

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia



*Análise de Movimento de Corpos
Deformáveis usando Visão
Computacional*

João Manuel Ribeiro da Silva Tavares

Julho - 2000

Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional

Tese submetida ao Departamento de Engenharia Electrotécnica
e de Computadores para satisfação parcial dos requisitos do
Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e de
Computadores

João Manuel Ribeiro da Silva Tavares

Licenciado em Engenharia Mecânica pela Faculdade
de Engenharia da Universidade do Porto (1992)

Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (1995)

Orientador

A. Jorge Padilha

Prof. Associado do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de
Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Julho - 2000

J. Tavares

Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional

Julho - 2000

Agradecimentos

Ao Prof. A. Jorge Padilha por todo o apoio prestado ao longo da minha dissertação de Mestrado e, especialmente, ao longo desta tese; nomeadamente, pela sua orientação e total disponibilidade sempre demonstrada e pelo seu significativo incentivo e contínuo exemplo.

Aos Prof. Ana Maria Mendonça, Aurélio Campilho, Jorge Alves e Miguel Pimenta Monteiro, por todo o apoio prestado.

Ao Carlos Felgueiras, ao Jorge Barbosa e ao Miguel Velhote, por todo o apoio, companheirismo e pela partilha de algumas ideias e conselhos.

À Tânia Pinto e ao Paulo Vieira pela colaboração na Plataforma de Desenvolvimento e Ensaio.

Aos restantes investigadores e colaboradores do Instituto de Engenharia Biomédica pelo excelente ambiente de trabalho no qual estou inserido deste a minha dissertação de Mestrado.

Aos Prof. Alex Pentland, Berthold K. P. Horn, Chahab Natar, Larry Shapiro e Stan Sclaroff, pelo envio de alguns dos seus artigos e pela disponibilidade demonstrada.

À Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica pela Bolsa de Mestrado, atribuída ao abrigo do Programa Ciência com a ref. BM / 3258 / 92 - RM, e pela Bolsa de Doutoramento, atribuída ao abrigo do Programa Praxis XXI com a ref. BD / 3243 / 94.

Ao Instituto de Engenharia Biomédica pelos recursos utilizados ao longo desta tese.

À minha família, pais e irmã, e à Cláudia pelo carinho, compreensão, paciência, incentivo,

**A TODOS AQUELES QUE TORNARAM
ESTA PUBLICAÇÃO POSSÍVEL ...**

Sumário

O tema desta tese está inserido no domínio da visão por computador e na área da análise de movimento de corpos deformáveis. O seu interesse tem vindo a aumentar consideravelmente nos últimos tempos devido, sobretudo, ao fracasso das tentativas de utilizar as metodologias normalmente associadas aos corpos rígidos para a análise do movimento não rígido, e também ao elevado número de aplicações que existem para tal análise. O enorme potencial de aplicação existente na área da imagem médica, nomeadamente na segmentação, no emparelhamento e na análise e seguimento do movimento de estruturas, é responsável por grande parte do trabalho realizado neste âmbito. Outras aplicações que podem ser referidas são o seguimento de sistemas articulados, a análise do escoamento de fluidos, do movimento de nuvens para a previsão meteorológica, do comportamento de materiais sob a acção de forças, a análise e reconhecimento de faces, de veículos e de caracteres, etc.

Ao contrário do que sucede com os objectos rígidos, a representação da forma de um objecto deformável está fortemente relacionada com a análise e seguimento do seu movimento e, para se desenvolverem técnicas para resolver tais problemas, é necessário utilizar determinadas restrições sobre o movimento/forma o que, conseqüentemente, individualiza as abordagens desenvolvidas e as torna específicas para determinadas classes de problemas.

A abordagem utilizada para o desenvolvimento desta tese foi constituída pelas seguintes etapas: estudo bibliográfico de algumas das metodologias actualmente existentes e verificação das suas aplicações; desenvolvimento de uma nova aplicação, que além de constituir um sistema para integração dos algoritmos desenvolvidos e permitir o ensaio e a análise dos resultados obtidos, fosse também, por si só, um sistema para a análise e processamento de imagem de utilização flexível e, ao mesmo tempo, uma plataforma de desenvolvimento e ensaio para outros investigadores; estudo e implementação de metodologias que permitissem determinar a correspondência entre dois objectos 2D deformáveis; estudo e implementação de uma abordagem baseada em princípios físicos para determinar a mesma correspondência, estimar os deslocamentos em função das propriedades do material elástico simulado, e traduzir a transformação existente; evolução de modelos 2D do tipo contorno para modelos superficiais, construídos utilizando o nível de intensidade de cada *pixel* como a sua terceira coordenada, estendendo as abordagens utilizadas para este tipo de modelo; ensaio da metodologia física, dos modelos utilizados e do sistema desenvolvido numa aplicação exemplo.

Esta tese é constituída por oito capítulos: no primeiro, é realizada uma introdução ao tema e à abordagem utilizada, são descritos, de forma resumida, cada um dos restantes capítulos e indicadas as contribuições inovadoras; no capítulo seguinte, são apresentados os fundamentos das metodologias existentes, classificado o movimento não rígido, descritos com maior detalhe os modelos deformáveis e referenciadas algumas das suas aplicações, nomeadamente na área da imagem médica; no terceiro capítulo são apresentadas duas metodologias para a determinação da correspondência utilizando análise modal da forma dos objectos a emparelhar; no capítulo seguinte, é descrita uma abordagem na qual é utilizada modelização física, por intermédio do método dos elementos finitos, e emparelhamento modal, para determinar a correspondência, estimar os deslocamentos e traduzir a deformação existente; os modelos físicos e suas construções são descritos no quinto capítulo; no sexto capítulo, é descrita a plataforma de desenvolvimento e ensaio criada; no penúltimo capítulo são apresentados ensaios de aplicação da abordagem física, dos modelos utilizados e da plataforma desenvolvida em imagens de pedobarografia dinâmica; finalmente, no último capítulo, são apresentadas algumas conclusões finais e perspectivas de trabalho futuro.

Summary

The theme of this thesis is in the computer vision domain and more specifically in the area of motion analysis of deformable bodies. The interest in this field has risen significantly in the last few years due to the failure of adapting existing rigid-body methods and to the very wide range of potential applications. A strong impulse originated in the area of medical imaging for segmenting, matching and tracking body structures, but other application domains have also contributed, namely the tracking of articulate systems, the analysis of fluids flow, the movement of clouds for weather forecasting, the structural analysis of materials, the recognition of faces, vehicles and characters, etc.

Unlike rigid objects, the shape representation of deformable objects is strongly related with the analysis and tracking of its motion and thus, in order to develop suitable approaches and techniques for analysis, certain restrictions and constraints on the shape/motion must be specific to the type of task under consideration.

The work plan for this thesis was made of the following tasks: bibliographical study of some of the current methodologies and analysis of their applications; development of a new software system that, apart from incorporating the specific results to be obtained in the deformation and motion analysis, would have a flexible and modular structure enabling to play the dual role of a development and test platform and of a general-purpose image processing and analysis package; design and implementation of methodologies for matching and interpolating 2D deformable objects and for measuring the amount of deformation, focusing on physically-based approaches; evolution from 2D contour models to 3D surface models; testing of the methods designed in a real world medical application example.

