

*João Manuel R. S. Tavares*

*Comunicação Interna:*

***INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS***



**FEUP** - *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

**DEEC** - *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*



**INEB** - *Instituto de Engenharia Biomédica*

Maio de 1998

## *Sumário*

O Método dos Elementos Finitos tem vindo, desde o seu aparecimento como ferramenta de análise em problemas de elasticidade, a ser utilizado nos mais diversos domínios da física. O seu objectivo é modelar o sistema em estudo por um número finito de elementos mais simples e obter uma aproximação para o do sistema a partir dos vários elementos agrupados.

Uma das áreas onde a utilização do Método dos Elementos Finito tem vindo a expandir é a da Visão por Computador. Nesta área a sua utilização é útil na modelização, no emparelhamento e seguimento de objectos.

Recentemente tem vindo a ser reportada a utilização do Método dos Elementos Finitos no domínio da Realidade Virtual nomeadamente na simulação de operações cirúrgicas.

Com tal utilização do Método dos Elementos Finitos torna-se útil uma simples introdução ao mesmo. Assim nesta comunicação é apresentado o método, as suas funções de forma, os vários elementos isoparamétricos utilizados, a sua formulação hierárquica, as condições de convergência e o “*Patch Test*”, algumas técnicas de integração numérica e definições utilizadas na sua derivação.

## 1 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos

O aumento da complexidade das estruturas e da capacidade dos computadores favoreceu o aparecimento de novos métodos de análise nomeadamente o método dos elementos finitos. Após esta utilização inicial, em problemas de elasticidade [Bathe, 1996; Gomes, 1995; Martins, a; Segerlind, 1984; Oliveira, 1990], a mesma foi se rapidamente estendendo a outros domínios como o da transferência de calor e da mecânica dos fluidos [Bathe, 1996; Segerlind, 1984], do electromagnetismo, das vibrações mecânicas e acústicas [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986], da visão por computador<sup>1</sup>, da computação gráfica [Essa, 1992; Pentland, 1989; Pentland, 1989a], da realidade virtual (nomeadamente em simulações cirúrgicas [Bro-Nielsen, 1996; Keeve, 1996]), etc. O objectivo do método é a obtenção de uma formulação que possa explorar a análise, de forma automática, de sistemas complexos, e/ou irregulares, por intermédio de programas computacionais. Para atingir tal objectivo, o método considera o sistema global como equivalente a um agrupamento de elementos finitos no qual cada um destes é uma estrutura contínua mais simples. Impondo que em certos pontos comuns a vários elementos, designados por nodos ou nós, os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas em equilíbrio o sistema global, resultante do agrupamento, reage como uma única entidade.

Apesar do método dos elementos finitos considerar os elementos individuais como contínuos é, na sua essência, um procedimento de discretização pois exprime os deslocamentos (e a partir destes por diferenciação as deformações e, no caso de comportamento linear utilizando-se a lei de Hooke [Timoshenko, 1970], a partir destas as tensões) em qualquer ponto do elemento contínuo em termos de um número finito de deslocamentos nos pontos nodais multiplicados por funções de interpolação<sup>2</sup> apropriadas. A vantagem do método é que a equação de movimento para o sistema global pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas individualmente para cada elemento finito utilizado na modelização. O movimento em qualquer ponto no interior de cada um destes elementos é obtido por intermédio de interpolação sendo, geralmente, as funções de interpolação polinómios de grau reduzido e iguais para elementos do mesmo tipo.

Uma outra vantagem do método dos elementos finitos é a facilidade com que a sua generalização pode ser conseguida para a resolução de problemas bidimensionais e tridimensionais constituídos por vários materiais diferentes e com fronteiras irregulares.

Os passos essenciais de uma solução numérica pelo método dos elementos finitos são os seguintes:

### 1. Subdivisão do sistema global contínuo em elementos finitos;

<sup>1</sup> Desde a primeira utilização do método dos elementos finitos por Pentland em 1989, [Pentland, 1989], no domínio da visão por computador que a mesma tem vindo a generalizar-se às suas diferentes áreas; nomeadamente:

- na análise de movimento 2D e 3D rígido e não rígido [Benayoun, 1994, 1994a; Cootes, 1995; Nastar, 1994, 1994a; Pentland, 1991; Sclaroff, 1994a];
- na obtenção de estruturas 2D e 3D [Cohen, 1991; Kakadiaris, 1997; Pentland, 1991];
- na análise de faces [Essa, 1995];
- na análise de objectos deformáveis 2D e 3D [McInerney, 1996; Park, 1996; Pentland, 1990; Pentland, 1991a];
- representação de imagens 2D e 3D [Moulin, 1992];
- registo de imagens e modelos 2D e 3D [Syn, 1995a];
- descrição de objectos 2D e 3D [Syn, 1995; Sclaroff, 1993, 1994, 1994b, 1995, 1995a].

<sup>2</sup> Também designadas por funções de forma.

2. Para cada elemento finito  $m$  cálculo da matriz de rigidez  $[K^{(m)}]$  e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa  $[M^{(m)}]$  e da matriz de amortecimento dependente da velocidade  $[C^{(m)}]$  relativamente a um referencial local conveniente;
3. Determinação para o sistema global da matriz de rigidez  $[K]$  e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa  $[M]$  e da matriz de amortecimento dependente da velocidade  $[C]$  por agrupamento das matrizes de cada elemento finito utilizado na modelização expressas relativamente a um mesmo sistema de referência global;
4. Determinação do vector das cargas aplicadas ao sistema global  $\{R\}$ ;
5. Estabelecimento das equações de movimento para o sistema global  $[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}$ ;
6. Cálculo das variáveis do problema em questão; tais como: deslocamentos, velocidades, deformações e tensões.

O método dos elementos finitos apresenta diversas formulações possíveis. Em problemas estáticos, por exemplo no caso da análise estrutural, é comum derivar-se a matriz de rigidez utilizando-se a abordagem directa que consiste no relacionamento do vector dos deslocamentos nodais com o vector das forças nodais. Tal abordagem apresenta algumas dificuldades em problemas dinâmicos, tais como na análise de vibrações, sendo preferível neste tipo de problemas obter-se para cada elemento individual a derivação das matrizes de elementos finitos de rigidez, de massa e do vector das forças não conservativas nodais a partir respectivamente da energia cinética, da energia potencial e da expressão dos trabalhos virtuais, *Apêndice A.8*; esta abordagem é geralmente designada por abordagem variacional.

Note-se que o método dos elementos finitos não dá, em princípio, soluções exactas. No entanto à medida que usamos mais e mais elementos na modelização deve a solução obtida convergir para a solução exacta. Verifica-se que do ponto de vista custo/precisão é mais vantajoso usar poucos elementos complexos de que muitos elementos simples.

No ponto seguinte desta comunicação é apresentada a formulação do método dos elementos finitos; no terceiro ponto é apresentado, de forma breve, a versão hierárquica do método; no quarto ponto são apresentadas as funções de forma; as funções de forma mais complexas, como por exemplo as da família de Lagrange e de Serendipity e as utilizadas em elementos isoparamétricos, são apresentadas no quinto ponto; no sexto ponto é descrito como se podem obter as deformações e as tensões no interior de cada elemento após a determinação dos seus deslocamentos nodais; as condições de convergência do método são discutidas no sétimo ponto inclusive um teste que é bastante comum em análises de problemas de elasticidade o “*patch test*”; como nem sempre é possível a integração de forma analítica, das diferentes expressões do método, métodos de integração numéricos são necessários assim alguns destes métodos são apresentados no oitavo ponto; algumas conclusões são apresentadas no nono, e último, ponto; em apêndice são apresentadas algumas definições utilizadas na derivação do método e alguns exemplos de determinação das matrizes envolvidas para dois elementos finitos simples.

## 2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos

Neste ponto são derivadas as equações que governam o método dos elementos finitos. Em primeiro lugar consideremos um corpo tridimensional geral, *Figura 1*.

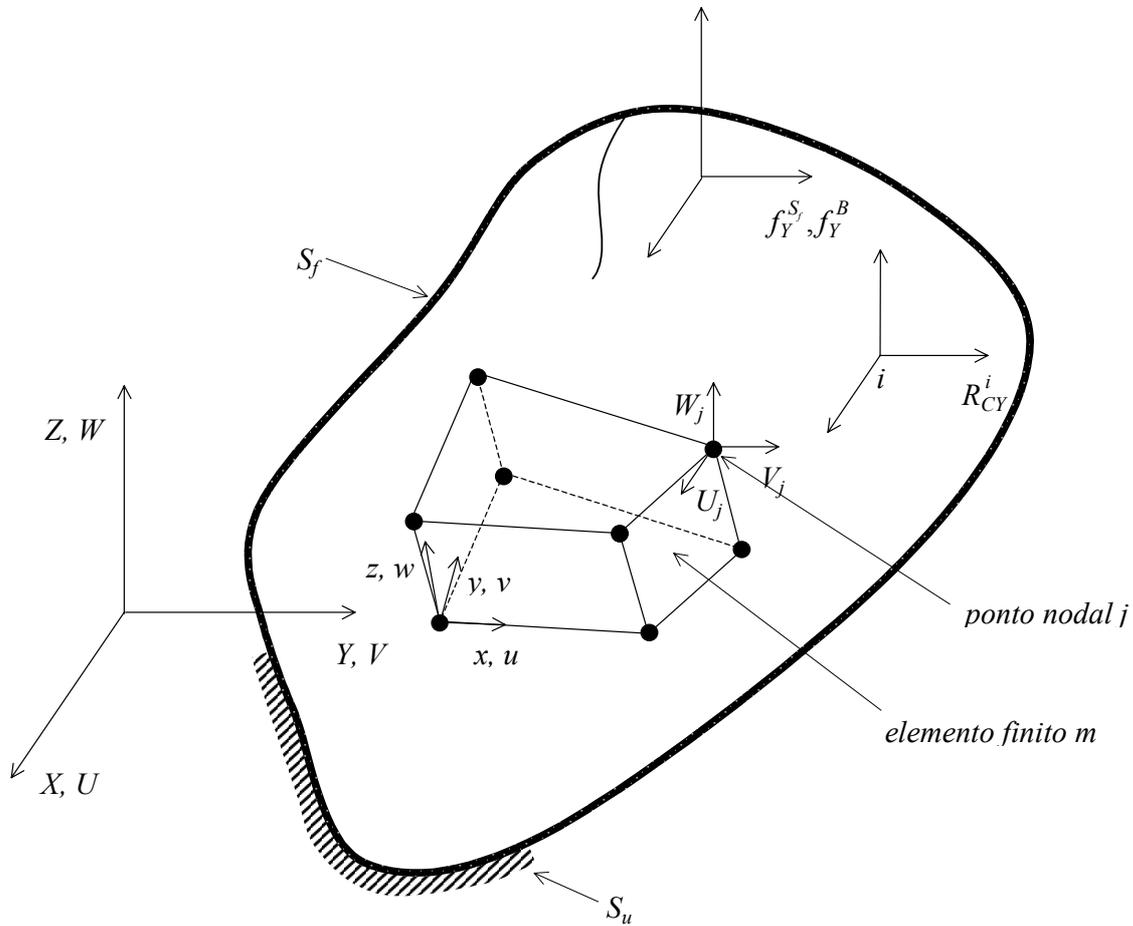


Figura 1 - Corpo tridimensional geral com um elemento finito tridimensional de oito nós.

No método dos elementos finitos o corpo em questão, *Figura 1*, é aproximado pela consideração que o mesmo é equivalente a um conjunto de elementos finitos discretos agrupados, de forma adequada, pelos pontos nodais, também designados por nodos ou nós, localizados nas fronteiras dos mesmos. Os deslocamentos referenciados num sistema de coordenadas local \$(x, y, z)\$, a ser escolhido de forma conveniente, no interior de cada elemento são assumidos como sendo função dos deslocamentos dos \$N\$ nodos do mesmo. Deste modo, para o elemento \$m\$ temos:

$$\{u^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\}$$

Eq. 1

onde \$[N^{(m)}]\$ é a matriz das funções de forma, por vezes também designada por matriz de interpolação dos deslocamentos, o índice \$m\$ significa elemento \$m\$, e \$\{\hat{U}\}\$ é o vector dos deslocamentos globais dos pontos nodais com três componentes \$U\_i, V\_i\$ e \$W\_i\$, incluindo os deslocamentos nos suportes do conjunto agrupado; por exemplo \$\{\hat{U}\}\$ é um vector de dimensão \$3N\$:

$$\{\hat{U}\}^T = [ U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \dots \quad U_N V_N W_N ] .$$

Este vector pode ser escrito de forma simplificada como:

$$\{\hat{U}\}^T = [ U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_n ]$$

onde  $U_i$  representa um deslocamento segundo uma qualquer direcção  $X$ ,  $Y$  ou  $Z$ , ou mesmo segundo uma direcção não alinhada com estes eixos coordenados mas alinhados com os eixos de um outro sistema de coordenadas local, e também pode significar uma rotação. Como  $\{\hat{U}\}$  inclui os deslocamentos, e rotações, nos pontos de suporte do conjunto agrupado, numa fase seguinte é necessário impor os valores conhecidos de  $\{\hat{U}\}$  antes de resolver o problema para os deslocamentos nodais não conhecidos.

Na *Figura 1* está representado um elemento finito típico para uma modelização possível para o corpo. Este elemento tem oito nós, um em cada um dos seus vértices, e pode ser interpretado como um elemento finito 3D equivalente a um tijolo. Deveremos interpretar a modelização como uma construção de elementos deste tipo agrupados de forma a não existirem falhas entre os vários domínios de cada elemento. O elemento considerado é apenas um exemplo; na prática podem ser utilizados elementos com geometrias diferentes e com nós no interior das faces e no interior dos mesmos.

A escolha do elemento e a construção das correspondentes entradas na matriz  $[N^{(m)}]$  (que depende da sua geometria, do seu número de nós/graus de liberdade, e dos requisitos de convergência) constituem as etapas básicas do método dos elementos finitos.

Apesar de todos os deslocamentos nodais estarem representados no vector  $\{\hat{U}\}$ , devemos notar que para um dado elemento apenas os deslocamentos nos seus nodos afecta a distribuição dos deslocamentos e das deformações no interior do mesmo.

Assumindo os deslocamentos da *Eq. 1* podemos agora determinar as deformações do elemento correspondentes:

$$\{\varepsilon^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\}$$

*Eq. 2*

onde a matriz  $[B^{(m)}]$ , geralmente designada por matriz de deformação, relaciona os deslocamentos com as deformações e é obtida pela apropriada derivação e combinação das linhas da matriz  $[N^{(m)}]$ .

O propósito de definir os deslocamentos e as deformações do elemento em termos do vector dos deslocamentos nodais do conjunto agrupado pode por agora ainda não ser óbvio. Contudo, será verificado que procedendo desta forma, a utilização da *Eq. 2* e da *Eq. 62* no princípio dos deslocamentos virtuais permite, de forma automática, um processo eficiente de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos nas matrizes do sistema global. Este processo de agrupamento é designado pelo método directo de rigidez<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> O método directo de rigidez é a designação dada ao procedimento de incorporar as matrizes dos elementos no sistema final de equações. O método é simples e directo. Os valores numéricos dos nós  $i$  e  $j$  para um elemento específico são inseridos nas colunas de  $[K^{(m)}]$  e  $[M^{(m)}]$  e ao longo das linhas de  $[K^{(m)}]$ ,  $[M^{(m)}]$  e  $\{R^{(m)}\}$ , isto é:

$$[M^{(m)}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}, [K^{(m)}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}, \{R^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}.$$

As tensões num elemento finito estão relacionadas com as deformações do mesmo e com as suas tensões iniciais pela expressão:

$$\{\sigma^{(m)}\} = [D^{(m)}] \{\varepsilon^{(m)}\} + \{\sigma^{I(m)}\}$$

Eq. 3

onde  $[D^{(m)}]$  é a matriz de elasticidade para o elemento  $m$  e  $\{\sigma^{I(m)}\}$  é o vector das conhecidas tensões iniciais para o mesmo. A lei para o material esta especificada na matriz  $[D^{(m)}]$  e pode ser quer para um elemento isotrópico quer para anisotrópico e pode variar de elemento para elemento.

Utilizando os deslocamentos no interior de cada elemento, como descritos na Eq. 1, pode-se agora derivar as equações de equilíbrio que correspondem aos deslocamentos nodais do conjunto de elementos finitos devidamente agrupado. Em primeiro, reescrevemos a Eq. 76 como uma soma de integrações sobre o volume e áreas de todos os elementos finitos utilizados na discretização do corpo:

$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \{\varepsilon^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \{\bar{u}^{(m)}\}^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} +$$

$$\sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \{\bar{u}^{(m)}\}^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} + \sum_i \{\bar{u}^i\}^T \{R_C^i\}$$

Eq. 4

O procedimento directo de rigidez é facilmente entendido recorrendo-se a um simples exemplo. Utilizando-se a seguinte matriz de rigidez, para a matriz de massa o procedimento é idêntico, e o seguinte vector de forças:

$$[K^{(m)}] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \{R^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \end{Bmatrix},$$

para um elemento linear entre os nodos 2 e 3 ( $i=2, j=3$ ). Utilizando  $i$  e  $j$  obtemos:

$$[K^{(m)}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad \{R^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix},$$

e a localização destes coeficientes na matriz global de rigidez  $[K]$  e no vector global de cargas  $\{R\}$  é:

- 4 é adicionado a  $K_{22}$ ;
- 6 é adicionado a  $K_{23}$ ;
- 5 é adicionado a  $K_{32}$ ;
- 7 é adicionado a  $K_{33}$ ;
- 8 é adicionado a  $R_2$ ;
- 9 é adicionado a  $R_3$ .

Neste exemplo é utilizada a expressão *é adicionado* pois podem existir contribuições a  $K_{22}$ ,  $K_{23}$ ,  $K_{32}$ ,  $K_{33}$ ,  $R_2$  e  $R_3$  de outros elementos que não foram considerados.

Como se depreende deste exemplo o método directo de rigidez é facilmente implementado num programa computacional.

onde  $m = 1, 2, \dots, L$ , onde  $L$  é o número de elementos e  $S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}$  representa as superfícies do elemento  $m$  que pertencem à superfície  $S$  do corpo. Para elementos totalmente rodeados por outros não existe este tipo de superfície; contudo, para elementos na superfície do corpo uma ou mais superfícies deste tipo são incluídas no integral das forças que actuam sobre a mesma. Note-se que foi assumido que na Eq. 4 os nodos estão localizados nos pontos onde as cargas concentradas estão aplicadas, apesar de uma carga concentrada poder obviamente ser incluída no integral de forças de superfície.

É importante notar que desde que as integrações na Eq. 4 sejam executadas sobre os volumes e superfícies dos elementos utilizados - por razões de eficiência para cada elemento pode ser utilizado nos cálculos um diferente e qualquer sistema de coordenadas conveniente - apesar de tudo, para um dado campo dos deslocamentos virtuais, o trabalho interno virtual é um número, assim como também o é o trabalho externo virtual, e este número pode ser determinado por integração utilizando um qualquer sistema de coordenadas. Obviamente que é assumido que para cada integral na Eq. 4 é utilizado um único sistema de coordenadas para todas as variáveis; por exemplo, o vector  $\{\bar{u}^{(m)}\}$  está definido no mesmo sistema de coordenadas do vector  $\{f^{B(m)}\}$ .

As relações na Eq. 1 e na Eq. 2 foram obtidas para os deslocamentos e deformações desconhecidos e reais do elemento. Na utilização do princípio dos deslocamentos virtuais, Apêndice A.3, pode-se utilizar as mesmas considerações para os deslocamentos e deformações virtuais:

$$\{\bar{u}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}] \{\hat{U}\} \text{ e } \{\bar{\varepsilon}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}] \{\hat{U}\}.$$

Desta forma as matrizes de rigidez e de massa do elemento serão matrizes simétricas.

Se proceder-se à substituição na Eq. 4 obtemos:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}\} \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \right] \{\hat{U}\} &= \{\hat{U}\}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} \right] \\ + \left[ \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_m^{(m)}} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} \right] &- \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{\sigma^{I(m)}\} dV^{(m)} \right] + \{R_C\} \end{aligned}$$

Eq. 5

onde as matrizes de interpolação dos deslocamentos na superfície  $[N^{S(m)}]$  são obtidas a partir das matrizes de interpolação dos deslocamentos  $[N^{(m)}]$  da Eq. 1 por adequada substituição das coordenadas da superfície do elemento e  $\{R_C\}$  é o vector das cargas concentradas aplicadas nos nós dos elementos agrupados.

Deveremos notar que a componente  $i$  do vector  $\{R_C\}$  é a força nodal concentrada que corresponde à componente  $i$  do vector de deslocamentos  $\{\hat{U}\}$ . Na Eq. 5 os vectores de deslocamentos nodais  $\{\hat{U}\}$  e  $\{\bar{\hat{U}}\}$  do conjunto agrupado são independentes do elemento  $m$  e assim foram retirados do interior dos somatórios.

Para obter a partir da Eq. 5 as equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o princípio dos deslocamentos virtuais  $n$  vezes impondo deslocamentos virtuais unitários a todas as componentes do vector  $\{\bar{\hat{U}}\}$ . Na primeira aplicação obtemos

$\{\hat{U}\} = \{e_1\}$ , na segunda aplicação  $\{\hat{U}\} = \{e_2\}$ , e por diante, até que na aplicação  $n$  obtemos  $\{\hat{U}\} = \{e_n\}$ , resultando assim:

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

Eq. 6

onde está omitida a matriz identidade  $[I]$ , devido aos deslocamentos virtuais de cada lado da equação, e o vector  $\{R\}$  é:

$$\{R\} = \{R_B\} + \{R_S\} - \{R_I\} + \{R_C\}$$

Eq. 7

e, como a partir de agora será referenciado, o vector para os deslocamentos nodais desconhecidos está referenciado como  $\{U\}$  (isto é,  $\{U\} \equiv \{\hat{U}\}$ ).

A matriz  $[K]$  é a matriz de rigidez para o sistema global:

$$[K] = \sum_m \underbrace{\int [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)}}_{[K^{(m)}]}$$

Eq. 8

O vector de carga  $\{R\}$  inclui o efeito das forças de corpo:

$$\{R_B\} = \sum_m \underbrace{\int [N^{(m)}]^T [f^{B(m)}] dV^{(m)}}_{\{R_B^{(m)}\}},$$

Eq. 9

o efeito das forças de superfície:

$$\{R_S\} = \sum_m \underbrace{\int [N^{S(m)}]^T [f^{S(m)}] dS^{(m)}}_{\{R_S^{(m)}\}},$$

Eq. 10

o efeito da tensão inicial:

$$\{R_I\} = \sum_m \underbrace{\int [B^{(m)}]^T \{\sigma^{I(m)}\} dV^{(m)}}_{\{R_I^{(m)}\}},$$

Eq. 11

e as cargas concentradas  $\{R_C\}$ .

Nota-se que o somatório dos integrais de volume na Eq. 8 exprime a adição directa das matrizes de rigidez dos elementos utilizados  $[K^{(m)}]$  para obter-se a matriz de rigidez do sistema global  $[K]$ . Da mesma modo, o agrupamento do vector de forças de corpo  $\{R_B\}$  é determinada pela adição directa dos vectores das forças de corpo dos elementos utilizados  $\{R_B^{(m)}\}$ ; e os vectores  $\{R_S\}$  e  $\{R_I\}$  são obtidos de forma similar. O processo de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos por esta adição directa é designado pelo método directo de rigidez.

Esta escrita elegante do processo de agrupamento baseia-se em dois factores principais: primeiro, as dimensões de todas as matrizes, e de todos os vectores, a serem somadas são as mesmas e, segundo, os graus de liberdade de cada elemento são iguais aos graus de liberdade do conjunto agrupado. Evidentemente que na prática apenas as linhas e colunas diferentes de zero para as matrizes e vectores de cada elemento são calculadas, correspondendo aos verdadeiros graus de liberdade nodais de cada elemento, e o agrupamento é executado utilizando para cada elemento um vector de conectividade no qual são guardados os índices dos graus de liberdade para o elemento em termos do conjunto agrupado. Na prática, também, as matrizes e os vectores de cada elemento finito podem ser primeiramente calculadas relativamente aos seus graus de liberdade locais, não alinhados com os graus de liberdade do conjunto agrupado; neste caso, antes de se proceder ao agrupamento deve-se realizar uma transformação das matrizes e vectores dos graus de liberdade locais para os graus de liberdade globais. Isto equivale a transformar o sistema de coordenadas local, no qual estão referenciados os graus de liberdade locais, no sistema de coordenadas global, no qual estão referenciados os graus de liberdade globais.

A Eq. 6 é a equação de equilíbrio estático para o sistema global. Nas considerações deste equilíbrio as forças aplicadas podem variar com o tempo; neste caso, os deslocamentos também variaram com o tempo e a Eq. 6 é a equação de equilíbrio para qualquer ponto específico no tempo. Contudo, se as forças são realmente aplicadas de forma rápida as forças de inércia necessitam de ser consideradas; isto é, é necessário resolver um verdadeiro sistema dinâmico. Utilizando-se o princípio de D'Alembert, *Apêndice A.5*, pode-se simplesmente incluir as forças de inércia como parte das forças de corpo. Assumindo que as acelerações são aproximadas do mesma maneira que os deslocamentos na Eq. 7 a contribuição das forças totais de corpo no vector das cargas  $\{R\}$  é (com o sistema de coordenadas  $X, Y, Z$  estacionário):

$$\{R_B\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T [\{f^{B(m)}\} - \rho^{(m)} [N^{(m)}] \{\ddot{U}\}] dV^{(m)}$$

Eq. 12

onde os vectores  $\{f^{B(m)}\}$  já não incluem as forças de inércia,  $\{\ddot{U}\}$  é o vector das acelerações nodais (isto é, a segunda derivada de  $\{U\}$  em relação ao tempo),  $\rho^{(m)}$  é a densidade de massa do elemento  $m$ . Neste caso as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$

Eq. 13

onde  $\{R\}$  e  $\{U\}$  são dependentes do tempo. A matriz  $[M]$  é a matriz de massa para o sistema global:

$$[M] = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N^{(m)}]^T [N^{(m)}] dV^{(m)}}_{[M^{(m)}]}.$$

Eq. 14

A matriz de massa  $[M]$  é sempre definida positivamente pois a energia cinética é sempre positiva; no entanto, a matriz de rigidez  $[K]$  pode ou não ser dependendo do sistema global em questão (a energia potencial pode ser positiva ou negativa). Em problemas de vibrações surgem três situações interessantes [Kelly, 1993; Meirovitch, 1986]: quando a matriz  $[K]$  também é definida positivamente, o sistema global é designado por sistema definido positivamente e o movimento é do tipo vibração em modo livre não amortecido; quando a matriz  $[K]$  é apenas semidefinida positivamente, então o sistema é designado por sistema semidefinido positivamente e o movimento também é designado do tipo vibração em modo livre não amortecido mas movimento rígido é possível pois sistemas semidefinidos não são restringidos (isto é, tais sistemas são suportados de maneira que movimento rígido do mesmo pode acontecer); para sistemas instáveis, a matriz  $[K]$  não é definida positivamente. Em problemas estáticos de estruturas a matriz de rigidez do sistema  $[K]$  é sempre simétrica e definida positivamente com os elementos da diagonal sempre positivos e bastante superiores aos restantes elementos de cada linha.

Na medição das respostas dinâmicas reais do sistema global é observado que a energia é dissipada durante a vibração; na análise de vibrações tal dissipação é geralmente considerada pela introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Introduzindo estas forças como contribuições adicionais às forças de corpo obtemos, correspondendo à Eq. 12:

$$\{R_B\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \left[ [N^{(m)}]^T \left[ \{f^{B(m)}\} - \rho^{(m)} [N^{(m)}] \{\ddot{U}\} - \kappa^{(m)} [N^{(m)}] \{\dot{U}\} \right] dV^{(m)} \right].$$

Neste caso os vectores  $\{f^{B(m)}\}$  já não incluem as forças de inércia nem de amortecimento dependente da velocidade,  $\{\dot{U}\}$  é o vector das velocidades nodais (isto é a primeira derivada de  $\{U\}$  em relação ao tempo), e  $\kappa^{(m)}$  é o parâmetro de amortecimento para o elemento  $m$ . Neste caso, as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$

Eq. 15

onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento do sistema global:

$$[C] = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} [N^{(m)}]^T [N^{(m)}] dV^{(m)}}_{[C^{(m)}]}.$$

Na prática é difícil, se não impossível, determinar para sistemas gerais de elementos finitos os parâmetros de amortecimento para os elementos que os constituem, particularmente porque as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, a matriz  $[C]$  não é geralmente agrupada a partir das matrizes de amortecimentos dos elementos mas é construída utilizando-se as matrizes de massa e de rigidez do sistema global conjuntamente com resultados experimentais do valor do montante de amortecimento. Assim a matriz de amortecimento do sistema  $[C]$  é uma combinação linear de potências das matrizes de massa  $[M]$  e de rigidez  $[K]$  do mesmo, isto é:

$$[C] = \alpha[K]^r + \beta[M]^s$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são valores reais e  $r$  e  $s$  são valores inteiros; nestes casos, o amortecimento é designado por proporcional. Se  $r$  e  $s$  são iguais a um, então o amortecimento é proporcional e viscoso ficando a equação matricial de movimento para o sistema global com a forma:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\alpha[M] + \beta[K]]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}.$$

Até este momento considerou-se que cada elemento individual apresenta nodos livres; isto é, nodos que podem sofrer deslocamentos sem nenhum tipo de restrições. A implicação é que o sistema global não está restringido e pode sofrer movimentos rígidos e, desta forma, a matriz  $[K]$  torna-se singular. Contudo muitos sistemas são suportados de forma a impedir movimentos rígidos, o que é reflectido nas condições da fronteira geométrica. Outros sistemas, designados por indeterminados, são suportados de maneira que os deslocamentos são nulos num número de pontos superior ao requerido para impedir o movimento rígido.

Um maneira simples de resolver o problema no qual a matriz  $[K]$  é singular e o sistema é suportado de tal maneira que um certo número de deslocamentos nodais são nulos é eliminar das matrizes  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  e  $\{F\}$  o correspondente número de linhas e colunas que estão associadas aos nodos restringidos.

Em resumo uma análise completa de um sistema pelo método dos elementos finitos consiste no cálculo da matriz de rigidez  $[K]$ , e das matrizes de massa  $[M]$  e de amortecimento  $[C]$  numa análise dinâmica, e do vector das cargas  $\{R\}$ , resolvendo para os deslocamentos  $\{U\}$  a partir da Eq. 6 (ou  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$ ,  $\{\ddot{U}\}$  a partir da Eq. 13 ou da Eq. 15), e de seguida determinar as deformações e as tensões utilizando respectivamente a Eq. 2 e a Eq. 3.

## 2.1 - Graus de Liberdade Locais e Globais

A derivação das matrizes dos elementos permite concluir que é mais fácil e conveniente estabelecer em primeiro lugar as matrizes correspondentes aos graus de liberdade locais do elemento. A construção das matrizes do elemento finito que correspondem aos graus de liberdade do sistema global (ou seja, aos graus de liberdade globais), utilizados na Eq. 8 até à Eq. 14, podem posteriormente ser obtidas directamente pela identificação dos graus de liberdade globais que correspondem aos graus de liberdade locais do mesmo. Contudo considerando as matrizes  $[N^{(m)}]$ ,  $[B^{(m)}]$ ,  $[K^{(m)}]$ , e por ai adiante, definidas relativamente aos graus de liberdade globais apenas as linhas e colunas que correspondem aos graus de liberdade do elemento têm entradas não nulas, e o objectivo principal na definição destas

matrizes específicas foi apenas o de ser possível exprimir o processo de agrupamento das matrizes dos elementos de uma maneira teoricamente elegante. Em implementações práticas, do método dos elementos finitos, esta elegância também está presente; contudo, todas as matrizes dos elementos são calculadas correspondendo apenas aos graus de liberdade de cada elemento e posteriormente são agrupadas directamente utilizando a correspondência entre os graus de liberdade locais do mesmo e os graus de liberdade globais do conjunto agrupado. Assim considerando apenas os graus de liberdade locais dos nodos do elemento incluídos no vector  $\{\hat{u}\}$  podemos escrever:

$$\{u\} = [N] \{\hat{u}\}$$

Eq. 16

onde as entradas no vector  $\{u\}$  são os deslocamentos do elemento medidos num qualquer sistema de coordenadas local. A seguir também temos:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\hat{u}\}.$$

Eq. 17

Considerando as relações na Eq. 16 e na Eq. 17 o facto de nenhum índice superior ser utilizado nas matrizes de interpolação indica que as matrizes são definidas relativamente aos graus de liberdade locais do elemento em questão. Utilizando as relações para as matrizes do elemento de rigidez, de massa, e os cálculos anteriormente utilizados para o vector de carga, obtemos:

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$$

Eq. 18

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV,$$

Eq. 19

$$\{R_B\} = \int_V [N]^T \{f^B\} dV,$$

Eq. 20

$$\{R_S\} = \int_S [N^S]^T \{f^B\} dS,$$

Eq. 21

$$\{R_I\} = \int_V [B]^T \{\sigma^I\} dV,$$

Eq. 22

onde todas as variáveis são definidas como na Eq. 8 até à Eq. 14, mas correspondendo aos graus de liberdade locais do elemento finito considerado. Desde que as matrizes dadas na Eq.

