

João Manuel R. S. Tavares

Comunicação Interna:

**APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA
A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE
DOIS OBJECTOS NÃO RÍGIDOS UTILIZANDO O
MODELO FINITO DE SCLAROFF**



FEUP - *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

DEEC - *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*



INEB - *Instituto de Engenharia Biomédica*

Junho de 1998

Sumário

Nesta comunicação é apresentado o método de emparelhamento modal proposto por Sclaroff; um método baseado em princípios físicos para o estabelecimento de correspondências e para cálculo de descritores canónicos de forma. O método tem por base a ideia de descrever objectos em termos de simetrias generalizadas utilizando para tal os modos próprios de cada objecto. A descrição modal resultante é utilizada para o reconhecimento de objectos e sua caracterização; para tal, as similaridades entre duas formas são expressas em termos do valor da energia de deformação necessária para as alinhar. O emparelhamento modal também pode ser utilizado para a combinação linear de modelos segundo princípios físicos e, assim, sintetizar-se formas em termos de uma combinação pesada de formas protótipos deformadas segundo os seus modos. No geral, modos fornecem um ordenamento das deformações de uma forma do global para o local e assim permite a selecção dos tipos de deformações a considerar no alinhamento e na comparação de objectos.

Em contraste com outras técnicas, as quais requerem que a correspondência seja determinada com uma forma protótipo inicial, o método de Sclaroff utiliza um novo tipo de elemento finito que permite a determinação dos modos próprios de cada objecto directamente a partir dos seus dados pontuais. Tal elemento revela-se bastante robusto, de utilização geral e aplicável a dados de qualquer dimensão.

Uma adaptação por nós desenvolvida do modelo finito de Sclaroff para a modelação de contornos constituídos por *pixels* é também apresentada.

Uma implementação da técnica de Sclaroff, e da sua nova versão, foi por nós realizada para uma plataforma *PC* em ambiente *MS WINDOWS 95/NT* utilizando o ambiente integrado de desenvolvimento *MS VISUAL C++ 5.0*.

Também serão apresentados os resultados experimentais obtidos na análise modal de formas, de emparelhamento, na estimativa de deslocamentos para os dados que não foram devidamente emparelhados pela abordagem modal, de determinação da transformação rígida existente e de medição da deformação elástica envolvida.

Uma discussão sobre a influência dos vários parâmetros envolvidos no método e dos tipos das formas em estudo será apresentada no fim desta comunicação.

1 - Introdução

Um dos problemas principais da visão por computador é como deve ser realizada a descrição de características, contornos, superfícies e volumes de maneira a que possam ser reconhecidas e emparelhadas de vista para vista. As primeiras dificuldades são: os descritores do objecto são sensíveis ao ruído, o objecto pode não ser rígido, a aparência de um objecto deforma-se se a geometria utilizada na captação dos seus dados for alterada. Estes problemas motivaram a utilização de modelos deformáveis para interpolar, suavizar e segmentar dados.

Modelos deformáveis, por si só, não incluem um método para cálculo dos descritores canónicos para reconhecimento ou para obter a correspondência entre conjuntos de dados. Para resolver este problema Sclaroff e Pentland, [Pentland, 1990, 1991], desenvolveram um método para representar formas como deformações canónicas a partir de um objecto protótipo. Descrevendo a forma do objecto em termos dos valores próprios da matriz de rigidez do objecto protótipo, é possível obter para a mesma uma descrição robusta e ordenada pela frequência. Além do mais, estes vectores próprios ou modos são um método intuitivo para descrição da forma pois correspondem aos eixos de simetria generalizados do objecto. Representando os objectos em termos das deformações modais, este método é robusto para o modelamento 3D, reconhecimento de objectos, e seguimento 3D utilizando pontos, contornos, distâncias e fluxo óptico.

Contudo o método de Sclaroff e Pentland ainda não resolve o problema da determinação da correspondência entre conjuntos de dados ou entre dados e modelos. Tal é devido à imposição de cada objecto ser necessariamente descrito por deformações a partir de um único objecto protótipo. Tal impõe à priori uma parametrização implícita dos dados e assim determinar implicitamente a correspondência entre os dados e o protótipo.

Para evitar a referida imposição Sclaroff desenvolveu um método com o qual é possível obter os invariantes modais de forma directamente a partir dos dados. Tal permite calcular descritores canónicos robustos para o reconhecimento e para resolver problemas de correspondência entre dados de qualquer dimensão.

Nesta comunicação é apresentada o método proposto por Sclaroff, algumas alterações por nós introduzidas ao mesmo e alguns resultados experimentais obtidos: na determinação dos emparelhamentos entre os *pixels* que constituem dois objectos, na determinação dos deslocamentos para os *pixels* não emparelhados, no cálculo da energia de deformação e na utilização desta energia como medida da deformação existente entre dois objectos.

1.1 - A Ideia Base do Método de Sclaroff

Considere-se o problema de dados dois conjuntos de dados pontuais pretender-se determinar se são ou não de dois objectos similares. A abordagem mais comum, para resolver este problema, é tentar determinar características locais distintivas que possam ser emparelhadas com alguma confiança; tal abordagem falha quando existe insuficiente informação local e quando as condições de obtenção dos dados ou de deformação alteraram significativamente a aparência das características locais utilizadas.

Uma outra abordagem consiste em determinar um referencial de corpo centrado para cada objecto e depois tentar emparelhar os dados pontuais. Desde que os dados estejam descritos por coordenadas intrínsecas ou por coordenadas de corpo centrado, em vez de coordenadas cartesianas, utilizando a posição relativa é fácil obter a correspondência entre os dados dos dois objectos.

Muitos métodos para determinar o referencial de corpo centrado têm sido sugeridos,

incluindo métodos de momentos de inércia, de determinação das simetrias e descritores polares de Fourier. Geralmente estes métodos apresentam as seguintes dificuldades: erros de amostragem, erros de parametrização e não unicidade. A grande contribuição do método de Sclaroff é a de determinar um sistema de referência local que evita, em grande parte, estas três dificuldades.

Erros de amostragem são dos três os melhores compreendidos. Toda a gente envolvida no domínio da visão artificial sabe que os dados observados e as suas localizações podem ser drasticamente alteradas de vista para vista. A solução mais comum para este tipo de problema é a de apenas utilizar estatísticas globais como momentos de inércia; contudo, na melhor das hipóteses, tais métodos oferecem soluções fracas ou parciais.

Erros de parametrização são mais subtis. O problema ocorre quando, por exemplo, ajusta-se um conjunto de dados pontuais utilizando-se uma esfera deformável 3D o que impõem um sistema coordenado radial nos dados em vez de permitir que os mesmos dados determinem por si só um adequado sistema de coordenadas. Consequentemente a descrição resultante é afectada fortemente, por exemplo, pelas distorções compressivas e de corte típicas da perspectiva. O elevado número de artigos sobre simetrias distorcidas é indicativo da seriedade deste tipo de problema [Sclaroff, 1995, 1995a].

Não unicidade é um problema óbvio para o reconhecimento e emparelhamento mas que é muitas vezes ignorado quando se procura um qualquer tipo de descrição estável. Virtualmente todos os métodos baseados em *splines*, em placas finas e em polinómios apresentam esta inabilidade para obter descrições canónicas; geralmente este problema é devido ao facto dos parâmetros para as superfícies consideradas serem definidos de forma arbitrária e assim não invariantes há mudança de vista, oclusões e deformações não rígidas.

A solução apresentada por Sclaroff para estes problemas pode ser decomposta em três partes:

1. *É calculada uma descrição da forma que é robusta em relação há amostragem pela utilização de interpolação de Galerkin matematicamente associada ao método dos elementos finitos¹.*
2. *É introduzido um novo tipo de interpolador de Galerkin baseado em Gaussianos que permite obter a parametrização da forma directamente a partir dos seus dados.*
3. *De seguida são utilizados os modos próprios desta descrição da forma para obter-se um sistema de coordenadas canónico ortogonal e ordenado pela frequência. Este sistema pode ser encarado como os eixos de simetria generalizados da forma.*

Com a descrição da localização dos dados pontuais neste sistema de corpo centrado é fácil emparelhar dados correspondentes e medir a similaridade entre objectos diferentes. Tal permite o reconhecimento de objectos e determinar se diferentes objectos são relacionados por simples transformações físicas.

Um diagrama do método de Sclaroff esta representado na *Figura 1*. Para cada imagem, consideramos as localizações dos seus dados pontuais $X = [X_1 \cdots X_m]$ e utilizam-se estes como nodos na construção de um modelo de elemento finito para a forma. Tal pode ser interpretado como a construção de um modelo para a forma pela cobertura de cada dado com uma bolha Gaussiana de material elástico (por exemplo, borracha); se existe informação de segmentação então podem ser preenchidas as áreas interiores e o material que excede as fronteiras da forma

¹ Técnica *standard* de engenharia para simular o comportamento dinâmico de um objecto. Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998].

pode ser desprezado.

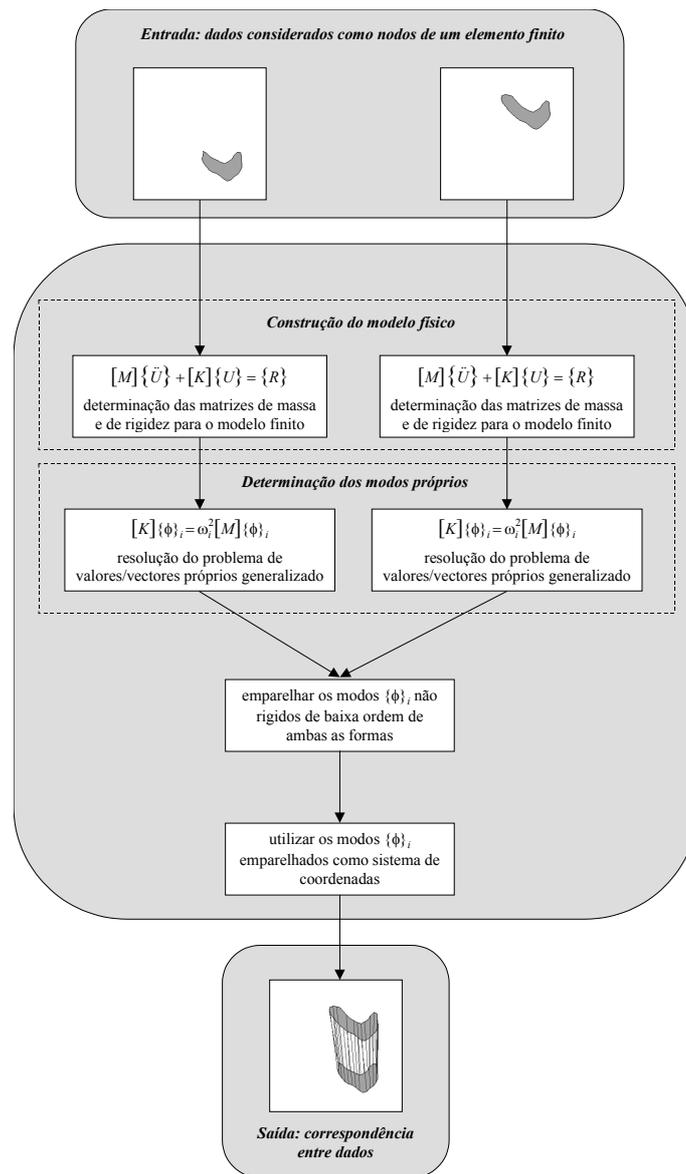


Figura 1 - Diagrama do método de Sclaroff.

De seguida são determinados os modos próprios (vectors próprios) $\{\phi\}_i$ do modelo finito. Estes modos proporcionam uma descrição ortogonal, ordenada pela frequência, da forma e das suas deformações naturais. Tais vectors são, por vezes, designados por vectors de forma para cada modo [Kelly, 1993; Meirovitch, 1986] pois descrevem como cada modo deforma a forma por alteração das localizações originais dos dados, por exemplo:

$$X_{deformado} = X + a \{\phi\}_i$$

onde a é um escalar.

Em problemas bidimensionais os três primeiros modos são os modos de corpo rígido da translação e da rotação, em problemas tridimensionais são os seis primeiros modos, e os restantes são os modos não rígidos [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986]. Estes modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, modos de baixa frequência descrevem deformações globais enquanto modos de mais elevada

frequência descrevem mais as deformações localizadas. Este ordenamento do global para o local é bastante útil na comparação e emparelhamento de formas.

Os modos próprios também formam um sistema de coordenadas ortogonal e centrado no objecto para descrição da localização dos dados pontuais. Isto é, a localização de cada dado pontual pode ser descrita de forma única em termos de como se move segundo cada modo próprio. A transformação entre as localizações no sistema cartesiano e no sistema modal é conseguida pela utilização dos vectores próprios do modelo finito como uma base coordenada. Na técnica de Sclaroff dois grupos de dados são comparados neste espaço próprio. A ideia importante é que os modos de baixa ordem para dois objectos similares irão ser bastante idênticos mesmo na presença de deformações afins², deformações não rígidas, perturbações locais da forma ou de ruído.

Utilizando esta propriedade, correspondência entre dados é determinada por emparelhamento modal. Assim a correspondência entre duas formas pode ser determinada por comparação das suas trajectórias no espaço modal. Dados cujo o emparelhamento apresenta um elevado grau de confiança são obtidos por este processo, os deslocamentos dos restantes serão estimados pela utilização do modelo físico como uma restrição de suavização.

Finalmente determinada a correspondência entre muitos dos dados pontuais que constituem dois objectos pode-se medir as suas diferenças de forma. Como o processo modal decompõe as deformações num conjunto ortogonal pode-se medir selectivamente as diferenças de corpo rígido, ou deformações do tipo projectiva de baixa ordem, ou deformações que são principalmente locais. Consequentemente pode-se reconhecer objectos numa maneira flexível e geral.

Alternativamente dadas as correspondências pode-se alinhar ou distorcer uma forma numa outra. Tal alinhamento é útil na fusão de dados obtidos por diferentes sensores, ou para a comparação de dados obtidos em instantes de tempo diferentes ou sobre diferentes condições. Também é útil em computação gráfica em que a referida distorção de uma forma numa outra é designada por *morphing*³.

Em resumo podemos afirmar que a técnica modal desenvolvida por Sclaroff oferece três vantagens sobre outras técnicas existentes. Primeira, pode ser utilizada automaticamente para identificar e etiquetar correspondentes dados entre duas formas; de tal forma, poder ser possível, sem intervenção de um utilizador, alinhar, comparar e realizar *morphing* entre as duas. Segunda, a representação modal obtida permite a separação de diferentes tipos de deformação. Por última, os parâmetros de deformação correspondem qualitativamente aos referidos como utilizados pelos humanos e, desta forma, podem ser utilizados para animação e para busca em bases de dados [Sclaroff, 1995].

Além do mais, deve-se ter em conta que a representação modal é suportada pelas teorias defendidas por biólogos envolvidos no estudo da morfologia dos esqueletos e das formas dos animais segundo as quais as formas de espécies diferentes estão relacionadas entre si por deformações [Sclaroff, 1995]. Estudos recentes também utilizam as deformações modais para a descrição do crescimento de órgãos de animais e no registro entre órgãos do mesmo tipo [Martin, 1998; Syn, 1995, 1995a].

Quando o número de dados a ter em conta é muito elevado a obtenção dos modos próprios pode ser um processo bastante custoso em termos computacionais; tal pode traduzir uma desvantagem do método proposto por Sclaroff para aplicações em, ou quase em, tempo real. Para resolver este problema Sclaroff propõe um modelo multi resolução; contudo, para uma classe particular de formas similares os modos podem ser predeterminados e generalizados

² Ver, por exemplo, [Folley 1991; Hall, 1993; Tavares, 1995].

³ Ver, por exemplo, [Folley 1991].

[Pentland, 1990, 1991]. Em alguns casos, para topologias do tipo tubo e esfera, Nastar em [Nastar, 1994] demonstra que os modos de deformação podem ser determinados analiticamente.

2 - Método dos Elementos Finitos

Utilizando o método de Galerkin [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998] para a discretização com um elemento finito pode ser estabelecido um sistema de funções de forma que relacionam o deslocamento de um ponto no interior deste com os deslocamentos dos seus restantes nodos. Utilizando estas funções torna-se possível determinar as deformações distribuídas uniformemente no objecto modelizado função dos parâmetros para o material considerado.

No geral a função de forma polinomial para um elemento é escrita, numa notação vectorial, como:

$$\{u(x)\} = [N(x)] \{\hat{U}\}$$

onde $[N(x)]$ é a matriz de interpolação, x a coordenada local de um ponto no interior do elemento para o qual se pretende especificar o deslocamento e $\{\hat{U}\}$ é o vector das componentes do deslocamentos em cada nodo do elemento.

Em muitas aplicações é necessário determinar a deformação resultante. A deformação ε é definida como a variação do deslocamento com o comprimento actual ou simplesmente a variação do comprimento [Branco, 1985; Timoshenko, 1970, 1982]. As funções de forma polinomiais podem ser utilizadas para calcular a deformação ε do objecto desde que sejam conhecidos os deslocamentos nodais. Utilizando este facto as deformações correspondentes podem ser determinadas:

$$\{\varepsilon(x)\} = [B(x)] \{\hat{U}\}$$

onde $[B(x)]$ é a matriz que relaciona os deslocamentos com as deformações e é geralmente designada por matriz de deformação. As linhas desta matriz $[B(x)]$ são obtidas por apropriada derivação e combinação dos elementos da matriz de interpolação $[N(x)]$ [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1997].

Estabelecendo as equações de equilíbrio dinâmico para o elemento resulta⁴:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [D] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$

Eq. 1

onde $\{R\}$ é o vector das cargas aplicadas, por exemplo as forças elásticas entre cada *pixel* e a superfície do objecto, e $[M]$, $[D]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez para o elemento.

As matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ para o elemento finito são definidas como:

⁴ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Branco, 1985; Tavares, 1998; Timoshenko, 1982].

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV$$

Eq. 2

e

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$$

Eq. 3

onde ρ é a densidade do material e $[C]$ é a matriz que relaciona as tensões com as deformações para o material e é dada como⁵:

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν coeficiente de Poisson.

A matriz de amortecimento $[D]$ é definida como:

$$[D] = \int_V \kappa [N]^T [N] dV$$

onde κ é o parâmetro de amortecimento. Na prática é difícil, se não impossível, determinar este parâmetro, particularmente porque as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, a matriz $[D]$ é geralmente construída utilizando-se as matrizes de massa e de rigidez conjuntamente com resultados experimentais do valor de amortecimento. Assim a matriz de amortecimento $[D]$ é uma combinação linear de potências das matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$, isto é:

$$[D] = \alpha [K]^r + \beta [M]^s$$

onde α e β são valores reais e r e s são valores inteiros; nestes casos, o amortecimento é designado por proporcional. Se r e s são iguais a um, então o amortecimento é proporcional e viscoso ficando a equação matricial de movimento com a forma:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [\alpha [M] + \beta [K]] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}.$$

3 - Análise Modal

O sistema de equações do equilíbrio dinâmico do elemento finito, Eq. 1, pode ser desacoplado

⁵ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Tavares, 1998; Timoshenko, 1970].

impondo as equações numa base definida pelos vectores próprios de $[M]^{-1}[K]$ ortonormais à matriz de massa $[M]$. Estes vectores próprios e os respectivos valores próprios são a solução $(\{\phi\}_i, \omega_i^2)$ do problema de valores próprios generalizado [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press, 1992]:

$$[K]\{\phi\}_i = \omega_i^2[M]\{\phi\}_i.$$

Eq. 4

O vector $\{\phi\}_i$ é designado por vector de forma para o modo i e ω_i é a correspondente frequência de vibração [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1979].

Os vectores de forma podem ser interpretados como uma descrição dos eixos não lineares generalizados de simetria do objecto. A Eq. 4 pode ser escrita como:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

onde

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \mid \dots \mid \{\phi\}_m] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \end{bmatrix} \text{ e } [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_m^2 \end{bmatrix}.$$

Como já foi referido, cada vector de forma $\{\phi\}_i$ é ortonormal em relação à matriz de massa $[M]$, isto significa que:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega] \text{ e } [\Phi]^T [M] [\Phi] = [I].$$

Eqs. 5

Esta transformação de coordenadas generalizada $[\Phi]$ é então utilizada para transformar os deslocamentos modais $\{\tilde{U}\}$ nos nodais $\{\hat{U}\}$ e vice-versa:

$$\{U\} = [\Phi] \{\tilde{U}\}.$$

A Eq. 1 pode agora ser reescrita em termos dos deslocamentos modais e obtemos um sistema desacoplado de equações:

$$\{\ddot{\tilde{U}}\}_t + [\tilde{D}] \{\dot{\tilde{U}}\} + [\Omega]_t \{\tilde{U}\}_t = [\Phi]_t^T \{R\},$$

Eq. 6

onde $[\tilde{D}]$ é a matriz diagonal de amortecimento modal.

As equações desacopladas podem ser facilmente resolvidas obtendo-se uma solução para o problema de equilíbrio dinâmico [Pentland, 1989a, 1991]. Formulando-se a solução de

equilíbrio em duas imagens pode ser obtida directamente a correspondência pontual.

Desprezando-se os modos associados as altas frequências o esforço computacional pode ser reduzido sem degradação significativa da qualidade da correspondência obtida. Além do mais, tal conjunto de amplitudes modais fornece uma descrição canónica robusta da forma em termos da deformação aplicada ao objecto elástico original. Tal permite a sua utilização directa para o reconhecimento de objectos [Cootes, 1995; Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1994b, 1995, 1995a; Syn, 1995, 1995a].

4 - Determinação das Matrizes de Massa e de Rigidez para o Modelo de Sclaroff

Uma grande limitação das várias aplicações existentes do método dos elementos finitos, na área da visão por computador, prende-se com o procedimento de colocar molas virtuais entre os dados e a superfície do objecto deformável impondo-se assim implicitamente uma parametrização *standard* dos dados. O objectivo principal de Sclaroff foi o de desenvolver um modelo finito que não necessita-se de tal parametrização de forma a que o modelo seja parametrizado de maneira natural a partir dos seus dados.

Para atingir tal objectivo, Sclaroff utiliza os próprios dados para definir o objecto deformável através da construção das matrizes de rigidez e de massa considerando os dados pontuais, por exemplo os *pixels*, como os nodos do elemento finito a ser considerado. Em primeiro lugar Sclaroff desenvolve uma formulação para o elemento finito utilizando funções Gaussianas como interpoladores de Galerkin e seguidamente utiliza estes interpoladores para obter as matrizes generalizadas de massa e de rigidez.

Intuitivamente, as funções de interpolação suavizam os dados pontuais e as áreas delimitadas por estes são preenchidas com um material virtual que tem propriedades de massa e de rigidez. Esta suavização e preenchimento da nuvem de pontos fazem com que exista uma imunidade ao ruído e à falta de alguns dados pontuais assim como torna informação há cerca da conectividade entre dados e de distinção entre estes desnecessária. As funções de interpolação também permitem atribuir maior peso a pontos importantes e diminuir o peso a ponto com menor importância. Este aumento/diminuição do peso é conseguido por variação das propriedades do material virtual entre os dados pontuais.

4.1 - Interpoladores Gaussianos

Dado um conjunto de m pontos amostrados X_i de uma imagem é necessário construir as apropriadas matrizes de massa e de rigidez. O primeiro passo é optar por um conjunto de funções de interpolação a partir das quais é possível derivar as matrizes $[N]$ e $[B]$. Isto é, optar por um conjunto de funções de interpolação contínuas h_i de tal forma que:

1. os seus valores são unitários para o nodo i a que estão associadas e nulos nos restantes;
2. $\sum_{i=1}^m N_i = 1.0$ em qualquer ponto do objecto.

Numa solução típica do método dos elementos finitos em engenharia são utilizadas funções de interpolação polinomiais de Lagrange ou de Hermite [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998]. As matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ são pré calculadas para cada tipo de elemento finito utilizado na modelização e, depois de correctamente transformadas de forma a reflectir as características que estes apresentam na modelização, são

agrupadas de forma a obter-se as correspondentes matrizes para o sistema global [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998]. Esta técnica de agrupamento tem a vantagem de que simples matrizes de massa e de rigidez podem ser pré calculadas e facilmente agrupadas em matrizes de grandes dimensões para o sistema de modelização de formas com topologias complexas.

O problema presente é diferente, pois o pretendido é examinar os modos próprios de uma nuvem de dados pontuais. Este problema é idêntico ao verificado em interpolação de redes: temos um certo número de medidas dispersas e pretendemos encantar um conjunto de funções de base que permitam uma inserção e movimentação de dados pontuais. Além do mais, desde que a posição dos pontos nodais coincidam com os dados pontuais as matrizes de massa e de rigidez devem ser obtidas a partir desse conjunto de pontos. Funções de base Gaussianas são candidatas ideais para este tipo de problema de interpolação [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a]:

$$g_i(X_j) = e^{-\|X_j - X_i\|^2 / (2\sigma^2)}$$

Eq. 7

onde X_i é o centro de dimensão n da função Gaussiana e σ é o desvio *standard* que controla a interacção entre os dados.

Sclaroff desenvolve as funções de interpolação h_i como a soma de m funções de base, uma por dado pontual X_i :

$$h_i(X) = \sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X)$$

Eq. 8

onde a_{ik} são os coeficientes que satisfazem os requisitos para funções de forma. A matriz dos coeficientes de interpolação $[A]$ pode ser determinada por inversão da matriz $[G]$ que apresenta a seguinte forma:

$$[G] = \begin{bmatrix} g_1(X_1) & \cdots & g_1(X_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m(X_1) & \cdots & g_m(X_m) \end{bmatrix}$$

Eq. 9

Utilizando os interpoladores Gaussianos, como funções de forma para a aproximação de Galerkin, é possível facilmente formular elementos finitos de qualquer dimensão que podem ser obtidos por agrupamento de Gaussianos de menor dimensão. Um aspecto bastante útil dos Gaussianos é que eles são factorizáveis: interpoladores multidimensionais podem ser formados a partir de Gaussianos de menor dimensão. Tal só não reduz o custo computacional como também pode ser útil para implementações de *hardware VLSI* ou de redes neuronais.

Deve-se notar que o somatório dos interpoladores Gaussianos não são conformes [Bathe, 1996; Tavares, 1998] pois não satisfaz a segunda condição para as funções de forma. Como consequência, a interpolação entre nodos da deformação e da tensão não é conservativa em termos de energia. Normalmente tal facto não apresenta consequências em aplicações da visão por computador; de facto a grande maioria das formulações de elementos finitos utilizadas em visão são também não conformes [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a]; contudo

se é pretendido um elemento conforme, tal pode ser obtido através da inclusão de um termo de normalização em h_i :

$$h_i(X) = \frac{\sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X)}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk} g_k(X)}$$

Eq. 10

Nesta comunicação, de maneira semelhante à de Sclaroff, serão utilizados interpoladores não conformes, principalmente porque desta forma os integrais para as matrizes de massa e de rigidez podem ser determinados analiticamente. A diferença entre interpoladores conforme e não conforme não afectarão os resultados apresentados [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a].

4.2 - Para Elemento Bidimensional com Suporte Infinito

Para o elemento bidimensional de Sclaroff começa-se por construir uma matriz de interpolação $[N]$ 2D de dimensões $(2 \times 2m)$, onde m é o número de dados pontuais utilizados, utilizando-se as funções de forma da Eq. 8:

$$[N(X)] = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_m \end{bmatrix}$$

Eq. 11

Substituindo esta matriz na Eq. 2, e executando as multiplicações envolvidas, obtemos a matriz de massa $[M]$ para o elemento finito de Sclaroff:

$$[M] = \int_A \rho [N]^T [N] dA = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix},$$

Eq. 12

onde a submatriz $[M]$ é simétrica, de dimensão $(m \times m)$ e definida positivamente. Esta submatriz é determinada do seguinte modo:

$$[M] = \rho \pi \sigma^2 [G]^{-1} \sqrt{[G]} [G]^{-1}$$

onde ρ é a densidade do material considerado para o modelo e $\sqrt{[G]}$ representa a matriz $[G]$, Eq. 9, após extracção da raiz quadrada aos seus elementos. Cada elemento da submatriz $[M]$ pode ser determinado individualmente da seguinte forma:

$$M_{ij} = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g_k(X) g_l(X) dx dy .$$

Executando a integração, e ordenando os termos envolvidos, resulta:

$$M_{ij} = \rho \pi \sigma^2 \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \sqrt{g_{kl}}$$

onde g_{kl} é o elemento (k,l) da matriz $[G]$ e a_{xy} o elemento (x,y) da $[A]$, matriz dos coeficientes de interpolação, determinada como $[A] = [G]^{-1}$.

Para se obter a matriz de rigidez $[K]$ 2D deveremos em primeiro lugar determinar a matriz de deformação $[B]$ e a matriz de material $[C]$. Em problemas bidimensionais $[B]$ é uma matriz de dimensão $(3 \times 2m)$:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} h_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x} h_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial y} h_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y} h_m \\ \frac{\partial}{\partial y} h_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y} h_m & \frac{\partial}{\partial x} h_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x} h_m \end{bmatrix}$$

e considerando estado plano de deformação [Bathe, 1996; Tavares, 1998] a forma geral para a matriz de material $[C]$ é:

$$[C] = \beta \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}.$$

Esta matriz considera um material elástico isotrópico para o qual as constantes α , β e ξ são funções do módulo de elasticidade de Young E e do coeficiente de Poisson ν :

$$\alpha = \frac{\nu}{1-\nu}, \beta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ e } \xi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Eq. 13

Substituindo as matriz $[B]$ e $[C]$ na Eq. 3, e executando as multiplicações presentes, obtemos a matriz de rigidez $[K]$ com dimensão $(2m \times 2m)$ para o elemento finito de Sclaroff:

$$[K] = \int_A [B]^T [C] [B] dA = \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}$$

onde cada submatriz de dimensão $(m \times m)$ é simétrica, definida positivamente e $[K_{ab}] = [K_{ba}]$.

Os elementos da submatriz $[K_{aa}]$ têm a forma:

$$K_{aa_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} \right] dx dy .$$

Eq. 14

Integrando esta equação, e ordenando os termos, resulta:

$$K_{aa_{ij}} = \pi \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{(\hat{x}_{kl}^2 + \xi \hat{y}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}$$

onde $\hat{x}_{kl} = (x_k - x_l)$ e $\hat{y}_{kl} = (y_k - y_l)$. Do mesmo modo, os elementos de $[K_{bb}]$ têm a forma:

$$K_{bb_{ij}} = \pi \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{(\hat{y}_{kl}^2 + \xi \hat{x}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}.$$

Finalmente, os elementos de $[K_{ab}]$ e $[K_{ba}]$ têm a forma:

$$K_{ab_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dx dy.$$

Integrando esta equação, e ordenando os termos, resulta:

$$K_{ab_{ij}} = K_{ba_{ij}} = -\frac{\pi \beta (\alpha + \xi)}{4\sigma^2} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{y}_{kl} \sqrt{g_{kl}}.$$

4.3 - Para Elemento Bidimensional com Suporte Infinito

Utilizando uma função de suporte Sclaroff em [Sclaroff, 1995] “corta” o seu elemento finito segunda uma qualquer forma. Tal é conseguido pela definição de uma função de suporte $s(X)$ que assume o valor nulo fora da região de interesse R e o valor unitário no seu interior. Assim esta função pode ser utilizada para definir a forma e a espessura do modelo elástico adoptado.

Utilizando os interpoladores h_i conforme da Eq. 10 o integral equivalente ao da Eq. 12, para a matriz de massa do elemento finito de Sclaroff, resulta:

$$M_{ij} = \rho \int_R s(X) h_i(X) h_j(X) dx dy.$$

Assumindo que existe uma grande número de dados pontuais este integral é aproximado pela seguinte discretização:

$$M_{ij} = \rho \sum_{X \in R} s(X) \frac{\sum_{k,l} a_{ik} a_{il} g_k(X) g_l(X)}{\left(\sum_k \hat{a}_k g_k(X) \right)^2}$$

onde $\hat{a}_k = \sum_i a_{ik}$.

