
Construção de Modelos de Programação Linear e Inteira

Slide 1

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Versão 2

©2000, 1998

José Fernando Oliveira, Maria Antónia Carravilla – FEUP

Modelização Os 10 princípios

Slide 2

- Não criar um modelo complicado quando um simples é suficiente.
- Não moldar o problema à técnica de resolução que se pretende utilizar.
- Resolver rigorosamente o modelo encontrado. Só assim se saberá se hipotéticas inconsistências das soluções do modelo com a realidade têm origem no próprio modelo ou não.
- Validar os modelos antes de os implementar.
- O modelo não deve ser tomado literalmente pois nunca é a realidade.
- O modelo não deve ser forçado a fazer, ou ser criticado por não fazer, aquilo para que não foi criado.
- Não sobrestimar os modelos.
- Uma das principais vantagens da modelização é o processo de desenvolvimento do modelo.
- Um modelo não pode ser melhor do que a informação usada na sua construção.
- Os modelos nunca substituem os agentes de decisão.

Formulação de modelos matemáticos em Investigação Operacional

Algoritmo para construir um modelo matemático para um problema de Investigação Operacional:

Slide 3

Passo I — Determinar, no problema concreto, aquilo que é fixo e não pode ser alterado e aquilo que se pode decidir (*variáveis de decisão*).

Representar essas variáveis de uma forma algébrica.

Passo II — Identificar as *restrições* do problema, isto é, aquilo que limita as nossas decisões, e representá-las como igualdades ou desigualdades que sejam funções das variáveis de decisão.

Passo III — Identificar o(s) *objectivo(s)* do problema e representá-lo(s) como uma *função* das variáveis de decisão, que deve ser minimizada ou maximizada.

Nota: Só existe problema quando há mais do que uma solução admissível.

Problema de Mistura de Produtos

A companhia Electro & Domésticos pretende escalonar a produção de um novo apetrecho de cozinha que requer dois recursos: mão-de-obra e matéria-prima. A companhia considera a hipótese de 3 modelos diferentes, tendo o seu departamento de engenharia fornecido os seguintes dados:

Slide 4

Modelo	A	B	C
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Matéria-prima (quilos por unidade)	4	4	5
Lucro (\$ por unidade)	4	2	3

O fornecimento de matéria-prima está limitado a 200 quilos/dia. Por dia estão disponíveis 150 horas de trabalho. O objectivo é maximizar o lucro total. Formule o modelo que permitiria resolver este problema.

Problema de Mistura de Produtos Resolução

Passo I — O que se desconhece, e que se pretende determinar na fase de resolução do modelo, são as quantidades a produzir diariamente de cada um dos modelos — as variáveis de decisão.

Representando-as algebricamente:

Slide 5

- x_A — produção diária do modelo A (n.º de unidades)
- x_B — produção diária do modelo B (n.º de unidades)
- x_C — produção diária do modelo A (n.º de unidades)

Passo II — Restrições do problema.

Não podemos produzir quantidades infinitas de A, B e C (o que daria um lucro infinito) porque estamos limitados pela matéria-prima (200) e mão-de-obra (150) disponíveis, valores que não podemos exceder.

Então, a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo A (7 horas), vezes o número de unidades do modelo A a produzir (x_A),

mais a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo B (3 horas), vezes o número de unidades do modelo B que se resolva produzir (x_B), mais a mão-de-obra necessária para produzir uma unidade do modelo C (6 horas), vezes o número de unidades do modelo C que se venha a produzir (x_C), não poderão exceder as 150 horas, isto é:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

Aplicando o mesmo raciocínio à matéria-prima, obter-se-ia:

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

As restrições que faltam ao problema dizem directamente respeito às variáveis de decisão, e são:

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$$

ou seja, não se podem produzir quantidades negativas.