18 até à Eq. 22 estejam calculadas, podem ser agrupadas directamente, pelo processo descrito anteriormente, determinando-se assim as matrizes para o sistema global.

Neste processo de agrupamento é assumido que as direcções dos deslocamentos nodais do elemento  $\{\hat{u}\}$  na Eq. 16 são as mesmas das direcções dos deslocamentos nodais globais  $\{U\}$ . Contudo, geralmente é conveniente começar a derivação das matrizes e dos vectores relativamente aos graus de liberdade locais do elemento  $\{\tilde{u}\}$  que não necessariamente alinhados com os graus de liberdade globais do sistema agrupado  $\{\hat{u}\}$ . Neste caso temos:

$$\{u\} = [\tilde{N}] \{\tilde{u}\}$$

Eq. 23

e

$$\{\tilde{u}\} = [T] \{\hat{u}\}$$

Eq. 24

onde a matriz  $[T]$  transforma os graus de liberdade  $\{\hat{u}\}$  nos graus de liberdade  $\{\tilde{u}\}$  e a Eq. 24 corresponde a uma transformação de tensor de primeira ordem; as entradas na coluna  $j$  da matriz  $[T]$  são os co-senos de direcção de um vector unitário correspondendo ao grau de liberdade  $j$  do vector  $\{\hat{u}\}$  quando medido segundo as direcções dos graus de liberdade  $\{\tilde{u}\}$ . Substituindo a Eq. 24 na Eq. 23, obtemos:

$$[N] = [\tilde{N}][T].$$

Eq. 25

Assim, identificando todas as matrizes de elementos finitos correspondendo aos graus de liberdade  $\{\hat{u}\}$  com um  $\sim$  sobre os mesmos, obtemos a partir da Eq. 25 e da Eq. 18 até à Eq. 22:

$$[K] = [T]^T [\tilde{K}] [T]; [M] = [T]^T [\tilde{M}] [T];$$

$$\{R_B\} = [T]^T \{\tilde{R}_B\}; \{R_S\} = [T]^T \{\tilde{R}_S\}; \{R_I\} = [T]^T \{\tilde{R}_I\}.$$

Devemos notar que estas transformações também são utilizadas quando são impostos deslocamentos na fronteira que não correspondem aos graus de liberdade globais do sistema. A Tabela 1 resume alguma da notação utilizada.

---

(a)  $\{u^{(m)}\} = [N^{(m)}] \{\hat{U}\}$  ou  $\{u^{(m)}\} = [N^{(m)}] \{U\}$

onde  $\{u^{(m)}\}$  é o vector dos deslocamentos no interior do elemento  $m$  função das coordenadas do elemento,  $\{U\}$  é o vector dos deslocamentos nodais do sistema global.

(b)  $\{u\} = [N] \{\hat{u}\}$

onde  $\{u\} = \{u^{(m)}\}$  e é implícito que é considerado um elemento específico,  $\{\hat{u}\}$  é o vector dos deslocamentos nodais do elemento em consideração, as entradas neste vector são os deslocamentos do vector  $\{\hat{U}\}$  que pertencem ao

---

---

elemento.

$$(c) \quad \{u\} = [\tilde{N}] \{\tilde{u}\}$$

onde  $\{\tilde{u}\}$  é o vector de deslocamentos nodais de um elemento num sistema de coordenadas diferente do sistema global (no qual  $\{\hat{U}\}$  está definido).

---

Tabela 1 - Sumário da notação utilizada.

### 3 - Método dos Elementos Finitos Hierárquico

Como é referido no *Apêndice A.6* o método dos elementos finitos pode ser caracterizado como um caso especial do método de Rayleigh-Ritz [Bathe, 1996, Meirovitch, 1986], com a maior diferença entre os dois situando-se na escolha das funções admissíveis utilizadas nas séries que representam a solução. No método clássico de Rayleigh-Ritz as funções admissíveis são funções globais; isto é, funções definidas em todo o domínio do sistema. Por outro lado, no método dos elementos finitos as funções admissíveis são funções locais definidas apenas em pequenos sub domínios; estes sub domínios são estendidos por alguns elementos e nulos nos restantes. Estas funções locais são geralmente muito simples tais como polinómios de ordem baixa.

A resolução da solução do problema determinada pelo método de Rayleigh-Ritz pode ser aumentada simplesmente pela utilização de um maior número de funções admissíveis nas séries. Por outro lado, no método dos elementos finitos a resolução é aumentada pelo refinamento da malha de elementos finitos o que se traduz num aumento do número de elementos utilizados na discretização. Tal refinamento implica a redução na largura  $h$  dos elementos finitos. Por tal razão, este procedimento é designado como a versão  $h$  do método dos elementos finitos. Esta versão é caracterizada pelo facto de que o grau  $p$  dos polinómios utilizados na aproximação é constante e geralmente de ordem reduzida.

Uma outra maneira de aumentar a resolução do método dos elementos finitos é manter  $h$  constante e aumentar o número de polinómios sobre os elementos, o que implica o aumento do grau  $p$  dos polinómios. Esta abordagem é designada por versão  $p$  do método dos elementos finitos. Como na versão  $p$  a resolução pretendida é obtida pelo aumento do número das funções admissíveis na aproximação, esta versão é similar ao método clássico de Rayleigh-Ritz. Obviamente que as diferenças se mantêm pois no método clássico de Rayleigh-Ritz as funções admissíveis utilizadas são globais enquanto na versão  $p$  do método dos elementos finitos são funções locais. Tal permite à versão  $p$  uma grande versatilidade. Além do mais, a taxa de convergência da versão  $p$  pode ser mais elevada do que a do método clássico de Rayleigh-Ritz ou da versão  $h$ . Na versão  $p$  do método dos elementos finitos é possível escolher as funções admissíveis a partir de uma variedade de conjuntos polinomiais desde que estes sejam completos. Polinómios particularmente desejáveis são os designados por hierárquicos, *ponto 5.2.2.1*, que têm a propriedade de que o conjunto de funções correspondentes a uma aproximação polinomial de ordem  $p$  constitui um subconjunto do conjunto de funções correspondentes à aproximação de ordem  $p+1$ . Esta versão é designada por método dos elementos finitos hierárquico e é caracterizado pelo facto de que as matrizes

de massa e de rigidez possuírem a propriedade de embeberem os elementos antigos<sup>4</sup>, de tal forma que o princípio de inclusão é verificado.

#### 4 - Funções de Forma

A melhor maneira de resolver um qualquer problema físico governado por uma equação diferencial é obter a solução analítica desta. Contudo, existem muitas situações para as quais é difícil obter a desejada solução analítica: A região em consideração pode ser muito irregular de tal maneira que seja matematicamente impossível descrever a sua fronteira; A configuração pode ser composta por materiais diferentes cujas regiões sejam de descrição matemática difícil; Podem estar envolvidos materiais anisotrópicos e desta forma as equações envolvem termos não lineares...

Um método numérico pode ser utilizado para obter uma solução aproximada quando não pode ser obtida uma solução analítica. Todas as soluções numéricas produzem valores em pontos discretos para um dado conjunto de parâmetros independentes. O procedimento para a solução completa é repetido cada vez que estes parâmetros são alterados. Mesmo assim, soluções numéricas são mais desejáveis que nenhuma solução. Os valores calculados fornecem informação importante há cerca do processo físico mesmo sendo apenas em pontos discretos.

Existem vários procedimentos para obter uma solução numérica para uma equação diferencial e podem ser separados em três classes: 1) método das diferenças finitas; 2) método variacional; 3) métodos de resíduos pesados. As duas primeiras são apresentadas de forma sucinta a terceira é descrita de forma mais extensiva nos pontos seguintes.

- **Método das diferenças finitas**

O método das diferenças finitas aproxima as derivadas nas equações diferenciais que governam o problema utilizando equações de diferenças. Este método é útil para a resolução de problemas de transferência de calor e em mecânica dos fluidos e funcionam bem para regiões bidimensionais com fronteiras paralelas aos eixos coordenadas. Contudo, o método é ineficaz quando as regiões têm fronteiras curvas ou irregulares, e é de difícil implementação computacional [Bathe, 1996].

- **Método variacional**

A abordagem variacional envolve o integral de uma função que produz um número. Cada nova função produz um novo número. A função que produz o menor número tem a adicional propriedade de satisfazer uma determinada equação diferencial. Para ajudar a clarificar esta abordagem consideremos o integral:

---

<sup>4</sup> O facto das matrizes de massa e de rigidez possuírem a propriedade de embeberem os elementos antigos traduz que as matrizes de ordem  $(n + 1)$  são construídas a partir das mesmas matrizes de ordem  $(n)$  acrescentando-se uma nova linha e uma nova coluna sendo apenas necessário calcular estas novas entradas:

$$[M]^{(n+1)} = \begin{bmatrix} [M]^{(n)} & x \\ x & x \end{bmatrix}, [K]^{(n+1)} = \begin{bmatrix} [K]^{(n)} & x \\ x & x \end{bmatrix}.$$

Esta propriedade pode ser utilizada para provar que os valores próprios  $\lambda_i$  determinados pelo método de Rayleigh-Ritz satisfazem as desigualdades:

$$\lambda_1^{(n+1)} \leq \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n+1)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)} \leq \lambda_n^{(n+1)}$$

e que é designado por princípio da inclusão.

$$\Pi = \int_0^H \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx.$$

O valor numérico de  $\Pi$  pode ser calculado a partir de uma equação específica  $y=f(x)$ . Contudo, a abordagem variacional demonstra que a equação particular  $y=g(x)$ , a aquela que origina o menor valor numérico para  $\Pi$ , é a solução para a equação diferencial:

$$D \frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0$$

com as condições de fronteira  $y(0)=y_0$  e  $y(H)=y_H$ .

O processo pode ser invertido: dada uma equação diferencial, uma solução aproximada pode ser obtida por substituição de funções candidatas diferentes no apropriado funcional; a função candidata que origina o menor valor para  $\Pi$  é a solução aproximada.

O método variacional é a base para muitas formulações de elementos finitos mas tem uma grande desvantagem: não é aplicável a qualquer equação diferencial que contenha termos da primeira derivada [Bathe, 1996].

#### 4.1 - Aproximação de Funções Utilizando Funções de Forma

A obtenção de uma solução numérica para dado problema, pelo método dos elementos finitos, exige uma representação conveniente da função incógnita por uma função aproximada.

Seja uma função  $\phi$ , com domínio  $\Omega$ , a qual sobre a fronteira  $\Gamma$  assume valores conhecidos  $\phi|_{\Gamma}$ . Escolhendo uma função que respeite exactamente a condição de fronteira e um conjunto de funções  $N_i$  que se anulem ao longo desta, poderemos utilizar a seguinte expressão para definir a função aproximada:

$$\hat{\phi} = \psi + \sum_{i=1}^M a_i N_i$$

Eq. 26

sendo  $a_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, M$ , um conjunto de parâmetros a determinar.

As funções  $N_i$  são conhecidas pela designação de funções de aproximação ou funções de forma ou ainda por funções de interpolação. Os coeficientes  $a_i$  são habitualmente designados por parâmetros nodais e por vezes coincidem com o valor da função aproximada num conjunto de  $M$  pontos do domínio.

O modo como forem escolhidas as funções de forma e a função  $\psi$  garante a verificação automática da condição de fronteira quaisquer que sejam os valores dos parâmetros nodais. Necessariamente teremos:

$$\hat{\phi}|_{\Gamma} = \psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}.$$

As funções de forma  $N_i$  deverão ser completas, ou seja, deverão ser tais que, qualquer que seja a função exacta, a função aproximada tende para esta à medida que aumenta o número  $M$  de parcelas que intervêm na respectiva definição:

$$\forall \phi \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{\phi} = \phi.$$

Esta condição é necessária mas não suficiente para garantir convergência. Mais adiante se definirão outras condições a respeitar por estas funções de forma.

## 4.2 - Determinação dos Parâmetros Nodais

A determinação dos coeficientes  $a_i$ , com  $i=1, 2, \dots, M$ , pode fazer-se por diversos modos correspondendo cada um deles à imposição de um conjunto de condições a serem verificadas pela função aproximada. Assim, poderemos impor:

- Erro nulo num conjunto discreto de pontos do domínio;
- Erro médio pesado nulo em todo o domínio.

### 4.2.1 - Erro Nulo num Conjunto Discreto de Pontos do Domínio

Neste caso, obteremos o seguinte sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os nossos parâmetros nodais:

$$\hat{\phi}_i = \phi_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, M;$$

$$\sum_{j=1}^M a_j N_{ij} = \phi_i - \psi_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, M;$$

onde  $N_{ij}$  representa o valor da função de forma  $N_j$  no ponto  $P_i$  do domínio.

### 4.2.2 - Erro Médio Pesado Nulo em Todo o Domínio

Este método é conhecido pela designação de método dos Resíduos Pesados. Dele existem várias versões consoante a função de peso escolhida. Assim, poderemos ter:

#### a) Método da colocação pontual

Neste método a função de peso é a função  $\delta$  de Dirac (função impulso) definida do seguinte modo:

$$\delta(x - xl) = 0 \text{ com } x \neq xl,$$

$$\delta(x - xl) = \infty \text{ com } x = xl,$$

$$\int_{x < xl}^{x > xl} G(x) \delta(x - xl) dx = G(xl).$$

Estabelecendo o anulamento do erro médio pesado no domínio, utilizando  $M$  funções de Dirac, correspondentes a  $M$  pontos diferentes, obteremos:

$$\int_{x < x_i}^{x > x_i} \left( \phi_i - \psi_i + \sum_{j=1}^M a_j N_{ij} \right) \delta(x_i - x_j) dx = 0, \quad \sum_{j=1}^M a_j N_{ij} = \phi_i - \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Note-se que este método conduz exactamente ao mesmo conjunto de equações que o método do erro nulo num conjunto discreto de pontos do domínio; equivale portanto, a impor erro nulo apenas num conjunto  $M$  pontos discretos do domínio [Oliveira, 1990].

**b) Método de colocação por sub domínios**

Neste método é utilizada uma função de peso assim definida:

$$\omega_i = 1 \text{ com } x_i < x < x_{i+1},$$

$$\omega_i = 0 \text{ com } x < x_i \text{ ou } x > x_i.$$

Impondo o anulamento do erro médio pesado por esta função, para um conjunto de  $M$  sub domínios (correspondendo à consideração de  $M + 1$  pontos discretos sobre o domínio), obter-se-á o seguinte sistema de equações para a determinação dos parâmetros nodais:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_j a_j N_{ij} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i - \psi_i) dx,$$

$$\sum_j a_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{ij} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i - \psi_i) dx.$$

**c) Método de Galerkin**

O método de Galerkin utiliza as mesmas funções para funções de peso que são utilizadas na equação de aproximação; isto é, usam-se as funções de forma como funções de peso, o que conduz ao seguinte sistema de equações para determinação dos valores dos parâmetros nodais:

$$\int_{\Omega} N_i \left( \phi - \psi + \sum_j a_j N_j \right) dx = 0,$$

$$\sum_j a_j \int_{\Omega} N_i N_j dx = \int_{\Omega} N_i (\phi - \psi) dx.$$

Este método é a base do método dos elementos finitos para problemas nos quais estão envolvidos termos da primeira derivada.

**d) Método dos mínimos quadrados**

Neste método impõe-se que o erro quadrático médio em todo o domínio assuma um valor mínimo. Assim teremos:

$$I = \int_{\Omega} (\phi - \hat{\phi})^2 d\Omega,$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \text{ com } i = 1, 2, \dots, M.$$

Atendendo a que:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = N_i$$

o erro quadrático médio torna-se mínimo quando:

$$\int_{\Omega} N_i (\phi - \hat{\phi}) d\Omega = 0$$

condição que coincide com a imposta por aplicação do método de Galerkin. A função de peso utilizada no método dos mínimos quadrados é, portanto, a própria função de forma.

O método dos mínimos quadrados também é utilizado para formular a solução para elementos finitos; no entanto, não é tão popular como o método de Galerkin e como a abordagem variacional [Bathe, 1996].

#### e) Método dos momentos

O método dos momentos consiste em utilizar como funções de peso a série de potências de  $x$  assim definidas:

$$N_i(x) = x^{i-1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, M.$$

Equivale a impor que num gráfico que mostre o erro da função aproximada em função de  $x$  é nula a área abaixo dessa curva e nulos os seus momentos em relação à origem.

### 4.3 - Aproximação de Funções Derivadas

Quando um dado problema pode ser descrito por uma equação diferencial a sua resolução pelo método dos elementos finitos exigirá que as derivadas da função incógnita, contidas nessa equação, sejam convenientemente representadas pelas derivadas da função aproximada.

Admitindo que se utiliza para representar a aproximação a uma função incógnita uma expressão como a definida pela Eq. 26 a aproximação a uma sua derivada de ordem  $s$  será obtida por:

$$\frac{\partial^s \hat{\phi}}{\partial x^s} = \frac{\partial^s \psi}{\partial x^s} + \sum_j a_j \frac{\partial^s N_j}{\partial x^s}.$$

A necessidade de lidar com expressões como esta impõe que as funções de forma  $N_j$  sejam deriváveis pelo menos até à ordem  $(s-1)$ . Só assim se poderá garantir que uma expressão em que intervêm derivadas de ordem  $s$  das funções de forma toma valor finito (embora possa não ser contínuo) em todo o seu domínio.

Diz-se que uma função de forma possui continuidade  $C^s$ , quando admite derivada contínua até à ordem  $(s-1)$  e derivada de ordem  $s$  finita.

Como se depreende se num problema de elementos finitos apenas intervêm primeiras

derivadas, situação aliás frequente, bastará utilizar funções de forma de continuidade  $C^0$ . Para casos em que aparecem segundas derivadas teremos utilizar funções de forma de continuidade  $C^1$  e assim sucessivamente.

#### 4.4 - Funções de Forma de Definição Local

No método dos elementos finitos o domínio é dividido num certo número de sub domínios mutuamente exclusivos:

$$\Omega = \sum_i \Omega_i \text{ com } \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \text{ para } i \neq j$$

e o cálculo dos integrais que intervêm na formulação do problema, que seriam extensivos a todo o domínio, será feito pela soma de parcelas integrais extensivas aos diversos sub domínios considerados:

$$\int_{\Omega} (...) d\Omega = \sum_i \int_{\Omega_i} (...) d\Omega_i.$$

Actuando deste modo é possível definir funções de forma locais em cada sub domínio (elemento finito) às quais correspondem funções globais que tomam valor não nulo em elementos contíguos anulando-se necessariamente nos restantes.

Este modo de definir as funções de forma tem a vantagem de permitir garantir um tratamento sistemático, sempre semelhante, em domínios globais diferentes permitindo assim a obtenção de matrizes de banda. Porém tem o inconveniente de impedir o uso de funções de forma que se anulem necessariamente sobre a fronteira do domínio pelo que o problema de imposição das condições fronteira, tem de ser tratado de modo diferente do utilizável com as funções de definição global.

Repare-se também que a continuidade no valor da função de forma correspondente a elementos contíguos em geral não garante a continuidade das suas derivadas. Pode haver na fronteira entre dois elementos uma variação brusca do valor desta mesmo quando no interior de cada elemento a função de forma admite derivada contínua.

O grau de continuidade das funções de forma deve ser observado ao nível global do domínio e não apenas em cada elemento. Em princípio, dever-se-ia impor que nunca apareçam no domínio global quaisquer valores infinitos nas expressões que são utilizadas na formulação do problema. Acontece, porém, que muitas vezes esta condição apenas é respeitada no interior de cada elemento havendo sobre a fronteira entre elementos contíguos valores infinitos nas derivadas. Essas fronteiras são excluídas aquando do cálculo dos diversos integrais envolvidos obtendo-se assim frequentemente resultados numéricos aceitáveis apesar destes desrespeitos cometidos sob o ponto de vista teórico [Oliveira, 1990].

As funções de forma definidas ao nível de cada elemento permitem gerar uma função aproximada da solução do problema pela seguinte expressão:

$$\hat{\phi}_{(m)} = \sum_i a_i N_i^{(m)}.$$

Do facto de as funções de forma serem definidas num elemento resulta que a expressão anterior é também válida quando nos referimos à função incógnita em todo o domínio. Isto é, na obtenção dos valores da função incógnita apenas intervêm as funções de forma correspondentes a dado sub domínio já que as funções de forma definidas noutra sub domínio

são nulas fora dele:

$$\hat{\phi}|_{\Omega^{(m)}} = \sum_m \left( \sum_i a_i N_i^{(m)} \right) = \sum_i a_i N_i^{(m)} = \hat{\phi}_{(m)}.$$

## 4.5 - Geração de Funções de Forma

### 4.5.1- Uso de Coordenadas Generalizadas

Podem gerar-se funções de forma a partir do pressuposto de que a incógnita varia de acordo com uma função que contém certo número de coeficientes os quais são considerados como coordenadas generalizadas.

Os polinómios são uma classe de funções particularmente aconselhada para este tipo de formulação. Com efeito, permitem obter boas aproximações às funções incógnitas sendo de esperar que esta aproximação melhore com o aumento do grau do polinómio utilizado. São fáceis de diferenciar e de integrar o que constitui vantagem apreciável.

Outras bases funcionais também são utilizáveis. Funções trigonométricas, por exemplo, são utilizadas sobretudo em algumas aplicações específicas como no método das tiras (“*finite strip method*”) tirando-se então grande partido da ortogonalidade que estas funções possuem.

Para gerar um conjunto de funções de forma utilizando coordenadas generalizadas começamos por escolher a forma desejada para a função incógnita:

$$\hat{\phi} = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + \dots,$$

Eq. 27

$$\hat{\phi} = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad \dots] \{ a_1 \quad a_2 \quad \dots \}^T,$$

$$\hat{\phi} = [P] \{ a \}^T.$$

Impondo agora que nos diversos nós do elemento que estamos a formular a função, Eq. 27, possua valores coincidentes com a função incógnita poder-se-á obter o conjunto de funções de forma com a seguinte representação matricial:

$$\{ \dots \hat{\phi}_i \dots \}^T = \begin{bmatrix} \dots \\ 1 & x_i & y_i & x_i y_i & \dots \\ \dots \end{bmatrix} \{ \dots a_i \dots \}^T,$$

$$\{ \hat{\phi} \}^{(m)} = [C] \{ a \}^{(m)} \Rightarrow \{ a \}^{(m)} = [C]^{-1} \{ \hat{\phi} \}^{(m)},$$

$$\hat{\phi} = [P][C]^{-1} \{ \hat{\phi} \}^{(m)},$$

$$[N] = [P][C]^{-1},$$

Eq. 28

onde  $[N]$  é matriz das funções de forma.

Este algoritmo de geração das funções de forma é muito sugestivo, por parecer muito versátil e adaptável a quaisquer bases funcionais por nós desejadas. Pode, porém, ser difícil ou mesmo impossível de inverter a matriz  $[C]$  contida na Eq. 28 cujos elementos dependem

das coordenadas nodais e da base funcional pretendida. Daí a necessidade de procurar outros modos de geração das funções de forma.

#### 4.5.2 - Formulação Directa das Funções de Forma

A partir de polinómios simples 1D correspondentes a cada um dos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$  é possível obter funções de forma de diversos graus adequados ao problema específico que estivermos a tratar. Tais funções respeitam, em geral, a seguinte condição: têm valor unitário em determinado nó do elemento finito e valor nulo nos restantes. Esta condição não só permite gerar, de modo simples, funções de forma 1D, 2D ou 3D como ainda permite atribuir um significado físico ao parâmetro nodal pelo qual são multiplicadas na expressão de definição da função incógnita. Com efeito:

$$\hat{\phi}_i = \sum_j a_j N_j(x_i) = 0 + \dots + a_i 1 + \dots + 0 \Rightarrow a_i = \hat{\phi}_i$$

ou seja, o parâmetro nodal coincide com o valor nodal da própria função incógnita. Esta condição não é universal. Podem existir parâmetros nodais diferentes.

### 5 - Funções de Forma Complexas

A escolha das funções de forma a utilizar condiciona e depende do grau de aproximação que se pretende obter e do custo da computação que envolvem.

Os elementos finitos mais simples utilizam funções de forma lineares (ou mesmo constantes). A melhoria da solução depende apenas, nestes casos, do número de elementos considerados. A utilização de funções de forma mais complexas permite, em geral, obter soluções mais rigorosas com a mesma malha de elementos finitos.

Interessaria poder fazer a *melhor escolha* para obter certo grau de aproximação com o mais reduzido custo de computação possível. Em geral parece ser mais favorável aumentar a complexidade das funções de forma do que aumentar o número de elementos. Mas a resposta a esta questão não é sempre verificada dependendo do tipo de problema com que estamos a lidar.

#### 5.1 - Erros nas Aproximações Polinomiais

A análise da ordem de grandeza dos erros associados ao uso de determinada malha de elementos finitos e de quaisquer funções de forma é uma tarefa penosa e nem sempre concludente; porém se nos limitarmos ao uso de funções de forma polinomiais esta análise tornar-se-á mais simples.

Consideremos um domínio  $\Omega$ , dividido em elementos  $\Omega^{(m)}$  cada um com dimensão característica  $h$ , e utilizando funções de forma que sejam polinómios completos de grau  $p$ .

Se a solução exacta  $\phi$  de um problema for um polinómio de grau inferior ou igual a  $p$  a solução aproximada  $\hat{\phi}$  deve convergir para a solução exacta quaisquer que sejam as funções de peso escolhidas para a sua obtenção.

A solução  $\phi$  não será, em geral, um polinómio. Mas, desde que não existam singularidades que tornem algumas ou todas as derivadas infinitas, pode sempre desenvolver-se em série de Taylor. Por exemplo:

$$\phi(\Delta x, \Delta y) = \phi|_0 + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Delta x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Delta y^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dots$$

Usando agora uma expressão polinomial de grau  $p$  e desde que esta possa reproduzir exactamente a série de Taylor até ao grau  $p$  então o erro máximo  $E^{(0)}$  no interior de um elemento de dimensão  $h$  será:

$$E^{(0)} = O(h^{p+1})$$

sendo  $h$  o valor máximo de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  para o elemento.

De modo semelhante se verifica que a aproximação à primeira derivada terá erro  $O(h^p)$  e a aproximação à derivada de ordem  $d$  terá erro:

$$E^{(d)} = O(h^{p+1-d}).$$

Eq. 29

Consideremos o problema geral da resolução diferencial:

$$A(\phi) = \mathbf{L}\phi + p = 0 \text{ em } \Omega$$

subordinada às condições de fronteira:

$$B(\phi) = \boldsymbol{\eta}\phi + r = 0 \text{ em } \Gamma$$

utilizando uma função aproximação definida por:

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m$$

Eq. 30

e uma formulação do método dos resíduos pesados:

$$\int_{\Omega} \omega_l [\mathbf{L}\hat{\phi} + p] d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\omega}_l [\boldsymbol{\eta}\hat{\phi} + r] d\Gamma.$$

Observamos que, para que haja convergência, tanto a função  $\phi$  como as derivadas contidas nos operadores  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  deverão ser correctamente representadas quando a dimensão característica  $h$  tender para zero.

Sendo  $d$  a maior ordem das derivadas referidas o grau mínimo exigido para a expansão polinomial, Eq. 30, deverá ser tal que a ordem de grandeza dos erros na representação seja pelo menos  $O(h)$ . Deveremos então ter:

$$p + 1 - d \geq 1$$

ou seja:

$$p - d \geq 0.$$

Vemos agora melhor a utilidade da formulação fraca do método dos resíduos pesados. Ao reduzir a ordem  $d$  dos operadores diferenciais reduz também o valor mínimo do grau  $p$  das funções de forma polinomiais utilizáveis.

## 5.2 - Funções de Forma 1D

### 5.2.1 - Funções Standard com continuidade $C^0$

Vemos na *Figura 2* um conjunto de elementos unidimensionais *standard*. Na *Figura 2a)* temos um elemento típico de dois nós a cada um dos quais associamos uma função de forma linear. A figura mostra a forma destas mesmas funções em elementos adjacentes. O uso de tais funções de forma lineares assegura que a aproximação:

$$\hat{\phi} = \sum_i a_i N_i$$

é uma função linear de  $x$  em cada elemento: Nesta aproximação, cada coeficiente  $a_i$  é simplesmente uma aproximação ao valor de  $\phi$  no nó  $i$ . As funções de forma lineares têm continuidade  $C^0$  (a primeira derivada já é descontínua na ligação entre dois elementos contíguos) pelo que a função  $\hat{\phi}$  também terá esse grau de continuidade.

Pode gerar-se um conjunto de funções de forma de ordem superior utilizando mais nós no interior do elemento: considerando uma função polinomial de grau mais conveniente e impondo que tome valor unitário em determinado nó e anulando-se nos restantes. Assim, por exemplo, com três nós podem gerar-se funções de forma quadráticas, *Figura 2b)*; com quatro nós podem gerar-se funções de forma cúbicas, *Figura 2c)*; etc.

Repare-se que as funções de forma associadas aos nós interiores do elemento não vão propagar-se aos elementos vizinhos pelo que a posição dos nós interiores é, em princípio, indiferente.

A expressão genérica de uma função de forma gerada deste modo poderá ser:

$$N_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p$$

Eq. 31

sendo os coeficientes  $a_0, \dots, a_p$  determinados pelas condições:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^p \\ \dots & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^p \\ \dots & & & & \\ 1 & x_{p+1} & x_{p+1}^2 & \dots & x_{p+1}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Na *Eq. 31* aparece um polinómio completo de grau  $p$  para um elemento com  $(p+1)$  nós. Não é imperioso, embora seja desejável, que se utilizem todos os termos do polinómio podendo, para algumas aplicações específicas, eliminar algumas das componentes.

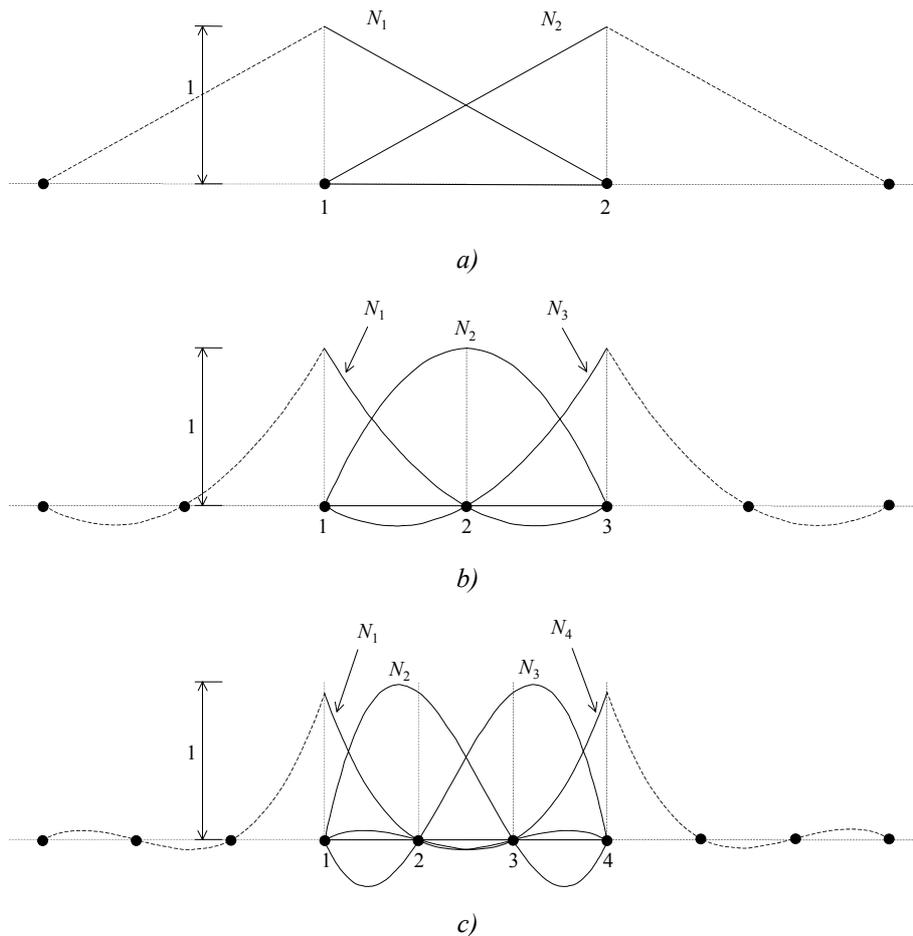


Figura 2 - Elementos 1D e consequentes funções de forma: a) linear; b) quadrático; c) cúbico.

