

João Manuel R. S. Tavares

Comunicação Interna:

**APRESENTAÇÃO DE UM MÉTODO PARA A
DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO RÍGIDA ENTRE
DOIS CONTORNOS CONSTITUÍDOS POR PIXELS**



FEUP - *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

DEEC - *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*



INEB - *Instituto de Engenharia Biomédica*

Junho de 1997

Sumário

Nesta comunicação é apresentado um método, proposto por Horn, para a determinação da transformação rígida (constituída por rotação em torno de um eixo que passa pela origem, escalonamento em relação à origem e translação) existente entre dois contornos. Cada contorno é considerado como um conjunto de *pixels*. Também são apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação do referido método.

Para a representação da rotação são utilizados *quaternions* unitários. Em apêndice, é apresentada a notação utilizada para os *quaternions*, as suas propriedades, algumas operações efectuadas com *quaternions* e a relação entre diferentes notações utilizadas para representar rotações.

1 - Introdução

A determinação da transformação rígida - Em [Foley, 1991; Hall 1993; Tavares, 1995, 1995a] são apresentadas as várias transformações geométricas em 2D e em 3D. - entre dois contornos constituídos por *pixels* é um problema frequente nos diversos domínios da visão por computador. Este problema também pode ser analisado, por exemplo, no campo da robótica, como a determinação da transformação geométrica que melhor mapeia um dado conjunto de coordenadas num outro.

Nesta comunicação é apresentado um método proposto por Horn em [Horn, 1987] para a determinação da transformação rígida: rotação em torno de um eixo que passa pela origem, escalonamento relativamente à origem e translação. O método descrito baseia-se nos mínimos quadrados e necessita apenas de três *pixels* para a determinação da transformação envolvida. Para a representação da rotação são utilizados *quaternions* unitários, a translação é determinada pela diferença entre as coordenadas do centroide do contorno t e as coordenadas do centroide do contorno $t+1$ previamente rodado e escalonado. O escalonamento é determinado pelo quociente da raiz quadrada dos desvios das coordenadas dos dois contornos relativamente aos centroides correspondentes. O *quaternion* unitário que representa a rotação é o vector próprio associado ao valor próprio positivo mais elevado de uma matriz (4×4) simétrica.

Na secção seguinte é apresentado o método proposto por Horn; na terceira secção, são apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação do referido método; na quarta secção, são apresentadas algumas conclusões; em apêndice, são apresentados os *quaternions*, a notação envolvida, algumas das suas propriedades, operações com *quaternions*, representação de rotações utilizando-se *quaternions* unitários e relações com outras representações.

2 - O método proposto por Horn

A transformação entre dois contornos t e $t+1$ constituídos por *pixels* pode ser analisada como o resultado de um movimento rígido e, desta forma, como composta por uma rotação em torno de um eixo que passa pela origem, um escalonamento relativamente à origem e uma translação, *Fig. 1*.

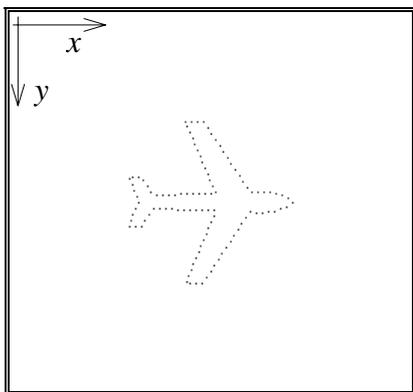


Figura 1a - Contorno t .

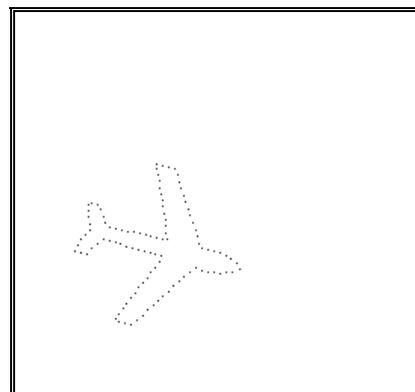


Figura 1b - Contorno t após rotação de 15° em torno da origem.

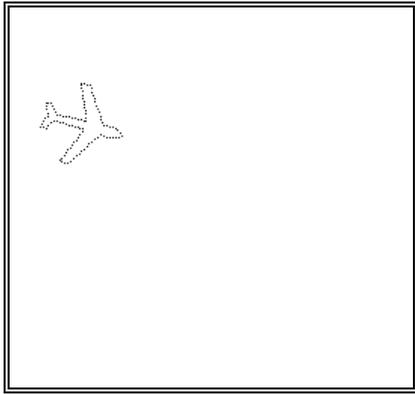


Figura 1c - Contorno t após rotação de 15° em torno da origem e escalonamento de 0.5 relativamente à origem.

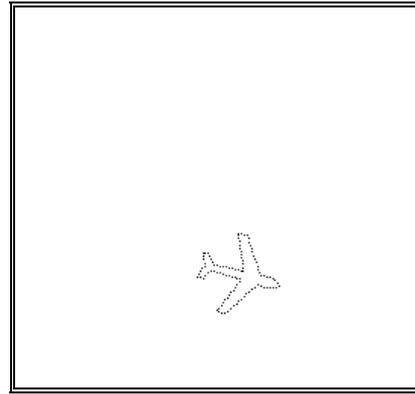


Figura 1d - Contorno $t+1$: Contorno t após rotação de 15° em torno da origem, escalonamento de 0.5 relativamente à origem e translação de 100 pixels segundo cada eixo.

Obviamente a translação tem associado três graus de liberdade. A rotação tem também três graus (direcção do eixo em torno do qual a rotação é executada mais o ângulo de rotação em torno deste). O escalonamento implica mais um grau de liberdade. Três *pixels* devidamente emparelhados, em cada um dos contornos, fornecem nove restrições (três coordenadas cada), mais do que o suficiente para permitir a determinação das sete variáveis desconhecidas.

Desprezando duas das restrições, sete equações com sete incógnitas podem ser estabelecidas e resolvidas de forma a ser possível determinar-se os parâmetros da transformação.

Na prática, as coordenadas não são exactas, e determinar-se-ão os parâmetros da transformação com uma maior precisão se utilizar-se mais do que três *pixels*. Obviamente que não será possível determinar-se uma transformação que mapeie de forma exacta as coordenadas dos *pixels* do contorno t no contorno $t+1$. Em vez de tentar tal objectivo devera-se minimizar a soma dos quadrados dos erros residuais. Determinar os melhores parâmetros para a transformação não é uma tarefa fácil. Na prática, vários métodos empíricos, gráficos, e numéricos têm vindo a ser utilizados. Na sua grande maioria são de natureza iterativa; isto é, dada uma solução aproximada, tais métodos convergem para uma solução melhor mas ainda imperfeita. Os métodos iterativos são aplicados repetidamente até ser desprezável o erro remanescente.

Por vezes, existe informação que permite obter uma aproximação inicial de tão boa qualidade para os parâmetros da transformação que apenas uma só iteração é suficiente para obter-se uma solução suficientemente próxima há solução correcta do problema dos mínimos quadrados de tal forma que, numa situação prática, não são necessárias mais iterações.

Horn em [Horn, 1987] apresentou um método não iterativo para a solução do problema da determinação da transformação geométrica por mínimos quadrados. Uma vantagem deste método é permitir determinar, dadas as coordenadas dos *pixels* dos dois contornos devidamente emparelhados, com um único passo a melhor transformação geométrica. Outra vantagem é a não necessidade de uma boa aproximação inicial tal como é requerida nos métodos iterativos.