As derivadas parciais para os interpoladores h_i conforme são:

$$\frac{\partial}{\partial x} h_i(X) =_{k,l} \frac{\sum (x-x_l) [\hat{a}_k a_{il} - \hat{a}_l a_{ik}] g_l(X) g_k(X)}{\sigma^2 \left(\sum_k \hat{a}_k g_k(X) \right)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} h_i(X) =_{k,l} \frac{\sum (y-y_l) [\hat{a}_k a_{il} - \hat{a}_l a_{ik}] g_l(X) g_k(X)}{\sigma^2 \left(\sum_k \hat{a}_k g_k(X) \right)^2}.$$

Os elementos da matriz de rigidez que correspondem aos da Eq. 14 resultam em integrais discretos com a forma:

$$K_{aa_{ij}} = \beta \sum_{k,l} s(X) \left[\frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_j}{\partial x} + \xi \frac{\partial h_i}{\partial y} \frac{\partial h_j}{\partial y} \right].$$

Do mesmo modo:

$$K_{bb_{ij}} = \beta \sum_{k,l} s(X) \left[\frac{\partial h_i}{\partial y} \frac{\partial h_j}{\partial y} + \xi \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_j}{\partial x} \right]$$

e

$$K_{ab_{ij}} = \beta \sum_{k,l} s(X) \left[\alpha \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_j}{\partial y} + \xi \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_j}{\partial y} \right].$$

4.4 - Para Elemento Tridimensional

Para determinar-se as matrizes de massa e de rigidez para o elemento finito de Sclaroff 3D começa-se por construir a matriz $[N]$, de dimensão $(3 \times 3m)$ sendo m o número de dados pontuais para o elemento ou seja o seu número de nodos, de interpolação 3D:

$$[N(X)] = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_1 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_1 & \cdots & h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix},$$

Eq. 15

onde $[N] = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_m]$.

Substituindo esta matriz na Eq. 2 resulta a matriz de massa $[M]$ para o elemento finito de Sclaroff 3D:

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV = \begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] \\ [0] & [M] & [0] \\ [0] & [0] & [M] \end{bmatrix}$$

onde a submatriz $[M]$ de dimensão $(m \times m)$ é simétrica e definida positivamente. Os elementos desta matriz têm a forma:

$$M_{ij} = \rho \int_V \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g_k(X) g_l(X) dV = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \sqrt{g_{ij}} .$$

onde a_{xy} é o elemento (x,y) da $[A]$, g_k e g_l são as funções 3D de base Gaussiana e $g_{ij} = g_i(X_j)$ é o elemento (i,j) da matriz $[G]$.

$$[M] = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 [A]^T \sqrt{[G]} [A] = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 [G]^{-1} \sqrt{[G]} [G]^{-1}$$

onde $\sqrt{[G]}$ representa a matriz $[G]$ após extracção da raiz quadrada aos seus elementos.

Para determinar a matriz de rigidez do elemento finito de Sclaroff 3D é necessário em primeiro lugar determinar a matriz de deformação $[B]$. Para um nodo de um elemento 3D a deformação é definida por um vector $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$ onde:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

onde u , v e w são as componentes do vector dos deslocamentos 3D.

A correspondente matriz de deformação $[B]$ de dimensão $(6 \times 3m)$ é obtida por derivação apropriada das funções de interpolação h_i :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [N] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} [N] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} [N] \\ \frac{\partial}{\partial y} [N] & \frac{\partial}{\partial x} [N] & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} [N] & 0 & \frac{\partial}{\partial x} [N] \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} [N] & \frac{\partial}{\partial y} [N] \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \frac{\partial}{\partial x_i} [N] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} h_1 \quad \frac{\partial}{\partial x_i} h_2 \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_i} h_m \right].$$

A matriz de material $[C]$ para o material virtual adoptado para o modelo finito tem a forma:

$$[C] = \beta \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}$$

onde para um material isotrópico as constantes α , β e ξ , são dadas pelas Eqs. 13. É possível utilizar matrizes de material anisotrópicas em problemas nos quais se pretendam modelizar diferenças entre deformações no tempo e no espaço.

A matriz de rigidez $[K]$ com dimensão $(3m \times 3m)$ para o elemento finito de Sclaroff 3D é obtida a partir da Eq. 3 e tem a forma:

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{13}]^T & [K_{23}]^T & [K_{33}] \end{bmatrix}.$$

Note-se que esta matriz é simétrica e, como são utilizadas funções de base Gaussianas, as suas submatrizes também o são.

Os elementos da matriz simétrica $[K_{11}]$ de dimensão $(m \times m)$ têm a forma:

$$K_{11,ij} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial z} \right) \right] dx dy dz .$$

Integrando esta equação, e ordenando os termos, resulta:

$$K_{11,ij} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{x}_{kl}^2 + \xi(\hat{y}_{kl}^2 + \hat{z}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}} ,$$

onde $\hat{x}_{kl} = (x_k - x_l)$, $\hat{y}_{kl} = (y_k - y_l)$ e $\hat{z}_{kl} = (z_k - z_l)$. Da mesma forma os elementos de $[K_{22}]$ e de $[K_{33}]$ têm a forma:

$$K_{22,ij} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{y}_{kl}^2 + \xi(\hat{x}_{kl}^2 + \hat{z}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}$$

e

$$K_{33,ij} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{z}_{kl}^2 + \xi(\hat{x}_{kl}^2 + \hat{y}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}} .$$

Os elementos da matriz $[K_{12}]$ têm a forma:

$$K_{12_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dx dy dz .$$

Após a integração desta equação, e ordenamento dos termos, resulta:

$$K_{12_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \beta (\alpha + \xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{y}_{kl} \sqrt{g_{kl}} .$$

Procedendo de modo idêntico, os elementos das matrizes $[K_{13}]$ e $[K_{23}]$ têm a forma:

$$K_{13_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \beta (\alpha + \xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{z}_{kl} \sqrt{g_{kl}}$$

e

$$K_{23_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \beta (\alpha + \xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{y}_{kl} \hat{z}_{kl} \sqrt{g_{kl}} .$$

4.5 - Para Modelo de Contorno

Na construção do seu elemento finito, Sclaroff utiliza funções de base Gaussianas, Eq. 7, para construir as funções de base a utilizar na formulação das matrizes de massa e de rigidez. Nestas funções Gaussianas é considerada a distância euclidiana entre cada nodo que constitui o elemento finito, Figura 2.

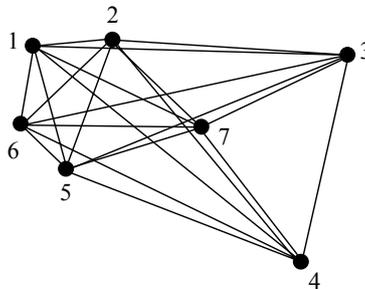


Figura 2 - Elemento finito constituído por sete nodos.

Contudo quando o elemento a modelar é um contorno, e assim não apresenta nodos no seu interior, esta utilização das distâncias euclidianas faz com que a influência de nodos já afastados de zonas particulares dos contornos possam ainda exercer elevada influência sobre estas. Por exemplo no contorno representado na Figura 3 os nodos 3 e 4 podem apresentar uma elevada, relativamente aos nodos 2, 6 e 5, influência sobre o nodo 1.

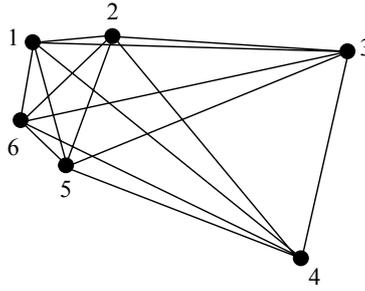


Figura 3 - Contorno constituído por seis nodos.

Numa tentativa de modelizar contornos utilizando a mesma formulação de Sclaroff entendeu-se não considerar nas funções de base Gaussianas as distâncias euclidianas entre os nodos mas as distâncias entre os mesmos determinadas ao longo do contorno. Assim a equação para contornos equivalente à Eq. 7 é então:

$$g_i(X_j) = e^{-dist_{ij}^2 / (2\sigma^2)}$$

onde $dist_{ij}$ é a distância ao longo do contorno entre os nodos X_i e X_j . Por exemplo considerando a Figura 3, $dist_{14}$ é igual à soma das distâncias euclidianas entre os nodos 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, superior à distância euclidiana entre os nodos 1 e 4, conseguindo-se desta forma diminuir a influência do nodo 4 sobre o nodo 1.

5 - Determinação dos Emparelhamentos

5.1 - Para Elementos Bidimensionais

Para se determinar a correspondência entre os nodos que constituem dois elementos finitos deve-se, em primeiro lugar, determinar as matrizes de massa e de rigidez para cada um. De seguida, determinam-se os valores ω_i e vectores $\{\phi\}_i$ próprios de cada elemento finito:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

onde

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \mid \cdots \mid \{\phi\}_{2m}] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \end{bmatrix} \text{ e } [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix}$$

sendo m o número de nodos do elemento a considerar.

Desta forma⁶ para cada elemento determinam-se as frequências modais de vibração ω_i e os respectivos vectores de forma $\{\phi\}_i$. Os quadrados das frequências de vibração estão

⁶ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986].

ordenados de forma crescente na matriz diagonal $[\Omega]$.

O vector coluna $\{\phi\}_i$ descreve o deslocamento modal (u, v) para cada nodo do elemento devido ao modo de vibração i ; enquanto os vectores linha $\{u\}_i$ e $\{v\}_i$, são designados por vectores característica i e, em conjunto, descrevem a localização do nodo i no sistema de coordenadas modal.

Construídas as matrizes modais $[\Phi]_1$ e $[\Phi]_2$ para os dois elementos, com respectivamente m e n nodos, as correspondências podem ser estabelecidas comparando os vectores de forma para os dois conjuntos de nodos; cada ponto nodal será caracterizado pela sua participação relativa nos vários modos próprios. Desta forma utilizando os dois conjuntos de vectores característica determina-se a matriz de afinidade $[Z]$ com dimensão $(m \times n)$:

$$Z_{ij} = \left\| \{u\}_{1,i} - \{u\}_{2,j} \right\|^2 + \left\| \{v\}_{1,i} - \{v\}_{2,j} \right\|^2 .$$

Nesta matriz ao valor nulo corresponde um emparelhamento óptimo e quanto mais este é elevado mais fraco será o respectivo emparelhamento. Os melhores emparelhamentos são indicados pelos elementos que são mínimos na sua linha e na sua coluna: ao nodo i na imagem 1 corresponde o nodo j na imagem 2 e a este o nodo i na imagem 1. Deverão apenas ser considerados os emparelhamentos que apresentem um valor de afinidade inferior a um dado limiar; obtendo-se assim apenas correspondências com elevada confiança.

Na construção da matriz $[Z]$ deverão ser tidas em conta as seguintes considerações:

- Primeira, devido aos elementos terem, possivelmente, diferente número de nodos (m e n) o número de modos será diferente. A solução passa pela truncagem dos $|m - n|$ modos menos significativos do modelo com mais nodos, onde os menos significativos são indicados pelas frequências mais elevadas. Desta forma as matrizes modais terão k colunas (ou modos), onde $k = \min\{m, n\}$. Em realizações práticas poderão ser utilizados menos de k modos (25% revela-se um compromisso aceitável), conseguindo-se assim uma maior imunidade ao ruído e uma menor sensibilidade às deformações locais: por analogia com a transformada de Fourier. Efectivamente, com este procedimento são desprezadas as componentes dos vectores característica ao longo dos eixos modais menos importantes.
- Segunda, o sinal de cada vector próprio não é único pois invertendo a sua direcção não se viola a ortonormalidade da base; assim é necessário que ambos os conjuntos de eixos tenham direcções consistentes pois deseja-se comparar directamente os vectores característica. Consequentemente torna-se necessário utilizar um procedimento de correcção do sinal. Uma solução, [Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a], passa pela consideração de $[\Phi]_1$ como base de referência e proceder a orientação de cada eixo de $[\Phi]_2$, um de cada vez, escolhendo para cada um a direcção que maximiza o alinhamento dos dois conjuntos de vectores característica.
- Terceira, quando o sinal de um vector de $[\Phi]_2$ é indiferente no alinhamento tal traduz a existência de uma simetria de reflexão e o respectivo sinal deve ser determinado de acordo com a deformação existente [Sclaroff, 1995; Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a].
- Quarta, por vezes alguns modos apresentam frequências de vibração praticamente

iguais o que implicaria um emparelhamento no subespaço modal; para evitar tal emparelhamento, estes modos são retirados da respectiva base modal [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a; Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a]. Tais modos são especialmente associados às baixas frequências de elementos com forma simétrica e de elementos com formas cuja a variação do aspecto é quase unitária (por exemplo: quadrados).

- Quinta, em problemas 2D quando não se pretender entrar com os modos correspondentes à transformação rígida existente entre os dois elementos (duas translações e uma rotação) não se deve considerar os três primeiros modos de vibração.

Da primeira e segunda consideração resulta uma divisão de cada espaço nodal em três grupos de vectores característica:

$$[\Phi]_1 = \left[\underbrace{\{\phi\}_{1,1} \mid \{\phi\}_{1,2} \mid \{\phi\}_{1,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{1,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{1,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{1,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{1,2m}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

$$[\Phi]_2 = \left[\underbrace{\{\phi\}_{2,1} \mid \{\phi\}_{2,2} \mid \{\phi\}_{2,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{2,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{2,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{2,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{2,2n}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

onde m e n são os números de nodos de cada elemento finito a considerar. Mantendo apenas as colunas que representam os modos intermédios o espaço modal truncado terá para problemas 2D dimensão $2(p-3)$.

Considerando a referida truncagem de cada espaço modal resulta o conjunto de vectores característica truncados correspondentes aos modos intermédios:

$$[\bar{\Phi}] = \left[\{\phi\}_4 \mid \cdots \mid \{\phi\}_p \right] = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{u}\}_m^T \\ \{\bar{v}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{v}\}_m^T \end{bmatrix}$$

onde os dois linha $\{\bar{u}\}_i$ e $\{\bar{v}\}_i$ contêm os deslocamentos para o nodo i no espaço modal truncado. O vector $\{\bar{u}\}_i$ contém os deslocamentos segundo o eixo x e $\{\bar{v}\}_i$ contém os deslocamentos segundo y , associados a cada um dos $(p-3)$ modos.

Em casos de amostragem grosseira ou de elevada deformação a ordem dos modos pode variar significativamente. Em tais casos será necessário um procedimento extra no qual vizinhos com valores de afinidade similares deverão ser comparados de forma a determinar-se os melhores emparelhamentos possíveis.

Por vezes para duas formas os seus modos de baixa ordem correspondem razoavelmente

bem entre si enquanto os outros modos não correspondem tão bem. Para resolver estes problemas pode-se determinar as correspondências utilizando apenas os modos de cada forma que se correspondam aceitavelmente. Tal determinação pode ser realizada verificando a distância entre modos e optando por considerar aqueles que apresentem baixas distâncias entre si. Em [Sclaroff, 1995] é apresentado um procedimento heurístico para determinar as distâncias entre modos. A normalização dos vectores próprios em relação às áreas/volumes também é uma forma para solucionar tais casos.

5.1.1 - Casos com Elevada Rotação

O método de determinação dos emparelhamentos apresentado no ponto anterior funciona de forma aceitável quando existe, entre os dois elementos finitos a considerar, pequenas diferenças de orientação. Tal é devido ao facto dos deslocamentos modais serem descritos por vectores (u, v) no sistema de coordenadas cartesianas. Quando a rotação existente entre os dois elementos é elevada, a determinação da matriz de afinidade pode ser tornada invariante em relação à rotação pela transformação dos vectores de forma para o sistema de coordenadas polar. Em duas dimensões cada vector de forma tem a seguinte forma

$$\{\phi\}_i = [u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_m]^T$$

onde o deslocamento modal para o nodo i é simplesmente (u_i, v_i) . Para obter invariância face à rotação deve-se transformar cada componente (u, v) numa coordenada no espaço (r, θ) como se pode observar na *Figura 4*. O ângulo θ é determinado relativamente ao vector do centroide do elemento ao ponto nodal X . O raio r é simplesmente a amplitude do vector de deslocamento $\{u\}$.

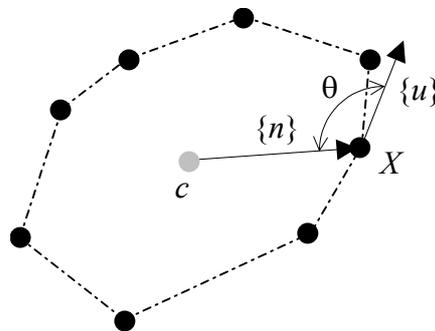


Figura 4 - Transformação de um vector modal $\{u\} = (u, v)$ em (r, θ) .

Após a transformação de cada vector de forma no sistema de coordenadas polar pode ser calculada a matriz de afinidade como foi descrito no ponto anterior. Sclaroff nas suas experiências, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1995, 1995a], concluiu que geralmente é mais eficaz calcular as afinidades utilizando apenas a componente r ou a componente θ , por exemplo:

$$Z_{ij} = \left\| \bar{\theta}_{1,i} - \bar{\theta}_{2,j} \right\|^2 .$$

No geral as componentes r são escalonadas uniformemente em relação ao cociente entre a escala global do elemento e o raio das funções Gaussianas σ . Por outro lado, as componentes θ são invariantes às diferenças de escala e assim uma distância métrica baseada em θ oferece a vantagem de invariância em relação à escala.

5.2 - Para Elementos Tridimensionais

No caso tridimensional tudo é equivalente ao bidimensional apenas deveremos ter em atenção que deveremos ter também em conta a terceira coordenada z de cada ponto nodal. Assim após determinar as matrizes modais $[\Phi]_1$ e $[\Phi]_2$ para os dois elementos pode ser construída a matriz de afinidade $[Z]$:

$$Z_{ij} = \left\| \{u\}_{1,i} - \{u\}_{2,j} \right\|^2 + \left\| \{v\}_{1,i} - \{v\}_{2,j} \right\|^2 + \left\| \{w\}_{1,i} - \{w\}_{2,j} \right\|^2$$

onde vector $\{w\}_{j,i}$ contém os deslocamentos segundo o eixo z para o nodo i do elemento j associados a cada um dos modos.

As considerações a ter em conta na construção desta matriz de afinidade no caso bidimensional deverão também ser respeitadas neste caso; apenas com a diferença que os modos referentes à transformação rígida, três translações e três rotações, são os seis primeiros.

5.3 - Elementos com Multe Resolução

Quando os elementos em consideração são constituídos por muitos dados pontuais a construção dos elementos finitos e determinação dos seus modos próprios pode ser uma tarefa demorosa. Para aumentar a eficiência Sclaroff, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1995, 1995a], desenvolveu um método de multe resolução; assim um subconjunto de dados pontuais é utilizado para construir um elemento finito de baixa resolução e os modos próprios deste elemento são utilizados para se determinar as correspondências para o conjunto original. O procedimento de Sclaroff é o seguinte:

Primeiro, para cada elemento a emparelhar, um subconjunto de m dados pontuais é seleccionado para serem os nodos do elemento finito de baixa resolução. Este subconjunto pode ser constituído por dados característicos (por exemplo, vértices, junções, pontos de orlas) ou escolhidos uniformemente espaçados e de forma arbitrária. São determinadas para este elemento finito as matrizes de massa, de rigidez e modal.

Após estarem determinadas as matrizes modais para os dois elementos finitos de baixa resolução a emparelhar, determina-se o sinal correcto de cada vector próprio e a correspondência entre os dois conjuntos de vectores modais.

Com os modos emparelhados para os subconjuntos de dados procede-se para determinar as correspondências para os conjuntos globais. Para tal utiliza-se a matriz de interpolação modal que descreve a forma de cada modo para o conjunto global:

$$[\hat{\Phi}] = [\hat{N}][\Phi].$$

A matriz de interpolação $[\hat{N}]$ relaciona os deslocamentos nos nodos, dos elementos de baixa resolução, com os deslocamentos nos dados pontuais do correspondente elemento de mais elevada resolução X_j :

$$[\hat{N}] = \begin{bmatrix} [N(X_1)] \\ \vdots \\ [N(X_n)] \end{bmatrix}$$

onde cada submatriz $[N(X_i)]$ é uma matriz de interpolação, que para problema em 2D tem dimensões $(2 \times 2m)$ e é definida pela Eq. 11 e em 3D tem dimensões $(3 \times 3m)$ e é definida pela Eq. 15, e n é o número de dados no conjunto original.

Finalmente uma matriz de afinidade é determinada para os conjuntos de dados originais, utilizando as matrizes modais interpoladas, e as correspondências podem ser determinadas utilizando-se a abordagem anteriormente apresentada.

6 - Alinhamento de Objectos, Comparação e Descrição

Uma vantagem da técnica de Sclaroff é que os modos próprios calculados para a determinação da correspondência podem também ser utilizados para descrever as deformações rígidas e não rígidas necessárias para alinhar um objecto com um outro. Desde que esta descrição modal esteja calculada, pode ser realizada a comparação entre formas pela observação das amplitudes modais ou - como o modelo utilizado é um modelo físico - pode ser calculada e comparada a de energia de deformação necessária para alinhar um objecto e utilizar esta energia como medida de similaridade. Se os deslocamentos modais, ou a energia de deformação, para alinhar dois conjuntos de dados é relativamente pequena então os objectos em questão são similares.

Relembrando que para problemas bidimensionais os três primeiros modos são modos de corpo rígido associados há translação e há rotação, em problemas tridimensionais são os seis primeiros modos, os restantes modos são modos não rígidos. Os modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, os modos de baixa frequência descrevem deformações globais enquanto os modos de alta frequência descrevem mais as deformações de forma localizadas. Tal ordenamento, global/local, das deformações da forma permite seleccionar quais os tipos de deformação a serem comparados.

Por exemplo, pode ser desejável comparações independentes da rotação, da posição e/ou da escala. Para se obter tal comparação ignora-se os deslocamentos de baixa ordem, ou modos de corpo rígido, e assim despreza-se as diferenças de posição, orientação e escala. Em complemento não considerando os modos de elevada ordem pode-se tornar as comparações robustas ao ruído e às variações de forma locais. Tal procedimento de selecção modal também é útil para a compressão dos dados que definem um objecto pois desta forma é possível descrever a derivação deste em relação a um protótipo em termos de poucos modos.

Contudo antes de ser possível comparar dois conjuntos de dados é em primeiro lugar necessário determinar as deformações modais $\{\tilde{U}\}$ que deformam os dados emparelhados de um objecto nas posições correspondentes no outro objecto. Métodos diferentes para determinar os parâmetros da deformação modal são apresentados a seguir.

6.1 - Determinação das Deformações

Pretende-se descrever os parâmetros da deformação $\{\tilde{U}\}$ que transformam um conjunto de dados nos dados correspondentes de um outro conjunto. Desde que as matrizes modais $[\Phi]_1$ e $[\Phi]_2$ estejam calculadas e as correspondências estejam determinadas pode-se obter os deslocamentos modais de forma directa. Tal é conseguido notando que os deslocamentos nodais $\{U\}$, que alinham os correspondentes dados de ambas as formas, podem ser escritos como:

$$\{u\}_i = \{x\}_{1,i} - \{x\}_{2,i}$$

Eq. 16

onde $\{x\}_{1,i}$ representa o nodo i na primeira forma e $\{x\}_{2,i}$ o nodo com o qual foi emparelhado na segunda forma.

Relembrando que $\{U\} = [\Phi] \{\tilde{U}\}$, e utilizando a identidade das Eqs. 5, obtemos:

$$\{\tilde{U}\} = [\Phi]^{-1} \{U\} = [\Phi]^T [M] \{U\}.$$

Eq. 17

Normalmente não existe uma correspondência de um para um entre os dados das duas formas. Na maior parte dos casos é desejável que os dados não emparelhados se movam numa maneira consistente com as propriedades do material e com as forças nos nodos emparelhados. Este tipo de solução pode ser obtida de maneiras diferentes.

Numa primeira abordagem considera-se os deslocamentos nodais $\{u\}_i$ nos nodos emparelhados e anula-se as forças nos nodos não emparelhados $\{r\}_i$. O sistema de equilíbrio resultante é $[K] \{U\} = \{R\}$ onde existem tantas incógnitas como equações. Os deslocamentos modais são depois determinados utilizando-se a Eq. 17. Esta abordagem é de aplicação fácil no entanto considera que as forças nos nodos não emparelhados são nulas.

Um procedimento similar ao anterior consiste em resolver uma versão do sistema físico truncada no número de modos a considerar. Assumindo que foi obtida correspondência para p dos m modos existentes, pode-se reduzir o número de graus de liberdade desprezando-se os $m - p$ modos de mais alta frequência na Eq. 17 e depois determinar os modos por inversão de uma matriz.

Este método pode ser descrito do seguinte modo: Assumindo que é conhecida a correspondências para alguns dos modos reordena-se as colunas da matriz $[\Phi]^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]_{conhecida}^{-1} & [\Phi]_{não\ conhecida}^{-1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_{conhecido} \\ \{U\}_{não\ conhecido} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{U}\}_{não\ conhecido} \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

onde $\{U\}_{conhecido}$ é o vector dos deslocamentos conhecidos para os p nodos emparelhados, $\{U\}_{não\ conhecido}$ é o vector dos deslocamentos nodais não conhecidos e $\{\tilde{U}\}_{não\ conhecido}$ é o vector das amplitudes modais a determinar. Nesta formulação é assumida que as amplitudes dos modos desprezados são nulas. Os termos na equação anterior podem ser reagrupados obtendo-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]_{conhecida}^{-1} & [0] \\ \hline [0] & [I] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_{conhecido} \\ \{0\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} [I] & [\Phi]_{não\ conhecida}^{-1} \\ \hline [0] & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{U}\}_{não\ conhecido} \\ \{U\}_{não\ conhecido} \end{array} \right\}.$$

As amplitudes dos modos pretendidas podem ser obtidas directamente por inversão da matriz do lado direito desta equação. Note-se que com este procedimento obteve-se novamente uma solução para determinar as amplitudes não conhecidas mas foi assumido que

os deslocamentos modais $\{\tilde{u}\}_i$ são nulos para $i > p$

Adicionando uma restrição de minimização da energia de deformação pode-se evitar as considerações utilizados nas duas soluções anteriores. A energia de deformação pode ser obtida directamente a partir dos deslocamentos modais e engloba uma penalidade proporcional ao quadrado da frequência de cada nodo:

$$E_s = \frac{1}{2} \{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}.$$

Eq. 18

Como idealmente os modos de corpo rígido não introduzem deformação é lógico que as suas frequências sejam praticamente nulas.

Formulando uma solução por mínimos quadráticos restringida, na qual se minimiza o erro de alinhamento que inclua o termo da energia de deformação, obtemos:

$$E = \underbrace{\left[\{U\} - [\Phi] \{\tilde{U}\} \right]}_{\text{erro de ajuste quadrático}} + \lambda \underbrace{\{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}}_{\text{energia de deformação}} \quad (\text{esta mal!})$$

Eq. 19

onde λ é o parâmetro de Lamé para o material considerado:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Diferenciando a Eq. 19 em relação ao vector dos parâmetros modais resulta a equação de minimização da deformação por mínimos quadráticos:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T \{U\}.$$

Desta forma pode-se explorar as características do modelo físico utilizado de forma a incluir certas restrições geométricas numa solução pelo método dos mínimos quadrados. A medida da energia de deformação permite a incorporação de algum prévio conhecimento há cerca do esticamento admissível para a forma, quanto esta é resistente à compressão, etc. Utilizando este conhecimento extra pode-se prever os deslocamentos razoáveis que os nodos não emparelhados deverão ter.

Como o algoritmo calcula o grau de certeza para os emparelhamentos obtidos pode-se também utilizar esta informação directamente na fase de alinhamento. Tal é obtido por inclusão de uma matriz diagonal $[W]$ para os pesos:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [W]^2 [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T [W]^2 \{U\}.$$

Os elementos da matriz $[W]$ são inversamente proporcionais à medida de afinidade para o emparelhamento do respectivo nodo: $w_i = 1/(1 + z_i)$. O vector dos deslocamentos nodais $\{U\}$ é determinado através dos emparelhamentos obtidos, Eq. 16; considerando-se para os nodos não emparelhados o deslocamento nodal e a afinidade de emparelhamento obtidos com o

melhor nodo da forma 2 candidato ao emparelhamento⁷.

Este procedimento de minimização da energia de deformação é idêntico ao utilizado no domínio dos contornos activos: o modelo físico é utilizado como restrição de suavização [Cohen, 1991; Kass, 1988; Sclaroff, 1995].

6.2 - Solução Dinâmica: *Morphing*

No ponto anterior foram descritos métodos para determinar os deslocamentos modais que deformam directamente e alinham dois conjuntos de dados. Também é possível resolver o problema de alinhamento por simulação física integrando no tempo as equações do elemento finito até se atingir um equilíbrio. Neste caso, determina-se as deformações em cada instante de tempo através da equação dinâmica de equilíbrio dada pela Eq. 6. Realizando tal determinação calcula-se as deformações intermédias numa maneira consistente com as propriedades do material utilizado na formulação do modelo. As deformações intermédias também podem ser utilizadas para *morphing* segundo princípios físicos.

Quando se resolve a equação dinâmica utilizam-se dados de uma forma para exercer forças que os transformem nos dados da outra forma. As cargas dinâmicas $\{R(t)\}$ nos nodos dos elementos finitos são assim proporcionais às distâncias entre nodos emparelhados:

$$\{r(t+\Delta t)\}_i = \{r(t)\}_i + k \left\{ \{X_1\}_i + \{u(t)\}_i - \{X_2\}_i \right\}$$

Eq. 20

onde k é uma constante global de rigidez e $\{u(t)\}_i$ é o deslocamento nodal no instante anterior de tempo. Estas forças simulam forças a puxar os nodos e vão diminuindo até que estes estejam perfeitamente ajustados.

O equilíbrio dinâmico modal pode ser descrito por um sistema de $2m$, ou $3m$ para problemas tridimensionais, equações independentes com a seguinte forma:

$$\{\ddot{u}(t)\}_i + \tilde{d}_i \{\dot{u}(t)\}_i + \omega_i^2 \{u(t)\}_i = \{\tilde{r}(t)\}_i$$

onde $\{\tilde{r}(t)\}_i$ são as respectivas componentes do vector de carga transformado:

$$\{\tilde{R}(t)\} = [\Phi]^T \{R(t)\}.$$

Estas equações independentes de equilíbrio podem ser resolvidas por um procedimento de integração numérica iterativa (por exemplo, pelo método de Newmark [Bathe, 1996]). O sistema é integrado em frente no tempo até a diferença na carga ser inferior a um dado limiar δ :

$$\left\| \{R(t+\Delta t)\} - \{R(t)\} \right\|^2 < \delta^2.$$

As cargas $\{r(t)\}_i$ são actualizadas em cada instante de tempo considerado através da Eq. 20.

6.3 - Na Presença de Rotações Elevadas

Se a rotação necessária para alinhar os dois conjuntos de dados é potencialmente elevada então, antes de se determinar as deformações modais, é necessário realizar em primeiro lugar

⁷ Na versão original Sclaroff anula as entradas na matriz $[W]$ para os nodos não emparelhados. Verificou-se na prática que a solução descrita oferece melhores resultados na estimativa dos deslocamentos.

um alinhamento inicial. Orientação, posicionamento e, se desejado, escalonamento podem ser determinados utilizando-se um algoritmo baseado em *quaternions* e proposto por Horn, [Horn, 1987; Sclaroff, 1995; Tavares, 1997].

