

# Resumindo e concluindo...

TeleTextos de bolso e de trazer por casa, suavemente, suavemente

## Em busca da fase perdida

© Sílvio A. Abrantes

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto  
Porto, Portugal  
sam@fe.up.pt

Fevereiro de 2009

### Conteúdo

1. Introdução .....	1
2. Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos dados .....	2
3. Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos dados .....	3
3.1. Eliminação da ambiguidade de fase com a Palavra Única .....	4
3.1.1. Uso alternativo da Palavra Única .....	6
3.1.2. Comprimento da Palavra Única .....	6
4. Recuperação ML da fase sem temporização de símbolos nem ajuda de dados .....	7
5. Referências bibliográficas .....	8

### 1. Introdução

A situação é esta: conhecemos a frequência da portadora da modulação digital em uso, sabemos quando os símbolos de informação começam e acabam, as amostras de sinal de que o receptor precisa são recolhidas nos instantes adequados mas... não conhecemos a fase da portadora, algo que é essencial a um desmodulador coerente. Como se mostra na Fig. 1, um desmodulador coerente gera uma onda sinusoidal que, além da frequência, deve ter a mesma fase do sinal recebido ( $\hat{\theta} = \theta$ ). E porquê? Porque um erro de fase  $\Delta\theta = \hat{\theta} - \theta$  da onda de referência faz rodar a constelação de pontos da modulação de um ângulo  $\Delta\theta$  (ver Fig. 2), aumentando a probabilidade de símbolo errado.

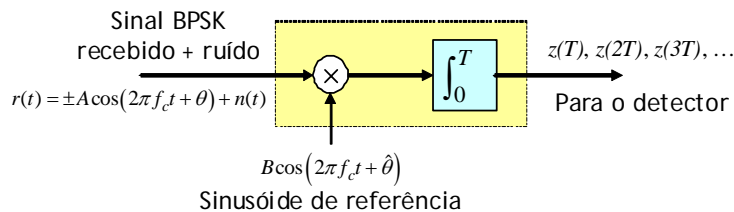


Fig. 1 Desmodulador coerente de BPSK.

À tarefa de “descobrir” qual é a fase da portadora chama-se habitualmente *recuperação da fase da portadora*. Antes de entregar o sinal recebido ao detector o receptor coerente terá de fazer essa “descoberta”.

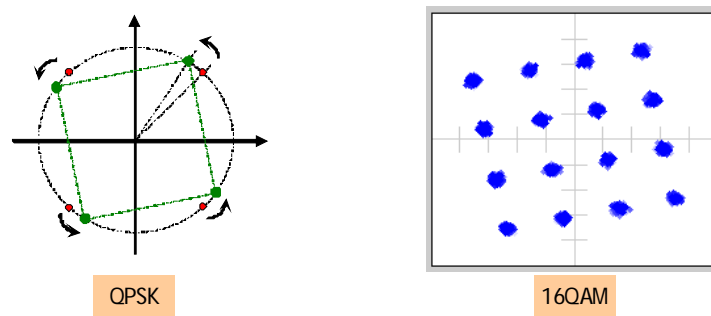


Fig. 2 Dois exemplos de rotação de constelação devida a erro de fase.

Há vários métodos de busca da fase “perdida” [1]. Neste TeleTexto vamos limitar-nos exclusivamente às modulações digitais lineares, como MPSK e QAM, e aos métodos de Máxima Verosimilhança, bem apropriados a uma realização digital<sup>1</sup>. Não haverá aqui referências a PLLs, “Costas Loops” ou métodos analógicos e também não nos defrontaremos com métodos em malha fechada, com “feedback”: vamos privilegiar exclusivamente os métodos que processam sequências de amostras - números, portanto - em malha aberta, sem realimentação, por isso mais adequados a situações que exigem um tempo de aquisição de sincronismo curto. Supondo sempre que conhecemos a frequência da portadora vão ser apresentadas três abordagens de Máxima Verosimilhança: em duas a temporização de símbolos é conhecida e na terceira não.