The thesis is organized in eight chapters: the first one provides an introduction to the theme and a brief summary of the remaining chapters and identifies the main contributions of the work reported; existing methods are reviewed in the second chapter, the non rigid motion is classified and the deformable models are described with some detail as well as some of their applications, specially in the field of medical imaging; the third chapter presents two methodologies for shape matching using modal analysis; in the following chapter, the physically-based approach is described, using the finite elements method and modal analysis for matching, for estimating the displacement of unmatched nodes and for quantifying the deformation; the object models and the construction of the FEM models are described in the fifth chapter; the sixth chapter describes the development and test platform system; overall testing of the methodology is reported in the next chapter, using dynamic pedobarography data; finally, the last chapter draws the final conclusions and briefly presents plans for further work.

Résumé

Le thème de cette thèse est inséré dans le domaine de la vision par ordinateur et particulièrement dans l'analyse du mouvement de corps déformables. L'intérêt par ce thème s'est développé considérablement pendant les dernières années, ce qui se doit surtout à l'échec des tentatives de faire usage des méthodes connus pour corps rigides dans le domaine non-rigide, et aussi au grand nombre potentiel d'applications. La thématique de l'imagerie médicale est la responsable majeure de la recherche récente dans ce domaine, soit pour faire la segmentation, soit l'alignement et le suivi de structures. Néanmoins, il y a d'autres domaines où la littérature scientifique rapporte des applications importantes: la poursuite de systèmes articulés, l'analyse de l'écoulement de fluides, la prévision météorologique basée sur le mouvement des nuages, la reconnaissance de visages, de véhicules ou de caractères, etc.

Au contraire de ce qu'il se passe pour les objets rigides, la représentation de la forme d'un objet déformable est fortement racontée avec l'analyse et suivi de son mouvement et, pour développer des techniques qui résolvent ces problèmes il faut se borner à certaines restrictions sur le mouvement/forme ce qui, par conséquent, singularise les approches développées et les rend spécifiques de certaines classes de problèmes.

L'approche utilisée pour le développement de cette thèse a été constituée par les étapes suivantes: étude bibliographique de quelques-unes des méthodologies existantes et vérification de leurs applications; développement d'une nouvelle application logicielle qui constitue un système pour l'intégration et l'essai des algorithmes développés et l'analyse des résultats obtenus et qui soit aussi, par soi-même, un système générique et d'usage flexible pour le traitement et l'analyse d'images; étude et mise en oeuvre de méthodologies pour déterminer la correspondance entre deux objets déformables (2D); étude et mise en oeuvre d'une approche basée sur des principes physiques pour déterminer la même correspondance, estimer les déplacements en fonction des propriétés du matériau élastique simulé, et traduire la transformation existante; évolution de modèles 2D pour modèles 3D du type surface, construits en employant le niveau d'intensité de chaque *pixel* comme sa troisième coordonnée, et en étendant les approches utilisées pour ces modèles; essai de la méthodologie physique, des modèles employés et du système dans une application réelle.

Cette thèse est constituée par huit chapitres: au premier chapitre une introduction au thème et à l'approche utilisée est accomplie, chacun des chapitres suivants est décrit d'une façon résumée et les contributions innovatrices sont énumérées; au chapitre suivant, les principes des méthodologies en existence sont présentés, le mouvement non rigide est classé, les modèles déformables sont décrits en détail et quelques-unes de ses applications son indiquées, surtout dans le domaine de l'image médicale; au troisième chapitre deux méthodologies sont présentées pour la détermination de correspondances en employant l'analyse modale de la forme des objets à appairer; au chapitre suivant on décrit une approche dans laquelle la modélisation physique est employée selon la méthode des éléments finis, et l'appariement modal permet de déterminer la correspondance, estimer les déplacements et quantifier la différence entre les formes; les modèles physiques et ses constructions sont décrits au cinquième chapitre; au sixième chapitre, on décrit le système de développement et d'essai; à l'avant-dernier chapitre on présente quelques essais de l'approche physique, des modèles développés et du système dans le domaine de la pédobaragraphie dynamique; finalement, au dernier chapitre sont présentées des conclusions finales et des perspectives de travail futur.

Índice

Capítulo I	 INTRODUÇÃO À TESE E À SUA ESTRUTURA	1
1.1 – Introdução		3
1.2 – Objectivos e abordagem seguida		6
1.3 – Estrutura organizativa da tese		10
1.4 – Contribuições principais da tese		12
Capítulo II	 MÉTODOS DE SEGUIMENTO E ANÁLISE DE MOVIMENTO DE OBJECTOS DEFORMÁVEIS	17
2.1 – Introdução		19
2.2 – Fundamentos		19
2.2.1 – Modelos baseados em princípios físicos		20
2.2.2 – Método dos elementos finitos		21
2.2.3 – Decomposição modal		22
2.2.4 – Representações próprias		23
2.3 – Análise de movimento não rígido		25
2.3.1 – Classificação do movimento não rígido		26
2.3.2 – Classes restringidas de movimento não rígido		27
2.3.2.1 – Movimento articulado		27
2.3.2.2 – Movimento quase rígido		28
2.3.2.3 – Movimento isométrico, homotético e conforme		29
2.3.3 – Movimento não rígido geral		30
2.3.3.1 – Movimento elástico		30
2.3.3.2 – Movimento fluído		31
2.3.4 – Modelos de forma para objectos não rígidos		31
2.3.4.1 – Modelos locais		32
2.3.4.2 – Modelos globais		32
2.3.4.3 – Modelos híbridos		33
2.3.4.4 – Modelos volumétricos		33
2.4 – Modelos deformáveis		34
2.4.1 – Modelos deformáveis por minimização de energia		35
2.4.2 – Modelos deformáveis dinâmicos		36
2.4.3 – Discretização e simulação numérica		36
2.4.4 – Modelos deformáveis probabilísticos		37
2.4.5 – Aplicações de modelos deformáveis		39
2.4.5.1 – Análise de imagem médica com modelos deformáveis		39
2.4.5.1.1 – Segmentação de imagem com curvas deformáveis		40
2.4.5.1.2 – Segmentação de imagem 3D com superfícies deformáveis		42
2.4.5.1.3 – Incorporação de conhecimento <i>a priori</i>		42
2.4.5.1.4 – Emparelhamento		44
2.4.5.1.5 – Análise e seguimento de movimento		45
2.5 – Sumário		47
Capítulo III	 DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO ANÁLISE MODAL DA FORMA	49
3.1 – Introdução		51
3.2 – Determinação da transformação rígida entre dois objectos utilizando <i>quaternions</i>		

