetivo do Capítulo 3 é descrever todo o problema em estudo.

No Capítulo 4 são definidas e apresentadas as abordagens propostas para a resolução dos problemas de setorização estudados.

A discussão dos resultados computacionais obtidos será demonstrada no Capítulo 5.

Por fim, no Capítulo 6 são reveladas as conclusões de todo o trabalho desenvolvido e alguns cenários a ter em consideração em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Enquadramento Teórico

Neste capítulo é apresentada a temática da setorização bem como os problemas a si associados. Assim procede-se à sua caracterização, bem como à realização de uma revisão bibliográfica na qual se referem aplicações e resoluções adequadas a este tipo de questões. O mesmo exercício é também efetuado para os restantes aspetos a considerar nesta matéria como, por exemplo, otimização de rotas e análise combinatória.

2.1 Setorização

Todos nós tomamos contacto diário com distritos ou setores, direta ou indiretamente. O carteiro que todos os dias entrega correspondência na nossa residência possui uma área de distribuição pela qual é responsável. Ou ainda, no caso de queda de neve em estradas, também as operações de limpeza e remoção estão sujeitas a uma divisão de acordo com setores [2].

Quando votaram nas últimas eleições, cada um dos eleitores encontrava-se associado a um círculo eleitoral. A setorização vem garantir que a votação ocorra de forma a não privilegiar nenhuma organização política face a outra [3, 4, 5], sendo esta uma das principais questões que motivou o estudo e desenvolvimento deste tipo de problemas. Este assunto revelou-se também essencial em matérias relacionadas com o ordenamento do território e/ou tomada de decisões estratégicas para a vida das pessoas e/ou organizações. Decisões estas, presentes na literatura, que se relacionam, por exemplo, com a definição de grupos de alunos indicados para frequentar uma escola com base na sua área de residência [6], controlo e patrulhamento policial [7, 8, 9].

Também no quotidiano empresarial entramos em contacto com setores, por exemplo, através da gestão do tráfego aéreo [10] e da definição de regiões de atividade comercial [11, 12, 13].

Todos estes exemplos têm algo em comum: uma grande área geográfica é fracionada em regiões mais pequenas. Por setorização entende-se assim a divisão de um todo, em elementos de menor dimensão designados por setores, distritos, zonas, regiões ou áreas de responsabilidade.

Estas sub-divisões estão sujeitas, habitualmente, a algumas restrições. Existem algumas zonas elementares, por exemplo, um quarteirão não poderá ser dividido por dois setores. Além disso,

dependendo da aplicação, a conceção de distritos pode atender a alguns requisitos adicionais. Alguns dos mais comuns relacionam-se com a equidade de uma medida quantificável. Por exemplo, é esperado que cada carteiro tenha aproximadamente a mesma carga laboral, bem como em cada círculo eleitoral exista um número aproximado de eleitores. Em muitos contextos empresariais, devido a princípios organizacionais e económicos, é também importante que os distritos sejam contíguos. Definindo áreas de responsabilidade claras e prevenindo o cumprimento de rotas que se revelam pouco eficientes. Existem também requisitos sobre a forma de cada distrito, pois estes deverão apresentar formas preferencialmente arredondadas ou quadrangulares. Tempos de viagem em setores deste tipo revelam-se menores do que em setores com formas irregulares ou extensas geograficamente. Por outro lado, nos problemas de origem eleitoral, a existência de setores com forma geométrica regular permite prevenir a manipulação dos próprios resultados eleitorais.

Na Figura 2.1 é apresentado um Diagrama Conceptual que organiza e expõe algumas das aplicações dadas a problemas de Setorização.

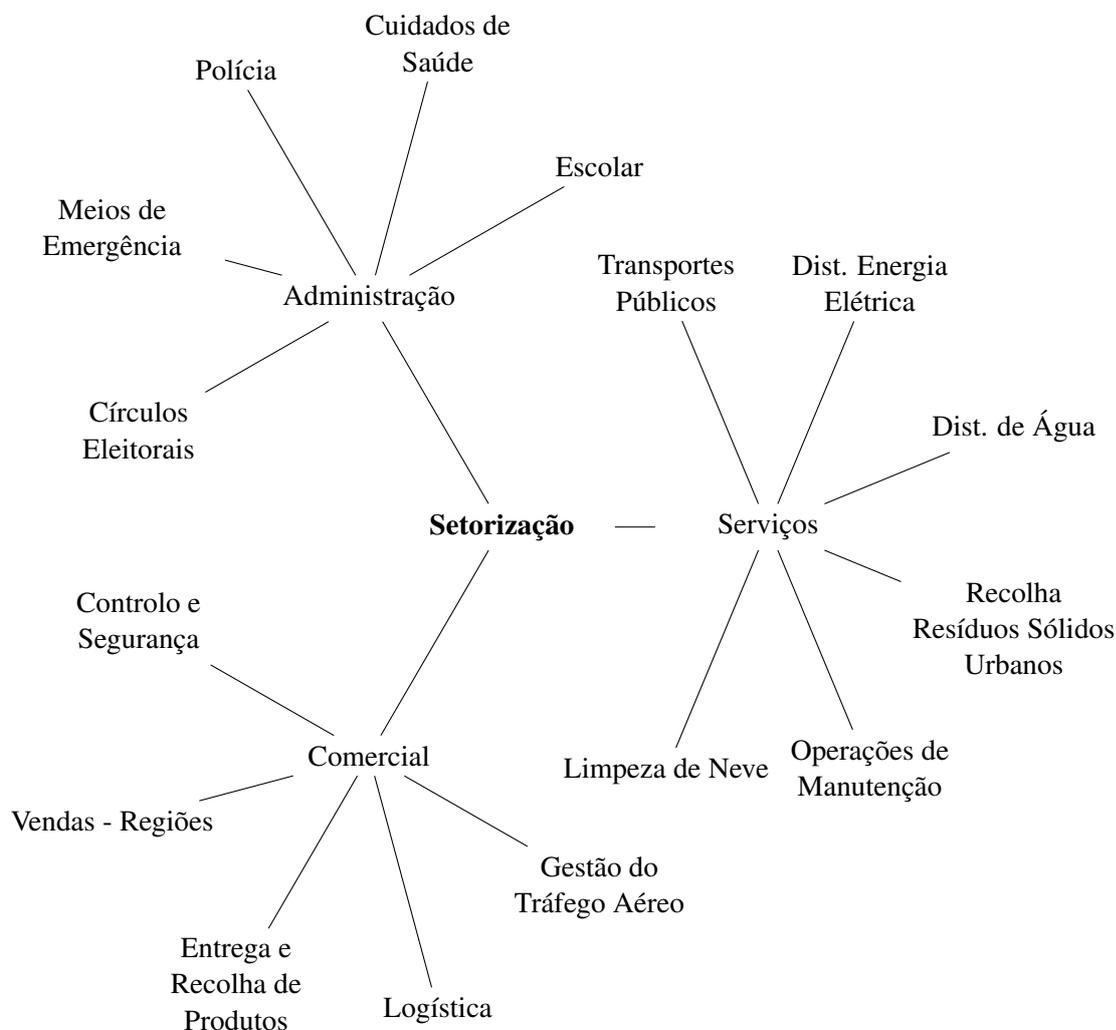


Figura 2.1: Diagrama Conceptual [1]

Estas observações suscitam a seguinte definição: por setorização compreende-se a resposta

ao problema de agrupar pequenas áreas geográficas em regiões mais extensas de acordo com um número relevante de critérios e restrições. Os mais importantes são o equilíbrio, a compacidade e a contiguidade. O equilíbrio descreve o requisito para que as regiões possuam analogamente a mesma dimensão, seja esta geográfica ou segundo outra quantidade mensurável. Um setor é tido como geograficamente compacto se a sua forma geométrica não é distorcida. Num distrito contíguo é possível alcançar cada um dos seus constituintes sem ser necessário abandonar o mesmo.

Os problemas de setorização surgem também associados a outras temáticas no contexto da gestão operacional. Desdobrando um problema complexo num conjunto de casos mais simples. Por exemplo, a solução para alguns problemas de otimização de rotas inicia-se pelo agrupamento de pontos em setores e posteriormente pela determinação da rota adequada a cumprir no próprio setor.

Frequentemente, no contexto dos problemas de localização-distribuição é comum a ocorrência da questão sobre onde colocar determinadas instalações. Recorrendo à setorização, é então possível, ao agrupar os clientes servidos, sugerir boas localizações para essas instalações.

Neste capítulo são também exemplificados métodos de resolução para este tipo de questões, que vão desde as abordagens clássicas [4], até mais recentes e inovadoras [14], no qual o restante trabalho exposto neste documento se focará.

As abordagens encontradas na literatura, que ao contrário de outros problemas combinatórios, podem revelar-se próprias e distintas para cada questão em estudo graças à especificidade da mesma. Explicitando, uma boa solução para um problema de setorização poderá não ser adequada para um outro referente à mesma área geográfica. Característica que torna assim cada um dos problemas dependente dos seus objetivos, ou restrições, impostos(as) pelos interessados no mesmo.

Além de metodologias para a resolução, será também apresentado um estudo que contempla formas de otimização e melhoria das soluções obtidas bem como critérios para a validação das mesmas. Esta validação terá sempre como princípio o pretendido para a solução do problema [14].

2.1.1 Círculos Eleitorais, *Political Districting*

O problema de *Political Districting* (PD) tem sido estudado desde a década de sessenta do séc XX. Desde então têm sido propostos variados modelos e técnicas com o propósito de prevenir a manipulação de distritos para o favorecimento de uma organização política em detrimento de outras [3].

Em alguns sistemas eleitorais, uma área governamental deve ser dividida em "círculos eleitorais" de forma a que cada um destes seja responsável pela eleição de um representante com assento parlamentar. PD consiste assim na subdivisão de um dado território num número pré-estabelecido de círculos nos quais se realizarão as eleições. Por fim, respeitar o princípio de "um homem - um voto", i.e., qualquer voto deverá ter o mesmo peso na votação, o total de eleitores deve ser assim aproximado em cada círculo.



Figura 2.2: *Cartoon do Séc. XIX sobre Gerrymandering*

De forma a prevenir *Gerrymandering*, Figura 2.2, é importante tomar em atenção a contiguidade e compacidade da solução. *Gerrymandering* resulta da junção dos termos "Gerry" e "Salamander". Em 1812, o governador Elbrigde Gerry redesenhou os círculos eleitorais para a eleição para o senado do estado do *Massachusetts*, um dos setores ficou com a forma de uma salamandra. A ideia principal por detrás deste fenómeno consiste no princípio de que "o vencedor ganha tudo". Se um partido vencer as eleições num distrito não importa se este vence apenas por uma pequena diferença de votos ou por larga margem. Em contraste, se um partido perder as eleições, cada voto tornar-se-á inútil para o derrotado. Assim, se um partido vencer em múltiplos distritos por pouco e mesmo que perca outros expressivamente, pode ainda obter uma maioria no senado que não vai de acordo com a maioria da votação dos eleitores [15].

Os principais critérios para este tipo de problemas são então os seguintes:

- Integridade;
- Contiguidade;
- Equilíbrio;
- Compacidade.

É de referir que existe um outro critério que aparece geralmente associado a PD e que se refere aos respeito pelas existentes subdivisões administrativas já verificadas no território (também conhecido como conformidade com limites administrativos). Desta maneira previne-se a divisão

de regiões já definidas em dois círculos eleitorais distintos, i.e., cada cidade (ou quarteirão) deverá pertencer, na totalidade, a um círculo eleitoral. Existem ainda alguns critérios aplicados a problemas específicos como o respeito por limites naturais. Em países como Itália, essas barreiras estão bem presentes pela existência de inúmeros rios, montanhas e lagos que surgem como obstáculos à contiguidade territorial. Também a representação de minorias étnicas e o respeito pela integridade das comunidades podem ser aplicados [16].

Diversos tipos de estratégias aplicadas na resolução destes problemas foram estudadas nos últimos cinquenta anos. Algumas abordagens, como técnicas de localização [17, 18] e pesquisa local [19, 20] revelaram-se das mais referidas pelos autores. Surgiram também, na última década, novos modelos com base na aplicação de meta-heurísticas como pesquisa tabu [21, 22], arrefecimento simulado [23, 24] e algoritmos genéticos [25, 26].

Por fim, é de salientar o surgimento de uma nova classe de métodos a partir de técnicas derivadas da geometria computacional [27], nomeadamente, a aplicação de diagramas de *Voronoi* [28, 29].

Em suma, todas estas técnicas e heurísticas têm em consideração os critérios básicos de equilíbrio, contiguidade e compacidade.

2.1.2 Comércio e Serviços

Uma das aplicações de setorização a áreas de atividade comercial consiste na definição de regiões e sub-regiões para a aplicação do *Traveling Salesman Problem* (TSP). Cada região será atribuída a um vendedor que percorrerá rotas simplificadas [11].

São assim apresentadas quatro características:

- Todos os clientes num mesmo distrito são servidos pelo mesmo vendedor;
- Cada cliente é visitado uma vez por apenas um vendedor;
- A cada visita está associado um tempo de serviço s ;
- A função objetivo minimiza o custo, uma medida de compacidade da divisão e o equilíbrio do lucro por vendedor.

Este problema revela-se frequente para as mais variadas empresas que necessitam de dividir os seus clientes de modo a que todas as operações relacionadas com marketing e distribuição sejam eficientes. Neste contexto, é assim desejável que a solução encontrada seja equilibrada, ou seja, que o número dos clientes por região se mantenha equilibrado e também que estes representem um volume de trabalho idêntico (por região) para cada operador envolvido no processo. Associado ainda a este problema em específico está o desejo em manter o mais estável possível a relação entre cada cliente e representante para que, assim, sejam consolidadas as relações entre estes e a própria empresa.

Para a resolução desta problema foi proposta a aplicação de um algoritmo de pesquisa tabu baseando-se na modelação feita para um problema de setorização e rotas com procura estocástica

[30]. É assim estudada a solução para esta questão quando os clientes se apresentam de forma dinâmica e em comum com a existência de diversos centros logísticos que apoiam e prestam serviços a estes mesmos consumidores. Foram assim considerados, para a validação dos resultados, critérios relacionados com o custo do trabalho do próprio empregado da empresa, a compacidade dos setores e o equilíbrio gerados pela atividade em cada setor.

2.1.3 Limpeza de Neve e Distribuição de Sal pela via Rodoviária

A distribuição de sal pelas vias rodoviárias para evitar a acumulação de neve e gelo é uma prática comum em muitas regiões nas quais o inverno é bastante rigoroso. Porém algumas abordagens a esta temática limitam-se apenas ao planeamento de rotas assumindo que todos os parâmetros, como a localização dos próprios depósitos de sal são já conhecidas [31, 32].

Porém, em algumas questões, esta localização não é conhecida e torna-se assim numa questão de estudo, pois, existe cada vez mais interesse na redução do número de depósitos de sal existentes, aliada à redução de custos de manutenção [2]. Além disto, é pretendido que o reabastecimento dos veículos com sal possa ocorrer durante o cumprimento de uma rota planeada, através da implementação de silos (depósitos secundários), aliando isto à vantagem dos custos associados a estes serem significativamente inferiores.

Habitualmente é dada mais atenção ao problema de determinar e estabelecer operações eficientes dentro dos limites já estabelecidos para os distritos em causa. Muitas vezes, porém, a poupança significativa de meios e recursos pode ser alcançada a longo prazo se for dado maior enfoque à determinação dos próprios limites dos distritos aquando do planeamento de todas as operações. Ou seja, em vez de adaptar as mesmas aos distritos já existentes, serão os próprios distritos influenciados pelo pretendido e pelo tipo de operações em causa.

No problema em causa, a setorização é definida como a divisão da rede rodoviária de forma a que cada uma das sub-regiões contenha apenas um depósito e seja responsável pelas suas operações.

Uma das abordagens para a resolução deste problema assume que cada distrito é determinado pela localização de cada depósito de sal. Segundo esta abordagem, a divisão em distritos consiste na associação de arestas e nós ao centro mais próximo. Outra abordagem consiste em *Multi-Depot Routing* (MDR), em associar nós e arestas da rede rodoviária ao depósito no qual a rota tem origem. Cada partição é assim dependente de um *depot* e corresponde à rota de um veículo. Conclui-se então que neste problema, toda a divisão territorial é motivada por um problema de otimização de rotas específico.

Para a resolução do problema é apresentada uma metodologia heurística de duas fases. A rede rodoviária é dividida em pequenos ciclos que posteriormente são agregados entre si de acordo com uma abordagem multicritério. Após a conclusão desta mesma agregação são definidas rotas para cada um dos setores.

2.1.4 Segurança

As patrulhas de segurança constituem um importante mecanismo para a prevenção de roubos e vandalismo em espaços públicos.

É assim necessário o controlo e patrulhamento de um conjunto de localizações, requerendo, cada uma destas, um número específico de visitas por período de tempo, o que pressupõe que estas sejam atempadamente planeadas [9]. Torna-se então importante dividir estes locais em grupos específicos e restritos às condições operacionais dos mesmos, revelando-se assim a aplicabilidade dos problemas de setorização a este conjunto de temáticas.

A divisão de todos os pontos, num número mínimo de setores disjuntos, constitui um objetivo importante para que, em cada setor, seja possível o planeamento atempado de rotas que cumpram com todas as condições existentes. Exemplifica-se assim como a duração máxima das rotas bem como a disponibilidade limitada para a receção das visitas por parte de cada patrulha.

Numa abordagem heurística o problema em causa é dividido em duas partes. A primeira que representa o problema de setorização que agrupa todos os locais e a segunda que determina rotas adequadas a cada setor. Porém, considera-se que as duas não são, nem podem ser, resolvidas de forma independente. É assim proposta uma heurística construtiva e um algoritmo iterativo de *search and destroy* para a componente de setorização e uma heurística, também construtiva, para aplicar à segunda componente do problema [8].

2.1.5 Ordenamento Escolar

Para a direção de um agrupamento escolar responsável por diversas escolas num determinado território, o problema de setorização define quais os grupos de estudantes que deverão frequentar cada um dos espaços de ensino. São então atendidas restrições referentes à própria escola e turmas além de outros objetivos de cariz social. Os estudantes devem permanecer na mesma escola de ano para ano e cada "distrito" deve ser contíguo por forma a permitir que estudantes que habitem na mesma zona possam estar afetos à mesma escola [6].

A administração escolar deve resolver este problema segundo uma base anual e de cada vez que seja necessária uma significativa reorganização dos recursos disponíveis, como, por exemplo, a abertura ou encerramento de turmas. Porém, devido a objetivos sociais, já referidos, torna-se irrealista a implementação de uma abordagem que não permita qualquer tipo de interação com o administrador do sistema.

Para a solução deste problema foi então implementada uma heurística que atribui cada grupo de estudantes à escola mais próxima da sua residência atendendo a restrições de capacidade do próprio estabelecimento de ensino.

2.1.6 Ordenamento Policial

Duas das maiores preocupações dos departamentos de polícia urbanos são a eficaz utilização dos veículos de patrulha e o equilíbrio do volume de trabalho atribuído, a diferentes agentes da

autoridade, em diferentes regiões geográficas. Isto leva à necessidade de uma divisão equitativa e eficiente de recursos transversal a toda uma área de jurisdição [7].

Por forma a tornar esta divisão mais simples, as forças de segurança dividem a sua jurisdição em áreas mais pequenas como setores de patrulha com, pelo menos, um veículo associado a cada um destes. Vendo estes últimos como nós interligados entre si por arcos, é assim possível representar por um grafo, descrito na secção 2.3 do presente documento, a jurisdição policial descrita.

Além dos critérios referidos acima e comuns a todos os problemas de setorização, quando estes são aplicados a forças policiais é necessário ter em atenção alguns mais específicos. São exemplo o tempo de patrulha por agente policial e o tempo de resposta em situações de emergência. Torna-se assim necessária a introdução de medidas idênticas à avaliação do tempo de espera em filas para qualquer serviço, acrescentando alguma dificuldade à resolução do problema por não serem medidas lineares:

- Tempo de Resposta - o tempo de resposta em cada distrito durante todos os dias da semana não deverá exceder um determinado limite máximo especificado;
- Tamanho - o rácio entre a área do maior e do menor distrito não deverá exceder um determinado limite máximo especificado;
- Contiguidade - cada distrito deverá permanecer conectado;
- Compacidade - o rácio entre a maior distância Euclidiana e a raiz quadrada da área não deverá exceder um determinado limite;
- Conexo - cada ponto adicionado não deverá provocar uma alteração profunda à forma do novo distrito nem ao anterior.

Por fim, a solução para este problema foi encontrada com recurso a um algoritmo de arrefecimento simulado, o qual, a cada iteração, re-allocava os pontos pertencentes a um setor localizado na fronteira entre dois setores adjacentes.

2.2 Da Eletrostática à Setorização

É apresentado um processo de setorização inspirado pela Eletrostática, designadamente, na Lei de *Coulomb*, *SectorEl* [14]. Este afirma que duas cargas com quantidade (massa, trabalho, clientes, etc), quando presentes no mesmo sector, devem apresentar entre si algum tipo de atração. Pelo contrário, quando em setores diferentes, esta atração será menor.

São precisamente estes fenómenos físicos, atração e repulsão, que, apesar de neste método serem adaptados à temática em causa, são caracterizados por *Coulomb* definindo a força eletrostática como [33]:

“A força entre um par de cargas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre si e diretamente proporcional à quantidade de carga de uma multiplicada pela quantidade da outra”

Segundo esta lei a força entre duas partículas estacionárias de cargas q_1 e q_2 , separadas por uma distância d_{12} , é dada pela fórmula (2.1):

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{d_{12}^2} \quad (2.1)$$

onde k representa a Constante de *Coulomb*, $8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, e \hat{r}_{12} o vetor unitário. A força está assim presente ao longo da linha reta que une as duas cargas, Figura 2.3. Se a grandeza de sinal destas for idêntica, então a força eletrostática entre as mesmas é repulsiva. Pelo contrário, se as cargas possuírem sinais contrários, a força entre si é atrativa.

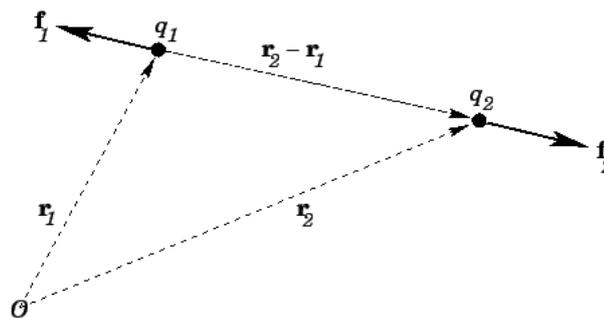


Figura 2.3: Representação Vetorial da Lei de *Coulomb*

Assim considera-se que um sistema composto por n pontos é idêntico a n cargas distribuídas geograficamente, as quais se pretendem agrupar por setores. Sendo conhecida a posição de cada um dos pontos, a respetiva carga correspondente a uma quantidade associada a este.

Seguindo assim a lei de *Coulomb* é calculada uma matriz representativa da atração entre cada uma das cargas. Porém, inicialmente, considera-se que em cada par existem cargas com sinais contrários, ou seja, que se atraem mutuamente. Também a constante k toma o valor de 1 durante todo o algoritmo.

A atração, dada pela expressão (2.2), entre cada par de pontos, é assim calculada como o quociente entre os produtos das cargas, q_i e q_j , e o quadrado da distância euclidiana, d_{ij} (2.3), entre os pontos $I, (x_i, y_i)$, e $J, (x_j, y_j)$.

$$a_{ij} = \|\vec{a}_{ij}\| = \|\vec{a}_{ji}\| = \frac{q_i q_j}{d_{ij}^2} \quad (2.2)$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2.3)$$

Com os valores anteriores, é possível encontrar o par de pontos com a maior atração admissível, pois os próprios setores podem encontrar-se sujeitos a restrições de capacidade que impossibilitam a união de alguns destes pares. As duas cargas juntar-se-ão assim num novo ponto, q_c , com carga igual à soma das cargas respetivas, $q_c = q_i + q_j$. As coordenadas, x_c e y_c , são assim calculadas recorrendo às expressões:

$$x_c = \frac{q_i}{q_i + q_j}x_i + \frac{q_j}{q_i + q_j}x_j \quad (2.4)$$

$$y_c = \frac{q_i}{q_i + q_j}y_i + \frac{q_j}{q_i + q_j}y_j \quad (2.5)$$

Após a primeira iteração, a carga resultante obtém um valor acrescido o que provocará um favorecimento e maior força de atração com as restantes, e consequentemente, resultados bastante desequilibrados. As cargas continuarão assim a aumentar até que seja atingida alguma restrição de capacidade.

A fim de colmatar este desequilíbrio é proposta uma alteração à equação (2.2), verificando-se que o fator exponencial do denominador irá aumentar a cada iteração do algoritmo. A atração entre cargas é agora definida pela expressão (2.6):

$$a_{ij} = \|\vec{a}_{ij}\| = \|\vec{a}_{ji}\| = \frac{q_i q_j}{d_{ij}^{2+NIP-NS}} \quad (2.6)$$

NIP representa o número inicial de pontos e NS o número de setores. No início da execução do algoritmo verifica-se que $NS = NIP$. Após a primeira iteração, $NS = NIP - 1$, e de seguida $NS = NIP - 2$, até que o número desejado de setores seja alcançado.

Esta adaptação acima descrita é justificada pela relativização e atenuação do fator da multiplicação de cargas. Quando um setor aumenta de dimensão, em quantidade associada, também a sua atração para com os restantes pontos aumenta. Isto leva a uma posição dominante por parte de um grande setor existente que atrairia todos os pontos à sua volta. Ao introduzir um fator que aumenta à medida que são formados novos setores é reduzida e atenuada a influência provocada por um setor de grandes dimensões.

A dicotomia entre atração e repulsão pode, nalguns casos, ser demasiado rigorosa, sendo por isso necessário proceder a adaptações e melhorias que se adequem à realidade dos cenários em causa. É então acrescentado o parâmetro s_{ij} à expressão (2.6). Este representa um fator diferenciador à atração entre pontos, prejudicando as cargas que, à partida são pretendidas em setores

diferentes e beneficiando as que, pelo contrário, se pretendem no mesmo setor (2.7).

$$a_{ij} = \|\vec{a}_{ij}\| = \|\vec{a}_{ji}\| = \frac{q_i q_j}{d_{ij}^{2+NIP-NS}} (s_{ij} + 1) \quad (2.7)$$

2.3 Conceitos de Grafos e a sua Origem

Atendendo a toda a temática abordada nesta dissertação revela-se essencial a introdução ao conceito de Grafos. Nesta secção será também apresentada uma breve introdução histórica ao problema das pontes de *Königsberg*.