Na seu método Horn utiliza *quaternions* unitários para representar a rotação. O *quaternion* associado há rotação é o vector próprio associado ao mais elevado valor próprio positivo de uma matriz (4×4) simétrica. Os elementos desta matriz são combinações simples dos somatórios dos produtos das coordenadas correspondentes dos *pixels*.

Enquanto *quaternions* unitários constituem uma representação elegante para a rotação, a que é mais familiar, no contexto das transformações geométricas, é a da matriz ortonormal com determinante positivo. Felizmente, a referida matriz (3×3) para a rotação pode ser facilmente construída a partir das quatro componentes do *quaternion* unitário, como pode ser comprovado no apêndice desta comunicação. Trabalhar directamente com matrizes é uma tarefa árdua devido há necessidade de lidar com seis restrições não lineares de forma a manter a matriz ortonormal.

Considerando-se dois contornos t e $t+1$ uma propriedade desejável para o método de determinação da melhor transformação geométrica é que a solução determinada do contorno t para $t+1$ seja exactamente a inversa da solução do contorno $t+1$ para t . Será verificado, no próximo ponto, que o factor de escala tem de ser tratado de uma forma particular para se verificar tal propriedade. Simetria é garantida quando são utilizados para representar a rotação *quaternions* unitários.

2.1 - Determinação da translação

Considere-se dois contornos t e $t+1$ constituídos por n *pixels* com a correspondência devidamente estabelecida. As coordenadas dos *pixels* no contorno t e as do contorno $t+1$ são referenciadas respectivamente por $\{\vec{r}_{t,i}\}$ e $\{\vec{r}_{t+1,i}\}$, onde i varia entre 1 e n . A transformação a determinar tem a forma $\vec{r}_{t+1} = sR(\vec{r}_t) + \vec{T}$ para o contorno $t+1$ a partir do contorno t . Nesta equação s é o escalonamento, \vec{T} a translação, e $R(\vec{r}_t)$ representa o vector \vec{r}_t rodado. Neste ponto não será utilizada nenhuma notação particular para a rotação; apenas será considerado o facto da rotação ser uma operação linear e que preserva o comprimento: $\|R(\vec{r}_t)\|^2 = \|\vec{r}_t\|^2$, onde $\|\vec{r}\|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ é a raiz quadrada do comprimento do vector \vec{r} .

A menos que as coordenadas sejam perfeitas, não será possível determinar um escalonamento, uma translação e uma rotação de tal forma que a equação da transformação geométrica rígida seja satisfeita para todos os *pixels*. Assim existira um erro residual $e_i = \vec{r}_{t+1,i} - sR(\vec{r}_{t,i}) - \vec{T}$. Para determinar-se a melhor transformação geométrica possível devesse-se minimizar a soma dos quadrados dos erros residuais:

$$\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2.$$

Nos próximos pontos será apresentada a variação do erro total; primeiro, em função da translação, depois com o escalonamento, e finalmente com respeito há rotação.

2.1.1 - Os centroides dos conjuntos das coordenadas

Verifica-se a utilidade de referenciar as coordenadas relativamente ao centroide correspondente definido por

$$\bar{\vec{r}}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{r}_{t,i}, \quad \bar{\vec{r}}_{t+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{r}_{t+1,i}.$$

Sejam as coordenadas relativas definidas como $\vec{r}'_{t,i} = \vec{r}_{t,i} - \bar{\vec{r}}_t$, $\vec{r}'_{t+1,i} = \vec{r}_{t+1,i} - \bar{\vec{r}}_{t+1}$.

Note-se que $\sum_{i=1}^n \vec{r}_{t,i} = 0$, $\sum_{i=1}^n \vec{r}_{t+1,i} = 0$.

O termo do erro pode ser agora reescrito como:

$$e_i = \vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i}) - \vec{T}' \quad \text{onde } \vec{T}' = \vec{T} - \vec{r}_{t+1} + sR(\vec{r}_t).$$

A soma dos erros quadráticos torna-se:

$$\sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i}) - \vec{T}' \right\|^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i}) \right\|^2 - 2\vec{T}' \cdot \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i})] + n\|\vec{T}'\|^2.$$

Nesta expressão o somatório do meio é nulo: as coordenadas são relativas ao centroide correspondente. Desta forma restam o primeiro e o terceiro termo. O primeiro não depende de \vec{T}' e o último não pode ser negativo. O erro total é obviamente minimizado com $\vec{T}' = 0$ ou $\vec{T} = \vec{r}_{t+1} - sR(\vec{r}_t)$. Isto é, a translação é apenas a diferença entre o centroide do contorno $t+1$ e o centroide do contorno t previamente rodado e escalonado. Esta equação será novamente retomada após a determinação do escalonamento e da rotação.

Este método, baseado na informação total, é preferível aos que utilizam a informação apenas relacionada com um ou alguns *pixels* para a determinação da translação envolvida na transformação geométrica global.

Neste ponto é possível verificar que o termo do erro pode ser reescrito como $e_i = \vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i})$ desde que $\vec{T}' = 0$. Desta forma o erro total a minimizar resume-se a

$$\sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t+1,i} - sR(\vec{r}'_{t,i}) \right\|^2.$$

2.2 - Determinação do escalonamento

Expandindo o erro total e notando que

$$\left\| R(\vec{r}'_{t,i}) \right\|^2 = \left\| \vec{r}'_{t,i} \right\|^2,$$

obtemos $\sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t+1,i} \right\|^2 - 2s \sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t+1,i} \cdot R(\vec{r}'_{t,i}) + s^2 \sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t,i} \right\|^2$,

que pode ser reescrito na forma $S_{t+1} - 2sD + s^2S_t$, onde S_{t+1} e S_t são as somas dos quadrados dos vectores das coordenadas (relativas ao centroide correspondente), enquanto D é a soma dos produtos internos das coordenadas correspondentes do contorno $t+1$ com as coordenadas rodadas do contorno t . Resolvendo o quadrado de s , obtemos

$$\left(s\sqrt{S_t} - D/\sqrt{S_t} \right)^2 + (S_{t+1}S_t - D^2)/S_t.$$

Esta expressão é minimizada em termos do escalonamento s quando o primeiro termo é nulo ou $s = D/\sqrt{S_t}$, isto é,

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t+1,i} \cdot R(\vec{r}'_{t,i})}{\sum_{i=1}^n \left\| \vec{r}'_{t,i} \right\|^2}.$$

2.2.1 - Simetria do escalonamento

Se, em vez de determinar-se o melhor ajustamento há transformação, $\vec{r}_{t+1} = sR(\vec{r}_t) + \vec{T}$, determinar-se o melhor há transformação inversa, $\vec{r}_t = \bar{s}\bar{R}(\vec{r}_{t+1}) + \bar{\vec{T}}$, pode-se ter como objectivo a obtenção da solução inversa exacta:

$$\bar{s} = 1/s, \quad \bar{\vec{T}} = -\frac{1}{s}R^{-1}(\vec{T}), \quad \bar{R} = R^{-1}.$$

Tal não acontece com a formulação anterior. Trocando os índices dos contornos, obtemos que:

$$\bar{s} = \bar{D}/S_{t+1} \quad \text{ou} \quad \bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t,i} \cdot \bar{R}(\vec{r}'_{t+1,i})}{\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t+1,i}\|^2},$$

que no geral não será igual a $1/s$, como o determinado anteriormente.