### 5.2.2 - Funções Hierárquicas com Continuidade $C^0$

A definição de função de forma sugerida no ponto anterior teve como consequência a possibilidade de identificar os coeficientes  $a_i$  da expressão de definição da função aproximada  $\hat{\phi}$ , com os valores  $\phi_i$  da própria função  $\hat{\phi}$ , nos diversos nós. Permitiu assim atribuir certo sentido físico a estes coeficientes o que pode ser considerado uma vantagem. No entanto, existe uma desvantagem: As funções de forma correspondentes a polinômios de grau crescente são completamente diferentes entre si, pelo que, decidindo em determinada fase de resolução de um problema aumentar o grau de aproximação é necessário recalcular todo o sistema de equações.

Poder-se-á optar por definir as funções de forma de modo a que aumentando o grau de aproximação as já utilizadas anteriormente permaneçam inalteradas, o que representa uma otimização em termos computacionais. Assim, fazendo:

$$\hat{\phi} = \psi + \sum_{i=1}^n a_i N_i$$

seria, por exemplo em problemas de análise estática, possível a seguinte sequência de cálculo:

$$M=1 \rightarrow k_{11} a_1 = f_1,$$

$$M=2 \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix},$$

$$M=3 \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}.$$

Com estas funções desaparece o sentido físico dos coeficientes  $a_i$ , os quais apenas permitem obter parcelas correctivas de ordem superior de modo a melhorar a solução. Este tipo de funções de forma é conhecido pela designação de funções hierárquicas.

Deve-se tentar fazer com que o acoplamento entre as diversas equações seja o menor possível e, com tal procedimento, reduzir a influência dos erros de arredondamento crescentes que aparecem no cálculo dos novos coeficientes  $a_i$ . As imprecisões que existem no cálculo dos coeficientes pouco afectarão a qualidade da solução final [Oliveira, 1990].

### 5.2.2.1 - Polinómios Hierárquicos

Consideremos o seguinte conjunto de funções de forma para um elemento finito genérico  $m$ , *Figura 3*. Com as funções de forma  $N_1$  e  $N_2$  obtém-se uma aproximação linear, *Figura 3a2*). Com a função de forma hierárquica quadrática, *Figura 3b1*), obtemos uma melhor aproximação, *Figura 3b2*). Uma terceira função permitirá nova melhoria, *Figura 3c1*) e *Figura 3c2*), etc.

A função hierárquica quadrada  $N_3$  pode gerar-se partindo da expressão genérica do polinómio do segundo grau:

$$N_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2$$

sendo os coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  escolhidos de modo a que a função de forma tome valor nulo nos nós extremos ( $\xi = \pm 1$ ). Deste modo garante-se continuidade  $C^0$  para a função  $\hat{\phi}$ .

A condição  $N_3 = 0$  para  $\xi = \pm 1$  não é suficiente para definir a função. Da infinidade de soluções possíveis, podemos escolher uma parábola simétrica, *Figura 3b1*); por exemplo, com valor unitário para  $\xi = 0$ . Com esta opção, pode conseguir-se uma aproximação quadrática num elemento genérico  $m$  fazendo:

$$\hat{\phi}^{(m)} = \hat{\phi}_1 N_1 + \hat{\phi}_2 N_2 + \alpha_3 N_3, \quad N_1 = -\frac{\xi-1}{2}, \quad N_2 = +\frac{\xi+1}{2}, \quad N_3 = -(\xi-1)(\xi+1).$$

Conforme verifica-se na *Figura 3b2*) o coeficiente  $\alpha_3$  é, neste caso, igual à diferença entre o valor de  $\phi$  e uma aproximação linear a essa função no ponto médio do elemento.

De modo semelhante se poderá definir uma função hierárquica do terceiro grau como:

$$N_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3$$

e impondo que  $N_4 = 0$  para  $\xi = \pm 1$ . Temos de novo uma infinidade de funções possíveis e podemos escolher, conforme a *Figura 3c1*), uma função que tome também no ponto médio ( $\xi = 0$ ) o valor nulo e que nesse ponto tenha derivada unitária:

$$N_4(-1) = N_4(0) = N_4(+1) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 1.$$

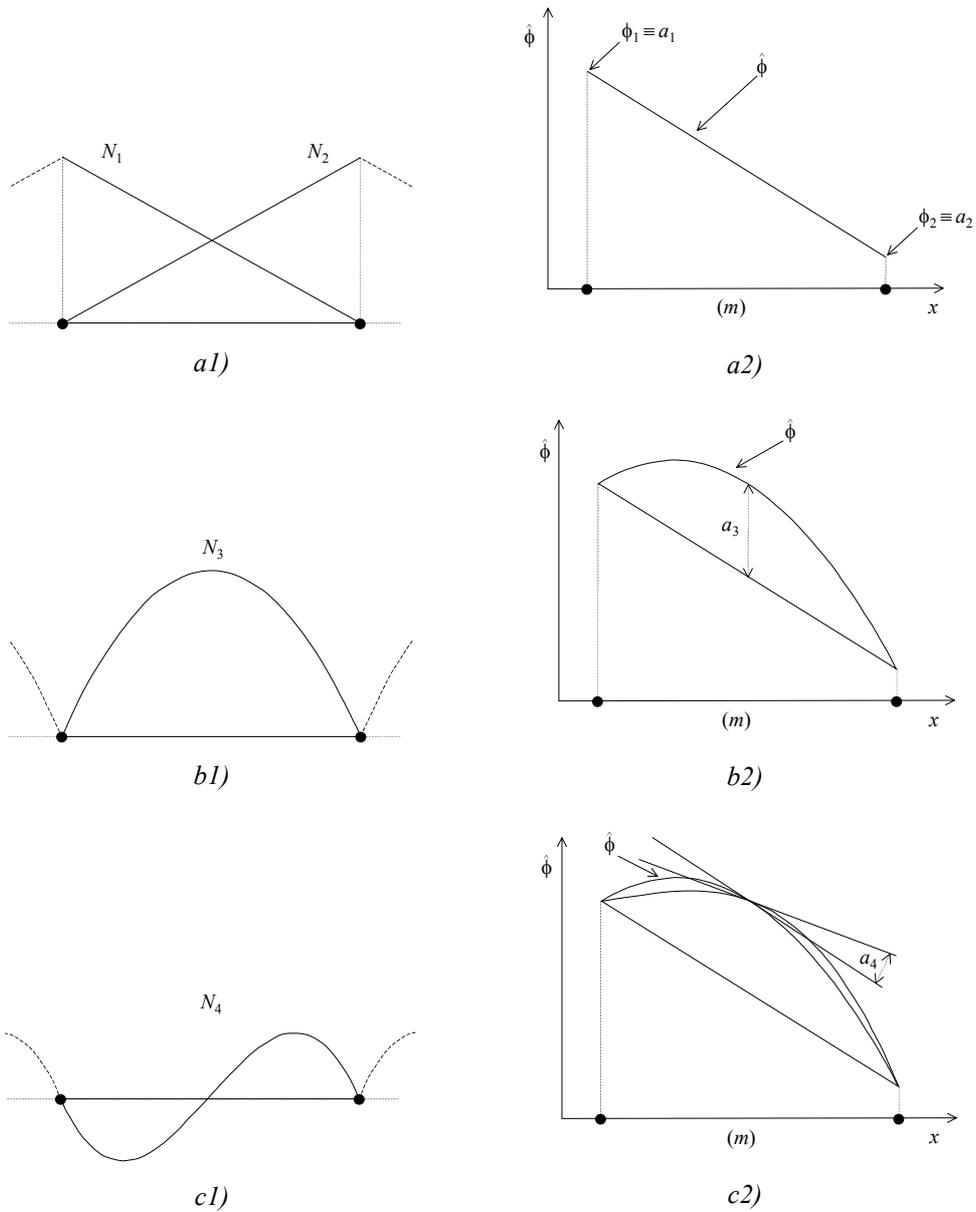


Figura 3 - Elementos 1D e funções de forma hierárquicas: a) linear; b) quadrática; c) cúbica.

A função:

$$N_4 = \xi(1 - \xi^2)$$

satisfaz estes requisitos. Neste caso o parâmetro  $\alpha_4$  representa a variação da inclinação da tangente a  $\hat{\phi}$  no ponto médio relativamente à inclinação da tangente na solução linear, *Figura 3c2*). De modo idêntico chegaríamos a:

$$N_5 = \xi^2(1 - \xi^2).$$

As funções hierárquicas que acabam de ser representadas não são únicas. Uma outra forma possível será dada pelas expressões genéricas:

$$N_{p+1}(\xi) = \frac{1}{p!}(\xi^p - 1) \text{ para } p \text{ par,}$$

Eq. 32

$$N_{p+1}(\xi) = \frac{1}{p!}(\xi^p - \xi) \text{ para } p \text{ ímpar.}$$

Eq. 33

Utilizando estas expressões genéricas resultaria o seguinte conjunto de funções hierárquicas:

$$N_3 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1),$$

Eq. 34

$$N_4 = \frac{1}{6}(\xi^3 - \xi),$$

Eq. 35

$$N_5 = \frac{1}{24}(\xi^4 - 1),$$

Eq. 36

$$N_6 = \frac{1}{120}(\xi^5 - \xi).$$

Eq. 37

Note-se que todas as derivadas de ordem igual ou superior à segunda têm valor nulo no ponto  $\xi=0$  excepto  $\partial^p(N_{p+1})/(\partial\xi)^p$  que tem valor unitário. Neste caso poderemos identificar os diversos coeficientes com a seguinte expressão:

$$\alpha_{p+1} = \left. \frac{\partial^p \hat{\phi}}{\partial \xi^p} \right|_{\xi=0} \text{ para } p \geq 2.$$

### 5.2.2.2 - Polinómios Hierárquicos de Forma Quase Ortogonal

Conforme já citado o ideal seria usar polinómios ortogonais os quais originariam o aparecimento de sistemas de equações desacopladas. Esta condição, difícil de obter, pode contudo ser aproximada.

Em muitos problemas verifica-se o aparecimento de matrizes  $[K^{(m)}]$  cujos elementos tomam a forma:

$$K_{lm}^{(m)} = \int_{\Omega^{(m)}} K \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} dx = \frac{2}{h^{(m)}} \int_{-1}^{+1} K \frac{\partial N_l}{\partial \xi} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} d\xi.$$

O ideal seria conseguir encontrar funções de forma tais que  $K_{lm}^{(m)}$  para  $l \neq p$ . Os polinómios de Legendre possuem esta propriedade no intervalo  $[-1, 1]$ . Então poder-se-iam definir as funções de forma hierárquicas em termos desses polinómios. Definissemos o polinómio de Legendre de grau  $p$  de acordo com a seguinte expressão:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} [(\xi^2 - 1)^p].$$

Utilizando a expressão anterior podemos obter as seguintes funções de forma:

$$N_3 = \xi^2 - 1,$$

Eq. 38

$$N_4 = 2(\xi^3 - \xi),$$

Eq. 39

$$N_5 = \frac{1}{4}(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3),$$

Eq. 40

$$N_6 = 7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi,$$

Eq. 41

...

### 5.3 - Funções de Forma 2D para Elementos Rectangulares

#### 5.3.1 - Elemento Rectangular Linear

Para o elemento de quatro nós da *Figura 4* utilizemos uma função de aproximação quadrática para o campo dos deslocamentos. Considerando por exemplo a componente  $u$  do deslocamento do ponto genérico  $P(\bar{x}, \bar{y})$  podemos escrever:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = c_1 + c_2 \bar{x} + c_3 \bar{y} + c_4 \bar{x} \bar{y},$$

Eq. 42

$$u_1 = u(0,0) = c_1, \quad u_2 = u(a,0) = c_1 + c_2 a, \quad u_3 = u(a,b) = c_1 + c_2 a + c_3 b + c_4 ab,$$

$$u_4 = u(0,b) = c_1 + c_3 b.$$

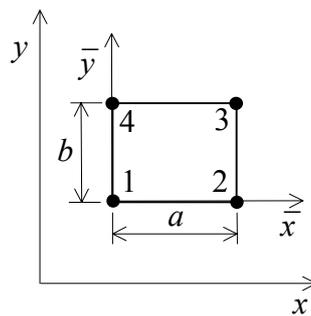


Figura 4 - Elemento rectangular de 4 nós.

Resolvendo em ordem a  $c_i$  obtemos:

$$c_1 = u_1, \quad c_2 = \frac{u_2 - u_1}{a}, \quad c_3 = \frac{u_4 - u_1}{b}, \quad c_4 = \frac{u_3 - u_4 + u_1 - u_2}{ab}.$$

Substituído  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  na equação Eq. 42 obtemos:

$$\begin{aligned}
u(\bar{x}, \bar{y}) &= u_1 + \frac{u_2 - u_1}{a} \bar{x} + \frac{u_4 - u_1}{b} \bar{y} + \frac{u_3 - u_4 + u_1 - u_2}{ab} \bar{x} \bar{y} \\
&= \left(1 - \frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{y}}{b} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{ab}\right) u_1 + \left(\frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{x}\bar{y}}{ab}\right) u_2 + \frac{\bar{x}\bar{y}}{ab} u_3 + \left(\frac{\bar{y}}{b} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{ab}\right) u_4
\end{aligned}$$

ou

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

em que depois de reordenadas, o valor das funções de forma  $N_i$  é dado por:

$$N_1 = \frac{1}{ab}(a - \bar{x})(b - \bar{y}), \quad N_2 = \frac{1}{ab}\bar{x}(b - \bar{y}), \quad N_3 = \frac{1}{ab}\bar{x}\bar{y}, \quad N_4 = \frac{1}{ab}(a - \bar{x})\bar{y}.$$

As expressões de forma podem ser obtidas considerando os zeros das sucessivas funções de forma. Assim  $N_1$  será nula para  $\bar{x} = a$  e  $\bar{y} = b$  deste modo terá então de ser da forma:

$$N_1(\bar{x}, \bar{y}) = c_1(a - \bar{x})(b - \bar{y}).$$

Usando a condição  $N_1(0,0) = 1$  obtemos  $c_1 = 1/(ab)$  e portanto:

$$N_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{ab}(a - \bar{x})(b - \bar{y})$$

De igual modo obtínhamos as expressões anteriormente deduzidas.

Deve-se notar que este elemento formulado em coordenadas cartesianas viola algumas das condições de convergência. Não deve assim ser utilizado em problemas de análise de estruturas [Gomes, 1995].

### 5.3.2 - Família de Lagrange

Numa malha rectangular num domínio  $(x, y)$  é possível obter funções de forma com o grau desejado multiplicando funções de forma unidimensionais referentes a cada uma das direcções  $x$  e  $y$ . A expressão geral de tais funções de forma será:

$$N_{rs} = \Lambda_r^p(x) \Lambda_s^q(y)$$

Eq. 43

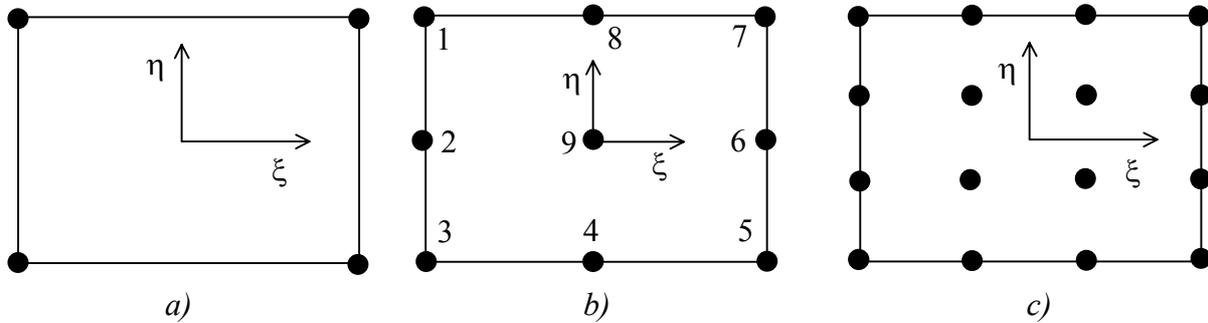
em que os índices  $r$  e  $s$  referem o número do nó ao longo de cada direcção e  $\Lambda_r^p$  e  $\Lambda_s^q$  são polinómios interpoladores de Lagrange, Eq. 44, de grau  $p$  e  $q$  respectivamente. Estas funções de forma, muito fáceis de gerar, constituem a conhecida família de Lagrange. Respeitam a condição de tomarem o valor unitário no nó a que se referem e valor nulo nos restantes. Como estes polinómios ficam definidos de modo único há continuidade nos valores das funções entre elementos adjacentes, continuidade  $C^0$ , assim como haverá igualmente continuidade  $C^0$  na função global  $\hat{\phi}$ .

Nesta família de funções de Lagrange aparecem necessariamente alguns nós no interior dos elementos, os necessários, para definir completamente os polinómios. Como as funções de forma não associadas a nós na periferia dos elementos se anulam nessa mesma periferia as funções de forma correspondentes a nós intermediários não se transmitem a elementos vizinhos. Podem então ser eliminados ao nível de cada elemento antes do agrupamento dos

diversos elementos da estrutura. Tudo se passará, a partir de então, como se cada elemento apenas possuísse nós na periferia.

Na *Figura 5* estão representados os elementos: linear, quadrático e cúbico desta família e como é possível observar um elemento rectangular de ordem  $p$  possui  $n$  nós com:

$$n = (p + 1)^2, p = 0, 1, \dots$$



*Figura 5 - Elementos: a) linear, b) quadrático e c) cúbico da família de Lagrange.*

Vejamos como obter a expressão da função para o nó 1 do elemento quadrático. Note-se que esta função de forma deverá tomar o valor um no nó 1 e o valor zero em todos os restantes. Para a dedução desta função comecemos por considerar o seguinte polinómio de segundo grau em  $\xi$ :

$$L_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1).$$

Na *Figura 6* está representado este polinómio. Note-se que ele assume o valor um nos nós 1, 2 e 3 e o valor zeros nos restantes.

Consideremos agora o seguinte polinómio do segundo grau em  $\eta$ :

$$L_2 = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1).$$

Este polinómio, representado na *Figura 7*, assume o valor um nos nós 1, 7 e 8 e o valor zero nos restantes.

É evidente que o produto dos polinómios  $L_1$  e  $L_2$  nos dá a função de forma  $N_1$  com as características atrás indicadas:

$$N_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1).$$

Na *Figura 8* está representada esta função de forma de Lagrange.

A dedução das funções de forma  $N_2$  a  $N_9$  é realizada de maneira análoga obtendo-se:

$$N_2 = -\frac{\eta}{2}(\eta - 1)(\xi^2 - 1), N_3 = \frac{\xi\eta}{4}(\xi + 1)(\eta - 1), N_4 = -\frac{\xi}{2}(\xi + 1)(\eta^2 - 1),$$

$$N_5 = \frac{\xi\eta}{4}(\xi + 1)(\eta + 1), N_6 = -\frac{\eta}{2}(\eta + 1)(\xi^2 - 1), N_7 = \frac{\xi\eta}{4}(\xi - 1)(\eta + 1),$$

$$N_8 = -\frac{\xi}{2}(\xi - 1)(\eta^2 - 1), N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1).$$

Este processo pode também ser utilizado para a dedução das funções de forma para os outros elementos desta família.

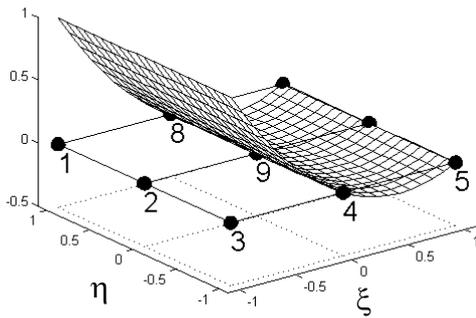


Figura 6 - Representação do polinómio

$$L_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1).$$

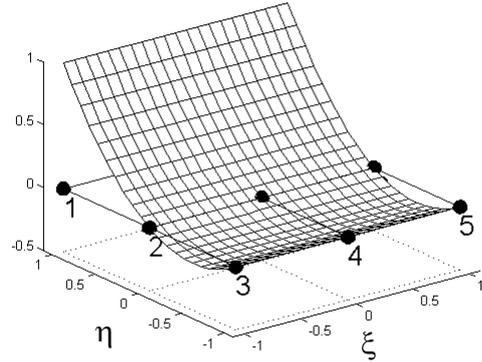


Figura 7 - Representação do polinómio

$$L_2 = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1).$$

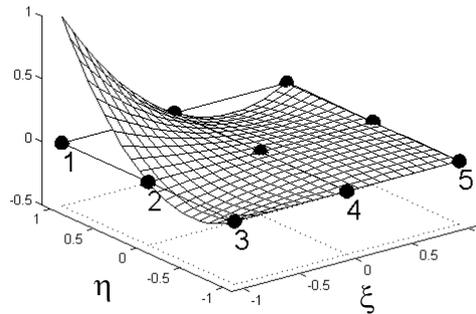


Figura 8 - Representação da função de forma  $N_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1)$ .

A fórmula geral para os polinómios interpoladores de Lagrange, de ordem  $p$ , a uma variável  $\xi$  é a seguinte:

$$N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{p+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{p+1})}$$

Eq. 44

As funções  $N_i(\xi)$  assim definidas anulam-se para  $\xi = \xi_j$  ( $i \neq j$ ) e assim o valor um no ponto  $\xi = \xi_i$ .

Deve-se notar que no caso das aplicações da mecânica dos sólidos é garantida a continuidade material quando a discretização é efectuada utilizando-se elementos de Lagrange [Gomes, 1995; Oliveira, 1990].

### 5.3.3 - Família de Serendipity

Examinemos os termos que ocorrem numa função de forma 2D de Lagrange do tipo da Eq. 43. Esta função resulta do produto de dois polinómios completos de grau  $p$  e  $q$ . O número de termos deste produto é obviamente superior ao número de termos de cada um destes polinómios.

Na Figura 9a) temos uma representação (triângulo de Pascal) dos termos de um polinómio completo. Por exemplo a tracejado estão os termos correspondentes ao terceiro grau. Na

Figura 9b) a tracejado temos os termos que estão presentes numa função de forma de Lagrange cúbica. Aparecem seis termos “a mais” relativamente ao número de termos necessários para cada polinómio do terceiro grau. Esta situação sugere que o número de nós associado a elementos de ordem elevada poderia ser reduzido tentando assegurar que as funções de forma possuam apenas os termos que estariam presentes num polinómio completo de igual grau.

Para tal objectivo ser conseguido desenvolveu-se uma série de funções de forma deste tipo que é conhecida pela família Serendipity. Os nós estão colocados, tanto quanto possível, nas fronteiras e as funções de forma obtêm-se pelo produto de termos de grau  $p$  numa variável por termos lineares na outra. Nas fronteiras dos elementos, a forma da função aproximada  $\hat{\phi}$  é idêntica à dos da família de Lagrange e mantêm-se a continuidade  $C^0$ . Definem-se, conforme a Figura 10, as coordenadas locais normalizadas:

$$\xi = \frac{2(x - x_c^{(m)})}{h_x^{(m)}} \text{ e } \eta = \frac{2(y - y_c^{(m)})}{h_y^{(m)}},$$

sendo  $x_c^{(m)}$  e  $y_c^{(m)}$  as coordenadas globais do centro do elemento.

A Figura 11 ilustra o modo de obtenção de funções de forma de Serendipity. As funções correspondentes ao meio dos lados obtêm-se directamente multiplicando o polinómio de segunda ordem correspondente a uma direcção por uma função linear correspondente à outra. Para os nós dos vértices este procedimento não é adequado visto original funções que teriam valor diferente de zero nos nós restantes de um mesmo lado. Nestes casos o que se faz é combinar a função bilinear com uma função quadrática, consoante a Figura 11.

Para uma representação mais fácil das funções de forma da série Serendipity é normalmente feita uma mudança para as variáveis  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\eta}$  da seguinte forma:

$$\bar{\xi}_l = \xi \xi_l \text{ e } \bar{\eta}_l = \eta \eta_l,$$

sendo  $\xi_l$  e  $\eta_l$  as coordenadas  $(\xi, \eta)$  do nó  $l$ . Com estas novas variáveis as funções de forma tomarão o seguinte aspecto:

- Elementos Lineares:

$$N_l = \frac{1}{4}(1 + \bar{\xi}_l)(1 + \bar{\eta}_l) \text{ com } l=0, 1, 2, 3;$$

- Elementos Quadráticos:

$$N_l = \frac{1}{4}(1 + \bar{\xi}_l)(1 + \bar{\eta}_l)(\bar{\xi}_l + \bar{\eta}_l - 1) \text{ com } l=0, 2, 4, 6,$$

$$N_l = \frac{1}{2}(1 - \bar{\xi}^2)(1 + \bar{\eta}_l) \text{ com } l=1, 5,$$

$$N_l = \frac{1}{2}(1 + \bar{\xi}_l)(1 - \bar{\eta}^2) \text{ com } l=3, 7;$$

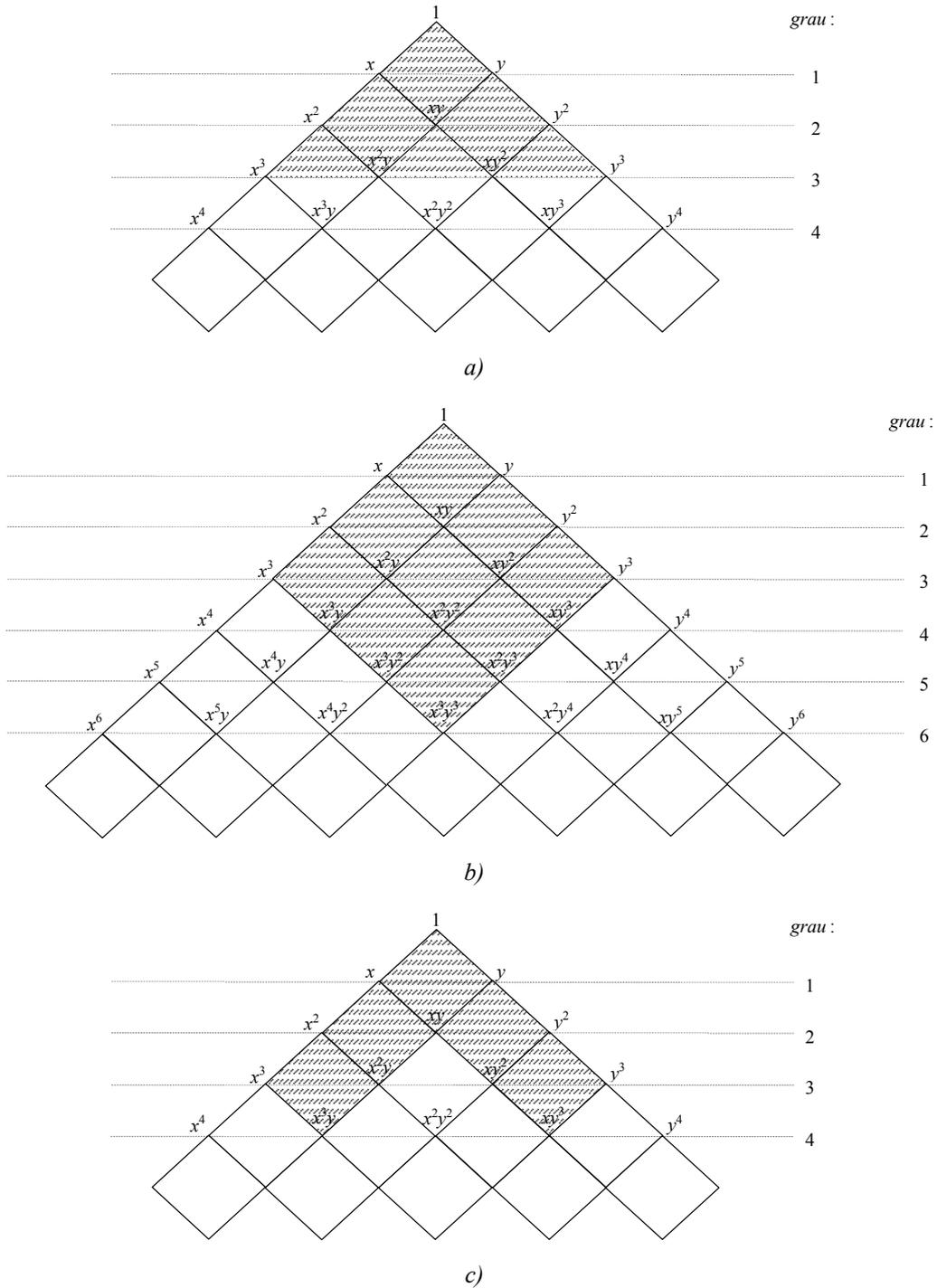


Figura 9 - Triângulo de Pascal. A área a tracejado engloba os termos presentes numa forma de terceiro grau: a) de um polinómio completo; b) de uma função de forma 2D de Lagrange; c) de uma função de forma 2D Serendipity.

- Elementos Cúbicos

$$N_l = \frac{1}{32} (1 + \bar{\xi}_l)(1 + \bar{\eta}_l)(-10 + 9(\bar{\xi}_l^2 + \bar{\eta}_l^2)) \text{ com } l=0, 3, 6, 9,$$

$$N_l = \frac{9}{32} (1 + \bar{\xi}_l)(1 - \bar{\eta}_l)(1 + 9\bar{\eta}_l) \text{ com } l=4, 5, 10, 11.$$

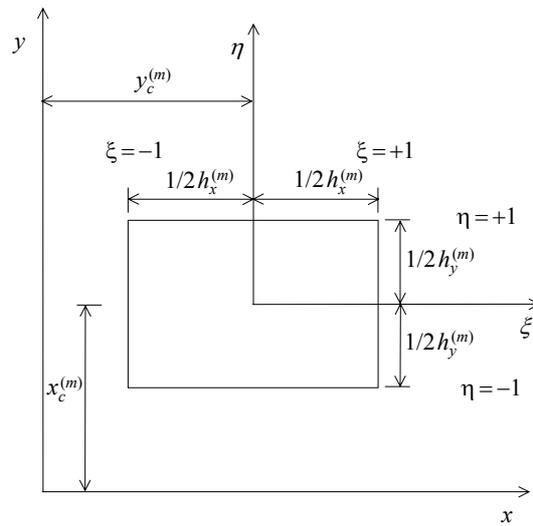


Figura 10 - Coordenadas normalizadas ( $\xi, \eta$ ) para um rectângulo no plano  $(x, y)$ .

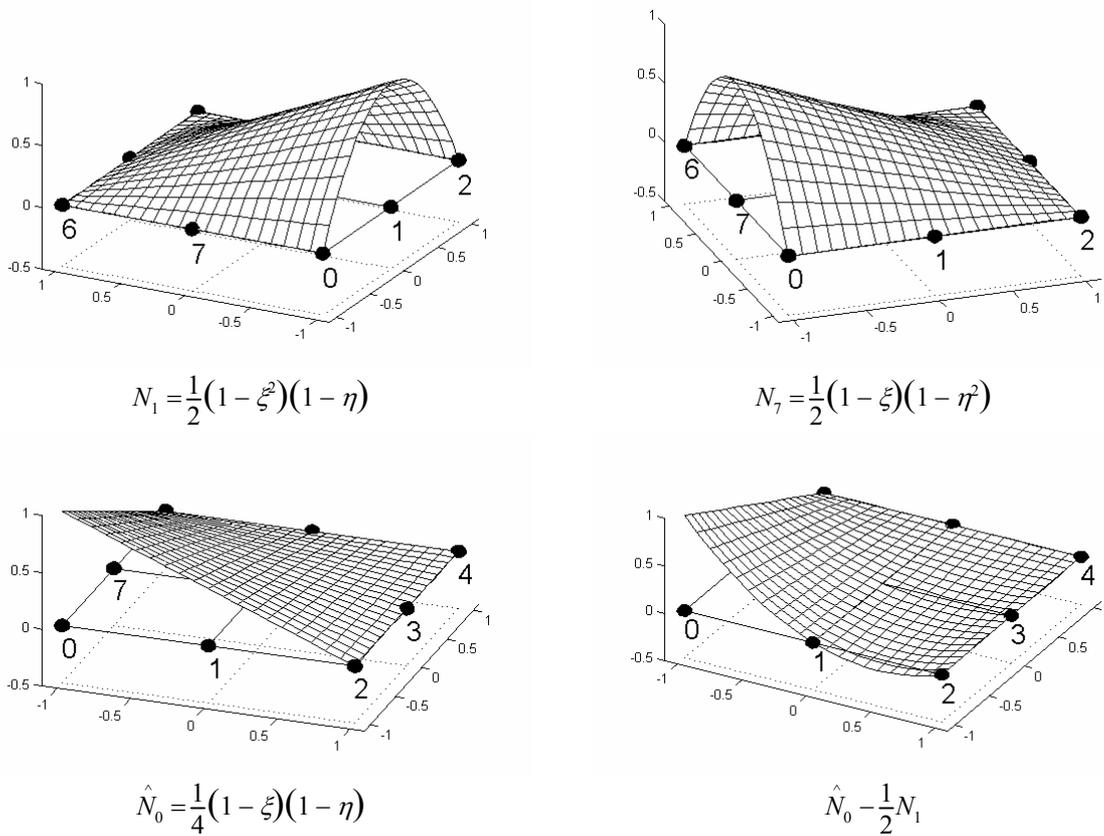
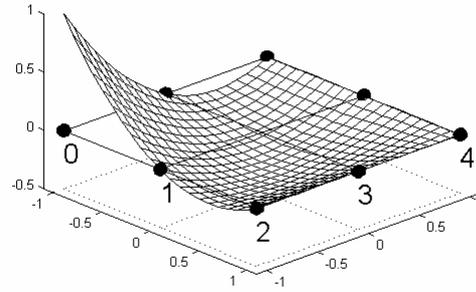


Figura 11 - Modo de geração de funções de forma de Serendipity. (continua)



$$N_1 = \hat{N}_0 - \frac{1}{2}N_1 - \frac{1}{2}N_7$$

Figura 11 - Modo de geração de funções de forma de Serendipity.