unitários	52
3.2.1 – Introdução aos <i>quaternions</i> unitários	52
3.2.1.1 – Relações com outras representações	53
3.2.2 – Algoritmo implementado	53
3.2.2.1 – Consideração da confiança associada às coordenadas dos pontos	54
3.2.3 – Resultados experimentais	55
3.2.3.1 – Para objectos 2D	55
3.2.3.2 – Para objectos 3D	57
3.2.4 – Comentários aos resultados	57
3.3 – Determinação de correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima	58
3.3.1 – Princípio do método	58
3.3.2 – Resultados experimentais	62
3.3.2.1 – Para objectos 2D	62
3.3.2.2 – Para objectos 3D	64
3.3.3 – Comentários aos resultados	66
3.4 – Determinação de correspondências utilizando a descrição modal da forma	68
3.4.1 – Princípio do método	69
3.4.2 – Algoritmo de correcção de sinal dos modos e de emparelhamento	71
3.4.3 – Resultados experimentais	74
3.4.3.1 – Na análise modal	74
3.4.3.1.1 – Para objectos 2D	75
3.4.3.1.2 – Para objectos 3D	76
3.4.3.2 – Na determinação de correspondências	79
3.4.3.2.1 – Para objectos 2D	79
3.4.3.2.2 – Para objectos 3D	82
3.4.4 – Comentários aos resultados	83
3.4.4.1 – Valor considerado para o parâmetro σ	86
3.4.4.2 – Da análise modal de um objecto	86
3.4.4.3 – Da determinação de correspondências	86
3.4.4.4 – Adaptação do método para objectos do tipo contorno	87
3.5 – Sumário	88
Capítulo IV DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO MODELIZAÇÃO FÍSICA E ANÁLISE MODAL	89
4.1 – Introdução	91
4.2 – Princípio do método	92
4.3 – Introdução ao método dos elementos finitos	95
4.3.1 – Formulação do método dos elementos finitos	97
4.3.1.1 – Graus de liberdade locais e globais	106
4.3.1.2 – Determinação das deformações e das tensões	108
4.3.1.2.1 – Estado plano de tensão	110
4.3.1.2.2 – Estado plano de deformação	110
4.3.2 – Material adoptado	111
4.4 – Formulação da análise modal	112
4.5 – Determinação das correspondências	113
4.5.1 – Interpolação do espaço modal	116

4.6 – Alinhamento, comparação e descrição de objectos	117
4.6.1 – Determinação das deformações	117
4.6.2 – Solução dinâmica: <i>Morphing</i>	120
4.6.3 – Consideração de rotações elevadas	121
4.6.4 – Comparação de objectos	122
4.7 – Sumário	124
Capítulo V <i>MODELOS PONTUAIS E ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS</i>	125
5.1 – Introdução	127
5.2 – Elementos finitos utilizados	127
5.2.1 – Para objectos 2D	127
5.2.1.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff	128
5.2.1.1.1 – Interpoladores Gaussianos	128
5.2.1.1.2 – Formulação do elemento de Sclaroff	130
5.2.1.1.3 – Exemplos	132
5.2.1.1.4 – Elemento para contornos	134
5.2.1.2 – Elementos axiais lineares	136
5.2.1.2.1 – Determinação das matrizes no sistema global	139
5.2.1.2.2 – Agrupamento	142
5.2.1.2.3 – Exemplos	144
5.2.2 – Para objectos 3D	146
5.2.2.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff	146
5.2.2.2 – Elementos axiais lineares	148
5.3 – Modelos pontuais utilizados	149
5.3.1 – Para objectos 2D	149
5.3.1.1 – Para contornos	150
5.3.2 – Para objectos 3D	151
5.3.2.1 – Amostragem regular	152
5.3.2.2 – Amostragem adaptativa	153
5.3.2.3 – Modelizações utilizadas	153
5.3.3 – Para contornos de isonível	155
5.4 – Resultados experimentais	156
5.4.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff	156
5.4.1.1 – Na análise modal	156
5.4.1.1.1 – Para objectos 2D	157
5.4.1.1.2 – Para objectos 3D	159
5.4.1.2 – Na determinação de correspondências	160
5.4.1.2.1 – Para objectos 2D	161
5.4.1.2.2 – Para objectos 3D	163
5.4.1.3 – Comentários aos resultados	167
5.4.1.3.1 – Influência do parâmetro σ	169
5.4.1.3.2 – Influência dos pontos interiores em 2D	169
5.4.1.3.3 – Influência das propriedades do material	169
5.4.1.3.4 – Influência do limiar de emparelhamento	170
5.4.1.3.5 – Robustez à rotação	170
5.4.1.3.6 – Concentrações de nodos	170
5.4.1.3.7 – Consideração da distância ao longo do contorno	171
5.4.1.3.8 – Robustez ao ruído e a dados perdidos	171

5.4.1.3.9 – Limitações do método	171
5.4.2 – Elementos axiais lineares	172
5.4.2.1 – Na análise modal	172
5.4.2.1.1 – Para objectos 2D	172
5.4.2.1.2 – Para objectos 3D	174
5.4.2.2 – Na determinação de correspondências	177
5.4.2.2.1 – Para objectos 2D	177
5.4.2.2.2 – Para objectos 3D	180
5.4.2.3 – Comentários aos resultados	183
5.5 – Sumário	186
Capítulo VI <i>PLATAFORMA DE DESENVOLVIMENTO E ENSAIO</i>	189
6.1 – Introdução	191
6.2 – Bibliotecas de domínio público integradas	192
6.3 – Entidades suportadas	194
6.4 – Interface	196
6.5 – Integração de novas funções	199
6.6 – Selecção de funções disponíveis	201
6.6.1 – Utilitárias	201
6.6.1.1 – Documentos imagem	201
6.6.1.2 – Documentos VTK	203
6.6.1.3 – Configuração	204
6.6.2 – Processamento de imagem	205
6.6.3 – Análise de imagem	206
6.6.3.1 – Genéricas	206
6.6.3.2 – Para linhas	210
6.6.4 – Computação e visualização gráfica	212
6.6.5 – Específicas à tese	219
6.6.5.1 – Documentos imagem	219
6.6.5.1.1 – Para contornos	219
6.6.5.1.2 – Para superfícies	224
6.6.5.2 – Documentos VTK	228
6.7 – Sumário e conclusões	230
Capítulo VII <i>ENSAIOS EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA DINÂMICA</i>	233
7.1 – Introdução	235
7.1.1 – Pedobarografia dinâmica	235
7.1.2 – Filosofia utilizada	237
7.2 – Resultados experimentais	238
7.2.1 – Modelização por contornos	238
7.2.2 – Modelização por superfícies de intensidade	244
7.2.2.1 – Amostragem regular	245
7.2.2.2 – Amostragem adaptativa	251
7.2.3 – Modelização por contornos isobáricos	257
7.2.3.1 – Contornos de uma mesma imagem	257
7.2.3.2 – Contornos de diferentes imagens	260

7.3 – Sumário e conclusões	264
Capítulo VIII <i>CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO</i>	267
8.1 – Conclusões finais	269
8.2 – Perspectivas de desenvolvimento futuro	274
Bibliografia	277
Anexo <i>IMAGENS A CORES</i>	
A1 – Capítulo III	3
A2 – Capítulo V	5
A3 – Capítulo VI	10
A4 – Capítulo VII	13

Capítulo I

INTRODUÇÃO À TESE E À SUA ESTRUTURA

1.1 – Introdução

Numerosos seres vivos têm no seu sistema de visão o elemento sensorial mais importante para a sua sobrevivência e para as suas condições de vida. A importância do sistema de visão prende-se com a riqueza de informação que este faculto, não só em termos quantitativos, mas também qualitativos. Tais informações permitem, por exemplo, a detecção e o seguimento de certos alvos (predadores, alimento, etc.), a determinação de obstáculos na sua trajectória, em suma, informações sobre o ambiente que rodeia cada ser.

Neste contexto, não é surpreendente que a comunidade científica tenha, nos últimos tempos, realizado intensos esforços no sentido de prover sistemas automáticos, isto é sistemas computadorizados, que sejam capazes de executar funções do sistema de visão que são normalmente encontradas nos sistemas equivalentes dos seres vivos, e em especial no sistema visual humano. A tentativa de implementar certas funções do sistema de visão humana em sistemas automáticos pode ser realizada quer ao nível de *software*, quer ao nível de *hardware*. Surge, assim, uma área de desenvolvimento científico que é designada por processamento de imagem e visão por computador ou visão artificial.