Um dos resultados assimétricos apresentados anteriormente pode ser apropriado quando as coordenadas de um contorno são conhecidas com precisão superior às do outro. Se os erros nos dois conjuntos de coordenadas são similares, é mais razoável usar uma expressão simétrica para o termo do erro:

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{s}}\vec{r}'_{t+1,i} - \sqrt{s}R(\vec{r}'_{t,i}).$$

Desta forma o erro total torna-se $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t+1,i}\|^2 - 2\sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t+1,i} \cdot R(\vec{r}'_{t,i}) + s\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t,i}\|^2$ ou $\frac{1}{s}S_{t+1} - 2D + sS_t$.

Resolvendo o quadrado de s , obtemos $\left(\sqrt{s}S_t - \frac{1}{\sqrt{s}}S_{t+1}\right)^2 + 2(S_tS_{t+1} - D)$.

Esta expressão é minimizada em termos do escalonamento s quando o primeiro termo é nulo

ou $s = S_{t+1}/S_t$, isto é, $s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t+1,i}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t,i}\|^2}\right)^{1/2}$.

Uma vantagem deste resultado simétrico é permitir a determinação do escalonamento sem a necessidade da prévia determinação da rotação. Importante é o facto da determinação da rotação não ser afectada pela escolha de um dos três valores para o escalonamento. Em cada caso, o erro restante é minimizado quando D é o máximo possível; isto é, a rotação a

determinar maximizar $\sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t+1,i} \cdot R(\vec{r}'_{t,i})$.

2.3 - Determinação da rotação

Existem muitas maneiras de representar rotações, incluindo as seguintes: ângulos de Euler, vector de Gibbs, parâmetros de Cayley-Klein, eixos e ângulos, matrizes ortonormais, *quaternions* de Hamilton, etc. Destas, matrizes ortonormais são as mais utilizadas para a representação de rotações em robótica, computação gráfica, visão por computador, etc. Contudo, existem muitas vantagens associadas há notação de *quaternions* unitários (Sobre *quaternions* ver apêndice.). Uma destas vantagens, é que é bastante mais simples garantir que um *quaternion* tenha amplitude unitária do que uma matriz seja ortonormal. Também, *quaternions* unitários estão fortemente relacionados com a notação geometricamente intuitiva de eixos e ângulos.

Horn resolve o problema da determinação da rotação pela maximização de $\sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t+1,i} \cdot R(\vec{r}'_{t,i})$ com a utilização de *quaternions* unitários. Desta forma deve-se determinar o *quaternion* unitário \hat{q} que maximize $\sum_{i=1}^n (\hat{q} \vec{r}'_{t,i} \bar{\hat{q}}) \cdot \vec{r}'_{t+1,i}$.

A expressão a maximizar pode ser reescrita com a forma $\sum_{i=1}^n (\hat{q} \vec{r}'_{t,i}) \cdot (\vec{r}'_{t+1,i} \hat{q})$. Supondo-se que $\vec{r}'_{t,i} = (x'_{t,i}, y'_{t,i}, z'_{t,i})$ e $\vec{r}'_{t+1,i} = (x'_{t+1,i}, y'_{t+1,i}, z'_{t+1,i})$, então

$$\hat{q} \vec{r}'_{t,i} = \begin{bmatrix} 0 & -x'_{t,i} & -y'_{t,i} & -z'_{t,i} \\ x'_{t,i} & 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ y'_{t,i} & -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ z'_{t,i} & y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \hat{q} = \overline{\mathfrak{R}}_{t,i} \hat{q},$$

e

$$\vec{r}'_{t+1,i} \hat{q} = \begin{bmatrix} 0 & -x'_{t+1,i} & -y'_{t+1,i} & -z'_{t+1,i} \\ x'_{t+1,i} & 0 & -z'_{t+1,i} & y'_{t+1,i} \\ y'_{t+1,i} & z'_{t+1,i} & 0 & -x'_{t+1,i} \\ z'_{t+1,i} & -y'_{t+1,i} & x'_{t+1,i} & 0 \end{bmatrix} \hat{q} = \mathfrak{R}_{t+1,i} \hat{q}.$$

Notar que $\mathfrak{R}_{t+1,i}$ e $\overline{\mathfrak{R}}_{t,i}$ são transpostas e simétricas assim como ortogonais. A soma que deve ser maximizada pode ser reescrita na forma:

$$\sum_{i=1}^n (\overline{\mathfrak{R}}_{t,i} \hat{q}) \cdot (\mathfrak{R}_{t+1,i} \hat{q}) \text{ ou } \sum_{i=1}^n \hat{q}^T \overline{\mathfrak{R}}_{t,i}^T \mathfrak{R}_{t+1,i} \hat{q};$$

isto é, $\hat{q}^T \left(\sum_{i=1}^n \overline{\mathfrak{R}}_{t,i}^T \mathfrak{R}_{t+1,i} \right) \hat{q}$ ou $\hat{q}^T \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) \hat{q} = \hat{q}^T N \hat{q}$, onde $N_i = \overline{\mathfrak{R}}_{t,i}^T \mathfrak{R}_{t+1,i}$ e $N = \sum_{i=1}^n N_i$.

Facilmente pode ser verificado que cada matriz N_i é simétrica e, por isso, N também deve ser simétrica.

2.3.1 - A matriz das somas dos produtos

É conveniente introduzir a matriz (3×3) $M = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_{t,i} \vec{r}'_{t+1,i}^T$ cujos elementos são as somas dos produtos das coordenadas dos *pixels* do contorno t com as dos do contorno $t+1$. Esta matriz M contém toda a informação requerida para resolver o problema dos mínimos quadrados para a rotação. Os elementos individuais podem ser identificados escrevendo M na forma

$$M = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}, \text{ onde } S_{xx} = \sum_{i=1}^n x'_{t,i} x'_{t+1,i}, S_{xy} = \sum_{i=1}^n x'_{t,i} y'_{t+1,i}, \text{ e por ai adiante.}$$

Então

$$N = \begin{bmatrix} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{xx} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & (-S_{xx} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & (-S_{xx} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix}.$$

Desta forma os 10 elementos independentes da matriz (4×4) real simétrica N são somas e diferenças dos nove elementos da matriz (3×3) M . De notar que o traço, soma dos elementos da diagonal da matriz N , é zero. (Esta propriedade restringe o décimo grau de liberdade.)

2.3.2 - O vector próprio maximiza o produto matricial

Horn em [Horn, 1987] demonstra que o *quaternion* unitário que maximiza $\dot{q}^T N \dot{q}$ é o vector próprio associado ao mais elevado valor próprio positivo da matriz N .

2.4 - O algoritmo proposto

O algoritmo para o método proposto por Horn, e apresentado nesta comunicação, pode ser resumido da seguinte forma:

Em primeiro deve-se determinar os centroides \bar{r}_t e \bar{r}_{t+1} dos dois conjuntos de *pixels*. OS centroides determinados são subtraídos aos *pixels* do respectivo contorno: $\bar{r}'_{t,i} = \bar{r}_{t,i} - \bar{r}_t$, $\bar{r}'_{t+1,i} = \bar{r}_{t+1,i} - \bar{r}_{t+1}$; desta forma, as coordenadas dos *pixels* passam a ser relativas ao centroide correspondente. Para cada par de coordenadas calcula-se os nove produtos possíveis $x'_i x'_{t+1,i}$, $x'_i y'_{t+1,i}$, ..., $z'_i z'_{t+1,i}$ das componentes dos dois vectores. Estes produtos são somados de forma a determinar-se S_{xx} , S_{xy} , ..., S_{zz} : $S_{xx} = \sum_{i=1}^n x'_{t,i} x'_{t+1,i}$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x'_{t,i} y'_{t+1,i}$, e por ai adiante. Estes nove somatórios contêm toda a informação necessária para determinar a solução desejada.