Na Figura 12 estão representados os elementos 2D da família de Serendipity para  $p \leq 3$ .

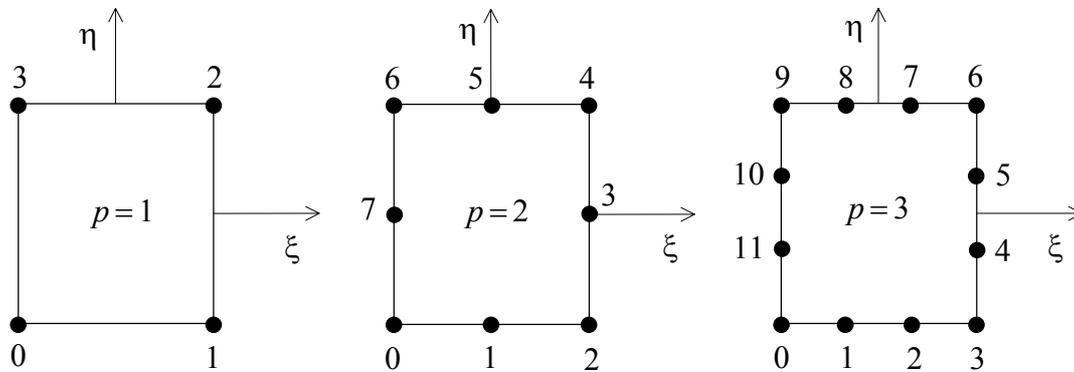


Figura 12 - Elementos 2D da Família de Serendipity (para  $p \geq 4$  são necessários nós interiores).

Note-se que o número de termos polinomiais que podem obter-se com nós na periferia é insuficiente para obter uma representação polinomial completa para um grau superior ou igual a quatro.

Para elementos de ordem mais elevada é portanto necessário introduzir nós internos ou simplesmente um grau de liberdade hierárquico do tipo que a seguir será descrito.

Em problemas de análise de estruturas esta família é mais utilizada do que a família de Lagrange e distingue-se desta, como se verificou, pelo facto de não existirem nós no interior do elemento. A não consideração destes nós deve-se ao facto de não contribuírem para a conectividade com os elementos vizinhos e a sua eliminação, e dos respectivos graus de liberdade, tem além do mais a vantagem da diminuição da matrizes envolvidas no método [Bathe, 1996; Gomes, 1995; Oliveira, 1990].

### 5.3.4 - Funções de Forma Hierárquicas

A geração de funções de forma hierárquicas para domínios bidimensionais pode efectuar-se por simples produto de funções hierárquicas unidimensionais. De facto o produto de duas funções lineares permite obter<sup>5</sup> uma função bilinear que constituirá a função de forma hierárquica do mais baixo grau. Produtos de funções hierárquicas de grau mais elevado

<sup>5</sup> Este produto apenas permite obter aproximações lineares.

tomarão sempre valor nulo sobre a periferia dos elementos. Estas funções hierárquicas de grau superior ao das bilineares andam associadas a variáveis nodais que não têm o mesmo significado físico que tinham para as funções *standard*. Permitirão ir adicionando parcelas correctivas que aumentarão o grau de precisão da função aproximada  $\hat{\phi}$  no interior do elemento.

Como exemplo da obtenção de um conjunto de funções hierárquicas poderemos multiplicar os polinómios de Legendre, Eq. 34, Eq. 35, Eq. 36, Eq. 37, pela função linear,  $N_1 = -\frac{1}{2}(\xi - 1)$  e  $N_2 = +\frac{1}{2}(\xi + 1)$ , do que resultará:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\xi - 1), N_{2(2-3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta + 1)(\xi^2 - 1), N_{3(2-3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta + 1)(\xi^3 - \xi).$$

Estas funções, representadas graficamente na Figura 13, correspondem a um nó de vértice e uma formulação hierárquica ao longo do eixo  $\xi$  (paralelo ao lado 2-3) mantendo-se numa variação linear ao longo do eixo  $\eta$ .

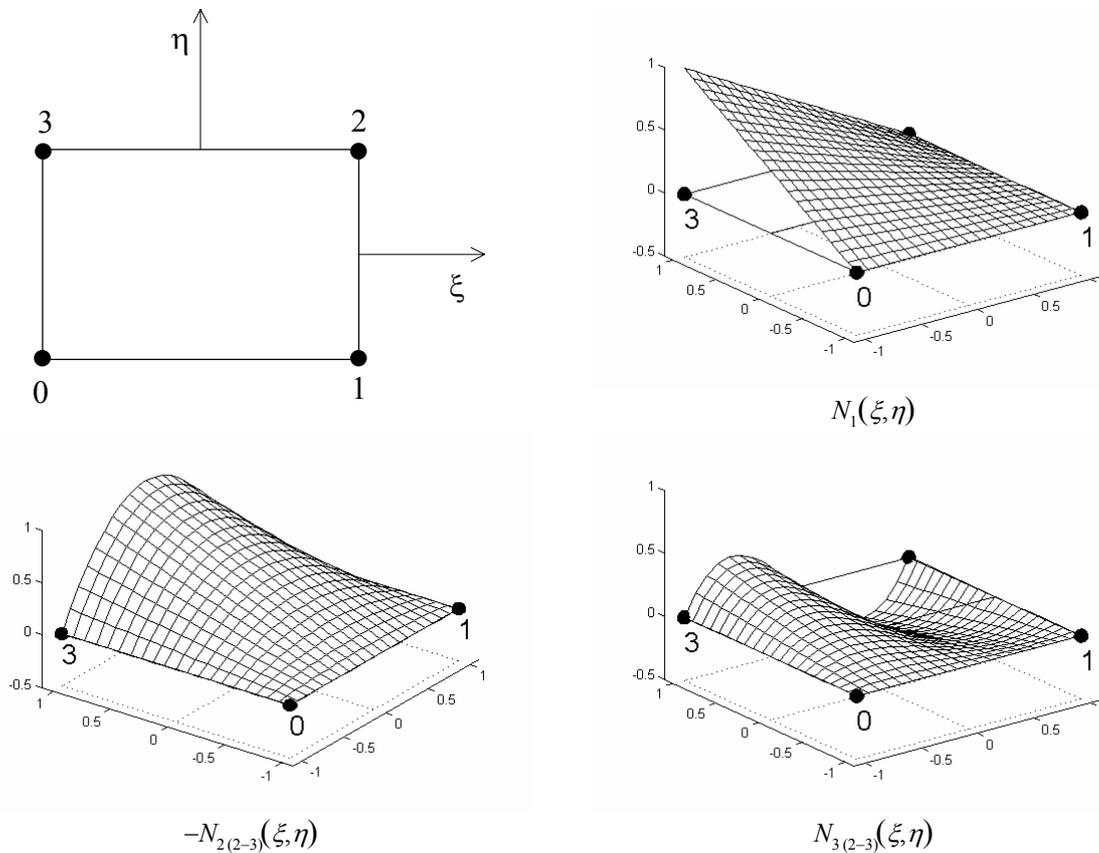


Figura 13 - Funções de forma hierárquicas para elementos rectangulares.

Para poder ter funções  $\hat{\phi}^{(m)}$  que sejam polinómios completos até um grau  $\geq 4$  será necessário adicionar o produto de funções de forma que estejam associadas a parâmetros com valor nulo entre os elementos. Por exemplo:

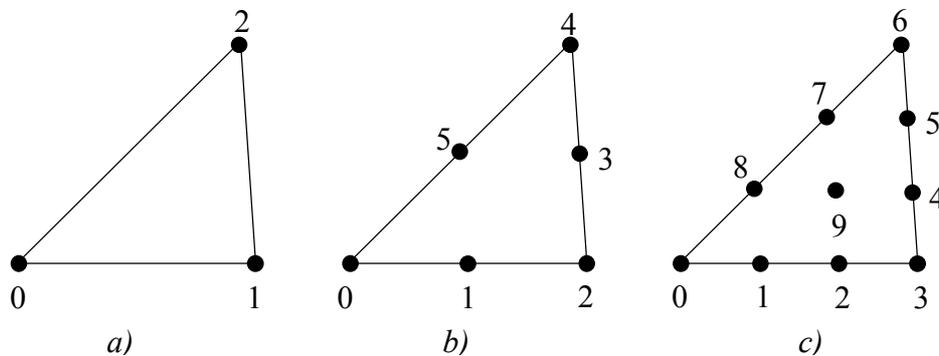
$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + 1)$$

é a função de forma possível para adicionar termos  $\xi^2 \eta^2$  à função aproximada  $\hat{\phi}^{(m)}$ .

## 5.4 - Funções de Forma 2D para Elementos Triangulares

### 5.4.1 - Coordenadas de Área

Consideremos a família de triângulos da *Figura 14*. Como os nós estão colocados de modo semelhante às intersecções de linhas no triângulo de Pascal, *Figura 9a*), resulta que esta família de triângulos permite sempre obter o número suficiente de nós para gerar uma família de polinómios completos. Esta característica associada à maior facilidade de geração de domínios complexos com formas triangulares do que com formas rectangulares justifica a popularidade deste tipo de elementos. Note-se que elementos triangulares podem ser obtidos pela adequada distorção de elementos quadrangulares permitindo assim utilizar-se as funções de forma destes após uma correcta manipulação das mesmas de forma a reflectirem a distorção existente.



*Figura 14 - Família de elementos triangulares: a) linear; b) quadrático; c) cúbico.*

É útil um sistema de coordenadas particularmente adaptado aos triângulos: as coordenadas de área ( $L_0, L_1, L_2$ ), *Apêndice A.7*. Tais coordenadas podem definir-se pelas expressões:

$$x = L_0x_0 + L_1x_1 + L_2x_2, \quad y = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2, \quad 1 = L_0 + L_1 + L_2,$$

*Eqs. 45*

em que  $L_0, L_1$  e  $L_2$  são as coordenadas de área e  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas cartesianas globais dos nós dos vértices.

Verifica-se que  $L_0$  deve ser uma função que assume o valor unitário no vértice 0 e nulo nos vértices 1 e 2. O valor de  $L_0$  num ponto  $P$  pode definir-se pelo cociente de duas áreas triangulares, *Figura 15*:

$$L_0|_P = \frac{\text{área}(P,1,2)}{\text{área}(0,1,2)}$$

o que justifica a designação de coordenadas de área que lhes foi atribuída.

A equação  $1 = L_0 + L_1 + L_2$  relaciona as três variáveis pois estas não são independentes entre si: a localização de um ponto pode ser especificada utilizando-se apenas duas destas coordenadas.

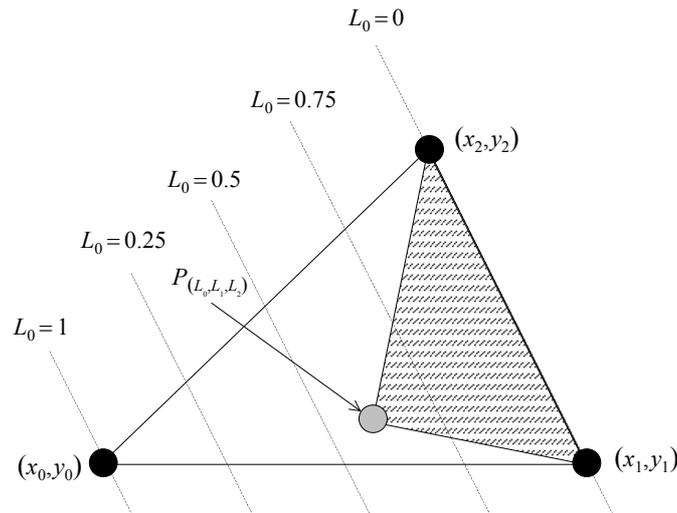


Figura 15 - Coordenadas de área para um elemento triangular.

A partir das relações dadas pelas Eqs. 45 obtêm-se, a partir das coordenadas cartesianas globais, as seguintes expressões para as coordenadas da área:

$$L_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 y}{2\Delta}, L_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y}{2\Delta}, L_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y}{2\Delta},$$

Eqs. 46

onde:

$$\alpha_0 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \beta_0 = y_1 - y_2, \gamma_0 = x_2 - x_1, \alpha_1 = x_2 y_0 - x_0 y_2, \beta_1 = y_2 - y_0, \gamma_1 = x_0 - x_2,$$

$$\alpha_2 = x_0 y_1 - x_1 y_0, \beta_2 = y_0 - y_1, \gamma_2 = x_1 - x_0, \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{área}(0,1,2).$$

### 5.4.2 - Funções de Forma Standard

Definidas as coordenadas de área facilmente se verifica que as funções de forma lineares são próprias funções que definem essas coordenadas;

$$N_0 = L_0, N_1 = L_1, N_2 = L_2.$$

Com efeito estas funções são lineares e respeitam a condição habitual de assumirem o valor unitário no nó a que se referem e o valor nulo nos restantes nós.

Para gerar funções de forma quadráticas vamos efectuar o produto de polinómios do segundo grau referentes a cada uma das coordenadas de área. Vejamos na Figura 16 a forma que estes polinómios apresentam, referentes a cada coordenada, por exemplo  $L_0$ .

Para obter cada função de forma multiplicar-se-ão polinómios referentes ao mesmo nó e a cada uma das três variáveis  $L_0$ ,  $L_1$  e  $L_2$ . Assim, resultarão as seguintes expressões:

$$N_0 = (2L_0^2 - L_0)(2L_1^2 - 3L_1 + 1)(2L_2^2 - 3L_2 + 1),$$

$$N_1 = (2L_1^2 - L_1)(2L_2^2 - 3L_2 + 1)(2L_0^2 - 3L_0 + 1),$$

$$N_2 = (2L_2^2 - L_2)(2L_0^2 - 3L_0 + 1)(2L_1^2 - 3L_1 + 1),$$

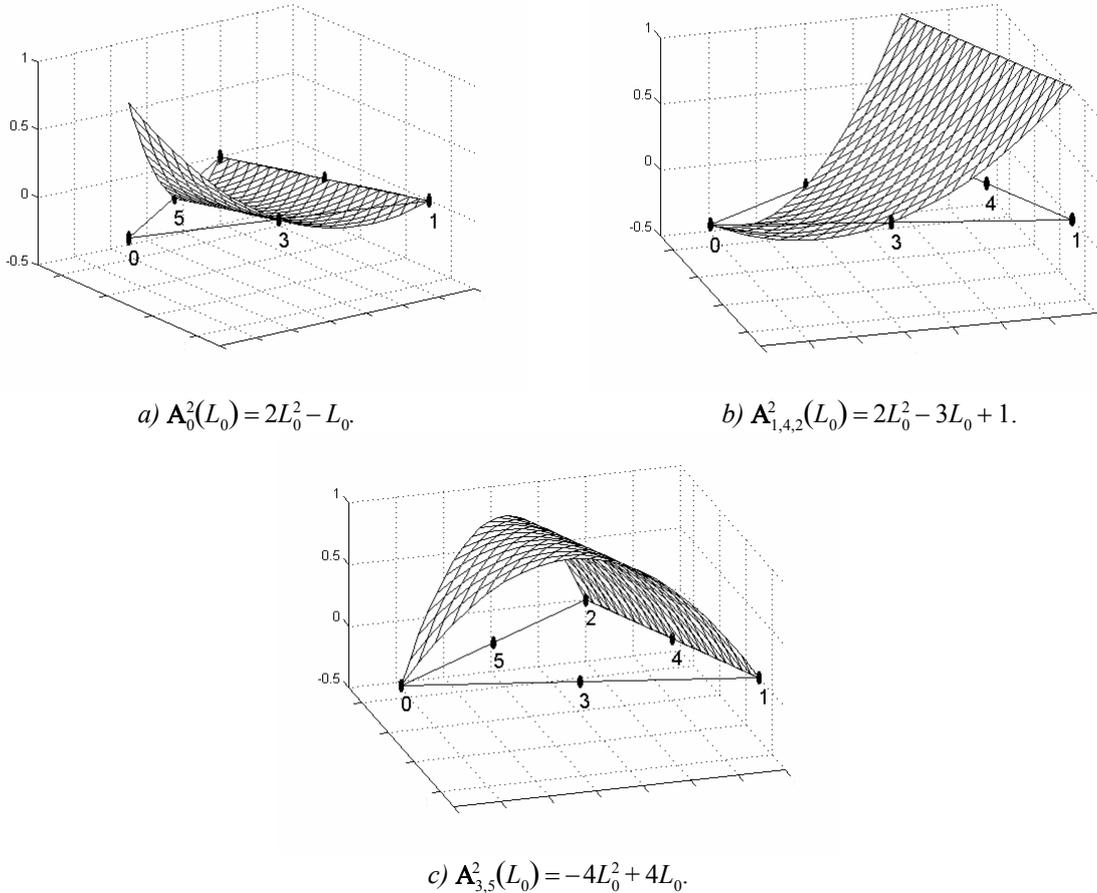


Figura 16 - Polinómios do segundo grau usados na definição de funções de forma para elementos triangulares.

$$N_3 = (-4L_0^2 + 4L_0)(-4L_1^2 + 4L_1)(2L_2^2 - 3L_2 + 1),$$

$$N_4 = (-4L_1^2 + 4L_1)(-4L_2^2 + 4L_2)(2L_0^2 - 3L_0 + 1),$$

$$N_5 = (-4L_2^2 + 4L_2)(-4L_0^2 + 4L_0)(2L_1^2 - 3L_1 + 1).$$

Para um elemento genérico triangular, *Figura 17*, poderemos escrever a função de forma correspondente ao nó  $i$ , em termos de coordenadas de área, deste modo:

$$N_i = A_i^I(L_0)A_i^J(L_1)A_i^K(L_2)$$

em que  $A_i^I$ ,  $A_i^J$  e  $A_i^K$  são polinómios interpoladores de Lagrange. Nesta expressão o índice superior refere o grau do polinómio utilizado e o índice inferior refere o nó a que a função diz respeito. Cada um destes polinómios é função de uma coordenada de área.

Note-se que:

- Da definição destes polinómios de Lagrange resulta que a função de forma  $N_i$  assume valor unitário no nó  $i$  e nulo nos restantes.
- Como  $I+J+K=p$ , valor constante para dada triangulação, o termo de ordem mais elevado em  $N_i$  será da forma  $L_0^I, L_1^J, L_2^K$ , a qual, em consequência das expressões *Eqs.*

46, será um polinómio de grau  $p$ . A ordem da função de forma  $N_i$  será, obviamente, a soma das ordens de cada um dos polinómios que intervêm na sua definição.

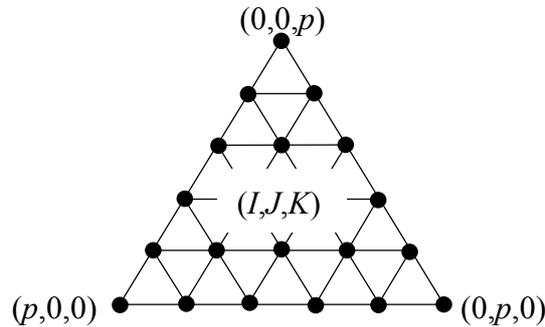


Figura 17 - Elemento triangular genérico.

Na Figura 18 estão representadas as funções de forma para o elemento linear e quadrático.

As funções de forma, em termos de coordenadas de área, para um elemento triangular quadrático, Figura 18, são:

$$N_0 = L_0(2L_0 - 1), N_1 = 4L_0L_1, N_2 = L_1(2L_1 - 1), N_3 = 4L_1(1 - L_0 - L_1),$$

$$N_4 = 1 - 3(L_0 + L_1) + 2(L_0 + L_1)^2, N_5 = 4L_0(1 - L_0 - L_1).$$

### 5.4.3 - Funções de Forma Hierárquicas

A derivação de funções hierárquicas de continuidade  $C^0$  é bastante simples. Da Figura 15 resulta que, ao longo de um lado, por exemplo 1-2, a coordenada da área referente ao nó oposto é identicamente nula. Então da relação das Eqs. 45 resulta:

$$[L_1 + L_2]_{1-2} = 1.$$

Sendo  $\xi$  uma coordenada local normalizada<sup>6</sup> definida do seguinte modo:

$$\xi = \frac{2(x - x_c^{(m)})}{h^{(m)}}$$

onde  $x_c^{(m)}$  é a coordenada  $x$  do ponto médio de elemento e  $h^{(m)}$  a sua amplitude (comprimento), paralela ao lado 1-2, podemos escrever:

$$L_1|_{1-2} = \frac{1}{2}(1 - \xi), L_2|_{1-2} = \frac{1}{2}(1 + \xi),$$

Eqs. 47

donde resulta que:

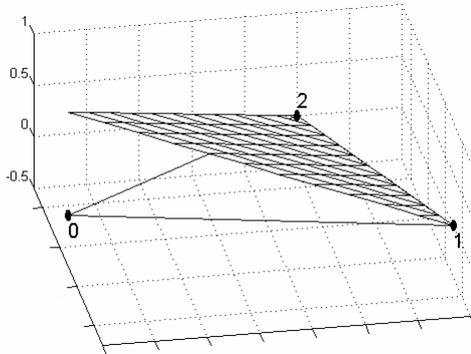
$$\xi = (L_2 - L_1)_{1-2}.$$

Isto sugere que poderemos gerar funções de forma hierárquicas num elemento triangular generalizando as funções de forma 1D hierárquicas já introduzidas. Por exemplo, utilizando as expressões da Eq. 32 e da Eq. 33, poderemos associar ao lado 1-2 um polinómio de grau  $p$  ( $\geq 2$ ) definido por:

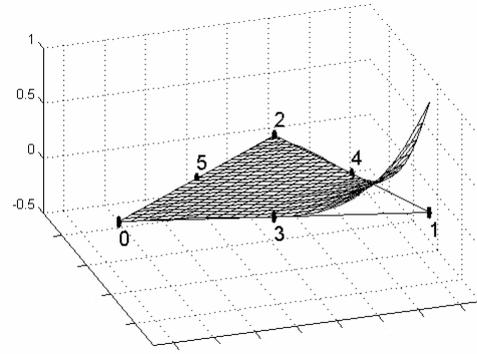
<sup>6</sup> Esta coordenada tomará valores sempre entre  $-1$  e  $+1$  qualquer que seja a dimensão real do elemento.

$$N_{p(1-2)} = \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_1 + L_2)^p] \text{ para } p \text{ par,}$$

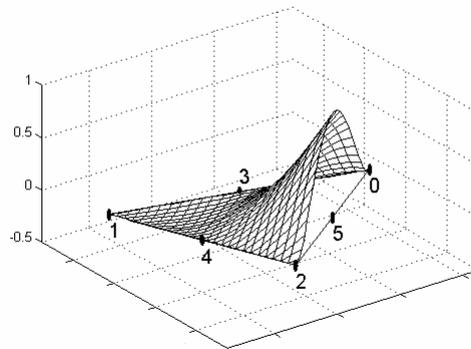
$$N_{p(1-2)} = \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_2 - L_1)(L_1 + L_2)^{p-1}] \text{ para } p \text{ ímpar.}$$



a) Elemento linear:  $N_0$ .



b) Elemento quadrático:  $N_1$ .



d) Elemento quadrático:  $N_5$ .

Figura 18 - Elementos triangulares linear e quadrático e respectivas funções de forma..

Resulta das Eqs. 47 que estas funções assumem o valor nulo nos nós 1 e 2. Além disso assumirão o valor nulo ao longo dos lados 0-1 e 0-2 o que garante a continuidade na função aproximada  $\phi$ .

Neste caso, para  $p \geq 3$ , o número de funções hierárquicas provenientes dos lados do elemento é insuficiente para definir um polinómio completo de grau  $p$ . Necessitam então de ser introduzidas novas funções hierárquicas que sejam idênticamente nulas na periferia. Por exemplo, para  $p=3$  poder-se-ia utilizar  $L_0L_1L_2$ ; para  $p=4$  poderia usar-se a soma das três funções  $L_0^2L_1L_2$ ,  $L_0L_1^2L_2$ ,  $L_0L_1L_2^2$ .

Na Figura 19 estão representadas funções hierárquicas típicas, linear, quadrática e cúbica.

Poder-se-iam deduzir outras funções hierárquicas por exemplo a partir do conjunto de funções hierárquicas 1D das expressões das equações Eq. 38, Eq. 39, Eq. 40 e Eq. 41 (polinómios de Legendre).

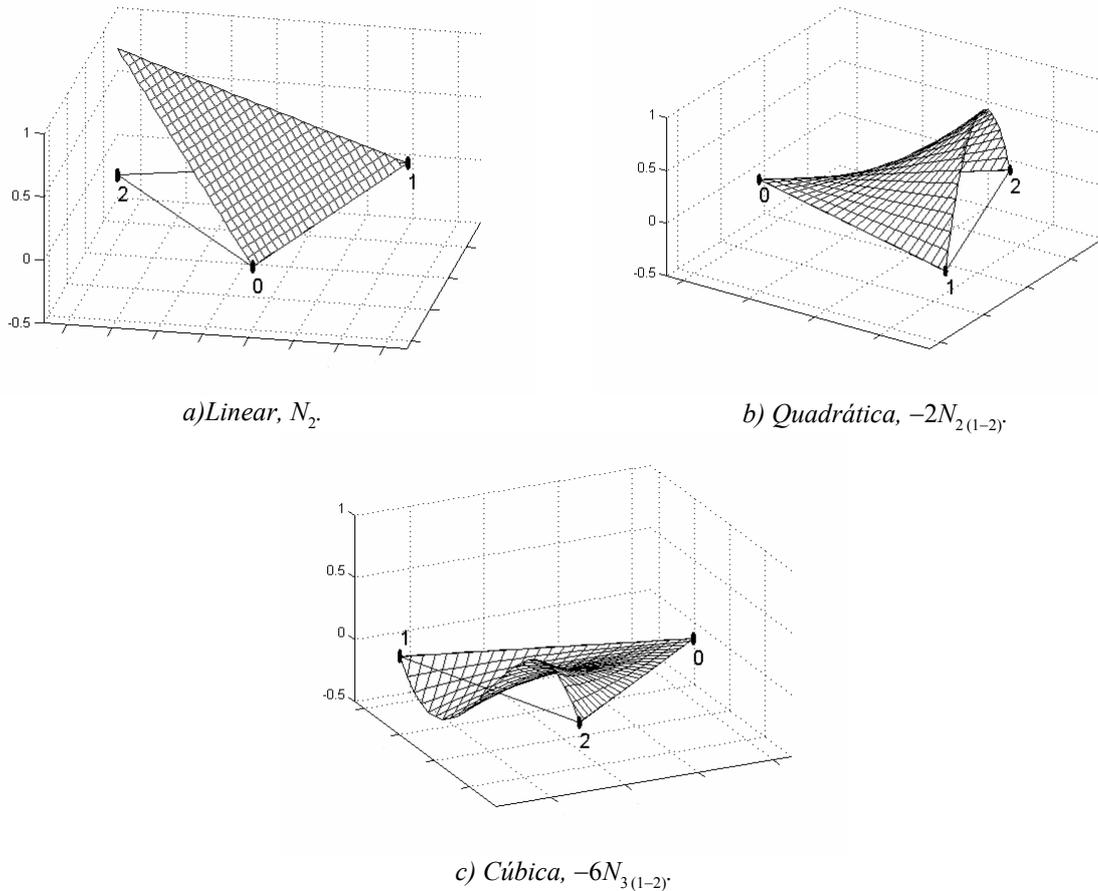


Figura 19 - Funções hierárquicas para elemento triangular: a) linear; b) quadrática; c) cúbica.

### 5.5 - Funções de Forma 3D

Os métodos apresentados para os casos 1D e 2D são extrapoláveis para as três dimensões resultando elementos de forma tetraédrica ou hexaédrica regular. A única diferença significativa na derivação das funções de forma 3D é a necessidade de introdução de variáveis na face para além das variáveis no elemento e na aresta. A Figura 20 mostra elementos hexaédricos típicos da família Serendipity.

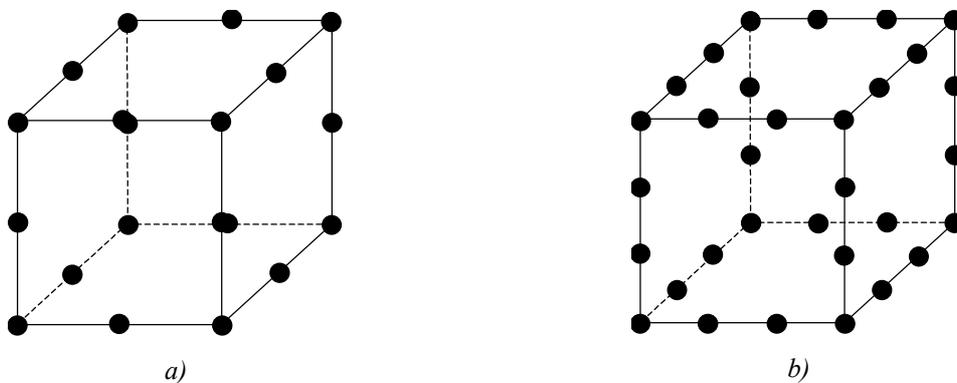
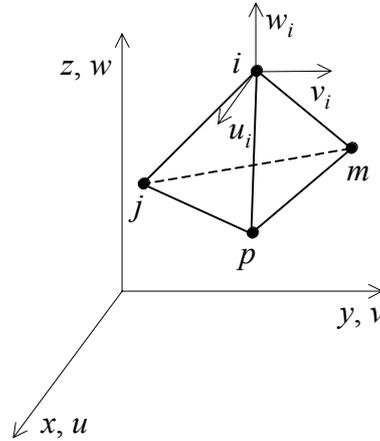


Figura 20 - Elementos 3D standards da série de Serendipity: a) quadrático; b) cúbico.

### 5.5.1 - Elemento Tetraédrico

O elemento tetraédrico é o elemento mais simples para estados tridimensionais de tensão e com ele pode ser analisada qualquer estrutura maciça [Gomes, 1995; Oliveira, 1990]. Na *Figura 21* está representado este elemento e é possível verificar a sua configuração nodal.



*Figura 21 - Elemento tetraédrico.*

O elemento tem um nó em cada vértice e em cada nó estão definidos três deslocamentos. Assim para o nó  $i$  temos:

$$\{\hat{u}\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

O elemento terá portanto um total de doze graus de liberdade assim agrupados:

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\}_i \\ \{\hat{u}\}_j \\ \{\hat{u}\}_m \\ \{\hat{u}\}_p \end{Bmatrix} = \{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad u_m \quad v_m \quad w_m \quad u_p \quad v_p \quad w_p \}^T.$$

Cada deslocamento  $u, v, w$  é definido por quatro valores nodais a que corresponde uma variação linear do campo dos deslocamentos. Teremos assim:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z, \quad v = b_1 + b_2x + b_3y + b_4z, \quad w = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z.$$

*Eqs. 48*

Considerando apenas o deslocamento  $u$ , podemos determinar as constantes  $a_i$  escrevendo a primeira das *Eqs. 48* para cada um dos nós do elemento:

$$\begin{cases} u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4z_i \\ u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j + a_4z_j \\ u_m = a_1 + a_2x_m + a_3y_m + a_4z_m \\ u_p = a_1 + a_2x_p + a_3y_p + a_4z_p \end{cases}$$

Resolvendo este sistema em ordem a  $a_i$  e substituindo os respectivos valores na primeira equação de *Eqs. 48* obtemos:

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p$$

*Eq. 49*

onde:

$$\begin{cases} N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \\ N_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} \\ N_m = \frac{a_m + b_m x + c_m y + d_m z}{6V} \\ N_p = \frac{a_p + b_p x + c_p y + d_p z}{6V} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} = \text{volume do tetraedro } (i, j, m, p).$$

Os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  têm as seguintes expressões:

$$a_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}, \quad b_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix},$$

$$c_i = \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{bmatrix}, \quad d_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix},$$

as outras constantes são definidas por permutação circular dos índices na ordem  $p, i, j, m$ .