Passo III — O objectivo do problema é maximizar o lucro total, isto é, o lucro obtido com os 3 modelos. Como cada unidade do modelo A dá um

lucro de 4, do modelo B dá 2 e do modelo C dá 3, a função objectivo será:

$$\max \text{ LUCRO} = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

O modelo do nosso problema será então:

Encontrar os números x_A , x_B e x_C tais que:

$$\max \text{ LUCRO} = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

sujeito a:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

Slide 6

Slide 7

Problema da refinaria de petróleo

Slide 8

Uma refinaria de petróleo pode misturar 3 tipos de crude para produzir gasolina normal e super. Existem disponíveis duas unidades de mistura. Para cada ciclo de produção a unidade mais antiga usa 5 barris de crude A, 7 barris de crude B e 2 barris de crude C para produzir 9 tanques de gasolina normal e 7 de gasolina super. A unidade de mistura mais recente usa 3 barris de crude A, 9 de B e 4 de C para produzir, num ciclo de produção, 5 tanques de gasolina normal e 9 de super.

Devido a contratos já assinados, a refinaria tem que produzir, pelo menos, 500 tanques de normal e 300 tanques de super. Existem disponíveis 1500 barris de crude A, 1900 de crude B e 1000 de crude C. Por cada tanque de gasolina normal produzida a refinaria ganha 6 unidades monetárias e, por tanque de super, 9 unidades monetárias.

O problema é saber como utilizar as reservas de crude e as duas unidades de mistura, de forma a, respeitando os compromissos assumidos, maximizar o lucro da refinaria.

Problema da refinaria de petróleo Resolução

Variáveis de decisão

Slide 9

x_1 – nº de ciclos de produção a realizar na unidade antiga

x_2 – nº de ciclos de produção a realizar na unidade nova

Restrições

Crude disponível:

$$\text{Tipo A: } \underbrace{5x_1}_{\substack{\text{gasto na} \\ \text{unidade} \\ \text{antiga}}} + \underbrace{3x_2}_{\substack{\text{gasto na} \\ \text{unidade} \\ \text{nova}}} \leq 1500$$

Slide 10

$$\text{Tipo B: } 7x_1 + 9x_2 \leq 1900$$

$$\text{Tipo C: } 2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$

Contratos assinados:

$$\text{Gasolina normal: } \underbrace{9x_1}_{\substack{\text{produzido} \\ \text{na unidade} \\ \text{antiga}}} + \underbrace{5x_2}_{\substack{\text{produzido} \\ \text{na unidade} \\ \text{nova}}} \geq 500$$

$$\text{Gasolina super: } 7x_1 + 9x_2 \geq 300$$

E ainda:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Função objectivo

$$\text{max LUCRO} = \overbrace{6 \times \left(\underbrace{9}_{\substack{\text{n}^\circ \text{ de} \\ \text{tanques} \\ \text{por ciclo}}} \underbrace{x_1}_{\substack{\text{n}^\circ \text{ de} \\ \text{ciclos}}} + \underbrace{5x_2}_{\text{unidade nova}} \right)}^{\text{gasolina normal}} + \overbrace{9 \times (7x_1 + 9x_2)}^{\text{gasolina super}}$$

Slide 11

Arrendamento de espaço num armazém

Uma empresa planeia arrendar espaço num armazém, sendo as suas necessidades para os próximos 5 meses as seguintes:

Mês	Necessidade de espaço (m ²)	Período de arrendamento (meses)	Custo por m ² (\$)
1	1500	1	2800
2	1000	2	4500
3	2000	3	6000
4	500	4	7300
5	2500	5	8400

Slide 12

Construa um modelo que permita determinar o esquema de contratos a assinar, por forma a satisfazer as necessidades de espaço o mais economicamente possível.

Arrendamento de espaço num armazém

Resolução

Variáveis de decisão

x_{ij} – espaço a arrendar no início do mês i por um período de j meses

Slide 13 Restrições

Que em cada mês esteja arrendado pelo menos o espaço necessário:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(mês 1)} & \sum_{j=1}^5 x_{1j} & \geq 1500 \\
 \text{(mês 2)} & \sum_{j=2}^5 x_{1j} + \sum_{j=1}^4 x_{2j} & \geq 1000 \\
 \text{(mês 3)} & \sum_{j=3}^5 x_{1j} + \sum_{j=2}^4 x_{2j} + \sum_{j=1}^3 x_{3j} & \geq 2000 \\
 \text{(mês 4)} & \sum_{j=4}^5 x_{1j} + \sum_{j=3}^4 x_{2j} + \sum_{j=2}^3 x_{3j} + \sum_{j=1}^2 x_{4j} & \geq 500 \\
 \text{(mês 5)} & x_{15} + x_{24} + x_{33} + x_{42} + x_{51} & \geq 2500 \\
 & & x_{ij} \geq 0 \\
 & & 1 \leq i \leq 5, \quad 1 \leq j \leq 6-i
 \end{array}$$