De seguida determina-se os 10 elementos independentes da matriz (4×4) simétrica N por combinação dos somatórios obtidos anteriormente:

$$N = \begin{bmatrix} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{xx} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & (-S_{xx} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & (-S_{xx} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix}.$$

Construída a matriz N , determina-se o seu vector próprio associado ao valor próprio positivo mais elevado (Em [Chapra, 1988; Press 1992] são apresentados vários métodos para a determinação de valores/vectores próprios de matrizes simétricas). O *quaternion* que representa a rotação envolvida é um vector unitário com a mesma direcção do referido vector próprio.

O escalonamento existente pode ser determinado utilizando uma das três formulas apresentadas no ponto 2.2. Se a formula utilizada é a de simetria, então não é necessário a

prévia determinação da rotação para obter-se o escalonamento. Desta forma, o escalonamento é apenas o quociente da raiz quadrada dos desvios médios dois conjuntos das coordenadas relativamente aos seus centroides:

$$s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t+1,i}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|\vec{r}'_{t,i}\|^2} \right)^{1/2} .$$

Deve-se notar que, neste método, não existe nenhuma aproximação envolvida: não existe a necessidade de correcção iterativa.

2.5 - Utilização de pesos para a confiança associada às coordenadas dos *pixels*

Os erros esperados para as coordenadas dos *pixels* não são todos iguais. Assim deve-se introduzir pesos na soma total dos erros de tal forma que se deve minimizar:

$$\sum_{i=1}^n w_i \|e_i\|^2 ,$$

onde w_i é a medida de confiança associada às coordenadas do *pixel* i .

O método apresentado nesta comunicação pode ser facilmente alterado de forma a considerar tais medidas de incerteza. Os centroides tornam-se centroides pesados:

$$\bar{\vec{r}}_t = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \vec{r}_{t,i}}{\sum_{i=1}^n w_i} , \quad \bar{\vec{r}}_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \vec{r}_{t+1,i}}{\sum_{i=1}^n w_i} .$$

A translação é determinada pela utilização destes centroides, como no caso da não utilização dos pesos. A determinação do melhor escalonamento é alterada ligeiramente pela utilização das medidas de confiança:

$$s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i \|\vec{r}'_{t+1,i}\|^2}{\sum_{i=1}^n w_i \|\vec{r}'_{t,i}\|^2} \right)^{1/2} .$$

A única mudança no método para a determinação da rotação envolvida é no facto dos produtos nos somatórios serem pesados, isto é,

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \vec{r}'_{t,i} \vec{r}'_{t+1,i}{}^T ,$$

então

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n w_i x'_{t,i} x'_{t+1,i} ,$$

e por ai adiante. Desde que os elementos da matriz M estejam determinados, o processo é exactamente semelhante ao utilizado no caso de não se considerar os pesos.

3 - Resultados experimentais

Nesta secção são apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação do método descrito nesta comunicação para a determinação da transformação rígida entre dois contornos.

Na *Fig. 2* observa-se o contorno t e o contorno $t+1$ resultante da aplicação, ao contorno t , de uma rotação de 25° em torno da origem, um escalonamento relativamente à origem de 1.5 e uma translação de 100 *pixels* segundo o eixo x e de -50 *pixels* segundo o eixo y .

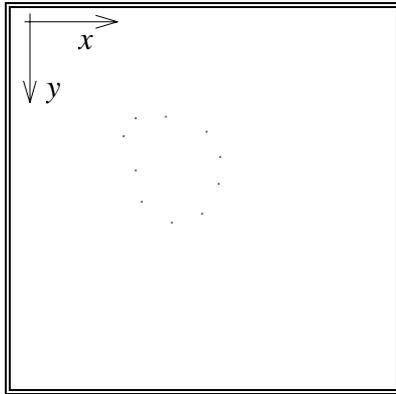
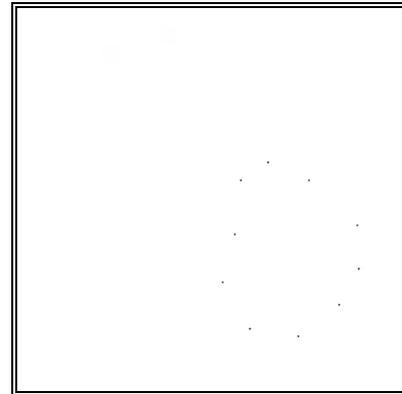


Figura 2a - Contorno t .



*Figura 2b - Contorno $t+1$: contorno t rodado 25° em torno da origem, escalonado relativamente à origem de 1.5 e transladado 100 *pixels* segundo o eixo x e -50 *pixels* segundo o eixo y .*

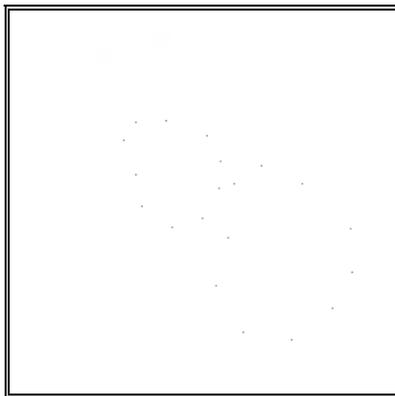


Figura 2c - Contorno t e contorno $t+1$.

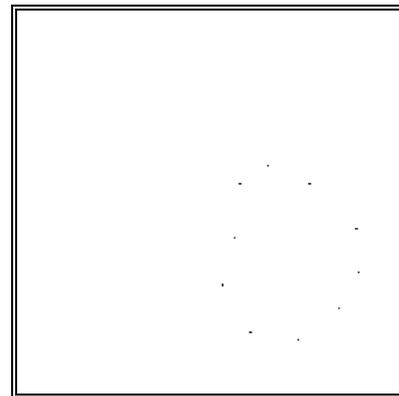
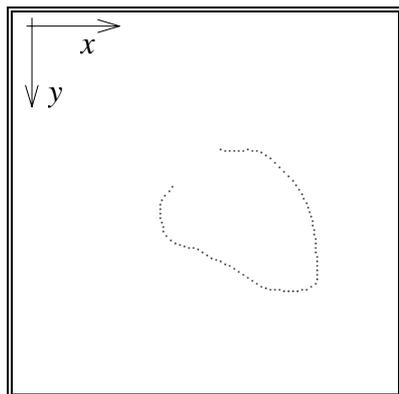
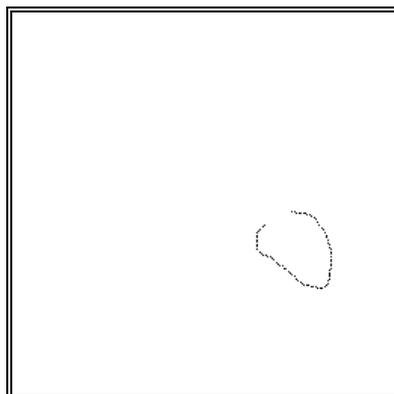
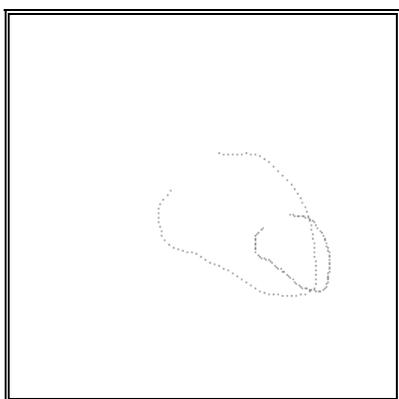
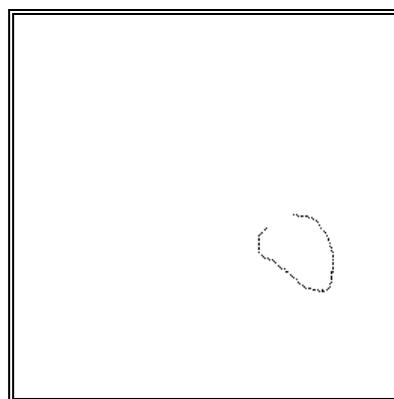


Figura 3 - Contorno $t+1$ e contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada.