Utilizando-se apenas as correspondências determinadas para alguns nodos emparelhados com uma elevada certeza (note-se que emparelhamentos obtidos com certezas elevadas têm valores reduzidos na matriz de afinidade $[Z]$) a transformação de corpo rígido pode ser determinada directamente. Os parâmetros adicionais resultantes para este alinhamento prévio são:

- vector de posição: $\{p\}_0$;
- *quaternion* unitário definindo a orientação: $\{q\}$;
- factor de escala: s ;
- centroides dos dois conjuntos: $\{c\}_1$ e $\{c\}_2$.

Como esta orientação inicial é calculada utilizando-se apenas as correspondências com certeza elevada geralmente obtêm-se boas estimativas para estes parâmetros da transformação de corpo rígido.

Os objectos podem agora ser alinhados através da determinação das deformações modais $\{\tilde{U}\}$ como previamente foi descrito. Como anteriormente, são calculadas as cargas virtuais que deformam os dados de um conjunto nos dados do outro conjunto com os quais foram devidamente emparelhados. Como foi introduzida mais uma rotação, uma translação, e um escalonamento a Eq. 16 deve ser modificada de forma a traduzir a distância entre os dados no correcto sistema de coordenadas:

$$\{u\}_i = \left\{ \frac{1}{s} [R]^T \left\{ \{X_2\}_i - \{p\}_0 - \{c\}_1 \right\} + \{c\}_1 - \{X_1\}_i \right\}$$

onde $[R]$ é a matriz de rotação obtida a partir do *quaternion* unitário $\{q\}$.

Com este procedimento inicial de alinhamento essencialmente reduz-se as forças virtuais entre nodos correspondentes; a equação da mola considera esta redução da força pela transformação do nodo emparelhado $\{X_2\}_i$ no sistema de coordenadas local do elemento. As amplitudes modais $\{\tilde{U}\}$ são então determinadas pela multiplicação das matrizes na Eq. 17 ou por resolução do sistema dinâmico da Eq. 6.

Os deslocamentos modais estão assim definidos num espaço rodado e escalado; como resultado, deve-se actualizar os deslocamentos na equação de interpolação:

$$\{u(X)\} = s [R][N][\Phi] \{\tilde{U}\}.$$

Nas suas experiências Sclaroff verificou que os seis primeiros modos não rígidos modelam de forma adequada as transformações afins em problemas 2D [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1994b, 1995, 1995a].

6.4 - Comparação de Objectos

Desde que as amplitudes dos modos tenham sido determinadas pode-se calcular a energia de deformação utilizando estas deformações na Eq. 18. Esta energia pode ser utilizada como medida de similaridade. Em certos casos também pode ser desejável comparar a energia de

deformação num subconjunto de modos, considerados como importantes na medição da similaridade, ou então a energia associada a cada modo. A energia de deformação associada ao modo i é simplesmente:

$$E_{S_i} = \frac{1}{2} \tilde{u}_i^2 \omega_i^2.$$

Como a energia de deformação associada a cada modo é escalada pela sua frequência de vibração, existe uma penalidade inerente para as deformações que ocorrem nos modos de mais altas frequências. Nas suas experiências Sclaroff, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994b, 1995, 1995a], utiliza a energia de deformação para a grande maioria da comparação de objectos pois tal apresenta um significado físico conveniente. Contudo Sclaroff prevê que no geral será necessário pesar as frequências mais elevadas de forma não tão penalizante pois tipicamente tais modos apenas descrevem deformações locais e são mais sujeitas ao ruído.

Em vez de se considerar a energia de deformação necessária para alinhar duas formas pode ser desejável comparar directamente as amplitudes modais sem a necessidade da determinação prévia da correspondência entre os seus dados. Neste caso determina-se em primeiro as duas descrições modais $\{\tilde{U}\}_1$ e $\{\tilde{U}\}_2$, e depois utiliza-se uma qualquer distância métrica para medir a distância entre os dois descritores modais. Tal sugere um espaço coordenado alternativo para descrição das distâncias entre formas: o espaço de similaridade modal. Assim neste espaço a similaridade de forma é proporcional à distância Euclidiana.

Se é pretendida uma função de distância métrica, então esta medida simples de energia necessita de ser modificada: a deformação não satisfaz um dos três axiomas para um espaço métrico:

- Existência de mínimo: $\delta(A, B) \geq \delta(A, A) = 0$.
- Simetria: $\delta(A, B) = \delta(B, A)$.
- Desigualdade triangular: $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C)$.

Enquanto satisfaz a existência de mínimo e a desigualdade triangular a energia de deformação não satisfaz a simetria. A energia de deformação não é simétrica para formas com tamanhos diferentes; por exemplo, se a escala de dois objectos A e B difere, então a energia de necessária para alinhar A com B pode ser diferente da necessária para alinhar B com A . A diferença na deformação será inversamente proporcional há diferença das escalas dos objectos ao quadrado. Deste modo, quando se comparam objectos com diferentes escalas deve-se dividir a energia de deformação pela área da forma. Quando um mapa de suporte é conhecido esta área pode ser determinada directamente. No caso de suporte infinito a área dos dados pode ser aproximada pelo cálculo do mínimo círculo que os engloba ou dos seus momentos.

Existe uma propriedade adicional que prova a utilidade da definição de um espaço métrico, a adição segmentada:

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C),$$

se B esta na fronteira entre A e C .

Para satisfazer a adição segmentada podemos considerar a raiz quadrada da energia de deformação:

$$\delta = \left(\frac{1}{2a} \sum_i \tilde{u}_i^2 \omega_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde a é a área da forma. Tal resulta numa distância métrica pesada não diferente da distância de Mahalanobis⁸ [Sclaroff, 1995]: as amplitudes modais são desagregadas, cada qual tendo uma “invariância” que é inversamente proporcional ao valor próprio do modo. Como resultado, pode ser utilizada como parte de um esquema evolutivo de regularização no qual a matriz de covariância inicial $[\Omega]$ é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias dos parâmetros modais observados; por exemplo, filtragem de Kalman⁹ ou análise das componentes principais¹⁰. Utilizando-se a análise da componentes principais pode-se descrever uma classe dos modos próprios de uma forma a partir de um conjunto de treino. Utilizando um modelo modal como uma estimativa inicial, pode-se de seguida aprender iterativamente os “verdadeiros” modos por via de uma análise recursiva das componentes principais. Como resultado, obter-se-á um esquema regularizado de aprendizagem no qual a matriz inicial de covariância é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias para os parâmetros modais observados.

7 - Resultados Experimentais

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação por nós realizada do método proposto por Sclaroff.

Em primeiro lugar será analisada a descrição modal de alguns contornos. Verifica-se a influência do parâmetro σ considerado, do número de modos utilizados na descrição, da utilização de *pixels* característicos do contorno (nomeadamente a utilização de *pixels* de elevada curvatura), o tipo de influência que os modos de alta e de baixa frequência têm sobre a mesma descrição e a influência dos parâmetros do material virtual adoptado para o modelo finito.

Em segundo lugar serão apresentados alguns resultados obtidos para o emparelhamento dos *pixels* que constituem dois contornos, para a determinação da transformação rígida existente, para a obtenção dos deslocamentos nodais por minimização da energia de deformação e para o cálculo do valor desta energia. A influência do parâmetro σ e do número de modos utilizados será devidamente analisada.

Por último serão apresentadas algumas conclusões obtidas após a aplicação do método proposto por Sclaroff em várias experiências por nós realizadas.

7.1 - Análise Modal do Modelo Finito

Na *Figura 5* esta representado um contorno¹¹ constituído por cinco *pixels* para o qual serão apresentados alguns resultados obtidos por análise modal do modelo finito de Sclaroff para diferentes valores de σ . Os *pixels* que constituem este contorno estão ligados por intermédio de segmentos de recta na *Figura 6* e as suas coordenadas estão indicadas na *Figura 7*.

⁸ Ver, por exemplo, [Tavares, 1995].

⁹ Ver, por exemplo, [Maybeck, 1979; Tavares, 1995].

¹⁰ Ver, por exemplo, [Cootes, 1991, 1993, 1993a, 1994, 1995; Martin, 1998; Nastar, 1996, 1996a].

¹¹ A forma deste contorno é puramente arbitrária e tem como único objectivo demonstrar o método proposto e analisar a influência dos parâmetros do mesmo. Outros contornos foram devidamente utilizados em várias experiências realizadas e os resultados obtidos estão reflectidos nas conclusões apresentadas.

Considerando borracha como o material utilizado na modelação e utilizando $\sigma=20.0$, inferior à distância mínima entre todos os *pixels*, obtemos para cada modo de vibração os contornos representados na *Figura 8*, ..., *Figura 17*. Nestas figuras também está representado o contorno original.

Na *Figura 18* e na *Figura 19* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 20*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 21* e é possível verificar-se a matriz de proximidade, as matrizes de massa e de rigidez do elemento finito, as suas frequências de vibração, os seus vectores de forma e as amplitudes destes.

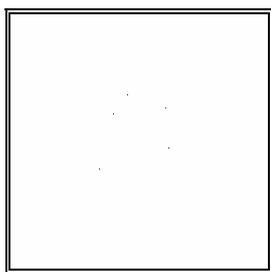


Figura 5 - Contorno a analisar.

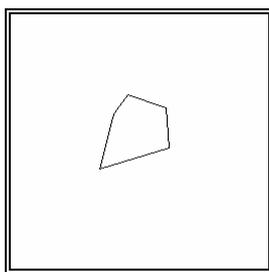


Figura 6 - Pixels do contorno a analisar ligados por segmentos de recta.

(116, 81)
(102, 100)
(88, 155)
(157, 134)
(154, 94)

Figura 7 - Coordenadas dos pixels do contorno a analisar.

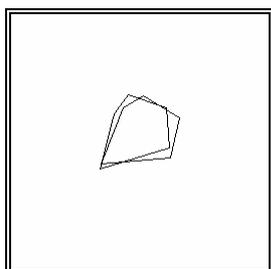


Figura 8 - 1º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

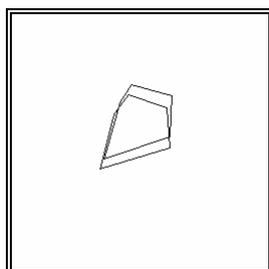


Figura 9 - 2º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

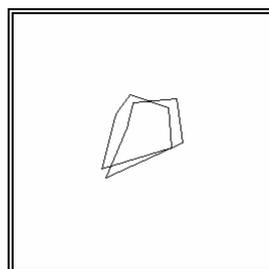


Figura 10 - 3º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

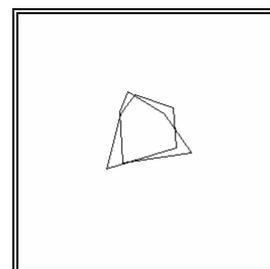


Figura 11 - 4º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

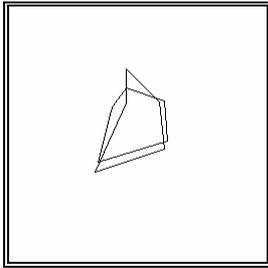


Figura 12 - 5º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

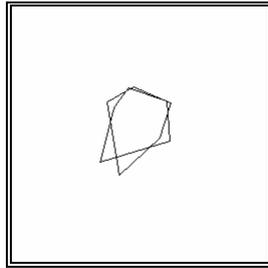


Figura 13 - 6º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

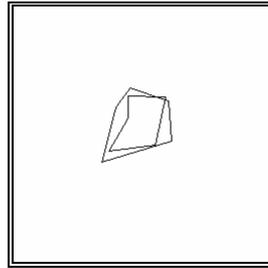


Figura 14 - 7º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

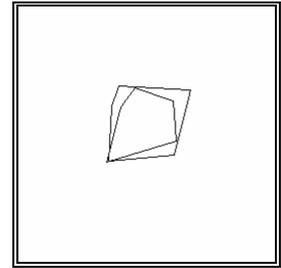


Figura 15 - 8º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

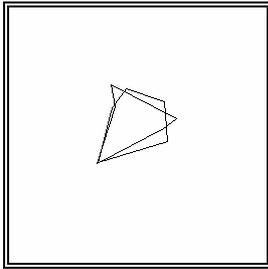


Figura 16 - 9º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

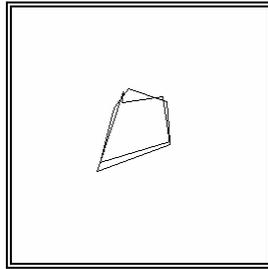


Figura 17 - 10º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

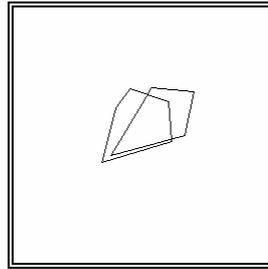


Figura 18 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

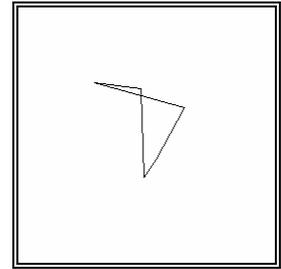


Figura 19 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para $\sigma = 20.0$.

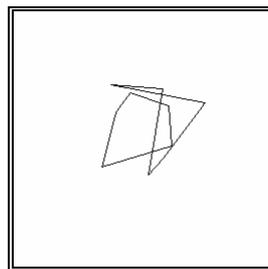


Figura 20 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 20.0$.

Considerando novamente borracha e $\sigma = 30.0$, superior à distância entre os *pixels* 1 e 2 e inferior às restantes, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 22*, ..., *Figura 31*. Na *Figura 32* e na *Figura 33* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 34*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 35*.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testea

With:

Gaussian functions Sigma: 20.000000.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

+1.000000 +0.498451 +0.000400 +0.003652 +0.133154
 +0.498451 +1.000000 +0.017841 +0.005374 +0.032549
 +0.000400 +0.017841 +1.000000 +0.001500 +0.000041
 +0.003652 +0.005374 +0.001500 +1.000000 +0.133821
 +0.133154 +0.032549 +0.000041 +0.133821 +1.000000

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.001277 -0.000274 -0.000068 -0.000031 +0.000152 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.000274 +0.001348 +0.000174 +0.000077 +0.000037 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.000068 +0.000174 +0.001401 +0.000048 +0.000004 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.000031 +0.000077 +0.000048 +0.001341 +0.000159 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000152 +0.000037 +0.000004 +0.000159 +0.001277 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.001277 -0.000274 -0.000068 -0.000031 +0.000152
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000274 +0.001348 +0.000174 +0.000077 +0.000037
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000068 +0.000174 +0.001401 +0.000048 +0.000004
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000031 +0.000077 +0.000048 +0.001341 +0.000159
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000152 +0.000037 +0.000004 +0.000159 +0.001277

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+21.961210 -9.256761 -0.500603 +0.781993 -6.419789 -4.180680 +6.244486 -0.369668 -0.744943 -4.198977
 -9.256761 +20.004146 +0.683111 -2.670544 -3.742107 +6.244486 -5.271749 +1.903430 -1.989516 +2.828688
 -0.500603 +0.683111 +15.772781 -2.753219 +0.048457 -0.369668 +1.903430 -0.068686 +0.912056 +0.236112
 +0.781993 -2.670544 -2.753219 +15.381133 +0.566600 -0.744943 -1.989516 +0.912056 +0.181313 -0.666774
 -6.419789 -3.742107 +0.048457 +0.566600 +16.985880 -4.198977 +2.828688 +0.236112 -0.666774 +1.178716
 -4.180680 +6.244486 -0.369668 -0.744943 -4.198977 +23.800841 -14.269064 +1.714413 -1.335954 -1.345907
 +6.244486 -5.271749 +1.903430 -1.989516 +2.828688 -14.269064 +24.216570 -6.675206 -0.190940 +1.984654
 -0.369668 +1.903430 -0.068686 +0.912056 +0.236112 +1.714413 -6.675206 +16.023844 +0.031423 -0.398606
 -0.744943 -1.989516 +0.912056 +0.181313 -0.666774 -1.335954 -0.190940 +0.031423 +17.963185 -9.263480
 -4.198977 +2.828688 +0.236112 -0.666774 +1.178716 -1.345907 +1.984654 -0.398606 -9.263480 +17.906817

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+60.682369 +72.770383 +83.238706 +95.694869 +108.239483 +112.032239 +127.629947 +148.391242 +164.185514
 +179.241148

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+14.735589 +3.437680 +2.709327 -6.639661 +0.392736 +5.343417 -2.447342 -15.756102 -15.321668 -5.951512
 +9.163275 +5.876342 +10.503997 -0.852810 +14.003513 -7.401199 +11.505088 -9.320919 +3.427631 +8.889484
 +0.603635 +3.998235 +3.928493 +15.767776 -2.827215 +19.234528 +7.355029 +1.869077 -1.176209 -3.048008
 +1.403623 +0.077246 +11.056508 +15.435415 -3.333238 -10.447563 -16.007698 -1.745491 -4.265868 +0.236273
 +12.723483 +4.686257 +8.060543 -9.462762 -5.180411 +3.503007 -2.582195 +16.600709 +11.665536 -3.667927
 +1.214589 -10.031197 +7.514117 -3.049969 -19.279787 -0.688603 +8.220843 -2.298684 -3.702743 +14.383325
 -5.910624 -11.931008 +13.662602 -2.460403 -3.915427 -5.302424 +10.921747 -1.450400 -0.881008 -15.963619
 -5.164267 -10.228579 +8.748099 -6.289300 +10.108873 +12.954678 -11.055879 -0.734581 +0.707625 +9.271796
 +10.446569 -11.380636 -5.350468 +4.968207 +7.640342 -3.204354 +4.420867 +14.198549 -13.012874 +3.033547
 +10.278608 -11.500631 -8.679909 +6.184441 +0.624547 +1.764906 -3.963452 -10.861193 +17.306589 -4.589314

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+27.261432
 +26.337862
 +27.275491
 +27.185890
 +28.110280
 +28.009210
 +28.279311
 +30.736778
 +29.765889
 +26.743053

Figura 21 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 20.0$.

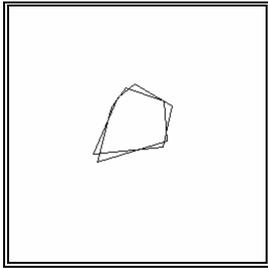


Figura 22 - 1º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

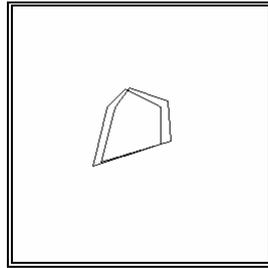


Figura 23 - 2º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

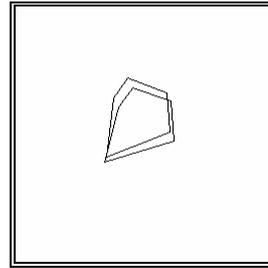


Figura 24 - 3º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

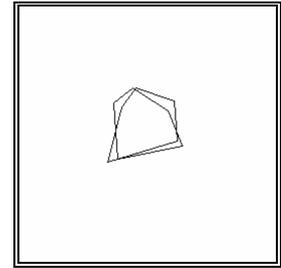


Figura 25 - 4º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

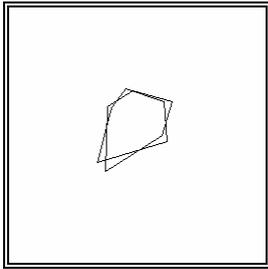


Figura 26 - 5º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

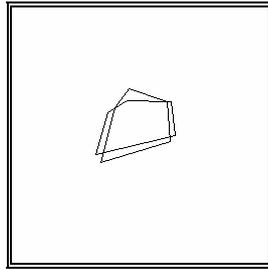


Figura 27 - 6º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

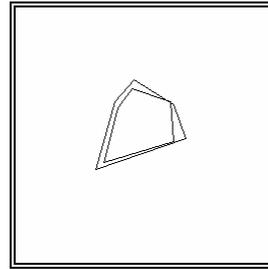


Figura 28 - 7º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

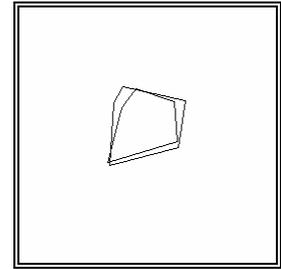


Figura 29 - 8º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

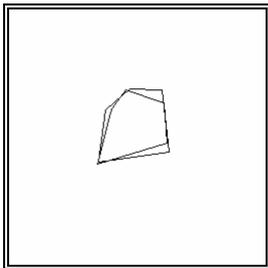


Figura 30 - 9º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

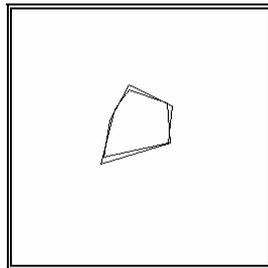


Figura 31 - 10º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

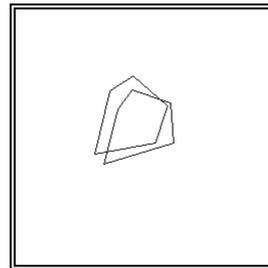


Figura 32 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

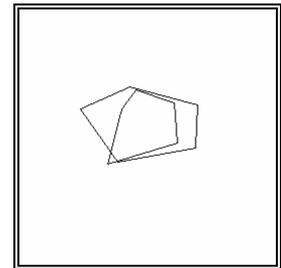


Figura 33 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

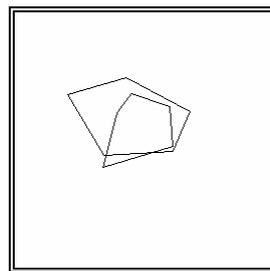


Figura 34 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 30.0$.

Considerando mais uma vez borracha mas agora $\sigma = 46.55$, igual à média da distância entre *pixels* adjacentes: superior à distância entre os *pixels* 1 e 2 e entre 1 e 5 e inferior às restantes, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na Figura 36, ..., Figura 45. Na Figura 46 e na Figura 47 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando os restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na Figura 48. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 49.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testea

With:

Gaussian functions Sigma: 30.000000.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

+1.000000 +0.733855 +0.030876 +0.082542 +0.408154
 +0.733855 +1.000000 +0.167053 +0.098001 +0.218226
 +0.030876 +0.167053 +1.000000 +0.055576 +0.011252
 +0.082542 +0.098001 +0.055576 +1.000000 +0.409062
 +0.408154 +0.218226 +0.011252 +0.409062 +1.000000

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.003660 -0.001849 -0.000071 +0.000041 -0.000356 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.001849 +0.003561 +0.000394 +0.000161 +0.000187 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.000071 +0.000394 +0.002908 +0.000328 -0.000037 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000041 +0.000161 +0.000328 +0.002852 -0.000284 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -0.000356 +0.000187 -0.000037 -0.000284 +0.002635 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.003660 -0.001849 -0.000071 +0.000041 -0.000356
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.001849 +0.003561 +0.000394 +0.000161 +0.000187
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000071 +0.000394 +0.002908 +0.000328 -0.000037
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000041 +0.000161 +0.000328 +0.002852 -0.000284
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000356 +0.000187 -0.000037 -0.000284 +0.002635

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+36.429001 -19.527497 -0.603692 +4.777875 -11.101143 -4.902633 +8.063019 -0.049519 -0.778249 -6.920293
 -19.527497 +28.724466 +0.968734 -5.111754 -3.524602 +8.063019 -9.972681 +2.683432 -5.329293 +6.809969
 -0.603692 +0.968734 +15.650417 -6.771234 +1.094985 -0.049519 +2.683432 -0.909115 +2.474933 +0.885392
 +4.777875 -5.111754 -6.771234 +17.028585 -3.987893 -0.778249 -5.329293 +2.474933 +0.381175 -0.346268
 -11.101143 -3.524602 +1.094985 -3.987893 +22.203765 -6.920293 +6.809969 +0.885392 -0.346268 +3.907704
 -4.902633 +8.063019 -0.049519 -0.778249 -6.920293 +43.852849 -35.639277 +3.355400 -0.980789 -11.149314
 +8.063019 -9.972681 +2.683432 -5.329293 +6.809969 -35.639277 +46.157313 -11.919913 -0.429821 +9.211852
 -0.049519 +2.683432 -0.909115 +2.474933 +0.885392 +3.355400 -11.919913 +18.439709 +1.239825 -1.907310
 -0.778249 -5.329293 +2.474933 +0.381175 -0.346268 -0.980789 -0.429821 +1.239825 +23.504665 -14.691562
 -6.920293 +6.809969 +0.885392 -0.346268 +3.907704 -11.149314 +9.211852 -1.907310 -14.691562 +26.268150

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+42.193624 +44.122992 +47.608862 +66.282178 +82.353863 +84.201816 +104.556013 +111.665197 +121.104724
 +138.729825

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+9.337242 -3.776313 -4.567111 -3.074922 +6.825183 -2.464980 +2.297009 -13.073269 +3.783955 -0.480894
 +5.666893 -8.473019 -4.827541 -7.835073 -4.064597 -7.461447 -3.322892 -7.706570 -5.804792 -4.834282
 -3.534281 -7.536918 +2.159311 +10.305792 +8.429073 -5.127753 -8.164593 +1.706095 +0.692505 +2.533717
 -3.622561 -10.191902 -4.260153 +4.859792 -5.033834 +5.429362 +11.796644 +0.627488 +2.056468 -1.624699
 +7.610433 -6.688980 -3.799354 -6.308465 +7.849401 +4.178530 +2.897788 +10.628243 -1.577234 +5.374978
 -3.895751 +0.843139 -10.465238 -0.079013 +2.215679 +11.735015 -8.988708 -2.138530 -1.100677 -4.531780
 -8.803128 -0.437873 -9.223982 -4.422889 -1.382431 +4.851410 -5.750841 -4.746208 +0.722829 +11.153164
 -8.140011 +3.685779 -5.227152 -3.235207 +8.543599 -7.869456 +6.650647 +2.520454 -1.912317 -6.869162
 +6.434760 +2.848169 -9.140825 +4.702949 -6.389279 -6.018745 -2.680017 +5.872171 +9.278900 +0.057853
 +5.175035 +5.704133 -7.507463 +9.749397 -0.243379 -0.327773 +2.557943 -1.007426 -12.587044 +3.436827

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+20.735221
 +18.617514
 +21.053577
 +19.689347
 +18.487874
 +19.861749
 +20.058966
 +20.384195
 +17.468051
 +16.293616

Figura 35 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 30.0$.

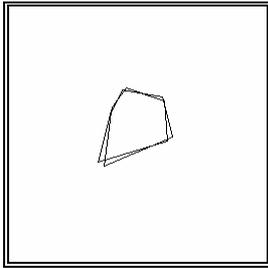


Figura 36 - 1º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

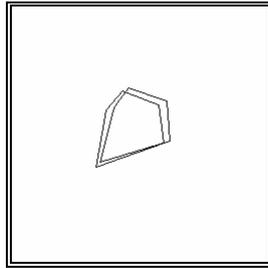


Figura 37 - 2º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

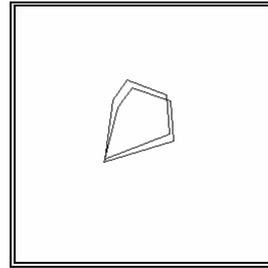


Figura 38 - 3º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

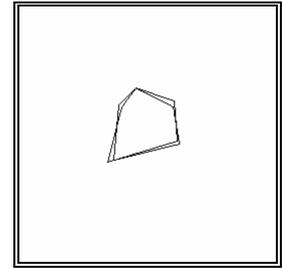


Figura 39 - 4º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

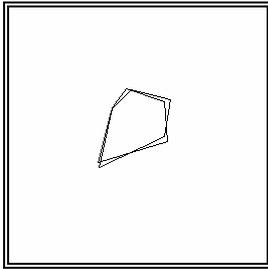


Figura 40 - 5º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

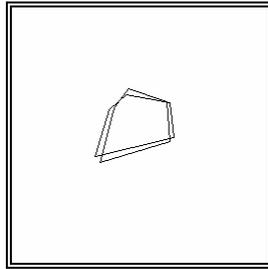


Figura 41 - 6º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

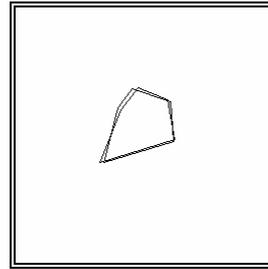


Figura 42 - 7º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

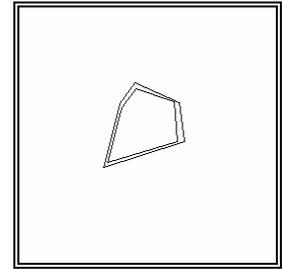


Figura 43 - 8º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

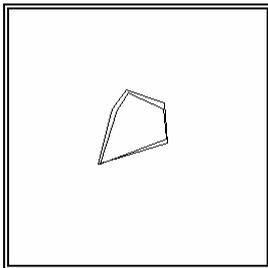


Figura 44 - 9º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

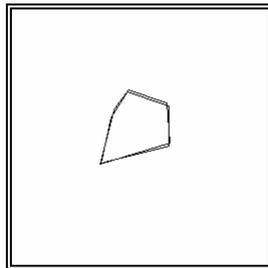


Figura 45 - 10º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

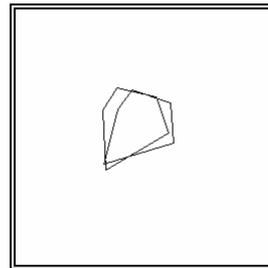


Figura 46 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

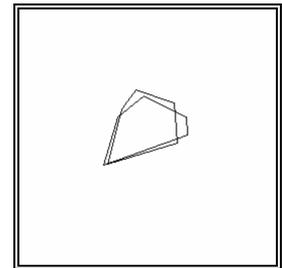


Figura 47 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

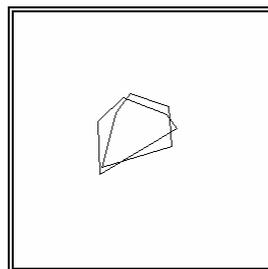


Figura 48 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 46.55$.