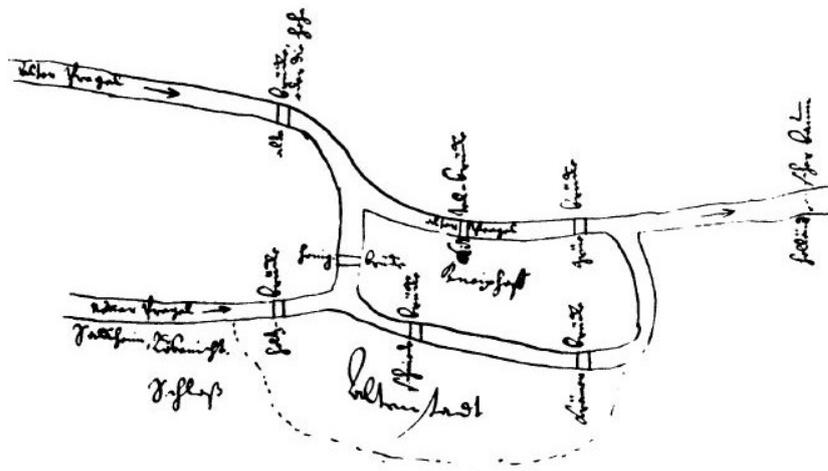


Figura 2.4: Representação das sete pontes de *Königsberg* - da autoria de *Carl Ehler* em 1736, numa carta enviada a *Euler*

2.3.1 Problema das Pontes de *Königsberg*

O estudo de *Arc Routing Problems* (ARP) iniciou-se no século XVIII quando Leonhard Euler apresentou a sua solução para o problema das pontes de *Königsberg* [34].

Este problema relatava o caso da cidade de *Königsberg*, Figura 2.4, na Prússia que se situava nas duas margens do rio *Pregel*. Este circundava duas grandes ilhas que se encontravam ligadas entre si e à cidade por sete pontes. O problema consiste assim em determinar se é possível fazer um passeio por toda a cidade passando apenas uma vez em cada uma das sete pontes, partindo e regressando do mesmo ponto da cidade.

A resposta apresentada por Leonhard Euler, ao demonstrar que o pretendido não era possível originou a Teoria dos Grafos [35].

2.3.2 Grafos

Um grafo G é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) tal que E é um subconjunto do conjunto V^2 de pares não ordenados de V . Caso o contrário não seja explícito, os grafos são sempre considerados como conjuntos finitos de elementos, ou seja, V e E são sempre finitos. Se G é um grafo, então $V = V(G)$ é o conjunto dos vértices de G e $E = E(G)$ o conjunto das arestas. Uma aresta (x, y) é definida como o que une dois vértices, x e y [36].

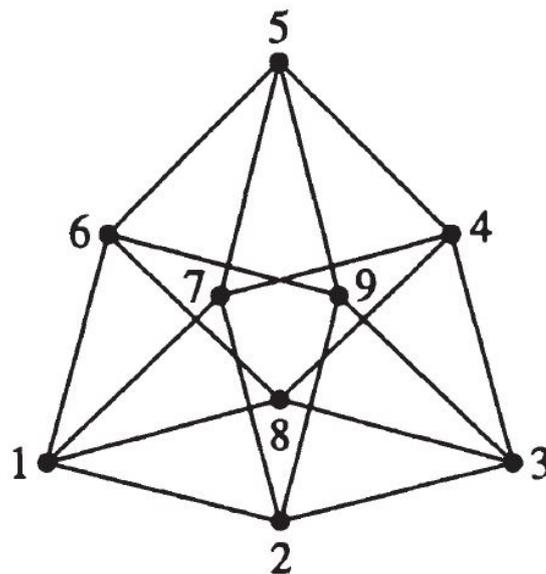


Figura 2.5: Representação de um Grafo com nove vértices e dezoito arestas

2.3.3 Algoritmo de *Dijkstra*

O algoritmo de *Dijkstra* permite encontrar o caminho mais curto entre os nós de um grafo, que, por exemplo, podem representar a via rodoviária [37]. Este foi desenvolvido por *Edsger Dijkstra* em 1956 e publicado três anos depois [38].

Existem diversas variantes para este algoritmo: a original, proposta pelo autor, encontra o caminho mais curto entre um par de nós, outra, mais comum, define um nó do grafo como a origem para todo o problema e determina a distância entre este e todos os outros vértices [39].

O algoritmo também pode ser aplicado ao cálculo da distância de apenas um nó até um outro, previamente definido. Assim a execução do algoritmo torna-se mais simples porque é apenas pretendida uma distância, ao contrário, do que acontece na normal aplicação deste método. Por exemplo, se os nós do grafo representarem cidades, e, as arestas, os custos da deslocação entre cidades, o algoritmo de *Dijkstra* pode ser aplicado a questões de otimização de rotas entre cidades. Esta característica justifica a vasta aplicação dada a este algoritmo na temática do roteamento [40].

2.3.4 Descrição do Algoritmo

Supondo que é pretendido determinar o caminho mais curto entre duas intersecções, cruzamentos, numa cidade: o ponto de partida e de destino. O algoritmo de *Dijkstra* começa por atribuir um valor infinito à distância do ponto de partida a qualquer outro ponto na cidade. Esta definição não implica que as distâncias sejam de facto infinitas mas sim indica que os cruzamentos em causa ainda não foram visitados. Para cada iteração é seleccionada uma intersecção, a intersecção atual. Durante a primeira iteração, a intersecção atual será o ponto de partida e assim a distância até si será zero. Nas subseqüentes iterações, após a primeira, a intersecção atual será a intersecção mais próxima da origem que ainda não foi visitada.

O valor da distância entre cada intersecção não visitada diretamente ligado à intersecção atual é atualizado. Isto é feito com o somatório da distância entre todas as intersecções não visitadas e aquele que caracteriza a intersecção atual, sendo, de seguida, este valor utilizada para re-caracterizar todas as intersecções não visitadas, caso este seja inferior ao valor atualmente presente na caracterização. Assim a intersecção apenas recebe uma nova caracterização se o novo caminho até à intersecção atual for menor do que os previamente conhecidos.

O algoritmo continua assim com este processo de atualizar a caracterização, com as menores distâncias à origem, das intersecções vizinhas da atual. Escolhida a intersecção seguinte mais favorável, a atual é então marcada como visitada e o algoritmo prossegue até que o ponto de destino seja também caracterizado como "visitado". Ao ocorrer, é assim possível verificar o caminho mais curto entre dois pontos, verificando quais as intersecções, ou nós, cuja caracterização indica que foram visitados.

2.4 Rotas

Esta secção pretende fazer uma breve apresentação de problemas de rotas mais comuns, como, *Vehicle Routing Problem* (VRP) [41] e um dos seus derivados, o *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) [42, 43]. É também apresentado um dos problemas fundamentais para o estudo e planeamento de rotas, o TSP.

2.4.1 Prob. do Caixeiro Viajante

Um vendedor ambulante pretende visitar cada uma das cidades de um grupo apenas uma vez, tendo, como ponto de partida e regresso, a sua própria cidade e com o menor custo possível. Assim uma das questões que se levanta é a do planeamento da rota com menor distância total para a viagem [44]. Este problema é bastante conhecido de muitos ramos da Matemática, Ciência da Computação e Investigação Operacional. Para a resolução do mesmo foram já aplicados inúmeros métodos tanto exatos como aproximados.

O primeiro modelo de programação linear para o TSP foi apresentado por Dantzig em 1954 e pode ser descrito como [45]:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ como um conjunto de nós (pontos que representam consumidores ou cidades);
- $i, j =$ par de pontos que constitui uma aresta;
- $C = (c_{ij}), (i, j \in I \cup J)$ uma matriz de distâncias (indefinida se $i, j \in I$);
- x_{ij} , variável binária igual a 1 se e só se a aresta, i, j , for escolhida para a solução.

A função objetivo é representada por, (2.8):

$$\min \sum_{i,j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.8)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{k < j} x_{kj} = 2 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (2.9)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq \frac{1}{2} (S) - 1 \quad (S \in \mathbb{N}; \quad 2 \leq |S| \leq n-2) \quad (2.10)$$

$$x_{ij} = 0, 1 \quad (i \in I) \quad (2.11)$$

A expressão 2.9 apresenta uma restrição de grau, especificando o grau de cada nó. A expressão 2.10 prevê a formação de soluções que não visitem todos os locais pretendidos, ou seja, previne a determinação de sub-rotas. Por fim, 2.11 apresenta a restrição de integralidade da solução [46].

Concluindo, o problema representado pelo TSP consiste em determinar um Ciclo *Hamiltoniano* (que visita cada nó apenas uma vez) de tal forma que o somatório da distância das arestas percorridas seja minimizada. Recorrendo assim a um grafo completo para a definição do próprio TSP assegura-se a existência de uma solução viável [44].

2.4.2 Vehicle Routing Problem

O clássico problema de *Vehicle Routing Problem* (VRP) [46] é definido num grafo [47]:

- Grafo, $G = (V, E)$;
- Vértices, $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$;
- Arestas, $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i < j\}$.

v_0 representa o ponto de partida dos veículos e os restantes vértices os pontos que deverão ser visitados pelos mesmos.

É um dos mais estudados problemas de otimização combinatória. Isto deve-se à sua relevância prática e considerável dificuldade. Este tipo de questões está relacionada com a determinação da rota ótima a ser utilizada por uma frota de veículos, baseadas em diversos depósitos de mercadoria, com o propósito de servirem um conjunto de clientes pelo menor custo possível. Este assume assim um papel de destaque na redução dos custos logísticos e de transporte.

Algumas aplicações comuns deste problema relacionam-se por exemplo com a recolha de resíduos sólidos urbanos, limpeza de ruas, e entrega de mercadorias.

A distribuição de bens, num determinado período de tempo, a um conjunto de clientes, por uma determinada frota de veículos, distribuídos por um ou mais centros de armazenagem, é responsabilidade de um grupo de motoristas que utilizam a rede rodoviária apropriada para a realização da sua atividade. Em particular, a solução do VRP pretende estabelecer um conjunto de itinerários, cada um executado por um único veículo, que se inicia e conclui na mesma localização. Estes devem assegurar o cumprimento de todos os requisitos dos clientes bem como satisfazer todas as restrições operacionais e ainda minimizar o custo global da operação.

A rede rodoviária utilizada é geralmente representada através de um grafo cujas arestas representam secções de estradas e os vértices cruzamentos entre as mesmas bem como a localização dos pontos de partida das rotas e destinos. Estes arcos podem representar apenas um ou os dois sentidos de circulação e estão geralmente associados a um custo, podendo este ser temporal ou monetário e dependente, por exemplo, do tipo de veículo.

São assim características dos clientes:

- Localização correspondente a um ponto no grafo;
- Quantidade de bens correspondente à procura que deve ser recolhida ou distribuída a cada cliente;
- Restrições temporais ao serviço, designadamente, disponibilidade apenas durante um período de tempo;
- Restrições geográficas que impossibilitam o acesso por determinados veículos (por exemplo, largura das vias em centros históricos).

As rotas estabelecidas podem ter o seu início e fim em mais do que um local correspondendo cada um a um vértice do grafo. A cada uma destas localizações está associado um pré-determinado número de veículos correspondente a um limite de capacidade operacional.

A solução de um problema de VRP também poderá ter em conta restrições impostas à própria operação da empresa, como por exemplo, as associadas ao tempo necessário para o cumprimento da rota definida e da carga laboral de cada funcionário. Pode também ser necessário o cumprimento de requisitos específicos do cliente, por exemplo, relacionados com o acondicionamento de bens ou produtos.

2.4.3 Capacitated Vehicle Routing Problem

A definição de CVRP assemelha-se às definições previamente apresentadas para o TSP [48, 49] e VRP [50, 51], sendo até uma extensão do último.

Na generalidade, num CVRP, os veículos existentes possuem a mesma capacidade, limitada, de carga, e as suas rotas têm início e fim na mesma localização. Também os clientes servidos apresentam procura com capacidade determinada à qual os operadores devem responder adequadamente. A frota em causa tem também uma capacidade total já definida, Q .

O problema de CVRP é assim caracterizado por [48, 52]:

- Cada cliente é visitado apenas uma vez;
- A procura total dos clientes não excede a capacidade da frota Q ;
- A capacidade individual de cada veículo não é excedida;
- Restrições temporais por parte dos clientes - disponíveis para operação de recolha, ou descarga, durante determinada janela temporal.

O tempo de serviço pode adotar a mesma grandeza de medida que a distância percorrida pelos veículos por forma a facilitar a procura pela solução do problema.

O objetivo é assim o de determinar rotas que respeitem todas as restrições impostas, minimizando o custo das mesmas [53, 54].

Definindo:

- C_{ij} - custo de deslocação entre o cliente i e j , em unidades temporais;
- K - número de veículos;
- N - número de clientes;
- S_i - tempo de serviço no cliente i ;
- Q^k - capacidade de carga do veículo k ;
- T^k - distância máxima a percorrer pelo veículo k ;
- d_i - procura pelo consumidor i ;
- $X_{ij}^k \in \{0, 1\}$ ($i \neq j; i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$).

O CVRP pode assim ser descrito por:

$$\min \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^K C_{ij} X_{ij}^k \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N X_{ij}^k d_i \leq Q^k \quad (1 \leq k \leq K) \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N X_{ij}^k (C_{ij} + S_i) \leq T^k \quad (1 \leq k \leq K) \quad (2.14)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij}^k = \sum_{j=1}^N X_{ji}^k \leq 1 \quad \text{para } i = 0 \text{ e } k \in \{1, \dots, K\} \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N X_{j0}^k \leq K \quad (2.16)$$

Onde 2.12 apresenta a função objetivo do problema. A expressão 2.13 representa as restrições de capacidade do veículo, no qual $X_{ij}^k = 1$ se o veículo k viaja diretamente do cliente i para o cliente j e 0 caso o contrário ocorra. A restrição 2.14 apresenta a restrição à distância máxima percorrida pelo veículo. 2.15 verifica que cada rota planeada tem como início e fim o mesmo ponto. Por fim, 2.16 assegura que o número máximo de rotas, partindo da origem, não é superior ao número de veículos existentes.

Em suma, trata-se de um problema de VRP ao qual são associadas restrições de capacidade quer por parte da oferta do serviço, capacidade da frota, quer por parte dos consumidores e respetiva procura.

2.5 Otimização Combinatória

A Otimização Combinatória (OC) é uma das mais recentes áreas da Investigação Operacional. Esta integra programação linear e algoritmia, permitindo assim a obtenção de soluções para problemas, de difícil resolução, provenientes das mais diversas áreas, como por exemplo, das telecomunicações à monitorização e controlo do espaço aéreo.

Este tipo de problemas envolve conjuntos finitos e discretos de objetos, com o propósito, de geralmente, agrupar, ordenar ou atribuir os mesmos a algo.

Muitos problemas de otimização, quer de interesse teórico, quer de interesse prático, consistem atualmente na procura pela mais apropriada definição de um conjunto de variáveis, visando alcançar determinado objetivo [21].

Estes dividem-se naturalmente em duas categorias: problemas com solução pertencente ao conjunto dos valores reais e problemas em que a mesma tomará um valor discreto. É sobre o

segundo tipo de problemas que se integram as questões de OC [55]. Neste pretende-se encontrar algo desde um número inteiro a uma estrutura representada por um grafo.

Um problema de OC, $P = (S, f)$, poderá ser definido por:

- um conjunto de variáveis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;
- variáveis de domínio D_1, \dots, D_n ;
- restrições impostas às variáveis;
- função objetivo f a ser minimizada, onde $f : D_1 \times \dots \times D_n \rightarrow \mathbb{R}^+$.

A importância prática deste tipo de problemas tem motivado o desenvolvimento de algoritmos aplicáveis à sua resolução.

Estes algoritmos podem ser classificados como completos bem como aproximados. Os primeiros asseguram que é possível encontrar a solução ótima em tempo limitado para cada problema de OC com instâncias finitas. Porém, para problemas do tipo *NP-hard* não existem algoritmos que consigam fazer num período de tempo polinomial, concluindo-se assim que métodos completos precisam de tempo de computação exponencial para, por fim, apresentarem resultados. Esta característica torna assim estes algoritmos inexecutáveis quando aplicados a diversos problemas.

O uso de métodos aproximados para a resolução de problemas de OC tem recebido maior atenção nas últimas décadas. Com este tipo de métodos são sacrificadas as garantias dadas face à obtenção da solução ótima em detrimento de tempo computacional significativamente reduzido [55].

Nesta secção serão caracterizados exemplos de raciocínio estruturado para a resolução de problemas de OC. Começando por apresentar e definir os conceitos de heurística e meta-heurística, bem como exemplos das mesmas já aplicadas às duas temáticas abordadas nesta dissertação: setores e rotas.

2.5.1 Heurística

Consideram-se por heurísticas técnicas para a obtenção de boas soluções, com um custo computacional aceitável, baseadas em procedimentos simples e intuitivos. Não oferecem garantias de otimalidade, nem de admissibilidade, e pode nem sequer dar informação da qualidade duma solução admissível. Representam o compromisso entre duas premissas: simplicidade de critérios e o desejo de estes discriminarem, corretamente, entre tomadas de decisão favoráveis e desfavoráveis. Capazes de obterem soluções aceitáveis, porém, com baixo custo computacional, não garantindo assim a otimalidade das mesmas [56].

Podem ser classificadas em quatro principais categorias [57]:

Heurísticas de Construção: Caracterizam-se pelo facto de a sua execução se iniciar sem a existência de uma solução inicial. A mesma vai sendo construída ao longo da aplicação da própria heurística, como, por exemplo, no caso da Heurística do Vizinho mais Próximo aplicada

ao TSP. O problema de setorização associado à distribuição de sal pelas vias rodoviárias já referido apresenta a aplicação de uma heurística deste tipo [2];

Heurísticas de Melhoramento A sua execução inicia-se a partir de soluções já existentes, procurando assim chegar a uma solução ótima através de sucessivas melhorias. Um dos maiores problemas deste tipo de heurísticas consiste na elevada probabilidade de ocorrência de máximos ou mínimos locais;

Heurísticas de Partição e Decomposição O princípio por trás destes métodos consiste em gerar versões mais pequenas ou mais simples do problema original. Este princípio permite assim aplicar algoritmos de mais fácil análise e adequados a cada uma destas simplificadas questões;

Heurísticas Dedicadas Começam por identificar requisitos dos problemas que são cumpridos por boas soluções e assim introduzem-nos como limites do próprio problema. O objetivo passa por restringir o espaço de solução, simplificando, ao mesmo tempo, o problema. Possuem porém o risco de excluir do espaço de solução a própria solução ótima.

2.5.2 Métodos Aproximados

De entre os métodos aproximados mais simples distinguem-se geralmente dois tipos: construtivos e de pesquisa local [58].

Os métodos aproximados construtivos adicionam elementos a soluções iniciais parcialmente nulas até que a mesma esteja completa. Estes métodos apresentam-se geralmente mais rápidos, porém, apresentam soluções de qualidade inferior, quando comparados com algoritmos de pesquisa local. A execução destes inicia-se a partir de uma solução inicial já estabelecida e, iterativamente, procuram substituir a solução atual por uma melhor pertencente à vizinhança apropriada.

Por vizinhança entende-se, sendo o S o espaço onde se englobam todas as soluções possíveis, uma função $N : S \rightarrow 2^S$ que atribui a cada $s \in S$ um conjunto de vizinhos $N(s) \subseteq S$. $N(s)$ é assim chamada de vizinhança de s .

Tendo definido o conceito de vizinhança é agora possível apresentar o conceito de mínimo local. Uma solução localmente mínima (ou mínimo local) que pertença a uma estrutura de vizinhança N é uma solução \hat{s} qualquer que seja o s pertencente a $N(\hat{s}) : f(\hat{s}) \leq f(s)$.

Pode-se assim justificar que iniciar a resolução do problema partindo de uma solução nula apresenta-se como uma conjuntura mais vantajosa para a futura obtenção da solução ótima.

Nos últimos anos surgiu um novo tipo de métodos aproximados que procura combinar algoritmos heurísticos básicos com ferramentas de alto nível que percorrem um espaço de pesquisa de forma mais eficaz e eficiente. São agora chamados de meta-heurísticas e apresentam como objetivo principal evitar que os métodos de pesquisa se concluam em mínimos locais.

2.5.3 Meta-Heurística

Meta-Heurísticas são definidas como processos iterativos que guiam e modificam as operações das heurísticas subordinadas com o propósito de encontrar soluções de elevada qualidade de forma eficiente [58].

Referindo algumas propriedades fundamentais que caracterizam as meta-heurísticas:

- Estratégias que orientam o processo de pesquisa;
- Exploração eficiente do espaço amostral por forma a encontrar soluções ótimas;
- Algoritmos aproximados e não determinísticos;
- Incorporação de mecanismos que evitam a retenção em áreas do espaço de pesquisa;
- Recurso à experiência, armazenada em memória, para melhor orientar a sua própria execução.

Existem diferentes caracterizações possíveis para uma meta-heurística, dependendo do ponto de vista escolhido para a diferenciação das mesmas:

Inspirado e Não Inspirado na Natureza: Uma classificação intuitiva baseada na origem do algoritmo. Algoritmos Genéticos e Algoritmo da Colónia de Formigas são exemplos de algoritmos inspirados na natureza e, pelo contrário, Pesquisa Tabu e Pesquisa Local são não inspirados na natureza. Este tipo de classificação tem vindo a apresentar cada vez menos importância devido ao surgimento de novos algoritmos que não se enquadram em nenhuma das classes, ou pelo contrário, enquadram-se simultaneamente nas duas.

Baseados em População e Baseados em Solução Única: O número de soluções utilizadas ao mesmo tempo representa outra característica utilizada para classificar Meta-Heurísticas. Algoritmos baseados numa Solução Única, como Pesquisa Tabu e *Iterated Local Search* (ILS), descrevem uma trajetória no espaço de pesquisa durante o processo. Por outro lado, algoritmos baseados em População descrevem a evolução de um conjunto de pontos ao longo do processo.

Função Objetivo Estática e Dinâmica: Meta-Heurísticas podem ser classificadas de acordo com a sua função objetivo. Alguns algoritmos mantêm-na constante, tal como especificada no enunciado do problema, porém outros, como *Guided Local Search*, modificam-na ao longo da sua execução. São assim incorporados nos dados existentes resultados do próprio algoritmo, procurando assim evitar a ocorrência de mínimos locais.

Estrutura de Vizinhaça Única e Múltipla: A maioria dos algoritmos apresenta-se com uma vizinhaça única, ou seja, uma estrutura que não se altera ao longo da execução do mesmo. Porém, algumas meta-heurísticas, como *Variable Neighborhood Search* (VNS), recorrem a estruturas múltiplas que permitem diversificar a pesquisa.

Com e Sem Memória: A utilização de históricos de pesquisa é um importante critério de classificação de meta-heurísticas. Assim entendem-se por algoritmos que não utilizam memória, aqueles que calculam o próximo estado do processo apenas a partir do estado atual. Pelo contrário, algoritmos que usam memória recorrem a esta para armazenar informação e determinam a solução seguinte não só a partir da atual, mas também, a partir do histórico armazenado, como a Algoritmos Genéticos, *Genetic Algorithm* (GA).

Meta-heurísticas são estratégias de alto nível com o fim de explorar espaços de pesquisa com recurso a diferentes rotinas. É assim de referir a importância dada por estas ao balanceamento entre diversificação e intensificação. Diversificação refere-se geralmente à exploração do espaço de pesquisa. Intensificação, por sua vez, refere-se ao aproveitamento da experiência acumulada durante a própria procura.

Nos últimos anos têm sido propostas diversas meta-heurísticas que se aplicam à resolução de problemas de setorização e VRP [59]. Os melhores processos aplicados, por serem dedicados a estas temáticas, tendem a identificar soluções mais favoráveis do que métodos heurísticos mais antigos porém revelam-se mais exigentes a nível computacional e temporal.

São assim conhecidos seis tipos de meta-heurísticas aplicadas a este tipo de problemas:

- Arrefecimento Simulado, *Simulated Annealing* (SA);
- Deterministic Annealing (DA);
- Pesquisa Tabu, *Tabu Search* (TS);
- Algoritmo Genético, *Genetic Algorithms* (GA);
- Algoritmo da Colónia de Formigas, *Ant Colony Systems* (AS);
- Redes Neurais, *Neural Networks* (NN);

As três primeiras metodologias iniciam-se a partir de uma solução inicial x_1 e em cada iteração, t , desloca-se desta para a solução x_{t+1} na vizinhança de x_t , $N(x_t)$, até que se verifique a condição de paragem. Porém, se $f(x_t)$ indica o custo de x_t , não é obrigatório que $f(x_{t+1})$ apresente um valor inferior ao de $f(x_t)$. Isto origina a necessidade de serem tomadas medidas preventivas contra a ocorrência de mínimos locais.

GA examina a cada passo a população de soluções. Cada população é assim obtida da anterior, resultando da reunião dos melhores elementos, e, abandono dos piores. Algoritmo da Colónia de Formigas apresenta uma abordagem construtiva na qual várias novas soluções são geradas a cada iteração utilizando informações recolhidas anteriormente. Pesquisa Tabu, Algoritmos Genéticos e o próprio Algoritmo da Colónia de Formigas são métodos que armazenam informação à medida que a pesquisa prossegue e utilizam-na na obtenção de soluções aperfeiçoadas [60]. Redes Neurais constituem um mecanismo de aprendizagem que gradualmente ajusta um conjunto de parâmetros ponderados até que seja alcançada uma solução aceitável. Em suma, os métodos a aplicar variam de caso para caso e o seu uso deve ser moldado à medida do problema em causa.

2.5.3.1 Arrefecimento Simulado

O algoritmo de Arrefecimento Simulado impõe pesquisa, critérios de aceitabilidade e paragem diferenciados aleatoriamente no método de pesquisa local por vista a que sejam evitados mínimos de qualidade inferior [61]. São então aceites deslocamentos que não melhorem a solução, podendo até ocorrer o contrário. Isto de acordo com probabilidade determinada pelo parâmetro de controlo T , designado por temperatura, que apresenta tendência a diminuir ao longo da execução do próprio algoritmo.

Em cada iteração t do algoritmo a solução x é definida aleatoriamente em $N(x_t)$. Se $f(x) \leq f(x_t)$, então x_{t+1} é igual a x ; senão,

$$x_{t+1} := \begin{cases} x, & \text{com probabilidade } p_t. \\ x_t, & \text{com probabilidade } 1 - p_t. \end{cases} \quad (2.17)$$

onde p_t é uma função decrescente de t e $f(x) - f(x_t)$.

É comum definir p_t como:

$$p_t = \exp\left(-\frac{f(x) - f(x_t)}{\theta_t}\right) \quad (2.18)$$

Onde θ_t simboliza a temperatura na iteração t . A regra aplicada à definição de θ_t é chamada de *cooling schedule*. Tipicamente, θ_t é uma função de variação descendente de t : inicialmente, θ_t é igual a um valor dado tal que $\theta_t > 0$ e é multiplicada por um fator α ($0 < \alpha < 1$) após T iterações. Assim a probabilidade de serem aceites soluções mais fracas diminua ao longo do tempo. Três critérios comuns de paragem do algoritmo são:

- o valor f^* da respetiva solução x^* não decresce pelo menos $\pi_1\%$ há k_1 ciclos consecutivos de iterações T ;
- o número de alterações aceitáveis tem sido menos de $\pi_2\%$ de T durante k_2 ciclos consecutivos de T iterações;
- foram executados k_3 ciclos de T iterações.