Função objectivo

Slide 14

$$\min \text{CUSTO} = \underbrace{2800}_{\substack{\text{custo de arrendar} \\ 1 \text{ m}^2 \text{ por 1 mês}}} \underbrace{\sum_{i=1}^5 x_{i1}}_{\substack{\text{espaço arrendado} \\ \text{por 1 mês} \\ \text{(no início do mês} \\ \text{1, 2, 3, 4 ou 5)}}} + 4500 \sum_{i=1}^4 x_{i2} + 6000 \sum_{i=1}^3 x_{i3} + 7300 \sum_{i=1}^2 x_{i4} + 8400 x_{15}$$

**Arrendamento de espaço num armazém
Resolução mais compacta**

Dados

- C_j – custo de arrendar $1m^2$ por um período de j meses
- N_i – necessidade de espaço no mês i

Slide 15

Variáveis de decisão

x_{ij} – espaço a arrendar no início do mês i por um período de j meses

Restrições

Que em cada mês esteja arrendado pelo menos o espaço necessário:

$$\forall_i \sum_{j=1}^{6-i} x_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=i+1-k}^{6-k} x_{kj} \geq N_i$$

Função objectivo

$$\sum_{j=1}^5 C_j \times \sum_{i=1}^{6-j} x_{ij}$$

Slide 16**Fábrica de papel**

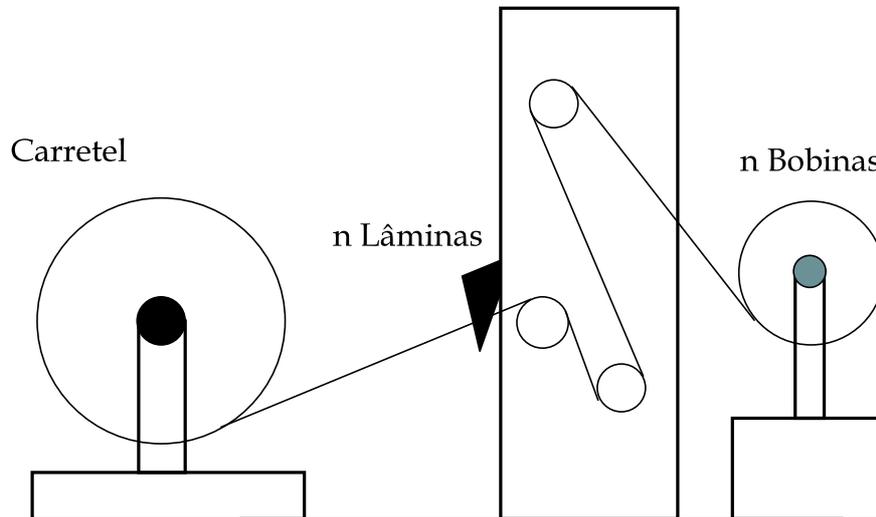
O papel é normalmente fabricado em rolos grandes (em largura e em diâmetro), que depois são divididos em rolos mais pequenos, que por sua vez poderão ser directamente para clientes ou para cortar em formatos.

Vejam os seguintes exemplos. O papel é produzido em rolos com 6 metros de largura. A partir destes rolos é necessário produzir 30 rolos mais pequenos com 280cm, 60 rolos com 200cm e 48 rolos com 150cm. Assim sendo, um rolo de 6 metros pode ser dividido, por exemplo, em 2 rolos de 280, sobrando um “rolinho” de 40cm que é considerado desperdício. Assumindo que existem rolos grandes em quantidade suficiente para satisfazer esta encomenda, o problema consiste em determinar a forma de cortar os rolos grandes de forma a minimizar o desperdício.