O processamento de imagem e a visão por computador são normalmente divididos em quatro áreas de actuação:

- a) *melhoramento ou realce de imagens*: consiste basicamente na tentativa de melhorar e realçar subjectivamente certas características de uma dada imagem (por exemplo, acentuar contraste, reduzir ruído, etc.);
- b) *restauração de imagens*: consiste basicamente na tentativa de restaurar imagens que tenham sido degradadas na sua qualidade por um qualquer processo, como por exemplo distorção geométrica, movimento, etc.;
- c) *compressão de imagens*: consiste basicamente na tentativa de representar uma imagem original de forma mais simples e portanto mais leve, sem contudo perder informação necessária;
- d) *análise de imagens*: consiste basicamente em descrever ou interpretar uma dada imagem ou sequência de imagens; isto é, na tentativa de medir, reconhecer, classificar uma imagem ou conjunto de imagens.

As três primeiras áreas costumam ser agrupadas na designação de processamento de imagem; a última está mais ligada à visão por computador e aparece por vezes associada à inteligência artificial.

Naturalmente que surgem inúmeras situações em visão por computador em que todas as áreas anteriores aparecem perfeitamente combinadas e integradas. Um exemplo desta combinação pode ser, por exemplo, um sistema que procure analisar o movimento de certos objectos a partir de uma sequência de imagens. Este sistema deverá incluir, quase obrigatoriamente, funções de melhoramento das imagens originais (compensação de

iluminação, remoção de ruído), de restauração das imagens degradadas geometricamente, de análise das imagens e, porventura, pode ser utilizada compressão (para efeitos de arquivo ou de transmissão).

Na actualidade, surgem cada vez mais aplicações do processamento de imagem e da visão por computador. Como exemplos de tais aplicações podem ser referidos os seguintes:

- *inspecção industrial*: na indústria, a qualidade do produto final tem cada vez mais um papel de importância primordial. Como, geralmente, as funções de inspecção visual humana são bastante rotineiras, cansativas, morosas, e conseqüentemente originam frequentemente falhas e erros, surge a necessidade de as automatizar por sistemas computadorizados (utilizando, por exemplo, *robots* e manipuladores em tais tarefas). É evidentemente necessário prover estes sistemas de “visão”; surge, assim, uma área importante da visão por computador em que o objectivo é o controlo dimensional de componentes, o controlo da sua qualidade superficial ou a verificação da integridade dos mesmos.
- *no guiamento de veículos autónomos*: cada vez mais se pretende substituir operários a cumprir funções pesadas e perigosas para a sua integridade física. Surgem assim veículos, *robots* ou manipuladores que, possuindo sistemas de condução autónoma, se podem mover em ambientes hostis para o homem transportando diferentes tipo de materiais e produtos. Se estes sistemas autónomos dispuserem de informação visual sobre o ambiente que os rodeia, poderão ser mais “*inteligentes*” e guiar-se de forma mais correcta e segura, pois podem seguir a melhor trajectória possível e de forma mais rápida.
- *compressão de imagens*: quando se pretende armazenar um elevado número de imagens, torna-se essencial diminuir o volume da respectiva informação. Tal redução pode também ser necessária na transmissão de imagens, em que a largura de banda é inevitavelmente reduzida. Técnicas de compressão de imagem desempenham um papel fulcral em inúmeros sistemas de arquivo e comunicação de imagens, em especial com o advento e proliferação de sistemas multimédia.
- *aplicações médicas*: na medicina existem bastantes imagens de diagnóstico obtidas por diferentes processos e técnicas (como por exemplo por raios-X, ecografia, endoscopia, etc.). Tais imagens necessitam de ser processadas no sentido de remover ruído, melhorar algumas características e analisá-las. A análise não é geralmente pretendida com um sentido perfeitamente autónomo mas como um auxiliar importante ao diagnóstico efectuado pelos especialistas. Não é, assim, surpreendente encontrar um elevado número de aplicações de processamento de imagem e de visão por computador em medicina.
- *recuperação de imagens degradadas*: certas imagens são obtidas com uma inevitável

deterioração; tal pode ser devido às más condições de iluminação, influência de campos eléctricos e/ou magnéticos, às elevadas distâncias de transmissão, etc. Nestas situações, é necessário realizar uma melhoria da qualidade das imagens. Por curiosidade, refira-se que uma das primeiras aplicações do processamento de imagem se refere à recuperação das imagens enviadas para a Terra por um sonda espacial em 1960. A deterioração ficava-se a dever a elevadas restrições acerca do peso do sistema de visão [Lim, 1990], implicando assim que o sistema de imagem a bordo da sonda fosse de reduzida qualidade.

- *na meteorologia*: pela análise do movimento das nuvens, sistemas de visão por computador podem auxiliar em estudos de previsão do estado do tempo.
- *em sistemas de tráfego automóvel*: cada vez mais pretende-se dotar os sistemas de gestão de tráfego automóvel actualmente existentes com sistemas de visão por computador. Tal incorporação tem como objectivo tornar a gestão mais flexível, eficiente e rápida.
- *na agricultura*: na análise do crescimento e grau de maturação das plantações, a visão por computador, baseada em imagens de detecção remota, surge cada vez mais como um sistema bastante útil para análise e controlo.

Os exemplos anteriores, apesar de em número reduzido, evidenciam perfeitamente a utilidade do processamento de imagens e da visão por computador no dia a dia da humanidade.

O tema desta tese insere-se no domínio da visão por computador, em particular na análise de movimento e deformação.

A análise de movimento tem vindo a ser, nas duas últimas décadas, uma área importante de investigação no domínio da visão por computador. O problema da análise de movimento é tradicionalmente definido como a determinação do movimento de um objecto a partir de uma sequência de imagens, 2D ou 3D, capturadas em dois ou mais instantes de tempo. O problema designado por *obtenção da estrutura a partir do movimento* apresenta ainda um objectivo adicional: obtenção da estrutura geométrica e também dos parâmetros do movimento a partir de uma sequência de projecções [Tavares, 1995, 1995a]. Uma grande percentagem do trabalho envolvendo a análise de movimento foi realizada nesta área, devido à sua elevada importância no processamento de cenas, assumindo que os objectos em questão têm formas constantes ao longo de toda a sequência. Esta restrição de rigidez é inadequada em muitas situações de análise de movimento, pois muitos objectos reais, com exactidão todos, são deformáveis. Por exemplo: as árvores balançam, as folhas de papel dobram-se, as roupas enrugam-se, o corpo humano apresenta movimento contínuo não rígido, etc.

Nos anos mais recentes, um crescente volume de investigação na análise de movimento

não rígido tornou-se aparente. Grande parte do impulso verificado nesta área deriva das aplicações potenciais na área da imagem médica e na compressão de imagem baseada em modelos. Várias aplicações existem na área biomédica, tais como o estudo do movimento do coração e do pulmão, estudo do fluxo sanguíneo e a análise do crescimento de tumores. Por exemplo, um dos objectivos na imagem cardíaca é a análise do movimento não rígido e estimar as características da deformação do coração. Nesta aplicação, dispositivos adequados de ressonância magnética ou tomografia computadorizada adquirem dados 3D do coração em vários instantes durante o ciclo cardíaco. Uma análise da gama dos parâmetros do movimento pode auxiliar na triagem de pacientes e na decisão da extensão das lesões cardíacas existentes. Um outro exemplo é a compressão de imagem baseada em modelos, para teleconferência a elevadas velocidades de transmissão. Desde que os parâmetros do movimento, ou as correspondências pontuais do movimento facial, possam ser estimados, as imagens podem ser eficientemente codificadas e transmitidas, reduzindo significativamente a largura de banda necessária, em comparação com as abordagens estatísticas tradicionais.