2.5.3.2 Deterministic Annealing

O algoritmo de *Deterministic Annealing* opera de uma forma idêntica ao algoritmo de Arrefecimento Simulado. Porém, é aplicada uma regra determinística para a aceitação da nova solução. Verifica-se que duas das mais comuns aplicações desta técnica estão presentes nos algoritmos de *threshold accepting* e *record-to-record* [62, 63].

A cada iteração t do primeiro, a solução x_{t+1} é aceite se $f(x_{t+1}) < f(x_t) + \theta_1$, onde θ_1 é um parâmetro definido pelo utilizador.

No segundo algoritmo, a cada iteração t a solução x_{t+1} é aceite se $f(x_{t+1}) < \theta_2 f(x_t)$, onde θ_2 é um parâmetro definido pelo utilizador, com valor ligeiramente superior a 1.

2.5.3.3 Pesquisa Tabu

O algoritmo de Pesquisa Tabu, *Tabu Search* (TS) [21], tal como o Arrefecimento Simulado, é baseado em métodos de pesquisa local. Assim é escolhida a melhor solução com origem na vizinhança da solução atual x_t . Para que sejam evitados ciclos as soluções recentemente analisadas são proibidas, ou seja, consideradas *tabu* [64]. É assim evitado que o algoritmo visite um mínimo local diversas vezes. Porém, por vista a simplificar a execução do mesmo, ao nível computacional e temporal, é comum preservar em memória apenas um atributo das soluções tabu e não a totalidade das mesmas [65].

Durante a aplicação de algoritmos de Pesquisa Tabu a definição da vizinhança é por vezes resultante da aplicação de um mecanismo de intercâmbio de dois passos. Numa versão do algoritmo, *best admissible*, toda a vizinhança é explorada e apenas é selecionada a melhor solução não tabu. Noutra versão do mesmo, *first best admissible*, é selecionada, como o nome indica, a primeira solução admissível encontrada [61].

O algoritmo é interrompido após um número fixo de iterações ou após um número consecutivo das mesmas onde são apresentados quaisquer progressos face à melhor solução atual [66].

2.5.3.4 Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético apresenta uma estratégia evolucionar. O mecanismo básico presente segue os princípios da teoria da evolução de *Darwin*: características favoráveis de uma população sobrevivem e misturam-se enquanto que as características desfavoráveis são eliminadas pela própria população [67].

Estes operam assim pela conjugação de operações de seleção, re combinação e mutação da população [68].

O algoritmo inicia-se assim, para a referente iteração t :

- seleção de dois cromossomas progenitores, X^t ;
- desenvolvimento de dois descendentes com recurso a um operador de *Crossover*;
- mutação fortuita, com pequena probabilidade, em cada um dos descendentes;
- apresentação de nova solução, X^{t+1} , partindo de X^t por remoção das duas piores soluções desta e inserção dos dois novos descendentes.

Recorrendo a este processo é expectável que uma solução inicial, constituída por cromossomas formados aleatoriamente, irá sofrer melhorias significativas à medida que os progenitores são supridos pelos seus descendentes.

Crossover

É o mais importante operador genético de reprodução. O "filho" de dois cromossomas seleccionados nas últimas duas fases do algoritmo recebe características dos seus "pais" escolhidas de forma aleatória. Existem vários tipos de operadores *Crossover* como, por exemplo, o *one-point*. Este inicia-se pela escolha do local de corte dos dois cromossomas seleccionados. De seguida, a partir destes elementos, são criados dois novos cromossomas [66].

2.5.3.5 Algoritmo da Colónia de Formigas

Este tipo de algoritmos é inspirado numa analogia com o real comportamento de uma colónia de formigas enquanto procura alimento. Durante o seu percurso, as formigas assinalam o caminho por si percorrido ao depositarem neste uma essência aromática, feromona. A quantidade deste elemento permite assim aferir a distância e qualidade do mesmo, pois caminhos de maior interesse revelarão maior presença de feromona e assim maior atração por parte das formigas [69].

Baseada nesta observação é proposta uma classe de meta-heurísticas baseada no paralelismo entre formigas artificiais e as reais exploram o espaço de solução em busca de soluções de qualidade [70]. Armazenam esta informação em sistemas de memória adaptativa que interpretam os vestígios presentes no espaço de solução.

Ilustrando, a cada par de pontos (v_i, v_j) estão associados dois valores: visibilidade, n_{ij} (o inverso da distância entre estes), e a feromona do caminho, Γ_{ij} , atualizada automaticamente ao longo da execução do algoritmo. Em cada iteração do mesmo, a construção de n caminhos a partir de cada vértice do grafo inicia-se utilizando a heurística do vizinho mais próximo, porém, com uma unidade de distância modificada. Esta deriva de n_{ij} e Γ_{ij} por forma a favorecer a seleção de pontos conectados entre si que apresentam maior valor para a quantidade de feromona presente. No final de cada iteração, os valores do rasto são atualizados por forma a permitirem que uma fração $(1 - \rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$, do valor prévio existente desapareça e apenas aí colocar nova feromona nas arestas percorridas durante a mesma [71]. Se uma formiga k recorrer à aresta entre os pontos v_i e v_j para a construção de um caminho de comprimento total L_k , então a presença da essência será incrementada em Δ_{ij}^k , 2.19:

$$\Delta_{ij}^k = \frac{1}{L_k} \quad (2.19)$$

E o rasto na aresta (v_i, v_j) é atualizado por 2.20:

$$\Gamma_{ij} := \rho\Gamma_{ij} + \sum_{k=1}^N \Delta_{ij}^k \quad (2.20)$$

Onde N representa o número total de formigas presentes. Este processo de pesquisa e construção é repetido e atualizado durante um número pré-estabelecido de iterações. O valor de $(1 - \rho)$

previne que soluções anteriores de fraca qualidade condicionem negativamente a procura por soluções nas fases mais avançadas de execução.

Este método, apesar de, por vezes, produzir excelentes resultados, não constitui uma alternativa fiável a meta-heurísticas ou a heurísticas de pesquisa local especializadas na resolução de problemas como o TSP e VRP, salvo se for associado a uma outra metodologia de otimização [72].

2.6 Decisão Multicritério - *Multi-Criteria Decision Analysis (MCDA)*

MCDA refere-se ao auxílio à tomada de decisões na presença de múltiplos, porventura conflituosos, critérios [73]. Definindo assim como: "a atividade daquele que, através do uso de modelos explícitos, mas não obrigatoriamente formalizados, ajude à obtenção de respostas às questões colocadas por uma parte interessada em todo o processo"[74].

Decisões estas que também podem ser tomadas em problemas comuns ao dia-a-dia das populações [75].

A escolha de um emprego pode ser influenciada pelo local de trabalho, salário e perspectivas futuras. A aquisição de um novo automóvel pode ser caracterizada pelo preço do mesmo, impacto ambiental e conforto.

No contexto empresarial, a definição da estratégia a seguir pode ser influenciada pela evolução dos seus proveitos, pela sua quota de mercado ou pelo seu valor em mercado de capitais.

No contexto público, o aproveitamento dos recursos hídricos disponíveis é regularmente avaliado em termos económico-financeiros, previsões meteorológicas a longo prazo ou ainda necessidades energéticas e pela própria qualidade do recurso.

Também em setorização é possível atender a diversos critérios para a resolução de um problema, podendo esta ser precedida pelo respeito por limites naturais existentes ou ainda o benefício de um critério de avaliação, como o equilíbrio, em detrimento de outro.

Os problemas de MCDA são bastante diversificados. Porém, considera-se que os mesmos seguem algumas características em comum [76]:

Múltiplos objetivos e atributos: Cada problema apresenta diversos objetivos e atributos. Leva cada decisor a gerar objetivos relevantes e concretos para o problema;

Conflito de Critérios: Múltiplos critérios podem criar conflitos entre si. Por exemplo, no problema de CVRP, o equilíbrio das quantidades transportadas pode estar na causa de conflitos com a duração das próprias rotas. Apesar de serem cumpridas todas as restrições de capacidade, uma das rotas pode revelar-se significativamente mais longa que as restantes, situação esta, que provoca um conflito de critérios;

Unidades Incomensuráveis: Cada objetivo ou atributo possui uma unidade de medida diferente. No exemplo apresentado para a aquisição de automóvel, o consumo é apresentado em litros por cada cem quilómetros e a segurança numa escala não numérica.

O processo de aplicação deste tipo de problemas está dividido nas seguintes etapas [77]:

- Estabelecer o contexto da decisão;
- Identificar as opções a serem avaliadas;
- Identificar objetivos e critérios;
- Avaliar o desempenho esperado de cada opção em relação aos critérios e o valor associado às consequências de cada opção para cada critério;
- Atribuir ponderações para cada critério para refletir a sua importância relativa à decisão;
- Examinar os resultados;
- Proceder à análise de sensibilidade.

Se a análise de sensibilidade demonstrar que os resultados das etapas anteriores são vulneráveis à própria análise, então as mesmas deverão ser repetidas.

Pode-se assim afirmar que "O principal objetivo da Decisão Multicritério é o de assistir o agente decisor a escolher a melhor alternativa dentro de um grupo de hipóteses existentes num ambiente de critérios conflituosos e concorrentes"[78].

Os contributos desta passam pela "análise do contexto da tomada de decisão pela identificação dos seus autores, das várias possibilidades de ação, das suas consequências e de todos os interesses em causa; organizar e/ou estruturar o desenrolar de todo o processo a fim de aumentar, por um lado, a coerência entre os valores subjacentes aos objetivos, e por outro, a decisão final; conseguir que todos os intervenientes cooperem entre si, e, para isso propor pontos chave de entendimento para um melhor compreensão mútua num quadro favorável ao debate; elaborar recomendações utilizando os resultados obtidos a partir de modelos computacionais concebidos no âmbito de uma hipótese de trabalho; participação na legitimação da decisão final"[79].

Com estes contributos conclui-se que MCDA apresenta elevado potencial na resolução de diferentes problemas como os referidos anteriormente que vão desde o meio empresarial ao setor público de atividade [80].

2.6.1 Analytic Hierarchy Process

O *Analytic Hierarchy Process* (AHP) é um dos mais populares modelos matemáticos aplicados a MCDA. Este é definido como um técnica estruturada para a organização e análise de decisões complexas que tem por base a definição de um modelo hierárquico do problema ao qual AHP será aplicado [81].

A hierarquia desenvolvida define o objetivo, a missão, os critérios e os cenários alternativos a ter em conta na resolução do problema. Antes deste desenvolvimento revela-se necessário a verificação da independência de cada um dos critérios pois o recurso a critérios dependentes durante o processo de decisão pode provocar um duplo impacto em todo o processo. Esta dependência

fará com que os próprios critérios se modifiquem bem como afetará a definição de prioridades e alternativas de ação.

Após a definição hierárquica, toda a informação relativa às alternativas possíveis é analisada, sendo verifica a existência, ou não, de uma opção dominante. Em AHP, é explícito que um cenário de ação A domina um outro cenário B se A for melhor que B em pelo menos um critério e se ao mesmo tempo, não for pior que este cenário num outro critério distinto.

Esta é avaliada com recurso a questões ao agente decisor sobre as suas preferências relativas aos critérios e alternativas apresentadas. Este modo de obtenção de dados, muito preciso e direto, é uma das mais elogiadas propriedades de AHP.

Para a interpretação da opinião do agente decisor, AHP aplica a seguinte escala:

Tabela 2.1: Escala AHP

Importância de A em comparação com B	Índice de preferência atribuído
Igual importância	1
Importância moderada	3
Forte importância	5
Muito forte importância	7
Importância absoluta	9
Valores intermédios	2, 4, 6, 8

Em suma, é de referir que com AHP é possível manipular dados sobre peso, altura e preço ou ainda opiniões subjetivas como fiabilidade, satisfação e qualidade. Isto é possível pois todos as instâncias serão classificadas de acordo com a escala apresentada na Tabela 2.1.

2.6.2 Meta - heurísticas e Algoritmos Exatos em Otimização Combinatória

Recentemente, têm ocorrido diversas tentativas de combinar ideias e princípios presentes em meta-heurísticas com os existentes em métodos exatos para a resolução de problemas de otimização combinatória.

As abordagens existentes são classificadas em duas categorias [82]:

Combinações Colaborativas: Por colaboração entende-se a troca de informação entre algoritmos, mas a não integração dos mesmos. Os algoritmos podem ser executados de forma sequencial, entrelaçada ou em paralelo.

Combinações Integrativas Por integração entende-se que um algoritmo será incorporado noutra, ou seja, um algoritmo será o mestre e o outro o escravo.

2.6.3 Multi-Attribute Utility Theory (MAUT)

Num problema com diferentes critérios e alternativas, a metodologia MAUT procura definir qual das possibilidades obtém melhor avaliação segundo os diversos parâmetros. Em termos gerais, isto é feito pela definição de uma hierarquia de diversos critérios com um peso definido.

De seguida, é aferida a avaliação de cada alternativa em função de cada fundamento. Este método segue uma série de premissas "que se destinam a eliminar inconsistências e escolhas não ótimas quando lidam com incerteza e *trade-offs*"[83]. Algumas premissas são:

- Completude de ordem: X é preferido a/ menos preferido do que / igualmente preferido a Y ;
- Transitividade: se $X > Y$ e $Y > Z$, então $X > Z$;
- Probabilidades existem e podem ser quantificadas;
- Independências: as preferências são lineares atendo às probabilidades.

MAUT conduz à caracterização completa de todas as alternativas com base na preferência do agente decisor. O objetivo passa assim não pela obrigação a atingir consensos mas sim à clarificação de posições e ao teste da viabilidade das várias soluções.

2.7 Validação de Resultados

A validação dos resultados obtidos revela-se crucial para a resolução de problemas de setorização, permitindo assim avaliar a eficiência e eficácia dos algoritmos propostos.

Primordialmente, para a avaliação dos mesmos, será dada maior importância ao respeito pelas restrições impostas pelo próprio enunciado do problema. Porém, é possível encontrar na literatura alguns critérios comuns à apreciação da resolução [3, 14]:

- Equilíbrio;
- Contiguidade;
- Compacidade;
- Desejabilidade.

Na secção seguinte serão apresentadas algumas definições. Porém, existem outros critérios, como a similaridade com a solução atual também abordados por diversos autores [84].

2.7.1 Equilíbrio

Considera-se que uma solução é equilibrada quando cada setor possui a mesma quantidade que qualquer outro, ou seja, a diferença entre a população do setor e a média da mesma é pouco significativa [3, 85].

É apresentado como requisito para o equilíbrio da solução, a pertença da população de cada setor/distrito ao intervalo definido em 2.21, onde $[0 \leq \beta < 1]$ e \bar{P} , 2.22, representa a população média de cada setor [84], onde, J representa o conjunto de setores e m o número de setores a ser criado:

$$[(1 - \beta)\bar{P}, (1 + \beta)\bar{P}] \quad (2.21)$$

$$\bar{P} = \frac{\sum_{j \in J} P_j}{m} \quad (2.22)$$

Em problemas de setorização associados à definição de setores comerciais, é referido que o equilíbrio, $F_{equ}^t(x)$, da solução x pode ser verificado a partir dos lucros gerados pela mesma [11]. Ou seja, verificando os lucros resultantes da visita aos clientes localizados em cada distrito, $P_k^t(x)$.

$$F_{equ}^t(x) = \frac{\sum_{k=1}^{m^t} |P_k^t(x) - P^t|}{m^t P^t} \quad (2.23)$$

$$P_k^t(x) = an_k^t - \sum_{i=1}^{m_k^t} F_{rout k,i}^t(x) \quad (2.24)$$

$$P^t = \frac{\sum_{k=1}^{m^t} P_k^t(x)}{m^t} \quad (2.25)$$

O lucro, $P_k^t(x)$, gerado pelo vendedor responsável pelo distrito k durante o período t é assim igual à subtração do total dos custos associados às despesas de deslocação e à faturação resultante do serviço aos consumidores.

Equilíbrio é também definido como a similaridade entre a quantidade presente em cada sector, podendo esta referir-se ao total de habitantes do setor, por exemplo, ou ao trabalho total do mesmo [14]. Sendo o equilíbrio calculado para um grupo k de setores com quantidades, $q_i, i = 1, \dots, k$, através do coeficiente de variação, CV_q .

$$CV_q = \frac{s'_q}{\bar{q}} \quad (2.26)$$

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^k q_i}{k} \quad (2.27)$$

$$s'_q = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (q_i - \bar{q})^2} \quad (2.28)$$

Setores balanceados apresentarão um valor de CV_q próximo de zero.

2.7.2 Contiguidade

Uma das definições de contiguidade afirma que um setor é contíguo se for possível percorrer um caminho entre quaisquer dois pontos no mesmo sem cruzar outro setor [4]. Ou seja, a contiguidade avalia a ocorrência de intersecções entre setores, sendo penalizada caso estas ocorram. Isto motiva o desejo de estas serem minimizadas por forma a melhorar a solução.

A contiguidade de uma solução pode ser aferida pela média ponderada da contiguidade de cada setor [14], \bar{c} , onde N representa o número total de setores. Este valor pertencerá ao intervalo compreendido entre zero (0) e um (1). Assim, da perspetiva da contiguidade, para uma boa setorização o valor de \bar{c} será o mais próximo de um possível.

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i n_i}{N} \quad (2.29)$$

Na qual o valor de n_i representa o número de vértices do setor i e c_i é obtido pela aplicação da expressão, 2.30. A variável $m_{w,j}^i$ é binária e toma o valor um se existe um caminho entre os pontos w e j do setor i .

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{w=1}^{n_i} m_{w,j}^i \right)}{n_i(n_i - 1)} \quad (2.30)$$

Um setor pode também ser considerado como um grafo no qual as cargas representam os vértices do mesmo. O setor será assim contíguo se e só se caracterizar um grafo conexo [4].

2.7.3 Compacidade

Existem várias definições para compacidade, podendo estas ser divididas em compacidade geográfica ou populacional [4]. Focando-se este estudo nas características geográficas, um distrito é classificado como geograficamente compacto se o seu perfil seguir uma figura circular ou quadrangular. Porém, também a distância de qualquer ponto do setor ao centro do mesmo é mencionada como uma medida de compacidade [86].

Alguns autores [84] relacionam o comprimento total de todos limites de um espaço sectorizado, à exceção do limite exterior do próprio, com o cálculo da compacidade da solução x . Na

fórmula seguinte, o divisor R representa o perímetro de todo o território e $R_j(x)$ o perímetro do setor j na solução x .

$$F_{comp}(x) = \frac{\sum_{i \in I} R_j(x) - R}{2R} \quad (2.31)$$

Bozkaya et al. [5] aplica a seguinte fórmula à aferição da compacidade do setor:

$$F_{comp}^t(x) = \frac{\sum_{k=1}^{m^t} \sum_{i=1}^{s_k^t} B_{k,i}^t - B^t}{2B^t \sum_{k=1}^{m^t} s_k^t} \quad (2.32)$$

Onde $B_{k,i}^t$ e B^t são os respetivos perímetros do setor $V_{k,i}^t$ e de todo o território no período t na solução x . s_k^t corresponde ao número total de subdistritos do distrito V_k^t e m^t ao número total de distritos.

O sector $i(i = 1, \dots, k)$ apresenta um valor de compacidade, d_i , definido pela expressão 2.33 [14]:

$$d_i = \frac{\sum_j q_{ij}}{dist(o_i, p_i)} \quad (2.33)$$

Na qual q_{ij} representa a quantidade associada ao ponto j no sector i e $dist(o_i, p_i)$ a distância *Euclidiana* entre o centróide do setor, o_i , e o ponto pertence ao mesmo mais afastado de o_i , p_i .

A mesma métrica pode ser definida como o quociente entre a quantidade total (por sector) e o número total de elementos do mesmo. Assim, setores com maior valor de d_i apresentam maiores valores de compacidade.

Sendo desejável que diferentes setores apresentem valores semelhantes de d_i . é possível averiguar a respetiva semelhança e coeficiente de variação, CV_d :

$$CV_d = \frac{s'_d}{\bar{d}} \quad (2.34)$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{k} \quad (2.35)$$

$$s'_q = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (q_i - \bar{q})^2} \quad (2.36)$$

Concluindo, setores balanceados deverão apresentar um valor de CV_d próximo de zero. A utilização de ferramentas deste tipo permite avaliar soluções obtidas para diferentes conjuntos de dados.

2.7.4 Desejabilidade

A medida da desejabilidade deve aferir o quanto a solução apresentada se aproxima das preferências do decisor [14]. Podendo ocorrer em situações em que é pretendido, por exemplo, que um certo grupo de elementos fique alocado ao mesmo setor. Pelo contrário, a situação oposta também pode constituir uma das preferências do decisor.

Os autores apresentam um método de cálculo da desejabilidade da solução, Des , apresentado na expressão:

$$Des = 1 - \frac{NE}{H} \quad (2.37)$$

Onde NE representa o número de elementos que não pertencem a qualquer setor que apresente afinidade com o pretendido. H é o número máximo destes elementos, previamente definido.

Valores de desejabilidade próximos de um indicam que os setores obtidos respeitam a maioria das condições desejadas pelo proponente do problema.

Capítulo 3

Setorização Multicritério

Este capítulo tem por objetivo apresentar e descrever o caso em estudo, um problema de Setorização Multicritério (SMC). Pretende-se determinar setores e rotas apropriados à recolha de bens, em pontos com localização e capacidade já conhecidos.

Os problemas de setorização estão associados a um inúmero conjunto de atividades, muitas para além do âmbito da otimização de operações logísticas. Atividades estas como a gestão do tráfego aéreo, limpeza de neve, distribuição de água, energia elétrica e definição de sistemas públicos de transporte, exemplificando algumas das aplicações de setorização associadas a serviços sócio-económicos. Segunda uma perspetiva baseada na Administração de instituições públicas, ou seja, segundo uma visão governamental, as questões de SMC aplicam-se à definição de círculos eleitorais, de áreas de atuação de meios de emergência, policiamento, prestação de cuidados de saúde e definição de rede escolar. Associadas a uma perspetiva de comércio e serviços, as questões de setorização encontram-se aplicadas a problemas de gestão do tráfego aéreo, de entrega e recolha de bens ou produtos, de ações de controlo e segurança e, por fim, a atividades comerciais relacionadas com a venda de algo e respetiva criação de valor.

Esta larga abrangência atribuída, e demonstrada, aos problemas de setorização, é ainda reforçada pela capacidade que estes têm de apresentar resposta a questões que determinam características específicas para cada

Diferenciado-se de outras questões, sobre a temática já expostas, o problema de setorização aqui referido apresenta-se como multicritério. São essenciais fatores já conhecidos como a localização dos pontos e a quantidade associada mas também, a adequabilidade dos setores face à existência de restrições à solução. Constrangimentos impostos pelos intervenientes no processo de decisão, designadamente, a impossibilidade de duas ou mais cargas pertencerem a um mesmo setor.

O objetivo do trabalho passa pelo desenvolvimento de uma metodologia adaptável ao propósito da setorização. Podendo ser definida de acordo com as preferências dos agentes decisores.

A recolha de correio num grande centro urbano como a cidade do Porto pode constituir um exemplo. É sabido que, graças à dimensão das próprias ruas da cidade, existem incompatibilidades entre estas e os veículos de recolha. Situação que aconselha que os pontos de recolha, i.e, os

marcos do correio, localizados em ruas mais estreitas, estejam agregados nos mesmos setores, por vista a facilitar o planeamento das rotas dos veículos de menores dimensões adequados àquelas vias.

3.1 Definição do problema

O problema consiste na definição de setores apropriados à recolha de bens mensuráveis a partir de um conjunto de localizações, com necessidades de recolha já conhecidas, abreviadamente chamadas, a partir de agora, de pontos ou cargas.

As cargas aqui referidas podem ser comparadas a pontos de recolha de resíduos sólidos, como acontece na maioria dos casos, nos designados contentores, por exemplo. Esta assume especial importância, pois as cargas não podem ser comparadas à recolha porta-a-porta. No primeiro caso, para o conseqüente planeamento de rotas, apenas se consideram essenciais a distância (comprimento das arestas do grafo) entre pontos, a procura por parte deste e a capacidade dos próprios veículos. Pelo contrário, no segundo caso, as unidades em causa alteram-se. Aproveitando a definição de grafo já apresentada no Capítulo 2, pretende-se que a procura esteja localizada nos vértices de um grafo e não nas suas arestas, como ocorre em recolha porta-a-porta.

Esclarecendo que estas cargas, representam, em situações reais, locais de acumulação e posterior recolha de um bem. Podendo ser igualadas a locais de recolha de biomassa ou resíduos florestais para posterior tratamento e aplicação na produção de energia elétrica [14].

3.1.1 Multicritério

Trata-se, como anteriormente referido, de um problema multicritério, sendo assim importante enquadrar de que forma esta característica se apresenta e intervém no problema em estudo.

Por multicritério entende-se a existência de diversos critérios, associados à questão em análise, que irão afetar toda a sua resolução ou apenas a escolha da solução mais conivente para esta.

Tais critérios podem ser variados e ter origem no próprio tipo de bem a ser recolhido ou no desejo de qualquer interveniente no processo, bem como na finalidade do mesmo, ou seja, no propósito para a setorização.

Os critérios de avaliação de soluções de setorização mais comuns, como enunciados no capítulo 2 representam valores a ter em conta para a resolução de todo o problema.

Em suma, é dada atenção aos seguintes critérios, considerando o grafo $G = (V, E)$ em que V representa o conjunto dos vértices e E o conjunto das arestas:

Atração e Repulsão entre Cargas - mantendo o princípio da Força Electrostática;

Total de Setores Pretendidos - com influência direta sobre a quantidade limite para cada setor e dispersão espacial dos mesmos;

Equilíbrio - os setores devem ser proporcionais;

Compacidade - forma geométrica circular ou quadrangular;

Contiguidade - cada setor deve ser representado por apenas um elemento;

Desejabilidade - respeito pelas preferências do agente decisor;

Procura apresentada pelas cargas - cargas com procura equilibrada tenderão a mais facilmente formarem setores também equilibrados;

Tipo de Produtos ou Bens - podem existir restrições à combinação de certos produtos ou bens, não se podendo misturar, por exemplo, afetando assim a setorização;

Tipo de Veículo - como exemplificado sobre a recolha de correio no Capítulo 2, o tipo de veículo pode ser uma condicionante à formação de setores;

Custo de transporte entre arestas - critério que surge quando a setorização é aplicada ao desenvolvimento de rotas.

Sendo uma das componentes desta dissertação o desenvolvimento das mais adequadas rotas a cada setor, o custo associado a estas constitui também um critério relevante para todo o problema.

3.2 Instâncias para o problema

Para o problema em causa, foi gerado um conjunto significativo de instâncias e que podem ser consultadas em <http://www.paginas.fe.up.pt/~e12106/dissertation/instances>.

Para a construção destas mesmas instâncias foram tidas em atenção as Cargas que irão constituir o setores bem como as relações entre as mesmas.