Para os deslocamentos  $v$  e  $w$  obtém-se expressões semelhantes a *Eq. 49* isto é:

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_p v_p,$$

*Eq. 50*

$$w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m + N_p w_p.$$

Eq. 51

As expressões Eq. 49, Eq. 50 e Eq. 51 podem ser agrupadas na seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_m \\ v_m \\ w_m \\ u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix}$$

Eq. 52

ou de uma maneira mais condensada:

$$\{u\} = [N] \{\hat{u}\}$$

onde  $\{u\}$  é o vector de deslocamentos de um ponto no interior do elemento,  $[N]$  a matriz das funções de forma e  $\{\hat{u}\}$  o vector dos deslocamentos nodais.

### 5.6 - Elementos Isoparamétricos

A noção de elemento isoparamétrico permitiu a utilização de elementos quadrangulares de lados não necessariamente rectos. Estes elementos apresentam um bom comportamento em diversos problemas estruturais e uma maior performance quando comparados com elementos triangulares simples.

Fundamentalmente os elementos isoparamétricos caracterizam-se por utilizarem a mesma função de aproximação para descrever a geometria do elemento e o campo dos deslocamentos [Bathe, 1996; Gomes, 1995]:

$$\{u \quad v \quad w\}^T = [N] \{\hat{u}\},$$

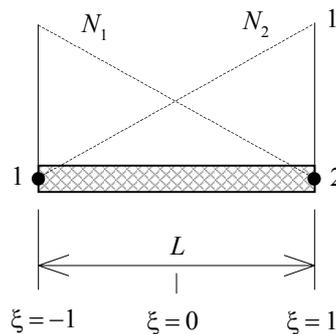
onde  $u, v$  e  $w$  são os deslocamentos no interior do elemento finito,  $[N]$  a matriz das funções de forma e  $\{\hat{u}\}$  é o vector dos deslocamentos nodais;

$$\{x \quad y \quad z\}^T = [N] \{c\},$$

onde o vector de coordenadas nodais  $\{c\}$  pode ser definido por  $\{c\} = \{ \{c\}_1 \quad \{c\}_2 \quad \dots \quad \{c\}_i \}^T$  onde cada sub vector  $\{c\}_i$  é constituído pelas coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  do nó  $i$ .

De modo análogo, o vector de deslocamentos nodais  $\{\hat{u}\}$  é dado por  $\{\hat{u}\} = \{ \{\hat{u}\}_1 \ \{\hat{u}\}_2 \ \dots \ \{\hat{u}\}_i \}^T$  onde, como é usual, cada sub vector  $\{\hat{u}\}_i$  é constituído pelos deslocamentos nodais  $(u_i, v_i, w_i)$  do nó  $i$ .

Na formulação utilizada nos elementos isoparamétricos é usual exprimir as funções de forma, não em coordenadas cartesianas mas, em coordenadas naturais (as coordenadas valem 0 na origem e -1 e 1 nos limites inferior e superior). Por exemplo para um elemento finito do tipo axial<sup>7</sup> e adoptando um polinómio interpolador linear obtemos as funções de forma, expressas em função da coordenada natural  $\xi$ ,  $N_1 = \frac{1-\xi}{2}$  e  $N_2 = \frac{1+\xi}{2}$ , *Figura 22*.



*Figura 22 - Funções de forma lineares para um elemento finito do tipo axial expressas em termos da coordenada natural  $\xi$ .*

Como geralmente as expressões para a determinação das matrizes e dos vectores envolvidos no método dos elementos finitos estão expressas em termos das coordenadas cartesianas utilizando-se coordenadas naturais é necessário, não só representar as funções de forma em termos destas coordenadas naturais mas também determinar a transformação entre derivadas cartesianas e derivadas naturais utilizando-se, para tal fim, a matriz Jacobiana  $[J]$  que no caso de elementos axiais reduz-se a um escalar  $J$  habitualmente designado por Jacobiano. Recorrendo, mais uma vez, ao exemplo do elemento finito do tipo axial a transformação entre a derivada de  $x$  e a derivada de  $\xi$  é determinada a partir da relação entre a coordenada  $x$  e as coordenadas dos dois nodos:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2,$$

derivando-se em ordem a  $\xi$  obtemos:

$$\frac{dx}{d\xi} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}L, \text{ ou seja, } dx = \frac{L}{2}d\xi = Jd\xi \text{ onde } J \text{ é o Jacobiano.}$$

Utilizando-se três nós e funções de forma quadráticas é possível definir o elemento finito do tipo axial representado na *Figura 23*. Neste caso, partindo de uma aproximação quadrática ao campo dos deslocamentos:

<sup>7</sup> Este elemento é bastante utilizado na modelização de estruturas triangulares do tipo asna.

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

obtinhamos as seguintes expressões para a matriz  $[N]$  das funções de forma e para o Jacobiano  $J$ :

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, x = [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{-\xi + \xi^2}{2} & \frac{\xi + \xi^2}{2} & 1 - \xi^2 \end{bmatrix}, J = \frac{dx}{d\xi} = \begin{bmatrix} \frac{-1 + 2\xi}{2} & \frac{1 + 2\xi}{2} & -2\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},$$

de notar que, neste caso,  $J$  é função de  $\xi$ .

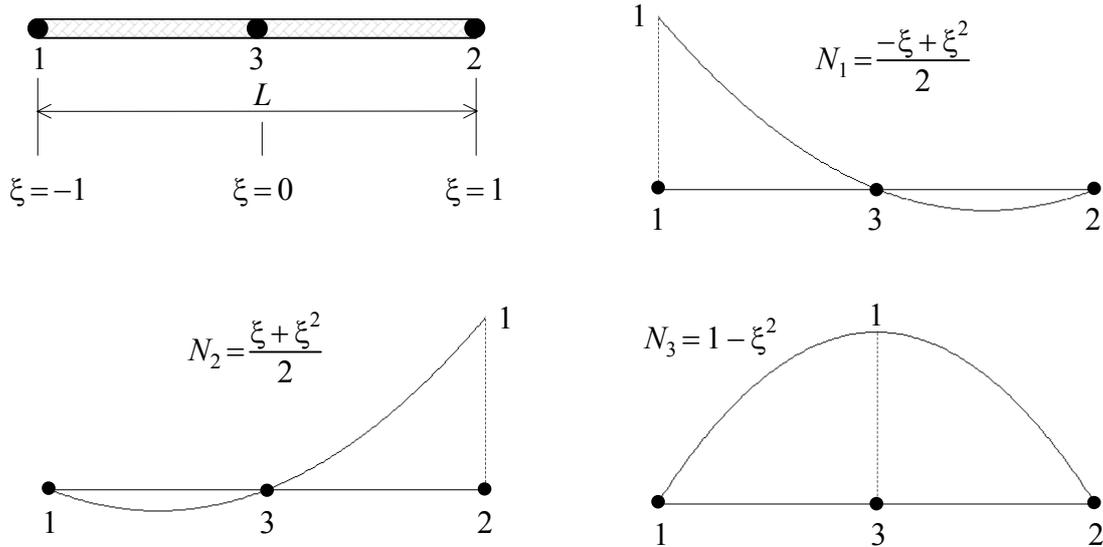


Figura 23 - Elemento finito do tipo axial com funções de forma quadráticas.

Utilizando-se quatro nós e funções de forma cúbica é possível definir o elemento finito do tipo axial representado na Figura 24. Neste caso, partindo de uma aproximação cúbica ao campo dos deslocamentos:

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

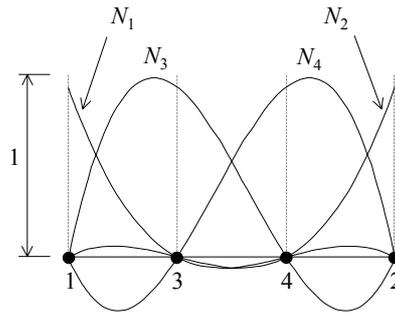


Figura 24 - Elemento finito do tipo axial com funções de forma cúbicas.

obtinhamos as seguintes expressões para a matriz  $[N]$  das funções de forma e para o Jacobiano  $J$ :

$$u = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, x = [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, [N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix},$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},$$

onde:

$$N_1 = -\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1), N_2 = +\frac{9}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right),$$

$$N_3 = +\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1), N_4 = +\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1),$$

$$J_1 = -\frac{9}{16} \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) - \frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) - \frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right),$$

$$J_2 = \frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) + \frac{9}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) + \frac{9}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right),$$

$$J_3 = \frac{27}{16} \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) + \frac{27}{16} (\xi + 1) (\xi - 1) + \frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right),$$

$$J_4 = \frac{27}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) + \frac{27}{16} (\xi + 1) (\xi - 1) + \frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right),$$

de notar que, também neste caso,  $J$  é função de  $\xi$ .

Como já foi referido a utilização de elementos isoparamétricos permite a utilização de elementos distorcidos. Esta distorção não deve no entanto ser exagerada pois pode haver intersecção de dois lados do elemento. Normalmente faz-se um controlo da distorção através do Jacobiano que dá uma medida da área do elemento.

O uso de elementos isoparamétricos, associado a técnicas de integração numérica, permitiu a partir de meados da década de sessenta a formulação de um número muito elevado de elementos finitos. Permitiu também a modularização dos programas computacionais fazendo-os mais gerais e mais facilmente adaptáveis a diferentes elementos.

Além dos elementos isoparamétricos podemos ainda definir:

- a) Elementos sub paramétricos: aqueles em que são usadas para a interpolação geométrica apenas algumas das funções de forma usadas na interpolação da função incógnita, *Figura 25a*).
- b) Elementos super paramétricos: aqueles em que são usadas para a interpolação geométrica mais funções de forma do que as usadas na interpolação da função incógnita, *Figura 25b*).



a) Elemento subparamétrico

b) Elemento superparamétrico

□ Interpolação geométrica    ○ Interpolação da função incógnita

*Figura 25 - Elementos sub e super paramétricos.*

### 5.6.1 - Elementos 2D

Vejamos agora qual a tipologia de alguns elementos isoparamétricos aplicáveis a problemas de elasticidade bidimensional. Começemos pelo elemento linear de quatro nós representado na

*Figura 26*. Os eixos  $\xi$  e  $\eta$  passam pelo ponto médio de lados opostos, não são necessariamente ortogonais nem paralelos a  $x$  e  $y$ .

Para o elemento isoparamétrico podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= [N] \{c\}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\hat{u}\}, \\ \{c\}^T &= \{ x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \}, \\ \{\hat{u}\}^T &= \{ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \}, \end{aligned}$$

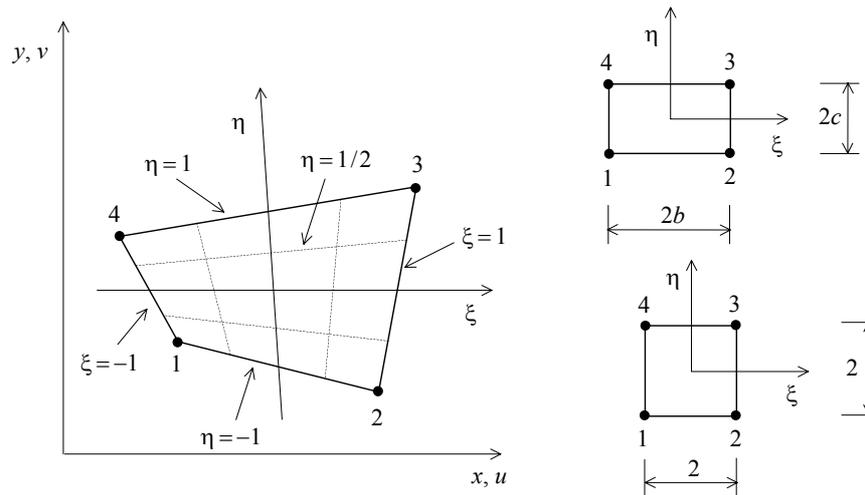


Figura 26 - Elemento isoparamétrico de 4 nós.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix},$$

as funções de forma são obtidas a partir de um polinómio:

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

depois de determinados os coeficientes  $a_i$ , através da determinação da matriz<sup>8</sup>  $[A]^{-1}$ , obtemos:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).$$

Eqs. 53

A matriz de transformação entre as derivadas naturais  $(\partial\phi/\partial\xi, \partial\phi/\partial\eta)$  de uma função  $\phi$  e as derivadas cartesianas  $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y)$  designa-se, como já foi referido, por matriz Jacobiana  $[J]$ . Seja por exemplo a função  $\phi = \phi(x, y)$ . Podemos escrever:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{cases}$$

Eq. 54

ou sob a forma matricial:

<sup>8</sup> Esta matriz contém os coeficientes  $a_i$  e é obtida após o estabelecimento do polinómio  $u$  para cada nodo do elemento; resultando assim, um sistema de equações onde as coordenadas cartesianas dos nodos estão relacionadas com as coordenadas naturais dos mesmos.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

Eq. 55

Nas aplicações do método dos elementos finitos as funções  $\phi$  são geralmente definidas em termos de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  e pretendemos o cálculo das derivadas cartesianas. No caso de problemas planos a função  $\phi$  será substituída por qualquer das componentes  $u$  e  $v$  do vector de deslocamentos.

No caso de elementos isoparamétricos podemos escrever:

$$x = \sum_{i=1}^r N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^r N_i y_i,$$

Eqs. 56

em que  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas de cada um dos  $r$  nós do elemento.

Substituindo na Eq. 55 obtemos:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}.$$

Eq. 57

A inversa da matriz Jacobiana,  $[J]^{-1}$ , relaciona as derivadas cartesianas com as derivadas naturais através da equação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Eq. 58

o pode ser obtida recorrendo a técnicas *standard* de inversão de matrizes [Chapra 1988; Press, 1992; Tavares, 1995]:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}.$$

Eq. 59

As expressões das Eq. 54 a Eq. 59 são genéricas. Os valores numéricos dos coeficientes da matriz  $[J]$  dependem do tamanho, da forma e da orientação dos elementos. Para o caso do elemento de quatro nós, utilizando a Eq. 57 com  $r=4$  e a Eq. 55, podemos escrever:

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4,$$

$$J_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4,$$

$$J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4,$$

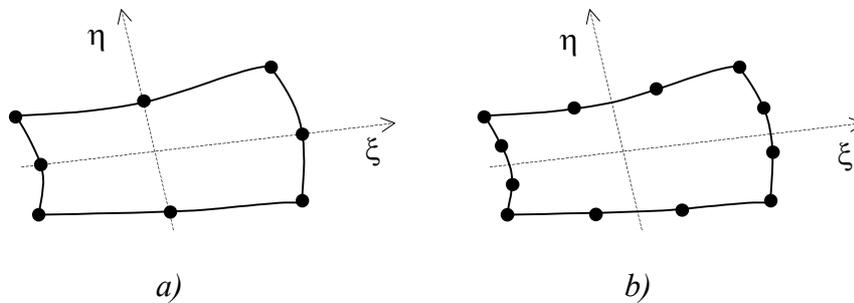
$$J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4.$$

Utilizando as Eqs. 53 podemos calcular os diferentes termos em  $\partial/\partial \xi$  e  $\partial/\partial \eta$ :

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1-\eta}{4}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1-\eta}{4}, \quad \text{etc.}$$

Conforme o grau do polinómio interpolador e portanto do número de nós na fronteira obtemos elementos isoparamétricos bidimensionais diferentes:

- elementos lineares de quatro nós;
- elementos quadráticos de oito nós, *Figura 27a*);
- elementos cúbicos de doze nós, *Figura 27b*), ...



*Figura 27 - a) Elemento isoparamétrico quadrático, oito nós;  
b) elemento isoparamétrico cúbico, doze nós.*

Para o elemento quadrático é utilizado um polinómio cúbico para a função interpoladora:

$$P_3 = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^2 \eta + a_8 \xi \eta^2.$$

As funções de forma para o elemento cúbico são baseadas no polinómio de quarto grau seguinte:

$$P_4 = P_3 + a_9 \xi^3 + a_{10} \eta^3 + a_{11} \xi^2 \eta + a_{12} \xi \eta^2.$$

Para o elemento isoparamétrico de oito nós as funções de forma, expressas em função das coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , são:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \text{ para } i = 1, 3, 5, 7;$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \text{ para } i = 2, 4, 6, 8.$$

Em lugar de gerar as funções de forma a partir da inversão da matriz  $[A]$  pode seguir-se a metodologia mais directa. Vejamos por exemplo o caso do elemento quadrático de oito nós de que representamos algumas funções de forma na *Figura 28*. Em *a)* representamos a deformada associada a um deslocamento unitário no nó 5. Esta deformação tem variação quadrática segundo  $\xi$  e linear segundo  $\eta$  e é nula para  $\xi=1$ ,  $\xi=-1$  e  $\eta=1$ , os três zeros do polinómio de interpolação. Por substituição directa é imediato concluir que a função de forma para o nó 5 será dada por:

$$N_5 = \frac{(1 - \xi^2)(1 - \eta)}{2}.$$

De modo análogo para o nó 8 obtínhamos:

$$N_8 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta^2)}{2}.$$

Se por outro lado aplicarmos um deslocamento unitário ao nó 1, com variação linear segundo  $\xi$  e  $\eta$ , obtemos deslocamentos não nulos,  $u = 1/2$ , nos nós 5 e 8. Esta deformada é incompatível com a definição de função de forma. Para anular o deslocamento do nó 5 e 8 basta subtrair metade das deformadas representadas em *a)* e *b)*:

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8.$$

### 5.6.2 - Elementos 3D

É possível estender o conceito de elementos isoparamétricos de problemas bidimensionais ao caso mais geral de problemas tridimensionais. Neste caso, o volume do elemento é agora descrito por três coordenadas naturais  $-1 \leq \xi \leq +1$ ,  $-1 \leq \eta \leq +1$ ,  $-1 \leq \zeta \leq +1$  e a formulação anterior é expandida à terceira dimensão. Isto é, as coordenadas  $z$  e os deslocamentos  $w$  serão calculáveis a partir de funções de forma e de coordenadas e deslocamentos nodais segundo a terceira dimensão. As funções *Eqs. 56* serão generalizadas a:

$$x = \sum_i N_i x_i, \quad u = \sum_i N_i u_i,$$

$$y = \sum_i N_i y_i, \quad v = \sum_i N_i v_i,$$

$$z = \sum_i N_i z_i, \quad w = \sum_i N_i w_i.$$

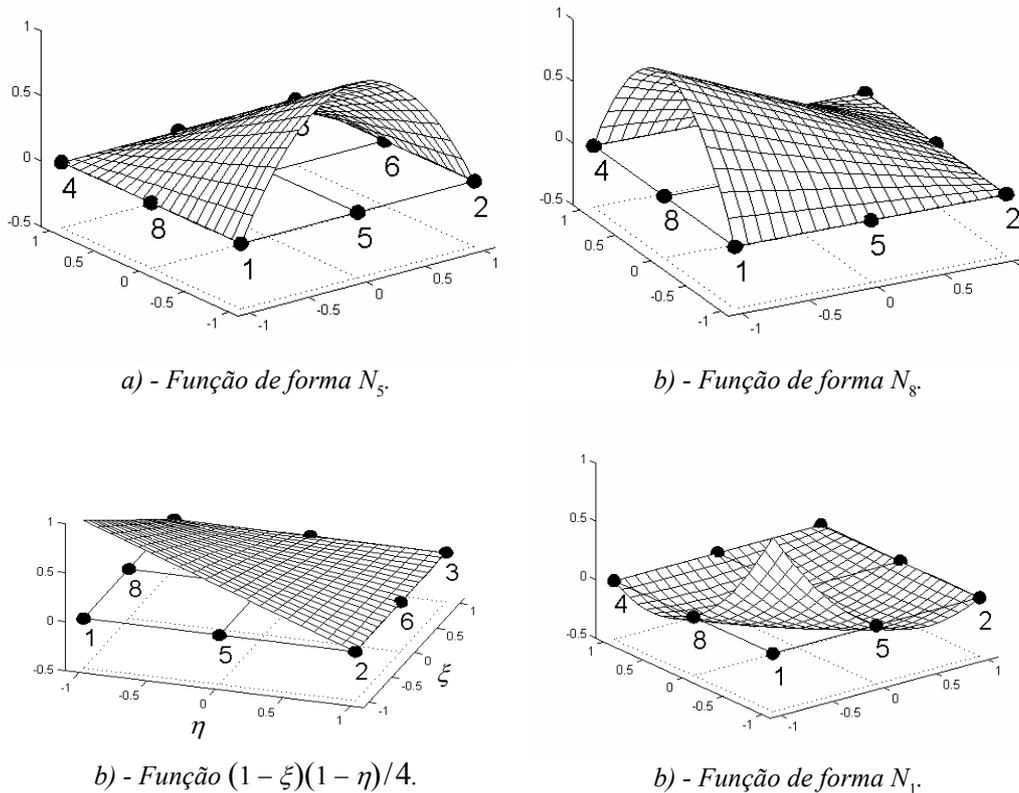


Figura 28 - Representação de algumas funções de forma para o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós.

Assim será necessário determinar os diferenciais  $\partial\phi/\partial\xi$ ,  $\partial\phi/\partial\eta$  e  $\partial\phi/\partial\zeta$  pelo que a matriz Jacobiana será expandida a:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 29 estão representados os elementos paralelipédicos linear de oito nós e quadrático de vinte nós. As funções de forma para o elemento de oito nós são:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$$

onde  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  e  $\zeta_i = \pm 1$  para  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

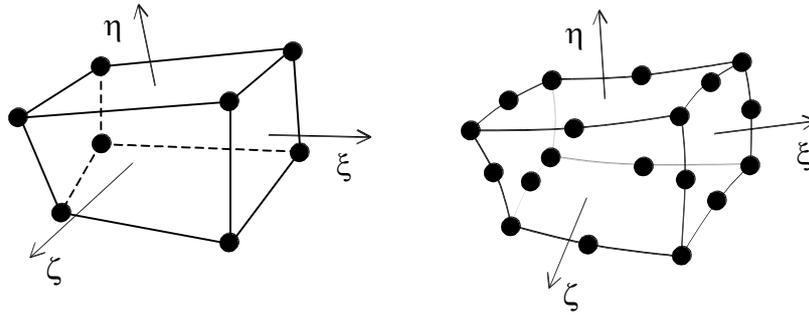


Figura 29 - Dois elementos isoparamétricos 3D: à esquerda um elemento linear de oito nós; à direita um elemento quadrático de 20 nós.

### 6 - Determinação das Deformações e das Tensões

Conhecido o campo dos deslocamentos o cálculo das componentes do tensor das deformações segue-se por diferenciação [Bathe, 1996; Branco, 1985, Timoshenko, 1970, 1982]:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

ou utilizando a notação matricial:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \{\hat{u}\} = [B] \{\hat{u}\}$$

onde  $u$  é o deslocamento e  $\varepsilon_{xx}$  a deformação segundo o eixo  $x$ ,  $v$  é o deslocamento e  $\varepsilon_{yy}$  a deformação segundo o eixo  $y$ ,  $w$  é o deslocamento e  $\varepsilon_{zz}$  a deformação segundo o eixo  $z$ ,  $\gamma_{xy}$  ( $=\gamma_{yx}$ ) a deformação de corte no plano  $(x,y)$ ,  $\gamma_{yz}$  ( $=\gamma_{zy}$ ) a deformação de corte no plano  $(y,z)$  e  $\gamma_{zx}$  ( $=\gamma_{xz}$ ) a deformação de corte no plano  $(x,z)$ ,  $[N]$  é a matriz das funções de forma,  $[B]$  é a matriz das deformações e  $\{\hat{u}\}$  é o vector dos deslocamentos nodais. Por questões de tratamento matricial no método dos elementos finitos as componentes das deformações são geralmente agrupadas num vector designado por vector das deformações  $\{\varepsilon\}$ :

$$\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \}^T.$$

Conhecidos em cada ponto do elemento os deslocamentos e as deformações pode ser realizado o cálculo das tensões instaladas. Admitindo que para o nível das forças aplicadas ao elemento o material se encontra no domínio linear-elástico, isto é no domínio de aplicabilidade da lei de Hooke, as componentes do tensor das tensões  $\{\sigma\}$  podem ser calculadas a partir de:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

onde  $\{\sigma\} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \}^T$  é o vector das tensões de componentes  $\sigma_{xx}$  para a tensão segundo o eixo  $x$ ,  $\sigma_{yy}$  para a tensão segundo o eixo  $y$ ,  $\sigma_{zz}$  para a tensão segundo o eixo  $z$ ,  $\tau_{xy}$  ( $=\tau_{yx}$ ) para a tensão de corte no plano  $(x,y)$ ,  $\tau_{yz}$  ( $=\tau_{zy}$ ) para a tensão de corte no plano  $(y,z)$  e  $\tau_{zx}$  ( $=\tau_{xz}$ ) para a tensão de corte no plano  $(x,z)$ ,  $[D]$  é a matriz de elasticidade e para estados tridimensionais de tensão tem a seguinte forma:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Eq. 60

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  o módulo de elasticidade,  $a = \frac{\nu}{1-\nu}$  e  $b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ .

Utilizando-se a lei de Hooke generalizada pode-se escrever:

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\}$$

onde  $[C]$  é a matriz que relaciona as tensões com as deformações para o material e, repare-se que  $[C][D] = [D][C] = [I]$  (sendo  $[I]$  a matriz identidade), é dada como:

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

Eq. 61

Note que para as equações que relacionam o vector de deformações com o vector das tensões dadas por Eq. 60 e Eq. 61 serem válidas o coeficiente de Poisson  $\nu$  tem de ser inferior a  $\frac{1}{2}$ .

### 6.1 - Considerações sobre o Cálculo das Tensões

As tensões podem ser calculadas utilizando a equação:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\hat{u}\}.$$

Eq. 62

Serão portanto variáveis de ponto para ponto no interior do elemento em questão. No caso dos elementos isoparamétricos os elementos da matriz de deformação  $[B]$  são função de  $\xi$  e  $\eta$ , as coordenadas locais do ponto seleccionado. Em geral o valor calculado é mais correcto nos pontos de Gauss utilizados na integração numérica (*ponto 8*). Os valores das tensões nestes pontos, interiores ao elemento, não correspondem às tensões máximas da estrutura. Por exemplo no caso simples de uma viga à flexão os máximos localizam-se nas fibras extremas e portanto nos nós da fronteira da modelização por elementos finitos. À partida, o cálculo das tensões nos nós não oferece dificuldades. Bastaria calcular o valor da matriz  $[B]$  no nó correspondente. Esta aproximação não é a que dá melhores resultados. Vários autores sugerem técnicas diferentes de extrapolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós.

Pela própria natureza do método dos elementos finitos como método de aproximação é natural que as tensões apresentem descontinuidades entre elementos e no nó central. Uma primeira solução consiste em calcular as tensões em cada nó a partir da Eq. 62 e proceder a uma simples média aritmética. Esta solução apresenta o inconveniente de não contemplar qualquer correcção quanto à dimensão relativa dos elementos adjacentes.

Cook [Gomes, 1995] utiliza, no caso de estruturas bidimensionais, a seguinte técnica. Considere-se em primeiro lugar o caso unidimensional da *Figura 30a*). Entre os pontos de Gauss é utilizada uma interpolação linear definida a partir de:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1-s}{2} & \frac{1+s}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 63

em que  $s$  é a coordenada natural  $s = \xi/P$  em que  $s = -1$  para  $\xi = -P$  e  $s = +1$  para  $\xi = P$  e,  $P = 0.57735(\dots)$  define a cota do ponto de Gauss. Para determinar as tensões nos pontos  $A$  e  $B$ ,  $\xi = \pm 1$ , usamos  $s = \pm 1/P$ . Podemos então escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1/P & 1-1/P \\ 1-1/P & 1+1/P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}.$$

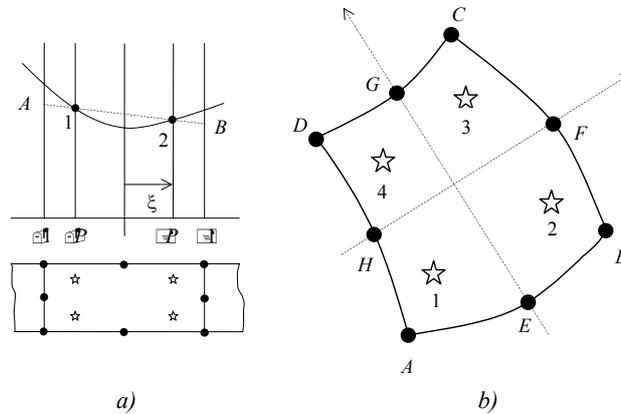


Figura 30 - Cálculo de tensões nos nós, usando uma extrapolação linear. a) Troço de uma viga modelada por uma única camada de elementos isoparamétricos. A tracejado o valor correcto da tensão de corte sob a acção de uma carga uniformemente distribuída. A traço contínuo os valores da tensão de corte calculados. Os valores são exactos nos pontos de Gauss. b) Identificação dos pontos de Gauss e dos nós para extrapolação segundo a técnica de Hinton e Owen (Eq. 64).

Nas expressões da Eq. 62 e da Eq. 63 as tensões  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  serão sucessivamente substituídas pelas componentes das tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ ).

No caso do elemento bidimensional da Figura 30b) um processo semelhante é aplicado aos quatro pontos de Gauss do elemento. Como funções de extrapolação são utilizadas as funções de forma bilineares definidas para o elemento isoparamétrico de quatro nós. Por exemplo para o ponto A, tomando  $\xi = \eta = -1/P$ , obtemos:

$$\sigma_a = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 & ab \end{bmatrix} \{ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \}^T$$

em que  $\sigma_i$  é a tensão no ponto de Gauss  $i$  e  $a = 1 + 1/P$  e  $b = 1 - 1/P$ . Para o ponto E,  $\xi = 0$  e  $\eta = -1/P$  e portanto:

$$\sigma_E = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a & a & b & b \end{bmatrix} \{ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \}^T.$$

Hinton e Owen [Gomes, 1995] recomendam uma técnica de amaciamento local das tensões dentro do elemento, baseado no método dos mínimos quadrados em que o cálculo das tensões nos nós de um elemento isoparamétrico quadrático é definido a partir de:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3}/2 & -1/2 & 1-\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1+\sqrt{3}/2 & -1/2 & 1-\sqrt{3}/2 \\ 1-\sqrt{3}/2 & -1/2 & 1+\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1-\sqrt{3}/2 & -1/2 & 1+\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix}.$$

Eq. 64

Após a passagem das tensões para os nós, então sim, elas seriam amaciadas por uma média aritmética de todos os elementos concorrentes dos nós.

Na *Tabela 2* apresenta-se uma listagem dos pontos “óptimos” para cálculo das tensões para tipos diferentes de elementos [Gomes, 1995].

<i>Tipo de Elemento</i>	<i>Ordem de Quadratura e Localização</i>
Viga	2 pontos, ( $\pm PL/2$ )
Linear Plano	1 ponto, ( $\xi = \eta = 0$ )
Quadrático de Lagrange	$2 \times 2$ , ( $\xi = \pm P; \eta = \pm P$ )
Quadrático Plano	$2 \times 2$ , ( $\xi = \pm P; \eta = \pm P$ )
Cúbico Plano	$3 \times 3$ , (9 pontos)
Sólido Linear	1 ponto, ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ )
Sólido Quadrático	$2 \times 2 \times 2$ , ( $\xi = \pm P; \eta = \pm P; \zeta = \pm P$ )

*Tabela 2 - Para tipos diferentes de elementos: ordem de quadratura e localização dos pontos ideais para um cálculo adequado das tensões.*

## 6.2 - Estado Plano de Tensão

Quando o sistema elástico é muito fino e não existem forças aplicadas segundo a direcção paralela à espessura, então pode-se considerar que as tensões resultantes são constantes ao longo da espessura e estamos na presença do que é usualmente designado por estado plano de tensão. O deslocamento de um ponto  $P$ , de coordenadas  $(x, y, z)$ , será descrito pelas duas componentes  $u$  e  $v$  do seu vector de deslocamento  $\{u\}$ . Em geral os deslocamentos serão diferentes de um ponto para outro mas independentes da cota  $z$ . As funções  $u$  e  $v$  serão portanto funções de  $x$  e  $y$ . Usando uma notação matricial podemos escrever:

$$\{u\} = \{ u \quad v \}^T.$$

Conhecido o campo dos deslocamentos, o cálculo das componentes do tensor das tensões será efectuado de acordo com a Mecânica dos Meios Contínuos. Dado o carácter bidimensional do problema o vector das tensões resultante é  $\{\sigma\} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \}^T$  (não há tensões envolvendo o eixo  $z$ , na realidade são bastante reduzidas e por isso desprezadas). O vector das deformações resultante é  $\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \}^T$  (isto é, apesar de estado plano, existe deformação segundo o eixo  $z$ ):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $E$  o módulo de elasticidade, as restantes deformações de corte relacionadas com o eixo  $z$  são bastante reduzidas e assim desprezadas). Para este estado a matriz de elasticidade  $[D]$  é definida como:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

De notar que se o coeficiente de Poisson  $\nu$  é igual a 0.5 então o sistema é incompressível elasticamente.