Existem muitas outras aplicações da análise de movimento não rígido. Algumas que podem ser citadas são: estudo do movimento dos lábios, para leitura labial; reconhecimento de faces para aplicações de segurança; deformações de material para inspecção visual de estruturas, tais como inspecções de barragens, de pontes e de crescimento de cristais; seguimento da formação de nuvens para previsão meteorológica. A visão artificial em aplicações robóticas também necessita de considerar a não rigidez das formas: partes articuladas e flexíveis são abundantes em ambientes industriais. Adicionalmente, aplicações de realidade virtual requerem métodos para a construção e simulação de modelos de objectos rígidos e não rígidos.

1.2 – Objectivos e abordagem seguida

Enunciam-se de seguida os principais objectivos traçados inicialmente para esta tese, a estratégia e abordagens consideradas e, de forma resumida, o trabalho realizado.

Os principais objectivos formulados inicialmente foram os seguintes:

- a)* estudo das várias metodologias existentes para a análise e seguimento de movimento de corpos deformáveis; em vez de se partir de um problema concreto, procurou-se criar um quadro geral para tratamento de múltiplos casos de análise de movimento e deformação; no mesmo sentido, em todo o desenvolvimento e implementação, procurou-se manter acessíveis os parâmetros de controlo e de análise de resultados, como se pode constatar em diversas das janelas de interface da aplicação apresentadas no sexto capítulo.
- b)* criação de uma plataforma de desenvolvimento e ensaio para análise e processamento de imagem que, além de possibilitar uma utilização flexível, permitisse a integração de

novos algoritmos de forma totalmente transparente. O uso da plataforma como sistema de desenvolvimento, por parte de diversos investigadores, facilita a sua continuada manutenção e actualização. Por outro lado, a estrutura modular da plataforma permite também configurar múltiplos sistemas de aplicação que disponibilizem apenas a funcionalidade adequada.

De forma mais específica, são ainda objectivos desta tese:

- c)* implementar e desenvolver metodologias para a determinação da correspondência entre dois objectos;
- d)* estimar de forma consistente os deslocamentos pontuais para cada objecto;
- e)* medir globalmente a deformação existente entre dois objectos previamente emparelhados;
- f)* determinar a transformação rígida que melhor traduz a componente rígida da transformação global existente entre dois objectos previamente emparelhados;
- g)* passar de modelos 2D para modelos superficiais utilizando as mesmas metodologias para determinar a correspondência, estimar os deslocamentos, determinar a deformação existente e a transformação rígida envolvida.

No cumprimento de tais objectivos estiveram sempre presentes as seguintes considerações:

- a)* as abordagens a utilizar não deveriam estar sujeitas nem limitadas a nenhuma aplicação específica;
- b)* os dados a considerar para cada objecto deveriam ser apenas os seus pontos (ou parte deles) evitando-se, deste modo, estruturas mais complexas e de mais difícil construção;
- c)* os algoritmos utilizados deveriam ser implementados numa plataforma comum e de uso geral;
- d)* sempre que uma ferramenta, ou conjuntos de ferramentas, estivesse disponível no domínio público, deveria ser integrada no sistema desenvolvido e reutilizada.

Utilizando estas considerações, o trabalho desenvolvido ao longo desta tese pode ser descrito de forma resumida do seguinte modo:

A primeira etapa concentrou-se no estudo bibliográfico de várias metodologias e em aplicações actualmente existentes no domínio da análise e seguimento de corpos deformáveis.

Na etapa seguinte, procedeu-se à criação de uma plataforma de desenvolvimento e ensaio que permitisse a incorporação das metodologias implementadas ao longo da tese e a análise dos resultados obtidos. Assim, construiu-se um sistema de análise e processamento de imagem para sistemas operativos *Microsoft Windows*, utilizando o ambiente de programação

integrado *Microsoft Visual C++*. Este sistema, além de possuir as funções básicas e comuns para uma aplicação de análise e processamento de imagem, permite que sejam integrados, de forma transparente e flexível, novos algoritmos. Desde a sua criação foram já incorporadas várias funções, contendo a sua versão actual um número de funções já bastante apreciável.

Após a construção do sistema base de análise e processamento de imagem procedeu-se à integração no mesmo das ferramentas desenvolvidas durante o curso de mestrado do autor desta tese para a detecção e seguimento de linhas, aproximação poligonal de linhas, simplificação de segmentos de recta e seguimento de segmentos de recta ao longo de sequências de imagem utilizando filtragem de Kalman [Tavares, 1995, 1995a]. Essa abordagem, bastante comum e satisfatória para objectos rígidos, foi testada em sequências de imagens com objectos deformáveis. Os resultados obtidos permitiram-nos concluir que, se o movimento entre as imagens for muito reduzido e os contornos dos objectos puderem ser representados de forma razoável por segmentos de recta, a referida abordagem conduz a bons resultados. Contudo, como seria de esperar, quando os contornos não são representados de forma adequada por segmentos de recta e o ritmo de amostragem não é suficientemente rápido, a abordagem torna-se inadequada. Ainda poderia ser ultrapassada essa incapacidade, se os contornos fossem aproximados por curvas paramétricas, por exemplo por *splines*. Tal seria bastante similar a algumas metodologias já existentes, nomeadamente as *snakes* de Kalman (ver segundo capítulo), no entanto, existiria sempre a restrição de o movimento entre as imagens a considerar ter que ser necessariamente reduzido.

Após este primeiro teste, procedeu-se à implementação de metodologias para a determinação dos contornos dos objectos presentes em cada imagem. Como os contornos determinados poderiam ter um número elevado de *pixels*, implementou-se um algoritmo para se proceder à sua amostragem, utilizando critérios de largura máxima do intervalo entre *pixels* e do valor da curvatura. Assim, tornou-se possível obter contornos com densidade adaptativa de maneira a concentrar mais *pixels* nas zonas onde existem variações de curvatura mais acentuadas.

Estando os contornos dos objectos presentes em cada imagem determinados e amostrados, procedeu-se à implementação de duas metodologias para a determinação da correspondência entre dois objectos, baseadas na análise dos valores e vectores próprios de matrizes descritivas dos mesmos. Estas metodologias foram testadas para diferentes objectos rígidos e deformáveis, realizando-se uma análise detalhada dos resultados obtidos.

Como os objectos reais deformáveis são simulados de forma mais adequada por modelos deformáveis elásticos, procedeu-se à modelização física dos objectos a considerar por intermédio do método dos elementos finitos. Essa modelização foi efectuada utilizando-se dois tipos de elementos finitos: um único elemento isoparamétrico, construído utilizando funções de interpolação de base Gaussiana, e elementos axiais *standard* devidamente agrupados. A determinação das correspondências é obtida pela análise das trajectórias de cada nodo no respectivo espaço modal. Além das correspondências, esta modelização permite obter uma estimativa, consistente com as propriedades do material simulado, por minimização da

energia de deformação, para os deslocamentos dos nodos. Esta energia de deformação, distribuída ao longo dos modos de vibração dos modelos, permite traduzir quantitativamente a transformação existente entre os dois objectos, sendo possível distinguir perfeitamente as parcelas referentes à transformação rígida e às deformações locais. Esta metodologia foi aplicada a vários objectos rígidos e deformáveis, procedendo-se a uma análise detalhada dos resultados obtidos.