Por fim, recorrem-se a instâncias que caracterizam o grafo conexo associado a todo o problema bem como à distância mínima a percorrer, de acordo com o grafo, entre todas as cargas setorizadas.

Na secção 4.1 do capítulo 4 serão apresentadas todas estas instâncias com maior detalhe.

3.3 Otimização de Rotas

Na segunda fase do problema abordado nesta dissertação apresenta-se a elaboração de rotas propícias à recolha de bens em cada setor.

A cada uma destas rotas estão associados todos os pontos pertencentes ao setor respetivo bem como as capacidades, i.e, procura, inerentes a cada um. A procura em cada setor é então igual ao somatório da quantidade de cada um destes pontos.

A capacidade disponível para toda a rota será necessariamente superior ou igual à existente em cada setor, caso contrário, seria impossível obter uma solução para o problema.

Esta questão reforçou a busca pela equidade da distribuição, por setor, para que assim, a globalidade da procura em causa fosse uniformemente distribuída por todos os setores e consequentemente por todas as rotas. Com isto procura-se a obtenção de rotas equilibradas ao nível de custos temporais e operacionais.

A existência deste problema permite reforçar a importância dada ao equilíbrio entre setores bem como à compatibilidade dos mesmos, pois, soluções que se apresentem com resultados favoráveis, nestes parâmetros, irão originar problemas de rotas mais simples. Por exemplo, para uma setorização completamente equilibrada ao nível das cargas será necessário proceder apenas à resolução de um simples problema de TSP. Porém, setorização que se revele desequilibrada terá como resultado um problema de rotas mais complexo.

Capítulo 4

Abordagem de Resolução

Neste capítulo é apresentada a abordagem adotada para a resolução de problemas de Setorização Multicritério, SMC. Esta abordagem contemplará, portanto, vários critérios importantes para a setorização.

Este capítulo irá apresentar todas as etapas prosseguidas que levaram à resolução do problema, desde a criação de instâncias e pré-processamento das mesmas até à resposta à otimização de rotas.

Por fim, é importante referir que todos os procedimentos aplicados têm por base a Heurística Construtiva usado no *SectorEl*, já mencionada no capítulo referente ao enquadramento teórico.

4.1 Instâncias - apresentação

Nesta secção serão apresentadas em detalhe todas as instâncias aplicadas aos problemas descritos nesta dissertação.

4.1.1 Cargas

As cargas são caracterizadas pela sua posição espacial e pela capacidade associada que expressa a necessidade de recolha no local.

A posição é enunciada pelas coordenadas cartesianas (x,y) .

A capacidade é referenciada pela quantidade, q .

Todas as cargas são identificadas pelo valor definido em i , como é demonstrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1:
Posição e Capacidade referente a quatro Cargas

i	x	y	q
1	7,5	15	5
2	9	12	5
3	17	22	5
4	25	32	5

4.1.2 Relação entre Cargas

Os critérios acima referidos são englobados naquilo que se define de "relação" entre as cargas. Esta pode ser resultante de alguns critérios ou restrições impostas pelo problema.

Tal como na heurística apresentada em [14], este parâmetro está compreendido no intervalo $[-1; 1]$. Os valores correspondentes aos limites deste intervalo apresentam um benefício ou prejuízo ao normal valor atribuído à caracterização do próprio par de pontos.

Estas instâncias, como enunciadas na Tabela 4.2 apresentam apenas a identificação das cargas que caracterizam, i, j e o valor atribuído à própria relação, r .

Tabela 4.2:
Relação entre Cargas

i	j	r
1	2	0,25
1	3	0,5
2	8	-0,25
3	8	1

É ainda de referir que a relação entre as cargas não é um valor direcionado, ou seja, o valor de r_{ij} é exatamente o mesmo que o de r_{ji} . Por exemplo, de acordo com o apresentado na Tabela 4.2, os pontos 1 e 2 apresentam entre si um valor de $r = 0,25$, ao contrariamente aos pontos 2 e 8 que apresentam uma penalização à atração de $-0,25$.

4.1.3 Grafo Conexo

Dada relevância, na presente dissertação, à otimização de rotas para um definido setor, considerou-se interessante a introdução de um elemento essencial para o desenvolvimento das mesmas, um grafo conexo.

Assim, procurou-se garantir a existência de um grafo deste tipo cujos vértices representassem todas as cargas em estudo.

Deixando as devidas explicações sobre o algoritmo, aplicado na definição do mesmo, para o Capítulo 4, refere-se apenas que este é não direcionado.

As instâncias apresentam os vértices constituintes de cada aresta, i, j , e a distância ou o comprimento total da mesma, d , como mostrado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3:
Arestas do Grafo

i	j	d
1	2	2,83
3	5	1,41
9	4	2,24
15	19	2

4.1.4 Distância Mínima

Pelos mesmos motivos, explicitados sobre as instâncias relacionadas com o grafo conexo, também a distância mínima, entre cargas, é abordada neste problema de setorização.

Partindo do grafo anterior foi determinado, com recurso ao algoritmo de *Dijkstra*, a distância mínima e o conseqüente caminho a percorrer entre todas as cargas presentes no problema.

Foram então aplicadas, ao problema as instâncias constituídas pela identificação dos vértices i , j e a distância mínima entre os mesmos, d , como apresentadas na Tabela 4.4. Esta distância é resultante do somatório do comprimento de todas as arestas, seleccionadas a partir do algoritmo referido na Secção 2.3.3 do capítulo 2, que determina qual o caminho mais eficiente entre dois pontos do grafo.

Tabela 4.4:
Distâncias de *Dijkstra*

i	j	d
1	2	24,73
1	3	18,25
1	4	13,77
1	15	25,43

4.2 Setorização

Na presente secção serão apresentados os procedimentos desenvolvidos para a resolução do problema de setorização multicritério. O princípio, por detrás da mesma, é a agregação de pontos de recolha distribuídos pelo plano cartesiano, em áreas de menor dimensão, os setores. O plano referido pode representar um território geográfico.

O desenvolvimento deste método ocorreu de forma iterativa, levando à resolução de três problemas de setorização, idênticos, mas de complexidade crescente:

Setorização Simples Esta é a versão mais simples de todo o estudo. Nesta, apenas, são apreciados os elementos alusivos à localização das cargas e à procura das mesmas. Da mesma forma é analisado o número máximo de setores pretendido e o limite máximo de capacidade para cada secção.

Setorização Multicritério À questão anterior são introduzidas as componentes referentes à caracterização por parte do agente decisor. Quer isto dizer que os dados, referentes às relações entre as cargas, são agora estudados e avaliados.

Esta alteração provoca um aumento significativo da complexidade de toda o algoritmo. Isto ocorre, porque origina, numa fase posterior da implementação, o estudo da relação entre as cargas livres e todos os setores já formados, bem como, o estudo da relação entre os setores existentes.

Setorização Multicritério com Distâncias Reais Por fim, procurando atingir soluções convenientes à otimização de rotas em, sub-divisão territorial, foi introduzida uma aproximação às distâncias reais entre as cargas.

Torna-se esta questão mais complexa pois acresce à anterior um critério digno de análise e compreensão durante todo o processo de deliberação.

Alterando assim o procedimento na fase de pré-setorização pois aqui são aplicados o grafo conexo desenvolvido e as distâncias resultantes do algoritmo de *Dijkstra*.

No âmbito desta dissertação, estas três questões foram abordadas com processos inspirados na heurística construtiva baseada na Lei de Coulomb, como explicitados na Secção 2.2. Seguindo os mesmos fundamentos da heurística é introduzido um mecanismo de otimização das soluções.

4.2.1 *SectorEl-MC*

Nesta secção é apresentado o método *SectorEl-MC*, aplicada a questões multicritério, que tem por base o já referido método *SectorEl*.

Fazendo o paralelismo com os princípios da eletrostática, a quantidade, q , presente em cada ponto no plano cartesiano tomará aqui o lugar da carga elétrica na Lei de *Coulomb*. Por sua vez, a força presente entre os pontos no plano será interpretada como a atração entre as cargas.

4.2.1.1 Atração entre Cargas

A matriz de atração entre todos os pontos no plano é definida a partir da expressão 4.1 para o par (i, j) . Esta apresenta a_{ij} como a atração resultante do quociente da multiplicação das quantidades, q_i e q_j , pelo quadrado da distância entre as duas cargas, d_{ij} .

$$a_{ij} = \frac{q_i \cdot q_j}{d_{ij}^2} \quad (4.1)$$

A partir desta matriz é possível determinar qual o par de pontos que apresenta maior atração entre si. Caso nenhuma restrição do problema seja violada, serão estes dois pontos a proceder à definição do primeiro setor da solução, Figura 4.1. Setor este que será também representado como um ponto, à imagem do seu centro de massa, no plano cartesiano. A sua posição no plano cartesiano é calculada através das expressões 4.2 e 4.3. A quantidade associada ao mesmo assume o valor correspondente ao somatório, 4.4, de todas as quantidades que caracterizam os pontos que constituem o setor:

$$x_c = \frac{q_i}{q_i + q_j} \cdot x_i + \frac{q_j}{q_i + q_j} \cdot x_j \quad (4.2)$$

$$y_c = \frac{q_i}{q_i + q_j} \cdot y_i + \frac{q_j}{q_i + q_j} \cdot y_j \quad (4.3)$$

$$q_c = q_i + q_j \quad (4.4)$$

Por fim, a matriz de atração entre cargas é atualizada, sendo alteradas apenas as linhas e colunas correspondentes aos pontos i e j . Estes tomarão o valor de -1 , favorecendo o normal desenrolar da heurística implementada.

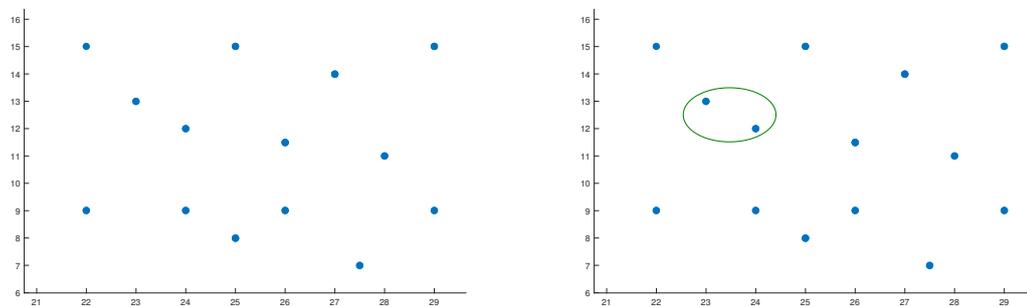


Figura 4.1: Exemplo de Formação de Novo Setor

4.2.1.2 Atração entre Cargas e Setores

Tendo já sido definido um setor e atualizada a matriz de atração entre as cargas procede-se ao cálculo de outra, representativa da afinidade entre as restantes cargas livres, ainda não pertencentes a nenhum setor, e o(s) setor(es) já existente(s).

Explicitando, após a definição do primeiro setor, é então calculada, também com recurso à expressão 4.1, a matriz de atração entre as respetivas cargas-livres e os setores existentes. . Neste cálculo, as cargas mantêm a sua caracterização habitual mas o setor é representado pelo seu centro de massa, c , com coordenadas x_c , y_c e carga correspondente q_c .

Existem agora dois cenários de ação possível:

Formação de um novo setor: A partir de um par de pontos é definido um novo setor como descrito na sub secção anterior.

Adição de uma carga a um setor A um setor já existente é adicionada a carga que maior força de atração apresenta com o centro de massa do setor.

Para a concretização desta decisão, comparam-se, atendendo previamente às restrições de capacidade impostas, o valor máximo das duas matrizes, que representam respetivamente a atração entre cargas e a atração entre cargas e setores.

Caso a atração máxima entre um par de pontos seja maior que atração máxima entre um ponto e um setor, um novo setor será formado. Caso contrário, a carga respectiva será adicionada a um setor já existente.

4.2.1.3 Atração entre Setores

A partir do momento em que foi definido mais do que um setor, é necessário calcular uma nova matriz de atração, representativa da atração entre setores. Tal como nas matrizes anteriores, esta atração é calculada a partir de a_{ij} , baseada na Lei de Coulomb, com os centroides, ou centros de massa representativos dos próprios setores.

O máximo desta matriz será posteriormente comparado com os máximos das matrizes já definidas, e, caso seja este o máximo dos máximos, fica assim por explicitar o terceiro cenário possível:

Agregação de Setores A partir de dois setores já definidos é formado um novo setor, de maior dimensão.

4.2.1.4 Adição de uma carga a um setor

A adição de um ponto a um setor, Figura 4.2, é outra operação que envolve a manipulação das instâncias do problema.

Esta operação provoca a atualização do próprio setor, da matriz de atração entre carga e da matriz de atração entre cargas e setores.

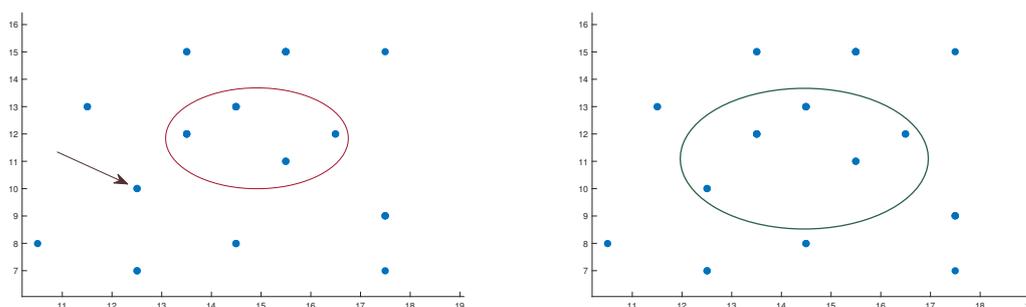


Figura 4.2: Adição de Carga a Setor

A atualização do próprio setor passa não só pela atribuição da carga ao próprio setor, mas também, pela atualização da representação do mesmo, do seu centro de massa.

A carga total deste centro de massa é também atualizada pois vê-lhe ser adicionada a quantidade associada à carga livre que mais se atraía ao setor em causa.

É também atualizada a matriz de atração entre cargas, com isto, à linha e à coluna referentes à carga escolhida será atribuído o valor de -1 que indica que esta deixa de estar livre para ser associada a outra.

Um conduta idêntica é aplicada à matriz de atração entre cargas e setores. A toda a linha correspondente à carga, em causa, é atribuído o valor de -1 , indicando que esta não se encontra disponível para ser agregada noutro setor distinto. Também a coluna referente ao setor em causa é atualizada de acordo com a expressão conhecida para a_{ij} pois a nova posição do centro de massa do setor e a sua carga associada alteram os valores de atração até agora conhecidos.

Por fim, a matriz de atração entre setores é renovada pois é necessário o cálculo dos novos valores de atração entre o setor modificado e os restantes já existentes. Isto leva à mudança dos valores, já existentes, na linha e coluna que apresentam a atração com este setor.

4.2.1.5 Agregação de setores

A agregação de dois setores, Figura 4.3, em concordância com as restrições impostas, apenas não provoca alterações à matriz de atração entre cargas, pois todas as cargas envolvidas no processo encontravam-se já inseridas num setor.

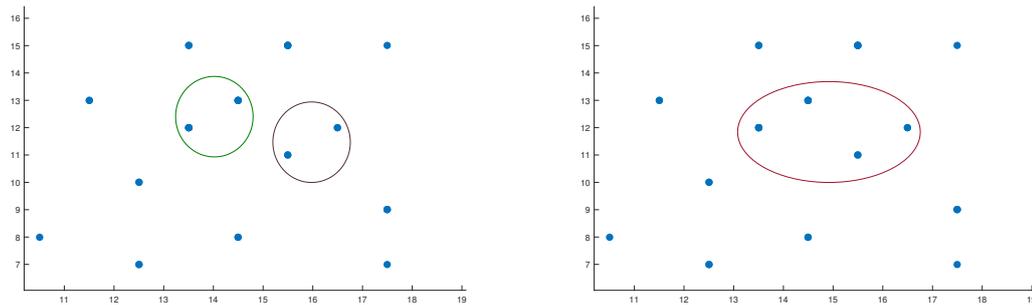


Figura 4.3: Exemplo de Agregação de dois Setores

Todo o processo de agregação inicia-se pela eliminação dos dois setores em causa, e, pela formação de um novo setor com todas as cargas que constituíam os setores eliminados.

É de seguida, como de cada vez que é modificado um setor, calculado o centro de massa do resultante da agregação. Esta operação pode ser definida pelas seguintes expressões:

$$x_c = \sum_{i=1}^k \frac{x_i q_i}{\sum_{i=1}^k q_i} \quad (4.5)$$

$$y_c = \sum_{i=1}^k \frac{y_i q_i}{\sum_{i=1}^k q_i} \quad (4.6)$$

$$q_c = \sum_{i=1}^k q_i \quad (4.7)$$

A matriz de atração entre cargas e setores é atualizada. São eliminadas as colunas relativas aos dois setores agregados e é posteriormente inserida uma nova coluna que apresenta a atração entre todas as cargas e o novo setor.

Por fim, a matriz de atração entre setores é atualizada de forma idêntica à anterior. As linhas e colunas relativas aos setores agregados são eliminadas e é depois inserida uma linha e uma coluna que caracterizam a atração do novo setor com todos os restantes.

4.2.1.6 Critério de Paragem

O critério de paragem escolhido deve assegurar a correta implementação do algoritmo, bem como, evitar a entrada do mesmo em ciclos infinitos, que apenas prejudicam e impossibilitam a obtenção de resultados computacionais.

Este processo tem como critério de paragem a definição de, no máximo, um número total de setores idêntico, porém superior numa unidade ao pretendido. Assim é assegurado que todas as cargas avaliadas pertencem a única e exclusivamente a um setor e que são cumpridas todas as restrições.

É importante salientar que, visando uma mais eficaz otimização da solução, foi tomada a opção de, nesta fase da resolução, obter um setor a mais do que o pretendido.

Na Figura 4.4 é mostrada uma representação visual de todo o algoritmo implementado.

4.2.2 Fase de Otimização do *SectorEl-MC*

Com vista à sua otimização, os resultados provenientes do Método *SectorEl* foram exaustivamente examinados e avaliados.

Desta análise conclui-se que havia espaço para a melhoria das próprias soluções, não só ao nível do equilíbrio mas também da contiguidade e compacidade.

Verificava-se que, da aplicação da heurística, podiam resultar setores cujas formas geométricas não estavam de acordo com o pretendido e referenciado na literatura. Na maioria dos casos, existiam cargas afetas a um setor que se encontravam mais próximas do centro de massa de outro. Isto provoca disrupção de resultados, prejudicando a contiguidade dos setores, pois alguns destes acabam por se sobrepor a todos os restantes.

Este fenómeno era provocado pela natural progressão do algoritmo e pela imposição de restrições de capacidade aos próprios setores.

Atendendo novamente à execução do algoritmo, verifica-se que, ao longo deste, são formados diversos setores que são depois agregados. Existem cargas que, no futuro, não se irão agregar a outro setor devido à incompatibilidade gerada pela dimensão deste outro setor e do atual a que as cargas pertencem.

Concluindo-se assim que se estas cargas estivessem livres iriam ser atraídas pelo setor com centro de massa que mais favorece a solução e não por aquele a que se encontram associadas.

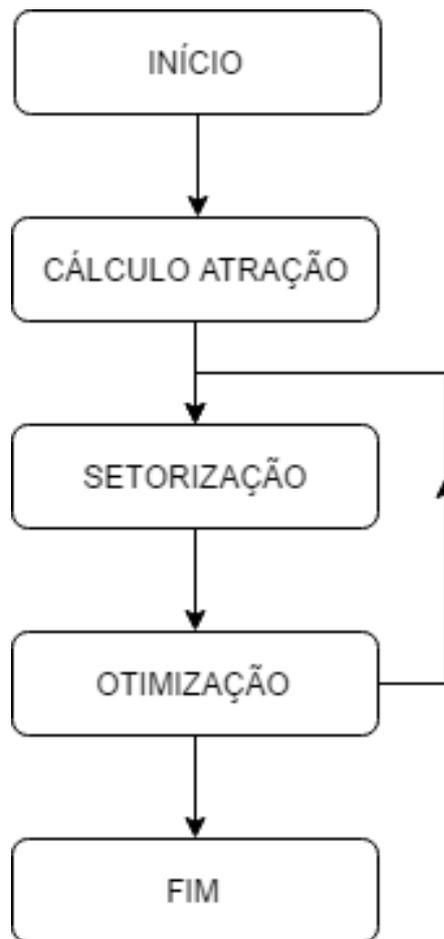


Figura 4.4: Estrutura do Algoritmo

O método de otimização desenvolvido e aqui descrito foca-se exatamente neste caso, no da libertação de cargas já associadas a setores para uma futura agregação, num outro, que leve à melhoria da solução. Por libertação de cargas entende-se a saída destas do setor em que se encontram e o regresso à sua condição inicial, ou seja, de cargas que não compõem qualquer setor, i.e, cargas livres, Figura 4.6.

O método inicia-se pela avaliação de todos os setores existentes através do cálculo do coeficiente de capacidade, CV_d . Com este cálculo, é possível saber o d_i de cada setor. Sabendo, de antemão, que um "bom" setor apresenta um valor para este coeficiente próximo de zero, é assim encontrado o pior setor ao determinar o valor máximo registado para d_i .

Após a definição do pior setor este é suprimido e todas as cargas que o constituem voltam a ser cargas livres. Por diversos motivos, a libertação destas cargas não é suficiente para que se proceda a uma nova setorização:

- O total de cargas livres revela-se insuficiente para provocar uma alteração de resultados - caso se procedesse à aplicação do Método *SectorEl* os resultados seriam os mesmos, sem quaisquer melhorias;

- O relatado para a formação do pior setor ocorre, em menor escala, durante a formação de todos os outros setores.

É então desenvolvido um método heurístico que permite a otimização, descrito na subsecção seguinte.

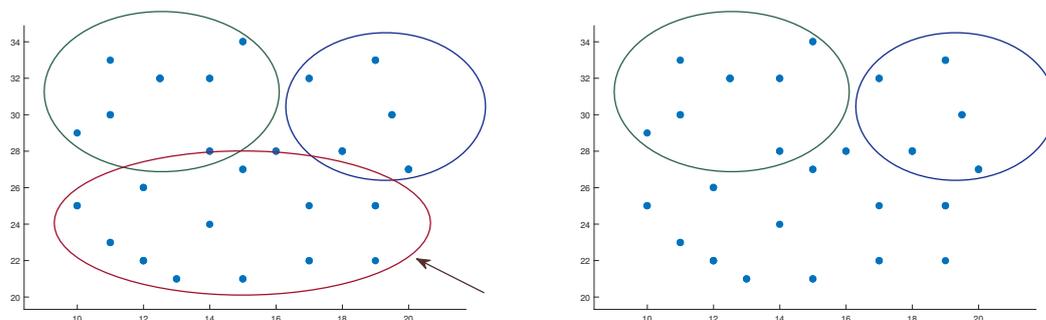


Figura 4.5: Exemplo de Remoção de um Setor

Posto isto, não é necessário proceder à atualização do centro de massa do próprio setor, pois este deixará de existir.

Face ao método apresentado, torna-se apenas necessária a atualização das matrizes de atração entre cargas e setores e entre setores.

Na primeira, a coluna referente ao setor eliminado será também eliminada e o valor da atração entre as cargas, que agora ficam livres, e os restantes setores é novamente calculado.

Na segunda matriz são eliminados dois elementos, a linha e a coluna referentes ao setor eliminado.

A matriz de atração entre cargas não é atualizada, pois, como referido, o máximo desta matriz não é comparado com o das restantes, visto que as cargas agora libertadas serão alocadas a setores já existentes.

4.2.2.1 Libertação de Cargas

Para que de facto uma otimização dos resultados existisse, foi necessária a libertação ou desfetação de maior número de cargas que integravam os restantes setores. Com o intuito de manter todos os princípios relacionados com eletrostática, a atração entre cargas, foram libertadas, de cada um dos setores, um número fixo de cargas. Na Figura 4.6 é apresentado o exemplo da remoção de uma carga de um setor.

É de referir que, também este número é resultado de análises empíricas aos resultados, pois, por exemplo, não fará sentido proceder à remoção de cinquenta cargas de cada setor quando nenhum tem tal dimensão.

Justificação semelhante poderá ser dada para a não definição de uma percentagem sobre a dimensão de cada setor de pontos a serem removidos, pois, neste caso, a própria dispersão espacial das cargas em causa, poderia levar a uma repetição de resultados já existentes.

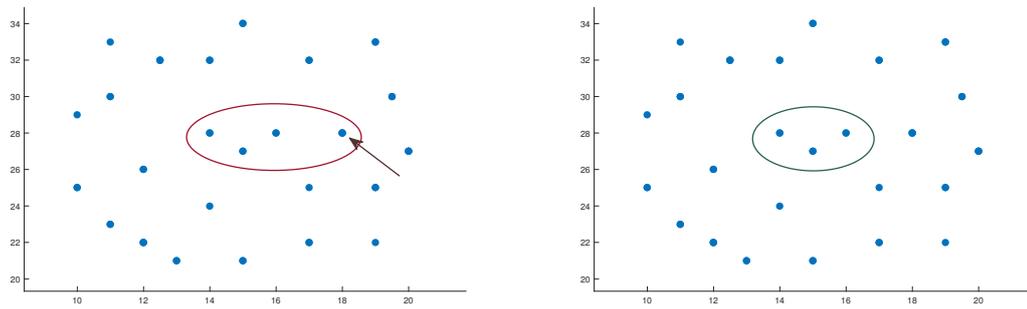


Figura 4.6: Exemplo de Libertação de uma Carga de um Setor

Desta libertação de pontos resultarão n cargas livres e um total de setores inferior em uma unidade ao existente no início de toda a otimização. Ou seja, de acordo com a descrição da heurística, um número de setores já igual ao pretendido.

Verifica-se que os setores pretendidos ficam já representados por grupos de dimensão significativa e respetivos centros de massa.

Apesar de não o parecer, à primeira vista, esta ação apresenta um comportamento altamente dinâmico, pois, a cada remoção de uma carga do setor, todo ele é atualizado.

O seu centro de massa é calculado novamente, com princípios idênticos aos anteriores, porém, neste caso, o setor resultante apresenta menor dimensão espacial e quantitativa do que o inicial.

Esta atualização constante do centro de massa faz com que os pontos selecionados para remoção, os que menos atraídos ao centro de massa, sejam também avaliados de forma dinâmica.

Por fim, após a remoção de todos os pontos pretendidos, é atualizada toda a matriz de atração entre as cargas e setores. As linhas referentes às cargas agora desassociadas são atualizadas com os valores de atração entre estas e os restantes setores.

4.2.2.2 Realocação de Cargas

A fase seguinte, da otimização descrita, consiste na alocação das cargas livres aos setores já existentes.