A demanda da fase perdida pode ser ajudada pela própria mensagem ou não. Se o for a tarefa está mais facilitada, claro; se não o for é mais difícil mas também se consegue. Diz-se que a primeira técnica é “Data-Aided”, ou apenas DA, e a segunda “Non-Data-Aided”, ou NDA. Começemos pelo que é mais fácil, avisando já que não apresentaremos demonstrações ou justificações dos métodos considerados, apenas resultados finais.

## 2. Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos dados

A estimativa ML da fase da portadora ajudada pelos símbolos da mensagem requer o conhecimento de um número  $L$  de amostras observadas  $z(k)$ , para  $k=1,2,\dots,L$ , e igual número de símbolos enviados  $c_k$ . Estes, que poderão ter sido obtidos numa fase de treino, são complexos e as amostras  $z(k)$ , também complexas, são colhidas à saída do filtro adaptado ou do correlacionador do receptor durante um intervalo de observação de  $LT$  segundos ( $T$  é a duração de cada símbolo). A “colheita” faz-se nos instantes de ordem  $k$  (isto é, em  $t=kT+\tau$ , em que  $\tau$  está relacionado com a temporização, conhecida, dos símbolos). Chamando  $\hat{\theta}$  à estimativa de fase, é dada pela seguinte expressão [2], em que  $\arg(\mathbf{x}) = \arctg\left[\frac{\text{Im}(\mathbf{x})}{\text{Re}(\mathbf{x})}\right]$  é a fase (ângulo) do complexo  $\mathbf{x} = \text{Re}(\mathbf{x}) + j\text{Im}(\mathbf{x})$  na sua representação polar:

$$\hat{\theta} = \arg\left\{\sum_{k=1}^L c_k^* z(k)\right\}.$$

E pronto, já está, é só isto! O correspondente diagrama de blocos encontra-se na Fig. 3.

<sup>1</sup> Designá-los-emos simplesmente de métodos ML, de “Maximum Likelihood”. Se não sabe o que é isto de estimação ML o melhor é consultar o TeleTexto que trata do assunto.

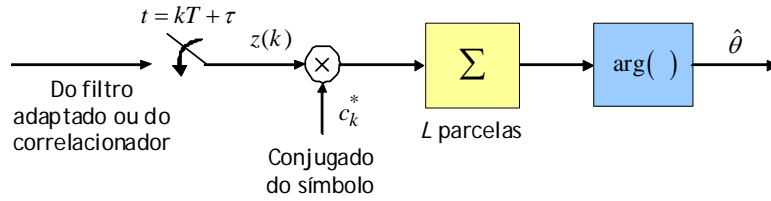


Fig. 3 Recuperação ML da fase com temporização conhecida e ajuda dos símbolos

### Exemplo 1: Estimação DA de Máxima Verosimilhança

Consideremos a recepção de um sinal QPSK cujos pontos da constelação estão situados nos eixos do espaço de sinal em  $1, j, -1$  e  $-j$ , portanto nos ângulos  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ , respectivamente. Dispondo dos valores de  $c_k$  e  $z(k)$  da tabela seguinte, qual é a estimativa ML da fase da portadora?

$k$	1	2	3	4	5
$z(k)$	$0,38 - j0,94$	$-0,93 - j0,39$	$0,93 + j0,38$	$0,92 + j0,38$	$-0,39 + j0,92$
$c_k$	$-1$	$j$	$-j$	$-j$	$1$
$c_k^* z(k)$	$-0,38 + j0,94$	$-0,39 + j0,93$	$-0,38 + j0,93$	$-0,38 + j0,92$	$-0,39 + j0,92$

Vamos usar  $\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) \right\}$ . Na última linha da tabela estão os produtos  $c_k^* z(k)$ , cuja soma é

o complexo  $\sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) = -1,92 + j4,64$ , de ângulo de fase  $\arctan\left(\frac{4,64}{-1,92}\right) = 1,9631 \text{ rad}$ , ou  $112,479^\circ$ .