Slide 17

Fábrica de papel — Bobinadora

Slide 18



Fábrica de papel Resolução

Slide 19

O primeiro passo para a formulação deste problema é determinar de quantas maneiras pode um rolo grande ser cortado. Para além da forma sugerida no enunciado (2 rolos de 200cm, sobrando 40cm de desperdício) podem ainda ser determinados 6 outros “padrões de corte” (ver tabela). As variáveis de decisão (x_1 a x_7) correspondem ao número de vezes que cada padrão de corte é aplicado no corte de um rolo grande. A tabela seguinte apresenta ainda as quantidades pedidas de cada rolo pequeno, assim como o desperdício gerado por cada padrão de corte.

Largura dos rolos	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Nº de rolos pedidos
280	2	1	1	0	0	0	0	30
200	0	1	0	3	2	1	0	60
150	0	0	2	0	1	2	4	48
Desperdício	40	120	20	0	50	100	0	

Slide 20

Exemplificando, $x_3 = 4$ significa que se corta um rolo grande em 1 de 280cm e 2 de 150cm, gerando um desperdício de 20cm, 4 vezes. No total obtém-se 4 rolos de 280cm e 8 de 150cm (e nenhum de 200cm).

As restrições vão estar directamente relacionadas com as quantidades de rolos pequenos que é necessário cortar, uma por cada rolo. Se a cada linha do sistema de inequações corresponde um tipo de rolo pequeno, a cada coluna corresponderá um padrão de corte:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \geq & 30 \\
 & & x_2 & & & + & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & & \geq & 60 \\
 & & & & 2x_3 & & & + & x_5 & + & 2x_6 & + & 4x_7 & \geq & 48 \\
 & & & & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq 7}
 \end{array}$$

O objectivo do problema é minimizar o desperdício. Assim, a função objectivo deste modelo tomará a forma:

Slide 21

$$\min 40x_1 + 120x_2 + 20x_3 + 50x_5 + 100x_6$$

E se as restrições tiverem que ser satisfeitas como igualdades, isto é, e se não forem admitidas sobreproduções? Como é que o modelo deve ser alterado?

A companhia de aviação Benvoa

Slide 22

A companhia de aviação Benvoa vai comprar aviões a jacto de passageiros, para viagens longas, médias e curtas (tipos A_l , A_m e A_c , respectivamente). Os custos unitários, em milhões de escudos são, respectivamente, de 5000, 3800 e 2000. A administração da companhia autorizou a verba máxima de 112000 milhões de escudos para esse efeito. Admite-se que os lucros anuais sejam de 310, 230 e 200 milhões de escudos com cada um dos tipos de avião A_l , A_m e A_c , respectivamente. Haverá pilotos suficientes para pilotar, no máximo, 30 aviões novos. Se apenas fossem comprados aviões A_c , os serviços de manutenção suportariam 40 aviões novos. Contudo, cada avião A_m equivale a $\frac{4}{3}$ de um avião A_c e cada avião A_l a $\frac{5}{3}$ de um avião A_c , no que diz respeito à manutenção. A direcção técnica é ainda de opinião que, por cada avião A_c que seja comprado, se comprem também pelo menos um avião A_l ou um avião A_m . Por outro lado, seleccionado um avião A_l para comprar, também deverão ser comprados pelo menos 8 aviões A_c ou A_m . Com estes dados, a gestão da empresa deve decidir a quantidade de aviões de cada tipo a comprar, de modo a maximizar o lucro. Formule um modelo para este problema.