A realocação das cargas ocorre de acordo com o mesmo princípio da eletrostática no qual se baseia toda a setorização inicial. Porém, com uma diferença face à heurística construtiva aplicada, apenas é verificado o máximo da atração entre cargas e setores, assim as cargas avaliadas serão agregadas a cada um dos setores já existentes. Desta forma evita-se a repetição dos resultados apresentados anteriormente e que justificam esta otimização.

É de salientar que este ciclo de otimização não vê a sua aplicabilidade restrita a apenas uma ocorrência por tentativa de resolução do problema. Isto dá abertura a uma constante melhoria e refinamento de resultados, provocado por ajustes ao número de cargas removidas em cada setor e ao limite de capacidade. O mesmo não se aplica à remoção do setor com pior d_i pois a repetição deste procedimento levaria ao retrocesso de todo o processo.

4.2.2.3 Critério de Paragem

Chegando a esta fase de resolução do problema está já comprovado que é possível determinar setores de acordo com as condições estabelecidas, designadamente, o seu número e a sua quantidade.

O critério de paragem para este ciclo de otimização torna-se assim mais simples, do que o apresentado anteriormente, pois torna-se necessário atender apenas às cargas que não pertencem a nenhum setor.

O algoritmo será então executado enquanto existirem cargas que não pertencem a qualquer setor, constituindo isto o critério de paragem.

4.3 Diferentes Procedimentos

No início deste capítulo é referido que, durante toda a dissertação, a resolução do problema apresentado ocorreu de forma iterativa com um progressivo aumento da complexidade ao longo do decorrer de todo o trabalho.

Foram definidos três tipos de problemas sobre os quais, nesta secção, serão dados mais detalhes sobre a resolução dos mesmos, todavia, baseada nos dois métodos apresentados anteriormente nas secções 4.2.1 e 4.2.2.

4.3.1 Setorização Simples

Este primeiro caso revela-se o mais simples dos três problemas de setorização apresentados, pois, para o cálculo da atração referida no Método *SectorEl*, secção 4.2.1, apenas são considerados os valores das quantidades associadas às cargas e a distância euclidiana entre as mesmas.

O mesmo ocorre na otimização da solução apresentada, a aplicação do método referido na secção 4.2.2.

A simplicidade deste problema está associada às instâncias utilizadas e não aos métodos aplicados na sua resolução, pois são calculados os valores para as três atrações conhecidas. Os critérios de paragem do próprio algoritmo são também os mesmos.

Em suma, a resolução do problema começa pela formação de um setor inicial a partir do par de cargas que apresenta maior atração entre si. Avaliando de seguida qual a melhor opção a tomar de entre as três possíveis:

- Criar um novo setor;
- Associar a carga a um setor já conhecido;
- Associar setores já existentes num novo de maior dimensão.

A otimização prossegue assim com a eliminação do "pior" setor seguindo-se a libertação de cargas.

Nas secções seguintes serão apresentadas as diferenças de resolução inerentes às questões de maior complexidade.

4.3.2 Setorização Multicritério

A resolução do problema Multicritério provoca algumas alterações aos métodos apresentados.

Primeiramente acarreta o estudo das já referidas relações entre as cargas presentes que, assumindo um valor numérico, influenciam o cálculo da atração através da parâmetro s_{ij} presente na expressão 4.8, na qual:

- a_{ij} – atração entre i e j ;
- q_i – quantidade associada a i ;
- q_j – quantidade associada a j ;
- s_{ij} – relação entre i e j , tomando valores entre -1 e 1 ;
- d_{ij} – distância entre i e j ;
- NIP – número inicial de pontos;
- NS – número de setores.

$$a_{ij} = \|\vec{a}_{ij}\| = \|\vec{a}_{ji}\| = \frac{q_i \cdot q_j}{d_{ij}^{2+NIP-NS}} \cdot (s_{ij} + 1) \quad (4.8)$$

O estudo referido origina a introdução de mais três matrizes, não de atração, mas sim de relação, onde são armazenadas todas as informações referentes a s_{ij} .

A primeira matriz, quadrada, de dimensão igual à do número de cargas estudado armazena os valores provenientes do agente decisor sobre a correlação entre cargas. A diagonal apresenta o valor -1 , referente à relação de uma carga consigo própria.

É ainda a partir desta que são calculadas as restantes matrizes de relação.

Ao definir ou modificar um setor, à semelhança do que acontece entre cargas, é também necessário averiguar qual a afinidade entre este setor e todas as cargas que ainda não se encontram alocadas.

É assim criada a matriz da relação "carga-setor", na qual cada linha representa uma das cargas estudadas e cada coluna um dos setores existentes.

Os valores contidos nesta matriz observam dois princípios:

- se o ponto i pertencer a algum setor então o valor em toda a linha da matriz referente a i apresentará o valor -1 ;
- se o ponto i não pertencer a nenhum setor, então o valor na posição (i, j) é dado pela média do valor da relação de i com as k cargas pertencentes ao setor j .

Por fim, a partir do momento em que existe mais do que um setor a ser avaliado é também necessária a descrição de uma matriz que reflita a relação existente entre setores.

Esta é também uma matriz de diagonal igual a -1 , pois nos pontos da diagonal está representada a relação de um setor consigo próprio. A restante matriz é obtida pelo cálculo da média das médias da relação de todos os pontos de um setor com todos os outros pontos do outro setor em causa.

É de referir ainda que de cada vez que um novo setor é formado será adicionada uma coluna às matrizes que caracterizam as relações com os setores existentes. A matriz de relação entre cargas é também atualizada pois duas cargas deixaram de estar livres para serem agregadas num setor.

A existência destas três matrizes provoca a sua constante atualização a cada iteração do algoritmo, como a seguir se apresenta.

4.3.2.1 Adição de uma carga a um setor

A adição de uma carga a um setor origina uma atualização do próprio e das matrizes de atração de forma idêntica ao ocorrido com o problema de setorização simples.

Porém, previamente à mudança nas matrizes de atração é necessário proceder a alterações nas matrizes de relação.

A matriz de relação entre cargas vê a linha e a coluna referente à carga adicionada ao setor tomar o valor de -1 , que indica que esta já não se encontra livre.

As matrizes de relação carga-setores vêem também a linha referente ao ponto adicionado assumir o valor -1 . A coluna que caracteriza o setor em causa é atualizada, pois a relação desta nova carga com as restantes tem influência na própria relação do setor com as cargas disponíveis.

Por fim, a matriz de relação setor-setor vê a linha e a coluna referentes ao setor abordado serem atualizadas com os valores médios já explicitados.

4.3.2.2 Agregação de Setores

A agregação de setores provoca mudanças à matriz de relação carga-setor e setor-setor.

Da primeira serão eliminadas duas colunas, que serão posteriormente substituídas, por uma outra, que caracteriza a relação entre o novo setor e as cargas existentes.

Na segunda matriz serão eliminadas não apenas as duas colunas referentes aos setores, mas também as duas linhas que em conjunto caracterizam os mesmos. Estes dois elementos serão substituídos, por uma nova linha e uma nova coluna, que conterão os valores das relações entre o novo setor e os restantes.

4.3.2.3 Remoção do pior setor

Os métodos para a otimização da solução apresentados para o problema de setorização simples são também aplicados à questão multicritério.

Posto isto, a remoção do pior setor formado aquando das primeiras iterações do código provoca, como seria de esperar, alterações às matrizes que caracterizam as relações entre as cargas.

Na matriz de relação carga-carga, as cargas agora libertadas voltam a apresentar valores iguais aos que tinham no início de todo o algoritmo.

A matriz de relação carga-setor vê a coluna referente ao pior setor ser eliminada e as linhas que caracterizam as cargas agora desassociadas serem atualizadas.

A matriz de relação setor-setor vê serem eliminadas a coluna e a linha referentes ao setor com pior CV_d .

4.3.2.4 Liberação de cargas

Por fim, como seria de esperar, também a liberação das cargas com menor atração ao centro de massa do setor provocam alterações às matrizes que caracterizam as relações existentes.

A matriz de relação carga-setor vê todos os seus valores atualizados devido às inúmeras cargas libertadas e às alterações provocadas nos setores.

As restantes matrizes de relação não são atualizadas pois, tal como as equivalentes matrizes de atração, não são tidas em consideração durante a re-alocação das cargas.

4.3.3 Setorização Multicritério com Distância Real

A resolução de um problema de Setorização Multicritério, com aproximação à distância real, entre os pontos, provoca uma alteração significativa no pré-processamento de todos os dados. Tendo apenas a localização de todas as cargas no plano cartesiano e nenhuma informação sobre um grafo que defina o problema, para a obtenção da distância real é necessária a definição deste mesmo grafo.

Após a obtenção do grafo, como descrito na secção 4.6.1 desta dissertação, foi aplicado o algoritmo de *Dijkstra* para a obtenção, das distâncias aproximadas à real, entre cada par de pontos. Foi assim criada mais uma matriz, representativa das distâncias entre os pontos. Por distância real compreende-se assim a distância definida pela aplicação do algoritmo de *Dijkstra* a um grafo conexo existente.

Esta matriz apresenta-se, assim, quadrada, com dimensão igual ao número total de pontos. A sua diagonal apresenta o valor 0 que corresponde à distância de uma carga consigo mesma.

Estas distâncias foram então utilizadas no cálculo da força de atração entre todas as cargas, no plano, afetando assim os resultados da setorização.

Sobre esta questão não serão novamente explicitados os comportamentos das matrizes de relação ao longo da execução do algoritmo, pois estes são exatamente iguais aos relatados para o problema de setorização multicritério referido na sub-secção anterior.

4.3.3.1 Atração entre Cargas

A aplicação das distâncias reais ao cálculo da atração entre cargas provoca uma alteração à heurística construtiva apresentada, nomeadamente, à expressão para o cálculo de a_{ij} .

A distância a considerar no quociente, d_{ij} , passa a ser o valor obtido a partir da matriz de distâncias de *Dijkstra*.

Apesar disto, o centro de massa do novo setor continua a ser calculado da mesma forma, pois, na prática é uma carga virtual acrescentada à priori que não faz parte do grafo pré-definido.

4.3.3.2 Atração entre Cargas e Setores

A distância a considerar para o cálculo da atração entre cargas e setores deixou de ser definida pela distância euclidiana entre o a carga e o centro de massa do setor, mas sim, pela distância mínima da carga ao setor.

Quer isto dizer que foi comparada a distância entre a carga em causa e todas as cargas pertencentes ao setor. Determinada a mínima das distâncias, é esta a aplicada ao cálculo da atração. Com isto é possível garantir que a carga adicionada ao setor apresenta características geográficas favoráveis à otimização de rotas pretendida no futuro.

Apesar de facilmente descrita, esta é uma ação que agrava o tempo de execução do algoritmo pois é necessário determinar a distância mínima entre as cargas livres e o setor para cada uma destas cargas.

4.3.3.3 Atração entre Setores

Também a atração entre setores é afetada pela alteração provocada nas instâncias que caracterizam as distâncias.

A mesma deixa assim de ser calculada com recurso à distancia euclidiana entre os centros de massa dos setores, mas sim, com recurso à distância mínima entre estes. Esta distância mínima é definida como a menor distância entre as cargas de dois setores diferentes, ou seja, é verificada a distância das cargas mais próximas entre si mas não pertencentes ao mesmo setor.

4.3.4 Otimização

Na otimização deste problema a distância de *Dijkstra* não é totalmente tida em consideração.

Na avaliação da solução isto não acontece pois provoca uma alteração indesejada aos critérios de avaliação já conhecidos.

A distância real entre cargas não é considerada na libertação das mesmas. Isto ocorre devido à virtualidade do centro de massa do setor que impossibilita a obtenção da distância referida.

Por fim, a re-agregação das cargas livres volta a aplicar a distância real mínima à definição da atração, como acima explicitado no cálculo da atração entre uma carga e um setor.

4.4 Avaliação de Resultados

Tal como em qualquer problema de Otimização Combinatória é essencial proceder à avaliação das soluções obtidas. É um fator primordial que, adequadamente analisado, poderá toldar e moldar os métodos heurísticos implementados.

Nesta secção serão apresentados os diversos parâmetros utilizados para avaliar as soluções provenientes dos métodos heurísticos implementados. Alguns dos mesmos são já conhecidos da literatura, outros desenvolvidos no contexto desta dissertação.

4.4.1 Equilíbrio

O equilíbrio da solução também pode ser aferido com recurso à análise das cargas constituintes de cada setor.

O Equilíbrio de Quantidade entre setores é calculado com recurso ao critério, CV_q , apresentado em [14].

Atendendo às expressões já conhecidas da literatura, é pretendido que o valor do CV_q se aproxime o mais possível de zero.

4.4.2 Compacidade

A compacidade é aqui associada a uma ideia de concentração ou densidade de cargas. Uma maior concentração deverá evitar a definição de sectores desprovidos de carga.

Nesta dissertação, a avaliação da compacidade é executada seguindo os princípios definidos por Rodrigues et. al [14] e apresentados na secção 2.7.3.

Tal como no critério anterior, um valor de variação próximo de zero reafirma a qualidade da solução face à compacidade.

4.4.3 Equilíbrio de Distâncias - CV_{dc}

A distância real média entre as cargas de cada setor representa um fator de avaliação da contiguidade da solução

É proposto o estudo do equilíbrio das distâncias entre as cargas que constituem cada setor e o seu centro de massa, sendo apresentado outro coeficiente de variação, representativo desta distância.

O coeficiente é calculado de forma idêntica aos dois já apresentados.

O critério inicia-se pelo cálculo da distância média de cada carga ao centro de massa do setor, d_{dc} (4.9):

$$d_{dc} = \frac{\sum_{i=1}^k d_{ic}}{k} \quad (4.9)$$

É então calculado o valor médio de d_{dc} , \bar{d} :

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^k d_{dc}}{k} \quad (4.10)$$

De seguida é calculado o desvio padrão corrigido de distâncias, s'_d , a partir da expressão:

$$s'_d = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (d_{ic} - \bar{d})^2} \quad (4.11)$$

Por fim, o coeficiente de variação de distâncias é resultante do quociente entre s'_d e \bar{d} :

$$CV_{dc} = \frac{s'_d}{\bar{d}} \quad (4.12)$$

4.5 Rotas

Como é referido no capítulo 3, constitui um dos objetivos desta dissertação o desenvolvimento de rotas adequadas a cada setor. Demonstrando assim a aplicabilidade dos problemas de setorização a questões operacionais.

Partindo de setores equilibrados é possível determinar a solução para o problema de otimização de rotas adequado a cada setor. A abordagem a esta questão tem como pressuposto a resolução do Travelling Salesman Problem (TSP), pretendendo-se a minimização da distância percorrida para a eficaz e eficiente recolha de todas as cargas.

4.5.1 Resolução

A abordagem de resolução proposta para o TSP prende-se com o recurso a uma meta-heurística já utilizada na resolução deste problema, o Algoritmo Genético. Todo o desenrolar desta meta-heurística está associado a três populações distintas:

- População Atual;
- Vizinhança da População Atual;
- População com a Melhor Solução.

O algoritmo inicia-se pela definição de uma população aleatória composta por cem elementos. Desta população é determinada uma rota inicial, aleatória, com o propósito de ser futuramente comparada e avaliada perante outras soluções provenientes de outras populações. Por outras palavras, esta rota é gerada apenas para que o algoritmo possa desenrolar-se de forma normal.

Após a definição desta primeira rota, a população inicial evolui a partir de um conjunto aleatório de soluções que a constituem. A partir deste e com recurso a um operador binário de seleção com probabilidade, $k = 0,4$, são selecionados indivíduos que serão os progenitores a aplicar num operador de *Crossover*. A existência do operador binário de seleção indica que, por vezes, podem ser selecionados progenitores que não são os mais favoráveis ao desenrolar e obtenção da solução ótima para o TSP.

O operador *Crossover* irá retornar o "filho" dos dois indivíduos que recebe, ou seja, uma nova população. Este começa por fazer uma seleção aleatória de elementos do primeiro progenitor, com os quais inicia a definição do filho que irá retornar. Esta definição é concluída com a introdução dos restantes elementos a partir do segundo progenitor.

Estando definida a nova população, são determinadas todas as rotas pertencentes a esta. De seguida, estas mesmas rotas sofrem uma mutação, de acordo com o mesmo operador binário referido acima, correspondente à troca aleatória de dois índices da rota.

Por fim, é determinada qual a rota mínima pertencente à população atual.

Se esta rota for melhor que a solução atual, então, a segunda será atualizada. A "População com a melhor solução" será também atualizada e seguirá um processo de evolução como referido.

Caso a rota encontrada não seja melhor que a atual, esta nova população, a última a ser definida, sofrerá um processo de evolução tal como o explicitado e a "população com a melhor solução" manter-se-á a mesma.

4.6 Geração de Grafo e Matriz de Distâncias

Para além da abordagem referente à setorização, já descrita, tornou-se pertinente equacionar quais as instâncias necessárias ao desenvolvimento de todo o processo de resolução e como estas seriam processadas.

O procedimento inicia-se com a leitura das instâncias referentes às cargas no plano xy e à quantidade, q , associada a cada uma. À localização de cada carga corresponde um vértice no grafo.

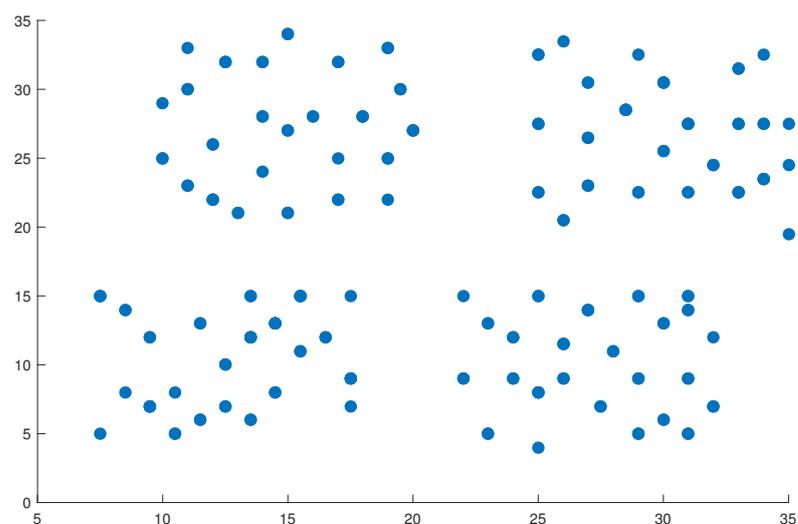


Figura 4.7: Conjunto de 100 Cargas dispostas no plano Cartesiano, (x,y)

Na Figura 4.7 é apresentada um exemplo de uma instância que acompanhará toda a demonstração formulada nas restantes secções do capítulo.

4.6.1 Graph Generator

Em grande parte dos problemas de setorização apresentados na literatura, é recorrente o uso da distância euclidiana entre pontos durante a execução dos algoritmos propostos.

Ciente do desfasamento com a realidade, por vezes provocado por esta abordagem, quando, por exemplo, existem limites naturais, como rios ou lagos, entre pontos no plano, foram adotadas e introduzidas abordagens complementares. Estas barreiras naturais obrigam ao planeamento de rotas indiretas entre os pontos pois não é possível definir uma aresta com os vértices.

Dadas as circunstâncias do problema considera-se relevante o proveito, sempre que possível, de uma aproximação à distância real entre dois vértices de um grafo. Esta tomada de posição permite a obtenção de uma solução, à partida, mais favorável à implementação de rotas, como pretendido. É também benéfica na abordagem à setorização, pois permite responder a mais um dos critérios presentes na literatura, o respeito pelos limites naturais e obstáculos geográficos.

Partindo dos dados relativos sobre a localização das cargas existentes, (x, y) , foi implementado um "Gerador" de grafos conexos. Este procura e obtém um grafo, cujas cargas constituem o conjunto dos vértices, representativo das arestas de menor dimensão necessárias a garantir a sua conectividade.

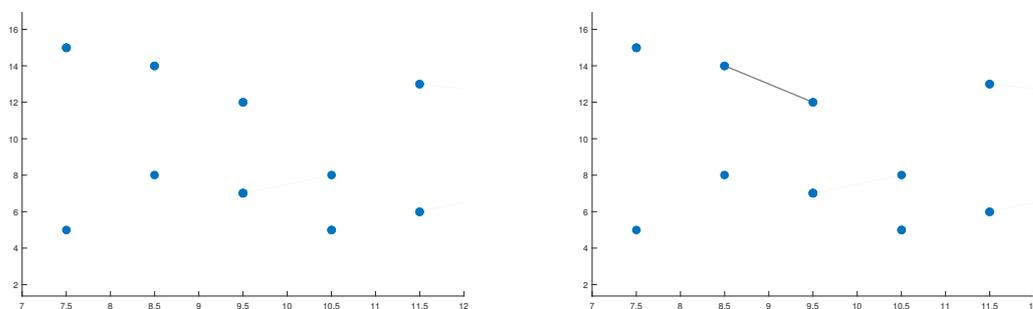


Figura 4.8: Exemplo de Formação de Nova Aresta do Grafo à direita, a partir das Cargas, à esquerda

O algoritmo começa por determinar qual o par de pontos, (i, j) , que apresenta a menor distância euclidiana, d_{ij} , 4.13, entre si e com este define a primeira aresta do grafo, Figura 4.8.

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.13)$$

Nas iterações seguintes é determinada, com a mesma expressão, 4.13, qual a carga, k , mais próxima de i ou de j . Definindo assim uma nova aresta, correspondente a (i, k) ou (j, k) . É este o ciclo que define todo o processo iterativo de geração do grafo, tendo como critério de paragem, a

visita, de pelo menos uma vez, a todos os pontos. Ou seja, a pertença de todos os vértices a, pelo menos, uma aresta do grafo.

Da execução deste algoritmo resulta uma instância que identifica cada aresta pelos seus constituintes, (i, j) e apresenta o seu comprimento, d .

Em suma, é de referir que este grafo pretende apenas auxiliar a definição de setores e não restringir a resolução do problema de rotas.

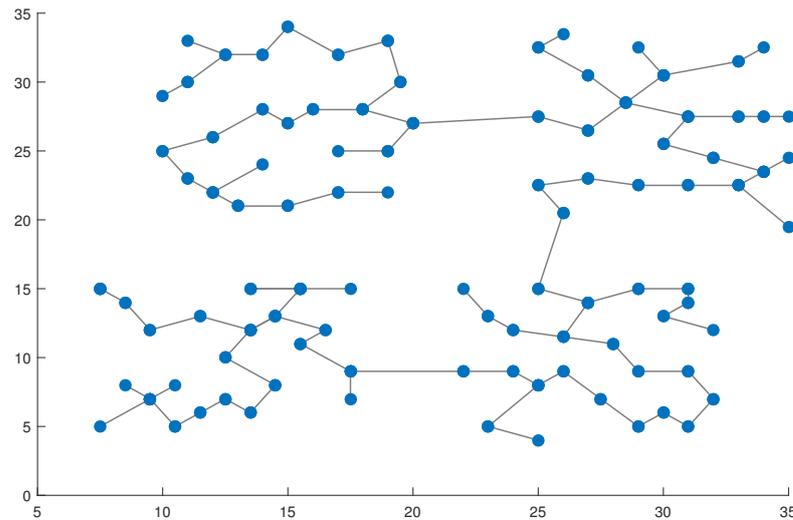


Figura 4.9: Grafo Formado a partir das Cargas de Exemplo

4.6.2 Aplicação do Algoritmo de *Dijkstra*

Em todo o desenvolvimento desta dissertação é pretendida, sempre que possível, a aplicação de uma aproximação à distância real entre as cargas em detrimento da distância euclidiana. Por distância real o comprimento do menor percurso entre as cargas i e j no contexto real.

Tendo já determinado o grafo conexo, como referido na secção anterior, é agora essencial aferir, a partir deste, a menor distância entre todas as cargas.

Para tal foi implementado o algoritmo de *Dijkstra*. Algoritmo este que se tem demonstrado eficaz neste tipo de questões, visto que neste caso, se lida com um grafo não direcionado constituído por arestas de peso não negativo.

A Figura 4.10 enuncia o caminho mínimo entre dois vértices do grafo.

4.6.3 Matriz de Distâncias

A partir dos resultados anteriores é possível descrever a matriz de distâncias entre todas as cargas submetidas ao tratamento e processamento de dados.

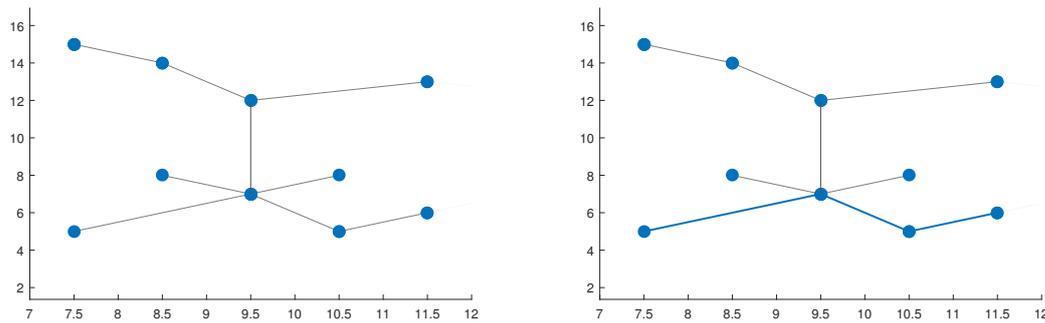


Figura 4.10: Exemplo do Menor Percurso entre duas Cargas segundo o algoritmo de Dijkstra, à direita, a azul

Esta matriz, exemplificada em 4.14, é simétrica, de dimensão igual ao número total de pontos. Apresenta na sua diagonal o valor zero, adotado de forma propositada a simplificar e assegurar a eficácia da implementação do método heurístico, pois a distância entre um ponto e si próprio tem, de facto, este valor.

$$\begin{bmatrix} 0 & 24,73 & \dots & 18,25 \\ 24,73 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 18,25 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.6.4 Matriz de Relação

À semelhança da anterior, é implementada uma matriz quadrada de dimensão igual ao número total de pontos. Esta caracteriza, a partir das instâncias iniciais, as relações entre as cargas estudadas, 4.15. A diagonal da matriz apresenta o valor -1 , caracterizando assim a relação de um ponto consigo mesmo.