É esta a nossa estimativa ML da fase da portadora QPSK:  $\hat{\theta} = 112,479^\circ$ . Bastante fácil!

### 3. Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos dados

Continuamos a conhecer a frequência da portadora e a temporização dos símbolos mas agora não conhecemos os dados, só as  $L$  amostras  $z(k)$ . A estimativa NDA de máxima verosimilhança em constelações invariantes à rotação de  $2\pi/N$  é dada [1] pela média

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \arg \left[ \sum_{k=1}^L z^N(k) \right]. \quad \begin{array}{l} \text{MPSK: } N = M \\ \text{QAM: } N = 4 \end{array}$$

O que são constelações invariantes à rotação de  $2\pi/N$ ? São as constelações de MPSK e QAM. No primeiro caso a rotação de  $2\pi/N = 2\pi/M$  não altera a constelação (ora experimente com 8-PSK, por exemplo) e o mesmo acontece em QAM se rodarmos a constelação de  $2\pi/N = 2\pi/4 = \pi/2$  (experimente de novo)<sup>2</sup>.

Continua a ser fácil recuperar a fase da portadora: dispo de  $L$  amostras  $z(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , à saída do filtro adaptado ou correlacionador, só temos que elevar cada uma à  $N$ -ésima potência, somar tudo, determinar o ângulo de fase da soma e dividir por  $N$ , como no diagrama de blocos da

Fig. 4. Porém, a estimativa agora obtida fica limitada à gama  $\pm\pi/N$  pois a fase de  $\sum_{k=1}^L z^N(k)$ , como qualquer complexo, está limitada a  $\pm\pi$ .

<sup>2</sup> Já se está a ver porque é que na expressão é  $N = M$  em MPSK e  $N = 4$  em QAM.

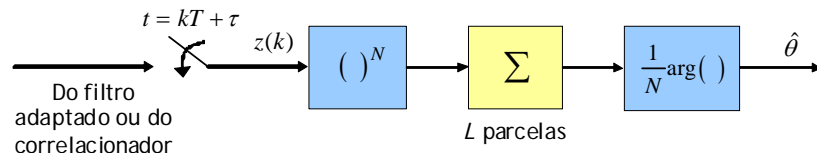


Fig. 4 Recuperação ML da fase com temporização conhecida mas sem ajuda dos símbolos

### Exemplo 2: Estimação NDA de Máxima Verosimilhança

Retomemos a tabela do Exemplo 1 mas agora só com os valores das amostras  $z(k)$ . Qual é a estimativa ML da fase da portadora QPSK?

$k$	1	2	3	4	5
$z(k)$	$0,38 - j0,94$	$-0,93 - j0,39$	$0,93 + j0,38$	$0,92 + j0,38$	$-0,39 + j0,92$
$z^4(k)$	$0,036 + j1,056$	$-0,018 + j1,034$	$0,020 + j1,019$	$0,004 + j0,982$	$-0,033 + j0,996$

Agora usaremos  $\hat{\theta} = \frac{1}{4} \arg \left[ \sum_{k=1}^5 z^4(k) \right]$  pois em QPSK  $N = M = 4$ . Na última linha da tabela estão as

potências  $z^4(k)$ , cuja soma é o complexo  $\sum_{k=1}^5 z^4(k) = 0,0085 + j5,0869$ . O seu ângulo de fase a

dividir por 4 é  $\frac{1}{4} \arctan \left( \frac{5,0869}{0,0085} \right) = 0,39228 \text{ rad}$ , ou  $22,476^\circ$ , e é esta a nossa estimativa ML da fase

da portadora. Ora compare-se este valor com o obtido no Exemplo 1, onde pudemos dispor dos dados, ao contrário de agora. Parece que está alguma coisa mal...