Voltando a considerar borracha mas desta feita $\sigma = 58.58$, igual à média da distância entre todos os *pixels*: superior à distância entre os *pixels* 1 e 2, entre 1 e 5, entre 2 e 3, entre 4 e 5 e inferior às restantes, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados nas *Figura 50*, ..., *Figura 59*. Na *Figura 60* e na *Figura 61* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 62*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 63*.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testea

With:

Gaussian functions Sigma: 46.550821.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+1.000000 +0.879396 +0.235886 +0.354870 +0.689232
+0.879396 +1.000000 +0.475589 +0.381095 +0.531413
+0.235886 +0.475589 +1.000000 +0.301107 +0.155105
+0.354870 +0.381095 +0.301107 +1.000000 +0.689869
+0.689232 +0.531413 +0.155105 +0.689869 +1.000000
```

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+0.022437 -0.015349 +0.003788 +0.003873 -0.007333 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-0.015349 +0.017099 -0.003976 -0.002983 +0.003144 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.003788 -0.003976 +0.007583 +0.000567 -0.000674 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.003873 -0.002983 +0.000567 +0.008977 -0.005061 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-0.007333 +0.003144 -0.000674 -0.005061 +0.011112 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.022437 -0.015349 +0.003788 +0.003873 -0.007333
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.015349 +0.017099 -0.003976 -0.002983 +0.003144
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.003788 -0.003976 +0.007583 +0.000567 -0.000674
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.003873 -0.002983 +0.000567 +0.008977 -0.005061
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.007333 +0.003144 -0.000674 -0.005061 +0.011112
```

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+96.158922 -60.441007 +6.845072 +20.913310 -40.939576 -2.000669 +9.589802 -0.459120 +2.131431 -15.431436
-60.441007 +64.799816 -8.930176 -12.462650 +6.216384 +9.589802 -17.410177 +4.474043 -12.894129 +16.551970
+6.845072 -8.930176 +20.669063 -11.206495 +4.198503 -0.459120 +4.474043 -2.942816 +4.175658 +0.497861
+20.913310 -12.462650 -11.206495 +32.344984 -22.505146 +2.131431 -12.894129 +4.175658 +0.596604 -0.631087
-40.939576 +6.216384 +4.198503 -22.505146 +51.432461 -15.431436 +16.551970 +0.497861 -0.631087 +8.919370
-2.000669 +9.589802 -0.459120 +2.131431 -15.431436 +135.867843 -121.632241 +20.082163 +17.226151 -55.400776
+9.589802 -17.410177 +4.474043 -12.894129 +16.551970 -121.632241 +136.039137 -35.210978 -13.982812 +40.962099
-0.459120 +4.474043 -2.942816 +4.175658 +0.497861 +20.082163 -35.210978 +27.667751 +0.837246 -4.861767
+2.131431 -12.894129 +4.175658 +0.596604 -0.631087 +17.226151 -13.982812 +0.837246 +40.869344 -38.218060
-15.431436 +16.551970 +0.497861 -0.631087 +8.919370 -55.400776 +40.962099 -4.861767 -38.218060 +64.092128
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

```
+25.542345 +30.322760 +31.427024 +47.213055 +58.490896 +60.033215 +74.325649 +77.273134 +83.252463 +98.161575
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
-4.195325 -6.317197 -4.535901 -0.362452 +4.797157 -2.382341 +6.198492 -0.717000 +1.869190 -1.156973
-1.241635 -8.013137 -5.368430 -3.086415 -0.120303 -4.698765 +2.830560 -1.571305 +5.440201 -2.609501
+5.643894 -4.228199 +0.563943 +5.788940 +1.171363 -5.098439 -4.254565 -4.104090 +1.796650 +1.141634
+4.752830 -5.745040 -4.150608 +2.491391 -2.501444 +4.096529 +1.442309 +6.954640 -0.682554 -1.496224
-2.111092 -7.529184 -4.142454 -0.747889 +5.686108 +2.823854 -2.661469 +4.985935 -0.766916 +2.359418
+2.173650 +3.429283 -7.665862 +0.419455 +1.253832 +5.705531 -0.522857 -5.548615 +2.667995 +1.714530
+4.623208 +3.243778 -6.940780 -2.310021 +0.650888 +2.403868 +2.297430 -3.643885 +1.271530 +7.829135
+4.319557 +5.337123 -3.492994 -2.259053 +4.658135 -6.036467 +0.197966 +5.218245 +0.057670 -0.738824
-4.406341 +1.563731 -6.910346 +3.295015 -5.123489 -3.753487 -1.751064 +0.009024 -4.488875 +3.345725
-4.042593 +4.070170 -5.605087 +5.768653 -2.059879 +1.054305 -1.537413 +0.997921 +6.340230 +3.279128
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

```
+12.591975
+16.776997
+16.805080
+10.231591
+10.824765
+12.979774
+9.204292
+12.858625
+10.317872
+10.197271
```

Figura 49 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 46.55$.

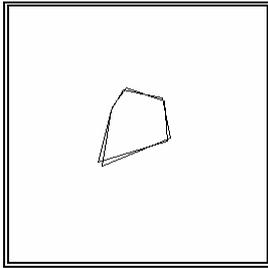


Figura 50 - 1º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

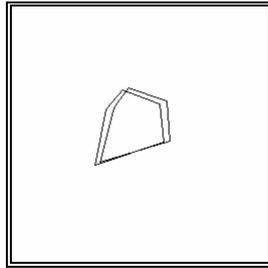


Figura 51 - 2º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

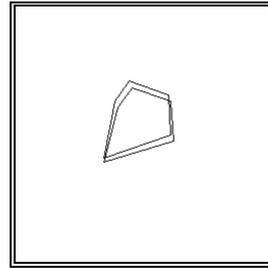


Figura 52 - 3º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

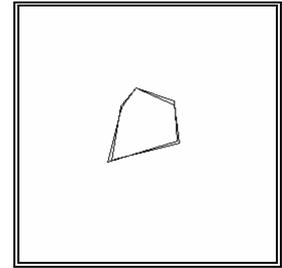


Figura 53 - 4º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

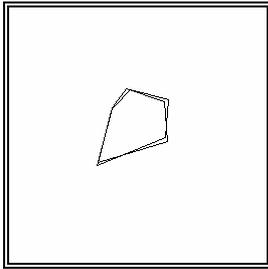


Figura 54 - 5º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

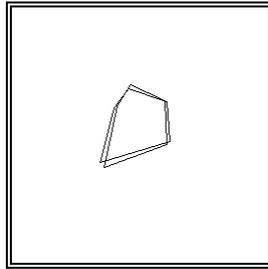


Figura 55 - 6º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

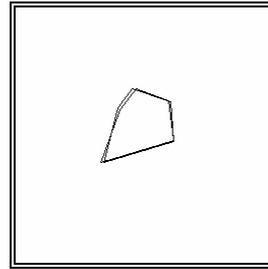


Figura 56 - 7º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

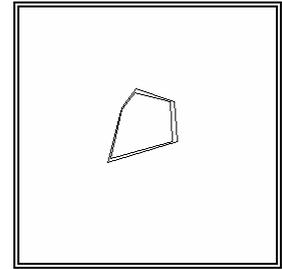


Figura 57 - 8º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

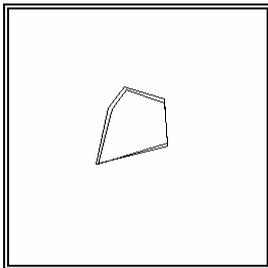


Figura 58 - 9º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

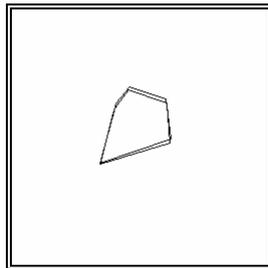


Figura 59 - 10º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

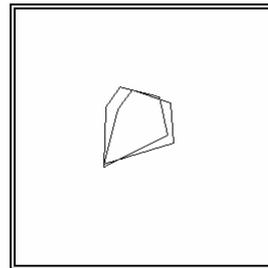


Figura 60 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

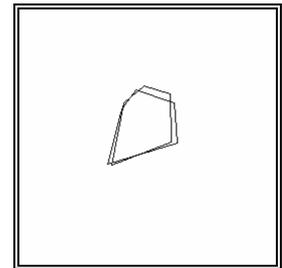


Figura 61 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

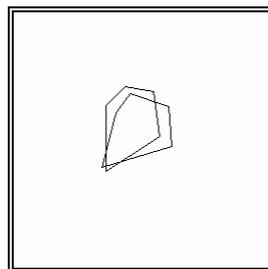


Figura 62 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 58.58$.

Para $\sigma = 150.0$, superior à distância entre todos os *pixels*, e considerando novamente borracha, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados nas Figura 64, ..., Figura 73. Na Figura 74 e na Figura 75 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na Figura 76. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 77.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testea

With:

Gaussian functions Sigma: 58.575952.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+1.000000 +0.922038 +0.401627 +0.519805 +0.790529
+0.922038 +1.000000 +0.625392 +0.543746 +0.670800
+0.401627 +0.625392 +1.000000 +0.468576 +0.308198
+0.519805 +0.543746 +0.468576 +1.000000 +0.790990
+0.790529 +0.670800 +0.308198 +0.790990 +1.000000
```

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+0.075542 -0.057986 +0.014851 +0.015498 -0.029031 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-0.057986 +0.058879 -0.017106 -0.011864 +0.015386 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.014851 -0.017106 +0.016172 +0.000257 -0.001992 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.015498 -0.011864 +0.000257 +0.020798 -0.017100 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-0.029031 +0.015386 -0.001992 -0.017100 +0.031776 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.075542 -0.057986 +0.014851 +0.015498 -0.029031
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.057986 +0.058879 -0.017106 -0.011864 +0.015386
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.014851 -0.017106 +0.016172 +0.000257 -0.001992
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.015498 -0.011864 +0.000257 +0.020798 -0.017100
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.029031 +0.015386 -0.001992 -0.017100 +0.031776
```

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+196.783065 -135.358056 +19.211508 +48.238026 -92.532313 +4.269942 +9.351599 -1.894412 +7.184994 -27.242617
-135.358056 +133.961901 -26.436276 -26.350678 +29.041508 +9.351599 -24.366017 +8.139457 -22.250063 +28.917544
+19.211508 -26.436276 +30.613196 -17.272628 +8.142443 -1.894412 +8.139457 -5.254292 +6.353033 -0.649935
+48.238026 -26.350678 -17.272628 +55.811141 -51.528429 +7.184994 -22.250063 +6.353033 +1.080122 -1.840719
-92.532313 +29.041508 +8.142443 -51.528429 +99.731297 -27.242617 +28.917544 -0.649935 -1.840719 +14.875950
+4.269942 +9.351599 -1.894412 +7.184994 -27.242617 +292.419106 -265.554232 +48.080903 +50.533673 -128.736877
+9.351599 -24.366017 +8.139457 -22.250063 +28.917544 -265.554232 +284.102519 -72.347243 -37.336780 +94.586086
-1.894412 +8.139457 -5.254292 +6.353033 -0.649935 +48.080903 -72.347243 +42.107869 -1.047750 -8.166103
+7.184994 -22.250063 +6.353033 +1.080122 -1.840719 +50.533673 -37.336780 -1.047750 +66.235288 -73.634482
-27.242617 +28.917544 -0.649935 -1.840719 +14.875950 -128.736877 +94.586086 -8.166103 -73.634482 +122.997764
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

```
+20.309103 +24.422846 +24.982834 +39.362675 +47.990585 +49.002264 +59.255405 +63.723956 +67.418283 +80.095584
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
-3.366327 -6.255349 -2.862912 +0.101364 +3.583260 +1.966762 +3.719875 -0.627884 -2.235902 +1.072938
-1.252202 -7.543421 -3.273205 -1.455873 +0.424594 +3.464506 +1.806414 +0.125939 -4.412343 +1.875620
+4.347724 -4.506695 +0.120472 +3.972792 -0.576410 +4.146926 -3.023853 +2.729279 -2.444511 -0.471089
+3.072629 -6.056738 -2.788749 +1.907324 -1.586828 -3.087220 +0.219398 -5.318539 +0.263245 +1.268104
-1.819190 -6.964282 -2.465697 +0.259484 +4.045901 -2.040049 -1.650900 -3.900187 +0.435357 -1.104019
+1.535746 +1.776075 -6.757990 +0.430140 +0.843625 -3.816023 +0.323753 +3.704901 -2.540808 -2.971400
+3.253917 +1.558425 -6.346105 -1.330755 +0.844641 -1.518793 +2.086258 +2.073940 -1.365847 -6.415095
+3.631691 +3.306113 -4.263399 -1.670949 +3.036900 +4.797079 +0.135809 -4.005193 +0.473328 -1.312657
-3.305692 +0.956631 -6.011910 +2.282960 -4.119104 +2.584010 -0.763115 -0.120581 +2.680885 -3.869830
-2.922757 +2.746806 -5.505649 +3.747101 -2.130397 -1.211173 -1.230701 -0.340938 -4.178767 -3.506457
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

```
+9.495217
+15.049977
+14.260320
+6.754170
+8.024532
+9.735782
+5.965786
+9.249716
+7.993561
+9.310992
```

Figura 63 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 58.58$.

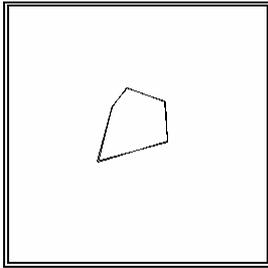


Figura 64 - 1º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

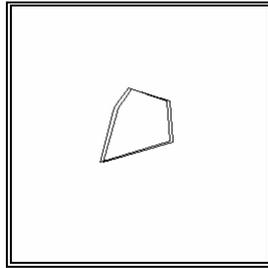


Figura 65 - 2º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

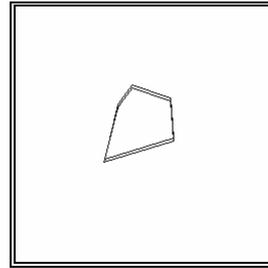


Figura 66 - 3º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

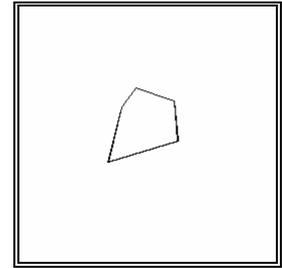


Figura 67 - 4º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

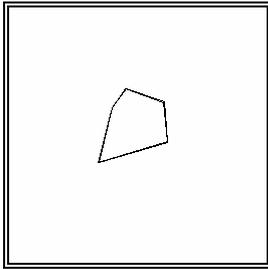


Figura 68 - 5º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

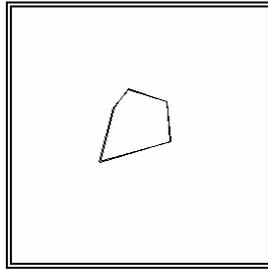


Figura 69 - 6º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

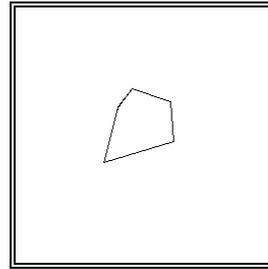


Figura 70 - 7º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

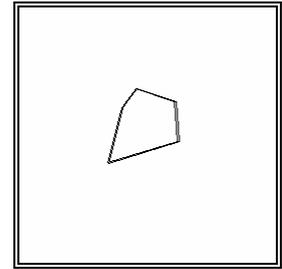


Figura 71 - 8º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

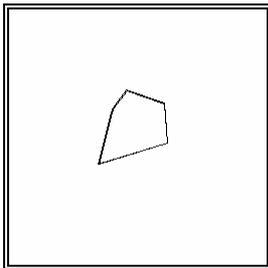


Figura 72 - 9º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

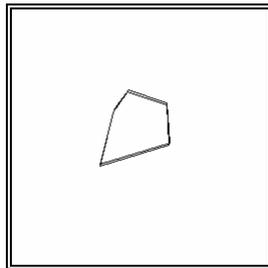


Figura 73 - 10º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

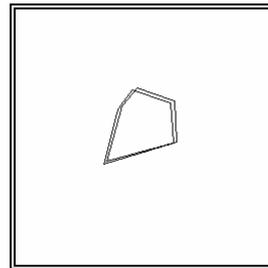


Figura 74 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

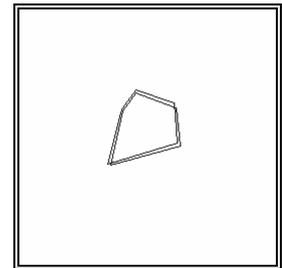


Figura 75 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

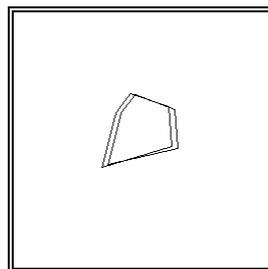


Figura 76 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 150.0$.

Na Figura 78 estão representados o contorno original e os obtidos considerando todos os modos de vibração para $\sigma = 3.0$, $\sigma = 30.0$, $\sigma = 46.55$, $\sigma = 58.58$ e $\sigma = 150.0$.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testea

With:

Gaussian functions Sigma: 150.000000.

Material density: 0.000001.

Young modulus: 2.430000.

Poisson ratio: 0.450000.

Scale pixel/units used: 1.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

+1.000000 +0.987699 +0.870131 +0.905039 +0.964790
 +0.987699 +1.000000 +0.930924 +0.911274 +0.940928
 +0.870131 +0.930924 +1.000000 +0.890831 +0.835697
 +0.905039 +0.911274 +0.890831 +1.000000 +0.964876
 +0.964790 +0.940928 +0.835697 +0.964876 +1.000000

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+18.140999 -16.591452 +3.324397 +3.719473 -7.803149 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -16.591452 +16.684840 -4.081826 -2.367182 +5.528756 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +3.324397 -4.081826 +1.538730 -0.268072 -0.254024 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +3.719473 -2.367182 -0.268072 +2.301924 -3.315694 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 -7.803149 +5.528756 -0.254024 -3.315694 +5.666721 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +18.140999 -16.591452 +3.324397 +3.719473 -7.803149
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -16.591452 +16.684840 -4.081826 -2.367182 +5.528756
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +3.324397 -4.081826 +1.538730 -0.268072 -0.254024
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +3.719473 -2.367182 -0.268072 +2.301924 -3.315694
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -7.803149 +5.528756 -0.254024 -3.315694 +5.666721

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+6674.237459 -5548.666254 +785.988812 +1822.686478 -3487.058121 +479.488157 -155.710194 -103.995061 +352.483121 -616.431189
 -5548.666254 +5381.587846 -1161.458052 -929.623046 +2018.294583 -155.710194 -229.167526 +227.296749 -445.047449 +600.855821
 +785.988812 -1161.458052 +536.849194 -315.660104 +216.035928 -103.995061 +227.296749 -117.091719 +109.246236 -89.559413
 +1822.686478 -929.623046 -315.660104 +1269.277321 -1810.878253 +2982.809437 -616.431189 +600.855821 -89.559413 -102.573739 +281.078933
 -3487.058121 +2018.294583 +216.035928 -1810.878253 +2982.809437 -616.431189 +600.855821 -89.559413 -102.573739 +281.078933
 +479.488157 -155.710194 -103.995061 +352.483121 -616.431189 +10512.208743 -9677.650123 +1726.943273 +2262.353572 -4817.496784
 -155.710194 -229.167526 +227.296749 -445.047449 +600.855821 -9677.650123 +9726.481749 -2184.600922 -1447.825981 +3558.326666
 -103.995061 +227.296749 -117.091719 +109.246236 -89.559413 +1726.943273 -2184.600922 +765.433957 -137.494847 -147.960883
 +352.483121 -445.047449 +109.246236 +34.627880 -102.573739 +2262.353572 -1447.825981 -137.494847 +1341.047224 -2031.223593
 -616.431189 +600.855821 -89.559413 -102.573739 +281.078933 -4817.496784 +3558.326666 -147.960883 -2031.223593 +3463.147359

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+8.099955 +9.448715 +9.802983 +16.858895 +19.756683 +19.853694 +22.955599 +26.401502 +26.993733 +32.539040

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.811683 +3.381286 +0.407744 +0.398076 -0.775813 -0.464318 -0.234224 +1.084415 +0.974469 -0.512541
 +0.390894 +3.514676 +0.432398 +0.288333 -0.284139 -0.714994 -0.086639 +0.962041 +1.287457 -0.569313
 -0.837952 +3.178573 +0.575199 +0.780414 +0.756494 -0.865365 +0.466412 +0.553433 +1.358877 -0.367248
 -0.394953 +3.413141 +0.408696 +0.587491 +0.238103 +0.611815 +0.113774 +1.668845 +0.237519 -0.528124
 +0.515532 +3.413603 +0.467100 +0.482769 -0.686131 +0.402132 +0.188929 +1.539514 +0.254012 -0.335187
 -0.270283 +0.648239 -2.831684 +0.140216 -0.091283 +0.660512 -0.455554 -0.306398 +0.833260 +2.388623
 -0.588005 +0.671786 -2.789713 -0.026775 -0.283453 +0.201366 -0.627831 -0.047889 +0.495230 +2.634316
 -0.867950 +0.453473 -2.687238 -0.120329 -0.458975 -1.066929 -0.441486 +0.818276 -0.390013 +2.238632
 +0.660233 +0.630156 -2.754500 +0.301233 +0.979307 -0.416209 -0.323503 +0.278375 -0.224154 +2.450784
 +0.583504 +0.476968 -2.799085 +0.433561 +0.728922 +0.435842 -0.223504 +0.096543 +0.732998 +2.382474

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+1.970806
 +7.674198
 +6.285986
 +1.320012
 +1.889994
 +1.997509
 +1.131267
 +2.900943
 +2.500767
 +5.518342

Figura 77 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 150.0$.

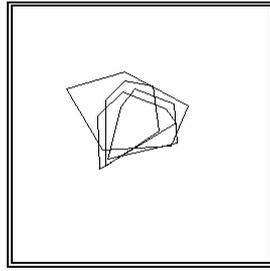


Figura 78 - Contorno original e os obtidos com a soma dos modos de vibração para $\sigma = 20.0$, $\sigma = 30.0$, $\sigma = 46.55$, $\sigma = 58.58$ e $\sigma = 150.0$.

Dos resultados experimentais obtidos para diferentes valores de σ podemos concluir:

- Se σ é reduzido (menor do que a distância entre *pixels* vizinhos) os elementos da matriz $[G]$ não diagonais são aproximadamente iguais a zero e a matriz é praticamente diagonal. Assim que σ seja mais elevado os elementos não diagonais aumentam até que, no limite, para o qual $\sigma \rightarrow \infty$, todos os elementos de $[G]$ são iguais a um.
- Quanto mais elevado é o valor de σ menor é influência dos detalhes do contorno e maior é a zona do contorno final perturbada pelos mesmos.
- O aumento do valor de σ suaviza o contorno final e faz com que este se torne mais rígido.
- Quando o valor de σ é muito reduzido o contorno deforma-se em demasia; isto é, torna-se demasiado elástico.
- Os elementos das matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ aumentam em valor absoluto à medida que o valor de σ aumenta.
- À medida que σ aumenta as amplitudes dos vectores de forma diminuem, os valores das frequências tornam-se menores, os primeiros modos tendem a assumir o valor nulo e passam a ter valores mais idênticos (tende-se para um objecto rígido).
- Os modos de baixa frequência estão associados a deformações globais e os de alta a deformações locais.
- A consideração dos modos de alta frequência tem um efeito semelhante ao de inclusão de ruído no contorno final.

Para se verificar a influência dos parâmetros do material adoptado para o modelo finito consideremos o contorno representado na *Figura 79*. Os *pixels* que constituem este contorno estão ligados por intermédio de segmentos de recta na *Figura 80* e as suas coordenadas estão indicadas na *Figura 81*.

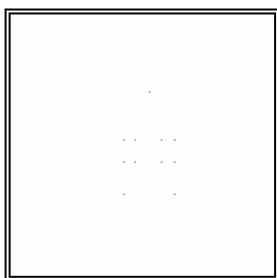


Figura 79 - Contorno a analisar.

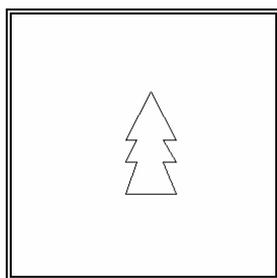


Figura 80 - Pixels do contorno ligados por segmentos de recta.

(181, 144) (168, 144)
 (181, 166) (168, 166)
 (181, 198) (131, 198)
 (142, 166) (131, 166)
 (142, 144) (131, 144)

Figura 81 - Coordenadas dos pixels que constituem o contorno.

Considerando $\sigma = 45.46$, igual à média da distância entre todos os *pixels*, e borracha para o material do modelo finito (modulo de elasticidade igual a 2.43 N/mm^2 , coeficiente de Poisson igual a 0.45 e densidade igual a $0.00000112 \text{ Kg/mm}^3$) o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 82*, ..., *Figura 103*. Na *Figura 104* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na *Figura 105*. O contorno obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na *Figura 106*. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na *Figura 107*. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 108* e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

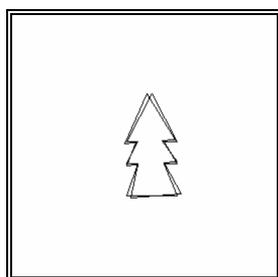


Figura 82 - 1º modo de vibração.

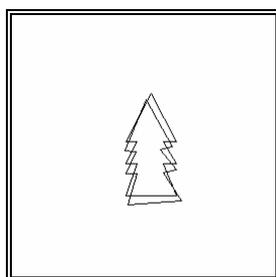


Figura 83 - 2º modo de vibração.

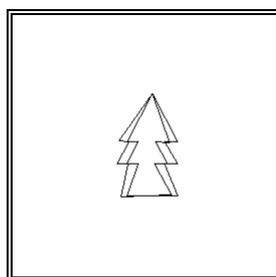


Figura 84 - 3º modo de vibração.

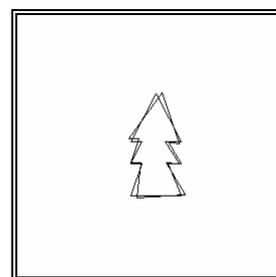


Figura 85 - 4º modo de vibração.

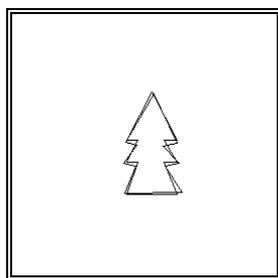


Figura 86 - 5º modo de vibração.

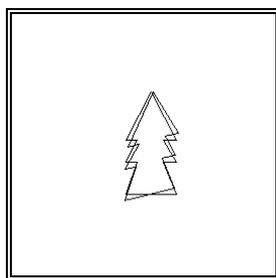


Figura 87 - 6º modo de vibração.

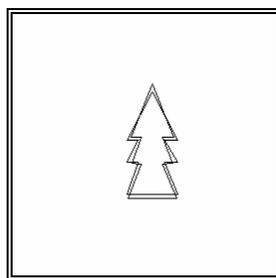


Figura 88 - 7º modo de vibração.

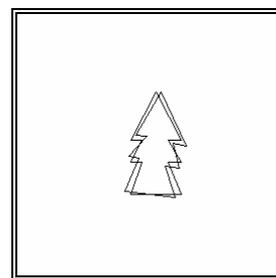


Figura 89 - 8º modo de vibração.

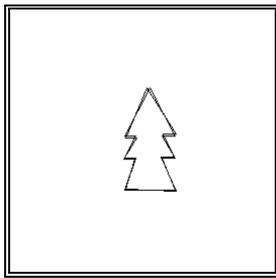


Figura 90 - 9º modo de vibração.

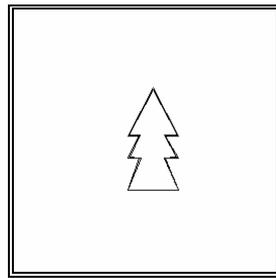


Figura 91 - 10º modo de vibração.

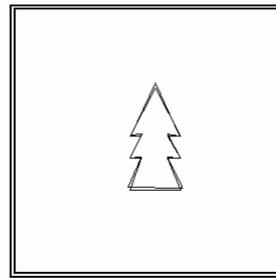


Figura 92 - 11º modo de vibração.

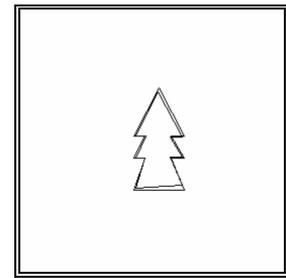


Figura 93 - 12º modo de vibração.

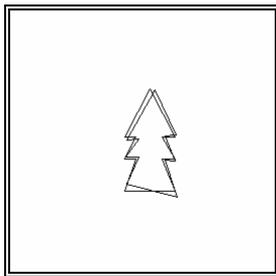


Figura 94 - 13º modo de vibração.

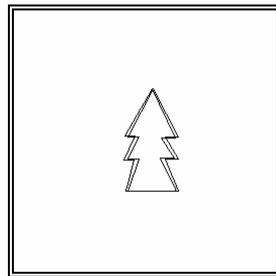


Figura 95 - 14º modo de vibração.

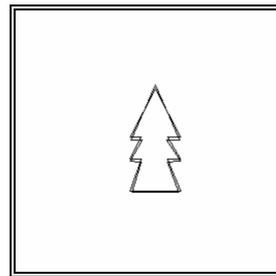


Figura 96 - 15º modo de vibração.

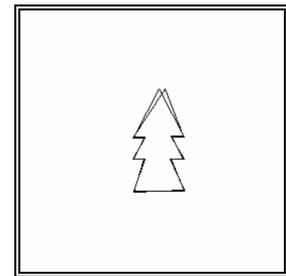


Figura 97 - 16º modo de vibração.

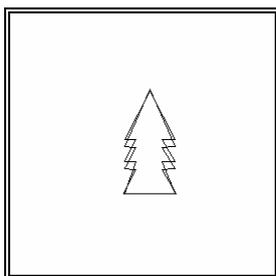


Figura 98 - 17º modo de vibração.

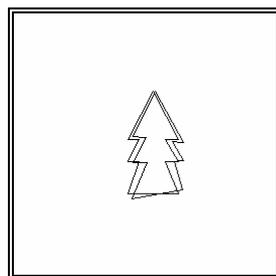


Figura 99 - 18º modo de vibração.

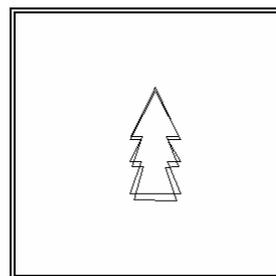


Figura 100 - 19º modo de vibração.

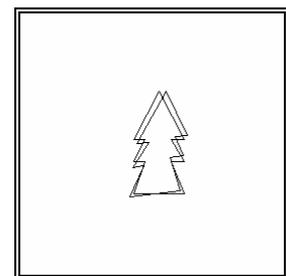


Figura 101 - 20º modo de vibração.

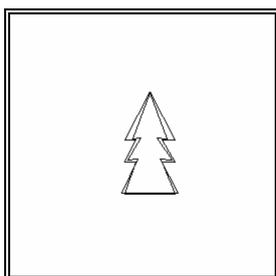


Figura 102 - 21º modo de vibração.

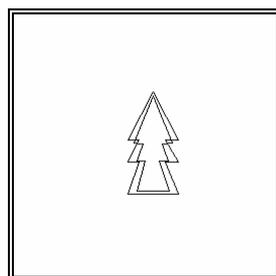


Figura 103 - 22º modo de vibração.

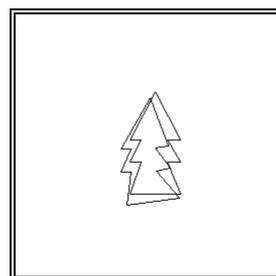


Figura 104 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

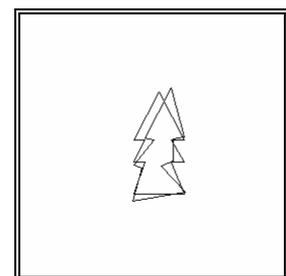


Figura 105 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

Considerando-se o mesmo valor para σ mas uma densidade superior e igual à do alumínio ($\rho = 0.00000266 \text{ Kg/mm}^3$) obtemos os resultados apresentados na *Figura 109*, ..., *Figura 135*. Assim o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 109*, ..., *Figura 130*. Na *Figura 131* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração.

Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na *Figura 132*. O contorno obtido considerando-se a soma dos

restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na *Figura 133*. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na *Figura 134*. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 135* e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

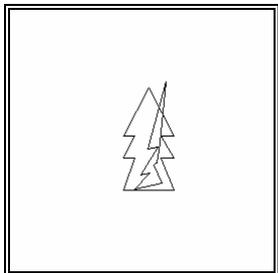


Figura 106 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

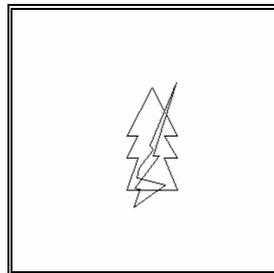


Figura 107 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+21.512651 +27.953805 +28.292861 +35.740676 +35.784299 +37.249187 +38.003978 +42.048731 +53.192071 +54.024445
 +61.064774 +68.176670 +68.817030 +81.554150 +88.881149 +92.961601 +101.272520 +114.388224 +123.093444
 +125.420804 +131.416075 +132.679926

Figura 108 - Frequências de vibração obtidas.

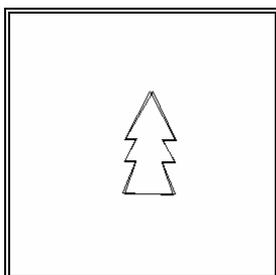


Figura 109 - 1º modo de vibração.

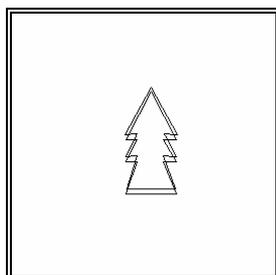


Figura 110 - 2º modo de vibração.