Os resultados obtidos, neste exemplo não foi considerada a incerteza associada às coordenadas, foram: uma rotação de 24.75° segundo o eixo $(0,0,1)$ que passa pela origem, um escalonamento de 1.51 relativamente à origem e uma translação de 99.01 *pixels* segundo o eixo x e de -50.01 *pixels* segundo o eixo y . Na *Fig. 3* é possível observar-se o contorno $t+1$ e o contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada. Nesta figura é possível verificar a boa qualidade da solução determinada pelo método proposto por Horn.

Na *Fig. 4* observa-se o contorno t e o contorno $t+1$ resultante da aplicação, ao contorno t , de uma rotação de 10° em torno da origem, um escalonamento relativamente à origem de 0.5 e uma translação de 125 *pixels* segundo o eixo x e de -75 *pixels* segundo o eixo y .

Figura 4a - Contorno t .Figura 4b - Contorno $t+1$: contorno t rodado 10° em torno da origem, escalonado relativamente à origem de 0.5 e transladado 125 pixels segundo o eixo x e -75 pixels segundo o eixo y .Figura 4c - Contorno t e contorno $t+1$.Figura 5 - Contorno $t+1$ e contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada.

Os resultados obtidos, neste exemplo não foi considerada a incerteza associada às coordenadas, foram: uma rotação de 10.03° segundo o eixo $(0,0,1)$ que passa pela origem, um escalonamento de 0.49 relativamente à origem e uma translação de 124.34 pixels segundo o eixo x e de 75.26 pixels segundo o eixo y . Na Fig. 5 é possível observar-se o contorno $t+1$ e o contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada. Nesta figura é possível verificar, mais uma vez, a boa qualidade da solução determinada pelo método proposto por Horn.

Na Fig. 6 observa-se o contorno t e o contorno $t+1$ resultante da aplicação, ao contorno t , de uma rotação de -20° em torno da origem, um escalonamento relativamente à origem de 0.75 e uma translação de -10 pixels segundo o eixo x e de 100 pixels segundo o eixo y .

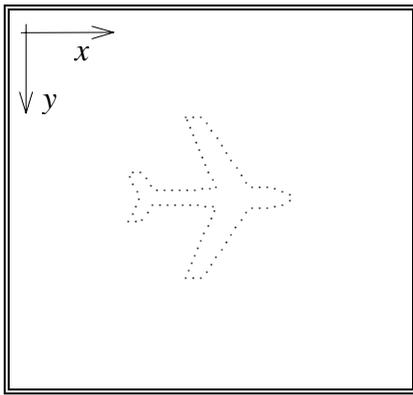


Figura 6a - Contorno t .

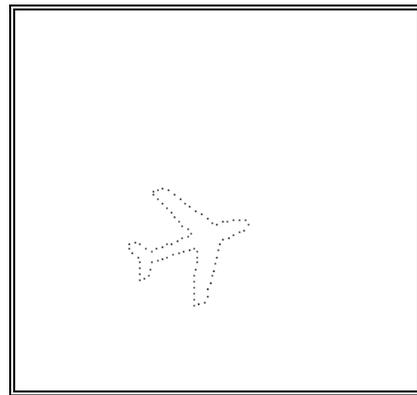


Figura 6b - Contorno $t+1$: contorno t rodado -20° em torno da origem, escalonado relativamente à origem de 0.75 e transladado -10 pixels segundo o eixo x e 100 pixels segundo o eixo y .

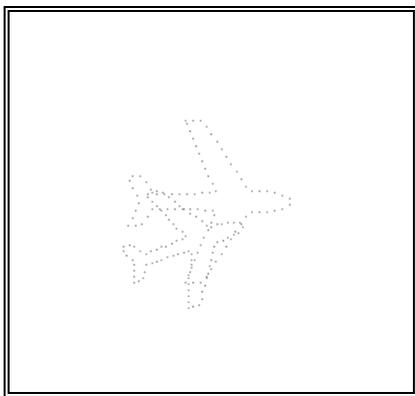


Figura 6c - Contorno t e contorno $t+1$.

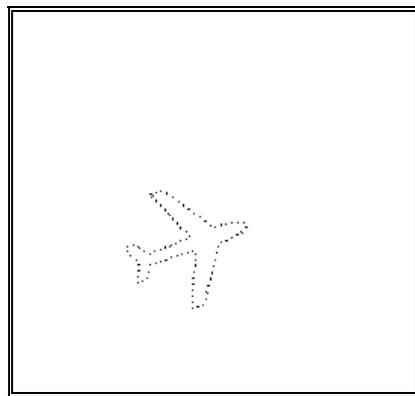
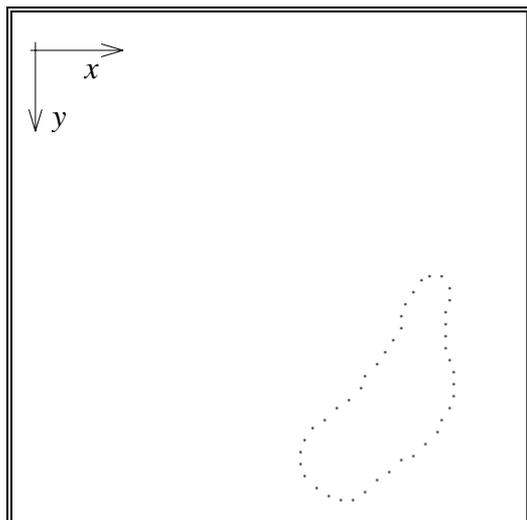
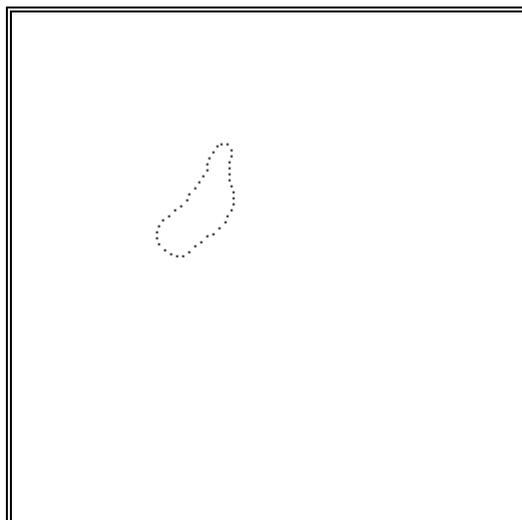
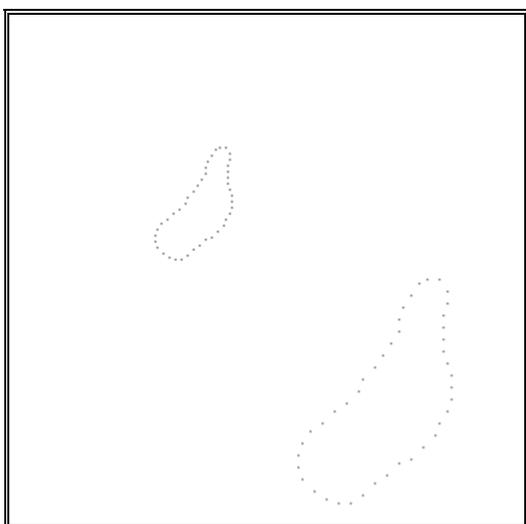
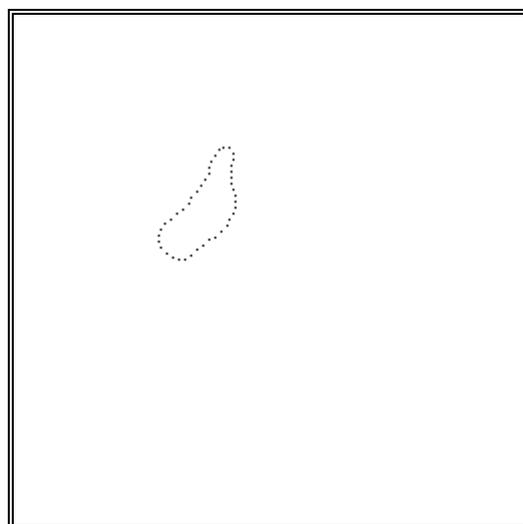