Na verdade, temos um pequeno problema: a estimativa NDA de fase é *ambígua* ou, como também se diz, há uma *ambiguidade de fase* de  $2\pi/N$  radianos. De facto, como  $\hat{\theta}$  está limitada à gama  $\pm\pi/N$  não abrange valores da fase  $\theta$  fora dessa gama o que faz com que, dada a simetria da constelação, tenhamos não uma mas  $N$  igualmente plausíveis estimativas de fase  $\hat{\theta} = \theta + \Delta\theta + 2\pi m/N$ , em que  $0 \leq m \leq N-1$  e  $\Delta\theta$  é um eventual e presumivelmente pequeno erro de estimação. Pergunta-se: qual desses  $\hat{\theta}$  é a melhor estimativa da verdadeira fase  $\theta$ ? Como determinar o valor adequado de  $m$ ? O problema soluciona-se procedendo a uma codificação/descodificação diferencial ou então usando a chamada "Unique Word". Seguindo [2], vamos ver como usar esta *Palavra Única*.

### 3.1. Eliminação da ambiguidade de fase com a Palavra Única

Consideremos a modulação MPSK e suponhamos que a recuperação de fase é perfeita ( $\Delta\theta = 0$ ). A ambiguidade de fase é  $2\pi/M$  e queremos determinar o valor de  $m$  em  $\theta = \hat{\theta} - 2\pi m/M$ . A questão resolve-se antecedendo a sequência a transmitir de um prefixo composto de  $L_{UW}$  símbolos conhecidos - a tal Palavra Única. Então, na posse de  $L > L_{UW}$  amostras  $z(k)$  recebidas, das quais as primeiras  $L_{UW}$  correspondem à Palavra Única, estimamos a fase normalmente e depois, como essa estimativa  $\hat{\theta}$  é ambígua, efectuamos os seguintes cálculos simples:

1. Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq L_{UW}$ , calcula-se o complexo

$$y(k) = z(k)c_k^* e^{-j\hat{\theta}}$$

Não esquecer que para  $1 \leq k \leq L_{UW}$  os símbolos  $c_k$  são a própria e conhecida *Palavra Única*.

2. Determina-se a média dos  $L_{UW}$  complexos  $y(k)$ :

$$Y = \frac{1}{L_{UW}} \sum_{k=1}^{L_{UW}} y(k)$$

3. Para cada valor de  $m$  em  $0 \leq m \leq M-1$  calcula-se a parte real de  $Ye^{j2\pi m/M}$ :

$$\operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi m/M}\right), \quad 0 \leq m \leq M-1$$

Ao todo temos agora  $M$  valores reais:  $\operatorname{Re}(Y)$ ,  $\operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi/M}\right)$ ,  $\operatorname{Re}\left(Ye^{j4\pi/M}\right)$ , etc.

4. Escolhe-se o valor de  $m$  que corresponde ao maior dos  $M$  reais:

$$\tilde{m} = \arg \left\{ \max_m \left[ \operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi m/M}\right) \right] \right\}$$

Por outras palavras:

$$\text{Escolhe-se } \tilde{m} \text{ se } \operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi \tilde{m}/M}\right) = \max \left[ \operatorname{Re}\left(Ye^{j2\pi m/M}\right) \right], \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

A estimativa ML de fase, agora enxuta da ambiguidade inicial, é  $\hat{\theta} - 2\pi\tilde{m}/M$ .

### Exemplo 3: Eliminação da ambiguidade de fase

Vamos tentar eliminar a ambiguidade da estimativa do Exemplo 2,  $\hat{\theta} = 0,39228$  rad, usando uma Palavra Única de  $L_{UW} = 2$  símbolos,  $-1$  e  $j$  (os dois primeiros da tabela do Exemplo 1). Seguindo os passos do respectivo algoritmo obtemos sucessivamente

$$1) \quad y(1) = z(1)c_1^* e^{-j\hat{\theta}} = 0,0082 + j1,0139 \quad y(2) = z(2)c_2^* e^{-j\hat{\theta}} = -0,0048 + j1,0085$$

$$2) \quad \text{Média dos } y(k): \quad Y = \frac{1}{2} [y(1) + y(2)] = 0,0017 + j1,0112$$

3) Cálculo das partes reais de  $Ye^{j2\pi m/4}$ , para  $m = 0, 1, 2, 3$ :

$m$	0	1	2	3
$\operatorname{Re}(Ye^{j2\pi m/4})$	0,0017	-1,0112	-0,0017	1,0112

4) Escolhemos  $\tilde{m} = 3$ , é claro.