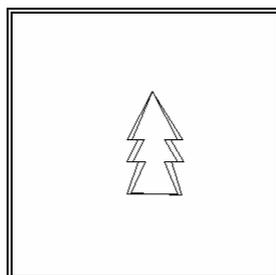


Figura 111 - 3º modo de vibração.

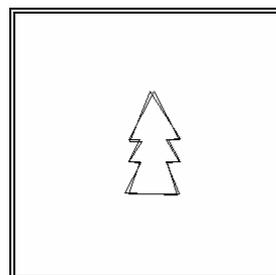


Figura 112 - 4º modo de vibração.

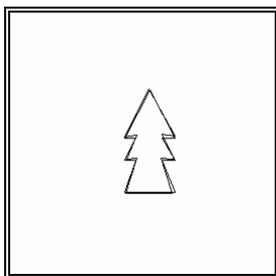


Figura 113 - 5º modo de vibração.

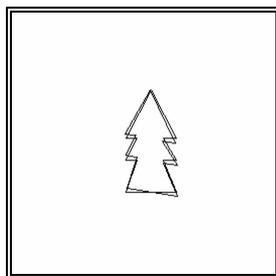


Figura 114 - 6º modo de vibração.

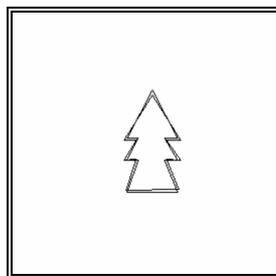


Figura 115 - 7º modo de vibração.

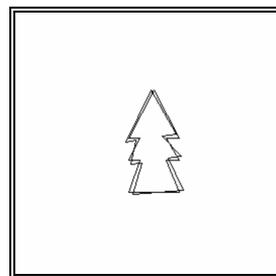


Figura 116 - 8º modo de vibração.

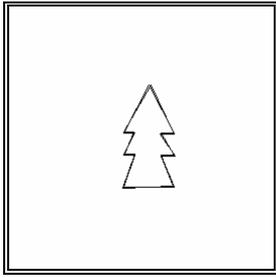


Figura 117 - 9º modo de vibração.

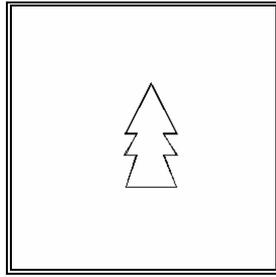


Figura 118 - 10º modo de vibração.

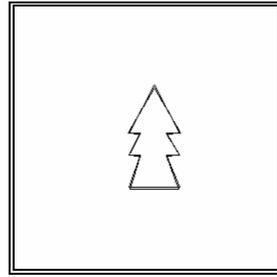


Figura 119 - 11º modo de vibração.

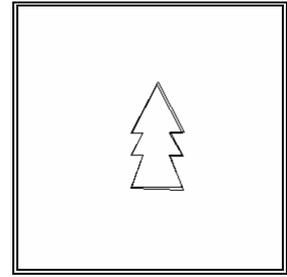


Figura 120 - 12º modo de vibração.

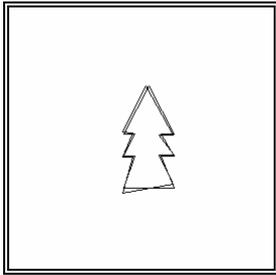


Figura 121 - 13º modo de vibração.

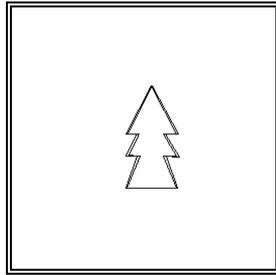


Figura 122 - 14º modo de vibração.

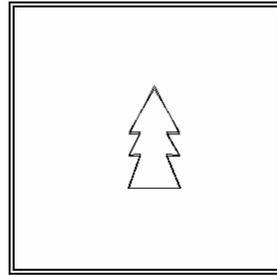


Figura 123 - 15º modo de vibração.

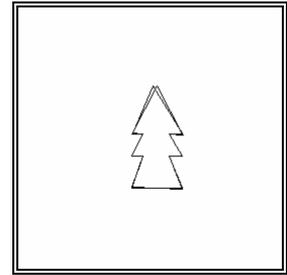


Figura 124 - 16º modo de vibração.

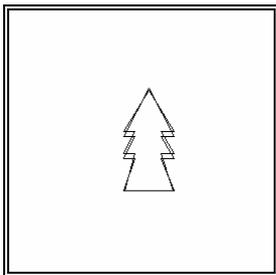


Figura 125 - 17º modo de vibração.

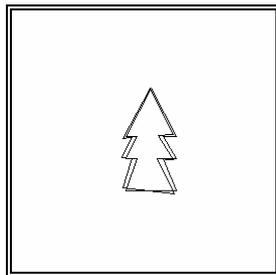


Figura 126 - 18º modo de vibração.

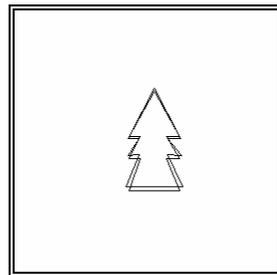


Figura 127 - 19º modo de vibração.

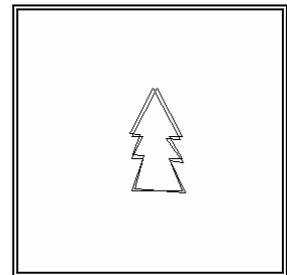


Figura 128 - 20º modo de vibração.

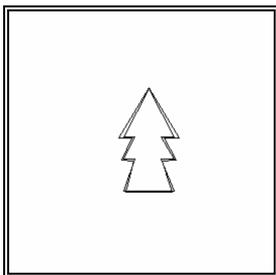


Figura 129 - 21º modo de vibração.

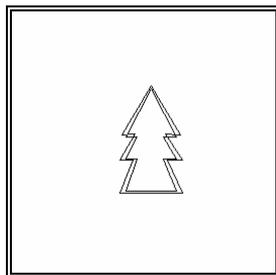


Figura 130 - 22º modo de vibração.

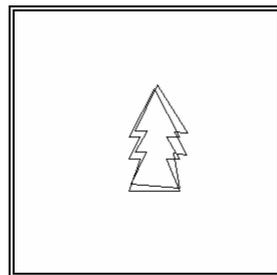


Figura 131 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

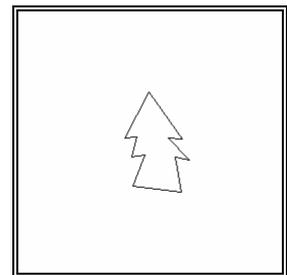


Figura 132 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

Analisando os resultados verifica-se que, como seria de esperar, o contorno tornou-se mais rígido, as frequências assumiram valores mais reduzidos e, de maneira global, observa-se que os contornos obtidos são mais ou menos simétricos aos obtidos com a densidade da borracha. Os elementos da matriz de massa $[M]$ apresentam valores em termos absolutos superiores, a matriz de rigidez $[K]$ permanece inalterada e as amplitudes dos vectores de forma diminuem.

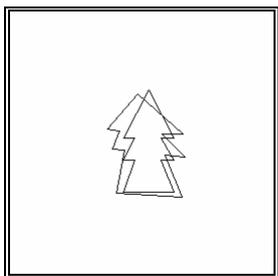


Figura 133 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

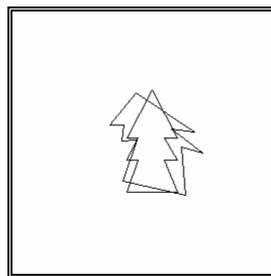


Figura 134 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000003.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+13.959251 +18.138824 +18.358832 +23.191613 +23.219919 +24.170464 +24.660237 +27.284819 +34.515573 +35.055689
 +39.624058 +44.238865 +44.654386 +52.919321 +57.673705 +60.321452 +65.714288 +74.224881 +79.873574 +81.383764
 +85.274010 +86.094105

Figura 135 - Frequências de vibração obtidas.

Considerando-se o mesmo valor para σ , a densidade da borracha e um coeficiente de Poisson inferior e igual ao do alumínio ($\nu=0.32$) obtemos os resultados apresentados na Figura 136,..., Figura 162. Assim o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na Figura 136, ..., Figura 157. Na Figura 158 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na Figura 159. O contorno obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na Figura 160. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na Figura 161. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 162 e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

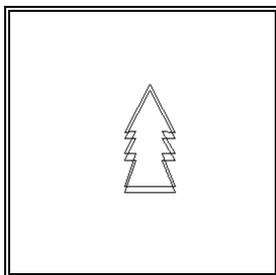


Figura 136 - 1º modo de vibração.

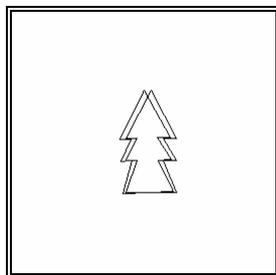


Figura 137 - 2º modo de vibração.

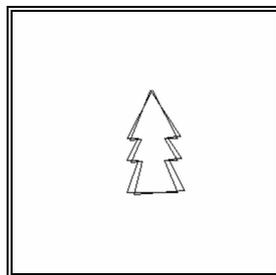


Figura 138 - 3º modo de vibração.

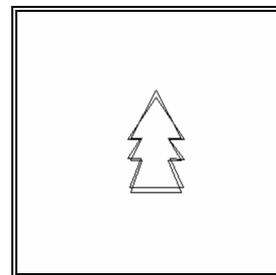


Figura 139 - 4º modo de vibração.

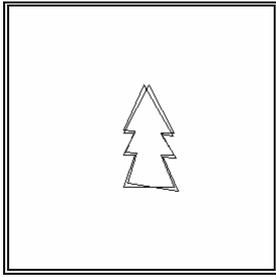


Figura 140 - 5º modo de vibração.

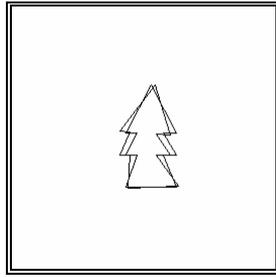


Figura 141 - 6º modo de vibração.

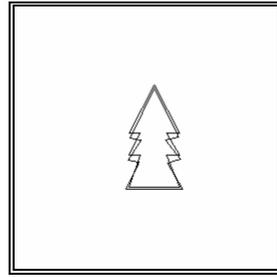


Figura 142 - 7º modo de vibração.

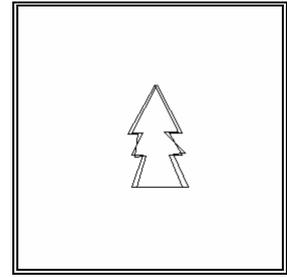


Figura 143 - 8º modo de vibração.

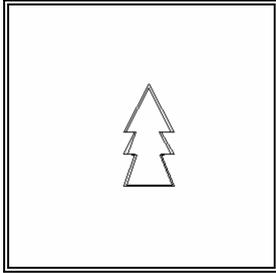


Figura 144 - 9º modo de vibração.

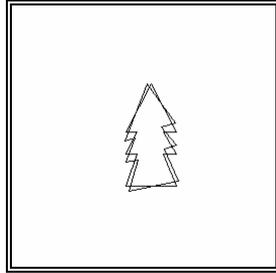


Figura 145 - 10º modo de vibração.

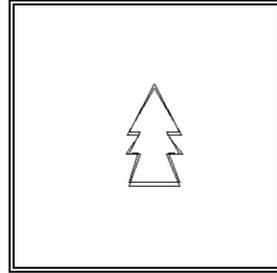


Figura 146 - 11º modo de vibração.

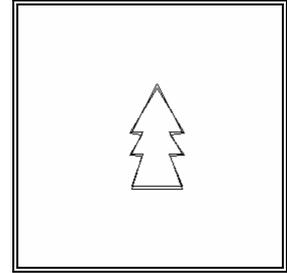


Figura 147 - 12º modo de vibração.

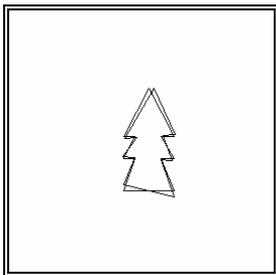


Figura 148 - 13º modo de vibração.

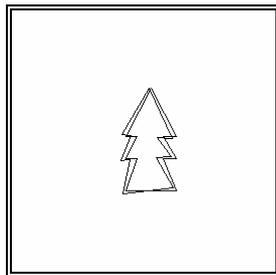


Figura 149 - 14º modo de vibração.

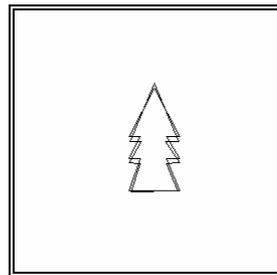


Figura 150 - 15º modo de vibração.

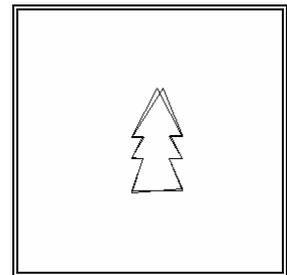


Figura 151 - 16º modo de vibração.

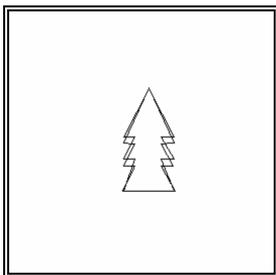


Figura 152 - 17º modo de vibração.

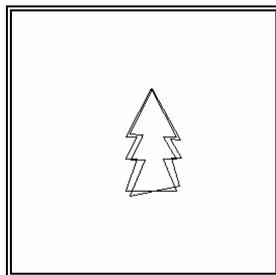


Figura 153 - 18º modo de vibração.

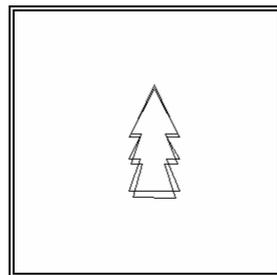


Figura 154 - 19º modo de vibração.

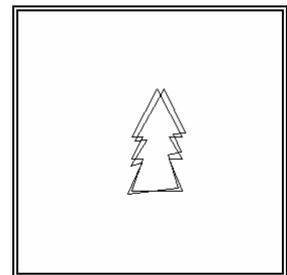


Figura 155 - 20º modo de vibração.

Analisando os resultados verifica-se que, como seria de esperar, o contorno tornou-se mais rígido, as frequências assumiram valores mais reduzidos e, de maneira global, observa-se que os contornos obtidos são mais resistentes à compressão de que os obtidos com o coeficiente de Poisson da borracha. A matriz de massa $[M]$ permanece inalterada e os elementos da matriz de rigidez $[K]$ apresentam valores em termos absolutos mais reduzidos.

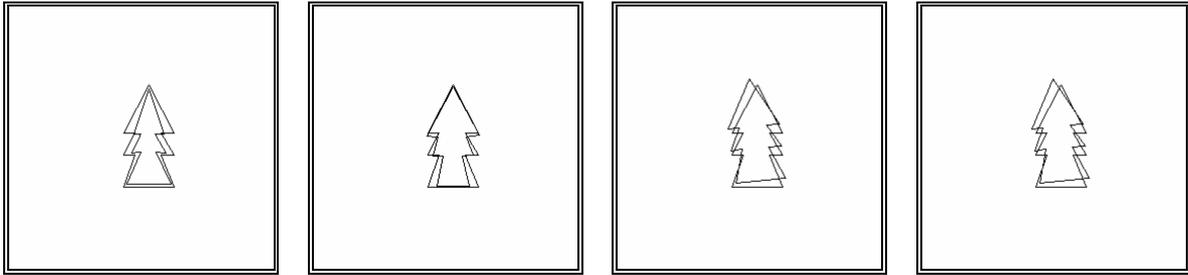


Figura 156 - 21º modo de vibração.

Figura 157 - 22º modo de vibração.

Figura 158 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

Figura 159 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

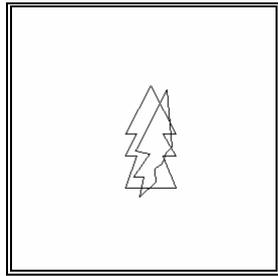


Figura 160 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

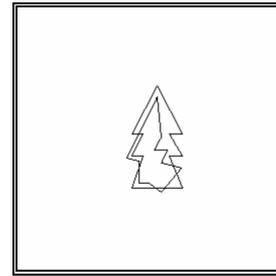


Figura 161 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.320000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+20.807634 +21.538086 +22.149507 +31.822454 +32.089791 +32.980502 +34.680343 +41.386479 +41.490635 +42.336564
 +42.701302 +43.198049 +49.592771 +54.879065 +58.163965 +60.428111 +63.072756 +71.413644 +75.972845 +77.357809
 +81.206057 +82.547407

Figura 162 - Frequências de vibração obtidas.

Considerando-se o mesmo valor para σ , a densidade e o coeficiente de Poisson da borracha e um coeficiente de elasticidade superior e igual ao do alumínio ($E = 68000 \text{ N/mm}^2$) obtemos os resultados apresentados na Figura 136, ..., Figura 162. Assim o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na Figura 136, ..., Figura 157. Na Figura 158 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na Figura 159. O contorno obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na Figura 160. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na Figura 161. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 162 e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

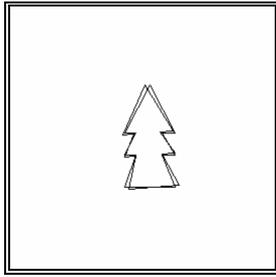


Figura 163 - 1º modo de vibração.

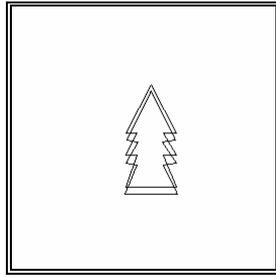


Figura 164 - 2º modo de vibração.

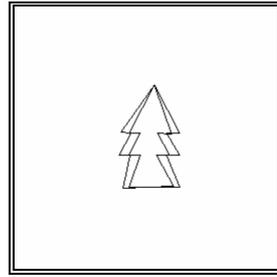


Figura 165 - 3º modo de vibração.

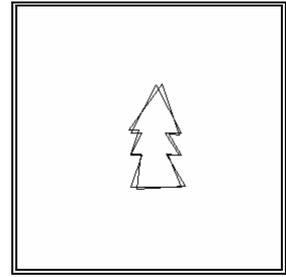


Figura 166 - 4º modo de vibração.

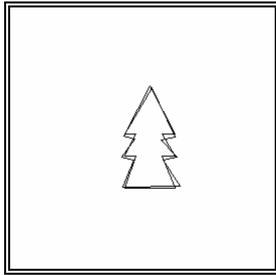


Figura 167 - 5º modo de vibração.

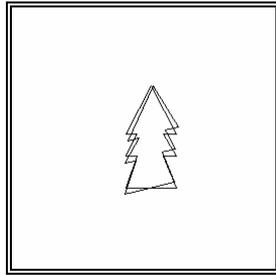


Figura 168 - 6º modo de vibração.

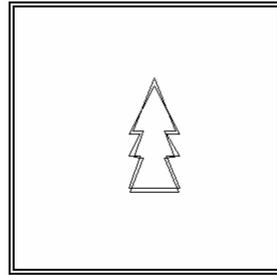


Figura 169 - 7º modo de vibração.

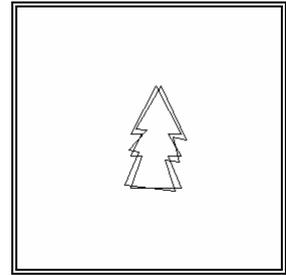


Figura 170 - 8º modo de vibração.

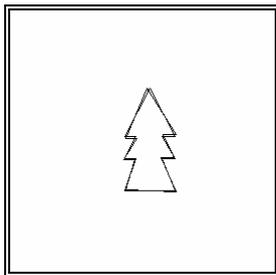


Figura 171 - 9º modo de vibração.

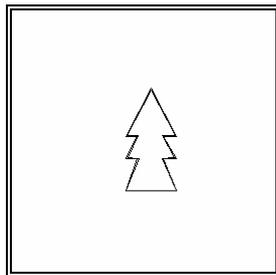


Figura 172 - 10º modo de vibração.

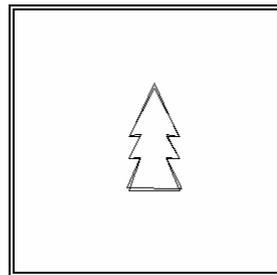


Figura 173 - 11º modo de vibração.

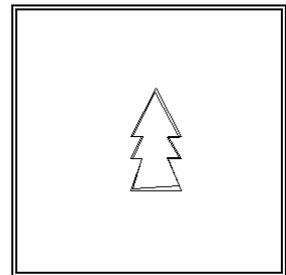


Figura 174 - 12º modo de vibração.

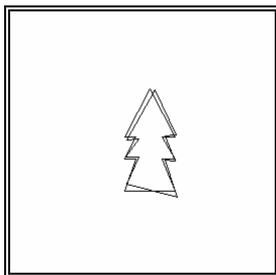


Figura 175 - 13º modo de vibração.

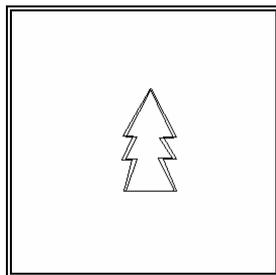


Figura 176 - 14º modo de vibração.

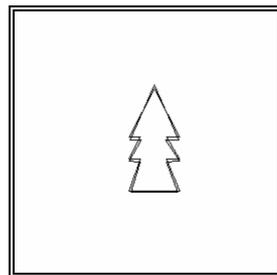


Figura 177 - 15º modo de vibração.

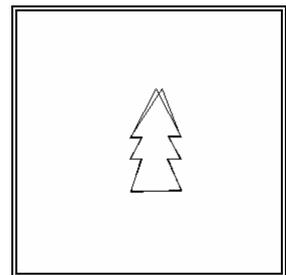


Figura 178 - 16º modo de vibração.

Analisando os resultados verifica-se que o contorno deforma-se praticamente da mesma maneira como quando é considerado o módulo de elasticidade da borracha. Contudo verifica-se que os valores das frequências de vibração são bastante mais elevados. Os elementos da matriz de massa $[M]$ são em valor absoluto mais elevados e os elementos da matriz de rigidez $[K]$ são em valor absoluto bastante mais elevados.

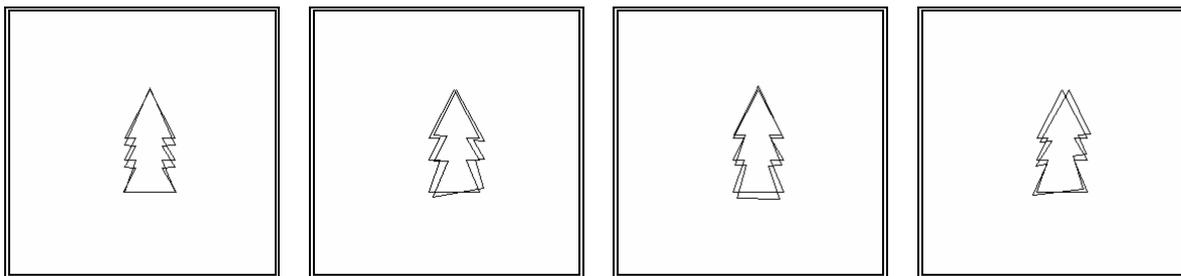


Figura 179 - 17º modo de vibração.

Figura 180 - 18º modo de vibração.

Figura 181 - 19º modo de vibração.

Figura 182 - 20º modo de vibração.

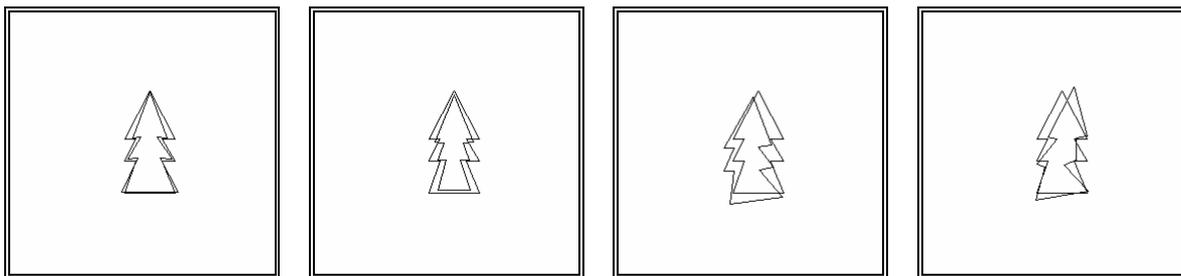


Figura 183 - 21º modo de vibração.

Figura 184 - 22º modo de vibração.

Figura 185 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

Figura 186 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

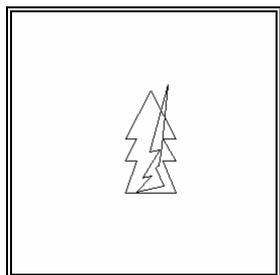


Figura 187 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

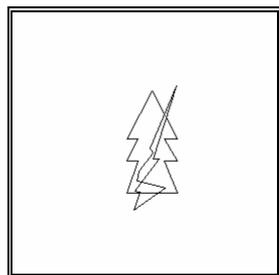


Figura 188 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 68000.000000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+3598.696747 +4676.191157 +4732.909292 +5978.800848 +5986.098199 +6231.148781 +6357.412290 +7034.029903
 +8898.119196 +9037.361019 +10215.087109 +11404.785035 +11511.906347 +13642.607545 +14868.288462 +15550.877945
 +16941.151855 +19135.183712 +20591.417373 +20980.744699 +21983.650483 +22195.071105

Figura 189 - Frequências de vibração obtidas.

Considerando mais uma vez $\sigma = 45.46$ e, em vez de borracha, alumínio para o material do modelo finito (modulo de elasticidade igual a 68000 N/mm^2 , coeficiente de Poisson igual a 0.32 e densidade igual a $0.00000266 \text{ Kg/mm}^3$) o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na Figura 190, ..., Figura 211. Na Figura 212 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três

primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na *Figura 213*. O contorno obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na *Figura 214*. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na *Figura 215*. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 216* e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

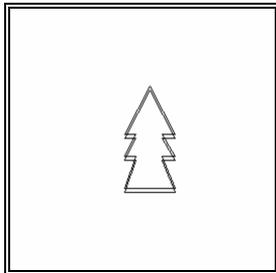


Figura 190 - 1º modo de vibração.

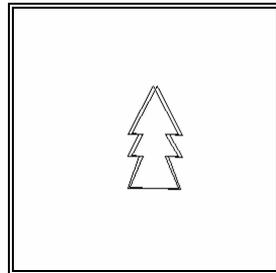


Figura 191 - 2º modo de vibração.

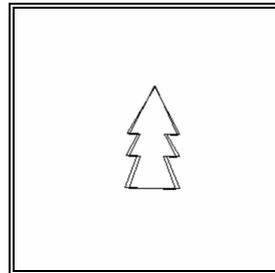


Figura 192 - 3º modo de vibração.

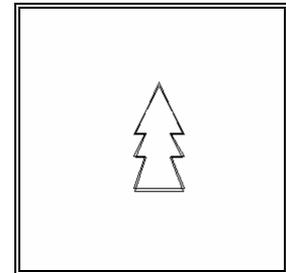


Figura 193 - 4º modo de vibração.

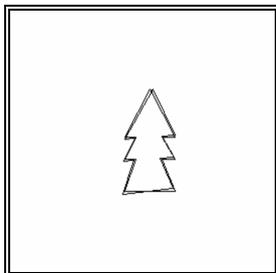


Figura 194 - 5º modo de vibração.

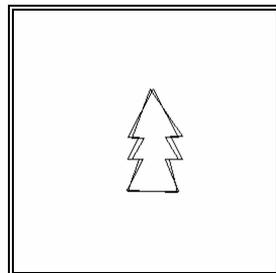


Figura 195 - 6º modo de vibração.

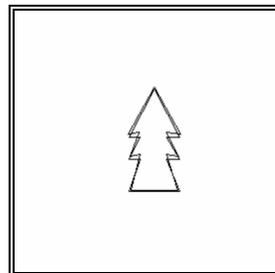


Figura 196 - 7º modo de vibração.

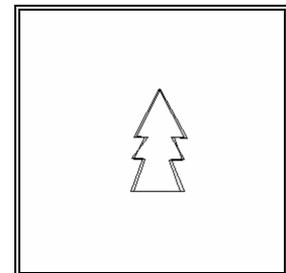


Figura 197 - 8º modo de vibração.

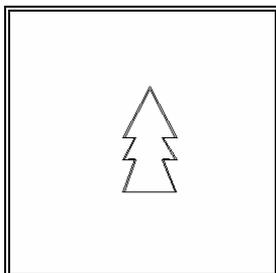


Figura 198 - 9º modo de vibração.

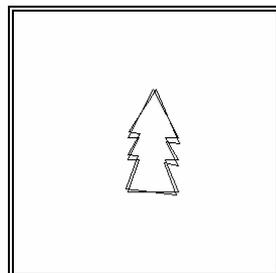


Figura 199 - 10º modo de vibração.

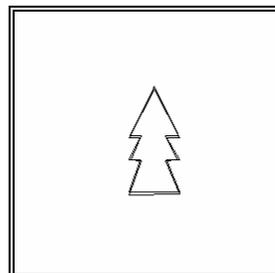


Figura 200 - 11º modo de vibração.

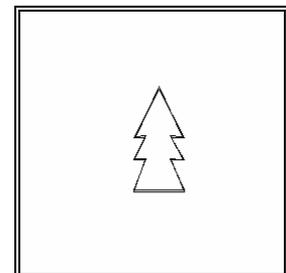


Figura 201 - 12º modo de vibração.

Analisando os resultados verifica-se que, como seria de esperar, o contorno tornou-se mais rígido, de maneira global observa-se que os contornos obtidos são mais ou menos simétricos aos obtidos para a borracha e mais resistentes há compressão. Também se verifica que as frequências de vibração apresentam valores mais elevados. Os elementos da matriz de massa $[M]$ são em valor absoluto mais elevados e os elementos da matriz de rigidez $[K]$ são em valor absoluto bastante mais elevados.

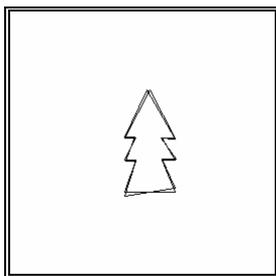


Figura 202 - 13º modo de vibração.

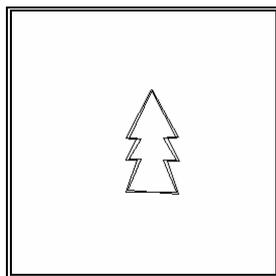


Figura 203 - 14º modo de vibração.

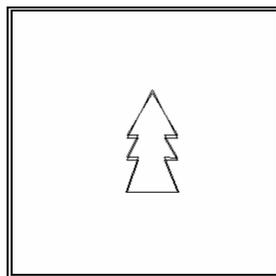


Figura 204 - 15º modo de vibração.

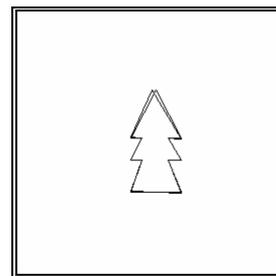


Figura 205 - 16º modo de vibração.

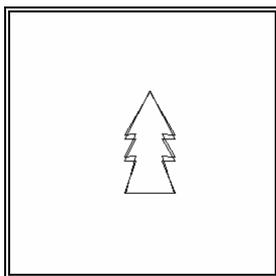


Figura 206 - 17º modo de vibração.

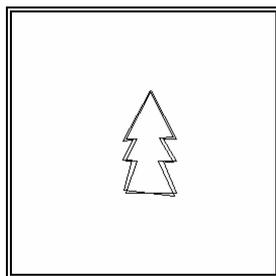


Figura 207 - 18º modo de vibração.