### 6.3 - Estado Plano de Deformação

Quando o sistema não expande segundo a direcção perpendicular ao plano das forças aplicadas (isto é, quando a espessura é elevada) então pode-se considerar como em estado plano de deformação. Se as forças aplicadas actuam no plano  $(x,y)$  então  $w$ , o deslocamento segundo a direcção  $z$ , é zero e os deslocamentos  $u$  e  $v$  são apenas funções de  $x$  e  $y$ . Este conjunto de deslocamentos faz com que as deformações relacionadas com o eixo  $z$  sejam nulas (ou seja, bastante reduzidas e por isso desprezadas) resultando o vector de deformações  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}\}^T$  e o vector das tensões  $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy}\}^T$  com a tensão segundo o eixo  $z$  determinada a partir da lei de Hooke como:

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]$$

e as restantes tensões relacionadas com o mesmo eixo reduzidas e por isso desprezadas. Para este estado a matriz de elasticidade  $[D]$  é definida como:

$$[D] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

onde  $a = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$  e  $b = \frac{\nu}{1-2\nu}$ .

## 7 - Condições de Convergência

Para a solução obtida pela utilização do método dos elementos finitos convergir para a solução exacta do problema os elementos utilizados na modelização devem ser completos e compatíveis (também designados por conformes). Se estas condições forem totalmente respeitadas, a precisão da solução aumentará continuamente com o refinamento da malha de elementos finitos utilizada. Este refinamento deveser obtido por subdivisão de um elemento anteriormente utilizado em dois ou mais; assim a malha antiga será embebida na nova. Matematicamente isto significa que o novo espaço das funções de interpolação do elemento finito conterá o espaço anteriormente usado, e ao mesmo tempo que a malha é refinada a dimensão do espaço da solução de elemento finito será continuamente aumentado para finalmente conter a solução exacta.

A necessidade de um elemento finito ser completo significa, no caso de problemas de elasticidade, que as funções dos deslocamentos do elemento devem ser capazes de representar

os deslocamentos de corpo rígido e o estado de deformação constante. Elementos não completos podem não conseguir esta representação.

Os deslocamentos de corpo rígido são os modos de deslocamento que o elemento deve ser capaz de admitir tal como um corpo rígido sem o aparecimento de deformações. Como exemplo, um elemento bidimensional em estado plano de tensão deveria ser capaz de transladar uniformemente em qualquer direcção e rodar no seu plano sem se deformar.

O número de modos de corpo rígido que um elemento deverá ser capaz de admitir geralmente pode ser identificado sem dificuldade por inspecção mas, devesse notar que o número de modos de corpo rígido é igual ao número de graus de liberdade menos o número dos modos de deformação (ou modos naturais). Para elementos finitos mais complexos os modos de deformação e os de corpo rígido são efectivamente identificados pela representação da matriz de rigidez numa base de vectores próprios. Assim, resolvendo o problema de valores/vectores próprios:

$$[K]\phi = \lambda\phi$$

obtemos:

$$[K][\Phi] = [\Phi][\Lambda]$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz que contém os vectores próprios  $\phi_1, \dots, \phi_n$  e a matriz diagonal  $[\Lambda]$  contém os valores próprios correspondentes,  $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_i)$ . Utilizando a ortonormalidade dos vectores próprios obtemos:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda].$$

Eq. 65

Podemos considerar a matriz  $[\Lambda]$  como sendo a matriz de rigidez do elemento correspondente ao vector próprio dos modos de deslocamento. Os coeficientes de rigidez  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  descrevem de forma directa quanto o elemento é rígido relativamente ao correspondente modo de deslocamento. Assim, a transformação da Eq. 65 mostra claramente quais os modos de corpo rígido e quais os modos adicionais de deformação que estão presentes (quanto menor o valor próprio mais eficaz é o elemento).

A necessidade de estados de deformação constante pode ser fisicamente interpretado se imaginarmos que mais e mais elementos são utilizados no agrupamento para representar um dado corpo. Então no limite, assim que cada elemento se aproxima de um tamanho reduzido, a deformação em cada elemento aproxima-se de um valor constante e qualquer variação complexa da deformação no interior do corpo pode ser aproximada.

Elementos compatíveis ou conformes são aqueles em que a função incógnita é contínua tanto no seu interior como na fronteira entre elementos. Repare-se que esta condição apenas implica, em geral, continuidade  $C^0$  para as funções de forma. Porém existem casos, como no estudo de flexão de placas, em que esta condição implicaria o uso de funções de forma de graus de continuidade mais elevados. Não é fácil de conseguir elevado grau de continuidade na fronteira entre dois elementos. Para contornar esta dificuldade pode utilizar-se como variável nodal o valor da derivada da função incógnita. Com este artifício consegue-se obter continuidade  $C^1$  para a função incógnita utilizando funções de forma de continuidade  $C^0$ . Fisicamente, a compatibilidade assegura que vazios entre elementos não ocorrem quando o sistema de elementos finitos é carregado. Quando apenas são definidos graus de liberdade de translação nos nós dos elementos apenas continuidade nos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  (nos que efectivamente existirem) deverá ser verificada. Contudo, quando também são definidos graus

de liberdade de rotação que são obtidos por diferenciação dos deslocamentos transversos também é necessário satisfazer a continuidade no elemento da primeira derivada do correspondente deslocamento.

Frequentemente acontece o desrespeito pela condição de compatibilidade sendo apesar disso obtidos bons resultados. O uso de elementos não conformes implica, em geral, a perda da convergência monotónica para a solução o que pode não significar total perda de convergência.

Cada elemento utilizado na modelização não deve possuir direcções preferenciais; isto é, os resultados obtidos devem ser geometricamente invariáveis.

No caso de se utilizarem polinómios interpoladores estes devem ser no mínimo simétricos em relação aos termos em  $x$  e em  $y$ .

Também a taxa de convergência depende das funções de forma utilizadas. Habitualmente é referido como muito desejável o uso de polinómios completos na definição das funções incógnitas. Em elementos de geometria constante embora seja esperado um aumento da convergência à medida que aumenta o grau do polinómio das funções de forma não está claro que essa convergência é mais rápida do que a obtida por refinamento da malha. Vários estudos [Oliveira, 1990] têm mostrado que, para um dado número de parâmetros incógnitos, a taxa de convergência obtida com aumento do grau do polinómio é sempre superior. Na prática tem que haver um compromisso, já que para modelar contornos irregulares e/ou heterogeneidades é sempre necessário considerar um grande número de elementos. A utilização de polinómios de segundo ou terceiro grau para as funções de forma parecem ser muitas vezes uma escolha acertada [Oliveira, 1990].

A verificação das condições de convergência nem sempre é fácil. Por vezes, sobretudo com uso de elementos não conformes, apenas a realização de testes (como por exemplo o “*Patch Test*”) permite concluir se há convergência e em que condições. Outros métodos de verificação fazem uso da análise dos valores e vectores próprios da matriz de rigidez desses elementos.

### **7.1 - Verificação da Convergência: o “*Patch Test*”**

Por diversos motivos, muitas vezes não são integralmente verificadas as condições necessárias para o comportamento correcto dos elementos finitos; nomeadamente no que respeita ao uso de elementos não conformes, há utilização de técnicas de integração reduzida, etc.

Bruce Irons [Oliveira, 1990] idealizou um método de verificar o comportamento de elementos finitos não *standard*, consistindo em fazer um conjunto de testes computacionais, destinados a verificar o grau de aproximação obtido em diversos casos tipo. Outros investigadores apresentaram versões mais matemáticas destes testes.

Tem havido certa controvérsia sobre a discussão matemática do “*Patch Test*” e na definição da forma que, sobretudo em situações mais complexas, este deverá ter [Oliveira, 1990].

Do ponto de vista de engenharia o “*Patch Test*” tem sido uma técnica muito útil, talvez a mais utilizada [Oliveira, 1990], para verificar o comportamento dos elementos finitos.

Basicamente o teste permite verificar se dado elemento satisfaz ou não a condição de ser completo (capaz de convergir para a solução exacta, qualquer que esta seja).

Consiste em prescrever valores da função incógnita na periferia de dado domínio e verificar se no interior deste domínio os valores obtidos, pelo método dos elementos finitos, usando o elemento em análise coincidem ou não com os esperados qualquer que seja a malha utilizada na divisão do domínio.

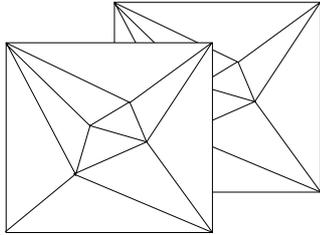
Assim, por exemplo, num problema de elasticidade de domínio  $\Omega$  diz-se que um elemento finito passa o “Patch Test” quando é capaz de reproduzir as seguintes situações:

- Deslocamento de corpo rígido na direcção de cada eixo;
- Deslocamento proporcional na direcção de cada eixo.

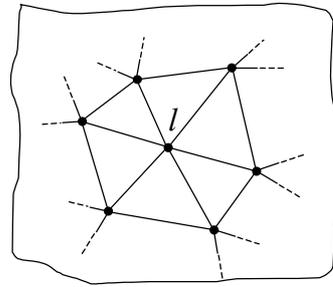
Entende-se aqui por deslocamento proporcional um campo dos deslocamentos em que cada nó na periferia é forçado a ter deslocamento proporcional à sua coordenada.

No caso do deslocamento de corpo rígido, além de os nós interiores deverem apresentar deslocamento igual ao prescrito na periferia, as tensões calculadas em todos os elementos deverão ser nulas, *Figura 31*.

Este teste deve ser feito utilizando uma malha irregular de elementos finitos, *Figura 32*. Verifica-se frequentemente que há elementos capazes de passar o “Patch Test” em malhas regulares e não em malhas distorcidas.



*Figura 31 – Exemplo de um “Patch Test” aplicado a todo o domínio: Num deslocamento do corpo rígido, não há deformações, pelo que as tensões calculadas deverão ser nulas.*



*Figura 32 – Elementos a considerar obrigatoriamente ao verificar o “Patch Test” no nó 1. Outros elementos poderiam também ser agrupados mas neles as funções de forma seriam nulas.*

## 8 - Integração Numérica

Quando os elementos tem fronteiras curvas os integrais para as matrizes dos elementos são mais facilmente determinados utilizando-se um sistema de coordenadas naturais. Os elementos bidimensionais num sistema de coordenadas naturais tornam-se quadrados ou triângulos e não é necessário determinar as equações para as suas fronteiras curvas. Contudo, determinar os integrais num sistema de coordenadas naturais não é uma tarefa fácil. A integração necessita de ser realizada numericamente pois equações explícitas não podem ser obtidas para todos os passos envolvidos no processo de integração. Neste ponto são apresentadas transformações das variáveis de integração e técnicas numéricas para integração das matrizes dos elementos finitos utilizados na discretização.

### 8.1 - Transformação das Variáveis de Integração

Os integrais que definem as matrizes dos elementos estão expressas em termos de  $dx$  ou, em caso de problemas bidimensionais, de  $dx dy$  ou ainda, em problemas tridimensionais, em termos de  $dx dy dz$ . Obviamente que é necessário uma transformação das coordenadas de integração se as integrações são efectuadas num sistema de coordenadas naturais.

A equação para transformação de uma coordenada num integral unidimensional de um

sistema de coordenadas para um outro permite escrever:

$$\int_{x_i}^{x_m} f(x) dx = \int_{p_1}^{p_2} g(p) \left( \frac{d(x(p))}{dp} \right) dp$$

Eq. 66

onde  $x(p)$  é a equação que relaciona os dois sistemas de coordenadas e  $\frac{d(x(p))}{dp} = [J] = J$  é designada, como já anteriormente referido, por matriz Jacobiana para a equação da transformação. Neste caso esta matriz consiste apenas num único elemento que é denotado por  $J$  e é designado por Jacobiano.

O objectivo principal é exprimir o integral utilizando a coordenada natural  $\xi$  e assim a Eq. 66 fica:

$$\int_{x_i}^{x_m} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} g(\xi) \left( \frac{d(x(\xi))}{d\xi} \right) d\xi$$

e torna-se necessária uma equação que exprima  $x$  em função de  $\xi$ . Esta equação é obtida utilizando as funções de forma  $N_i$  para o elemento em questão:

$$x = N_1(\xi)X_1 + \dots + N_m(\xi)X_m$$

onde  $X_1, X_2, \dots, X_m$  são as coordenadas globais para os nodos  $1, 2, \dots, m$  do elemento.

A transformação de coordenadas de integração em integrais duplos é:

$$\int_A f(x,y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi,\eta) \det[J] d\xi d\eta$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são as novas coordenadas naturais e  $[J]$  é a matriz Jacobiana da transformação entre os dois sistemas de coordenadas:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

As equações da transformação de coordenadas podem serem obtidas utilizando-se um procedimento idêntico ao descrito no problema unidimensional: as equações são determinadas utilizando-se as funções de forma e as coordenadas globais para os nós do elemento em questão.

A transformação de coordenadas de integração em integrais triplos é:

$$\int_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi,\eta,\zeta) \det[J] d\xi d\eta d\zeta$$

onde  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  são as novas coordenadas naturais e  $[J]$  é a matriz Jacobiana da transformação entre os dois sistemas de coordenadas:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

As equações da transformação de coordenadas podem ser obtidas utilizando-se um procedimento idêntico ao descrito nos problemas unidimensional e bidimensional.

### 8.2 - Técnicas de Integração Numérica

A complexidade dos termos que aparecem nas matrizes dos elementos finitos, sobretudo quando se utiliza uma transformação de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$  para poder lidar com elementos distorcidos, obriga à utilização de métodos numéricos para cálculo de integrais.

Geralmente podemos aproximar esses integrais, em domínios 1D, 2D ou 3D, efectuando uma soma de termos que envolve o valor do integrando em certo número de pontos  $\xi_i$  do domínio multiplicado por pesos<sup>9</sup>  $\omega_i$  convenientes. Assim:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \omega_0 G(\xi_0) + \omega_1 G(\xi_1) + \dots + \omega_n G(\xi_n).$$

Eq. 67

Para desenvolver métodos deste tipo, no domínio 1D, podemos escolher pontos  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  no domínio e calcular o polinómio de grau  $n$  que é exactamente igual a essa função  $G(\xi)$  nesses pontos. Faremos:

$$P_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n$$

Eq. 68

sendo  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  obtidos do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} G(\xi_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_n \xi_0^n \\ \dots \\ G(\xi_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^n \end{cases}$$

Eq. 69

O integral da Eq. 67 será agora calculado aproximadamente substituindo a função integrante  $G(\xi)$  pela sua aproximação  $P_n(\xi)$ . Assim:

<sup>9</sup> Estes pesos dão a “zona de influência” de cada ponto de amostragem sendo o seu somatório igual ao comprimento do intervalo.

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \int_{-1}^{+1} P_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}].$$

Eq. 70

Como exemplo, vejamos o caso da *Figura 33* que ilustra a conhecida regra trapezoidal.

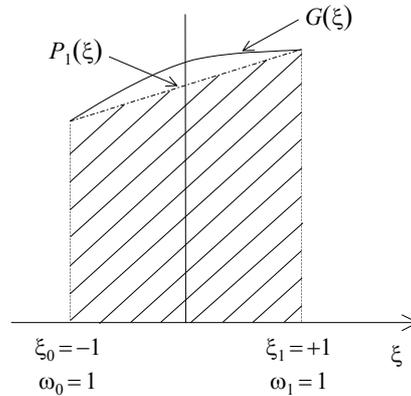


Figura 33- Pesos e colocação dos pontos correspondentes à regra trapezoidal para o cálculo de  $\int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi$

Seguindo o sugerido na Eq. 68 e na Eq. 69 chegaríamos aos valores:

$$\alpha_0 = \frac{G(\xi_1) + G(\xi_0)}{2} \text{ e } \alpha_1 = \frac{G(\xi_1) - G(\xi_0)}{2}$$

e o valor do integral, de acordo com Eq. 70, será:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi = G(\xi_1) + G(\xi_0).$$

Uma análise de erros na aproximação referida pela Eq. 70 mostra a possibilidade de integração exacta de qualquer polinómio de grau  $\leq n$  se  $n$  for ímpar. Se  $n$  for par a expressão Eq. 70 dará um integral exacto de um polinómio até ao grau  $n + 1$ .

Num domínio 2D, estamos perante o cálculo de um integral duplo da forma:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Como se trata de um domínio rectangular o método mais simples consiste em efectuar duas integrações numéricas nas direcções  $\xi$  e  $\eta$  de forma independente. Teremos então:

$$I \cong \sum_{j=0}^n \left( \omega_j \left( \sum_{i=0}^n \omega_i G(\xi_i, \eta_j) \right) \right)$$

Eq. 71

ou seja:

$$I \cong \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \bar{\omega}_{ij} G(\xi_i, \eta_j)$$

Eq. 72

sendo  $\bar{\omega}_{ij} = \omega_i \omega_j$  a “área de influência” de cada ponto de amostragem, dando o somatório destes produtos a área do domínio considerado.

Se os integrais nas direcções  $\xi$  e  $\eta$  são exactos para polinómios de graus  $p$  (independentemente) então as expressões da Eq. 71 e da Eq. 72 permitirão calcular exactamente todos os termos  $\xi^{p_1} \eta^{p_2}$  sendo  $p_1$  e  $p_2$  não superiores a  $p$ .

O integral de uma função definido numa região triangular, utilizando-se coordenadas de área  $(L_0, L_1, L_2)$ , Apêndice A.7, é:

$$\int_A f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} g(L_0, L_1) dL_0 dL_1$$

onde  $g(L_0, L_1)$  inclui o termo  $\det[J]$ .

A passagem a três dimensões é imediata. Temos agora:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \cong \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \bar{\omega}_{ijk} G(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

sendo  $\bar{\omega}_{ijk} = \omega_i \omega_j \omega_k$  o “volume de influência” de cada ponto de amostragem, dando o somatório destes produtos o volume do domínio considerado.

Note-se também que a integração numérica permite muito facilmente considerar elementos de espessura variável: Basta que se entre na expressão da integração respectiva com a espessura  $t_i$  em cada ponto de amostragem. Normalmente é dada a espessura do elemento em cada nodo, sendo a espessura nos pontos de amostragem interpolada recorrendo-se às funções de forma e à espessura nos nodos.

### 8.2.1 - Método de Newton-Cotes

Utilizando igual espaçamento entre os pontos, a expressão da Eq. 70 corresponde aos métodos de Newton-Cotes para o cálculo de integrais. Não são habitualmente utilizados em elementos finitos por exigirem em geral  $n + 1$  cálculos da função integrante; contudo, este método pode ser eficiente em análise não lineares [Bathe, 1996].

### 8.2.2 - Quadratura Gaussiana (Gauss-Legendre)

Um método alternativo consistirá em atribuir à priori as posições em que  $G(\xi)$  dever ser calculada tentando determinar essas posições de modo a que a aproximação dê o valor exacto do integral sempre que  $G(\xi)$  for um polinómio de grau  $\leq p$  sendo  $p (\geq n)$  um valor também a determinar. Seja:

$$P_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_p \xi^p$$

e façamos:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \omega_0 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_p \xi_0^p) + \omega_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \dots$$

$$\dots + \omega_n (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_p \xi_n^p).$$

Eq. 73

Comparando esta equação com a Eq. 70, que dá o resultado do cálculo exacto do integral do polinómio  $P_p(\xi)$ , concluiremos que deverá ser:

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n = 2 \\ \omega_0 \xi_0 + \omega_1 \xi_1 + \dots + \omega_n \xi_n = 0 \\ \omega_0 \xi_0^2 + \omega_1 \xi_1^2 + \dots + \omega_n \xi_n^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 \xi_0^p + \omega_1 \xi_1^p + \dots + \omega_n \xi_n^p = \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}] \end{cases}$$

Eqs. 74

Estas condições, Eqs. 74, correspondem a um sistema de  $(p+1)$  equações nas incógnitas  $\{\omega_i, \xi_i\}$  com  $i=0, 1, \dots, n$ . Este sistema só admitirá solução quando o número de equações igualar o número de incógnitas (condição aliás não suficiente!). Ou seja:

$$p = 2n - 1.$$

Dado que  $n$  é inteiro  $p$  deverá ser ímpar. Poderemos construir a tabela da Tabela 3 com os primeiros valores de variação de  $p$  com  $n$ . Assim, por exemplo, calculando a função integrante em três pontos por este método integrar-se-ia exactamente um polinómio até ao grau cinco enquanto pelo método de Newton-Cotes só se conseguiria exactidão até ao grau três.

Uma regra para determinar-se o número de pontos de amostragem necessário para integrar uma função unidimensional é igualar  $(2n-1)$  ao grau da função a integrar (quando o valor obtido para  $n$  não é inteiro deve-se utilizar  $n$  igual ao inteiro superior mais próximo) ficando o integral com a forma:

$$I = \int_{-1}^{+1} \phi d\xi \cong \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i$$

onde  $\omega_i$  são os pesos e  $\phi_i$  o valor da função a integrar em cada um dos pontos de amostragem.

<b>Números de Pontos de Integração</b> ( $n$ )	<b>Grau do polinómio integrável exactamente</b> ( $p$ )
1	1
2	3

<b>Números de Pontos de Integração (n)</b>	<b>Grau do polinómio integrável exactamente (p)</b>
3	5
4	7
...	...

Tabela 3 - Relação entre o número de pontos de integração e o máximo grau do polinómio integrável exactamente utilizando a quadratura Gaussiana.

Este método de integração designa-se habitualmente por quadratura de Gauss-Legendre ou, de forma mais simplista, por apenas quadratura de Gauss ou Gaussiana.

A resolução dos sistemas de equações, Eqs. 74, permitira obter as coordenadas  $\xi_i$  e os pesos  $\omega_i$  para os diversos valores de  $p$ , Tabela 4.

No caso de funções de duas variáveis  $\phi = (\xi, \eta)$  o domínio de integração estará definido no plano  $(\xi, \eta)$ :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \phi(\xi_i, \eta) \right] d\eta \cong \sum_{j=1}^m \omega_j \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \phi(\xi_i, \eta_j) \right] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \omega_i \omega_j \phi(\xi_i, \eta_j).$$

Eq. 75

Para determinar-se  $m$  e  $n$  iguala-se  $(2m - 1)$  ao grau mais elevado presente na função em termos da variável  $\eta$  e  $(2n - 1)$  ao grau mais elevado presente na função em termos da variável  $\xi$ .

A Eq. 75 é normalmente implementada como um somatório simples de  $K = n * m$  pontos de amostragem sendo o produto  $\omega_i \omega_j$  o coeficiente de peso de um ponto específico.

A Figura 34 ilustra a aplicação da quadratura de Gauss-Legendre a domínios 2D.

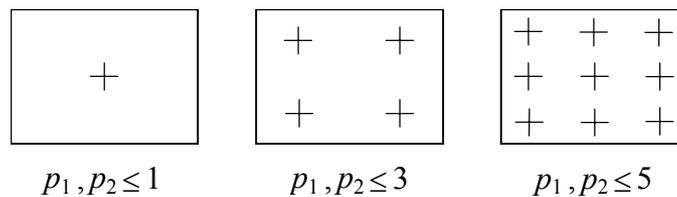


Figura 34 - Colocação dos pontos de integração na regra de Gauss-Legendre para quadriláteros.

$n$	$\pm\xi$	$\omega$	$p$
1	0.00000	2.00000	1
2	0.57735	1.00000	3
3	0.77460 0.00000	0.55556 0.88889	5
4	0.86114 0.33998	0.34785 0.65215	7
5	0.90618 0.53847 0.00000	0.23693 0.47863 0.56889	9
6	0.93247 0.66121 0.23862	0.17132 0.36076 0.46791	11
7	0.94911 0.74153 0.40585 0.00000	0.12948 0.27971 0.38183 0.41796	13
8	0.96029 0.79667 0.52553 0.18343	0.10123 0.22238 0.31371 0.36268	15
9	0.96816 0.83603 0.61337 0.32425 0.00000	0.08127 0.18065 0.26061 0.31235 0.33024	17
10	0.97391 0.86506 0.67940 0.43340 0.14887	0.06667 0.14945 0.21909 0.26927 0.29552	19

Tabela 4 - Valores das coordenadas  $\xi_i$  e dos pesos  $\omega_i$  correspondentes ao cálculo aproximado de integrais pela quadratura de Gauss-Legendre.

A quadratura de Gauss-Legendre é bastante comum em problemas de análise nos quais são utilizados elementos finitos isoparamétricos. Na *Tabela 5* é apresentada a ordem de integração recomendada em [Bathe, 1996] para a integração das matrizes de elementos finitos isoparamétricos segundo este método.

<i>Elementos Bidimensionais</i>	<i>Ordem de integração</i>
4 nós não distorcido	2×2
4 nós distorcido	2×2
8 nós não distorcido	3×3
8 nós distorcido	3×3
9 nós não distorcido	3×3
9 nós distorcido	3×3
16 nós não distorcido	4×4
16 nós distorcido	4×4

*Tabela 5 - Ordem de integração recomendada para a quadratura Gaussiana para elementos isoparamétricos segundo [Bathe, 1996]*

Na *Tabela 6* está indicada a localização dos pontos de amostragem e os correspondentes pesos para a integração em domínios triangulares, utilizando-se coordenadas de área  $(L_0, L_1, L_2)$ , *Apêndice A.7*, para a quadratura de Gauss-Legendre.

### 8.2.3 - Método de Gauss-Lobatto

Existem obviamente possibilidades inúmeras de efectuar o cálculo de integrais. Por exemplo poder-se-ão fixar no domínio alguns pontos  $\xi_i$  e deixar os outros por determinar. Neste caso o máximo grau do polinómio que consegue ainda ser integrado exactamente estará contido entre o que corresponde ao método de Newton-Cotes e ao de Gauss-Legendre. Em particular, é por vezes útil incluir os dois extremos do domínio ( $\xi_0 = -1, \xi_n = +1$ ) mas deixar livre a escolha dos pontos intermédios. É o método de Gauss-Lobatto.

Vejamos, como exemplo, um método de integração em três pontos sendo  $\xi_0 = -1$  e  $\xi_2 = +1$ . As equações *Eqs. 74* permitem escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2 \\ -\omega_0 + \omega_1 \xi_1 + \omega_2 = 0 \\ \omega_0 + \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 = \frac{2}{3} \\ -\omega_0 + \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ordem de Quadratura	Localização		Peso $w_i$	Erro
	$L_0$	$L_1$		
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$O(h)$
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0.11250	$O(h^6)$
	0.0597159	0.470142	0.00661071	
	0.470142	0.470142	0.00661071	
	0.470142	0.0597159	0.00661071	
	0.101287	0.101287	0.0629696	
	0.797427	0.101287	0.0629696	
	0.101287	0.797427	0.0629696	

Tabela 6 - Localização e pesos dos pontos de amostragem para a integração num domínio triangular utilizando a quadratura Gaussiana.

A solução deste sistema de equações será:

$$\xi_1 = 0, \omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{3} \text{ e } \omega_1 = \frac{4}{3}.$$

De igual modo se obteriam as coordenadas  $\xi_i$  e os pesos  $\omega_i$  para a regra de Gauss-Lobatto para quatro pontos, Tabela 7.

### 8.3 - Ordem de Integração

A ordem de integração numérica é geralmente definida por ensaios numéricos em problemas tipo. A solução de uma análise pelo método dos elementos finitos é inicialmente condicionada por dois factores; por um lado, o tipo de polinómio interpolador (e portanto de elemento seleccionado); por outro lado, pela discretização efectuada, isto é, pelo grau de refinamento utilizado na malha de elementos finitos. Em princípio, utilizando polinómios de grau mais elevado (isto é, elementos hierarquicamente superiores) para um mesmo número de elementos melhores serão os resultados obtidos.

A utilização de mais elementos ou de elementos com maior número de nós introduz um maior número de incógnitas e consequentemente um maior esforço computacional.

Um terceiro factor importante em termos de esforço de cálculo diz respeito à ordem de integração utilizada na avaliação das matrizes de elemento. O esforço é proporcional ao

número de pontos de integração vezes o quadrado do número de graus de liberdade do elemento.

$(n + 1)$	$\xi_i$	$\omega_i$
3	$\xi_0 = -1$	$\omega_0 = \frac{1}{3}$
	$\xi_1 = 0$	$\omega_1 = \frac{4}{3}$
	$\xi_2 = +1$	$\omega_2 = \frac{1}{3}$
4	$\xi_0 = -1$	$\omega_0 = \frac{1}{6}$
	$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\omega_1 = \frac{5}{6}$
	$\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\omega_2 = \frac{5}{6}$
	$\xi_3 = +1$	$\omega_3 = \frac{1}{6}$

Tabela 7 - Valores das coordenadas  $\xi_i$  e correspondentes pesos  $\omega_i$  correspondentes ao cálculo aproximado de integrais pela regra de Gauss-Lobatto

O limite inferior à ordem de integração é estabelecido pela necessidade de que a lei utilizada calcule o volume do corpo de forma exacta. Com efeito, à medida que a malha é refinada, será obtido um estado de tensão constante em cada elemento; por outro lado, a energia de deformação, será dada por

$$\iint c[J]t d\xi d\eta, \text{ onde } t \text{ é a espessura constante e } [J] \text{ a matriz Jacobiana,}$$

ou

$$\iiint c[J]t d\xi d\eta d\zeta, \text{ onde a espessura } t \text{ não é constante e } c = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}.$$

Cada um dos integrais será igual a uma constante  $c$  (devido ao estado de tensão na malha) vezes um elemento de volume. Se o volume da estrutura for integrado de forma exacta, a energia de deformação também o será.

No caso de elementos lineares, o termo  $[J]t$  é linear em  $\xi$  e  $\eta$  e portanto só será necessário um ponto de integração. No caso de elementos quadráticos,  $[J]$  contem termos em  $\xi^3$  e  $\eta^3$  e portanto será necessária uma lei de  $2 \times 2$  pontos de Gauss.

À medida que a malha é refinada, os elementos tornam-se paralelogramos de lados rectos. No limite, os elementos de 8 nós comportar-se-iam como elementos lineares de 4 nós. Seria então teoricamente possível a utilização de 1 ponto de Gauss. Esta regra não é no entanto aconselhável pois poderá originar modos de energia de deformação nula.

Um modo de energia de deformação nula forma-se quando às deformações impostas aos graus de liberdade corresponde um campo de deformações nulas nos pontos de integração.

Se o modelo de elementos finitos admitir modos de energia nula, a sua matriz rigidez  $[K]$  será singular e não é possível resolver o sistema de equações de equilíbrio. No caso de uma malha de elementos lineares 2D o problema resolver-se-ia, por exemplo, integrando pelos menos um elemento em  $2 \times 2$  pontos de Gauss ou, se o problema físico o permitir, fixando o deslocamento nos pontos de Gauss 1, 2 e 3.

#### 8.4 - Que Tipo de Regra Utilizar?

No caso de problemas planos, em geral uma regra de  $2 \times 2$  pontos de Gauss é suficiente quer para elementos lineares quer para parabólicos. No caso de modelos 3D, a regra  $2 \times 2$  pontos de Gauss é a melhor no caso do paralelepípedo linear de 8 nós mas pode originar resultados errados no caso de elementos parabólicos; para estes elementos parabólicos, há que recorrer à regra de  $3 \times 3 \times 3$  pontos de Gauss ou à regra de 14 pontos, portanto mais económica, a seguir indicada:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \eta_1, \zeta) = B_6 [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + \dots (6 \text{ termos})] \\ + C_8 [f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + \dots (8 \text{ termos})]$$

em que

$$B_6 = 0.886426592797784, C_8 = 0.335180055401662, b = 0.795822425754222, \\ c = 0.758786910639328.$$

### 9 - Conclusões

Em problemas de meios contínuos, quer se trate de análise estrutural, teoria da elasticidade ou mecânica dos fluidos, o número de graus de liberdade é infinito e são poucas as soluções analíticas conhecidas. Ou melhor, são poucos os problemas para os quais é possível uma solução analítica de  $A$  a  $Z$ . Na maior parte dos problemas práticos é no entanto possível tentar uma solução numérica aproximada. Isto só será possível admitindo que o “contínuo” pode ser modelado por um número finito de variáveis. No caso do método dos elementos finitos, o contínuo é subdividido num conjunto de elementos, ligados entre si num número finito de pontos, os pontos nodais ou nós.