Figura 7 - Contorno $t+1$ e contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada.

Os resultados obtidos, neste exemplo não foi considerada a incerteza associada às coordenadas, foram: uma rotação de -19.97° segundo o eixo $(0,0,1)$ que passa pela origem, um escalonamento de 0.75 relativamente à origem e uma translação de -9.6 pixels segundo o eixo x e de 100.28 pixels segundo o eixo y . Na Fig. 7 é possível observar-se o contorno $t+1$ e o contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada. Nesta figura é possível verificar, mais uma vez, a boa qualidade da solução determinada pelo método proposto por Horn.

Na Fig. 8 observa-se o contorno t e o contorno $t+1$ resultante da aplicação, ao contorno t , de um escalonamento relativamente à origem de 0.5.

Figura 8a - Contorno t .Figura 8b - Contorno $t+1$: contorno t escalonado relativamente à origem de 0.5.Figura 8c - Contorno t e contorno $t+1$.Figura 9 - Contorno $t+1$ e contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada.

Os resultados obtidos, neste exemplo foi considerada a incerteza associada às coordenadas dos 43 *pixels* devidamente emparelhados¹, foram: uma rotação de 0.0° segundo o eixo $(0,0,1)$ que passa pela origem, um escalonamento de 0.5 relativamente à origem e uma translação de 0.5 *pixels* segundo o eixo x e de 0.0 *pixels* segundo o eixo y . Na Fig. 9 é possível observar-se o contorno $t+1$ e o contorno t após a aplicação da transformação rígida determinada. Nesta figura é possível verificar, mais uma vez, a boa qualidade da solução determinada pelo método proposto por Horn.

Pelos resultados experimentais obtidos, alguns dos quais são apresentados nesta comunicação, podemos concluir que com o método proposto por Horn é possível

¹ O método utilizado para o emparelhamento é o proposto por Shapiro em [Shapiro, 1991] e apresentado em [Tavares, 1997]. A medida de incerteza [Sclaroff, 1993; Tavares, 1997a] é: $1/(1+z_i)$ onde z_i é a medida de emparelhamento: entre 0 (bom emparelhamento) e 1 (mau emparelhamento).

determinar-se boas soluções para as transformações rígidas entre dois contornos constituídos por *pixels*.

4 - Conclusões

Nesta comunicação é apresentado um método proposto por Horn para resolver o problema da determinação da transformação rígida entre dois contornos utilizando mínimos quadrados. Com este método é possível determinar-se a melhor transformação rígida existente entre os dois contornos. No método apresentado são utilizados *quaternions* para representar a rotação. (Em apêndice são apresentados os *quaternions*, notação envolvida, algumas operações e algumas propriedades.)

Neste método o melhor factor de escalonamento é o quociente da raiz quadrada dos desvios quadráticos das coordenadas relativas ao centroide correspondente. A melhor translação é a diferença entre o centroide de um contorno e o centroide do outro contorno previamente rodado e escalonado relativamente à origem. Como são utilizadas as coordenadas de todos os *pixels* disponíveis obtêm-se bons resultados e superiores aos conseguidos pelos métodos que só utilizam a informação referente a três *pixels*. O *quaternion* unitário representando a rotação é o vector próprio associado ao valor próprio positivo de valor mais elevado de uma matriz (4×4) simétrica. A matriz ortonormal correspondente pode ser facilmente obtida a partir do respectivo *quaternion* unitário.

A implementação do método apresentado é facilmente conseguida e obtém, como é possível verificar pelos resultados experimentais obtidos e apresentados, as transformações rígidas existentes entre contornos constituídos por *pixels* com qualidade bastante aceitável.

Podemos concluir tratar-se de um método interessante para a determinação da transformação rígida a aplicar ao contorno t antes de se determinar as transformações não rígidas entre os dois contornos.

Apêndice

1 - Quaternions

Um *quaternion* pode ser referido como um vector com quatro componentes, resultante da composição de um escalar e um vector 3D, ou como um número complexo com quatro partes imaginárias distintas. Um *quaternion* pode ser representado (utilizando a notação dos números complexos) como:

$$\dot{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k ,$$

onde q_0 é a parte real e q_x , q_y e q_z as partes imaginárias.

A multiplicação de *quaternions* pode ser definida em termos do produto das componentes. Supondo que

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1; ij = k, jk = i, ki = j; e ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Então, se $\dot{r} = r_0 + r_x i + r_y j + r_z k$ resulta

$$\dot{r}\dot{q} = \left(r_0 q_0 - r_x q_x - r_y q_y - r_z q_z \right) + \left(r_0 q_x + r_x q_0 + r_y q_z - r_z q_y \right) i \\ + \left(r_0 q_y - r_x q_z + r_y q_0 + r_z q_x \right) j + \left(r_0 q_z + r_x q_y - r_y q_x + r_z q_0 \right) k.$$

Facilmente verifica-se que, no geral, $\dot{r}\dot{q} \neq \dot{q}\dot{r}$.

O produto de dois *quaternions* também pode ser convenientemente expresso em termos do produto de uma matriz ortogonal (4×4) e um vector de quatro componentes. Pode-se expandir quer o primeiro quer o segundo *quaternion* envolvido no produto numa matriz ortogonal (4×4) da seguinte maneira:

$$\dot{r}\dot{q} = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & -r_z & r_y \\ r_y & r_z & r_0 & -r_x \\ r_z & -r_y & r_x & r_0 \end{bmatrix} \dot{q} = \mathfrak{R}\dot{q} \quad \text{ou} \quad \dot{q}\dot{r} = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & r_z & -r_y \\ r_y & -r_z & r_0 & r_x \\ r_z & r_y & -r_x & r_0 \end{bmatrix} \dot{q} = \overline{\mathfrak{R}}\dot{q}.$$

Nota-se que $\overline{\mathfrak{R}}$ difere de \mathfrak{R} na transposição da sub matriz (3×3) inferior esquerda.

O produto interno de dois *quaternions* é soma do produto das componentes respectivas:

$$\dot{p} \cdot \dot{q} = p_0 q_0 + p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z.$$

A raiz quadrada da amplitude de um *quaternion* é o produto interno do *quaternion* com ele próprio: $\|\dot{q}\|^2 = \dot{q} \cdot \dot{q}$.

Um *quaternion* unitário é um *quaternion* cuja amplitude é igual a 1.