Ao longo do trabalho desenvolvido, tornou-se ainda mais evidente a necessidade de implementar uma metodologia para a obtenção da transformação rígida que melhor traduzisse a parte rígida da transformação global existente entre dois objectos previamente emparelhados. Assim, tal implementação foi realizada utilizando-se um método baseado em *quaternions* unitários.

Estando implementadas várias metodologias para determinar a correspondência entre objectos 2D que conduziam a resultados bastante satisfatórios, evoluiu-se para modelos superficiais. Estes novos modelos resultam da utilização do nível de intensidade como a terceira coordenada de cada *pixel* do objecto presente na imagem 2D. (Deve-se notar que, naturalmente, os métodos desenvolvidos são directamente aplicáveis a objectos representados no espaço tridimensional.) A amostragem de cada objecto no espaço 2D foi conseguida de duas maneiras distintas: uma utilizando uma malha rectangular regular e uma outra utilizando uma malha adaptativa construída por análise dos perfis radiais de intensidade centrados nos máximos. Para a construção destas superfícies tornou-se evidente que seriam úteis ferramentas para realizar a triangulação de pontos não estruturados, e para simplificar e suavizar a malha triangular resultante. Assim procedeu-se à integração na plataforma de desenvolvimento e ensaio da biblioteca de domínio público *VTK - The Visualization Toolkit* [Schroeder, 1996, 1998, 1999]. Após essa integração, as metodologias utilizadas com modelos 2D foram estendidas para este tipo de modelo e foram realizados vários testes e analisados os resultados obtidos.

Com a modelização superficial tornou-se possível representar, utilizando um único modelo, objectos que no plano imagem podem ser constituídos por diversas entidades. Deste modo, diminui-se a dificuldade do problema original e, ao mesmo tempo, torna-se possível desprezar a eventual fusão e/ou divisão das entidades, que pode ocorrer ao longo do movimento no plano imagem. Obviamente que esta modelização se torna mais apropriada, e com maior significado intuitivo, se o nível de intensidade de cada *pixel* estiver relacionado com alguma característica do objecto a modelizar.

Essa relação, entre o nível de intensidade e a terceira coordenada, é verificada em imagens de pedobarografia dinâmica nas quais o nível de intensidade está directamente relacionado com a pressão exercida, sobre o sistema sensor, pelo pé em estudo. Assim, e a título de exemplo, as várias metodologias e modelizações implementadas na tese foram aplicadas em imagens de pedobarografia dinâmica, tendo-se verificado que, apesar dos bons resultados obtidos na determinação das correspondências entre contornos 2D, a evolução para os modelos superficiais de intensidade, além de também originar resultados bastante

satisfatórios, evitou o aumento da complexidade provocada pela possibilidade de existirem mais do que apenas um contorno em cada imagem e de ocorrer a divisão e/ou fusão entre os mesmos.

1.3 – Estrutura organizativa da tese

Pretendeu-se estruturar esta tese de forma a maximizar a autonomia e a independência entre os seus capítulos. Apresentam-se de seguida, de forma resumida, os restantes sete capítulos e o único anexo que constituem esta publicação:

- **CAPÍTULO II** || **MÉTODOS DE SEGUIMENTO E ANÁLISE DE MOVIMENTO DE OBJECTOS DEFORMÁVEIS**

Neste capítulo são apresentadas várias metodologias actualmente existentes no domínio desta tese e são indicados vários exemplos de aplicações.

Após a introdução de alguns fundamentos, o movimento não rígido é classificado e, para cada classe resultante, são indicadas as restrições e as condições inerentes e verificados alguns trabalhos realizados no seu âmbito.

Como uma grande parte do trabalho realizado envolve o desenvolvimento e a utilização de modelos deformáveis, o destaque deste capítulo concentra-se nesse tipo de modelos. Assim, estes modelos são descritos com alguma profundidade e são analisadas várias aplicações principalmente na área da imagem médica, nomeadamente na segmentação e na análise e seguimento de movimento não rígido.

- **CAPÍTULO III** || **DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO ANÁLISE MODAL DA FORMA**

Como já foi referido, ao longo do trabalho desenvolvido verificou-se ser de grande interesse a possibilidade de separar a transformação existente entre dois objectos em dois tipos: rígida e local ou de deformação. Assim, foi implementado um método, baseado em *quaternions* unitários, para se determinar a transformação rígida existente e que necessita de apenas um reduzido número de emparelhamentos entre os pontos que constituem cada objecto; o referido método é apresentado no início deste capítulo.

É depois descrito um método para a determinação de correspondências entre pontos, 2D e 3D, de dois objectos baseado no princípio da distância mínima.

Como o método referido anteriormente não produz bons resultados quando os objectos têm formas, ou posicionamento, ou orientação, ligeiramente diferentes, é descrito um novo método, baseado neste, que utiliza informação sobre as duas formas a emparelhar, obtida a partir dos valores e dos vectores próprios de uma matriz construída para cada objecto, e obtém resultados satisfatórios para as referidas situações.

• **CAPÍTULO IV** || **DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO MODELIZAÇÃO FÍSICA E ANÁLISE MODAL**

No capítulo anterior foram apresentados dois métodos para a determinação de correspondências entre objectos, 2D ou 3D, rígidos ou não, baseados na construção de matrizes de proximidade, construídas a partir das coordenadas dos seus pontos, e na análise dos valores e dos vectores próprios destas matrizes para o estabelecimento das correspondências.

Neste capítulo é apresentada uma nova abordagem, com o mesmo objectivo, mas na qual é utilizada uma modelização física, pelo método dos elementos finitos, dos objectos a emparelhar considerando que estes são construídos por um determinado material virtual, e determinando as correspondências pela análise das trajetórias dos nodos de cada objecto no respectivo espaço modal.

No início deste capítulo é realizada uma breve introdução ao método dos elementos finitos e, a seguir, é realizada uma apresentação introdutória à análise modal.

• **CAPÍTULO V** || **MODELOS PONTUAIS E ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS**

É descrito neste capítulo o processo utilizado para construir os modelos dos objectos baseados na sua modelização física.

Assim, em primeiro lugar, são apresentados os dois tipos de modelos finitos que foram utilizados: um no qual é utilizado um único elemento finito isoparamétrico, que utiliza funções de interpolação de base Gaussiana entre todos os nós que constituem cada objecto a modelizar, e um outro que utiliza na modelização de cada objecto elementos finitos axiais *standard* devidamente agrupados. São descritos os procedimentos utilizados na determinação dos nodos dos modelos do tipo contorno e do tipo superfície de intensidade.

Também são apresentados neste capítulo alguns resultados experimentais obtidos na análise modal de vibração em modo livre, na determinação de correspondências, na estimação de deslocamentos, e na utilização da energia de deformação como indicação da deformação existente.

• **CAPÍTULO VI** || **PLATAFORMA DE DESENVOLVIMENTO E ENSAIO**

Durante o trabalho relacionado com esta tese foi criada, expandida e utilizada, uma plataforma de desenvolvimento e ensaio para o processamento e análise de imagem. Esta plataforma, desenvolvida em linguagem C^{++} no sistema integrado de desenvolvimento *Microsoft Visual C^{++}* para sistemas operativos *Microsoft Windows 95/98/NT/2000*, obedece a uma filosofia que permite que a mesma seja, por si só, uma aplicação para o processamento e análise de imagem dos mais diversos tipos mas também, um sistema base no qual outros investigadores possam desenvolver e posteriormente integrar os seus algoritmos.