Porém, para as cargas que não têm especificado qualquer atributo, é atribuído nesta matriz o valor zero, ou seja, esta relação não irá influenciar o método heurístico aplicado à resolução do problema (o parâmetro s_{ij} será igual a zero).

$$\begin{bmatrix} -1 & 24,73 & \dots & 18,25 \\ 24,73 & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 18,25 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.6.5 Setores

Atendendo ao segundo problema abordado por esta dissertação é necessário apresentar a solução da setorização, de uma forma clara, que possa ser facilmente compreensível e aplicável à

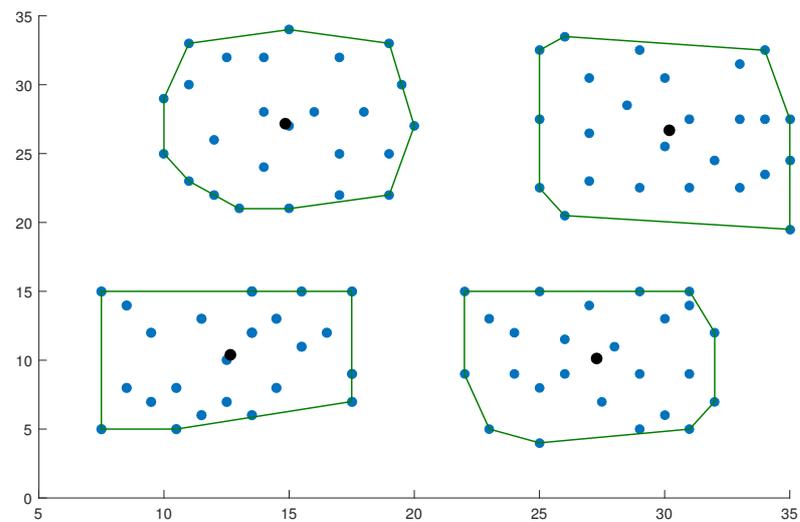


Figura 4.11: Exemplo de Formação de 4 Setores a partir de 100 Cargas

otimização de rotas, bem como de fácil percepção por parte dos intervenientes no processo.

Os setores, representados na Figura 4.11, são assim enunciados como uma lista que apresenta a identificação da própria carga, i , e o par de coordenadas correspondente, (x, y) e a quantidade da mesma, q . O setor em causa é também identificado, na primeira linha da lista, com a apresentação das coordenadas do respetivo centro de massa e pela quantidade total existente no setor .

Capítulo 5

Análise de Resultados

Neste capítulo serão apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos para dar resposta aos três problemas de Setorização apresentados anteriormente e para a respetiva definição de rotas.

Para cada um dos problemas serão apresentados, para efeitos comparativos, os resultados em fases anteriores e posteriores à otimização implementada. Referentes a esta, serão também demonstrados resultados baseados numa otimização com parâmetros aleatórios e com parâmetros fixos, definidos pelo agente decisor, com base na análise aos resultados por si efetuada.

Os algoritmos desenvolvidos no âmbito desta dissertação foram implementados com recurso à linguagem de programação *Python 2.7* no ambiente de desenvolvimento *JetBrains Pycharm 2017*. Todas as representações visuais inseridas na dissertação foram obtidas a partir de *scripts* implementados em *Matlab* e *Office Excel*. Os testes aos respetivos algoritmos decorreram numa máquina com as seguintes características:

- Processador Intel(R) Core(TM) I7-3537U CPU @2,00 GHZ - 2,50 GHZ;
- 10 GB de Memória RAM instalados;
- Sistema operativo *Windows 10 Home* de 64 bits .

Previamente à apresentação dos resultados obtidos para as diversas instâncias será ainda explicitado, na secção seguinte, um exemplo do comportamento de todo algoritmo ao longo da resolução de um problema de setorização.

5.1 Instâncias para o Problema

Os testes aos algoritmos propostos recorreram a um conjunto diverso de instâncias que caracteriza não só a localização das cargas em estudo e respetiva quantidade mas também o comportamento de agentes decisores face às mesmas.

Foram estudadas instâncias que têm por base fundamentos de casos reais já estudados, o da recolha de resíduos sólidos urbanos no município de Monção.

Foram geradas instâncias aleatórias com vista a um mais rápido e eficaz estudo e desenvolvimento dos algoritmos propostos. Sobre estas instâncias é importante ressaltar que apresentam duas visões sobre a quantidade associada a cada localização:

- Cargas com a mesma quantidade;
- Cargas com quantidade aleatória, porém, pertencentes a um intervalo real.

Por fim, foram geradas instâncias dedicadas à apresentação e demonstração do comportamento de todo o algoritmo na presente dissertação.

Todas as instâncias encontram-se disponíveis para consulta em <https://paginas.fe.up.pt/~e12106/dissertation/instances>.

5.2 Setorização - Exemplo

Nesta secção serão apresentados os resultados provenientes de instâncias geradas com vista à exemplificação pretendida. Uma das instâncias apresentará equilíbrio entre as cargas estudadas e, pelo contrário, a outra introduzirá alguma variabilidade neste parâmetro em análise.

As soluções apresentadas nestes exemplos serão avaliadas, tal como as restantes, ao nível qualitativo e quantitativo. Esta avaliação realizar-se-á de acordo com os critérios explicitados na secção 4.4 do presente documento:

- Equilíbrio - CV_q ;
- Compacidade - CV_d ;
- Equilíbrio de Distâncias - CV_{dc} .

A apresentação destes exemplos culminará com a introdução dos resultados obtidos na aplicação do algoritmo genético para o TSP de cada setor.

5.2.1 Setorização nº 1

Na Figura 5.1 estão representados cem pontos distribuídos aleatoriamente no plano cartesiano x, y .

A quantidade associada a cada um destes pontos apresenta o valor de cinco unidades, estando representada uma quantidade total de quinhentas unidades.

Pretendem-se formar cinco setores que apresentem valores adequados para os coeficientes mencionados.

É de recordar que o pré-processamento de dados se inicia com a definição do grafo da aresta mínima e aqui representado na Figura 5.2.

O pré-processamento continua com a aplicação do algoritmo de *Dijkstra* aos resultados provenientes do gerador de grafos aplicado. Graças à elevada extensão da matriz de distâncias, resultante

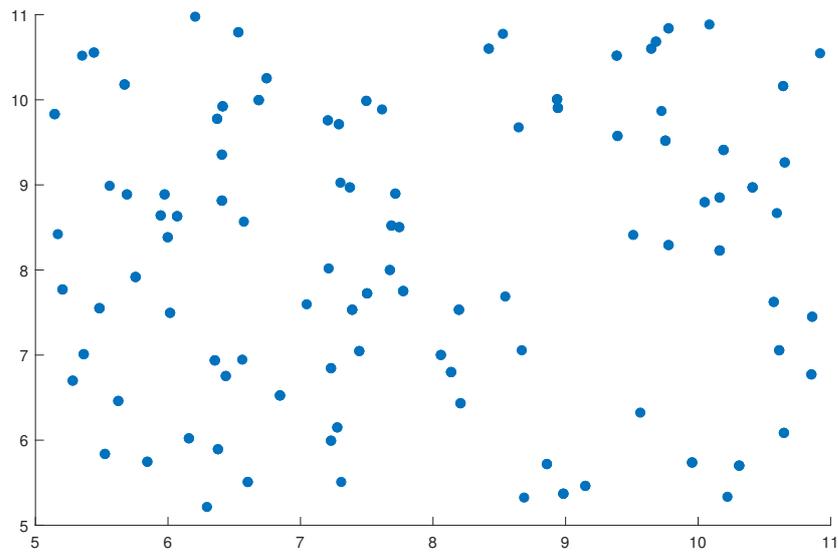


Figura 5.1: Setorização nº 1 - Cargas

deste algoritmo, a mesma não será aqui apresentada. Posto isto, a título expositivo, o algoritmo anterior determina que a distância mínima entre os pontos, por exemplo, se $A_1 = (5, 14; 9, 83)$ e $A_7 = (5, 44; 10, 55)$, então estão efetivamente separados por 4,17 unidades de distância.

A Figura 5.3 é representativa dos primeiros setores obtidos com a aplicação da heurística construtiva, ou seja, dos resultados pré-otimização.

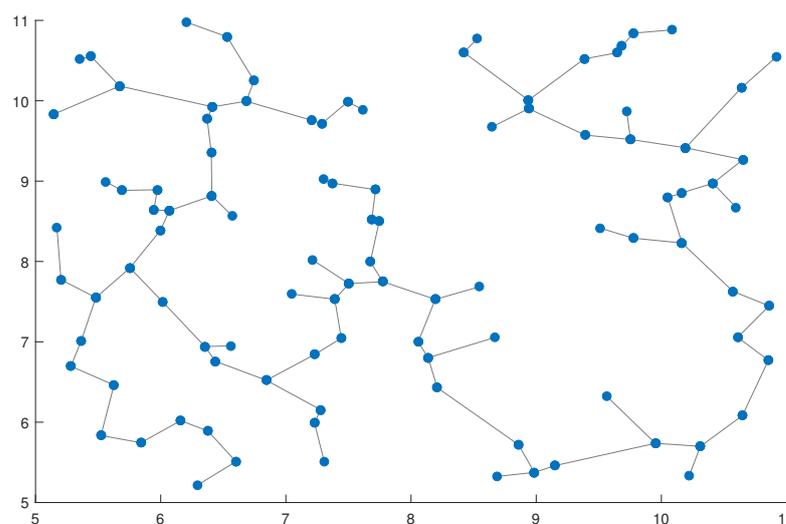


Figura 5.2: Setorização nº 1 - Grafo gerado a partir das cargas

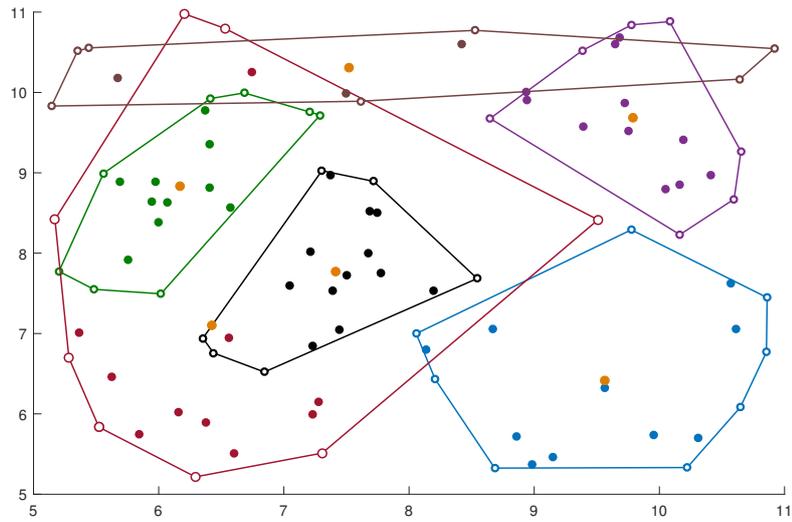


Figura 5.3: Setorização n° 1 - Primeira Solução

Esta solução é caracterizada pelos respectivos valores dos coeficientes em análise:

- $CV_q = 0,680$
- $CV_d = 0,200$
- $CV_{dc} = 1,120$
- **Média** = 0,667

Estes mostram que existe espaço à melhoria da solução, pois, cada um destes, tem como objetivo a maior aproximação possível a zero.

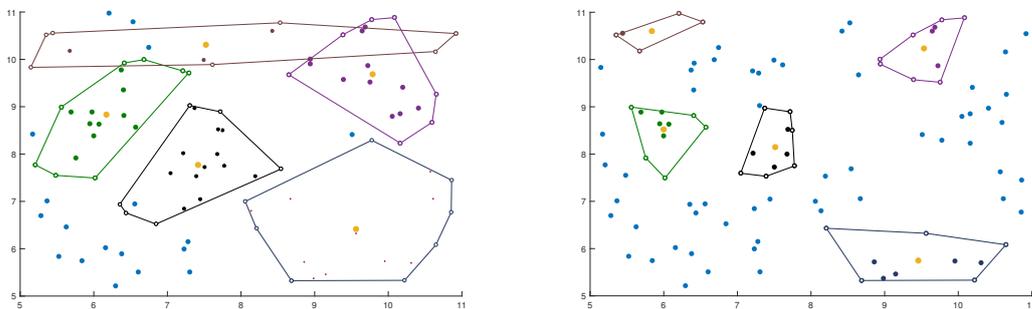


Figura 5.4: Setorização n° 1 - Liberação de Cargas

A Figura 5.4 mostra o resultado da eliminação do setor com pior d_i e consequente liberação de cargas dos restantes setores.

O algoritmo prossegue com a re-agregação de cargas prevista e assim obtenção da solução final com o número de setores pretendidos. Esta re-agregação ocorre conforme o explicitado, é calculada a atração entre as cargas livres e os setores existentes. É assim evitada a formação de novos setores que prejudicariam a solução para o problema de setorização apresentado.

A Figura 5.5 apresenta a solução para o problema exemplificativo após concluída toda a otimização descrita. São assim representados os cinco setores pretendidos.

Após a otimização, os setores resultantes apresentam, como é visível, formas geométricas aproximadas ao que é normalmente pretendido em problemas de setorização e referido na literatura.

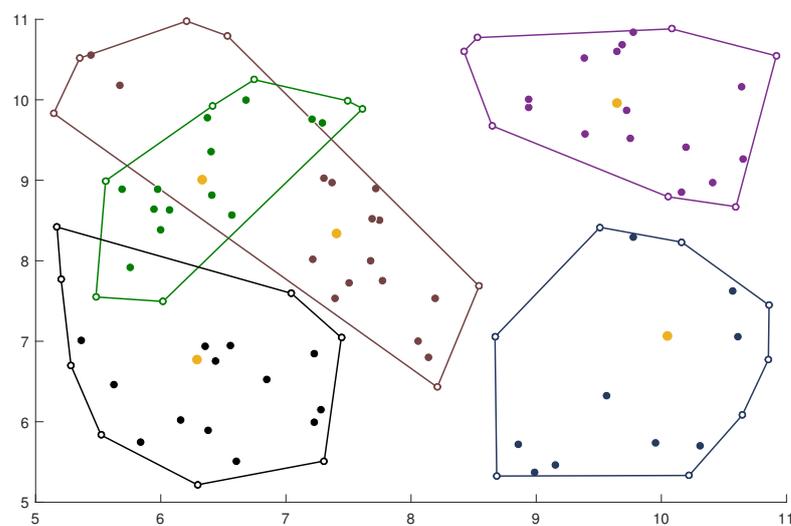


Figura 5.5: Setorização nº 1 - Solução Final

A solução apresentada para o problema de setorização, segundo os mesmos coeficientes, é caracterizada pelos seguintes resultados:

- $CV_q = 0,140$
- $CV_d = 0,070$
- $CV_{dc} = 0,650$
- **Média** = 0,287

Com estes se comprova a eficácia da otimização apresentada, pois os valores de todos os coeficientes são agora menores que os previamente registados.

5.2.1.1 Rotas

Nesta secção serão apresentadas as rotas determinadas após a setorização acima descrita.

Por "Distância Inicial" entende-se o comprimento total da primeira rota gerada pelo algoritmo e, por "Distância Final", o comprimento total da melhor rota obtida. O algoritmo proposto apresenta assim cinco rotas, cada uma correspondente a um setor definido:

- **Rota 1:**

- Distância Inicial: 21,21
- Distância Final: 14,04
- Percurso: [53 56 54 55 62 63 22 45 47 40 38 51 48 37 42 49 60 64 57]

- **Rota 2:**

- Distância Inicial: 16,72
- Distância Final: 8,32
- Percurso: [80 79 95 100 85 82 78 77 73 69 70 65 74 88 97 91 86 84]

- **Rota 3:**

- Distância Inicial: 19,17
- Distância Final: 9,21
- Percurso: [50 52 44 39 33 28 20 16 18 14 19 8 3 10 13 17 27 25 29 35 36]

- **Rota 4:**

- Distância Inicial: 28,10
- Distância Final: 11,97
- Percurso: [99 94 98 96 90 89 83 76 72 71 67 68 61 59 58 66 75 81 87 93 92]

- **Rota 5:**

- Distância Inicial: 37,72
- Distância Final: 18,09
- Percurso: [1 5 7 12 31 30 26 23 34 46 41 43 32 24 6 4 11 9 15 21 2]

5.2.2 Setorização nº 2

Neste segundo exemplo de Setorização, as cargas encontram-se exatamente nas mesmas posições do plano cartesiano que as anteriores. Assim não é necessária a apresentação dos resultados provenientes do pré-processamento de dados pois estes são também iguais aos anteriores.

O *Dataset* aqui aplicado tem como diferença o valor atribuído à quantidade associada a cada carga, estando, neste caso, contida no intervalo [1;15].

A Figura 5.6 apresenta a primeira solução obtida para estas instâncias. Neste caso, a solução apresenta-se desequilibrada e não está em conformidade com o pretendido. Os coeficientes de avaliação analisados apresentam os seguintes valores:

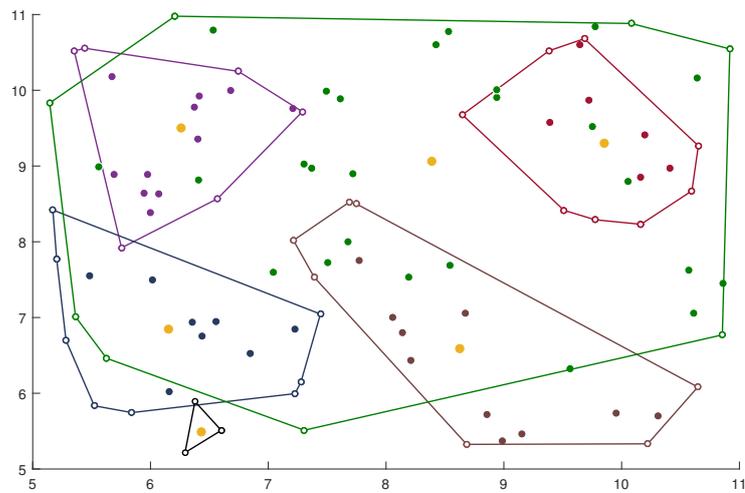


Figura 5.6: Setorização nº 2 - Primeira Solução

- $CV_q = 0,52$
- $CV_d = 0,41$
- $CV_{dc} = 0,95$

Tal como no primeiro exemplo, a Figura seguinte, 5.7, demonstra o resultado da libertação de cargas.

A Figura 5.8 apresenta os setores obtidos após a otimização deste segundo problema apresentado.

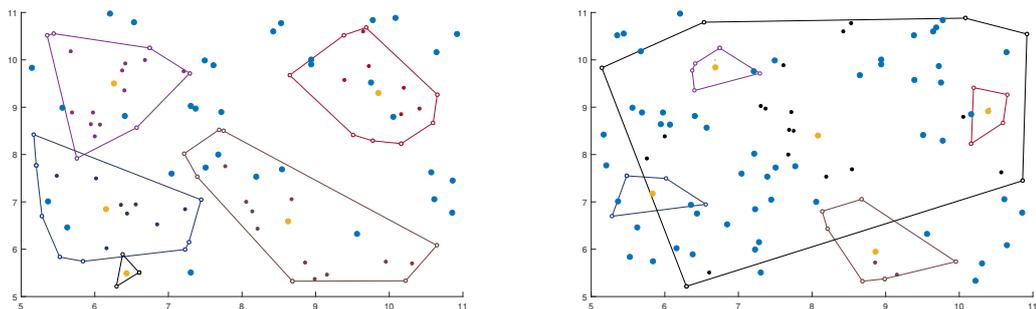


Figura 5.7: Setorização nº 2 - Libertação de Cargas

A solução apresentada para este problema é caracterizada pelos coeficientes de variação, com respetivos valores:

- $CV_q = 0,04$

- $CV_d = 0,08$
- $CV_{dc} = 0,43$

Este exemplo comprova a eficácia do método heurístico proposto a questões de setorização com maior variabilidade nas suas instâncias.

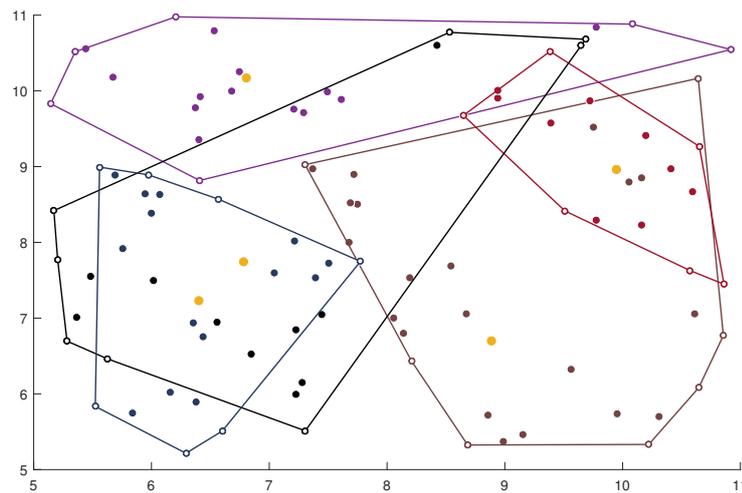


Figura 5.8: Setorização nº 2 - Solução Final

5.2.2.1 Rotas

Nesta secção serão apresentadas as rotas determinadas após a setorização acima descrita. O algoritmo proposto apresenta assim 5 rotas, cada uma correspondente a cada setor definido.

- **Rota 1:**

- Distância Inicial: 51,68
- Distância Final: 22,94
- Percurso: [72 89 90 96 83 76 66 60 53 45 47 55 64 98 94 84 86 95 80 56 54 58 59 61 67 68 71]

- **Rota 2:**

- Distância Inicial: 22,83
- Distância Final: 14,96
- Percurso: [36 35 50 82 85 100 52 44 39 28 27 25 29 12 1 5 7 22 31]

- **Rota 3:**

- Distância Inicial: 14,81
- Distância Final: 9,41
- Percurso: [97 91 93 99 92 87 81 75 79 74 65 70 69 73 88]

- **Rota 4:**

- Distância Inicial: 30,64
- Distância Final: 18,00
- Percurso: [19 6 4 11 32 37 46 41 43 49 42 62 63 78 77 2 3 8]

- **Rota 5:**

- Distância Inicial: 27,87
- Distância Final: 11,84
- Percurso: [57 48 34 23 15 9 21 26 30 24 14 18 13 10 17 16 20 33 40 38 51]

5.3 Setorização Simples

Esta secção visa apresentar os resultados computacionais obtidos a para o problema de setorização mais simples já apresentado.

São estudadas e apresentadas soluções de *Datasets* de três dimensões diferentes:

- 100 pontos;
- 240 pontos;
- 480 pontos.

Em comum com os restantes problemas de setorização, serão apresentados resultados para um número diferente de setores pretendido, nomeadamente, cinco e dez.

Na Tabela 5.1 são apresentados os resultados obtidos após a aplicação do algoritmo proposto aos *Datasets* com as três dimensões referidas, cada um destes desdobra-se em dois, um com igual quantidade associada a cada localização, e outro com quantidade pertencente ao intervalo [1; 15].

Com vista à mais fácil compreensão dos efeitos provocados pela implementação de todo o processo de otimização, a Tabela 5.1 apresenta, para cada *Dataset*, os resultados obtidos com a heurística implementada, antes e depois da otimização referida.

Nesta Tabela estão apresentados os valores que caracterizam cada solução obtida a partir do cálculo dos coeficientes referidos na Secção 4.2.2 do Capítulo 4. Face ao número de coeficientes apresentado e à possível dispersão dos valores obtidos pelos mesmos, considera-se relevante a apresentação do valor médio destes.

Deixando a análise exaustiva dos resultados obtidos para uma secção própria é possível afirmar, desde já, que, como pretendido, a otimização proposta revela-se eficaz na maioria dos testes

Tabela 5.1:
Setorização Simples

Setorização Simples					
<i>Dataset</i>	Índice	5 Setores		10 Setores	
		Antes	Depois	Antes	Depois
SECMC-1	CV_d	0,673	0,074	0,411	0,221
	CV_q	0,194	0,074	0,382	0,221
	CV_{dc}	0,630	0,158	1,272	0,529
	<i>Média</i>	0,494	0,101	0,681	0,321
SECMC-2	CV_d	0,472	0,193	0,530	0,151
	CV_q	0,472	0,053	0,264	0,151
	CV_{dc}	1,420	0,377	0,669	0,717
	<i>Média</i>	0,781	0,205	0,483	0,336
SECMC-3	CV_d	0,704	0,106	0,652	0,066
	CV_q	0,536	0,023	0,407	0,066
	CV_{dc}	2,028	0,737	2,540	0,498
	<i>Média</i>	1,078	0,286	1,188	0,208
SECMC-4	CV_d	0,747	0,214	0,671	0,042
	CV_q	0,556	0,096	0,309	0,042
	CV_{dc}	2,162	0,353	1,398	0,679
	<i>Média</i>	1,144	0,219	0,785	0,252
SECMC-5	CV_d	0,571	0,094	0,570	0,057
	CV_q	0,447	0,094	0,570	0,000
	CV_{dc}	1,521	0,459	0,272	0,429
	<i>Média</i>	0,838	0,213	0,466	0,161
SECMC-6	CV_d	0,695	0,175	0,985	0,023
	CV_q	0,531	0,018	0,285	0,023
	CV_{dc}	1,796	0,557	2,274	0,375
	<i>Média</i>	0,997	0,247	1,170	0,139

desenvolvidos. Todos os coeficientes têm a característica comum de que quanto mais próximo de zero for o seu valor, maior será a qualidade da solução.

As instâncias SECMC-1 e SECMC-2 apresentam-se constituídas por 240 pontos, SECMC-3 e SECMC-4 por 480, por fim, SECMC-5 e SECMC-6 por 100 pontos.

5.3.1 Compacidade - CV_d

Em primeiro lugar são analisados os resultados face à compacidade dos setores obtidos. Este é um dos critérios mais importantes para a avaliação de problemas de setorização.

Os dados da Tabela 5.1 mostram que a solução obtida com melhor valor para o coeficiente de Compacidade corresponde à formação de dez setores a partir do *Dataset* SECMC-6, com o valor $CV_d = 0,023$.

Pelo contrário, a pior solução apresenta o valor de 0,221 e corresponde à formação de dez setores com o *Dataset* SECMC-1.

A otimização revela-se mais eficaz na formação de dez setores, também a partir de SECMC-6, apresentando uma diferença de 0,962 entre 0,985 proveniente da pré otimização e 0,023 final.

À semelhança da pior solução apresentada, a formação de dez setores a partir do *Dataset* SECMC-1 revela-se a menos eficaz. Tendo uma primeira solução o valor de $CV_d = 0,411$ e uma melhoria de apenas 0,190.

Por fim, é de referir que para este problema foi obtida uma otimização média de 0,522 e verifica-se uma compacidade média de 0,118, entre todas as soluções otimizadas.

5.3.2 Equilíbrio - CV_q

Analisando o Equilíbrio entre soluções, com os mesmos princípios da abordagem à Compacidade, a solução mais equilibrada apresenta o valor para CV_q igual a 0, é assim a solução ótima para a formulação de dez setores a partir de SECMC-5. Também nesta solução, a otimização revela-se mais eficaz, provocando uma diferença de 0,570 entre a pré a pós otimização.

A pior solução corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-1, $CV_q = 0,221$.

A formação de dez setores a partir da instância SECMC-2 revela a menor alteração sofrida face à solução inicial, com uma diferença entre soluções de apenas 0,116. Este valor é justificado pela eficácia inicialmente apresentada pelo método construtivo aplicado, *SectorEl*.

Por fim, face ao equilíbrio, a otimização média é de 0,341 e é verificado um valor médio CV_q de 0,072 para todas as soluções do problema de Setorização Simples.

5.3.3 Distância - CV_{dc}

A formação de cinco setores a partir de SECMC-1 constitui a melhor solução segundo este critério de avaliação, com $CV_{dc} = 0,16$.