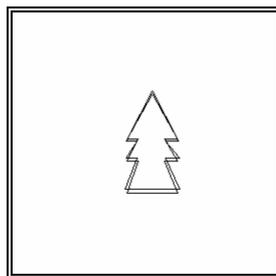


Figura 208 - 19º modo de vibração.

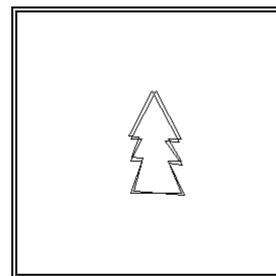


Figura 209 - 20º modo de vibração.

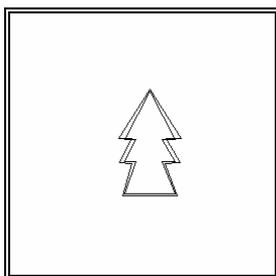


Figura 210 - 21º modo de vibração.

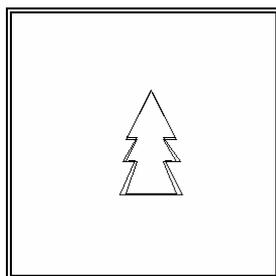


Figura 211 - 22º modo de vibração.

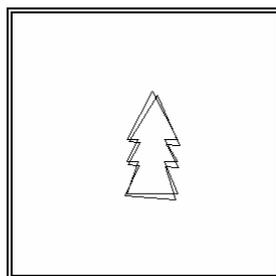


Figura 212 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

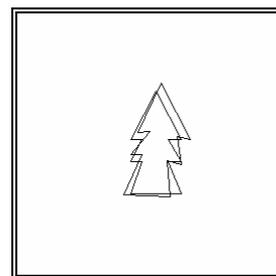


Figura 213 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

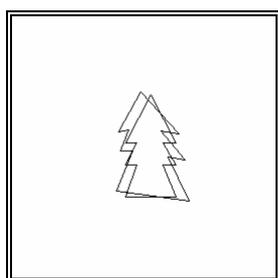


Figura 214 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

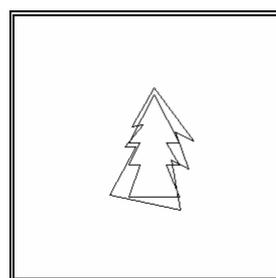


Figura 215 - Soma de todos os modos de vibração.

Para se verificar o comportamento do modelo adoptado, a partir do modelo de Sclaroff, para um contorno (ver ponto 4.5) considere-se o contorno que tem vindo a ser analisado, $\sigma = 45.46$ e borracha para o material virtual do modelo finito. O contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na Figura 217, ..., Figura 238. Na Figura 239 estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na Figura 240. O contorno

obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 22º) está representado na *Figura 241*. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na *Figura 242*. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 243* e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000003.
 Young modulus: 68000.000000.
 Poisson ratio: 0.320000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+2258.615046 +2337.903733 +2404.271857 +3454.245340 +3483.264109 +3579.948407 +3764.461789 +4492.395555
 +4503.701493 +4595.524874 +4635.116276 +4689.036888 +5383.167455 +5956.981004 +6313.548473 +6559.315634
 +6846.385029 +7751.766981 +8246.656400 +8396.990765 +8814.708164 +8960.308172

Figura 216 - Frequências de vibração obtidas.

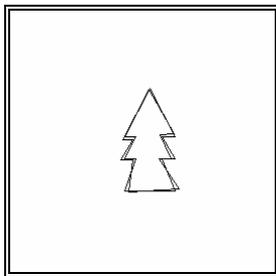


Figura 217 - 1º modo de vibração.

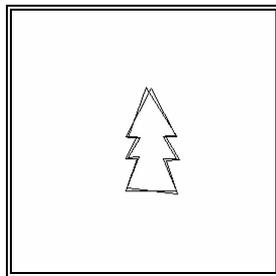


Figura 218 - 2º modo de vibração.

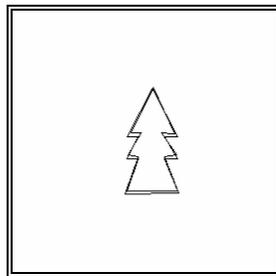


Figura 219 - 3º modo de vibração.

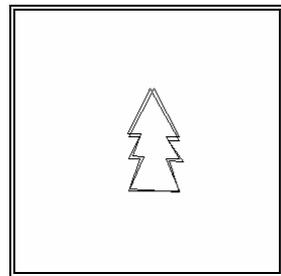


Figura 220 - 4º modo de vibração.

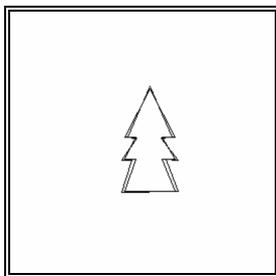


Figura 221 - 5º modo de vibração.

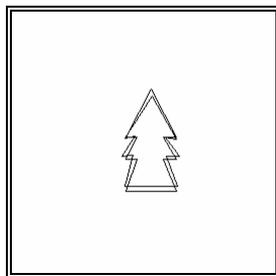


Figura 222 - 6º modo de vibração.

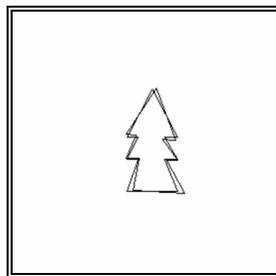


Figura 223 - 7º modo de vibração.

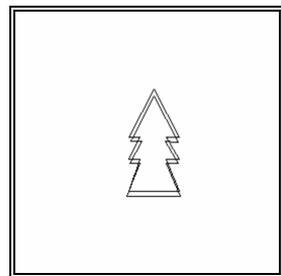


Figura 224 - 8º modo de vibração.

Como se pode observar dos resultados obtidos o contorno tornou-se mais rígido conservando mais a sua forma original à medida que se incluem os modos associados às deformações locais e ao ruído. As frequências associadas aos primeiros modos são praticamente nulas e as restantes tornam-se mais distintas.

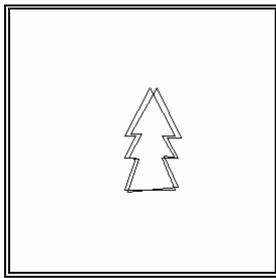


Figura 225 - 9º modo de vibração.

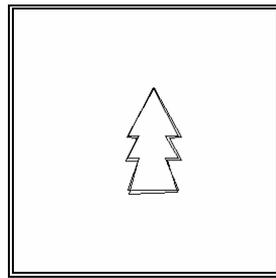


Figura 226 - 10º modo de vibração.

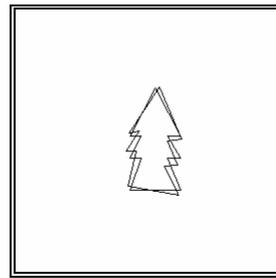


Figura 227 - 11º modo de vibração.

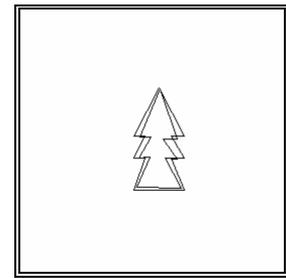


Figura 228 - 12º modo de vibração.

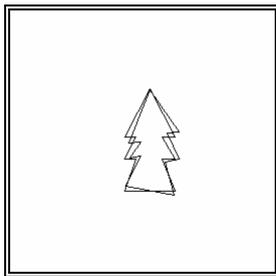


Figura 229 - 13º modo de vibração.

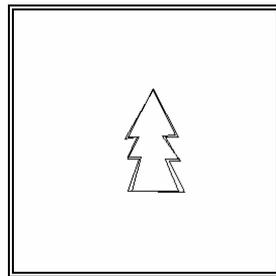


Figura 230 - 14º modo de vibração.

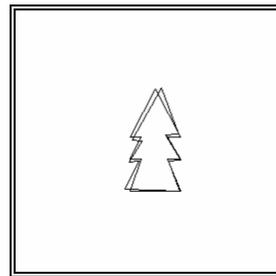


Figura 231 - 15º modo de vibração.

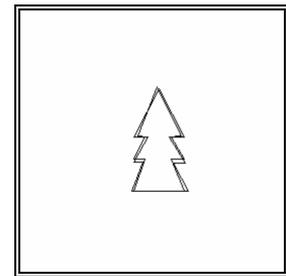


Figura 232 - 16º modo de vibração.

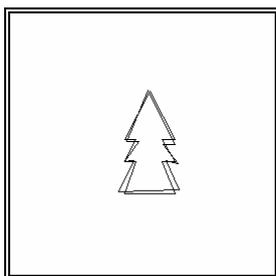


Figura 233 - 17º modo de vibração.

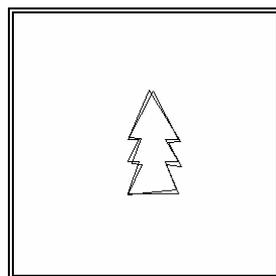


Figura 234 - 18º modo de vibração.

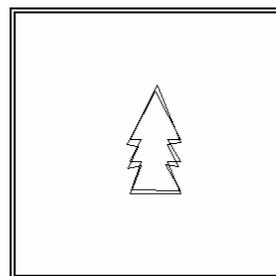


Figura 235 - 19º modo de vibração.

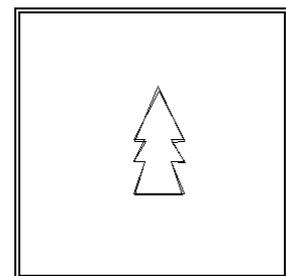


Figura 236 - 20º modo de vibração.

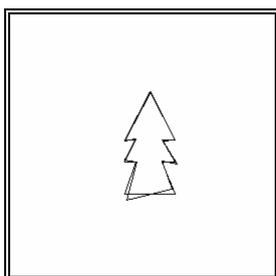


Figura 237 - 21º modo de vibração.

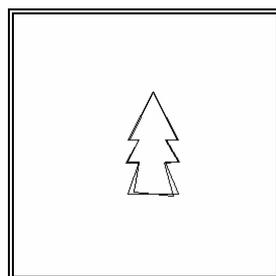


Figura 238 - 22º modo de vibração.

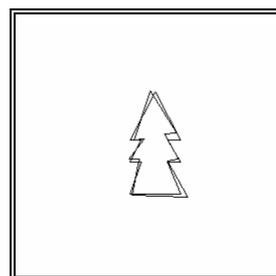


Figura 239 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

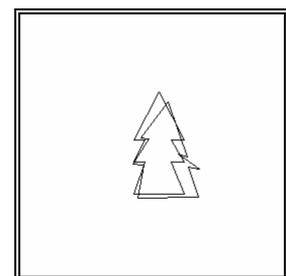


Figura 240 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

Para se analisar o efeito da amostragem considerou-se o contorno idêntico ao anteriormente considerado mas com mais *pixels*. Os *pixels* que constituem este contorno estão ligados por intermédio de segmentos de recta na *Figura 80* e as suas coordenadas estão indicadas na *Figura 81*.

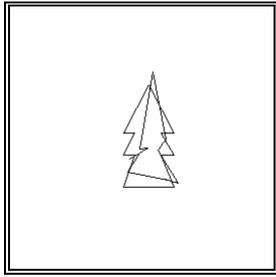


Figura 241 - Soma do 11º, ..., 22º modo de vibração.

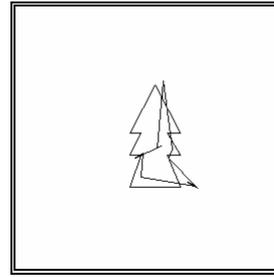


Figura 242 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testeb

With:

Gaussian functions Sigma: 45.464038.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-22) of (22):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +26.820977 +30.695103 +36.885452 +38.912167 +41.144171
 +45.771431 +47.699694 +50.837939 +55.954217 +64.044214 +68.382313 +84.407014 +101.972646 +113.842550
 +150.493560 +337.745390 +640.771770

Figura 243 - Frequências de vibração obtidas.

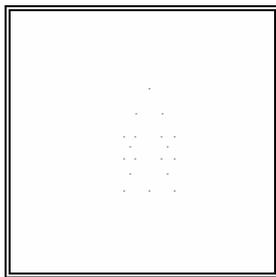


Figura 244 - Contorno a analisar.

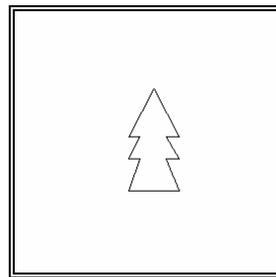


Figura 245 - Pixels do contorno ligados por segmentos de recta.

(156, 96) (169, 121)
 (181, 144) (168, 144)
 (174, 154) (181, 166)
 (168, 166) (174, 181)
 (181, 198) (156, 198)
 (131, 198) (137, 181)
 (142, 166) (131, 166)
 (137, 154) (142, 144)
 (131, 144) (143, 121)

Figura 246 - Coordenas dos pixels que constituem o contorno.

Considerando $\sigma=45.46$ e borracha para o material virtual do modelo finito o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 247, ..., Figura 282*. Na *Figura 283* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração. Considerando-se a soma dos modos de vibração a partir do quarto e até ao décimo obtemos o contorno representado na *Figura 284*. O contorno obtido considerando-se a soma dos restantes modos de vibração (do 11º ao 36º) está representado na *Figura 285*. Considerando a soma de todos os modos de vibração obtemos o contorno representado na *Figura 286*. Parte dos resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 287* e é possível verificar-se os valores das frequências de vibração do modelo finito utilizado na modelação.

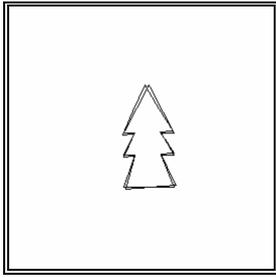


Figura 247 - 1º modo de vibração.

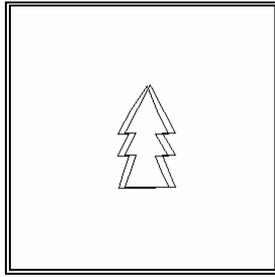


Figura 248 - 2º modo de vibração.

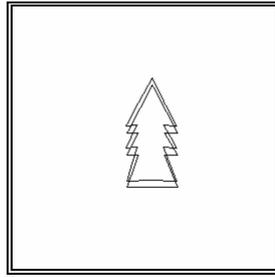


Figura 249 - 3º modo de vibração.

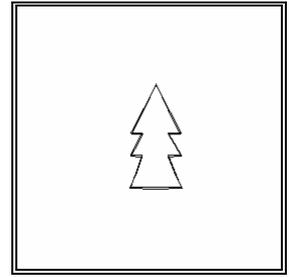


Figura 250 - 4º modo de vibração.

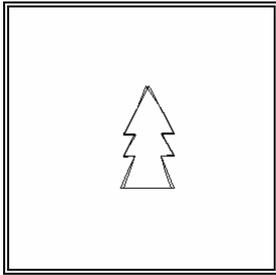


Figura 251 - 5º modo de vibração.

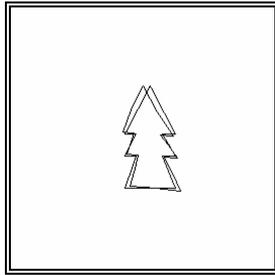


Figura 252 - 6º modo de vibração.

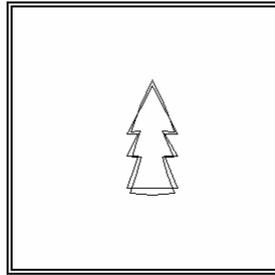


Figura 253 - 7º modo de vibração.

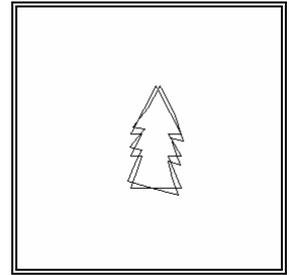


Figura 254 - 8º modo de vibração.

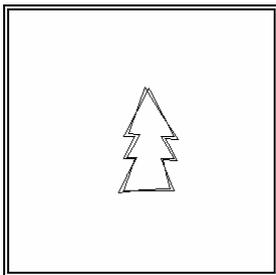


Figura 255 - 9º modo de vibração.

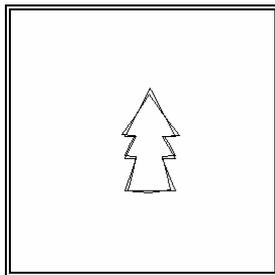


Figura 256 - 10º modo de vibração.

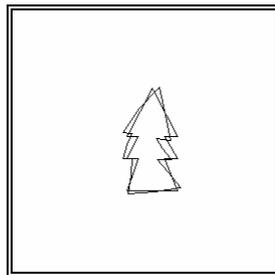


Figura 257 - 11º modo de vibração.

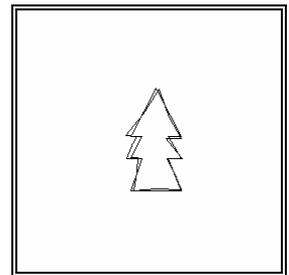


Figura 258 - 12º modo de vibração.

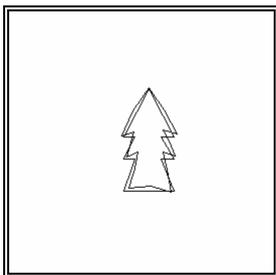


Figura 259 - 13º modo de vibração.

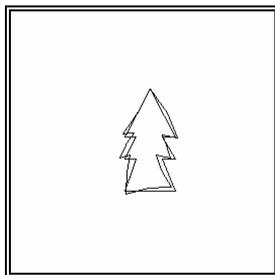


Figura 260 - 14º modo de vibração.

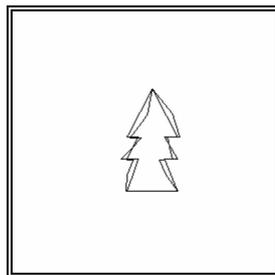


Figura 261 - 15º modo de vibração.

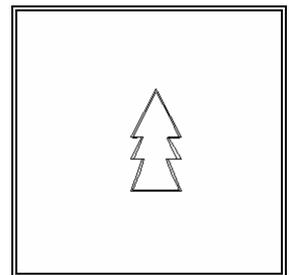


Figura 262 - 16º modo de vibração.

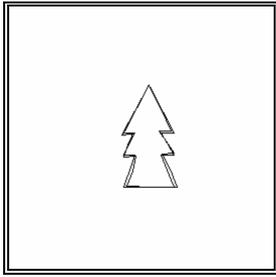


Figura 263 - 17º modo de vibração.

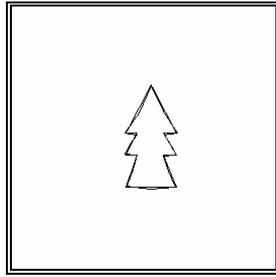


Figura 264 - 18º modo de vibração.

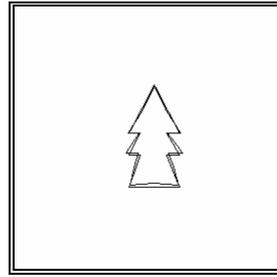


Figura 265 - 19º modo de vibração.

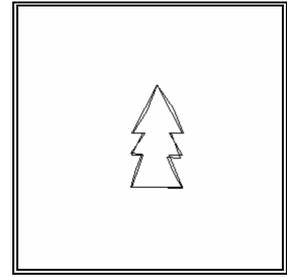


Figura 266 - 20º modo de vibração.

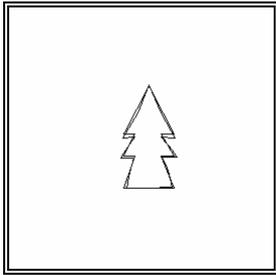


Figura 267 - 21º modo de vibração.

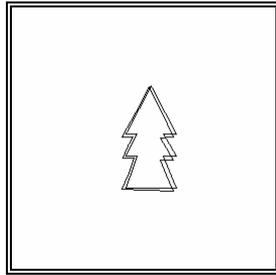


Figura 268 - 22º modo de vibração.

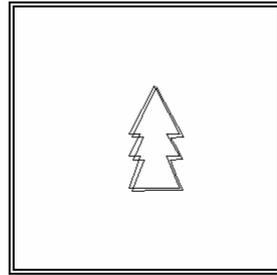


Figura 269 - 23º modo de vibração.

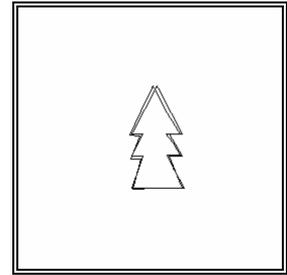


Figura 270 - 24º modo de vibração.

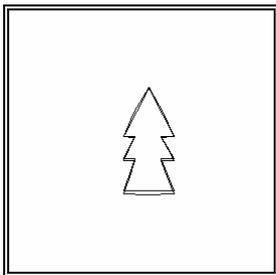


Figura 271 - 25º modo de vibração.

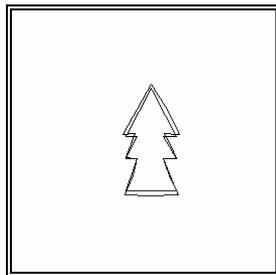


Figura 272 - 26º modo de vibração.

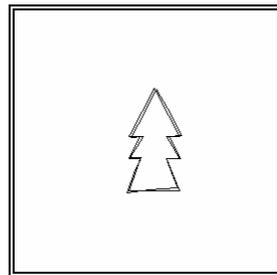


Figura 273 - 27º modo de vibração.

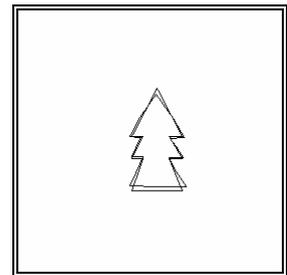


Figura 274 - 28º modo de vibração.

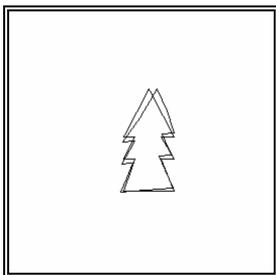


Figura 275 - 29º modo de vibração.

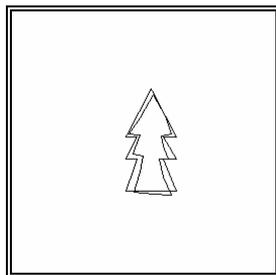


Figura 276 - 30º modo de vibração.

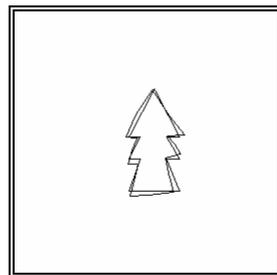


Figura 277 - 31º modo de vibração.

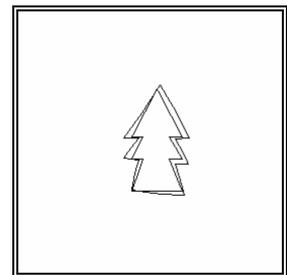


Figura 278 - 32º modo de vibração.

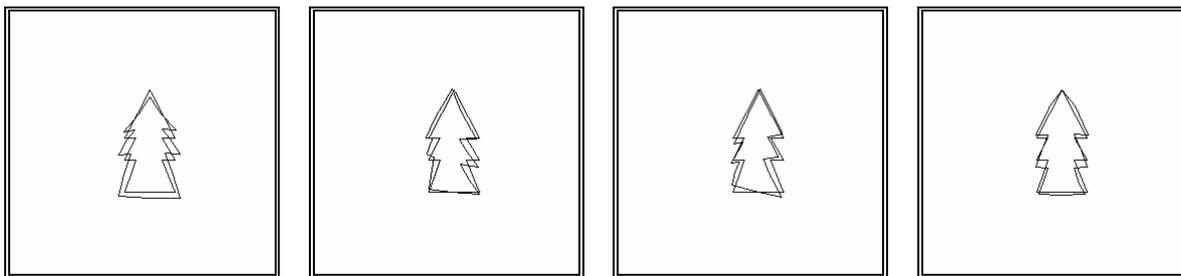


Figura 279 - 33º modo de vibração.

Figura 280 - 34º modo de vibração.

Figura 281 - 35º modo de vibração.

Figura 282 - 36º modo de vibração.

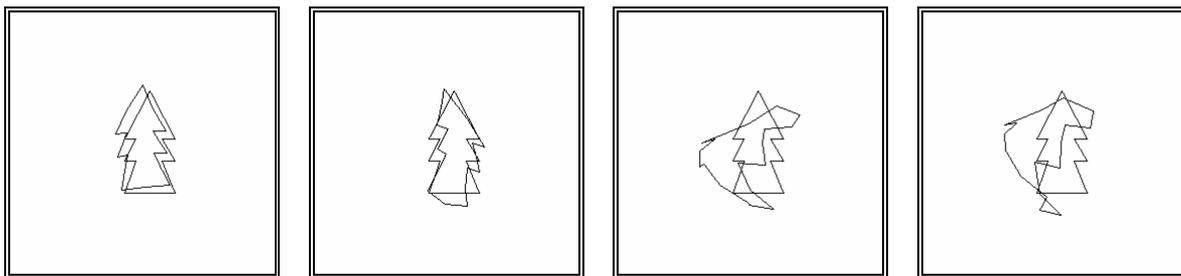


Figura 283 - Soma dos três primeiros modos de vibração.

Figura 284 - Soma do 4º, ..., 10º modo de vibração.

Figura 285 - Soma do 11º, ..., 36º modo de vibração.

Figura 286 - Soma de todos os modos de vibração.

Results for Modal Analysis with the Sclaroff's model in testec

With:

- Gaussian functions Sigma: 45.464038.
- Material density: 0.000001.
- Young modulus: 2.430000.
- Poisson ratio: 0.450000.
- Scale pixel/units used: 1.000000.

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-36) of (36):

+19.410687 +23.798576 +24.533526 +29.103272 +30.725796 +31.395477 +33.097705 +37.604779 +39.447193 +40.048137
 +43.988465 +44.475486 +45.912018 +46.485432 +48.945290 +58.159689 +62.036656 +69.707015 +74.276788 +76.834164
 +79.648777 +85.662304 +86.878230 +92.860966 +94.784740 +102.477699 +107.138868 +112.445830 +120.839018
 +136.278328 +140.359881 +141.934509 +143.468006 +147.160541 +148.340230 +158.427056

Figura 287 - Frequências de vibração obtidas.

Como se pode depreender dos resultados apresentados o contorno torna-se mais rígido nas zonas onde a concentração de *pixels* é superior; funcionando estes *pixels* como “amarras” do contorno.

7.2 - Emparelhamento, Deslocamentos Nodais/Modais, Energia de Deformação

Na Figura 288 está representado um contorno constituído por 36 *pixels* que se pretendem emparelhar com os *pixels* do contorno representado na Figura 289. O contorno 2 foi obtido a partir do contorno 1 através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 20º em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um escalonamento relativamente à origem de 0.75. Na Figura 290 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

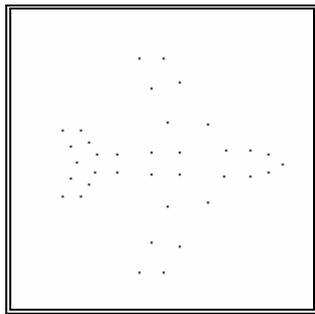


Figura 288 - Contorno 1.

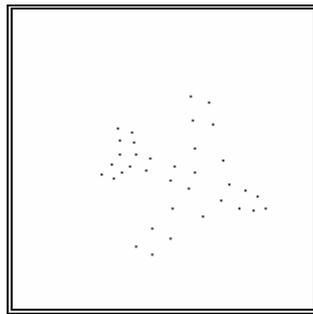


Figura 289 - Contorno 2.

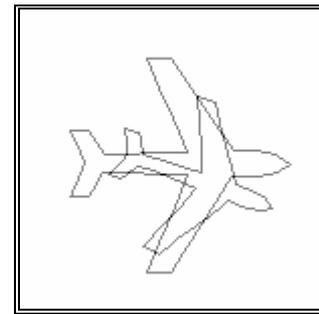


Figura 290 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento adoptou-se por borracha para o material virtual do modelo finito, utilizou-se $\sigma_1=12.9$ e $\sigma_2=9.7$, iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes, e consideraram-se todos os modos de vibração. Obtiveram-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica¹² do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.06° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.07 e segundo o eixo y de 9.89 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75. Na Figura 291 estão representados¹³ os emparelhamentos obtidos; na Figura 292 os mesmos emparelhamentos após a aplicação¹⁴ ao contorno 1 da rotação em torno da origem e da translação determinadas, e na Figura 293 estão representados após a aplicação da transformação geométrica determinada. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida, quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos. O valor da energia de deformação obtido foi igual a 24.23 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a 0.27.

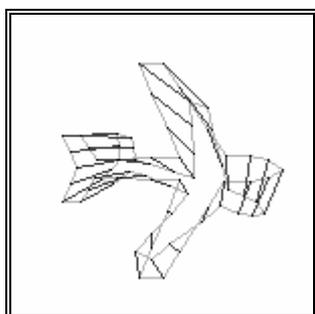


Figura 291 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 12.9$, $\sigma_2 = 9.7$ e considerando todos os modos de vibração.

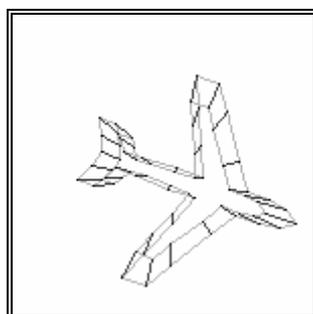


Figura 292 - ... após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

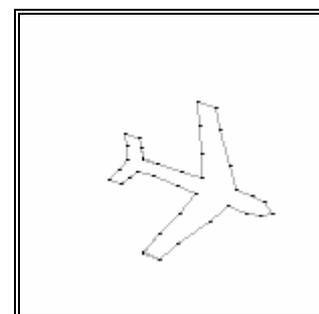


Figura 293 - ... após aplicação ao contorno 1 da transformação geométrica determinada.

Os mesmos resultados foram obtidos quando se consideram apenas 25% dos modos de vibração (18 modos). Considerando-se apenas 10% dos modos (7 modos) obtiveram-se 30 emparelhamentos correctos e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2

¹² Deve-se notar que existem erros associados à transformação geométrica determinada devido ao facto de estarmos em presença de coordenadas discretas. O método utilizado para a determinação da transformação geométrica entre os dois contornos está descrito em [Horn, 1987; Tavares, 1997].

¹³ Nas figuras de resultados os *pixels* que constituem os contornos aparecem ligados por intermédio de segmentos de recta de forma a facilitar a análise das mesmas.

¹⁴ A transformação geométrica é aplicada ao contorno 1 apenas para a sua representação nas figuras.

constituída por uma rotação de 18.26° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 47.84 e segundo o eixo y de 9.60 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.76. Na *Figura 297* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação em torno da origem e da translação determinadas. A energia de deformação determinada foi de 61.79 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 36.71. Os deslocamentos nodais obtidos para o contorno 1 por minimização da energia de deformação estão representados¹⁵ na *Figura 295*. Na *Figura 296* estão representados os dois contornos após determinação dos deslocamentos nodais para o contorno 1 por minimização da energia de deformação após ser aplicada ao contorno 1 a transformação rígida determinada.

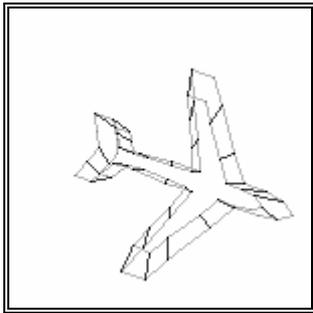


Figura 294 - Emparelhamentos obtidos, com $\sigma_1 = 12.9$, $\sigma_2 = 9.7$ e considerando 10% dos modos de vibração, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

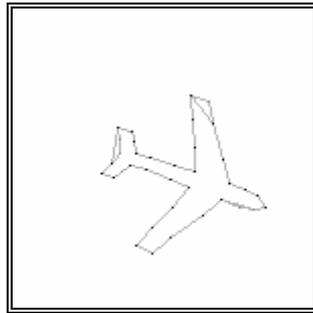


Figura 295 - Contornos após determinação dos deslocamentos nodais do contorno 1 obtidos por minimização da energia de deformação.