Neste capítulo é apresentada a plataforma de desenvolvimento e ensaio, nomeadamente: a sua concepção, as bibliotecas de domínio público integradas, as entidades actualmente suportadas, a sua interface, o modo como se processa a integração de uma nova função e as

operações actualmente disponíveis, quer de âmbito geral, quer as mais específicas desta tese.

• **CAPÍTULO VII** || **ENSAIOS EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA DINÂMICA**

Neste capítulo são apresentados ensaios de aplicação da metodologia desenvolvida em sequências de imagem de pedobarografia dinâmica. Não se pretende tratar o problema geral de aplicação em pedobarografia dinâmica mas, tão só, usar esse domínio como fonte de dados.

São apresentados resultados obtidos na determinação de correspondências, na utilização da energia de deformação para medida das deformações existentes, e na estimação dos deslocamentos nodais por minimização da referida energia, entre objectos do tipo contorno 2D, superfície de intensidade (construídas utilizando-se amostragem regular ou amostragem adaptativa) e contornos de isonível.

Antes da apresentação dos resultados obtidos é realizada uma introdução breve à pedobarografia dinâmica.

• **CAPÍTULO VIII** || **CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO**

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões finais sobre o trabalho desenvolvido, sobre a filosofia que o orientou e sobre os resultados experimentais obtidos. Também são indicadas algumas perspectivas de desenvolvimento futuro, as quais serão consideradas no prosseguimento do trabalho realizado.

• **ANEXO** || **IMAGENS A CORES**

Este anexo é constituído pelas versões coloridas de algumas das imagens apresentadas, em níveis de cinzentos, ao longo dos capítulos que constituem esta tese. Com este anexo espera-se, de algum modo, facilitar a interpretação de algumas imagens que pareceram mais relevantes.

1.4 – Contribuições principais da tese

Como principais contribuições, algumas com carácter inovador, obtidas pelo trabalho realizado nesta tese, podem ser referenciadas as seguintes:

• *No domínio do tema da tese:*

O estudo, de certo modo aprofundado, das várias metodologias, e suas aplicações, existentes no domínio da análise e seguimento de corpos deformáveis, que se espera ser de utilidade em trabalhos futuros, dada a actual carência de boas revisões do estado da arte neste domínio.

- *Na plataforma de desenvolvimento e ensaio criada:*
 - a) A criação de uma plataforma de desenvolvimento e ensaio de aplicações de processamento e análise de imagem que constitui por si só um sistema base, com as funções indispensáveis a uma aplicação autónoma, de utilização flexível e que permite e facilita que outros autores desenvolvam, ensaiem e posteriormente incorporem os seus algoritmos.
 - b) Incorporação, na plataforma de desenvolvimento e ensaio criada, das ferramentas desenvolvidas anteriormente, no âmbito do curso de mestrado do autor deste tese, para o seguimento de objectos rígidos. Nomeadamente, operações de detecção e seguimento com histerese de linhas, simplificação de segmentos de recta, seguimento de segmentos de recta (parametrizados pela direcção, pelo comprimento e pela posição do ponto médio) em sequências de imagens utilizando três filtros de Kalman independentes (um para cada característica de parametrização) e restrições geométricas (diferenças entre o comprimento, entre a direcção e entre a posição do ponto médio).
 - c) Os contornos activos, *snakes*, são os modelos deformáveis 2D mais populares no domínio desta tese. Como já existiam implementações de algoritmos de contornos activos, resolveu-se proceder à sua integração na plataforma, utilizando todas as facilidades de interacção que a interface da mesma disponibiliza.
 - d) Integração na plataforma de bibliotecas de domínio público, enriquecendo as entidades e as operações que a mesma pode suportar. Destas bibliotecas destaca-se a integração da biblioteca *VTK* que permitiu incorporar, num sistema típico de análise de processamento de imagem, entidades e ferramentas habitualmente existentes no domínio da computação gráfica. Desta forma é actualmente possível utilizar-se, por exemplo, funções para: triangulação de pontos não estruturados; simplificação e suavização de malhas; realização de operações de união, intersecção, diferença e soma de magnitudes entre objectos; realização da transformação dinâmica faseada de um objecto num outro; visualização das normais nos nodos de um objecto; etc. A visualização interactiva das entidades “gráficas” é completamente suportada na plataforma, sendo possível identificar-se os nodos e as células que constituem cada objecto, definir e visualizar a gama de valores escalares associados aos nodos dos objectos, e alterar várias propriedades da cena de visualização. Deste modo tornou-se possível desenvolver algoritmos que utilizam tais entidades e funções de forma totalmente transparente.
- *Na determinação da correspondência:*
 - a) Os vários métodos utilizados para a determinação da correspondência entre pontos de dois objectos já existiam. No entanto, deve-se referir que no caso dos métodos

apresentados no terceiro capítulo estes só tinham sido aplicados, até então, na determinação da correspondência entre objectos rígidos muito simples e que neste trabalho foram exploradas as suas utilizações em objectos reais, 2D e 3D, do tipo rígido e deformável. No que diz respeito ao método apresentado no quarto capítulo, o mesmo apenas tinha sido aplicado na determinação da correspondência entre objectos 2D, nomeadamente no reconhecimento de objectos existentes em bases de dados, sendo o método estendido para objectos 3D deformáveis. Para todos os métodos utilizados foi feito um estudo aprofundado das suas aplicações em diferentes objectos, 2D e 3D, sintéticos e reais, do tipo rígido e deformável, verificando-se as limitações e as qualidades de cada um.

- b)** Adaptação dos referidos métodos a objectos do tipo contorno.
- *Na modelização dos objectos considerados:*
 - a)** Foi desenvolvida uma abordagem para determinar os contornos dos objectos em imagens 2D utilizando histerese de amplitude, determinação do nível de amplitude local para a continuação do seguimento, possibilidade de retrocesso do caminho seguido caso o mesmo corresponda a um falso caminho, pesquisa do primeiro *pixel* determinado de um contorno de forma a proceder-se ao seu fecho.
 - b)** Construção de superfícies de intensidade para objectos em imagens 2D, utilizando-se amostragem rectangular regular ou uma amostragem, especialmente desenvolvida, que utiliza a análise dos perfis radiais de intensidade centrados nos máximos locais. Com a nova amostragem, conseguem-se superfícies de intensidade adaptativas, nas quais a densidade de nodos é superior nas zonas em que a variação da intensidade é mais relevante.
 - c)** Utilização de uma nova modelização física de objectos, 2D e 3D, por intermédio de elementos finitos *standard* do tipo axial, devidamente agrupados, sendo a ordem do agrupamento determinada por triangulação de Delaunay do conjunto original de pontos não estruturados.
 - d)** Em certas aplicações, é bastante útil não só determinar-se a correspondência entre superfícies mas também entre contornos de isonível determinados numa mesma superfície ou em várias superfícies. Assim resolveu-se contemplar a extracção de tais entidades, a posterior modelização e, finalmente, a determinação da correspondência.
- *Na aplicação da metodologia proposta:*
 - a)** A determinação de várias medidas características dos modelos utilizados para os objectos 2D e 3D, que podem ser úteis em várias aplicações.
 - b)** A aplicação da metodologia apresentada, para a modelização e determinação segundo princípios físicos da correspondência, foi por nós aplicada em imagens de

pedobarografia dinâmica. Apesar de ser apenas um exemplo, trata-se na realidade da primeira aplicação neste domínio de uma abordagem automática para a determinação da correspondência, para a estimação dos deslocamentos nodais e para a medida da transformação existente entre objectos do tipo contorno, superficial e de isonível.