Pelo contrário, a formação de dez setores a partir do mesmo *Dataset* apresenta-se como a pior solução com $CV_{dc} = 0,743$.

Segundo este critério verifica-se um agravamento da solução para a formação de dez setores a partir de SECMC-5 e SECMC-2, nomeadamente em cerca de 0,150 e 0,050. Atendendo aos restantes coeficientes que avaliam estas soluções, existe uma melhoria global das mesmas após a otimização, assim, estas soluções são consideradas válidas.

A formação de dez setores com SECMC-3 é a solução mais influenciada pelo processo de otimização, com uma melhoria do CV_{dc} de 2,042.

Considerando os resultados médios, segundo este critério de avaliação, as soluções apresentam um valor médio de 0,507 e uma otimização média de 1,010.

5.3.4 Média

A solução com melhor valor global corresponde à formação de cinco setores a partir de SECMC-1 e apresenta um valor de 0,101, representada na Figura 5.9.

A pior solução apresenta $Média = 0,336$, correspondente à formação de dez setores a partir de SECMC-2.

No global, é apresentada uma melhoria máxima de 1,031, correspondente à formação de dez setores a partir de SECMC-6.

Ao valor mínimo da melhoria, corresponde a otimização em cerca de 0,146 da solução de dez setores com as instâncias SECMC-2.

A eficácia geral da otimização é demonstrada pelo valor médio de aproximadamente 0,618.

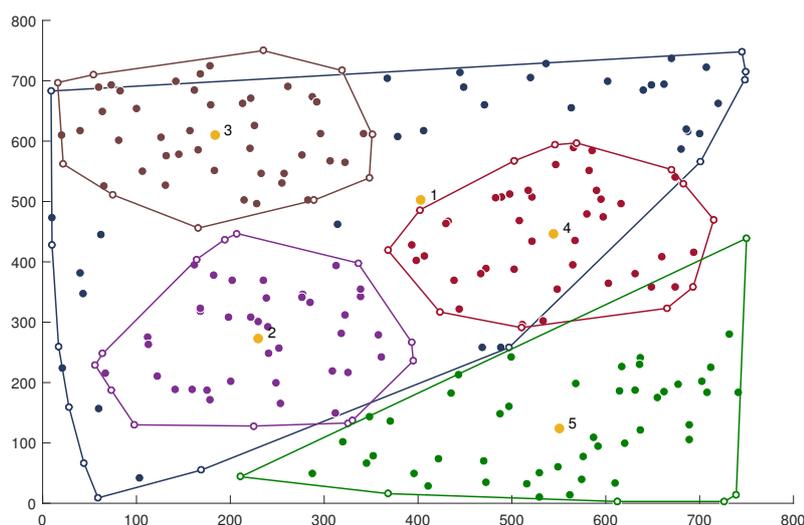


Figura 5.9: Setorização Simples - Melhor Solução

5.4 Setorização Multicritério

Nesta secção serão apresentados os resultados computacionais obtidos para a segunda questão enunciada nesta dissertação.

Como referido, esta questão introduz um novo tipo de instâncias ao problema que interpretam a ação de um agente decisor.

Posto isto foram geradas novas instâncias, que representam as relações entre as cargas, utilizadas na obtenção dos resultados apresentados nesta secção. Estas instâncias revelam a relação entre

100, 200 e 400 pontos(SECMC-REL-1, SECMC-REL-2, SECMC-REL-3), tendo sido utilizada a que mais se adequa a cada um dos *Datasets*.

Na Tabela 5.2 estão enunciados os resultados obtidos pela aplicação do algoritmo. Tal como nas questões anteriores, são apresentados resultados para cinco e dez setores, pré e pós otimização.

Tabela 5.2:
Setorização Multicritério

Setorização Multicritério					
<i>Dataset</i>	Índice	5 Setores		10 Setores	
		Antes	Depois	Antes	Depois
SECMC-1	CV_d	0,461	0,072	0,516	0,077
	CV_q	0,261	0,019	0,091	0,077
	CV_{dc}	0,806	0,466	1,000	0,493
	<i>Média</i>	0,504	0,186	0,530	0,216
SECMC-2	CV_d	0,710	0,079	1,024	0,151
	CV_q	0,490	0,079	0,128	0,151
	CV_{dc}	1,340	0,290	0,652	0,717
	<i>Média</i>	0,838	0,149	0,595	0,336
SECMC-3	CV_d	0,850	0,409	0,802	0,111
	CV_q	0,547	0,024	0,106	0,111
	CV_{dc}	1,645	0,613	0,614	0,568
	<i>Média</i>	1,004	0,345	0,502	0,260
SECMC-4	CV_d	0,706	0,554	0,488	0,240
	CV_q	0,471	0,050	0,459	0,240
	CV_{dc}	1,185	0,713	1,223	1,102
	<i>Média</i>	0,779	0,435	0,716	0,522
SECMC-5	CV_d	0,540	0,281	1,380	0,047
	CV_q	0,087	0,000	0,170	0,047
	CV_{dc}	0,704	0,404	0,816	0,298
	<i>Média</i>	0,439	0,229	0,781	0,131
SECMC-6	CV_d	0,740	0,436	1,248	0,199
	CV_q	0,502	0,033	0,270	0,081
	CV_{dc}	0,801	0,458	1,706	0,585
	<i>Média</i>	0,674	0,309	1,064	0,288

5.4.1 Compacidade - CV_d

Do ponto de vista da compacidade conclui-se que a melhor solução apresenta um coeficiente com valor igual a 0,047 para formação de dez setores a partir de SECMC-5. Os resultados obtidos na formação de cinco setores a partir de SECMC-1 e SECMC-2 merecem ainda destaque por serem caracterizados por um CV_d inferior a 0,100, designadamente, 0,072 e 0,079.

A solução mais desfavorável, $CV_d = 0,5542$, segundo este critério, corresponde à formação de cinco setores com SECMC-4. Negativamente, destacam-se ainda os resultados obtidos para a formação de cinco setores com SECMC-3, $CV_d = 0,409$ e SECMC-6, $CV_d = 0,436$. Estes resultados, apesar de serem aqueles que apresentam maior compacidade, conseguem demonstrar a eficácia da otimização proposta, pois as soluções pré otimização apresentam valor de CV_d iguais a 0,706, 0,850 e 0,740, respetivamente.

Com uma redução de apenas 0,151 ao valor do coeficiente, a solução de menor qualidade, já referida, é também aquela que apresenta menor influência do processo de otimização.

Com uma redução de 1,333 comparativamente com a solução inicial, a já supra citada abordagem ao *Dataset* SECMC-5 apresenta a maior diferença neste cálculo. Com as respetivas melhorias em 1,049 e 0,872, a divisão de SECMC-6 e SECMC-2 em dez setores exibem resultados mais satisfatórios.

Concluindo-se esta análise com a referência à otimização média verificada de 0,567.

5.4.2 Equilíbrio - CV_q

Analisando o Equilíbrio de Cargas das soluções, apresentadas na 5.2, verifica-se que pela primeira vez, o método de otimização proposto tem um efeito adverso, em dois *Datasets*, SECMC-2 e SECMC-3. O equilíbrio dos mesmos é agravado em 0,023 e 0,005 respetivamente. Visto que para estes dois conjuntos o valor final de CV_q , 0,151 e 0,111, continua a caracterizar positivamente as setorizações obtidas, este agravamento é desvalorizado face às melhorias apresentadas anteriormente para a compacidade. Não querendo esta análise indicar um benefício da compacidade em relação aos restantes critérios, estes resultados são aceites e considerados válidos pois inserem-se numa melhoria global da solução.

A formação de dez setores a partir de SECMC-4 é a que exprime a pior solução face ao equilíbrio com $CV_q = 0,240$. Características opostas são reveladas pela formação de cinco setores com SECMC-5 com $CV_q = 0$, ou seja, é a solução ótima para esta questão em particular.

Com uma variação de coeficiente de 0,523, a obtenção de cinco setores por parte de SECMC-3 é a mais influenciada por todo o processo de melhoria. Destaque também para as respetivas descidas em 0,411 e 0,469 das soluções para também cinco setores relativos às instâncias SECMC-2 e SECMC-4.

5.4.3 Distância - CV_{dc}

O CV_{dc} de menor dimensão, que caracteriza a melhor solução, tem o valor de 0,290 e descreve os cinco setores obtidos a partir de SECMC-2.

No outro extremo do pretendido, apresentam-se os dez setores originários de 8_6 com $CV_{dc} = 1,018$. Apesar da otimização em 0,122, o coeficiente apresenta um valor elevado justificado pela dispersão espacial das próprias cargas, que associadas ao reduzido número de setores pretendido faz com que cada um destes ocupe uma grande área geográfica e, com isto, algumas das cargas estejam bastante afastadas do centro de massa do setor, provocando o elevado coeficiente.

A formação de dez setores a partir de SECMC-6 apresenta a maior otimização registada com uma redução em 1,121 face ao valor inicial.

Pelo contrário, a divisão em dez setores de SECMC-2 tem a sua solução agravada em 0,065. Tal como o ocorrido na análise anterior, enquadrando este valor na globalidade dos resultados, a otimização é validada pela melhoria obtida ao nível da compacidade.

O valor médio registado para o CV_{dc} é de cerca de 0,560 e a otimização proposta apresenta uma melhoria média de cerca de 0,482.

5.4.4 Média

Atendendo aos valores médios das soluções obtidas, a melhor solução, com uma média de 0,131, corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-5, sendo esta resultante da melhoria equivalente em cerca de 0,650.

A pior solução, em termos médios, corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-4 com coeficiente médio de 0,522. Apesar do registado no equilíbrio e compacidade desta solução, 0,2403 nos dois coeficientes, esta é fortemente penalizada pelo resultado apresentado no CV_{dc} , 1,018. Esta solução é ainda aquela que apresentar menores efeitos da otimização, em termos médios.

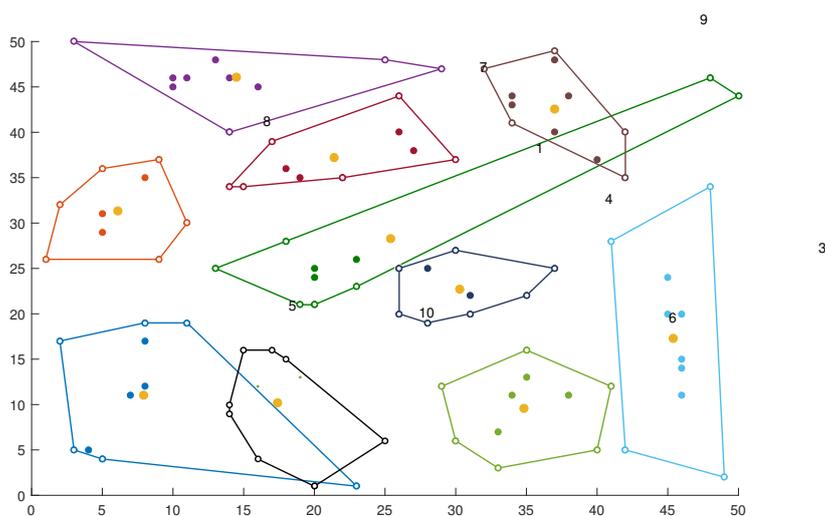


Figura 5.10: Setorização Multicritério - Melhor Solução

Relativamente à otimização em termos médios, realça-se a redução em 0,776 e 0,659 para os dez setores obtidos a partir de SECMC-6 e SECMC-2 respetivamente.

Por fim, na globalidade, todas as soluções apresentam uma melhoria média, face às médias obtidas, em aproximadamente 0,418.

5.5 Setorização Multicritério com Distâncias Reais

Esta sub-secção vem apresentar as respostas ao último tipo de problema de Setorização descrito nesta Dissertação.

Todos os testes realizados são idênticos aos referidos nas duas questões anteriores, bem como a análise efetuada e aqui mencionada.

A Tabela 5.3 contém o valor de todos os coeficientes que caracterizam a análise realizada.

5.5.1 Compacidade - CV_d

Da Tabela 5.3 conclui-se que a melhor solução ao nível da compacidade é apresentada pela formação de dez setores a partir de SECMC-3, $CV_d = 0,010$.

A solução com coeficiente de compacidade mais desfavorável, $CV_d = 0,900$, advém da formação de cinco setores com SECMC-4. Esta solução é até agravada em 0,195 face à inicial, porém, comparado com os restantes coeficientes, a solução é considerada válida pois é alcançada uma melhoria global da mesma.

Todo o processo de melhoria revela-se mais eficaz na formulação de dez setores a partir de SECMC-5 com uma redução do registado pelo coeficiente em 1,25 unidades.

A formação de dez setores a partir de SECMC-1 apresenta-se com o menor impacto sofrido por parte da otimização, com uma redução de apenas 0,297 face ao valor inicial de 0,369.

No global, é apresentada uma melhoria média em 0,570 e uma valor média 0,335 face à compacidade das soluções.

5.5.2 Equilíbrio - CV_q

A análise efetuada revela que o melhor valor para o coeficiente de equilíbrio foi obtido na formação de dez setores a partir de SECMC-5_10 com $CV_q = 0$. Está é a solução ótima, face ao equilíbrio, para o problema mencionado.

A solução com menor qualidade, $CV_q = 0,344$, refere-se à definição de dez setores a partir de SECMC-4. Este valor é otimizado em 0,053 relativamente ao inicial, sendo simultaneamente a menor otimização registada.

A otimização implementada apresenta-se mais eficaz ao provocar uma diminuição em 0,540 no CV_q dos cinco setores estipulados a partir de SECMC-3.

O valor médio de CV_q neste problema é aproximadamente 0,053 e a otimização revela uma diminuição média de 0,328.

Tabela 5.3:
Setorização Multicritério com Distâncias Reais

Setorização Multicritério com Distâncias Reais					
Dataset	Índice	5 Setores		10 Setores	
		Antes	Depois	Antes	Depois
SECMC-1	CV_d	0,461	0,143	0,369	0,077
	CV_q	0,261	0,019	0,369	0,077
	CV_{dc}	0,806	0,668	1,694	0,759
	<i>Média</i>	0,504	0,274	0,803	0,302
SECMC-2	CV_d	0,710	0,163	0,865	0,210
	CV_q	0,490	0,054	0,376	0,023
	CV_{dc}	1,340	0,512	2,086	0,872
	<i>Média</i>	0,838	0,240	1,098	0,365
SECMC-3	CV_d	0,850	0,725	1,019	0,010
	CV_q	0,547	0,007	0,340	0,010
	CV_{dc}	1,645	0,672	1,800	0,465
	<i>Média</i>	1,004	0,463	1,043	0,160
SECMC-4	CV_d	0,706	0,900	1,287	0,344
	CV_q	0,471	0,053	0,397	0,344
	CV_{dc}	1,185	0,779	2,240	1,463
	<i>Média</i>	0,787	0,578	1,145	0,717
SECMC-5	CV_d	0,733	0,260	1,380	0,129
	CV_q	0,412	0,000	0,170	0,000
	CV_{dc}	1,274	0,458	0,816	0,736
	<i>Média</i>	0,798	0,237	0,781	0,286
SECMC-6	CV_d	1,765	0,189	0,592	0,040
	CV_q	0,441	0,033	0,299	0,016
	CV_{dc}	0,810	0,528	1,364	0,551
	<i>Média</i>	0,995	0,205	0,744	0,200

5.5.3 Distância - CV_{dc}

A melhor solução apresenta $CV_{dc} = 0,458$ e corresponde à formação de dez setores com SECMC-5. Esta apresenta uma melhoria de 0,816 face à inicial e é, simultaneamente, aquela cujo impacto da otimização é maior face ao obtido inicialmente.

A solução mais desfavorável apresenta $CV_{dc} = 1,463$ e corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-4. Apesar disto, é registada uma melhoria de 0,776 face ao valor inicial, o

que demonstra, que mesmo a solução mais fraca consegue ver os seus resultados minorados pelo processo de otimização apresentado.

A formação de dez setores a partir de SECMC-5 apresenta-se como a que tem menor influência da otimização com uma diferença de apenas 0,079.

Em valores médios, as soluções apresentam uma coeficiente médio de 0,707 e uma eficácia média de 0,886.

5.5.4 Média

Atendendo às médias de todos os resultados, de todas as soluções apresentadas na Tabela 5.3, a melhor setorização corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-3 com um resultado de 0,160 para média de todos os coeficientes.

A pior solução corresponde à formação de dez setores a partir de SECMC-4 e apresenta um resultado global de 0,717. É de salientar que este é penalizado pelo elevado CV_{dc} referido anteriormente.

Relativamente à otimização apresentada, a formação de dez setores a partir de SECMC-6 revela a maior melhoria global, com um redução de 1,030.

A formação de cinco setores a partir de SECMC-4 apresenta a menor redução global face a toda a otimização, com uma diferença de apenas 0,209 face à solução inicial.

Por fim, é apresentada uma melhoria média de 0,542 face aos resultados globais de todas as soluções evidenciadas na Tabela 5.3.

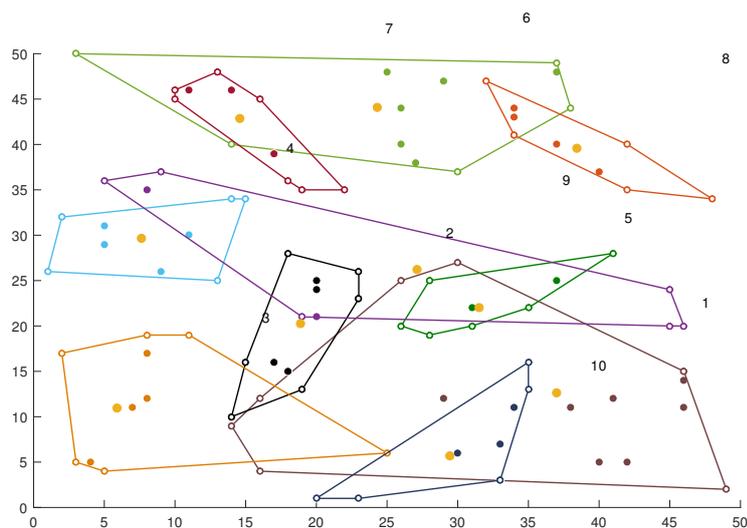


Figura 5.11: Setorização Multicritério com Distâncias Reais - Melhor Solução

5.6 Análise Global

Esta secção visa apresentar uma análise global a todos os resultados apresentados nas Tabelas anteriores. Esta englobará novamente os resultados pré e pós otimização para cada um dos coeficientes estudados.

Por fim, tal como o especificado, para cada um dos problemas de setorização demonstrados serão analisados os resultados médios obtidos.

5.6.1 Compacidade - CV_d

O Gráfico da Figura 5.12 apresenta na sua coluna número 1 a média da compacidade obtida antes da implementação do processo de otimização.

A coluna número 2, da direita, apresenta a média da compacidade dos setores depois de toda a implementação.

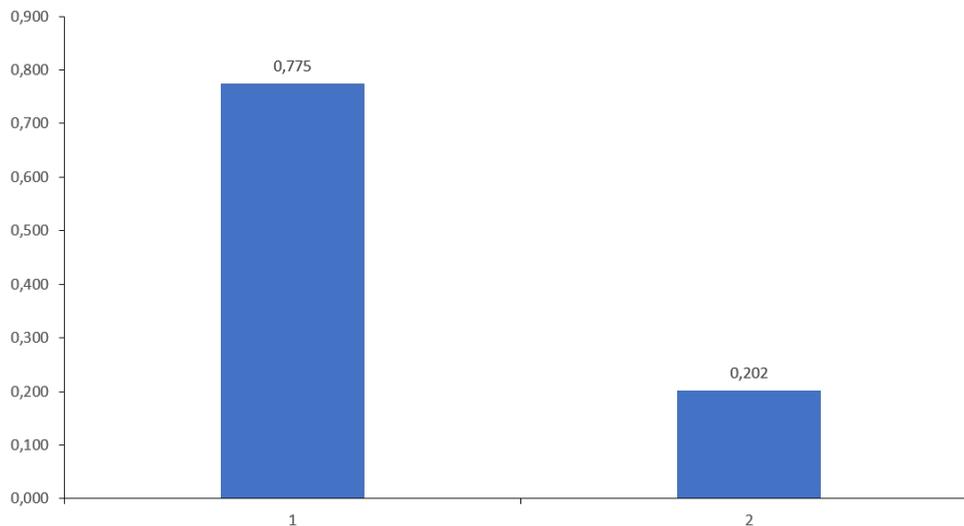


Figura 5.12: Análise ao CV_d Global

Analisando o Gráfico, constata-se a diminuição de um valor de CV_d inicial de 0,775 para um final de 0,202.

Isto equivale a uma redução de aproximadamente 74% face ao valor da compacidade.

A mediana pré-otimização apresenta um valor de cerca 0,706 e um valor final de 0,151.

5.6.2 Equilíbrio - CV_q

No Gráfico da Figura 5.13 está representada a variação da média do Coeficiente de Equilíbrio, CV_q , de todas as soluções para os três problemas de setorização abordados.

Analisando o Gráfico supra referido, verifica-se que a coluna 1, à esquerda, indica que o valor médio inicial é sensivelmente 0,364.

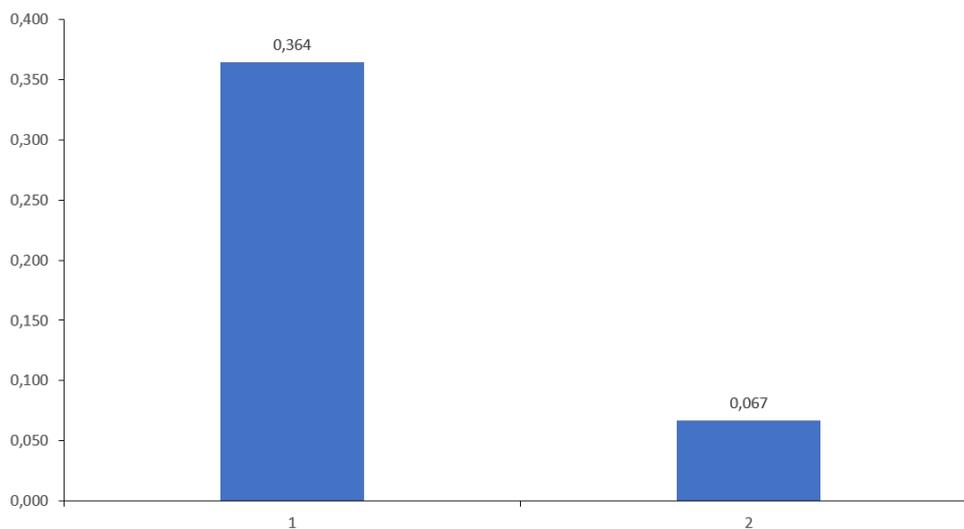


Figura 5.13: Análise ao CV_q Global

Por seu lado, a coluna 2, à direita, apresenta 0,067 como o valor médio final do coeficiente de equilíbrio, CV_q .

Esta variação corresponde a uma redução em cerca de 82% face ao inicial.

As soluções pré otimização apresentam ainda uma mediana inicial de 0,389 face ao valor de 0,049 obtido após a implementação de toda o processo de melhoria.

Com esta elevada diferença conclui-se que todo o procedimento de melhoria apresentado e estudado se revela bastante eficaz no aumento da concentração dos setores existentes.

5.6.3 Distância - CV_{dc}

A variação, do valor médio, ao longo de todo o processo de resolução, do coeficiente que avalia a distância do centro de massa, às cargas que pertencem a cada setor, é apresentada no Gráfico da Figura 5.14.

Observando esta representação consta-se que a média das soluções iniciais, coluna 1, à esquerda, apresenta um valor médio de $CV_{dc} = 1,320$.

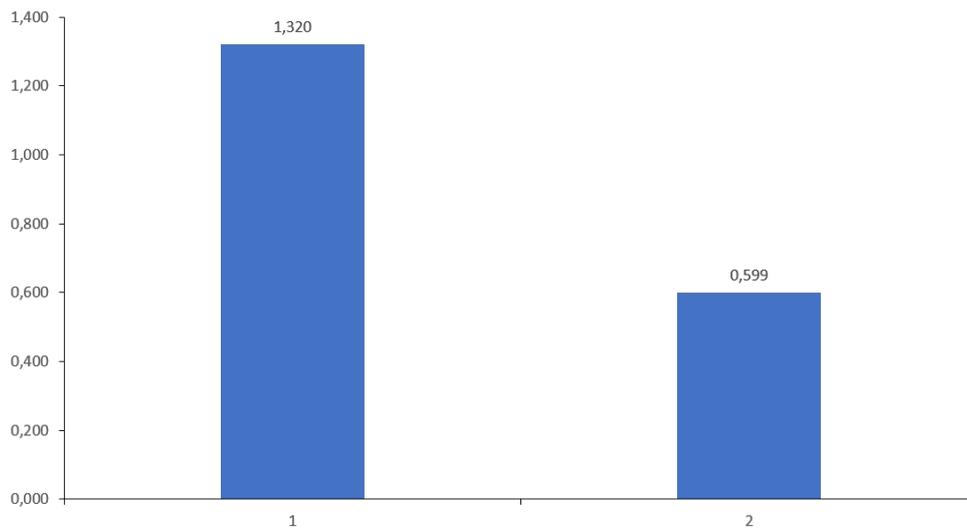
Na coluna 2 do referido Gráfico, à direita, observa-se que as soluções otimizadas obtidas e estudadas apresentam um valor médio para este coeficiente aproximado a 0,599.

Esta variação perfaz assim uma redução de aproximadamente 55%.

Este indicador permite concluir que após a otimização, as cargas pertencentes aos setores situam-se muito mais próximas dos seus centros de massa do que nas soluções prévias a todo o processo.

A mediana obtida segundo este critério apresenta um valor de 1,307 na fase de pré-otimização e um valor de 0,504 na posterior à mesma.

Deve ainda ser ressaltado que o resultado deste coeficiente não está diretamente relacionado com a localização das cargas estudadas mas sim com a dispersão espacial das mesmas.

Figura 5.14: CV_{dc} Global

5.6.4 Análise Global

O Gráfico da Figura 5.15 apresenta na sua coluna número 1 a média das médias, de todos os coeficientes, obtidos na resolução dos problemas de setorização antes da aplicação de qualquer melhoria, sendo este valor igual a 0,808.