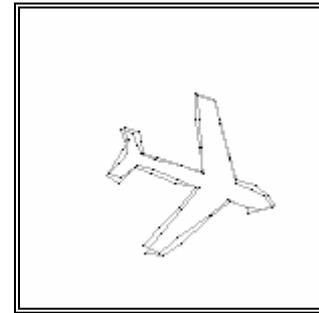


Figura 296 - Contornos após aplicação da transformação rígida determinada e dos deslocamentos nodais para o contorno 1 obtidos por minimização da energia de deformação.

Considerando-se apenas 25% dos modos a partir do 4º modo (inclusive) obtiveram-se 36 emparelhamentos correctos, uma transformação rígida do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.06° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.06 e segundo o eixo y de 9.88 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75. O valor da energia de deformação obtido foi de 24.23 e, após a aplicação da transformação rígida, de 0.27.

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 51.46$ e $\sigma_2 = 38.63$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e não foi possível determinar-se emparelhamentos aceitáveis quer em número quer em qualidade.

Numa terceira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 70$ e $\sigma_2 = 40$ e mais uma vez não se obtiveram resultados de emparelhamento satisfatórios quer em número quer em qualidade.

Numa quarta tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 7$ e $\sigma_2 = 4$. Considerando-se 25% dos modos de vibração e obteve-se 3 fracos emparelhamentos, *Figura 297*.

Considerando-se 75% dos modos (54 modos) obtiveram 25 emparelhamentos, sendo alguns errados, *Figura 298*, e uma transformação rígida do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.78° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 53.23 e segundo o eixo y de 11.64 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.72. O valor da energia de deformação obtido foi de 114.88 e, após a aplicação da transformação rígida, de 49.89.

¹⁵ Nestas figuras quanto mais o contorno 1 coincidir com o contorno 2 melhores os deslocamentos nodais estimados.

Considerando-se 100% dos modos obtiveram-se 35 emparelhamentos, sendo alguns errados, *Figura 299*, e uma transformação rígida do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.06°, uma translação segundo o eixo x de 50.06 e segundo o eixo y de 9.89 *pixels* e um escalonamento de 0.75. Neste caso o valor da energia de deformação determinado foi de 65.13 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 23.74.

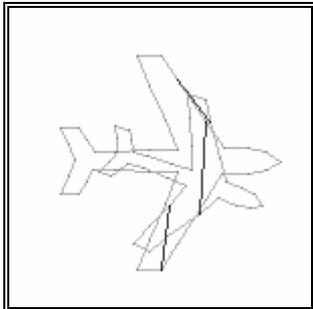


Figura 297 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1=7$, $\sigma_2=4$ e considerando 25% dos modos de vibração.

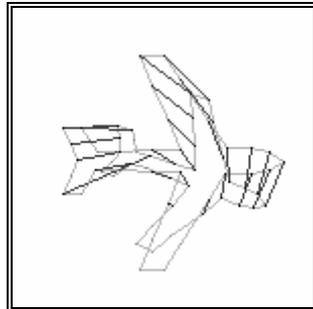


Figura 298 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1=7$, $\sigma_2=4$ e considerando 75% dos modos de vibração.

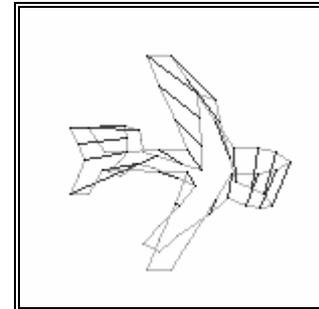


Figura 299 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1=7$, $\sigma_2=4$ e considerando todos os modos de vibração.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (25%) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos. Notou-se também que a não consideração dos modos de elevada frequência fez com que a imunidade aos detalhes finos fosse superior diminuindo-se assim pequenas perturbações existentes.

Numa segunda experiência utilizaram-se os contornos constituídos por 11 *pixels* representados na *Figura 300* e na *Figura 301*. O contorno 2 foi obtido a partir do contorno 1 através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de -15° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um escalonamento relativamente à origem de 1.25. Na *Figura 302* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

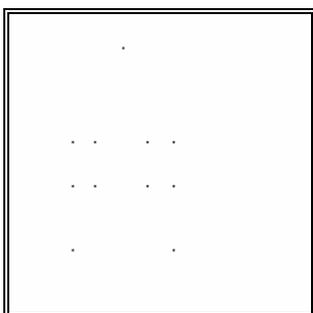


Figura 300 - Contorno 1.

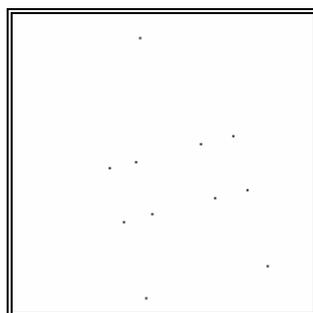


Figura 301 - Contorno 2.

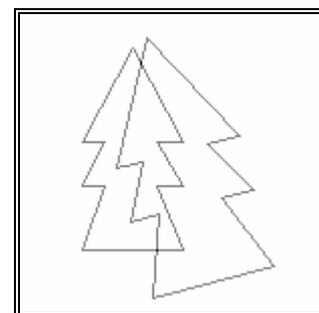


Figura 302 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento considerou-se os modelos finitos constituídos por borracha e utilizou-se $\sigma_1=45.29$ e $\sigma_2=56.76$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e consideraram-se todos os modos de vibração.

Obtiveram-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.80 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Na *Figura 303* estão representados os emparelhamentos obtidos. O valor da energia de deformação obtido foi igual a 33.33 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a 6.40 .

Considerando-se apenas 25% dos modos (os cinco primeiros modos) obteve-se emparelhamento para 7 dos 11 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 345.46° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -9.58 e segundo o eixo y de 11.35 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.22 . Os emparelhamentos obtidos estão representados na *Figura 304* e é possível verificar que um está errado. Os contornos após a aplicação dos deslocamentos nodais do contorno 1 determinados por minimização da energia com a aplicação prévia da transformação rígida estão representados na *Figura 305*.

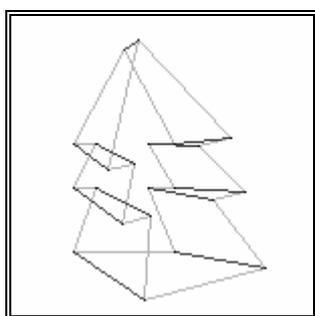


Figura 303 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 45.29$, $\sigma_2 = 56.76$ e considerando todos os modos de vibração.

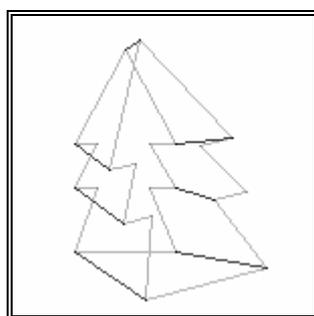


Figura 304 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 45.29$, $\sigma_2 = 56.76$ e considerando os 5 primeiros modos de vibração (25%).

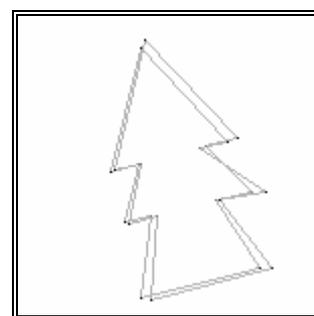


Figura 305 - ... após a aplicação dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Considerando-se 25% dos modos de vibração a partir do 4º modo (inclusive) obteve-se 10 emparelhamentos correctos, *Figura 306*, uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.21 e segundo o eixo y de 9.78 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 .

Considerando-se 50%, 75% e 100% dos modos de vibração obtiveram 100% dos emparelhamentos correctos, *Figura 307*, e uma transformação rígida constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.81 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 .

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.0001 (8 modos) obteve-se 10 emparelhamentos, *Figura 308*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 345.74° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -5.87 e segundo o eixo y de 9.75 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.23 .

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 29.36$ e $\sigma_2 = 36.81$ (iguais à média da distância entre *pixels* vizinhos adjacentes para cada contorno). Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.8 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Na *Figura 309* é possível verificar-se os emparelhamentos obtidos. Após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas obtemos a

representação para os emparelhamentos da *Figura 310*; considerando também a aplicação do escalonamento determinado obtemos a representação da *Figura 311*. O valor da energia de deformação determinado foi igual a 24.49 e, após aplicação da transformação rígida, a 0.56.

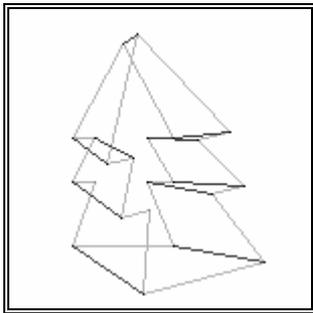


Figura 306 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 45.29$, $\sigma_2 = 56.76$ e considerando 25% dos modos de vibração a partir do 4º modo.

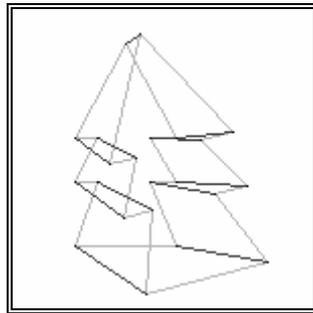


Figura 307 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 45.29$, $\sigma_2 = 56.76$ e considerando 50%, 75% e 100% dos modos de vibração.

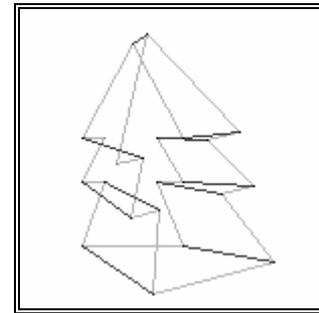


Figura 308 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 45.29$, $\sigma_2 = 56.76$ e considerando os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.0001.

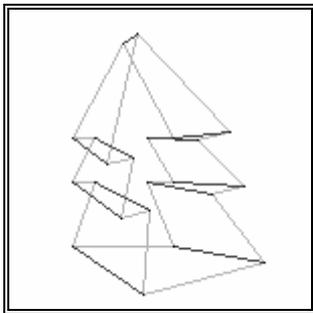


Figura 309 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 29.36$, $\sigma_2 = 38.81$ e considerando todos os modos de vibração.

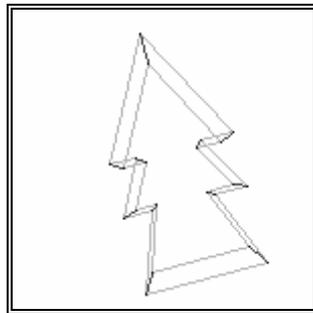


Figura 310 - ... após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

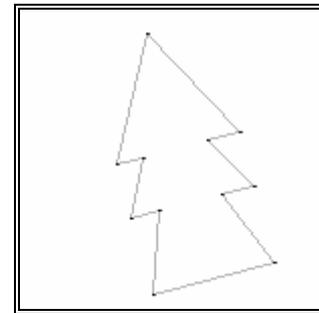


Figura 311- ... após aplicação ao contorno 1 da transformação geométrica determinada.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (os cinco primeiros modos) obteve-se os mesmos resultados para o emparelhamento e para a transformação rígida.

Resultados idênticos, quer para o emparelhamento quer para a transformação geométrica, foram obtidos considerando os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.0001 (12 modos).

Numa terceira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 14$ e $\sigma_2 = 19$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de -10.14 e segundo o eixo *y* de 9.8 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (5 modos) obtiveram-se resultados idênticos.

Entrando em consideração com apenas 25% dos modos de vibração (5 modos) a partir do 4º modo (inclusive) obtiveram-se resultados idênticos.

Numa quarta tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 80$ e $\sigma_2 = 100$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos para 8 dos 11 *pixels*, sendo 2 errados,

e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 346.99° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -4.44 e segundo o eixo y de 4.96 pixels e um escalonamento em relação à origem de 1.26 .

Considerando-se apenas 25% dos modos (os cinco primeiros) obtemos resultados de emparelhamento não satisfatórios.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre pixels adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), 25% dos modos é suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos.

Numa terceira experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 5 em 5 pixels, de um objecto real (coração) representados¹⁶ na Figura 312 (84 pixels) e na Figura 313 (79 pixels). Na Figura 314 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os pixels que os constituem ligados por segmentos de recta.

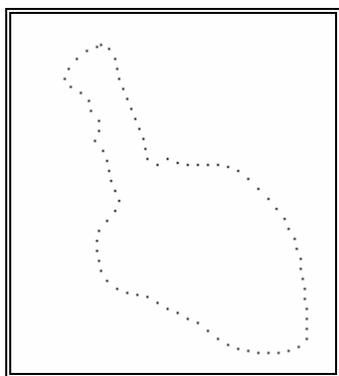


Figura 312 - Contorno 1.

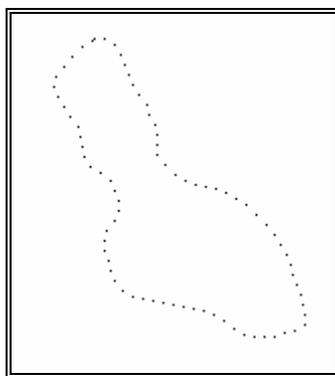


Figura 313 - Contorno 2.

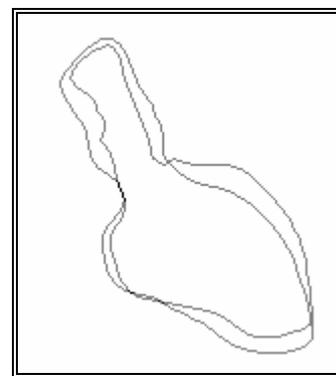


Figura 314 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento considerou-se borracha como o material virtual dos modelos finitos, utilizou-se $\sigma_1 = 76.66$ e $\sigma_2 = 74.94$ (iguais à média da distância entre todos os pixels que constituem cada contorno) e consideraram-se todos os modos de vibração; obtivemos apenas 1 emparelhamento, Figura 315.

Considerando-se apenas 25% dos modos obteve-se também apenas um emparelhamento.

Apesar de várias tentativas não foi possível determina-se resultados aceitáveis quer em número de emparelhamentos quer na qualidade destes.

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_1 = 5.45$ e $\sigma_2 = 5.53$ (iguais à média da distância entre pixels vizinhos adjacentes para cada contorno). Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos para 41 pixels, Figura 316, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 3.71° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 1.16 e segundo o eixo y de -12.94 pixels e um escalonamento em relação à origem de 0.99 . Como se observa na Figura 316 alguns dos emparelhamentos obtidos estão errados.

¹⁶ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 0.5 cm superiormente, 1.5 cm inferiormente, 1.5 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito. Estes cortes foram feitos para diminuir o espaço ocupado sem diminuir a zona de interesse em cada imagem.

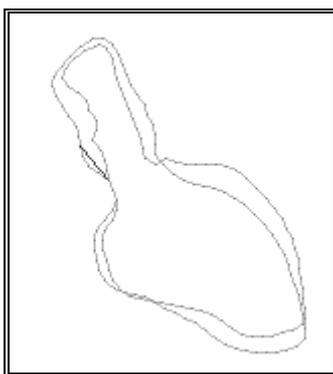


Figura 315 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 76.66$, $\sigma_2 = 74.94$ e considerando todos os modos de vibração.

Considerando-se apenas 25% dos modos (os 39 primeiros modos) obteve-se emparelhamentos para 18 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 359.75° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de -0.89 e segundo o eixo *y* de -1.71 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.98. Estes emparelhamentos estão representados na Figura 317 e, como se pode verificar, alguns emparelhamentos não são os mais correctos.

Considerando-se apenas 10% dos modos (os 15 primeiros modos) obteve-se emparelhamentos para 30 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 359.42° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 2.07 e segundo o eixo *y* de 4.28 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.96. Estes emparelhamentos estão representados na Figura 318 e são bastante satisfatórios.

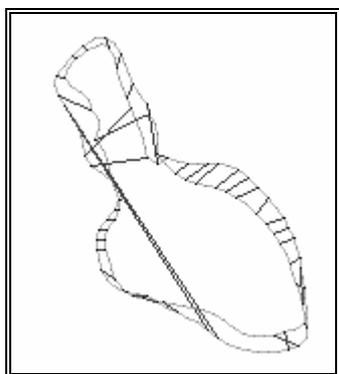


Figura 316 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 5.45$, $\sigma_2 = 5.53$ e considerando todos os modos de vibração.

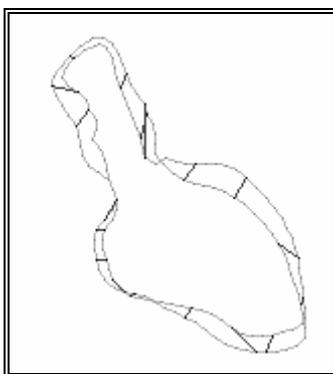


Figura 317 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 5.45$, $\sigma_2 = 5.53$ e considerando 25% dos modos de vibração.

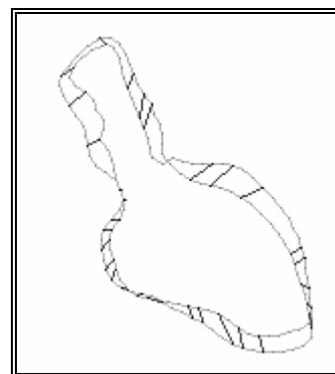


Figura 318 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 5.45$, $\sigma_2 = 5.53$ e considerando 10% dos modos de vibração.

Considerando-se apenas 3% dos modos (os 6 primeiros modos) obteve-se emparelhamentos para 42 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 358.87° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de -1.69 e segundo o eixo *y* de 3.07 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.97. Estes emparelhamentos estão representados na Figura 319 e são bastante satisfatórios. Na Figura 320 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação da transformação rígida determinada ao contorno 1. Após a aplicação dos deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, aos *pixels* do contorno 1 obtemos a representação da Figura 321. O valor da energia de deformação determinado foi igual a 48.58 e, após a aplicação da transformação rígida, a 46.23.

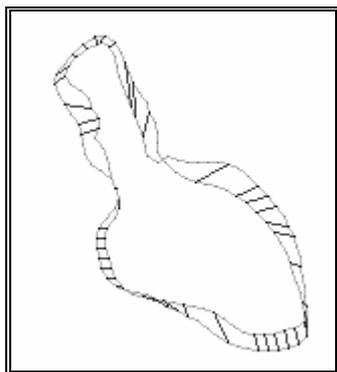


Figura 319 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_1 = 5.45$, $\sigma_2 = 5.53$ e considerando 3% dos modos de vibração.

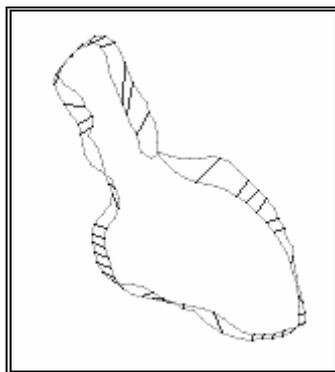


Figura 320 - ... após a aplicação da transformação rígida determinada ao contorno 1.

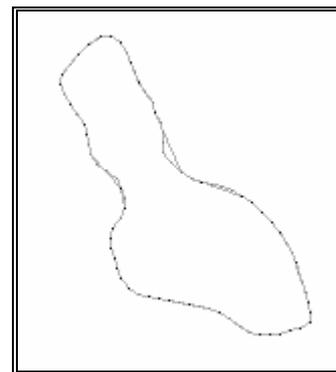


Figura 321 - Contornos 1 e 2 após a aplicação dos deslocamentos nodais ao contorno 1.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos. Da mesma, verificou-se que com valores elevados para σ_1 e σ_2 não foi possível obter-se bons emparelhamentos.

Numa quarta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real (coração) representados¹⁷ na Figura 322 (84 *pixels*) e na Figura 323 (70 *pixels*). Na Figura 324 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

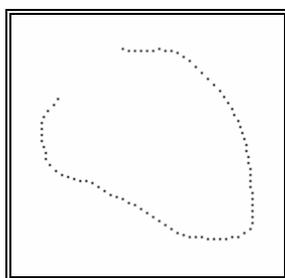


Figura 322 - Contorno 1.

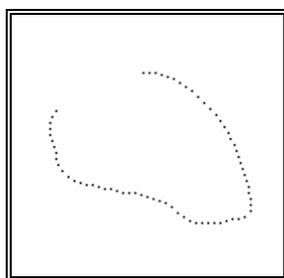


Figura 323 - Contorno 2.



Figura 324 - Contornos 1 e 2 com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha como material virtual dos modelos finitos, $\sigma_1 = 3.77$ e $\sigma_2 = 3.94$ (iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes que constituem cada contorno) e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 28 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 359.85° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 7.49 e segundo o eixo *y* de 14.02 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.90. Na Figura 325 estão representados os emparelhamentos obtidos e pode-se verificar que alguns não estão correctos.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (35 modos) obteve-se 14 emparelhamentos, Figura 326, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 358.57° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 15.46 e

¹⁷ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 2.0 cm superiormente, 1.3 cm inferiormente, 2.2 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito.

segundo o eixo y de 21.76 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.88. Desta representação verifica-se que alguns dos emparelhamentos obtidos não são os mais correctos.

Considerando-se apenas 10% dos modos de vibração (14 modos) obteve-se 17 emparelhamentos, *Figura 327*, e uma transformação geométrica geométrica constituída por uma rotação de 2.17° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 24.63 e segundo o eixo y de 15.36 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.87.

Considerando-se apenas 4% dos modos de vibração (6 modos) obteve-se 43 emparelhamentos, *Figura 328*, e uma transformação geométrica geométrica constituída por uma rotação de 4.65° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 28.55 e segundo o eixo y de 9.98 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.88.

Aplicando-se a transformação rígida determinada ao contorno I obtemos a representação para os emparelhamentos dada pela *Figura 329*. Nesta figura é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos. Na *Figura 330* estão representados os dois contornos após a aplicação aos *pixels* do contorno I dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação. O valor obtido para esta energia foi de 26.37 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 18.09.

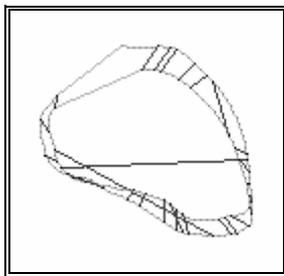


Figura 325 - Emparelhamentos obtidos considerando-se todos os modos de vibração.

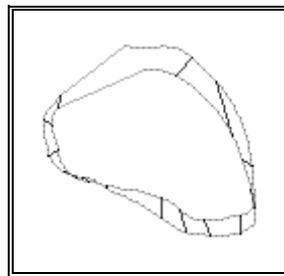


Figura 326 - Emparelhamentos obtidos considerando-se 25% dos modos de vibração.

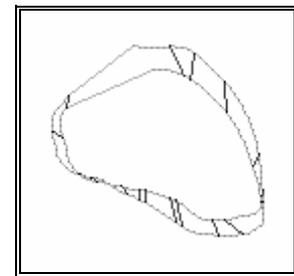


Figura 327 - Emparelhamentos obtidos considerando-se 25% dos modos de vibração.

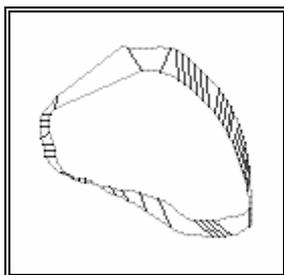


Figura 328 - Emparelhamentos obtidos considerando os 6 primeiros modos de vibração.

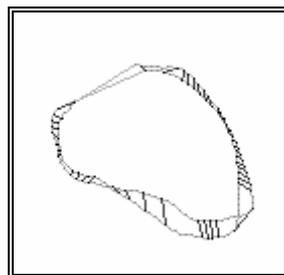


Figura 329 - ... após aplicação ao contorno I da transformação rígida determinada.

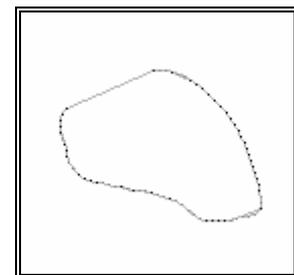


Figura 330 - ... após aplicação ao contorno I dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos.

Numa quinta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um

objecto real representados¹⁸ na *Figura 331* (78 *pixels*) e na *Figura 332* (85 *pixels*). Na *Figura 333* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

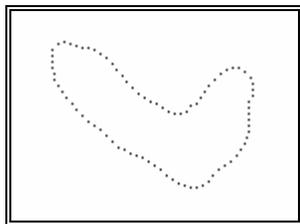


Figura 331 - Contorno 1.

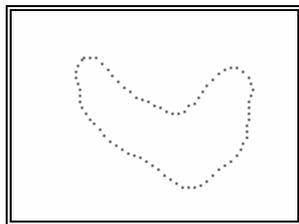


Figura 332 - Contorno 2.

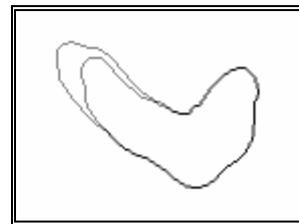


Figura 333 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se $\sigma_1=3.52$ e $\sigma_2=3.46$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno), borracha, como material virtual para a modelização por elemento finito, e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 51 *pixels*, sendo alguns errados, e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 359.99° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 24.32 e segundo o eixo *y* de 24.46 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.88. Na *Figura 334* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (39 modos) obteve-se 20 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 1.51° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 22.08 e segundo o eixo *y* de 15.10 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.91. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 335*.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (39 modos) a partir do quarto modo (inclusive) obteve-se 21 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 1.45° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 25.12 e segundo o eixo *y* de 18.09 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.89. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 336*.

Considerando-se apenas 3% dos modos de vibração (6 modos) obteve-se 48 emparelhamentos, *Figura 337*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 1.13° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 23.69 e segundo o eixo *y* de 18.53 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.89. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 340*. Aplicando-se ao contorno 1 os deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, obtemos a representação da *Figura 341*. O valor desta energia de deformação foi de 18.88 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 14.47.

¹⁸ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

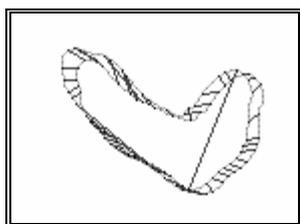


Figura 334 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração e após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

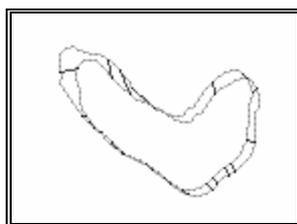


Figura 335 - Emparelhamentos obtidos, considerando 25% dos modos de vibração, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

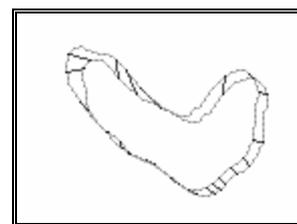


Figura 336 - Emparelhamentos obtidos, considerando 25% dos modos de vibração a partir do 4º modo, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

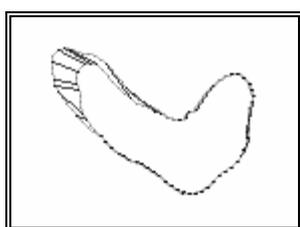


Figura 337 - Emparelhamentos obtidos, considerando 3% dos modos de vibração.

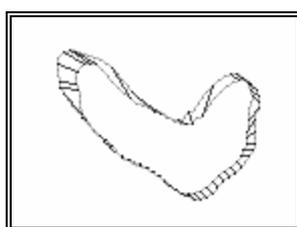


Figura 338 - ... após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

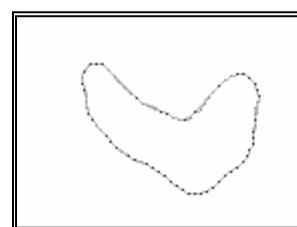


Figura 339 - ... após aplicação ao contorno 1 dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre *pixels* adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos.

Numa sexta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real representados¹⁹ na Figura 340 (64 *pixels*) e na Figura 341 (68 *pixels*). Na Figura 342 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

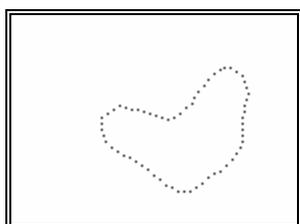


Figura 340 - Contorno 1.

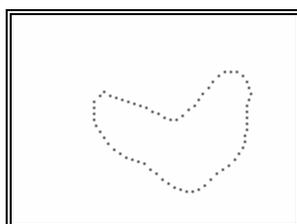


Figura 341 - Contorno 2.

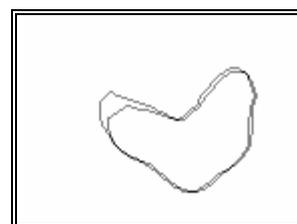


Figura 342 - Contornos 1 e 2 com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se $\sigma_1=3.42$ e $\sigma_2=3.44$ (iguais à média da distância entre os *pixels* adjacentes que constituem cada contorno) e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 48 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o

¹⁹ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

contorno 2 constituída por uma rotação de 8.52° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 21.08 e segundo o eixo y de -41.19 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.07. Na *Figura 343* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas e verifica-se que alguns estão errados.

Considerando-se apenas 4% dos modos de vibração (6 modos) obteve-se 32 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 9.30° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 23.78 e segundo o eixo y de -37.75 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.05. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 344*. Aplicando os deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, ao contorno 1 resulta a representação da *Figura 345*. O valor desta energia de deformação é de 9.83 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 8.9.

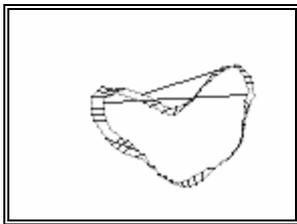


Figura 343 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

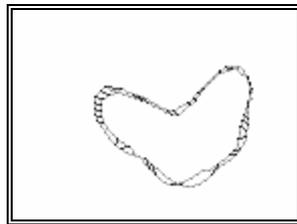


Figura 344 - Emparelhamentos obtidos considerando 4% dos modos de vibração após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

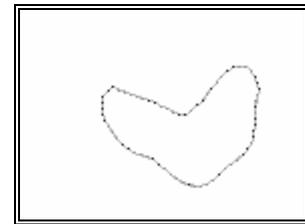


Figura 345 - Emparelhamentos obtidos considerando 4% dos modos de vibração após aplicação ao contorno 1 dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_1 e σ_2 apropriados (iguais à média da distância entre os *pixels* adjacentes que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos.

Dos resultados experimentais apresentados podemos concluir:

- Geralmente são obtidos melhores resultados de emparelhamento utilizando-se valores para σ iguais à média da distância entre os *pixels* adjacentes que constituem cada contorno;
- A utilização de valores reduzidos/elevados para os valores de σ torna impossível obter-se emparelhamentos aceitáveis;
- A não inclusão dos modos de alta frequência, em geral, favorece a obtenção de melhores emparelhamentos;
- Geralmente a não inclusão dos três primeiros modos de vibração não favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- Na grande maioria dos casos apenas os seis primeiros modos (quando o número de *pixels* é aceitável) são necessários para se obter bons resultados de emparelhamento;
- A não consideração na base modal dos modos de vibração que tenham frequências praticamente iguais geralmente não favorece os resultados de emparelhamento

obtidos;

- Geralmente os resultados determinados para a transformação rígida existente são de boa qualidade mesmo para quando o número de emparelhamentos obtidos é reduzido;
- Quando o número de bons emparelhamentos obtidos é aceitável obtemos uma boa estimativa para os deslocamentos nodais/modais pelo processo de minimização da energia de deformação;
- O valor da energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente.