O método dos elementos finitos em engenharia foi inicialmente desenvolvido numa base física para a análise de problemas de estruturas mecânicas. Contudo, foi rapidamente reconhecido que a sua técnica podia ser aplicada de forma também bastante satisfatória a outras classes de problemas.

Os pontos importantes a ter em consideração numa análise de um sistema pelo método dos elementos finitos são os seguintes:

1. A escolha do modelo matemático a utilizar na modelização deverá depender na solução a ser esperada;

2. O modelo matemático mais adequado é aquele que origina as soluções para as incógnitas do problema com a precisão desejada e com o menor custo possível;
3. Uma solução, segundo o método dos elementos finitos, só é adequada para o modelo matemático escolhido para o problema e não pode fornecer mais informações além das que estão contidas no mesmo modelo;
4. Deverá existir um compromisso adequado entre a complexidade do modelo matemático adaptado e a precisão requeridas para as soluções determinadas pela utilização do mesmo. Por vezes o modelo matemático adequado para um determinado problema é tão complexo que a sua utilização se torna impossível. Nestes casos devera-se optar por um modelo mais simplista que origine soluções satisfatórias para o problema em questão.

Em resumo, deveremos ter sempre consciência que o passo crucial em qualquer análise utilizando o métodos dos elementos finitos é sempre a escolha do modelo matemático apropriado pois a solução encontrada pelo método apenas é solução para este mesmo modelo. Além do mais, o modelo matemático deverá depender das incógnitas da análise e deverá ser robusto e eficiente. No processo de análise, devera-se determinar se o modelo matemático foi resolvido com a precisão adequada e se o mesmo modelo foi adequado para as incógnitas em estudo. Adotar o modelo matemático, resolver o modelo pelos procedimentos apropriados dos elementos finitos, e verificar e validar as soluções determinadas são as fases fundamentais de uma análise utilizando o método dos elementos finitos.

Não será por demais realçar que tratando-se de um método de aproximação, aplicável aos mais diversos problemas da Física, os resultados dizem respeito ao modelo matemático e será portanto necessário garantir que este representa com grau de aproximação suficiente o modelo real. Em princípio tal facto está logicamente garantido desde que se utilize um número suficiente de elementos finitos, isto é uma malha suficientemente refinada. O número de elementos desempenha portanto um papel fundamental mas, o aspecto e a distorção dos mesmos é também importante.

O grau de precisão obtido pelo método dos elementos finitos depende assim de diversos factores entre os quais se encontra a forma dos elementos e o tipo de funções de interpolação escolhidas.

Apesar, que no geral em análises pelo método dos elementos finitos (quer sejam estáticos quer sejam dinâmicos), o equilíbrio diferencial não é exactamente satisfeito em todos os pontos do sistema contínuo considerado, duas propriedades importantes são sempre verificadas pela solução determinada pelo método, independentemente da malha utilizada ser grosseira ou mais refinada. Estas propriedades são:

- *equilíbrio nos pontos nodais;*
- *equilíbrio de cada elemento finito utilizado na modelização.*

Nomeadamente, considerando que uma análise segundo o método dos elementos finitos foi efectuada e que seguidamente foi calculada para cada elemento finito  $m$  os vector de forças nos pontos nodais:

$$\{F^{(m)}\} = \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}] \{\sigma^{(m)}\} dV^{(m)}$$

onde  $\{\sigma^{(m)}\} = [D^{(m)}] \{\varepsilon^{(m)}\}$ . De seguida é possível observar que de acordo com a propriedade 1:

1. Em qualquer nodo de um elemento, o somatório das forças nodais está em equilíbrio com as forças externas nodais aplicadas (nas quais estão incluídas as forças de corpo, de tracção na superfície, das tensões iniciais, das cargas concentradas, da inércia, de amortecimento e das reacções).

e de acordo com a propriedade 2:

2. Cada elemento  $m$  está em equilíbrio sob as suas forças  $\{F^{(m)}\}$ .

A propriedade 1 é rapidamente verificada pois a equação:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} = \{R\}$$

exprime o equilíbrio no ponto nodal e temos  $\sum_m \{F^{(m)}\} = [K] \{U\}$ .

O estado de equilíbrio de cada elemento finito da propriedade 2 é verificado desde que as funções de interpolação para os deslocamentos do elemento finito na matriz  $[N^{(m)}]$  satisfaçam os requisitos básicos de convergência, os quais incluem a condição de o elemento ser capaz de representar movimentos de corpo rígido. Nomeadamente, considerando que o elemento  $m$  é sujeito ao vector de forças nodais  $\{F^{(m)}\}$  e é imposto deslocamentos nodais virtuais correspondendo aos movimento de corpo rígido. Então para cada movimento virtual de corpo rígido com deslocamentos nodais  $\{\bar{u}\}$ , temos:

$$\{\bar{u}\}^T \{F^{(m)}\} = \int_{V^{(m)}} [[B^{(m)}] \{\bar{u}\}]^T \{\sigma^{(m)}\} dV^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \{\bar{\varepsilon}\} \{\sigma^{(m)}\} dV^{(m)} = 0$$

pois  $\{\bar{\varepsilon}\} = \{0\}$ . Utilizando todos os movimentos de corpo rígido aplicáveis concluímos que as forças  $\{F^{(m)}\}$  estão em equilíbrio.

Como conclusão uma análise segundo o método dos elementos finitos pode ser interpretada como um processo no qual:

1. O sistema global é idealizado como um agrupamento de elementos discretos ligados entre si em nodos comuns.
2. As forças externas aplicadas (forças de corpo, tracções na superfície, tensões iniciais, cargas concentradas, forças de inércia e de amortecimento, e reacções) são consideradas como aplicadas nos nodos dos elementos utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais de forma a obter-se as forças externas equivalentes.

3. As forças externas equivalentes aplicadas nos nodos (determinadas no ponto 2) são equilibradas pelas forças nodais do elemento que são equivalentes (no sentido do trabalho virtual) à tensão interna do elemento:

$$\sum_m \{F^{(m)}\} = \{R\}.$$

4. Compatibilidade e a relação deformação/tensão para o material são verificadas exactamente, mas em vez de um equilíbrio ao nível diferencial, apenas é satisfeito equilíbrio global para o sistema total, nos nodos e para cada elemento  $m$  sob as suas forças nodais  $\{F^{(m)}\}$ .

## Apêndices

### A.1 - Princípio da Energia Potencial Mínima

A configuração de equilíbrio de um sistema é aquela que torna nulas todas as variações possíveis da energia potencial total do mesmo; isto é, é aquela configuração que torna mínima a energia potencial total do sistema [Branco, 1985; Gomes, 1995; Timoshenko, 1970, 1982].

Um sistema com  $n$  graus de liberdade necessita de  $n$  coordenadas generalizadas para a definição da sua configuração de equilíbrio.

Expressando a energia potencial total em função destas  $n$  coordenadas generalizadas (designadas por  $D_i$ ):

$$\Pi_p = \Pi_p(D_1, D_2, \dots, D_n)$$

cujo diferencial total é dado por:

$$d\Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_1} dD_1 + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_2} dD_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_n} dD_n$$

garantir o mínimo de  $D_p$ , qualquer que seja a variação em torno da configuração de equilíbrio, obriga a que cada uma das derivadas parciais seja nula. Obtemos assim  $n$  equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_i} = 0 \text{ com } i = 1, 2, \dots, n.$$

A energia potencial total de um corpo ou sistema elástico é dada por:

$$\Pi_p = U - V$$

onde  $U$  é a energia de deformação elástica (*Apêndice A.2*) e  $V$  o potencial das forças exteriores.

### A.2 - Energia de Deformação

A energia de deformação [Branco, 1985; Timoshenko, 1970, 1982] para um corpo tridimensional elástico  $m$  é:

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(m)}} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) dV^{(m)}$$

que pode ser formulada como:

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(m)}} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV^{(m)}.$$

Utilizando-se a lei de Hooke generalizada, e como a matriz de elasticidade  $[D]$  é simétrica, podemos reescrever a equação anterior com a forma:

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(m)}} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV^{(m)}.$$

Escrevendo a energia de deformação em termos dos deslocamentos nodais obtemos:

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(m)}} \{\hat{u}^{(m)}\} [B]^T [D] [B] \{\hat{u}^{(m)}\} dV^{(m)} - \int_{V^{(m)}} \{\hat{u}^{(m)}\} [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} dV^{(m)}$$

onde  $\{\varepsilon_T\}$  é o vector das deformações térmicas.

Nota, foram desprezadas as tensões/deformações iniciais [Timoshenko, 1970, 1982].

### A.3 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais

A base do método dos elementos finitos, formulado a partir dos deslocamentos, é o princípio dos deslocamentos virtuais, por vezes, também designado por princípio dos trabalhos virtuais [Bathe, 1996]. Segundo este princípio, o equilíbrio de um corpo requer que para qualquer pequeno deslocamento virtual permitido imposto ao corpo no seu estado de equilíbrio, *Figura 1*, o trabalho virtual interno total é igual ao trabalho virtual externo:

$$\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_j} \{\bar{U}^{S_j}\}^T \{f^{S_j}\} dS + \sum_i \{\bar{U}^i\}^T \{R_C^i\}$$

Eq. 76

onde  $\{f^B\}$  é o vector das forças de corpo aplicadas (por exemplo: por acções gravíticas, isto é, o peso próprio dos corpos; as forças de atracção eléctrica e, em análise dinâmica, as forças de inércia),  $\{f^{S_j}\}$  é o vector das tracções na superfície do corpo (forças por unidade de área de superfície, por exemplo: forças distribuídas em vigas ou em placas ou cascas),  $\{R_C^i\}$  é o vector das forças concentradas no ponto  $i$ ,  $\{\bar{U}\}$  é o vector dos deslocamentos virtuais e o  $\{\bar{\varepsilon}\}$  é o vector das deformações virtuais correspondentes (o traço denota quantidades virtuais).

O adjectivo virtual significa que os deslocamentos virtuais (e as correspondentes deformações virtuais) não são deslocamentos reais que o corpo realmente sofra em consequência da carga aplicada; em vez disso, os deslocamentos virtuais são totalmente

independentes dos deslocamentos reais e são usados para estabelecer o equilíbrio integral da Eq. 76.

Devemos ter em consideração que na Eq. 76:

- As tensões  $\{\sigma\}$  são assumidas como quantidades conhecidas e como as únicas tensões que equilibram exactamente as cargas aplicadas.
- As deformações virtuais  $\{\bar{\varepsilon}\}$  são calculadas por diferenciação dos deslocamentos virtuais admitidos  $\{\bar{U}\}$ .
- Os deslocamentos virtuais  $\{\bar{U}\}$  devem representar um campo dos deslocamentos virtuais contínuo (para ser possível determinar  $\{\bar{\varepsilon}\}$ ), com as componentes em  $\{\bar{U}\}$  nulas para os deslocamentos correspondentes à área de suporte do corpo  $S_u$ ; também as componentes no vector  $\{\bar{U}^{S_f}\}$  são simplesmente os deslocamentos virtuais  $\{\bar{U}\}$  calculados na superfície do corpo  $S_f$  na qual actuam as tracções de superfície.
- Todas as integrações são efectuadas sobre o volume e a superfície original do corpo inalterado pelos deslocamentos virtuais impostos.

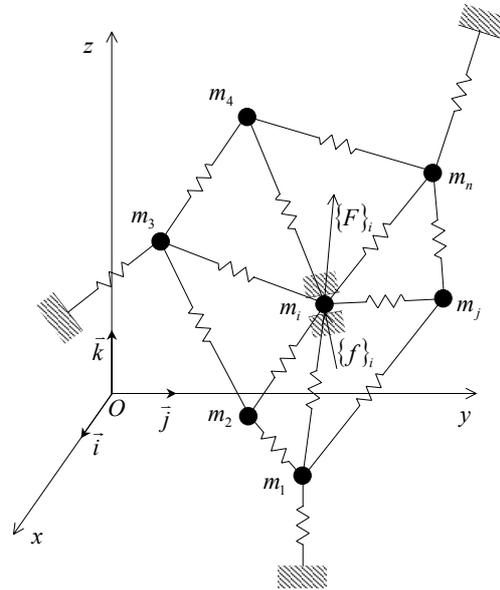
É importante ter em conta que quando o princípio dos deslocamentos virtuais, Eq. 76, é satisfeito para todos os deslocamentos virtuais admissíveis e a tensão  $\{\sigma\}$  é obtida adequadamente a partir de um campo dos deslocamentos contínuo  $\{U\}$  que satisfaça as condições de deslocamentos na fronteira ao longo da superfície  $S_u$ , todos os três requisitos fundamentais da mecânica são preservados:

1. O equilíbrio é garantido, pois o princípio dos deslocamentos virtuais é uma expressão de equilíbrio.
2. A compatibilidade é garantida, porque o campo dos deslocamentos  $\{U\}$  é contínuo e satisfaz as condições dos deslocamentos na fronteira.
3. A lei deformações/tensões é garantida, pois a tensão  $\{\sigma\}$  é calculada utilizando-se as relações constitutivas a partir da deformação  $\{\varepsilon\}$  (a qual foi determinada a partir dos deslocamentos  $\{U\}$ ).

Até agora foi assumido que o corpo que tem vindo a ser considerado está suportado adequadamente; por exemplo, existem condições de suporte suficientes para uma única solução para os deslocamentos. Contudo, o princípio dos deslocamentos virtuais também é verificado quando todos os deslocamentos de suporte são removidos e, em vez destes, são aplicadas as reacções correctas (necessariamente assumidas como conhecidas). Neste caso a área de superfície  $S_f$ , na qual tracções conhecidas são aplicadas, é igual à área da superfície total do corpo  $S$  ( $S_u$  é nula). Esta observação básica pode ser utilizada para desenvolver as equações do método dos elementos finitos; isto é, é possível não considerar em primeiro lugar nenhuma condição de deslocamento na fronteira, seguidamente desenvolver as equações correspondentes para os elementos finitos e, antes de resolver estas equações, impor as condições dos deslocamentos na fronteira.

#### A.4 - Equações de Movimento de Newton

Consideremos o sistema de partículas da *Figura 35*, onde as partículas têm massa constante  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).



*Figura 35 - Sistema de partículas.*

As partículas podem estar ligadas por intermédio de molas, não necessariamente lineares, e sujeitas a forças dadas pelos vectores  $\{F\}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), as quais podem ser externas ao sistema ou forças nas molas ligando  $m_i$  com todas ou algumas massas restantes. Podemos escrever as forças  $\{F\}_i$  com a forma:

$$\{F\}_i = F_{xi}\vec{i} + F_{yi}\vec{j} + F_{zi}\vec{k} \text{ com } i = 1, 2, \dots, N,$$

onde  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$  e  $F_{zi}$  são as componentes cartesianas do vector  $\{F\}_i$ , respectivamente, segundo a direcção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são os correspondentes vectores unitários. Em adição às forças aplicadas  $\{F\}_i$  assumimos que existem forças de restrição  $\{f\}_i$  actuando nas massas  $m_i$ . Tais forças podem ocorrer se o movimento das massas  $m_i$  é restrito de alguma maneira. As forças de restrição podem ser escritas como:

$$\{f\}_i = f_{xi}\vec{i} + f_{yi}\vec{j} + f_{zi}\vec{k} \text{ com } i = 1, 2, \dots, N,$$

onde  $f_{xi}$ ,  $f_{yi}$  e  $f_{zi}$  são as suas componentes cartesianas. Porque o movimento de  $m_i$  é em geral tridimensional o seu deslocamento pode ser escrito com a forma:

$$\{r\}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \text{ com } i = 1, 2, \dots, N,$$

onde  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  são as componentes cartesianas do vector do deslocamento. Utilizando a segunda lei de Newton para cada partícula, podemos escrever as equações do movimento em termos das coordenadas cartesianas do seguinte modo:

$$F_{xi} + f_{xi} = m_i \ddot{x}_i, \quad F_{yi} + f_{yi} = m_i \ddot{y}_i, \quad F_{zi} + f_{zi} = m_i \ddot{z}_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, N,$$

*Eqs. 77*

e que podem ser reescritas, utilizando a notação vectorial, da seguinte forma:

$$\{F\}_i + \{f\}_i = m_i \{\ddot{r}\}_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, N.$$

Eq. 78

As Eqs. 77, ou Eq. 78, representam as  $3N$  equações diferenciais de segunda ordem do movimento do sistema. Podem ser lineares ou não lineares dependendo se as forças  $\{F\}_i$  e  $\{f\}_i$  são funções lineares ou não lineares dos deslocamentos  $\{r\}_i$  e da sua segunda derivada em relação ao tempo  $\{\ddot{r}\}_i$ .

Na maior parte dos casos, as forças de restrição  $\{f\}_i$  não são dadas de forma explícita mas implícita através de equações de restrição do movimento de qualquer uma das massas  $m_i$ . Como resultado, as coordenadas  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) não são todas independentes. De facto, uma equação de restrição pode ser utilizada, pelo menos em princípio, para eliminar uma coordenada na formulação do problema. Se existirem  $c$  equações de restrição então o número de coordenadas independentes para a descrição do sistema é apenas  $n = 3N - c$ . Neste caso, diz-se que o sistema tem  $n$  graus de liberdade e um conjunto de no mínimo  $n$  coordenadas independentes é necessário de forma a descrever completamente o mesmo. Este conjunto de coordenadas não é único e estas são habitualmente designadas por coordenadas generalizadas  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

## A.5 - Princípio de Alembert e Equações de Lagrange

O princípio do trabalho virtual, *Apêndice A.3*, é estabelecido para o caso de sistemas estáticos. Por si mesmo não pode ser utilizado na formulação de problemas dinâmicos. Contudo, pode-se estender o princípio do trabalho virtual para problemas dinâmicos, tal pode ser conseguido utilizando um princípio atribuído a Alembert [Meirovitch, 1986].

Utilizando a segunda lei de Newton, *Apêndice A.4 Eq. 78*, podemos escrever:

$$\{F\}_i + \{f\}_i - m_i \{\ddot{r}\}_i = 0 \text{ com } i = 1, 2, \dots, N,$$

Eq. 79

onde  $-m_i \{\ddot{r}\}_i$  pode ser considerado como uma força de inércia. A Eq. 79 é geralmente referida como o princípio de Alembert e permite encarar problemas dinâmicos como se tratassem de problemas estáticos; assim, esta equação permite estender o princípio do trabalho virtual para o caso dinâmico. De facto, utilizando-se a Eq. 79, podemos escrever o trabalho virtual para a partícula  $i$ , *Figura 35*, como:

$$\left( \{F\}_i + \{f\}_i - m_i \{\ddot{r}\}_i \right) \cdot \{\delta r\}_i = 0 \text{ com } i = 1, 2, \dots, N.$$

Assumindo deslocamentos virtuais  $\{\delta r\}_i$  compatíveis com as restrições do sistema, podemos considerar o trabalho total do sistema de partículas e obtemos:

$$\sum_{i=1}^N \left( \{F\}_i - m_i \{\ddot{r}\}_i \right) \cdot \{\delta r\}_i = 0.$$

Eq. 80

onde o trabalho virtual associado com as forças de restrição é nulo:

$$\sum_{i=1}^N \{f\}_i \cdot \{\delta r\}_i = 0.$$

A Eq. 80 engloba simultaneamente o princípio do trabalho virtual para problemas estáticos e o princípio de D'Alembert e é designado pelo princípio generalizado de D'Alembert. A soma da força aplicada e da força de inércia,  $\{F\}_i - m_i \{\ddot{r}\}_i$ , é por vezes designada por força efectiva. Assim, o trabalho virtual pelas forças efectivas ao longo dos deslocamentos virtuais compatíveis com as restrições do sistema é nulo.

Apesar do princípio de D'Alembert, Eq. 80, permitir uma formulação completa da mecânica de um problema, não é muito adequado para derivar as equações de movimento do sistema porque os problemas são formulados em termos de coordenadas de posição, as quais podem não ser todas independentes. Contudo, o princípio é útil em permitir uma transição para uma formulação em termos de coordenadas generalizadas que já não apresentam essa dependência. Além do mais, esta formulação é extremamente conveniente, pois permite a derivação de todas as equações diferenciais do movimento do sistema a partir de duas funções escalares, a da energia cinética e da energia potencial, e uma expressão infinitesimal, a do trabalho virtual associado às forças não conservativas. Desta forma, diagramas de corpo livre ou nenhum conhecimento das forças de restrição não são necessários. As equações diferenciais derivadas deste modo são designadas por equações de Lagrange.

## A.6 - Método de Rayleigh-Ritz

O problema fundamental da Mecânica dos Meios Contínuos consiste na determinação da deformação de corpos sobre a acção de um sistema de forças. O método de Rayleigh-Ritz [Bathe, 1996; Meirovitch, 1986], desenvolvido por Lord Rayleigh em 1877 e posteriormente generalizado por W. Ritz em 1908 [Gomes, 1995], permite a resolução deste problema<sup>10</sup> recorrendo a funções de aproximação, geralmente sob a forma polinomial, que contenham um número suficiente de coeficientes independentes. A partir destas equações é possível chegar às equações de equilíbrio utilizando-se o princípio da energia potencial mínima (*Apêndice A.1*) para determinar os referidos coeficientes.

Admitindo uma solução para o campo dos deslocamentos,  $u$  segundo o eixo  $x$ ,  $v$  segundo o  $y$  e  $w$  segundo o  $z$ , do tipo:

$$u = \sum a_i f_i, f_i = f_i(x, y, z), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$v = \sum b_j g_j, g_j = g_j(x, y, z), j = 1, 2, \dots, m,$$

$$w = \sum c_k h_k, h_k = h_k(x, y, z), k = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $f_i$ ,  $g_j$  e  $h_k$  são funções de aproximação, função das coordenadas  $(x, y, z)$  e admissíveis;  $a_i$ ,  $b_j$  e  $c_k$  os coeficientes dos polinómios interpoladores usualmente designados por coordenadas generalizadas.

Arbitradas as funções de aproximação e conhecidas as relações deformações/deslocamentos e tensões/deformações é possível exprimir a energia de deformação e a energia potencial de deformação em função das coordenadas generalizadas.

<sup>10</sup> Em problemas de análise de vibrações o método de Rayleigh-Ritz é utilizado para gerar um sistema de equações, por minimização do quociente de Rayleigh em relação aos deslocamentos nodais, com o qual é possível determinar uma aproximação das frequências naturais do sistema. As aproximações obtidas são de melhor qualidade para as menores frequências do sistema tornando-se de qualidade mais reduzida à medida que as frequências são mais elevadas.

O princípio da energia potencial mínima permitirá, *Apêndice A.1*, escrever as  $(l+m+n)$  equações de equilíbrio que conduzem à solução do problema. Estas equações têm a forma:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial b_j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_k} = 0,$$

onde  $\Pi_p$  designa a energia potencial e para um corpo tridimensional tem a forma:

$$\Pi_p = \int_V w_0 dV - \int_V \{U\}^T \{f^B\} dV - \int_{S_j} \{U\}^T \{f^{S_j}\} dS - \sum_i \{U^i\} \{R_C^i\}$$

onde  $V$  designa volume,  $S$  superfície,  $\{f^B\}$  o vector das forças de corpo ou de volume (por exemplo: por acções gravíticas, isto é, o peso próprio dos corpos; as forças de atracção eléctrica e, em análise dinâmica, as forças de inércia),  $\{f^{S_j}\}$  o vector das forças de superfície (por exemplo: forças distribuídas em vigas ou em placas ou cascas),  $\{R_C^i\}$  o vector das forças pontuais no nodo  $i$ ,  $\{U\}$  o vector dos deslocamentos,  $\{U^i\}$  o vector dos deslocamentos no nodo  $i$  e  $w_0$  designa a energia de deformação por unidade de volume e tem a forma:

$$w_0 = \frac{1}{2} \left( \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}^T [D] \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon\} \right)$$

onde  $\varepsilon_0$  e  $\sigma_0$  designam, respectivamente, as deformações e as tensões iniciais.

A questão fundamental do método de Rayleigh-Ritz é a determinação da melhor função de aproximação para o campo dos deslocamentos. Como metodologia pode dizer-se que as funções de aproximação devem ser tão simples quanto possível. Em geral são constituídas por fórmulas polinomiais, séries de senos ou co-senos ou séries de Fourier.

Uma das condições necessárias para o método de Rayleigh-Ritz convergir para a solução exacta é que o campo dos deslocamentos seja completo: Uma função de aproximação, e o respectivo campo dos deslocamentos que aproxima, diz-se completa se os deslocamentos e as suas derivadas que aparecem na equação de  $\Pi_p$  podem ser obtidos com o grau de precisão desejado se se considerarem os termos suficientes da série de aproximação. Uma série polinomial é completa, se forem utilizados termos de ordem suficientemente alta (função do problema) e não forem omitidos nenhuns termos. Um campo dos deslocamentos completo exige que os termos de ordem inferior sejam incluídos.

Em problemas de engenharia estrutural as soluções determinadas pelo método de Rayleigh-Ritz ou são exactas ou mais rígidas que a solução exacta; isto é, este método cria uma estrutura aproximada à real que em geral é mais rígida.

O método dos elementos finitos pode ser visto como um caso especial do método de Rayleigh-Ritz; contudo diferenças significativas existem entre os dois.

No método clássico de Rayleigh-Ritz as funções de interpolação são globais, no sentido de serem definidas em todo o domínio do sistema, e tendem a ser complicadas e de trato computacional difícil. Esta dificuldade é particularmente verificada quando é necessária a integração das funções de interpolação. Estas funções são todas diferentes, apesar de poderem pertencer ao mesmo conjunto de funções, tal como o das funções trigonometrias, funções de

Bessel, etc. Cada um destes conjuntos de funções satisfazem uma dada relação de ortogonalidade mas, no geral, esta relação não é a especificada pelo problema. A utilização de funções de interpolação globais torna o método clássico Rayleigh-Ritz mais apropriado para sistemas com distribuição de massa e de rigidez praticamente uniforme. O cálculo computacional das matrizes de massa e de rigidez tende a ser particular ao problema em questão. Por outro lado, estas matrizes tendem a serem de baixa ordem.

Os coeficientes das séries são geralmente de natureza abstracta e representam, simplesmente, a contribuição de uma dada função admissível para o campo dos deslocamentos. Para aumentar a precisão da solução computacional aumenta-se o número de termos das séries. Tal aumento implica apenas o cálculo computacional das entradas adicionais nas matrizes de massa e de rigidez, deixando as entradas anteriormente calculadas constantes.

Finalmente, a convergência para a solução desejada é garantida pois as funções de interpolação admissíveis são geralmente de um conjunto completo.

No método dos elementos finitos as funções de interpolação são locais, no sentido de estarem definidas em pequenos subdomínios do sistema, e tendem a ser bastante simples e de tratamento computacional fácil. De facto, na sua grande maioria, são polinómios de baixo grau e, geralmente, satisfazendo os mínimos requisitos de derivação. As funções de interpolação são iguais para todos os elementos do mesmo tipo e são praticamente ortogonais. Como consequência, as matrizes de massa e de rigidez tendem a ser do tipo matrizes de banda. Do mesmo modo, o cálculo destas matrizes torna-se bastante simples e francamente adaptável a programas computacionais e consiste basicamente no agrupamento das matrizes dos elementos individuais.

Como no método dos elementos finitos são utilizadas funções de interpolação locais, este é mais adequado para sistemas com variações bruscas na distribuição de massa e de rigidez. Contudo, neste método as matrizes de massa e de rigidez são geralmente de elevada ordem. Os coeficientes das séries são coordenadas nodais e têm um elevado significado físico pois representam os deslocamentos e declives nos nodos.

Para aumentar a resolução da solução determinada o tamanho dos elementos utilizados deve ser reduzido (isto é, devem ser utilizados mais elementos: refinando-se a malha). Tal requer uma nova computação das matrizes de massa e de rigidez. Apesar do número das funções de interpolação puder ser aumentado, de tal maneira a obter-se uma solução com a resolução pretendida, as funções de interpolação locais não se enquadram na definição de conjunto completo e assim nem sempre é garantida uma convergência monótona para a solução desejada.

Uma abordagem intermédia consiste em considerar o sistema global como a soma de elementos mais simples, tal e qual como no método dos elementos finitos, e determinar o campo dos deslocamentos para cada elemento individual pelo método de Rayleigh-Ritz considerando como coordenadas generalizadas os deslocamentos nodais em vez dos coeficientes das funções de interpolação.

## **A.7 - Coordenadas de Área**

Em sub domínios do tipo triangular torna-se útil um sistema de coordenadas particularmente adaptado a estes elementos: as coordenadas de área  $(L_0, L_1, L_2)$ . Tais coordenadas podem definir-se pelas expressões:

$$\begin{cases} x = L_0x_0 + L_1x_1 + L_2x_2 \\ y = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2 \\ 1 = L_0 + L_1 + L_2 \end{cases}$$

onde  $L_0, L_1, L_2$  são as coordenadas de área e  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas cartesianas globais dos nós dos vértices.

Verifica-se que  $L_i$  assume valor unitário no nó  $i$  e valor nulo nos restantes. O valor de  $L_i$  pode definir-se pelo cociente entre duas áreas: A área do triângulo definido pelo ponto  $P(x, y)$  e pelos extremos do lado oposto  $i$ ; e a área total do triângulo; daí a designação de coordenadas de área. Para justificar esta constatação fazamos o cálculo explícito dos valores de  $L_0, L_1, L_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

Teremos, por exemplo, para  $L_0$ :

$$L_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Explicitando o dominador teremos:

$$\Delta = (x_1y_2 - x_2y_1) - (x_2y_0 - x_0y_2) + (x_0y_1 - x_1y_0).$$

Podemos analisar cada uma das parcelas colocadas dentro de parênteses como sendo o resultado do produto vectorial de dois vectores, respectivamente, os vectores de posição de cada par de vértices do triângulo. Deste modo, cada parcela destas é numericamente igual à área do paralelogramo construído a partir dos referidos vectores de posição. Será o dobro da área triangular definida pela origem do sistema de coordenadas e o par de vértices correspondente, *Figura 36*. Constatamos assim que o denominador representa, somadas algebricamente as três áreas dentro de parênteses, o dobro da área do triângulo de vértices  $P_0, P_1$  e  $P_2$ . Igual raciocínio levar-nos-ia à conclusão de que o numerador é numericamente igual ao dobro da área triangular definida pelo ponto  $P$  e pelos vértices  $P_1$  e  $P_2$ , opostos a  $P_0$ .

### A.8 - Exemplo I: Determinação das Matrizes Para um Elemento Finito Axial

Utilizando-se a abordagem variacional [Meirovitch, 1986], as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais equivalentes podem ser obtidos através das expressões em termos de coordenadas nodais, respectivamente, para a energia potencial, para a energia cinética e para o trabalho virtual.

O deslocamento axial do sistema de segunda ordem da *Figura 37* pode ser escrito com a forma:

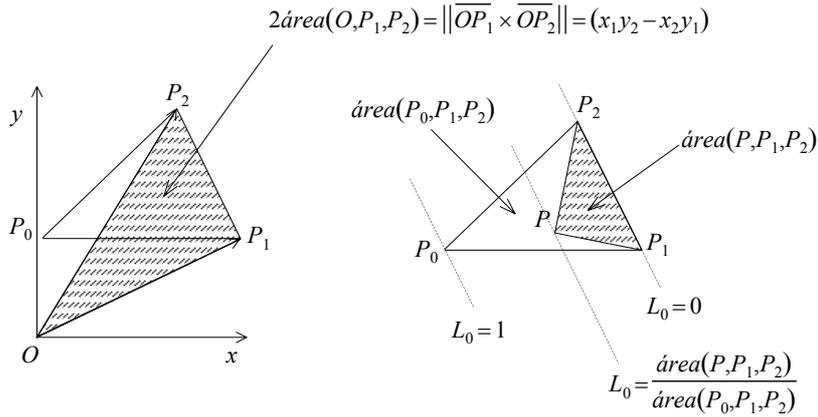


Figura 36 - Coordenadas de área em elementos triangulares.

$$u(x,t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) = \{N(x)\}^T \{\hat{u}(t)\}$$

onde  $\{N(x)\}$  é o vector de dimensão dois das funções de forma, com o índice a indicar qual o nodo com que cada função de forma está associada, e  $\{\hat{u}(t)\}$  é o correspondente vector de deslocamentos nodais. Deve-se notar que esta equação apenas é válida no interior do elemento em questão e não é aplicável fora deste.