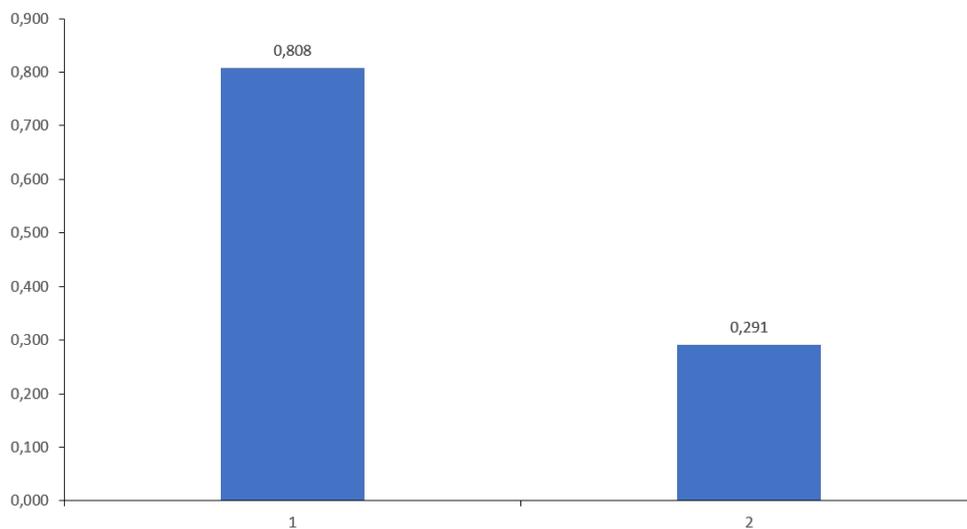


Figura 5.15: Média Global

Na coluna da direita, número 2, observa-se que o valor médio das soluções obtidas desce para 0,291, após a aplicação da otimização descrita nesta dissertação.

Isto perfaz uma redução de 64% face aos valores obtidos inicialmente, comprovando a eficácia do método heurístico proposto.

Por fim de ressaltar a redução da mediana de cerca de 0,783 obtida inicialmente para um valor final de 0,256.

5.7 Monção - Caso de Estudo

Esta secção pretende apresentar os resultados da aplicação da método desenvolvida a um problema real de setorização-localização, segundo os mesmos princípios do SMC.

O problema aqui abordado prende-se com a recolha de Resíduos Sólidos Urbanos no concelho de Monção. Esta questão é descrita pelos pontos de recolha existentes em todo concelho.

Estes pontos de recolha são caracterizados por uma capacidade associada. Este valor é expresso em metros cúbicos e caracteriza os diversos pontos segundo o padrão apresentado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4:
Capacidade Pontos de Recolha

Tipo	Capacidade (m^3)
Balde	0,10
Metálico	0,6
Caixote	0,06
Semi - Enterrado	2
Enterrado	4
Saco	0,04

A representação visual das mesmas a partir da ferramenta online *GPS Visualizer*, como demonstra a Figura 5.16.

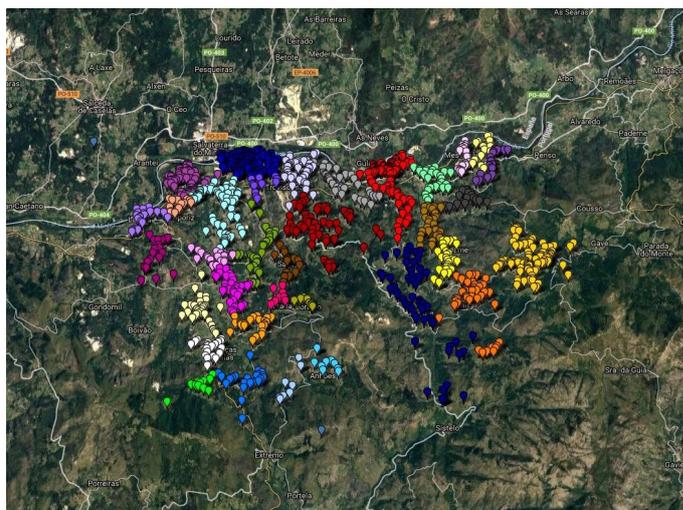


Figura 5.16: Pontos de Recolha no Concelho de Monção

Para o problema proposto propõem-se a criação de um número não especificado de setores, porém, com capacidade limite igual a dezasseis metros cúbicos, equivalente à capacidade de um dos veículos responsáveis pela recolha.

5.7.1 Resultados

Para o problema proposto foram obtidos cem setores com os seguintes valores para os coeficientes estudados:

- $CV_d = 0,687$
- $CV_q = 0,022$
- $CV_{dc} = 1,004$
- **Média** = 0,565

Com estes resultados é possível concluir que os métodos propostos também revelam resultados satisfatórios quando aplicados a *datasets* de maior dimensão do que os anteriores, visto que este é constituído por 1500 pontos de recolha.

5.8 Rotas

Nesta secção serão apresentadas algumas das rotas adequadas aos setores obtidos a partir dos diferentes conjuntos de dados estudados.

A análise apresentada não se pretende tão exaustiva e detalhada como a anterior, referente aos problemas de setorização, pois a resposta a problemas de rotas não constitui o foco principal desta dissertação.

5.8.1 Setorização Simples

Serão agora apresentadas as rotas resultantes de uma das melhores soluções obtida, na globalidade, para o problema de Setorização Simples.

A solução corresponde à obtenção de cinco setores a partir de SECMC-5, o que provoca a obtenção das cinco rotas seguintes:

- **Rota 1:**

- Distância Inicial: 254,31
- Distância Final: 130,47
- Percurso: [22 9 3 1 2 11 26 30 40 39 35 34 24 29 4 19 20 18 28 17 13 10 7]

- **Rota 2:**

- Distância Inicial: 131,66

- Distância Final: 96,85
- Percurso: [75 67 65 66 59 53 50 46 43 38 5 6 8 44 48 55 58 63]

- **Rota 3:**

- Distância Inicial: 181,51
- Distância Final: 91,44
- Percurso: [100 98 90 80 72 68 61 51 56 54 57 64 73 71 81 78 83 84 88 97]

- **Rota 4:**

- Distância Inicial: 177,68
- Distância Final: 94,61
- Percurso: [60 74 76 77 82 86 87 92 91 96 94 95 93 99 89 85 69 70 62]

- **Rota 5:**

- Distância Inicial: 210,92
- Distância Final: 129,34
- Percurso: [41 21 15 14 12 33 27 25 32 45 49 52 42 37 36 31 23 16 47 79]

5.8.2 Setorização Multicritério

Nesta secção serão apresentadas as rotas obtidas com uma das melhores soluções para o problema de Setorização Multicritério, a formação de dez setores com SECMC-5.

As rotas obtidas são:

- **Rota 1:**

- Distância Inicial: 102,47
- Distância Final: 96,02
- Percurso: [43 40 22 37 42 47 97 99 49 45]

- **Rota 2:**

- Distância Inicial: 69,62
- Distância Final: 61,53
- Percurso: [18 3 17 27 60 50 33 28 23 19]

- **Rota 3:**

- Distância Inicial: 82,88
- Distância Final: 74,68

– Percurso: [94 92 98 88 93 95 91 96 86 90]

● **Rota 4:**

– Distância Inicial: 42,97

– Distância Final: 32,11

– Percurso: [52 54 57 62 78 74 66 64 65 58]

● **Rota 5:**

– Distância Inicial: 77,63

– Distância Final: 70,5

– Percurso: [5 4 7 48 20 14 13 1 11 10]

● **Rota 6:**

– Distância Inicial: 59,92

– Distância Final: 46,92

– Percurso: [85 84 68 69 61 59 73 75 76 81]

● **Rota 7:**

– Distância Inicial: 54,04

– Distância Final: 42,79

– Percurso: [46 63 56 53 55 34 25 29 38 39]

● **Rota 8:**

– Distância Inicial: 49,54

– Distância Final: 40,91

– Percurso: [16 9 6 2 0 8 15 21 12]

● **Rota 9:**

– Distância Inicial: 53,82

– Distância Final: 38,00

– Percurso: [67 80 77 82 89 87 83 79 72 70 71]

● **Rota 10:**

– Distância Inicial: 54,11

– Distância Final: 40,28

– Percurso: [24 31 44 51 41 36 35 30 32 26]

5.8.3 Setorização Multicritério com Distâncias Reais

Nesta secção serão apresentadas as rotas obtidas com uma das melhores soluções para o problema de Setorização ao qual foram aplicadas as distâncias de *Dijkstra*.

As rotas obtidas a partir da formação de dez setores com o SECMC-6:

- **Rota 1:**

- Distância Inicial: 176,65
- Distância Final: 110,28
- Percorso: [24 32 54 62 81 84 88 98 92 94 93 85 59 31]

- **Rota 2:**

- Distância Inicial: 50,21
- Distância Final: 47,12
- Percorso: [45 42 37 47 49 36 41 26 30 35]

- **Rota 3:**

- Distância Inicial: 85,96
- Distância Final: 69,05
- Percorso: [14 20 51 7 5 4 10 11 1 13]

- **Rota 4:**

- Distância Inicial: 51,88
- Distância Final: 44,67
- Percorso: [15 22 29 25 21 6 2 0 8]

- **Rota 5:**

- Distância Inicial: 43,75
- Distância Final: 38,73
- Percorso: [52 58 65 64 66 74 78 86 57]

- **Rota 6:**

- Distância Inicial: 112,01
- Distância Final: 87,13
- Percorso: [80 60 50 3 27 55 53 56 63 82 77]

- **Rota 7:**

- Distância Inicial: 47,06
- Distância Final: 37,76
- Percurso: [38 39 46 33 28 23 19 18 17 34]

● **Rota 8:**

- Distância Inicial: 50,16
- Distância Final: 43,61
- Percurso: [79 72 70 71 67 89 96 87 83]

● **Rota 9:**

- Distância Inicial: 96,20
- Distância Final: 94,51
- Percurso: [90 43 40 12 9 16 91 95]

● **Rota 10:**

- Distância Inicial: 50,06
- Distância Final: 48,92
- Percurso: [73 75 76 61 44 48 68 69]

Capítulo 6

Conclusões e Trabalho Futuro

Este capítulo tem como objetivo a apresentação de conclusões extraídas do trabalho realizado no âmbito desta dissertação.

No final será dado destaque a uma secção onde se expõem cenários que podem dar continuidade ao estudo aqui apresentado.

6.1 Conclusões

O trabalho desenvolvido no âmbito desta dissertação tinha como objetivo o desenvolvimento de uma abordagem heurística, flexível e adaptável, para problemas de Setorização Multicritério. A este objetivo acrescenta-se o propósito de tentar minimizar todos os recursos computacionais necessários à implementação e aplicação da heurística desenvolvida.

Para o desenvolvimento desta metodologia optou-se por dividir o problema em três, com complexidades acrescidas.

Este problemas são assim designados como:

- Setorização Simples;
- Setorização Multicritério;
- Setorização Multicritério com Distâncias Reais.

A resolução e desenvolvimento de toda a questão iniciou-se pelo conceção de um algoritmo que desse resposta ao problema de menor complexidade apresentado. Este tinha apenas a finalidade de organizar setores em função da atração registada entre cargas, segundo o método *SectorEl*. Este método foi então adaptado a questões multicritério, propondo ainda um procedimento de otimização, originando assim o *SectorEl-Mc*. O algoritmo teve como critério para a sua execução:

- Número Máximo de setores;
- Quantidade Limite em cada setor;

- Todos os pontos devem pertencer a um setor.

A análise matemática, com recurso a representações visuais, das primeiras soluções levou à procura por um procedimento que permitisse otimizar os resultados obtidos.

Este inicia-se apenas pela libertação de um número de cargas de todos os setores existentes e posterior re-agregação. Uma segunda análise demonstrou que isto não era suficiente, pois, os coeficientes revelavam ainda valores demasiados altos quando comparados com o que era pretendido, a sua maior aproximação a zero. Desta segunda análise concluiu-se que a abordagem a tomar passaria ainda pela eliminação e libertação das cargas pertencentes ao setor com pior avaliação segundo o CV_d .

O aumento da complexidade das instâncias em causa levou ao recíproco aumento de todo o pré-processamento e tratamento de dados necessário.

O segundo problema implementado deu origem ao processamento de todas as instâncias que caracterizam as relações entre as cargas.

O problema de Setorização Multicritério com Distâncias Reais levou à implementação de mais dois algoritmos necessários ao tratamento de toda a informação. O primeiro algoritmo implementado foi designado como um "Gerador de Grafos", tendo a responsabilidade, como o nome indica, de gerar grafos conexos. Este gerador tem a particularidade de poder ser aplicado a qualquer questão em que exista o interesse em garantir a conexidade de um grafo. Após a definição das arestas e da distância entre as mesmas, persistia o interesse em determinar a distância mínima entre cada par de vértices do grafo. Foi então implementado um segundo algoritmo, este já conhecido da literatura, o algoritmo de *Dijkstra*.

A avaliação de todos os setores criados seguiu os seguintes critérios:

- Compacidade - CV_d ;
- Equilíbrio - CV_q ;
- Equilíbrio de Distâncias - CV_{dc} .

Apesar de não serem utilizados para avaliar as soluções obtidas, os métodos implementados pretenderam ter em consideração a Contiguidade e a Desejabilidade das soluções.

Para a aferição da eficácia de todo o processo de otimização foram avaliados e comparados os resultados obtidos antes e depois da aplicação deste processo de melhoria.

Após a obtenção de setores equilibrados procedeu-se ao desenvolvimento de rotas adequadas a cada um destes. Para isto foi implementado um algoritmo baseado na heurística do Algoritmo Genético. Responde-se assim ao objetivo desta dissertação de demonstrar a integração de problemas de setorização noutras questões de Investigação Operacional.

Outro dos objetivos desta dissertação passou pela comparação com os resultados obtidos no caso de estudo da Recolha de Resíduos Sólidos Urbanos no concelho de Monção. Para esta instância foi possível obter uma solução com uma distribuição de cargas equilibrada e com um resultado para compacidade idêntico ao previamente obtido.

6.2 Trabalho Futuro

A futura aplicação dos algoritmos apresentados nesta dissertação pode ter em consideração algumas alterações realizadas aos mesmos. Relativamente às instâncias utilizadas, podem ser efetuadas duas adaptações. A introdução da coordenada z , referente à altura a que se encontra a carga. A mudança para coordenadas GPS que viria facilitar a aplicação de todos os métodos a problemas de setorização com base em instâncias reais.

Uma outra abordagem ao problema a decorrer no futuro poderá passar pela integração de outra meta-heurística associada ao processo de otimização apresentado e implementado nesta dissertação.

A integração de um método exato, à semelhança do referido no enquadramento teórico, origina outra hipótese de trabalho e desenvolvimento de todos os métodos apresentados.

Referências

- [1] Ana M. Rodrigues and J. Soeiro Ferreira. Sectorel: An electrostatic based approach to sectorization, 2017.
- [2] L. Muyldermans, D. Cattrysse, D. Van Oudheusden, and T. Lotan. Districting for salt spreading operations. *European Journal of Operational Research*, 139(3):521–532, jun 2002.
- [3] Federica Ricca, Andrea Scozzari, and Bruno Simeone. Political districting: from classical models to recent approaches. *Annals of Operations Research*, 204(1):271–299, jan 2013.
- [4] R. S. Garfinkel and G. L. Nemhauser. Optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science*, 16(8):B-495–B-508, apr 1970.
- [5] Burcin Bozkaya, Erhan Erkut, Dan Haight, and Gilbert Laporte. Designing new electoral districts for the city of edmonton. *Interfaces*, 41(6):534–547, dec 2011.
- [6] Jacques A. Ferland and Gilles Guénette. Decision support system for the school districting problem. *Operations Research*, 38(1):15–21, feb 1990.
- [7] Steven J. DAmico, Shoou-Jiun Wang, Rajan Batta, and Christopher M. Rump. A simulated annealing approach to police district design. *Computers & Operations Research*, 29(6):667–684, may 2002.
- [8] Michael Prischink, Christian Kloimüllner, Benjamin Biesinger, and Günther R. Raidl. Districting and routing for security control. In *Hybrid Metaheuristics*, pages 87–103. Springer Nature, 2016.
- [9] Brian J. Lunday, Hanif D. Sherali, and Kevin E. Lunday. The coastal seaspace patrol sector design and allocation problem. *Computational Management Science*, 9(4):483–514, sep 2012.
- [10] O. V. Degtyarev, V. N. Minaenko, and M. O. Orekhov. Solution of sectorization problems for an air traffic management area. II. development of sectorization algorithms. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 49(4):624–642, aug 2010.
- [11] Hongtao Lei, Gilbert Laporte, Yajie Liu, and Tao Zhang. Dynamic design of sales territories. *Computers & Operations Research*, 56:84–92, apr 2015.
- [12] Andreas Drexl and Knut Haase. Fast approximation methods for sales force deployment. *Management Science*, 45(10):1307–1323, oct 1999.
- [13] Sidney W. Hess and Stuart A. Samuels. Experiences with a sales districting model: Criteria and implementation. *Management Science*, 18(4-part-ii):P-41–P-54, dec 1971.

- [14] Ana Maria Rodrigues and José Soeiro Ferreira. Measures in sectorization problems. In *Studies in Big Data*, pages 203–211. Springer Nature, 2015.
- [15] Michael E Lewyn. How to limit gerrymandering. *Fla. L. Rev.*, 45:403, 1993.
- [16] Political districting: Traps, criteria, algorithms and trade-offs. *RICERCA OPERATIVA*, (81/82), 1997.
- [17] James B Weaver and Sidney W Hess. A procedure for nonpartisan districting: development of computer techniques. *The Yale Law Journal*, 73(2):288–308, 1963.
- [18] S. W. Hess, J. B. Weaver, H. J. Siegfeldt, J. N. Whelan, and P. A. Zitlau. Nonpartisan political redistricting by computer. *Oper. Res.*, 13(6):998–1006, December 1965.
- [19] Jean-Marie Bourjolly, Gilbert Laporte, and Jean-Marc Rousseau. Decoupage electoral automatisé: Application à l’île de montreal. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 19(2):113–124, 1981.
- [20] Michelle H Browdy. Simulated annealing: an improved computer model for political redistricting. *Yale Law & Policy Review*, 8(1):163–179, 1990.
- [21] Fred Glover and Manuel Laguna. Tabu search*. In *Handbook of Combinatorial Optimization*, pages 3261–3362. Springer Nature, 2013.
- [22] Burcin Bozkaya, Erhan Erkut, and Gilbert Laporte. A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research*, 144(1):12–26, 2003.
- [23] Ibrahim H. Osman and Gilbert Laporte. Metaheuristics: A bibliography. *Annals of Operations Research*, 63(5):511–623, 1996.
- [24] Federica Ricca, Andrea Scozzari, and Bruno Simeone. Weighted voronoi region algorithms for political districting. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(9):1468–1477, 2008.
- [25] DE Goldberg. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, addison-wesley, reading, ma, 1989. *Google Scholar*.
- [26] Fernando Bação, Victor Lobo, and Marco Painho. Applying genetic algorithms to zone design. *Soft Computing-A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 9(5):341–348, 2005.
- [27] Edward Forrest. Apportionment by computer. *The American Behavioral Scientist (pre-1986)*, 8(4):23, 1964.
- [28] Franz Aurenhammer and Herbert Edelsbrunner. An optimal algorithm for constructing the weighted voronoi diagram in the plane. *Pattern Recognition*, 17(2):251–257, 1984.
- [29] Stacy Miller. The problem of redistricting: the use of centroidal voronoi diagrams to build unbiased congressional districts, 2007.
- [30] Hongtao Lei, Gilbert Laporte, and Bo Guo. Districting for routing with stochastic customers. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 1(1-2):67–85, apr 2012.
- [31] R.W. Eglese. Routeing winter gritting vehicles. *Discrete Applied Mathematics*, 48(3):231 – 244, 1994.

- [32] Leon Y. O. Li and Richard W. Eglese. An interactive algorithm for vehicle routing for winter - gritting. *The Journal of the Operational Research Society*, 47(2):217, feb 1996.
- [33] Académie royale des sciences Paris. *Histoire de l'Académie royale des sciences*. De l'imprimerie royale, 1788.
- [34] Horst Sachs, Michael Stiebitz, and Robin J. Wilson. An historical note: Eulers königsberg letters. *Journal of Graph Theory*, 12(1):133–139, 1988.
- [35] N. Biggs, E.K. Lloyd, and R.J. Wilson. *Graph Theory, 1736-1936*. Clarendon Press, 1976.
- [36] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Springer, 2000.
- [37] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, dec 1959.
- [38] Thomas J. Misa. An interview with edsgar w. dijkstra. *Communications of the ACM*, 53(8):41, aug 2010.
- [39] Ronald L. Rivest Clifford Stein Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*.
- [40] Kurt Mehlhorn and Peter Sanders. *Algorithms and data structures: The basic toolbox*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [41] G. B. Dantzig and J. H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91, oct 1959.
- [42] Gilbert Laporte. Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, 43(4):408–416, nov 2009.
- [43] Paolo Toth and Daniele Vigo. *Vehicle routing: problems, methods, and applications*. SIAM, 2014.
- [44] Michael Jünger, Gerhard Reinelt, and Giovanni Rinaldi. Chapter 4 the traveling salesman problem. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 7:225 – 330, 1995. Network Models.
- [45] G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393–410, nov 1954.
- [46] Gert W. Wolf. Facility location: concepts, models, algorithms and case studies. series: Contributions to management science. *International Journal of Geographical Information Science*, 25(2):331–333, 2011.
- [47] Jean-Francois Cordeau and Gilbert Laporte. Tabu search heuristics for the vehicle routing problem. In *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, pages 145–163. Springer Nature.
- [48] Ping Chen, Hou-kuan Huang, and Xing-Ye Dong. Iterated variable neighborhood descent algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Expert Systems with Applications*, 37(2):1620–1627, mar 2010.

- [49] Jianyong Jin, Teodor Gabriel Crainic, and Arne Løkketangen. A cooperative parallel metaheuristic for the capacitated vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 44:33–41, 2014.
- [50] Jianyong Jin, Teodor Gabriel Crainic, and Arne Løkketangen. A parallel multi-neighborhood cooperative tabu search for capacitated vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 222(3):441–451, nov 2012.
- [51] M. Haimovich and a. H. G. Rinnooy Kan. Bounds and Heuristics for Capacitated Routing Problems. *Mathematics of Operations Research*, 10(4):527–542, 1985.
- [52] Habibeh Nazif and Lai Soon Lee. Optimised crossover genetic algorithm for capacitated vehicle routing problem. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5):2110–2117, 2012.
- [53] Shih Wei Lin, Zne Jung Lee, Kuo Ching Ying, and Chou Yuan Lee. Applying hybrid metaheuristics for capacitated vehicle routing problem. *Expert Systems with Applications*, 36(2 PART 1):1505–1512, 2009.
- [54] The Jin Ai and Voratas Kachitvichyanukul. Particle swarm optimization and two solution representations for solving the capacitated vehicle routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 56(1):380–387, 2009.
- [55] Michel Gendreau and Jean-Yves Potvin. Metaheuristics in Combinatorial Optimization. *Annals of Operations Research*, 140(1):189–213, nov 2005.
- [56] Marc H. J. Romanycia and Francis Jeffry Pelletier. What is a heuristic? *Computational Intelligence*, 1(1):47–58, jan 1985.
- [57] Rafael Martí and Gerhard Reinelt. *The Linear Ordering Problem*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [58] Sigrid Knust (auth.) Stefan Voß Silvano Martello Ibrahim H. Osman Catherine Roucairol (eds.) Tonius Baar, Peter Brucker. *Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization*. Springer US, 1 edition, 1999.
- [59] Michel Gendreau, Gilbert Laporte, and Jean-Yves Potvin. Metaheuristics for the capacitated VRP. *The vehicle routing problem*, pages 129–154, 2001.
- [60] Éric D Taillard, Luca M Gambardella, Michel Gendreau, and Jean-Yves Potvin. Adaptive memory programming: A unified view of metaheuristics. *European Journal of Operational Research*, 135(1):1–16, nov 2001.
- [61] I H Osman. Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 41(1-4):421, 1993.
- [62] Gunter Dueck and Tobias Scheuer. Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90(1):161–175, sep 1990.
- [63] Gunter Dueck. New optimization heuristics. *Journal of Computational Physics*, 104(1):86–92, jan 1993.
- [64] Fred Glover and Manuel Laguna. Modern heuristic techniques for combinatorial problems. chapter Tabu Search, pages 70–150. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1993.

- [65] A. HERTZ. Tabu search. *Local Search in Combinatorial Optimization*, pages 121–136, 1997.
- [66] Bruce L Golden, Subramanian Raghavan, and Edward A Wasil. *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges*, volume 43. Springer Science & Business Media, 2008.
- [67] John H Holland. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992.
- [68] J Berger and M Barkaoui. A new hybrid genetic algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 54:1254–1262, 2003.
- [69] Alberto Colomi Marco Dorigo Vittorio Maniezzo. Distributed optimization by ant colonies. In *Toward a Practice of Autonomous Systems: Proceedings of the First European Conference on Artificial Life*, page 134. Mit Press, 1992.
- [70] Silvia Mazzeo and Irene Loiseau. An Ant Colony Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 18:181–186, 2004.
- [71] Marco Dorigo and Luca Maria Gambardella. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 1(1):53–66, 1997.
- [72] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, and Alberto Colomi. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 26(1):29–41, 1996.
- [73] Denis Bouyssou, Eric Jacquet-Lagrèze, Patrice Perny, Roman Słowiński, Daniel Vanderpooten, and Philippe Vincke, editors. *Aiding Decisions with Multiple Criteria*. Springer US, 2002.
- [74] Bernard Roy. *Multicriteria methodology for decision aiding*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2013.
- [75] Carlos A. Bana E Costa, Theodor J. Stewart, and Jean-Claude Vansnick. Multicriteria decision analysis: Some thoughts based on the tutorial and discussion sessions of the ESIGMA meetings. *European Journal of Operational Research*, 99(1):28–37, may 1997.
- [76] C.L. Hwang and K. Yoon. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications A State-of-the-Art Survey*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [77] John Dodgson, Michael Spackman, Alan Pearman, and Larry Phillips. Dtlr multi-criteria analysis manual. 2004.
- [78] Kevin Pietersen. Multiple criteria decision analysis (mcda): A tool to support sustainable management of groundwater resources in south africa. *Water SA*, 32(2):119–128, 2006.
- [79] José Figueira, Salvatore Greco, and Matthias Ehrogott. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer New York, 2005.
- [80] Valerie Belton and Theodor J. Stewart. *Multiple Criteria Decision Analysis*. Springer US, 2002.

- [81] Thomas L Saaty. How to make a decision: the analytic hierarchy process. *European journal of operational research*, 48(1):9–26, 1990.
- [82] Jakob Puchinger and Günther R. Raidl. Combining metaheuristics and exact algorithms in combinatorial optimization: A survey and classification. In *Artificial Intelligence and Knowledge Engineering Applications: A Bioinspired Approach*, pages 41–53. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [83] I. Linkov, A. Varghese, S. Jamil, T. P. Seager, G. Kiker, and T. Bridges. Multi-criteria decision analysis: A framework for structuring remedial decisions at contaminated sites. In *Nato Science Series: IV: Earth and Environmental Sciences*, pages 15–54. Kluwer Academic Publishers.
- [84] Burcin Bozkaya, Erhan Erkut, and Gilbert Laporte. A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research*, 144:12–26, 2003.
- [85] Federica Ricca and Bruno Simeone. Local search algorithms for political districting. *European Journal of Operational Research*, 189(3):1409–1426, sep 2008.
- [86] SW Hess. Compactness-what shape and size. *Conflicts Among Possible Criteria for Rational Districting*, *National Municipal League*, pages 15–23, 1969.