Algumas experiências de emparelhamento foram realizadas nas quais eram considerados apenas pontos do interior do objecto ou em conjunto com os pontos do contorno. Destas experiências obtivemos as mesmas conclusões e verificou-se que, geralmente, a inclusão dos pontos interiores do objecto não melhora os emparelhamentos obtidos.

A título de exemplo esta representado na *Figura 346* o conteúdo do ficheiro de resultados do emparelhamento de dois contornos obtido pela implementação por nós realizada do método proposto por Sclaroff.

7.1 - Discussão dos Resultados Obtidos

7.1.1 - Influência das Propriedades do Material

No emparelhamento modal foi assumido um material isotrópico de espessura uniforme e que ambas as formas eram modeladas pelo mesmo material. Com tais considerações a forma como os parâmetros de material são escolhidos não tem influência nas correspondências obtidas.

A formulação utilizada para o elemento finito tem três parâmetros que descrevem o material: densidade ρ , módulo de elasticidade de Young E e o coeficiente de Poisson ν . Os dois primeiros escalam uniformemente as matrizes de massa e de rigidez. Alterando estes parâmetros resulta num escalonamento uniforme dos valores próprios; contudo, tal não afecta quer o ordenamento quer a forma dos modos. Sendo assim, a variação de ρ e/ou E não afecta os resultados de emparelhamento obtidos apesar de ter influência na descrição modal de cada contorno.

Contudo, alterando o coeficiente de Poisson a forma dos modos é alterada. Intuitivamente este terceiro parâmetro controla a resistência da forma ao corte. Como resultado, se duas formas tiverem diferentes valores de ν a ordem e a forma resultante para os modos pode ser alterada e assim dificultar a determinação das correspondências.

7.1.2 - Influência do Raio das Funções Gaussianas

Na formulação utilizada nas experiências considerou-se que o parâmetro σ das funções Gaussianas empregadas na interpolação eram constantes para todos os nodos de uma forma. Também foi considerado que se os dados estivessem uniformemente distribuídos era razoável considerar este parâmetro σ igual à distância média entre cada nodo e os seus vizinhos mais próximos. Com esta consideração as formas dos modos próprios são invariantes em relação à escala, apenas os modos próprios alteram-se com o escalonamento do objecto.

Results for Modal Matching with the Sclaroff's model with:

Material's density: 1.120000.

Young modulus: 0.002430.
 Poisson ratio: 0.450000.
 Gaussian functions Sigma for contour in image t: 95.455724.
 Scale pixel/units used for contour in image t: 1.000000.
 Gaussian functions Sigma for contour in image t+1: 104.891411.
 Scale pixel/units used for contour in image t+1: 1.000000.

Matrices of the contour in image t:

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+1.000000 +0.559950 +0.577551
+0.559950 +1.000000 +0.681799
+0.577551 +0.681799 +1.000000
```

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

```
+33677.811302 -6385.081707 -7915.408942 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-6385.081707 +38658.939444 -16278.351963 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-7915.408942 -16278.351963 +39225.053172 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +33677.811302 -6385.081707 -7915.408942
+0.000000 +0.000000 +0.000000 -6385.081707 +38658.939444 -16278.351963
+0.000000 +0.000000 +0.000000 -7915.408942 -16278.351963 +39225.053172
```

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

```
+0.019770 -0.008517 -0.001088 +0.002902 -0.011848 +0.007756
-0.008517 +0.043150 -0.029929 -0.011848 +0.003353 +0.005598
-0.001088 -0.029929 +0.037917 +0.007756 +0.005598 -0.009789
+0.002902 -0.011848 +0.007756 +0.034424 -0.009136 -0.019294
-0.011848 +0.003353 +0.005598 -0.009136 +0.023755 -0.005983
+0.007756 +0.005598 -0.009789 -0.019294 -0.005983 +0.030911
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):

```
+0.000454 +0.000616 +0.000644 +0.000965 +0.000983 +0.001283
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

```
+0.003111 -0.001160 +0.003304 +0.003462 -0.000001 -0.000618
-0.000674 -0.001609 +0.004703 -0.000982 -0.001537 +0.002451
-0.001520 -0.000795 +0.004675 -0.000442 +0.002499 -0.001825
-0.000630 -0.004671 -0.001042 -0.000477 -0.001939 -0.002648
+0.002410 -0.003791 -0.001088 -0.002208 +0.002674 +0.001054
-0.001752 -0.004063 -0.001506 +0.001998 +0.002230 +0.001940
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-6) of (1):

```
+0.004660
+0.007567
+0.007710
+0.004716
+0.004949
+0.004648
```

Matrices of the contour in image t+1:

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+1.000000 +0.599684 +0.711560
+0.599684 +1.000000 +0.508070
+0.711560 +0.508070 +1.000000
```

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

```
+51676.195046 -12992.055344 -24022.067767 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-12992.055344 +40565.863191 -2656.517854 +0.000000 +0.000000 +0.000000
-24022.067767 -2656.517854 +48355.666836 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +51676.195046 -12992.055344 -24022.067767
+0.000000 +0.000000 +0.000000 -12992.055344 +40565.863191 -2656.517854
+0.000000 +0.000000 +0.000000 -24022.067767 -2656.517854 +48355.666836
```

Figura 346 - Conteúdo do ficheiro de resultados obtido pela implementação do método proposto por Sclaroff.

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

```
+0.027946 -0.006163 -0.012566 -0.001800 -0.010442 +0.010926
-0.006163 +0.029287 -0.016891 -0.010442 +0.007274 +0.002061
-0.012566 -0.016891 +0.033588 +0.010926 +0.002061 -0.011059
```

```

-0.001800 -0.010442 +0.010926 +0.050439 -0.019339 -0.030237
-0.010442 +0.007274 +0.002061 -0.019339 +0.023725 +0.006540
+0.010926 +0.002061 -0.011059 -0.030237 +0.006540 +0.034501

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):

+0.000418 +0.000555 +0.000594 +0.000871 +0.000903 +0.001166

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

+0.001525 +0.003798 +0.001100 -0.000334 +0.003267 -0.000312
-0.001616 +0.003878 +0.000478 -0.002138 -0.000788 +0.002298
-0.001585 +0.003645 +0.001294 +0.002369 +0.000655 -0.002220
-0.000103 +0.001073 -0.004450 -0.001492 -0.000081 -0.002375
+0.002586 +0.001727 -0.003121 +0.002158 -0.001855 +0.000924
-0.001981 +0.000135 -0.004140 +0.000967 +0.002351 +0.000947

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-6) of (1):

+0.004251
+0.006848
+0.007056
+0.004256
+0.004549
+0.004207

Results for Modal Matching:

With:
First mode to be considered: 1.
Percentage of modes to be considered: 100.
Minimum difference if the eigenValues to be a considered mode: 0.000000.
Minimum difference to be a symmetry 0.000000.
Shape vector not normalized by areas ratio.
Maximum correlation level to be a good matching: 1.000000.
Number of matched pixels used to find the rigid transformation: 3.

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):

+0.000454 +0.000616 +0.000644 +0.000965 +0.000983 +0.001283

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

+0.003111 -0.001160 +0.003304 +0.003462 -0.000001 -0.000618
-0.000674 -0.001609 +0.004703 -0.000982 -0.001537 +0.002451
-0.001520 -0.000795 +0.004675 -0.000442 +0.002499 -0.001825
-0.000630 -0.004671 -0.001042 -0.000477 -0.001939 -0.002648
+0.002410 -0.003791 -0.001088 -0.002208 +0.002674 +0.001054
-0.001752 -0.004063 -0.001506 +0.001998 +0.002230 +0.001940

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t+1 - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):

+0.000418 +0.000555 +0.000594 +0.000871 +0.000903 +0.001166

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t+1 - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

+0.001525 -0.003798 +0.001100 +0.000334 +0.003267 -0.000312
-0.001616 -0.003878 +0.000478 +0.002138 -0.000788 +0.002298
-0.001585 -0.003645 +0.001294 -0.002369 +0.000655 -0.002220
-0.000103 -0.001073 -0.004450 +0.001492 -0.000081 -0.002375
+0.002586 -0.001727 -0.003121 -0.002158 -0.001855 +0.000924
-0.001981 -0.000135 -0.004140 -0.000967 +0.002351 +0.000947

Correlation Matrix - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

+0.000067 +0.000088 +0.000133
+0.000113 +0.000063 +0.000089
+0.000079 +0.000123 +0.000059
    
```

Figura 346 - Continuação.

Centroid of the contour in image t: (129.999972, 119.000132).
 Centroid of the contour in image t+1: (100.666600, 106.333430).
 Translation between the contours: -22.544675 along x, -44.475634 along y.
 Scale between the contours: 1.104972 along x and y.

Rotation between the contours: 8.280572.

Pixel 1 in contour t with (116, 59) matched with Pixel 1 in contour t+1 with (92, 57).
 Pixel 2 in contour t with (178, 141) matched with Pixel 2 in contour t+1 with (166, 133).
 Pixel 3 in contour t with (96, 157) matched with Pixel 3 in contour t+1 with (44, 129).

Displacements and Strain energy without rigid geometric transformation applied:

Nodal displacements: - Column Vector - (1-6) of (1):

-23.996653
 -12.008164
 -51.989652
 -2.001612
 -7.999614
 -27.996053

Modal displacements: - Column Vector - (1-6) of (1):

+3079.814627
 +3131.085563
 -5225.493813
 -3253.960849
 -7050.304626
 +2305.341734

Modes strain energy: - Column Vector - (1-6) of (1):

+0.975960
 +1.857359
 +5.668410
 +4.925323
 +24.005860
 +4.375243

Total strain energy: 41.808155

Figura 346 - Continuação.

Se as distâncias entre os nodos variam consideravelmente, então pode ser necessário utilizar raios variáveis para os interpoladores Gaussianos de forma a evitar modelos de elementos finitos mal condicionados.

7.1.3 - Influência do Limiar de Emparelhamento

Das várias experiências realizadas o valor do limiar para considerar um dado emparelhamento entre dois nodos de duas formas como aceitável não teve influência sobre a qualidade dos emparelhamentos obtidos. Assim a condição do valor de afinidade do emparelhamento ser mínimo na sua linha e na sua coluna parece ser suficiente para classificar o referido emparelhamento como aceitável ou não.

7.1.4 - Robustez ao Ruído e a Dados Perdidos

Das experiências por nós realizadas e das reportadas por Sclaroff em [Sclaroff, 1993; 1994, 1994b, 1995, 1995b] o emparelhamento modal é relativamente robusto em relação ao ruído. Esta robustez é o resultado directo da estabilidade verificada na forma dos modos de baixa ordem na presença de ruído e de deformações não rígidas. Esta propriedade também se verifica quando ocorre a oclusão de pequenas parcelas dos objectos.

Contudo o emparelhamento modal apresenta limitações em casos em que ocorre a oclusão de grandes parcelas dos objectos. Por exemplo, se uma forma é dividida ao meio por oclusão

a implementação actual do método de Sclaroff irá tratar a único objecto como duas formas independentes e deste modo considerar dois conjuntos de modos próprios. Além do mais, os modos próprios não podem ser utilizados para emparelhar parcelas de uma forma com uma única forma. Por exemplo, na implementação corrente será difícil identificar uma pessoa utilizando-se apenas os dados da metade superior da silhueta, pois os modos da metade de uma forma podem ser bastante diferentes dos modos para a forma global. Para se resolver este problema o algoritmo necessita de utilizar alguma combinação das medidas globais (modal) com medidas locais (características) de maneira a emparelhar subestruturas distintas de uma mesma forma.

7.1.5 - Robustez há Rotação

Como foi descrito pode-se tornar o emparelhamento e a descrição modal invariante face às rotações planas. Sclaroff verificou nas suas experiências, [Sclaroff, 1993; 1994, 1994b, 1995, 1995b], que o emparelhamento modal é robusto para rotações não planas até $\pm 15^\circ$. De facto o emparelhamento modal em vários casos obtém bons resultados mesmo quando a rotação envolvida chega a ser de 45° . Contudo no geral as correspondências obtidas tendem a se degradar para rotações não planas superiores a $\pm 15^\circ$; pois tais rotações alteram radicalmente o cociente do aspecto global para a forma. Tal causa a alteração da sequência e da forma dos modos de baixa ordem à medida que o cociente do aspecto se altera.

7.1.6 - Concentrações de Nodos

Verificou-se que em zonas onde ocorrem concentrações de nodos do modelo de elementos finitos o número de emparelhamentos obtidos com êxito é geralmente superior. Assim nos casos para os quais é difícil obter-se emparelhamentos aceitáveis verificou-se que no geral se aumentasse a concentração de *pixels* nas zonas de elementos característicos obtinha-se emparelhamentos mais aceitáveis e em maior número.

7.1.7 - Consideração da Distância ao Longo do Contorno

Verificou-se que por vezes quando se pretende emparelhar os *pixels* que constituem dois contornos e estes apresentam zonas bastante distintas obtemos melhores resultados se diminuirmos a influência dos *pixels* mais distantes. Isto pode ser conseguidos por duas maneiras: diminuindo-se o valor do parâmetro σ , o que implica efeitos globais que podem ser indesejáveis; ou a consideração da distância ao longo do contorno tal como é descrita no ponto 4.5.

7.1.8 - Limitações do Método

7.1.8.1 - Valores Próprios Múltiplos e Simetrias

Por vezes acontece que um par de modos apresenta valores próprios praticamente iguais. Tal é particularmente verificado nos modos próprios de baixa ordem de formas simétricas e de formas cujo o cociente do aspecto é quase igual à unidade. Na implementação por nós realizada, de forma semelhante à realizada por Sclaroff, tais modos podem ser excluídos pois implicariam emparelhamentos no subespaço modal; contudo verificou-se na prática que no geral tal exclusão não necessita de ser efectuada.

Valores próprios múltiplos são indicadores de simetrias. Assim, podemos utilizar esta informação para detectar quando pode existir mais do que uma correspondência válida para a

forma. O caso mais severo de tal ocorrência é o do quadrado (quatro alinhamentos possíveis) ou o do círculo (um número infinito de alinhamentos possíveis).

O emparelhamento modal pode ser utilizado para emparelhar formas espelhadas se a formulação invariante há rotação for utilizada. Simetrias de reflexão necessitam de ser tratadas como um caso especial durante a fase de emparelhamento. O alinhamento correcto para uma forma espelhada será aquele que necessitara de menos deformação, pois não requererá que o objecto se dobra sobre si mesmo. No estado actual da implementação por nós realizada as simetrias são resolvidas pela intervenção do utilizador e verifica-se, como seria de esperar, que a influência da correcta determinação do sinal de cada modo nos resultados de emparelhamento é tanto mais elevada quanto mais baixa é a frequência do modo.

7.1.8.2 - Topologia e Modos de Baixa Ordem

Se uma mudança na topologia acontece em grande escala pode, por vezes, afectar de forma adversa a performance obtida para o emparelhamento. Tal é devido à alteração, imposta por grandes diferenças da topologia, das formas dos modos de baixa ordem utilizados no emparelhamento modal fazendo com que seja difícil emparelhar formas similares mas com topologias diferentes. Por outro lado, diferenças de topologia em pequena escala têm pequena ou nenhuma influência nos modos de baixa ordem e assim, nestes casos, a performance obtida no emparelhamento permanece inalterada.

No geral, se a diferença de topologia entre duas formas ocorre numa escala igual ou inferior ao raio utilizado para as funções de base σ (por exemplo, pequenas fendas ou pequenos buracos) então o emparelhamento modal irá funcionar correctamente: as funções de base são suficientemente largas para suavizar as fendas. Contudo se as fendas forem largas, o emparelhamento modal necessita de ser complementado com um algoritmo local de determinação de correspondência.

8 - Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros

Nesta comunicação é apresentado um método, inicialmente proposto por Sclaroff, para a determinação da correspondência entre os *pixels* que constituem dois objectos. Este método começa por construir um modelo de elementos finitos para cada objecto e determina as correspondências por análise dos deslocamentos dos *pixels* no espaço modal de cada modelo. Deslocamentos idênticos nos dois espaços modais indicam que os *pixels* se devem corresponder.

Um método para a determinação dos deslocamentos nodais e modais também é apresentado nesta comunicação. Este método, proposto por Sclaroff, realiza esta determinação por minimização da energia de deformação. O valor desta energia pode ser posteriormente para identificar objectos semelhantes.

Uma introdução breve ao método dos elementos finitos e à análise modal também é apresentada nesta comunicação.

Resultados experimentais obtidos por uma implementação por nós realizada do método descrito são apresentados e verifica-se que geralmente são obtidos bons resultados no estabelecimento dos emparelhamentos. Da mesma forma, verifica-se que os deslocamentos nodais e modais, obtidos por minimização da energia de deformação, são geralmente de boa qualidade conseguindo-se assim aproximar as formas de dois objectos utilizando-se os emparelhamentos obtidos e princípios físicos. Também se verificou que o valor da energia de deformação descreve de forma adequada a deformação existente e a similaridade dos objectos.

O método apresenta contudo algumas limitações, como por exemplo: a não adequação para os casos nos quais os objectos se dividam ou se fundam; nos casos de elevadas simetrias torna-se complicado obter os emparelhamentos mais correctos; o tempo de computação exigido pode ser elevado, particularmente quando o número de *pixels* a considerar é alto, o que pode ser uma desvantagem deste método nos casos onde a rapidez se torne imprescindível.

No ponto seguinte são apresentadas algumas perspectivas de desenvolvimentos futuros. Pela nossa parte, estamos particularmente confiantes na inclusão na modelação do nível de intensidade como terceira coordenada de forma a adaptar este método à aplicação que actualmente estamos em estudo. Esta aplicação prende-se com imagens em sequências de pedobarigrafia nas quais o nível de intensidade está fortemente correlacionado com a pressão exercida pelo pé em estudo ao caminhar sobre a “área sensora”.

8.1 - Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros

8.1.1 - Descritores Modais Treinados

É possível treinar o sistema para seleccionar um subconjunto pesado de modos que são cruciais para uma categoria particular de objectos ou quando se trata de uma aplicação particular. Tal pode ser obtido pelo cálculo das componentes principais para a deformação da forma verificada num conjunto de treino. Estas variações principais, específicas à categoria ou à aplicação, podem ser posteriormente utilizadas para seleccionar um subconjunto de modos de deformação que possam ser utilizados para capturar adequadamente a variação verificada no conjunto de treino.

O ajustamento pode ser determinado pela projecção das componentes principais no espaço modal geral. Deste modo, pode ser verificado que as componentes principais podem ser distribuídas por algum subconjunto das vibrações modais. A quantidade de cada modo de vibração necessária para obter-se esta projecção pode ser utilizada para pesar o quanto cada modo de vibração é considerado como importante para o emparelhamento num dado contexto ou categoria.

8.1.2 - Actualização Recursiva dos Parâmetros Físicos do Modelo

Um modelo modal pode ser recursivamente refinado de forma a capturar as propriedades do material do objecto que tem vindo a ser considerado [Pentland, 1989]. Supondo-se que temos um conjunto de vectores próprios, ou seja modos de vibração, que descrevem como uma dada forma protótipo se deforma sobre condições gerais - é assumido certas propriedades de material: material isotrópico, elasticidade, coeficiente de Poisson, e massa. A matriz de rigidez para do elemento finito pode ser actualizada de forma a incorporar novas observações assim que estas são disponíveis. Trabalho similar no sentido de combinar observações com o emparelhamento modal foi realizado por Cootes [Cootes, 1995].

8.1.3 - Inclusão do Nível de Cinzento nos Modelos 2D

Em vez de ser determinar uma representação da forma de um objecto e se considerar em separado a aparência, dada pela intensidade, de cada um dos seus *pixels* pode ser apropriado construir um modelo combinado. Modelos modais tridimensionais podem ser utilizados para representar dados em imagens em termos das componentes (x,y,i) , onde i representa a intensidade da imagem para o *pixel* localizado em (x,y) . Contudo, algum cuidado deverá ser necessário na utilização de dados de orlas, pois os valores de intensidade nos pontos das orlas

tendem a ser instáveis [Sclaroff, 1995].

Tal problema pode ser evitado pela utilização de uma formulação alternativa na qual a informação da intensidade na imagem pode ser incluída no modelo pela variação da função de suporte do elemento finito $s(X)$ bidimensional. Tal procedimento tem o efeito de variar a espessura da forma baseada no brilho na imagem ao longo da mesma.

A abordagem de incluir o nível de intensidade na modelação é utilizada em [Cootes, 1993, 1993a, 1994; Moghaddam, 1996; Nastar, 1995] e esperamos que possa a ser de grande utilizada em imagens de pedobarigrafia, nas quais o nosso estudo futuro se irá concentrar, e nas quais o nível de intensidade está directamente relacionado com a pressão do pé em estudo [Tavares, 1997b].

8.1.4 - Várias Gamas de Modos

Nas várias experiências desenvolvidas verificou-se que, por vezes, se obtêm conjuntos distintos de bons emparelhamentos para diferentes gamas de modos. Assim podemos concluir que, em certas aplicações, os emparelhamentos poderão ser melhorados se não forem obtidos utilizando-se apenas uma única gama mas através da contribuição ponderada de diferentes gamas de modos.

8.1.5 - Melhoramento do Processo de Determinação das Correspondências

Se os emparelhamentos forem determinados na matriz de afinidade por um processo que minimiza o erro do estabelecimento das correspondências entre os *pixels* dos dois objectos de forma global, como por exemplo minimizando o caminho percorrido por todos os *pixels*, poderemos obter melhores resultados de emparelhamento. Desta forma, diminui-se a possibilidade de não emparelhar um determinado *pixel* apenas porque a informação local faz com tal se torne impossível.

Este processo também poderá ser utilizado para permitir uma correspondência de um para vários e de vários para um o que em certas aplicações pode ser o desejável.

Agradecimentos

Agradeço à Junta Nacional de Investigação Científica a bolsa de doutoramento que me concedeu (referência: BD/3243/94 - PRAXIS XXI).

Bibliografia

[Bathe, 1996] - Klaus-Jürgen Bathe
FINITE ELEMENT PROCEDURES
PRENTICE HALL - 1996

[Branco, 1985] - Carlos A. G. de Moura Branco
MECÂNICA DOS MATERIAIS
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN – 1985

[BRO-NIELSEN, 1996] - BRO-NIELSEN

[Chapra, 1988] - *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*
NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS
MCGRAW-HILL - 1988

[Cohen, 1991] - *Laurent D. Cohen*
ON ACTIVE CONTOUR MODELS AND BALLOONS
CVGIP: IMAGE UNDERSTANDING, VOL. 53, Nº 2, MARCH, PP. 211-218, 1991

[Cootes, 1993] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
ACTIVE SHAPE MODEL SEARCH USING GREY-LEVEL MODELS: A QUANTITATIVE EVALUATION
PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE (ED. J. ILLINGWORTH), BMVA PRESS, PP. 639/648 - 1993

[Cootes, 1993a] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
A UNIFIED APPROACH TO CODING AND INTERPRETING FACE IMAGES
PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE (ED. J. ILLINGWORTH), BMVA PRESS, PP. 639/648 - 1993

[Cootes, 1994] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
MODELLING OBJECT APPEARANCE USING THE GREY-LEVEL SURFACE
PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE, PP. 479/488 - 1994

[Cootes, 1995] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
COMBINING POINT DISTRIBUTION MODELS WITH SHAPE MODELS BASED ON FINITE ELEMENT ANALYSIS
IMAGE AND VISION COMPUTING VOL. 13 Nº 5 PP. 403/410 - JUNE 1995

[Foley, 1991] - *Foley, vanDam, Feiner, Hughes*
COMPUTER GRAPHICS PRINCIPLES AND PRACTICE
ADDISON WESLEY 12110 - 1991 SECOND EDITION

[Hall, 1993] - *Ernest L. Hall*
FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF ROBOT VISION
SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII (1993) - 321/333

[Horn, 1987] - *Berthold K. P. Horn*
CLOSED-FORM SOLUTION OF ABSOLUTE ORIENTATION USING UNIT QUATERNIONS
JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA A, VOL. 4, 629/642, APRIL 1987

[Kass, 1988] - *Michael Kass, Andrew Witkin, Demetri Terzopoulos*
SNAKES: ACTIVE CONTOUR MODELS
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 321-331 (1988)

[Kelly, 1993] - *S. Graham Kelly*
FUNDAMENTALS OF MECHANICAL VIBRATIONS
MCGRAW-HILL - 1993

[**Martin, 1998**] - *J. Martin, Alex Pentland, Stan Sclaroff, R. Kikinis*
CHARACTERIZATION OF NEUROPATHOLOGICAL SHAPE DEFORMATIONS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 20, Nº 3, FEBRUARY
1998

[**Maybeck, 1979**] - *Peter S. Maybeck*
STOCHASTIC MODELS, ESTIMATION, AND CONTROL - Volume I
MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING - VOLUME 141
ACADEMIC PRESS - 1979

[**Meirovitch, 1986**] - *Leonard Meirovitch*
ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS
MCGRAW-HILL - 1986

[**Moghaddam, 1996**] - *Baback Moghaddam, Chahab Nastar, Alex P. Pentland*
BAYESIAN FACE RECOGNITION USING DEFORMABLE INTENSITY SURFACES
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 371 - 1996

[**Nastar, 1994**] - *Chahab Nastar*
**PHD THESIS: MODELES PHYSIQUES DEFORMABLES ET MODES VIBRATOIRES POUR
L'ANALYSE DU MOUVEMENT NON-RIGIDE DANS LES IMAGES MULTIDIMENSIONNELLES**
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES - 1994

[**Nastar, 1995**] - *Chahab Nastar, Alex P. Pentland*
MATCHING AND RECOGNITION USING DEFORMABLE INTENSITY SURFACES
IEEE - APRIL 1995

[**Pentland, 1989**] - *Alex Pentland, Jonh Williams*
PERCEPTION OF NON-RIGID MOTION INFERENCE OF SHAPE, MATERIAL AND FORCE
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 113, 1989

[**Pentland, 1989a**] - *Alex Pentland, Jonh Williams*
GOOD VIBRATIONS: MODAL DYNAMICS FOR GRAPHICS AND ANIMATION
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 115, 1989

[**Pentland, 1990**] - *Alex Pentland*
AUTOMATIC EXTRACTION OF DEFORMABLE PART MODELS
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 4, 107-126, 1990

[**Pentland, 1991**] - *Alex Pentland, Stan Sclaroff*
CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR PHYSICALLY BASED SHAPE MODELING AND RECOGNITION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, Nº 7, JULY 1991

[**Press, 1992**] - *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*
NUMERICAL RECIPES - THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - 1992 SECOND EDITION

[**Sclaroff, 1993**] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 201 - MAY 1993

[Sclaroff, 1994] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
OBJECT RECOGNITION AND CATEGORIZATION USING MODAL MATCHING
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 267 - 1994

[Sclaroff, 1994a] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
PHYSICALLY-BASED COMBINATIONS OF VIEWS: REPRESENTING RIGID AND NON RIGID MOTION
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 273, NOVEMBER 1994

[Sclaroff, 1994b] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
ON MODAL MODELING FOR MEDICAL IMAGES: UNDERCONSTRAINED SHAPE DESCRIPTION AND DATA COMPRESSION
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 275 - 1994

[Sclaroff, 1995] - **Stanley Edward Sclaroff**
PHD THESIS: MODAL MATCHING: A METHOD FOR DESCRIBING, COMPARING, AND MANIPULATING DIGITAL SIGNALS
MIT - 1995

[Sclaroff, 1995a] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*
MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 95-008, 1995

[Seegerlind, 1984] - *Larry J. Seegerlind*
APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS
JOHN WILLEY & SONS, INC. - 1984

[Shapiro, 1991] - *Larry Shapiro*
REPORT: TOWARDS A VISION-BASED MOTION FRAMEWORK
ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE
OXFORD UNIVERSITY - MAY 25, 1991

[Shapiro, 1992] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*
A MODAL APPROACH TO FEATURE-BASED CORRESPONDENCE
ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE
OXFORD UNIVERSITY - 1992

[Shapiro, 1992a] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*
FEATURE-BASED CORRESPONDENCE: AN EINGENVECTOR APPROACH
BUTTERWORTH-HEINEMANN LTD, VOL 10 NO 5 - JUNE 1992

[Syn, 1995] - **N. H-M. Syn, R. W. Prager**
FEM EIGENMODES AS SHAPE FEATURES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT N° 211 - 1995

[Syn, 1995a] - *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
BAYESIAN REGISTRATION OF MODELS USING FEM EIGENMODES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT N° 213 - 1995

[Tavares, 1995] - *João Manuel R. S. Tavares*

MASTER THESIS: OBTENÇÃO DE ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE MOVIMENTO DE CÂMARA

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1997] - *João Manuel R. S. Tavares*

INTERNAL REPORT: APRESENTAÇÃO DE UM MÉTODO PARA A DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO RÍGIDA ENTRE DOIS CONTORNOS CONSTITUÍDOS POR *PIXELS*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1997a] - *João Manuel R. S. Tavares*

INTERNAL REPORT: APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE *PIXELS* DE DOIS CONTORNOS NÃO RÍGIDOS

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1997b] - *João Manuel R. S. Tavares*

INTERNAL REPORT: ESTUDO DE DOIS MODELOS PARA SEGUIMENTO EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1998] - *João Manuel R. S. Tavares*

INTERNAL REPORT: INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1998

[Timoshenko, 1970] - *Stephen. P. Timoshenko, J. N. Goodier*

THEORY OF ELASTICITY

MCGRAW-HILL - 1970

[Timoshenko, 1982] - *Stephen. P. Timoshenko, James E. Gere*

MECÂNICA DOS SÓLIDOS - VOL. I E II

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA - 1982

1 - Introdução	1
1.1 - A Ideia Base do Método de Sclaroff	1
2 - Método dos Elementos Finitos	5
3 - Análise Modal	6
4 - Determinação das Matrizes de Massa e de Rigidez para o Modelo de Sclaroff	8
4.1 - Interpoladores Gaussianos	8
4.2 - Para Elemento Bidimensional com Suporte Infinito	10
4.3 - Para Elemento Bidimensional com Suporte Infinito	12
4.4 - Para Elemento Tridimensional	13
4.5 - Para Modelo de Contorno	16
5 - Determinação dos Emparelhamentos	17
5.1 - Para Elementos Bidimensionais	17
5.1.1 - Casos com Elevada Rotação	20
5.2 - Para Elementos Tridimensionais	21
5.3 - Elementos com Múltipla Resolução	21
6 - Alinhamento de Objectos, Comparação e Descrição	22
6.1 - Determinação das Deformações	22
6.2 - Solução Dinâmica: <i>Morphing</i>	25
6.3 - Na Presença de Rotações Elevadas	25
6.4 - Comparação de Objectos	26
7 - Resultados Experimentais	28
7.1 - Análise Modal do Modelo Finito	28
7.2 - Emparelhamento, Deslocamentos Nodais/Modais, Energia de Deformação	57
7.1 - Discussão dos Resultados Obtidos	70
7.1.1 - Influência das Propriedades do Material	70
7.1.2 - Influência do Raio das Funções Gaussianas	70
7.1.3 - Influência do Limiar de Emparelhamento	73
7.1.4 - Robustez ao Ruído e a Dados Perdidos	73
7.1.5 - Robustez há Rotação	74
7.1.6 - Concentrações de Nós	74
7.1.7 - Consideração da Distância ao Longo do Contorno	74
7.1.8 - Limitações do Método	74
7.1.8.1 - Valores Próprios Múltiplos e Simetrias	74
7.1.8.2 - Topologia e Modos de Baixa Ordem	75
8 - Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros	75
8.1 - Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros	76
8.1.1 - Descritores Modais Treinados	76
8.1.2 - Actualização Recursiva dos Parâmetros Físicos do Modelo	76
8.1.3 - Inclusão do Nível de Cinzento nos Modelos 2D	76
8.1.4 - Várias Gamas de Modos	77
8.1.5 - Melhoramento do Processo de Determinação das Correspondências	77
Agradecimentos	77
Bibliografia	77