Sendo assim, a estimativa de fase sem ambiguidade é  $\hat{\theta} - 2\pi\tilde{m}/M = 0,39228 - 6\pi/4 = 1,9631$  rad, ou  $112,476^\circ$ . Agora sim, a nova estimativa já condiz com a que obtivemos no Exemplo 1 com a ajuda dos dados!

### Exemplo 4: Recuperação da portadora em BPSK com e sem ajuda de dados

Neste exemplo vamos recuperar a fase de uma portadora de BPSK com os métodos DA e NDA. Dispomos das amostras complexas  $z(k)$  e dos símbolos reais  $c_k = \pm 1$  da tabela seguinte. A

primeira coluna indica o método onde o conteúdo das linhas é usado<sup>3</sup>. A ambiguidade da estimativa no método sem ajuda é suprimida através de uma Palavra Única de dois bits [-1 1].

$k$	1	2	3	4	5
$z(k)$	$-1,000 - j0,190$	$0,990 + j0,200$	$-0,990 - j0,190$	$-0,980 - j0,190$	$0,980 + j0,200$
DA $c_k$	-1	1	-1	-1	1
DA $c_k^* z(k)$	$1,000 + j0,190$	$0,990 + j0,200$	$0,990 + j0,190$	$0,980 + j0,190$	$0,980 + j0,200$
NDA $z^2(k)$	$0,964 + j0,380$	$0,940 + j0,396$	$0,944 + j0,376$	$0,920 + j0,372$	$0,920 + j0,392$
UW $y(k)$	$1,018 - j0,006$	$1,010 + j0,006$	-	-	-

No método DA a quarta linha da tabela conduz-nos ao complexo  $\sum_{k=1}^5 c_k^* z(k) = 4,94 + j0,97$  e à sua fase  $\hat{\theta}_{DA} = 11,109^\circ$ . No método NDA a quinta linha conduz-nos a  $\sum_{k=1}^5 z^2(k) = 4,693 + j1,917$  e a metade da sua fase,  $\hat{\theta}_{NDA} = 11,108^\circ$ , valor que de tão próximo de  $\hat{\theta}_{DA}$  nos leva a prever que é mesmo esse o valor final de  $\hat{\theta}_{NDA}$ . E assim é. Realmente, a Palavra Única elimina-nos a dúvida inerente a  $\hat{\theta}_{NDA}$  através da média da última linha,  $Y = \frac{1}{2}[y(1) + y(2)] = 1,014 - j0,0004$ , e dos dois reais  $\text{Re}(Y) = 1,0139$  (para  $m = 0$ ) e  $\text{Re}(Ye^{j2\pi/2}) = -1,0139$  (para  $m = 1$ ): como o primeiro valor é o maior dos dois escolhemos  $\tilde{m} = 0$  e não precisamos de corrigir  $\hat{\theta}_{NDA}$ , como antecipáramos.