A companhia de aviação Benvoa

Resolução

Variáveis de decisão

x_c, x_m, x_l – nº de aviões de cada tipo a comprar

Slide 23 Restrições

$$\begin{array}{rcllcl}
 \text{Dinheiro disponível:} & 500x_l + & 3800x_m + & 2600x_c & \leq & 112000 \\
 \text{Pilotos disponíveis:} & x_l + & x_m + & x_c & \leq & 30 \\
 \text{Manutenção:} & \frac{5}{3}x_l + & \frac{4}{3}x_m + & x_c & \leq & 40 \\
 \text{Opinião da direcção técnica:} & & x_l + & x_m & \geq & x_c \\
 & & x_c + & x_m & \geq & 8x_l \\
 & x_c, & x_m, & x_l & \geq & 0
 \end{array}$$

e inteiros

Função objectivo

$$\max \text{ LUCRO} = 310x_l + 230x_m + 200x_c$$

Slide 24**Urbanização**

Pretende-se urbanizar um determinado terreno. O terreno divide-se em 3 zonas com características, em termos de relevo, localização e tipo de subsolo, diferentes: Z_1 , Z_2 e Z_3 . Esta urbanização deverá incluir áreas para fins residenciais — A_r —, áreas verdes — A_v — e de equipamentos sociais — A_e .

O custo de construção de um determinado tipo de área (R , V ou E) em Z_1 , Z_2 ou Z_3 é proporcional à respectiva área de construção, sendo as constantes de proporcionalidade diferentes entre si e conhecidas.

Slide 25

É necessário construir pelo menos K hectares de A_r e garantir que os quocientes $\frac{A_e}{A_r}$ e $\frac{A_v}{A_r}$ não sejam inferiores a l e m (conhecidos), respectivamente.

Pretende-se conhecer as áreas a atribuir a R , V , e E nas zonas Z_1 , Z_2 e Z_3 .

1. Formule o problema nas seguintes condições (será resolúvel por Programação Linear?):
 - (a) As condições relativas a l e m devem ser satisfeitas em cada zona.
 - (b) As condições relativas a l e m devem ser satisfeitas para o conjunto de Z_1 , Z_2 e Z_3 .
2. Qual a relação de ordem existente entre o custo total da solução óptima calculável em **(i)** e em **(ii)**? Justifique.
3. Formule o problema como em **(ii)** mas admitindo que se as áreas para E forem maiores que p então as áreas para V serão maiores que q (p e q conhecidos).

Urbanização Resolução

a)

Variáveis de decisão

Slide 26

 A_{ri} – nº de hectares a construir na zona i para fins residenciais A_{vi} – nº de hectares reservados na zona i para área verde A_{ei} – nº de hectares reservados na zona i para equipamentos sociais

Restrições

(i)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 A_{ri} &\geq K \\ A_{ei} &\geq l A_{ri}, \quad i = 1, 2, 3 \\ A_{vi} &\geq m A_{ri}, \quad i = 1, 2, 3 \\ A_{ri}, A_{vi}, A_{ei} &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Slide 27

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 A_{ri} &\geq K \\ \sum_{i=1}^3 A_{ei} &\geq l \sum_{i=1}^3 A_{ri}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \sum_{i=1}^3 A_{vi} &\geq m \sum_{i=1}^3 A_{ri}, \quad i = 1, 2, 3 \\ A_{ri}, A_{vi}, A_{ei} &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Nota:

Poder-se-ia ainda introduzir uma restrição referente ao espaço total disponível e que não pode ser ultrapassado. Embora não mencionada explicitamente no enunciado ela é inerente ao problema:

$$A_{ri} + A_{ei} + A_{vi} \leq A_{Z_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

com A_{Z_i} a representar a área total da zona i .

Slide 28 **Função objectivo**

$$\min \sum_{i=1}^3 (K_{ri} A_{ri} + K_{vi} A_{vi} + K_{ei} A_{ei})$$

b)

O custo da solução óptima em (i) é maior do que o custo da solução óptima em (ii). Como a formulação em (i) é mais restritiva que em (ii) e como ao restringir-se mais um problema nunca se melhora o valor óptimo da função objectivo, a conclusão extrai-se de imediato.

c)

Num modelo de programação matemática em Investigação Operacional a região das soluções admissíveis é obtida pela conjunção das restrições formuladas no modelo. Nesta alínea pretende-se modelizar uma implicação de condições:

$$\sum_{i=1}^3 A_{ei} > p \Rightarrow \sum_{i=1}^3 A_{vi} \geq q$$

Slide 29 A implicação de condições é modelizada com o auxílio de uma variável de decisão suplementar e de um majorante para os valores que as condições possam tomar.