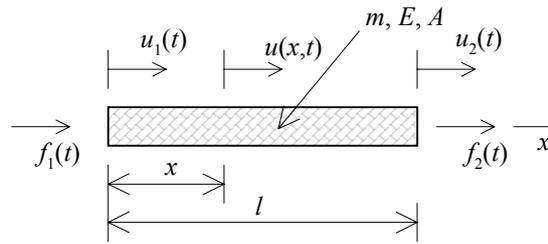


Figura 37 - Elemento axial.

A energia cinética para um elemento finito  $m$  do tipo axial é simplesmente:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \{\dot{u}(t)\}^T \{N(x)\} \{N(x)\}^T \{\dot{u}(t)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}(t)\}$$

onde:

$$[M^{(m)}] = \int_0^l m(x) \{N(x)\} \{N(x)\}^T dx$$

é a matriz  $(2 \times 2)$  simétrica de massa para o elemento  $m$  e  $m(x)$  a massa em  $x$ .

Da mesma forma, a energia potencial é:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \{ \hat{u}(t) \}^T \{ N'(x) \} \{ N'(x) \}^T \{ \hat{u}(t) \} dx \\
 &= \frac{1}{2} \{ \hat{u}(t) \}^T [K^{(m)}] \{ \hat{u}(t) \}
 \end{aligned}$$

onde:

$$[K^{(m)}] = \int_0^l EA(x) \{ N'(x) \} \{ N'(x) \}^T dx$$

é a matriz  $(2 \times 2)$  simétrica de rigidez para o elemento,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $A(x)$  a área da secção em  $x$  e  $\{ N'(x) \} = \frac{d}{dx} \{ N(x) \}$ .

Para derivar o vector de forças nodais, utiliza-se a expressão para o trabalho virtual. Assumindo que o elemento é sujeito à força axial distribuída não conservativa<sup>11</sup>  $f(x,t)$  pode-se obter:

$$\overline{\delta W}(t) = \int_0^l f(x,t) \delta u(x,t) dx = \int_0^l f(x,t) \{ N(x) \}^T \{ \delta \hat{u}(x,t) \} dx = \{ f(t) \}^T \{ \delta \hat{u}(t) \}$$

onde:

$$\{ f(t) \} = \int_0^l f(x,t) \{ N(x) \} dx \text{ é o vector de forças nodais não conservativas.}$$

Eq. 81

Utilizando para o elemento finito do tipo axial de massa  $m$  as funções de forma polinomiais de grau um:  $N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$  e  $N_2(x) = \frac{x}{l}$ , representadas na *Figura 38*, obtemos a matriz de massa:

$$[M^{(m)}] = m \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix}^T dx = m \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

isto é, para um elemento finito axial de secção constante de área  $A$  e de material com densidade  $\rho$ :

<sup>11</sup> Deve-se notar que forças concentradas podem ser transformadas em forças distribuídas por intermédio da função espacial delta de Dirac; por exemplo, a força  $P(t)$  concentrada no ponto  $x = l/3$  pode ser expressa na forma distribuída como  $f(x,t) = P(t)\delta(x - l/3)$  onde  $\delta(x - l/3)$  é a função espacial delta de Dirac.

$$[M^{(m)}] = \frac{\rho A l^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

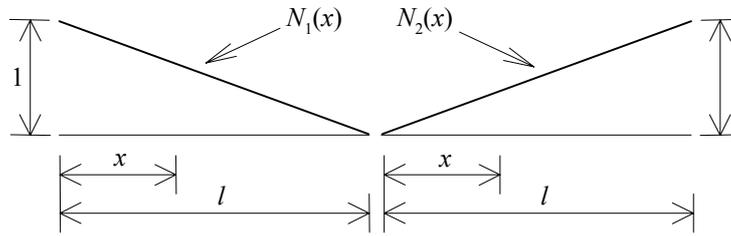


Figura 38 - Funções de forma polinomiais de grau um para um elemento do tipo axial.

Para se determinar a matriz de rigidez do elemento é necessário  $\{N'(x)\}$ :

$$\{N'(x)\} = \frac{d}{dx} \{N(x)\} = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Deste modo, obtemos a matriz de rigidez para o elemento de rigidez axial  $EA$  constante:

$$[K^{(m)}] = \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para se determinar o vector de forças nodais para a força distribuída  $f(x,t) = a + bx$  utiliza-se a Eq. 81 e obtemos:

$$\{f(t)\} = \int_0^l (a + bx) \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} dx = \int_0^l \begin{Bmatrix} a + \left(b - \frac{a}{l}\right)x - \frac{b}{l}x^2 \\ \frac{a}{l}x + \frac{b}{l}x^2 \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}al + \frac{1}{6}bl^2 \\ \frac{1}{2}al + \frac{1}{3}bl^2 \end{Bmatrix}.$$

### A8.1 - Determinação das Matrizes no Sistema Global

De acordo com o método dos elementos finitos o sistema global é composto por elementos discretos que deverão ser agrupados. As componentes dos deslocamentos nos nodos em cada elemento são especificados segundo as direcções que melhor se adaptam ao mesmo. Por exemplo, no caso de uma barra com os seus nodos designados por  $a$  e  $b$ , Figura 39, é conveniente especificar as componentes para os deslocamentos em cada um dos nodos de maneira que uma componente seja segundo a direcção axial  $x$  e a outra lhe seja ortogonal. As componentes dos deslocamentos nos nodos  $a$  e  $b$  ao longo destes eixos são designados na Figura 39, respectivamente, por  $u_1, u_2$  e  $u_3, u_4$ .

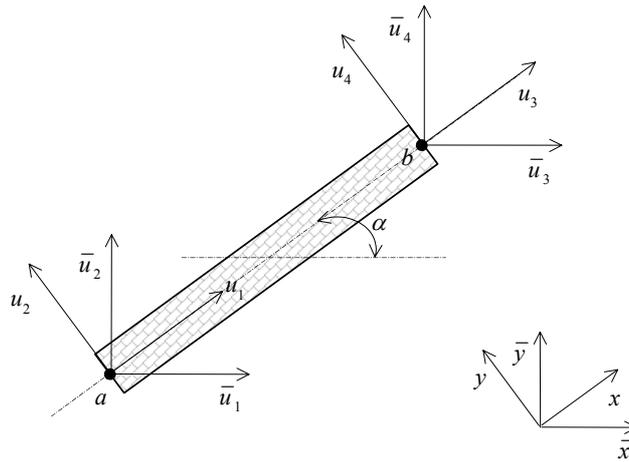


Figura 39 - Sistemas de referência para uma barra.

Como geralmente os elementos individuais são parte de um sistema mais complexo, e provavelmente têm orientações diferentes, torna-se óbvio que exprimir os deslocamentos num sistema de coordenadas particular a cada elemento (sendo, um tal sistema, designado por sistema de coordenadas locais) pode criar dificuldades no emparelhamento dos deslocamentos em cada nodo. Por esta razão, torna-se vantajoso trabalhar com as componentes dos deslocamentos num único sistema de coordenadas, enquanto se mantém a vantagem de identificar as componentes dos deslocamentos em cada elemento segundo as direcções que lhe são mais convenientes. Assim, pretende-se escolher um único sistema de referência global  $(\bar{x}, \bar{y})$  e denotar as componentes dos deslocamentos ao longo destas direcções em  $a$  por  $\bar{u}_1$  e  $\bar{u}_2$  e em  $b$  por  $\bar{u}_3$  e  $\bar{u}_4$ . Então, uma simples transformação de coordenadas, [Foley, 1991; Hall, 1993; Tavares, 1995, 1995a], permite exprimir as componentes dos deslocamentos de um elemento particular ao longo do sistema de referência global  $(\bar{x}, \bar{y})$  a partir das componentes ao longo do seu sistema de coordenadas local  $(x, y)$  e vice versa. Para se obter tal transformação de coordenadas, utiliza-se a matriz dos co-senos directores:

$$[t] = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \\ t_{y\bar{x}} & t_{y\bar{y}} \end{bmatrix}$$

onde  $t_{x\bar{x}}$  representa o co-seno do ângulo entre os eixos  $x$  e  $\bar{x}$ , etc. Esta matriz permite escrever a transformação de coordenadas do sistema global para o local:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix}$$

e a transformação do sistema local para o global:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.$$

A mesma transformação de coordenadas pode ser aplicada às componentes dos deslocamentos, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$

As equações anteriores podem ser combinadas de forma à transformação ser aplicada ao elemento como um todo obtendo-se:

$$\{u\} = [T] \{\bar{u}\}$$

Eq. 82

e

$$\{\bar{u}\} = [T]^T \{u\}$$

onde  $\{u\}$  e  $\{\bar{u}\}$  são os vectores coluna dos deslocamentos nodais com componentes respectivamente  $u_1, u_2, u_3, u_4$  e  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ , e a matriz de transformação  $[T]$  é definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}.$$

Obviamente, que existem diferentes matrizes de transformação  $[T]$  para diferentes elementos; a menos que, alguns sejam do mesmo tipo e tenham a mesma orientação. Deve ser notado que a matriz  $[T]$  é ortonormal e, assim,  $[T]^{-1} = [T]^T$ , pois  $[t]$  representa uma transformação entre dois sistemas de eixos ortogonais.

No caso da *Figura 39*, sistema plano com  $z \equiv \bar{z}$ , a matriz dos co-senos directores é:

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Para transformar as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais do sistema de referência local para o global, e vice versa, utiliza-se, novamente, a matriz de transformação geométrica  $[T]$ . Para se obter tal transformação, deve-se notar que a energia cinética e a energia potencial podem ser reescritas na forma de um produto matricial triplo:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}(t)\} \text{ e } V = \frac{1}{2} \{u(t)\}^T [K^{(m)}] \{u(t)\},$$

enquanto o trabalho virtual tem a expressão  $\overline{\delta W} = \{\delta u\}^T \{f\}$ . Mas, se as componentes dos deslocamentos locais e globais estão relacionadas por Eq. 82 então as componentes locais e globais das velocidades estão relacionadas por  $\{\dot{u}(t)\} [T] \{\dot{\bar{u}}\}$  e os correspondentes deslocamentos virtuais por:

$$\{\delta u\} = [T] \{\delta \bar{u}\}$$

Eq. 83

Assim, utilizando estas relações, pode-se obter:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [T]^T [M^{(m)}] [T] \{\dot{\bar{u}}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [\bar{M}^{(m)}] \{\dot{\bar{u}}\}$$

onde  $[\bar{M}^{(m)}] = [T]^T [M^{(m)}] [T]$  é a matriz de massa para o elemento em termos do sistema de coordenadas global  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Da mesma forma, pode-se escrever a energia potencial como:

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [T]^T [K^{(m)}] [T] \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{K}^{(m)}] \{\bar{u}\}$$

onde  $[\bar{K}^{(m)}] = [T]^T [K^{(m)}] [T]$  é a matriz de rigidez para o elemento em termos do sistema de coordenadas global  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Note-se que  $[\bar{M}^{(m)}]$  e  $[\bar{K}^{(m)}]$  são matrizes simétricas pois  $[M^{(m)}]$  e  $[K^{(m)}]$  também o são. Finalmente, inserindo a relação da Eq. 83 na expressão do trabalho virtual obtemos:

$$\delta \bar{W} = \{\delta \bar{u}\}^T [T]^T \{f\} \{\delta \bar{u}\}^T \{f\}$$

onde  $\{\bar{f}\} = [T]^T \{f\}$  é o vector de forças nodais em termos do sistema de coordenadas global  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

As matrizes de massa e de rigidez e o vector de forças nodais expressas em termos do sistema de referência global podem ser utilizadas na escrita das equações do movimento do elemento individual relativamente ao mesmo sistema. Contudo se o objectivo final é a escrita das equações do movimento do sistema global é então necessário proceder ao agrupamento das matrizes de massa e de rigidez e do vector de forças nodais de cada elemento que constitui tal sistema.

### A8.2 - Agrupamento

A essência do método dos elementos finitos é considerar o sistema global como a soma de elementos individuais. Para esta soma, ou agrupamento, dos elementos individuais representar adequadamente o sistema global deve existir compatibilidade geométrica nos nodos dos elementos; por exemplo, os deslocamentos nos nodos partilhados por vários elementos devem ser iguais para cada um destes. Do mesmo modo, as correspondentes forças nodais devem ser estaticamente equivalentes às forças aplicadas. Deve-se notar que os deslocamentos podem incluir rotações e as forças incluir binários.

Assumindo que o sistema global consiste em  $L$  elementos e que estes são identificados pelo índice  $m$  ( $m=1,2,\dots,L$ ) então, considerando um elemento  $m$ , o vector nodal de deslocamentos é designado por  $\{u^{(m)}\}$ , o de forças por  $\{f^{(m)}\}$ , a matriz de massa por  $[M^{(m)}]$  e a de rigidez por  $[K^{(m)}]$  (onde todas as quantidades referem-se a este elemento e estão expressas no sistema de coordenadas global). De seguida, assumindo que o sistema tem um total de  $N$  graus de liberdade,  $N$  deslocamentos  $u_j$  ( $j=1,2,\dots,N$ ), designa-se o vector dos  $N$  deslocamentos nodais no sistema global por  $\{U\}$ . Para ser executado o processo de agrupamento, define-se para o elemento  $m$  um vector de deslocamentos nodais expandido  $\{U^{(m)}\}_e$  obtido a partir da adição ao vector  $\{u^{(m)}\}$  de componentes com valor nulo de forma que a dimensão do vector  $\{U^{(m)}\}_e$  seja igual a  $N$ . Da mesma maneira, define-se o vector de forças nodais expandido  $\{F^{(m)}\}_e$  com  $N$  componentes; assim como, as matrizes  $(N \times N)$  de

massa  $[M^{(m)}]_e$  e de rigidez  $[K^{(m)}]_e$  expandidas obtidas a partir das respectivas quantidades para o elemento e adicionando o necessário número de zeros.

As equações de movimento para o sistema global podem ser obtidas por um processo de agrupamento que consiga exprimir a energia cinética, a energia potencial e o trabalho virtual em termos da contribuição dos elementos individuais utilizados na modelização. Assim, a energia cinética pode ser escrita com a forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{\dot{u}^{(m)}\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}^{(m)}\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{\dot{U}\}_e^T [M^{(m)}]_e \{\dot{U}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\}$$

onde

$$[M] = \sum_{m=1}^L [M^{(m)}]_e$$

é a matriz simétrica de massa para o sistema global que é obtida simplesmente pela adição das matrizes de massa expandidas dos elementos que constituem tal sistema. Da mesma forma, a energia potencial é escrita como:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{u^{(m)}\}^T [K^{(m)}]_e \{u^{(m)}\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{U^{(m)}\}_e^T [K^{(m)}]_e \{U^{(m)}\}_e = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\}$$

onde  $[K] = \sum_{m=1}^L [K^{(m)}]_e$  é a matriz simétrica de rigidez para o sistema global.

Também o trabalho virtual pode ser escrito com a forma:

$$\overline{\delta W} = \sum_{m=1}^L \{f^{(m)}\}^T \{\delta u^{(m)}\} = \sum_{m=1}^L \{F^{(m)}\}_e^T \{\delta U^{(m)}\}_e = \{F\}^T \{\delta U\}$$

onde  $\{F\} = \sum_{m=1}^L \{F^{(m)}\}_e$  é o vector de forças nodais não conservativas para o sistema global.

Utilizando as matrizes de massa e de rigidez e os vectores de forças nodais não conservativas e dos deslocamentos nodais do sistema global é possível escrever as equações de movimento de Lagrange para o mesmo com a seguinte forma matricial:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

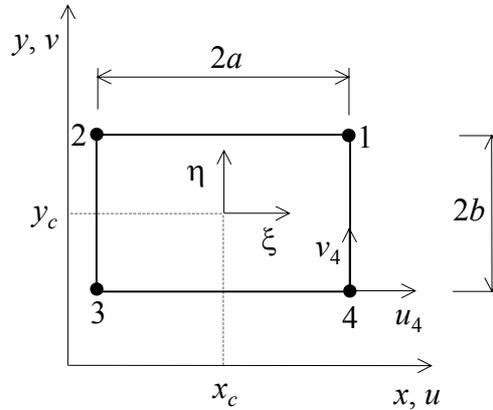
onde o vector  $\{F\}$  representa o vector das forças nodais não conservativas.

Obviamente que as matrizes de massa e de rigidez e o vector de forças nodais para o sistema global podem ser determinados sem a utilização das matrizes e dos vectores expandidos de cada elemento individual e, desta forma, diminuir as exigências de memória exigidas pelo programa computacional se o processo de agrupamento começar por transformar as matrizes e o vector de cada elemento do sistema de coordenadas local no sistema de coordenadas global e somar a contribuição de cada um nas células das matrizes e do vector global correspondentes aos graus de liberdade associados.

## A.9 - Exemplo II: Determinação da Matriz de Rigidez para um Elemento Rectangular

**Linear**

O elemento rectangular de quatro nós da *Figura 40* tem como graus de liberdade dois deslocamentos por nó ( $u_i, v_i$ ).



*Figura 40 - Elemento rectangular de quatro nós.*

Considerando para o elemento a expressão das funções de forma:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)$$

sendo  $\xi_0 = \xi \xi_i$  e  $\eta_0 = \eta \eta_i$ , temos:

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1), N_2 = -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1), N_3 = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1), N_4 = -\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1).$$

*Eqs. 84*

A matriz de deformação  $[B]$ , que permite relacionar o vector dos deslocamentos nodais com o vector das deformações através da expressão  $\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{u}\}$ , para este elemento tem a forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

*Eq. 85*

Na matriz de deformação  $[B]$  da *Eq. 85* aparecem derivadas das funções de forma  $N_i$  em relação às coordenadas cartesianas  $(x, y)$  enquanto que as funções de forma definidas por *Eqs. 84* estão dadas em função das coordenadas adimensionais  $(\xi, \eta)$ . Precisamos assim de saber como relacionar  $(x, y)$  com  $(\xi, \eta)$ . Uma maneira, embora bastante restritiva, de o fazer consiste em considerar que os elementos finitos são perfeitamente rectangulares e de lados paralelos aos eixos coordenadas (tal como na *Figura 40*). Assim, sendo  $(2a \times 2b)$  as dimensões do

elemento e  $(x_c, y_c)$  as coordenadas cartesianas do seu centro, podemos escrever a seguinte lei de transformação:

$$\begin{cases} x = x_c + a\xi \\ y = y_c + b\eta \end{cases}$$

*Eqs. 86*

Com base nesta lei de transformação, vejamos agora como, considerada uma função de forma genérica  $N_i$ , podemos calcular as derivadas cartesianas desta função a partir das derivadas em relação a  $(\xi, \eta)$ . Usando as regras habituais de derivação de uma função:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases}$$

ou usando a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

em que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

representa a matriz Jacobiana da transformação.

Conhecida a lei de transformação, *Eqs. 86*, podemos facilmente calcular a matriz  $[J]$  e, por inversão da expressão anterior, obter as derivadas cartesianas das funções de forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}.$$

Eq. 87

Para o caso particular considerado temos:

$$[J] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix},$$

tomando a Eq. 87 a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{cases}$$

A matriz de deformação  $[B]$  pode ser agora facilmente determinada. Considerando apenas a primeira partição da matriz temos:

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a}(\eta+1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4a}(\xi+1) \\ \frac{1}{4a}(\xi+1) & \frac{1}{4a}(\eta+1) \end{bmatrix}.$$

A matriz de rigidez para o elemento  $[K]$  calcula-se usando a expressão:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV.$$

Admitindo ter o elemento uma espessura  $t$  constante, podemos transformar este integral de volume num integral de superfície escrevendo:

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] t d\Omega.$$

A transformação do elemento de área para as coordenadas  $(\xi, \eta)$  é feita através do determinante da matriz Jacobiana  $[J]$ , isto é:

$$dxdy = \det[J] d\xi d\eta.$$

Para o caso particular considerado temos:

$$\det[J] = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = ab$$

e portanto:

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] tabd\xi d\eta.$$

As integrações contidas nesta expressão podem ser facilmente realizadas e a matriz de rigidez do elemento determinada explicitamente.

Note-se no entanto que isto só é possível pelo facto de se ter usado uma lei de transformação  $(x,y) \rightarrow (\xi, \eta)$  muito simples, *Eqs. 86*, em que elemento genérico é perfeitamente rectangular e de lados paralelos ao sistema global de referência  $(x,y)$ . Esta limitação pode ser ultrapassada utilizando-se elementos isoparamétricos.

## **Agradecimentos**

Agradeço à Junta Nacional de Investigação Científica a bolsa de doutoramento que me concedeu (referência: BD/3243/94 - PRAXIS XXI).

## **Bibliografia**

[Bathe, 1996] - *Klaus-Jürgen Bathe*  
FINITE ELEMENT PROCEDURES  
PRENTICE HALL - 1996

[Benayoun, 1994] - *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*  
ADAPTIVE MESHES AND NON RIGID MOTION COMPUTATION  
IEEE - 1051-4651/94, MAI 1994

[Benayoun, 1994a] - *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*  
AN ADAPTIVE MODEL FOR 2D AND 3D DENSE NON RIGID MOTION COMPUTATION  
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION - N° 2297, MAI 1994

**[Branco, 1985]** - *Carlos A. G. de Moura Branco*

**MECÂNICA DOS MATERIAIS**

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN - 1985 [BRO-NIELSEN, 1996] - BRO-NIELSEN

**Surgery Sumulation Using Fast Finite Elements**

VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING

4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, VBC'96, HAMBURG, GERMANY - SEPTEMBER 1996

SPRINGER

**[Chapra, 1988]** - *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*

**NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS**

MCGRAW-HILL - 1988

**[Cohen, 1991]** - *Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*

**INTRODUCING DEFORMABLE SURFACES TO SEGMENT 3D IMAGES AND INFER**

**DIFFERENTIAL STRUCTURES**

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION - N° 1403, MARS 1991

**[Cootes, 1995]** - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*

**COMBINING POINT DISTRIBUTION MODELS WITH SHAPE MODELS BASED ON FINITE ELEMENT ANALYSIS**

IMAGE AND VISION COMPUTING VOL. 13 N° 5 PP. 403/410 - JUNE 1995

**[Essa, 1992]** - *Irfan A. Essa, Stan Sclaroff, Alex P. Pentland*

**PHYSICALLY-BASED MODELING FOR GRAPHICS AND VISION**

M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 184 - 1992

**[Essa, 1995]** - *Irfan A. Essa*

**PHD THESIS: ANALYSIS, INTERPRETATION AND SYNTHESIS OF FACIAL EXPRESSIONS**

MIT - FEBRUARY 1995

**[Foley, 1991]** - *Foley, vanDam, Feiner, Hughes*

**COMPUTER GRAPHICS PRINCIPLES AND PRACTICE**

ADDISON WESLEY 12110 - 1991 SECOND EDITION

**[Gomes, 1995]** - *Carlos Manuel Balboa Reis Gomes*

**INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

**[Hall, 1993]** - *Ernest L. Hall*

**FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF ROBOT VISION**

SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII (1993) - 321/333

**[Kakadiaris, 1997]** - *Ioannis A. Kakadiaris, Dimitris Metaxas, Ruzena Bajcsy*

**INFERRING 2D OBJECT STRUCTURE FROM THE DEFORMATION OF APPARENT CONTOURS**

TO APPEAR IN THE SPECIAL ISSUE OF COMPUTER VISION AND IMAGE UNDERSTANDING ON PHYSICS-BASE MODELING AND REASONING IN COMPUTER VISION

**[Keeve, 1996]** - *Erwin Keeve, Sabine Girod, Bernd Girod*

**CRANIOFACIAL SURGERY SIMULATION**

VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING

4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, VBC'96, HAMBURG, GERMANY - SEPTEMBER 1996

SPRINGER

**[Kelly, 1993]** - *S. Graham Kelly*

**FUNDAMENTALS OF MECHANICAL VIBRATIONS**

MCGRAW-HILL - 1993

**[Martins]** - *Rogério A. F. Martins*

**MÉTODOS ENERGÉTICOS EM ANÁLISE ESTRUTURAL**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

**[Martins, a]** - *Rogério A. F. Martins*

**INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO CÁLCULO DE ESTRUTURAS**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

**[McInermey, 1996]** - *Tim McInermey, Demetri Terzopoulos*

**DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS: A SURVEY**

MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, NUMBER 2, PP 91/108 - 1996

OXFORD UNIVERSITY PRESS

**[Meirovitch, 1986]** - *Leonard Meirovitch*

**ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS**

MCGRAW-HILL - 1986

**[Moulin, 1992]** - *Pierre Moulin*

**AN ADAPTIVE FINITE-ELEMENT METHOD FOR IMAGE REPRESENTATION**

11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, NETHERLANDS, 1992 - IEEE

**[Nastar, 1994]** - *Chahab Nastar, Nicholas Ayache*

**FAST SEGMENTATION, TRACKING, AND ANALYSIS OF DEFORMABLE OBJECTS**

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION - ROCQUENCOUT,

Nº 1783 - 1994

**[Nastar, 1994a]** - *Chahab Nastar*

**PHD THESIS: MODÈLES PHISQUES DÉFORMABLES ET MODES VIBRATOIRES POUR**

**L'ANALYSE DU MOUVEMENT NON-RIGIDE DANS LES IMAGES MULTIDIMENSIONNELLES**

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES - 1994

**[Oliveira, 1990]** - *Carlos Alberto de Magalhães Oliveira*

**INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1990

- [**Park, 1996**] - *Jinah Park, Dimitris Metaxas, Leon Axel*  
**ANALYSIS OF LEFT VENTRICULAR WALL MOTION BASED ON VOLUMETRIC DEFORMABLE MODELS AND MRI-SPAMM**  
MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, NUMBER 1, PP 53/71 - 1996  
OXFORD UNIVERSITY PRESS
- [**Pentland, 1989**] - *Alex Pentland, Jonh Williams*  
**PERCEPTION OF NON-RIGID MOTION INFERENCE OF SHAPE, MATERIAL AND FORCE**  
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 113, 1989
- [**Pentland, 1989a**] - *Alex Pentland, Jonh Williams*  
**GOOD VIBRATIONS: MODAL DYNAMICS FOR GRAPHICS AND ANIMATION**  
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 115, 1989
- [**Pentland, 1990**] - *Alex Pentland*  
**AUTOMATIC EXTRACTION OF DEFORMABLE PART MODELS**  
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 4, 107-126, 1990
- [**Pentland, 1991**] - *Alex Pentland, Bradley Horowitz*  
**RECOVERY OF NONRIGID MOTION AND STRUCTURE**  
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, N° 7, JULY 1991
- [**Pentland, 1991a**] - *Alex Pentland, Stan Sclaroff*  
**CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR PHYSICALLY BASED SHAPE MODELING AND RECOGNITION**  
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, N° 7, JULY 1991
- [**Press, 1992**] - *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*  
**NUMERICAL RECIPES - THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING**  
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - 1992 SECOND EDITION
- [**Sclaroff, 1993**] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*  
**MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION**  
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 201 - MAY 1993
- [**Sclaroff, 1994**] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*  
**OBJECT RECOGNITION AND CATEGORIZATION USING MODAL MATCHING**  
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 267 - 1994
- [**Sclaroff, 1994a**] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*  
**PHYSICALLY-BASED COMBINATIONS OF VIEWS: REPRESENTING RIGID AND NON RIGID MOTION**  
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 273, NOVEMBER 1994
- [**Sclaroff, 1994b**] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*  
**ON MODAL MODELING FOR MEDICAL IMAGES: UNDERCONSTRAINED SHAPE DESCRIPTION AND DATA COMPRESSION**  
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 275 - 1994

[Sclaroff, 1995] - *Stanley Edward Sclaroff*

**PHD THESIS: MODAL MATCHING: A METHOD FOR DESCRIBING, COMPARING, AND  
MANIPULATING DIGITAL SIGNALS**  
MIT - 1995

[Sclaroff, 1995a] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

**MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION**  
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 95-008, 1995

[Seegerlind, 1984] - *Larry J. Seegerlind*

**APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS**  
JOHN WILEY & SONS, INC. - 1984

[Syn, 1995] - *N. H-M. Syn, R. W. Prager*

**FEM EIGENMODES AS SHAPE FEATURES**  
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT N° 211 - 1995

[Syn, 1995a] - *N. H-M. Syn, R. W. Prager*

**BAYESIAN REGISTRATION OF MODELS USING FEM EIGENMODES**  
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT N° 213 - 1995

[Tavares, 1995] - *João Manuel R. S. Tavares*

**ALGUMAS FERRAMENTAS PARA VISÃO TRIDIMENSIONAL POR COMPUTADOR**  
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1995a] - *João Manuel R. S. Tavares*

**MASTER THESIS: OBTENÇÃO DE ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE MOVIMENTO  
DE CÂMARA**  
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Timoshenko, 1970] - *Stephen. P. Timoshenko, J. N. Goodier*

**THEORY OF ELASTICITY**  
MCGRAW-HILL - 1970

[Timoshenko, 1982] - *Stephen. P. Timoshenko, James E. Gere*

**MECÂNICA DOS SÓLIDOS - VOL. I E II**  
LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA - 1982

<b>1 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos</b>	<b>1</b>
<b>2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos</b>	<b>3</b>
2.1 - Graus de Liberdade Locais e Globais	10
<b>3 - Método dos Elementos Finitos Hierárquico</b>	<b>13</b>
<b>4 - Funções de Forma</b>	<b>14</b>
4.1 - Aproximação de Funções Utilizando Funções de Forma	15
4.2 - Determinação dos Parâmetros Nodais	16
4.2.1 - Erro Nulo num Conjunto Discreto de Pontos do Domínio	16
4.2.2 - Erro Médio Pesado Nulo em Todo o Domínio	16
4.3 - Aproximação de Funções Derivadas	18
4.4 - Funções de Forma de Definição Local	19
4.5 - Geração de Funções de Forma	20
4.5.1 - Uso de Coordenadas Generalizadas	20
4.5.2 - Formulação Directa das Funções de Forma	21
<b>5 - Funções de Forma Complexas</b>	<b>21</b>
5.1 - Erros nas Aproximações Polinomiais	21
5.2 - Funções de Forma 1D	23
5.2.1 - Funções <i>Standard</i> com continuidade $C^0$	23
5.2.2 - Funções Hierárquicas com Continuidade $C^0$	24
5.2.2.1 - Polinómios Hierárquicos	25
5.2.2.2 - Polinómios Hierárquicos de Forma Quase Ortogonal	27
5.3 - Funções de Forma 2D para Elementos Rectangulares	28
5.3.1 - Elemento Rectangular Linear	28
5.3.2 - Família de Lagrange	29
5.3.3 - Família de Serendipity	31
5.3.4 - Funções de Forma Hierárquicas	35
5.4 - Funções de Forma 2D para Elementos Triangulares	37
5.4.1 - Coordenadas de Área	37
5.4.2 - Funções de Forma <i>Standard</i>	38
5.4.3 - Funções de Forma Hierárquicas	40
5.5 - Funções de Forma 3D	42
5.5.1 - Elemento Tetraédrico	43

5.6 - Elementos Isoparamétricos	45
5.6.1 - Elementos 2D	49
5.6.2 - Elementos 3D	53
<b>6 - Determinação das Deformações e das Tensões</b>	<b>55</b>
6.1 - Considerações sobre o Cálculo das Tensões	57
6.2 - Estado Plano de Tensão	59
6.3 - Estado Plano de Deformação	60
<b>7 - Condições de Convergência</b>	<b>60</b>
7.1 - Verificação da Convergência: o “Patch Test”	62
<b>8 - Integração Numérica</b>	<b>63</b>
8.1 - Transformação das Variáveis de Integração	63
8.2 - Técnicas de Integração Numérica	65
8.2.1 - Método de Newton-Cotes	67
8.2.2 - Quadratura Gaussiana (Gauss-Legendre)	67
8.2.3 - Método de Gauss-Lobatto	71
8.3 - Ordem de Integração	72
8.4 - Que Tipo de Regra Utilizar?	74
<b>9 - Conclusões</b>	<b>74</b>
<b>Apêndices</b>	<b>77</b>
A.1 - Princípio da Energia Potencial Mínima	77
A.2 - Energia de Deformação	77
A.3 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais	78
A.4 - Equações de Movimento de Newton	80
A.5 - Princípio de Alembert e Equações de Lagrange	81
A.6 - Método de Rayleigh-Ritz	82
A.7 - Coordenadas de Área	84
A.8 - Exemplo I: Determinação das Matrizes Para um Elemento Finito Axial	85
A8.1 - Determinação das Matrizes no Sistema Global	88
A8.2 - Agrupamento	91
A.9 - Exemplo II: Determinação da Matriz de Rigidez para um Elemento Rectangular Linear	92
<b>Agradecimentos</b>	<b>96</b>