### 3.1.1. Uso alternativo da Palavra Única

A Palavra Única pode ser usada de outra maneira, sem os cálculos anteriores. Vejamos como. Em BPSK ocorre uma ambiguidade de fase de  $180^\circ$  - ou seja, há duas alternativas de fase à escolha - em QPSK e em QAM a ambiguidade é de  $90^\circ$  - há quatro alternativas de fase - enfim, em MPSK a ambiguidade de fase reparte-se por  $M$  possibilidades. Então uma maneira de ficarmos sem dúvidas é detectar os primeiros  $L_{UW}$  símbolos de acordo com as  $M$  possibilidades. Aquela cuja detecção dê origem aos símbolos da Palavra Única é a que deve ser escolhida. Imaginemos, por exemplo, que em QPSK usávamos a Palavra Única de três símbolos  $s_1 s_4 s_2$ . Se ao detectar os primeiros três símbolos da mensagem com as quatro ambiguidades  $50^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $-130^\circ$  e  $-40^\circ$  o resultado for, respectivamente,  $s_2 s_1 s_3$ ,  $s_1 s_4 s_2$ ,  $s_4 s_3 s_1$  e  $s_3 s_2 s_4$  qual deve ser a nossa escolha? Claro...  $140^\circ$ !

### 3.1.2. Comprimento da Palavra Única

A Palavra Única não deve ser muito curta senão corremos o risco de errarmos a escolha do inteiro  $\tilde{m}$ . Qual deve ser então o seu comprimento,  $L_{UW}$ ? Para responder precisamos de conhecer a probabilidade de falsa resolução de ambiguidade,  $P_{fra}$ . Segundo [2], em MPSK vale

$$P_{fra} = Q\left(\sqrt{2L_{UW} E/N_0}\right) \quad M = 2$$

$$P_{fra} = 2Q\left(\sqrt{2L_{UW} E/N_0} \sin \pi/M\right) \quad M \geq 4$$

quando o ruído é gaussiano branco de densidade espectral de potência  $N_0/2$  e  $E$  é a energia dos símbolos MPSK.

Sabemos bem que quando a recuperação da fase da portadora é perfeita a probabilidade de símbolo errado em MPSK é igual a  $P_e = 2Q\left(\sqrt{2E/N_0} \sin \pi/M\right)$  para  $M \geq 4$  e a  $P_b = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$  para  $M = 2$  (BPSK), em que  $E_b$  é a energia de bit. Se ocorrerem erros de resolução de ambiguidade

<sup>3</sup> Como é de prever, UW significa "Unique Word".

passamos a ter de considerar uma probabilidade média de símbolo errado que depende de  $P_{fra}$ , dada por  $\bar{P}_e = P_e(1 - P_{fra}) + P_{fra} \approx P_e + P_{fra}$ . Ora se não quisermos degradação do desempenho temos de garantir que  $P_{fra} \ll P_e$ .

### Exemplo 5: Cálculo do comprimento da Palavra Única

Consideremos QPSK com  $E/N_0 = 13,8$  dB. Na ausência de defeitos de sincronização de fase a probabilidade de símbolo errado vale  $P_e = 2Q(\sqrt{E/N_0}) = 10^{-6}$ . Se desejarmos que a probabilidade de falsa resolução de ambiguidade seja muito pequena face a  $P_e$  – por exemplo,  $P_{fra} = 10^{-8}$  – então de  $P_{fra} = 2Q(\sqrt{2L_{UW} E/N_0} \sin \pi/4) = 2Q(\sqrt{L_{UW} E/N_0}) = 10^{-8}$  concluímos que a Palavra Única deve conter 14 símbolos:

$$L_{UW} = \frac{1}{E/N_0} \left[ Q^{-1}(0,5P_{fra}) \right]^2 = 14.$$

Imaginemos uma outra situação em QPSK:  $E/N_0 = 10$  dB e uma Palavra Única composta de apenas dois símbolos. Qual é a probabilidade média de símbolo errado,  $\bar{P}_e$ ? De quanto se degradou a probabilidade de símbolo errado,  $P_e$ , por causa dos erros na recuperação da fase da portadora? Começemos por  $P_{fra}$  e  $P_e$ :

$$P_{fra} = 2Q(\sqrt{L_{UW} E/N_0}) = 2Q(\sqrt{2 \times 10}) = 7,74 \cdot 10^{-6}$$

$$P_e = 2Q(\sqrt{E/N_0}) = 2Q(\sqrt{10}) = 1,565 \cdot 10^{-3}$$

Deste modo  $\bar{P}_e = P_e(1 - P_{fra}) + P_{fra} = 1,573 \cdot 10^{-3}$ , correspondendo a uma degradação de cerca de 0,5%.