O conjugado de um *quaternion* é obtido negando-se a sua parte imaginária; então, $\bar{\dot{q}} = q_0 - q_x i - q_y j - q_z k$. As matrizes (4×4) associadas ao conjugado de um *quaternion* são simplesmente as transpostas das matrizes associada ao respectivo *quaternion*. O produto de um *quaternion* pelo seu conjugado é um real: $\dot{q}\bar{\dot{q}} = (q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) = \dot{q} \cdot \dot{q}$. Um *quaternion* não nulo tem o seu inverso igual a: $\dot{q}^{-1} = (1/(\dot{q} \cdot \dot{q}))\bar{\dot{q}}$. No caso de um *quaternion* unitário o inverso é o seu conjugado.

1.2 - Propriedades úteis dos produtos

O produto interno é mantido pois as matrizes associadas aos *quaternions* são ortogonais; assim $(\dot{q}\dot{p}) \cdot (\dot{q}\dot{r}) = (Q\dot{p}) \cdot (Q\dot{r}) = (Q\dot{p})^T (Q\dot{r})$ e $(Q\dot{p})^T (Q\dot{r}) = \dot{p}^T Q^T Q \dot{r} = \dot{p}^T (\dot{q} \cdot \dot{q}) I \dot{r}$ onde I é a matriz (4×4) identidade. Pode-se concluir que $(\dot{q}\dot{p}) \cdot (\dot{q}\dot{r}) = (\dot{q} \cdot \dot{q})(\dot{p} \cdot \dot{r})$, que, no caso de \dot{q} unitário, simplifica-se para $\dot{p} \cdot \dot{r}$. Um caso especial ressalta de imediato:

$$(\dot{p}\dot{q}) \cdot (\dot{p}\dot{q}) = (\dot{p} \cdot \dot{p})(\dot{q} \cdot \dot{q});$$

isto é, a amplitude de um produto é igual ao produto das amplitudes. Também verifica-se que $(\dot{p}\dot{q}) \cdot \dot{r} = \dot{p} \cdot (\dot{r}\dot{q})$.

Vectores podem ser representados por *quaternions* puramente imaginários. Se $\vec{r} = (x, y, z)^T$, pode-se utilizar o *quaternion* $\dot{r} = 0 + xi + yj + zk$. (Da mesma forma, escalares

podem ser representados utilizando-se *quaternions* reais). Note-se que as matrizes \mathfrak{R} e $\overline{\mathfrak{R}}$ associadas com *quaternions* puramente imaginários são simétricas e transpostas; isto é, neste caso especial, $\mathfrak{R}^T = -\mathfrak{R}$ e $\overline{\mathfrak{R}}^T = -\overline{\mathfrak{R}}$.

1.2 - *Quaternions unitários e rotação*

O comprimento de um vector não é alterado por rotação nem o ângulo formado por dois vectores. Desta forma a rotação preserva o produto interno. Reflexão também preserva o produto interno mas troca o sentido do produto externo - um sistema de vectores mão directa é alterado para um sistema mão esquerda. Apenas rotações e reflexões preservam o produto interno. Assim pode-se representar rotações utilizando um *quaternion* unitário se for possível descobrir uma solução que transforme *quaternions* puramente imaginários em *quaternions* puramente imaginários de forma que os produtos internos sejam preservados assim como o sentido dos produtos externos. (Um *quaternion* puramente imaginário representa um vector 3D.)

Uma solução que pode-se utilizar é o produto composto $\dot{r}' = \dot{q}\dot{r}\overline{\dot{q}}$ que é puramente imaginário. Tal pode ser verificado através da expansão $\dot{q}\dot{r}\overline{\dot{q}} = (Q\dot{r})\overline{\dot{q}} = \overline{Q}^T(Q\dot{r}) = (\overline{Q}^T Q)\dot{r}$, onde Q e \overline{Q} são as matrizes (4×4) correspondentes a \dot{q} . Notando-se que

$$\overline{Q}^T Q = \begin{bmatrix} \dot{q} \cdot \dot{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 0 & 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 0 & 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix},$$

conclui-se que \dot{r}' é puramente imaginário se \dot{r} também o for, Q e \overline{Q} são ortonormais se \dot{q} for um *quaternion* unitário. Então se $\dot{q} \cdot \dot{q} = 1$ a sub matriz (3×3) inferior direita de $\overline{Q}^T Q$ também é ortonormal. De facto, trata-se da familiar matriz de rotação R que transforma \dot{r} em \dot{r}' : $\dot{r}' = R\dot{r}$.

Pode-se verificar que o produto externo também é preservado pelo produto composto $\dot{q}\dot{r}\overline{\dot{q}}$, tratando-se assim de uma transformação de rotação e não de reflexão.

Notando-se que $(-\dot{q})\dot{r}(-\overline{\dot{q}}) = \dot{q}\dot{r}\overline{\dot{q}}$ pode-se concluir que $-\dot{q}$ e $+\dot{q}$ representam a mesma rotação.

1.3 - *Relações com outras representações*

A expansão de $\overline{Q}^T Q$ anteriormente apresentada proporciona um método explícito para determinação da matriz ortonormal de rotação R a partir dos componentes do *quaternion* unitário \dot{q} . Pode ser útil relacionar a notação dos *quaternions* com outras normalmente associadas a rotações. Uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo que passa pela origem e definido pelo vector unitário $\hat{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ pode ser representada pelo *quaternion* unitário $\dot{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (w_x i + w_y j + w_z k)$. Assim a parte imaginária do *quaternion* unitário representa a direcção do eixo de rotação enquanto o ângulo de rotação pode ser obtido a partir da parte real e da amplitude da parte imaginária.

1.4- Composição de rotações

Considerando de novo a rotação $\dot{r}' = \dot{q}\dot{r}\bar{q}$. Supondo-se que aplica-se uma segunda rotação, representada pelo *quaternion* unitário \dot{p} . Obtemos $\dot{r}'' = \dot{q}\dot{r}'\bar{q} = \dot{p}(\dot{q}\dot{r}\bar{q})\bar{p}$. Facilmente verifica-se que $(\bar{q}\bar{p}) = \overline{(\dot{q}\dot{p})}$. Desta forma pode-se escrever $\dot{r}'' = (\dot{p}\dot{q})\dot{r}(\overline{\dot{p}\dot{q}})$.

A rotação global é representada pelo *quaternion* unitário $(\dot{p}\dot{q})$. Assim a composição de rotações corresponde à multiplicação dos *quaternions*.

Pode-se concluir que são precisas menos operações aritméticas para multiplicar dois *quaternions* do que para multiplicar duas matrizes (3×3) . Também se deve notar que os cálculos envolvidos não são executados com precisão infinita. O produto de várias matrizes ortonormais pode não preservar a ortonormalidade devido há limitação da aritmética envolvida. Contudo, enquanto é difícil preservar-se a ortonormalidade, facilmente é preservada a amplitude unitária do *quaternion* resultante.

1.5 - Quaternions como a soma de um escalar e um vector

Por vezes é preferível pensar os *quaternions* como compostos por um escalar e um vector com três componentes. Assim $\dot{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k$ pode ser representado alternativamente com a forma $\dot{q} = q + \bar{q}$ em que $q = q_0$ e $\bar{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$. Utilizando-se esta forma, as regras de multiplicações de *quaternions* podem ser reescritas de uma forma mais compacta $p = rs - \bar{r} \cdot \bar{s}$, $\bar{p} = r\bar{s} + s\bar{r} + \bar{r} \times \bar{s}$, quando $\dot{p} = \dot{r}\dot{s}$ e $\dot{r} = r + \bar{r}$, $\dot{s} = s + \bar{s}$, $\bar{p} = p + \bar{p}$. O resultado é simplificado se \dot{r} e \dot{s} são puramente imaginários, isto é, se $r = 0$ e $s = 0$. Para este caso especial $p = -\bar{r} \cdot \bar{s}$, $\bar{p} = \bar{r} \times \bar{s}$.