Seja $A = A_{Z1} + A_{Z2} + A_{Z3}$ a área total disponível nas 3 zonas.

Evidentemente que $\sum_{i=1}^3 A_{ei} \leq A$ e $\sum_{i=1}^3 A_{vi} \leq A$, ou seja, A é um majorante destes somatórios.

Tomando então uma variável auxiliar inteira binária $\delta \in \{0, 1\}$, a implicação pode ser formulada do seguinte modo:

$$\sum_{i=1}^3 A_{ei} - p - \delta A \leq 0 \tag{1}$$

$$q - \sum_{i=1}^3 A_{vi} - (1 - \delta)A \leq 0 \tag{2}$$

$$\delta \in \{0, 1\} \tag{3}$$

Para verificarmos que as inequações (1–3) modelizam a implicação de condições devemos lembrar que para que uma implicação $a \Rightarrow b$ seja verdadeira é preciso que se a for verdadeira então b também o seja e que se b for falsa então a também o seja.

Slide 30

De facto, se $\sum_{i=1}^3 A_{ei} > p$ então para que a restrição (1) se verifique é forçoso que $\delta = 1$. Ora $\delta = 1$ transforma (2) em $\sum_{i=1}^3 A_{vi} \geq q$, como se pretendia.

Se, por outro lado, $\sum_{i=1}^3 A_{vi} < q$ então, para que (2) se verifique é forçoso que $\delta = 0$. Com $\delta = 0$ a restrição (1) fica $\sum_{i=1}^3 A_{ei} \leq p$, como se queria demonstrar.

Nota:

É possível ainda modelizar outras operações lógicas entre condições. Apresentam-se de seguida 3 casos distintos:

1. **Disjunção** (apenas uma de duas restrições está activa)

$$f(x_i) \leq 0 \vee g(x_i) \leq 0$$

Seja M um número “muito grande” e δ uma variável binária:

$$\begin{cases} f(x_i) \leq \delta M \\ g(x_i) \leq (1 - \delta)M \end{cases}$$

2. **K, de entre N restrições, são verificadas**

Slide 31

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_i) \leq d_1 \\ f_2(x_i) \leq d_2 \\ \vdots \\ f_N(x_i) \leq d_N \end{array} \right\} \begin{cases} f_1(x_i) \leq d_1 + \delta_1 M \\ f_2(x_i) \leq d_2 + \delta_2 M \\ \vdots \\ f_N(x_i) \leq d_N + \delta_N M \\ \sum_{i=1}^N \delta_i = N - K \\ \delta_i \in \{0, 1\} \\ M = \infty \end{cases}$$

3. Funções com apenas N valores possíveis

$$f(x_i) = d_1 \text{ ou } d_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } d_N \quad (f(x_i) \in \{d_1, d_2, \dots, d_N\})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_i) = \sum_{i=1}^N \delta_i d_i \\ \sum_{i=1}^N \delta_i = 1 \\ \delta_i \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Slide 32

Aeroporto Aletrop - Manutenção

O aeroporto de Aletrop é a base dos aviões da companhia aérea PAT. Trata-se de um aeroporto moderno, e de uma empresa de aviação em expansão, que pretende manter a sua competitividade num sector de actividade fortemente concorrencial. O aumento de competitividade passa, nomeadamente, pela realização de dois objectivos, a melhoria da qualidade de serviço e a redução dos custos de operação. Por outro lado, a segurança de uma companhia aérea é um aspecto de primordial importância, estando intimamente ligado à manutenção. Para manter um avião em boas condições técnicas, procede-se à manutenção preventiva aos aparelhos da PAT, através de pequenas inspecções entre aterragem e posterior descolagem. A direcção da empresa está também a considerar a hipótese de oferecer estes serviços de manutenção a outras companhias de aviação, mesmo que para tal tenha que aumentar às equipas de manutenção. O elemento crucial nestas equipas é o chefe de manutenção, técnico altamente qualificado, que necessita de fazer formação específica para cada tipo de avião e obter assim uma licença imprescindível para o desempenho dessas funções. A cada licença corresponde uma categoria de aviões, existindo 4 licenças diferentes:

Slide 33

Tipos de licenças	Aviões
1	Boeing 717 (100 lugares)
2	Boeing 777 (300 a 500 lugares)
3	Airbus A319 (124 lugares)
4	Airbus A340 (350 lugares)

Cada técnico pode ter no máximo 2 licenças. A primeira licença demora vários anos a obter, sendo portanto mais cara para a empresa, enquanto a segunda licença demora menos anos a obter, ficando naturalmente mais barata. O custo da segunda licença depende ainda da licença anterior que o técnico possui. Actualmente existem 9 equipas de manutenção, cada uma chefiada por um técnico licenciado, que funcionam em 3 turnos.

Slide 34

Custo (M\$)				
Licença anterior	Licença a tirar			
	1	2	3	4
0	2	4	2	4
1	-	1	2	3
2	1	-	2	3
3	1	3	-	2
4	1	2	1	-

Turno	Chefe de equipa	Tipo de licença
1	1	1, 2
	2	1
	3	2
2	4	3, 4
	5	2
	6	3
3	7	4
	8	3, 4
	9	3

Para poder oferecer serviços a outras companhias de aviação, a empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, no conjunto dos chefes de manutenção. Isto pode ser conseguido enviando para formação actuais chefes de equipa (portanto técnicos que já possuem 1 licença) ou outros técnicos que ainda não possuem nenhuma licença. No entanto, de cada turno só poderá sair, no máximo, 1 chefe de equipa para formação. Escreva um modelo de programação matemática que permita determinar a política de obtenção de licenças que minimiza os custos para a Aletrop.

Aeroporto Aletrop - Manutenção

Resolução

Variáveis de decisão

Slide 35

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se técnico } i \text{ tira licença } j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

A empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, num total de 16 licenças. Como, no conjunto dos chefes de manutenção existentes, já existem 12 licenças, são necessárias mais 4 licenças, que no limite poderão ser todas obtidas por técnicos novos. Nesse caso o número máximo de técnicos, índice i na formulação, será igual a 13, 9 já existentes e 4 novos.

Restrições

A empresa pretende que existam 4 licenças de cada tipo, no conjunto dos chefes de manutenção:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{13} x_{i1} &= 2 \\ \sum_{i=1}^{13} x_{i2} &= 1 \\ \sum_{i=1}^{13} x_{i3} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{13} x_{i4} &= 1 \end{aligned}$$

Slide 36

Um técnico pode ter no máximo 2 licenças e os técnicos novos só poderão obter nesta fase uma licença:

(esta restrição não vem referida explicitamente no enunciado, no entanto pode-se inferir que não haverá disponibilidade de tempo para que um técnico novo obtenha duas licenças)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 x_{ij} &\leq 1 \quad \forall i \in \{2,3,5,6,7,9,10,11,12,13\} \\ \sum_{j=1}^4 x_{ij} &= 0 \quad \forall i \in \{1,4,8\} \end{aligned}$$

De cada turno só poderá sair, no máximo, 1 chefe de equipa para formação:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 x_{ij} &\leq 1 \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{i=4}^6 x_{ij} &\leq 1 \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{i=7}^9 x_{ij} &\leq 1 \end{aligned}$$

Cada técnico só pode obter 1 vez a mesma licença:

$$\begin{aligned} x_{21} = x_{32} = x_{52} &= 0 \\ x_{63} = x_{74} = x_{93} &= 0 \end{aligned}$$

Slide 37

Função objectivo

c_{kj} = custo de tirar licença j dado que já se tem licença k

$$\min \sum_{j=1}^4 \left\{ \sum_{i=10}^{13} c_{0j}x_{ij} + \sum_{i \in \{6,9\}} c_{3j}x_{ij} + \sum_{i \in \{3,5\}} c_{2j}x_{ij} + c_{1j}x_{2j} + c_{4j}x_{7j} \right\}$$

Bibliografia

- Hillier, Fraderick S. e Lieberman, Gerald (1995). *Introduction to Operations Research*, Mc Graw-Hill.
- Oliveira, José Fernando (1996). *Apontamentos de Investigação Operacional 1*. FEUP.

Slide 38