## 4. Recuperação ML da fase sem temporização de símbolos nem ajuda de dados

Temos suposto que a temporização de símbolos é conhecida. Se não a conhecermos, mesmo assim a recuperação ML da fase sem a ajuda dos dados pode ser usada em MPSK. O que é preciso é que a amostragem do sinal à saída do correlacionador ou do filtro adaptado seja realizada a uma cadência mais elevada: em vez de símbolo a símbolo (de  $T$  em  $T$  segundos) deve ser feita várias vezes por símbolo (digamos,  $N_s$  vezes, nos instantes  $t = kT/N_s$ ). A nova estimativa de  $\theta$  passa a usar  $N_s L$  amostras  $z(kT/N_s)$ , recolhidas de  $T/N_s$  em  $T/N_s$  segundos, e a expressão respectiva é

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{N_s L} z^M(kT/N_s) \right\} \quad (MPSK).$$

Qual deve ser o valor do factor de sobreamostragem  $N_s$ ? Vejamos quanto vale se usarmos impulsos de cosseno elevado com factor de *roll-off*  $\alpha$ , que ocupam, como se sabe, uma largura de banda  $\frac{1}{2T}(1 + \alpha)$ : a elevação à potência  $M$  alarga a banda  $M$  vezes, passando para  $\frac{M}{2T}(1 + \alpha)$  e, de acordo com o teorema da amostragem, a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, o dobro da maior frequência do sinal, ou seja,  $f_s \geq 2 \frac{M}{2T}(1 + \alpha)$ ; mas  $f_s = N_s/T$ . Portanto,

$$N_s \geq M(1 + \alpha).$$

Com sinalização rectangular a largura de banda ocupada após elevação à  $M$ -ésima potência é  $M/T$  pelo que, seguindo raciocínio idêntico ao anterior, concluímos que o factor de sobreamostragem deve respeitar

$$N_s \geq 2M .$$

---

**Exemplo 6:**  
**Recuperação da fase em BPSK sem temporização de símbolos nem ajuda de dados**

Vamos recuperar a fase da portadora de BPSK a partir das vinte amostras  $z(kT/N_s)$  da tabela. O factor de sobreamostragem vale  $N_s = 4$ .

$k$	$z(kT/N_s)$	$k$	$z(kT/N_s)$	$k$	$z(kT/N_s)$	$k$	$z(kT/N_s)$
1	$-1,000 - j0,190$	6	$0,692 + j0,141$	11	$-1,338 - j0,260$	16	$0,374 + j0,079$
2	$-0,268 - j0,047$	7	$0,184 + j0,041$	12	$-1,244 - j0,242$	17	$0,980 + j0,200$
3	$0,363 + j0,077$	8	$-0,419 - j0,078$	13	$-0,980 - j0,190$	18	$1,568 + j0,317$
4	$0,805 + j0,164$	9	$-0,990 - j0,190$	14	$-0,642 - j0,123$	19	$2,115 + j0,426$
5	$0,990 + j0,200$	10	$-1,250 - j0,242$	15	$-0,181 - j0,031$	20	$2,584 + j0,519$

Obtemos  $\sum_{k=1}^{20} z^2(kT/N_s) = 24,5 + j10,1$  e a estimativa pretendida é  $\hat{\theta} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{10,1}{24,5}\right) = 11,247^\circ$ .

---

## 5. Referências bibliográficas

- [1] Sílvio A. Abrantes, "Introdução à sincronização em modulações digitais", Março de 2007, disponível online em [http://www.fe.up.pt/si/PUBLS\\_PESQUISA.FORMVIEW?P\\_ID=13765](http://www.fe.up.pt/si/PUBLS_PESQUISA.FORMVIEW?P_ID=13765).
- [2] Mengali, Umberto e D'Andrea, Aldo N., *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, 1997.