Aplicando o produto de composição com um *quaternion* unitário \dot{q} a \bar{r} , \bar{s} e \bar{p} . Isto é: $\dot{r}' = \dot{q}\dot{r}\bar{q}$, $\dot{s}' = \dot{q}\dot{s}\bar{q}$, $\dot{p}' = \dot{q}\dot{p}\bar{q}$. Claramente $\dot{r}'\dot{s}' = (\dot{q}\dot{r}\bar{q})(\dot{q}\dot{s}\bar{q}) = (\dot{q}\dot{r})(\bar{q}\dot{q})(\dot{s}\bar{q}) = \dot{q}(\dot{r}\dot{s})\bar{q}$, e consequentemente $-\bar{r}' \cdot \bar{s}' = -\bar{r} \cdot \bar{s}$.

Também, $\bar{r}' \times \bar{s}'$ é o resultado da aplicação do produto de composição com um *quaternion* unitário a $\bar{r} \times \bar{s}$. Desta forma o produto interno e o produto externo são preservados. Pode-se, desta forma, concluir que o produto de composição com um *quaternion* unitário pode ser utilizado para representar uma rotação.

1.6 - Quaternion unitário a partir de um eixo e um ângulo

Supondo-se que um vector \bar{r} é transformado em \bar{r}' por uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo (que passa pela origem) dado pelo vector unitário $\hat{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$. Utilizando-se a formula de Rodrigues pode-se escrever:

$$\bar{r}' = \cos\theta\bar{r} + \sin\theta\hat{w} \times \bar{r} + (1 - \cos\theta)(\hat{w} \cdot \bar{r})\hat{w}.$$

Esta transformação também pode ser escrita na forma $\dot{r}' = \dot{q}\dot{r}\bar{q}$ na qual os *quaternions*, escritos na forma de um escalar e um vector, são $\dot{r} = 0 + \bar{r}$, $\dot{r}' = 0 + \bar{r}'$ e $\dot{q} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{w}$. Para verificar tal correspondência deve-se considerar que a parte

escalar de \dot{r} é nula e que \dot{q} é um *quaternion* unitário. Desta forma, o produto de composição $\dot{q}\bar{r}$ tem uma parte escalar nula e uma parte vectorial $\bar{r}' = (q^2 - \bar{q} \cdot \bar{q})\bar{r} + 2q\bar{q} \times \bar{r} + 2(\bar{q} \cdot \bar{r})\bar{q}$. Se substituir-se $q = \cos(\theta/2)$, $\bar{q} = \sin(\theta/2)\hat{w}$ e utilizar as identidades $2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = \sin\theta$, $\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos\theta$, obtemos a formula de Rodrigues.

A relação apresentada permite facilmente a conversão entre as notações eixo e ângulo, e *quaternion* unitário para as rotações. Assim, $\hat{w} = \bar{q}/\|\bar{q}\|$ e $\sin\theta = 2q\|\bar{q}\|$, $\cos\theta = (q^2 - \|\bar{q}\|^2)$.

1.7 - Quaternion unitário a partir da matriz ortonormal

Como já foi verificado anteriormente a matriz ortonormal correspondente ao *quaternion* unitário $\dot{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k$ é

$$R = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix}.$$

Por vezes é necessário obter-se o *quaternion* unitário correspondente a uma dada matriz ortonormal. Seja r_{ij} o elemento da matriz R correspondente à linha i e à coluna j . Utilizando-se as seguintes combinações dos termos da diagonal:

$$1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} = 4q_0^2, \quad 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} = 4q_x^2,$$

$$1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} = 4q_y^2, \quad 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} = 4q_z^2,$$

pode-se determinar qual dos q_x, \dots, q_z é o mais elevado. Esta componente do *quaternion* é obtida extraíndo-se a raiz quadrada (e dividindo por 2). Pode-se escolher qualquer sinal para a raiz quadrada pois $-\dot{q}$ e $+\dot{q}$ representam a mesma rotação. De seguida, consideram-se as três diferenças dos elementos não diagonais correspondentes

$$r_{32} - r_{23} = 4q_0 q_x, \quad r_{13} - r_{31} = 4q_0 q_y, \quad r_{21} - r_{12} = 4q_0 q_z,$$

e as três somas dos elementos não diagonais correspondentes

$$r_{21} + r_{12} = 4q_x q_y, \quad r_{32} + r_{23} = 4q_y q_z, \quad r_{13} + r_{31} = 4q_z q_x.$$

Três destas expressões são utilizadas para determinar as restantes três componentes do vector *quaternion* a partir da componente previamente determinada. Por exemplo, se q_0 foi determinada como sendo a mais elevada então q_x , q_y e q_z podem ser determinadas a partir das três diferenças que envolvem $4q_0 q_x$, $4q_0 q_y$ e $4q_0 q_z$.

Deve-se determinar em primeiro lugar a componente mais elevada pois assim se consegue assegurar uma melhor precisão numérica. Se, por exemplo, resolver-se determinar em primeiro lugar q_0 e esta for demasiado reduzida então q_x , q_y e q_z não podem ser determinadas com precisão elevada.

Agradecimentos

Agradeço à Junta Nacional de Investigação Científica a bolsa de doutoramento que me concedeu (referência: BD/3243/94 - PRAXIS XXI).

Agradeço ao Prof. Berthold K. P. Horn o envio do artigo “*Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions*” e a disponibilidade demonstrada.

Agradeço ao Prof. Larry Shapiro o envio do relatório “*Towards A Vision-Based Motion Framework*” e a disponibilidade demonstrada.

Bibliografia:

[Chapra, 1988] - *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*
Numerical Methods for Engineers
MCGRAW-HILL - 1988

[Foley, 1991] - *Foley, vanDam, Feiner, Hughes*
Computer Graphics Principles and Practice
ADDISON WESLEY 12110 - 1991 SECOND EDITION

[Hall, 1993] - *Ernest L. Hall*
Fundamental principles of robot vision
SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII (1993) - 321/333

[Horn, 1987] - *Berthold K. P. Horn*
Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions
JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA A, VOL. 4, 629/642, APRIL 1987

[Press, 1992] - *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*
Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - 1992 SECOND EDITION

[Sclaroff, 1993] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
Modal matching for correspondence and recognition
M.I.T. MEDIA LABORATORY - Nº 201 - MAY 1993

[Shapiro, 1991] - *Larry Shapiro*
Report: Towards A Vision-Based Motion Framework
ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE
OXFORD UNIVERSITY - MAY 25, 1991

[Tavares, 1995] - *João Manuel R. S. Tavares*
Algumas Ferramentas para Visão Tridimensional por Computador
Publicação inserida na dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores em 1995, para satisfação parcial dos requisitos do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.
Orientador: *A. Jorge Padilha*
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1995a] - *João Manuel R. S. Tavares*

Obtenção de Estrutura Tridimensional a Partir de Movimento de Câmara

Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores em 1995, para satisfação parcial dos requisitos do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

Orientador: *A. Jorge Padilha*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1997] - *João Manuel R. S. Tavares*

Comunicação Interna : Apresentação de uma Abordagem Modal para a Determinação da Correspondência entre *Pixels* de dois Contornos Não Rígidos

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1997a] - *João Manuel R. S. Tavares*

Comunicação Interna: Emparelhamento de dois contornos não rígidos utilizando elementos finitos e análise modal

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997