- c) Como se torna evidente ao analisar-se a aplicação da metodologia apresentada em imagens de pedobarografia dinâmica, pensamos que a utilização de superfícies virtuais, construídas utilizando-se o nível de intensidade como a terceira coordenada, torna possível analisar e seguir objectos 2D que, ao longo do seu movimento, podem ser constituídos, nas imagens 2D, por entidades distintas com a possibilidade de se dividirem e/ou se fundirem. Tal é conseguido pela consideração de um único modelo físico, do tipo superficial, em vez da consideração de objectos 2D múltiplos, o que necessariamente implicaria um significativo aumento da complexidade do problema. Obviamente, tal modelização superficial é mais indicada nos casos em que existe uma forte relação entre o nível de intensidade e uma qualquer característica física do objecto. Tal relação verifica-se frequentemente em aplicações nas quais as imagens são obtidas de forma controlada. É o caso da pedobarografia dinâmica, na qual as imagens obtidas apresentam uma relação estreita entre o nível de intensidade e a pressão exercida sobre o sistema sensor.

Capítulo II

MÉTODOS DE SEGUIMENTO E ANÁLISE DE MOVIMENTO DE OBJECTOS DEFORMÁVEIS

Neste capítulo são apresentadas várias metodologias existentes no domínio do seguimento e análise de movimento de objectos deformáveis; assim, após a introdução de alguns fundamentos, o movimento não rígido é classificado e, para cada classe resultante, são indicadas as restrições e as condições inerentes e referenciados alguns trabalhos realizados nesse âmbito.

O destaque deste capítulo concentra-se nos modelos deformáveis. Estes modelos são descritos com alguma profundidade e são citadas algumas das suas aplicações, nomeadamente na área da imagem médica, em tarefas de segmentação, de emparelhamento e de análise e seguimento de movimento não rígido.

2.1 – Introdução

Neste capítulo são apresentadas algumas metodologias actualmente usadas para o seguimento (*tracking*) e análise de movimento de objectos deformáveis. São apresentadas três secções principais: na secção seguinte abordam-se os fundamentos destas metodologias; na terceira secção o movimento rígido é classificado e, para cada classe de movimento, são descritas as restrições e as condições inerentes; os modelos deformáveis são descritos com algum detalhe na quarta secção, merecendo especial ênfase as suas aplicações em imagem médica, nomeadamente na segmentação, no emparelhamento e na análise e seguimento de movimento não rígido.

Na quinta e última secção deste capítulo é apresentado um sumário.

2.2 – Fundamentos

Como é bem sabido, existem dificuldades inerentes à determinação da correspondência entre objectos não rígidos em imagens diferentes. Geralmente estes problemas devem-se ao efeito da perspectiva e à presença de outras deformações, não rígidas, que muitas vezes são modelizadas como ruído. Contudo, no mundo real os objectos não rígidos são comuns e, claramente, as suas deformações não devem ser consideradas ruído.

Estas deformações são restringidas e traduzidas pela natureza física dos próprios objectos. Para se lidar de forma mais adequada com a não rigidez, pode-se utilizar modelos deformáveis e embeber os dados por uma membrana que possa ser deformada de maneira a emparelhá-los satisfatoriamente com outros dados. Assim, os modelos deformáveis de curvas, de superfícies e de sólidos, ganharam popularidade depois de serem propostos, a meio da década de oitenta, para utilização na visão por computador e na computação gráfica [McInerney, 1996].

Ao longo dos tempos têm surgido vários métodos para a determinação de correspondência entre objectos deformáveis. Algumas das primeiras abordagens podem ser agrupadas numa categoria normalmente designada por emparelhamento elástico (*elastic matching*). No emparelhamento elástico é utilizada uma abordagem baseada em programação dinâmica para determinar as deformações restringidas da forma dos objectos. O algoritmo de pesquisa resultante minimiza a distorção do modelo, neste contexto designado por *elastic template*, enquanto maximiza a correspondência com um objecto na imagem.

Tradicionalmente o emparelhamento elástico é computacionalmente lento, apresentando problemas de estabilidade associados ao ruído. Embora o modelo de programação dinâmica tenda a capturar a deformação, ele não modeliza a física subjacente à deformação. Definindo propriedades físicas para o objecto, deseja-se utilizar esse conhecimento para parametrizar a sua representação, de maneira a capturar as variações fisicamente admissíveis da sua forma.

2.2.1 – Modelos baseados em princípios físicos

A ideia de utilizar restrições físicas na modelização de objectos tem vindo a ser sugerida por muitos autores; contudo, a abordagem descrita em [Terzopoulos, 1988] para obter modelos 3D por ajuste, utilizando membranas e tubos de borracha, concentrou a atenção nos métodos de modelização que usam a matemática para simular a dinâmica de objectos reais. Uma motivação para utilizar as representações baseadas em princípios físicos é devida à necessidade corrente, em problemas de visão por computador, de estimar alterações na posição, na orientação e na forma, que são obtidas de forma adequada por este tipo de métodos. Uma outra motivação é a possibilidade existente do utilizador especificar forças que são definidas a partir dos dados a considerar, e definir o comportamento intrinsecamente dinâmico de um modelo físico que pode ser utilizado para resolver problemas de ajuste, de interpolação e de determinação de correspondência.

Em [Kass, 1988] é introduzido este tipo de modelização na área do seguimento de contornos 2D através de contornos activos (*snakes*). *Snakes* são simulações de cordões elásticos construídos por borracha que podem ser colocados perto de um contorno contínuo ou suave numa imagem, e seguidamente puxados e empurrados para próximo do contorno desejado, através de forças artificiais. Tipicamente estas forças são calculadas directamente a partir da imagem original. Por exemplo, em [Basclé, 1992] são utilizadas *snakes* para a extracção de características tais como vértices, pontos de ancoragem tripla e curvas de grau superior a 1.

Desde que estabilizadas de forma adequada, as *snakes* podem ser utilizadas para estabelecer a correspondência entre contornos em imagens diferentes e também podem ser utilizadas no seguimento de objectos deformáveis em sequências de imagens. Por exemplo, em [Åström, 1999] é estimado o movimento de uma câmara a partir dos contornos aparentes ou de silhueta de uma superfície 3D curva, não conhecida *a priori*, utilizando *snakes* na segmentação e no seguimento desses contornos ao longo da sequência de imagens.

Várias tentativas de melhorar o comportamento das *snakes*, quer no aumento da insensibilidade ao ruído e ao posicionamento inicial quer no aumento da estabilidade, têm sido propostas; exemplos podem ser encontrados em [Davatzikos, 1999; Gunn, 1997; Henricsson, 1994; Neuenschwander, 1994; Olstad, 1996; Yuen, 1999; Zhu, 1996].

O conceito inicial das *snakes* originou o desenvolvimento de modelos deformáveis especializados para a pesquisa e reconhecimento de faces, como em [Yuille, 1989, 1992], para a interpretação de linguagem gestual, como em [Blake, 1993; Harrow, 1998], para o emparelhamento elástico de dados de imagens médicas, como em [Bajcsy, 1989; Duncan, 1991; Staib, 1991].

Outros métodos seguiram abordagens mais gerais de maneira a incorporar o conhecimento prévio acerca de um dado objecto a ser determinado, e assim derivarem a física dos seus modelos directamente a partir de conjuntos de dados de treino. Algumas destas técnicas

estatísticas serão referidas na secção 2.2.4.

Conquanto as primeiras representações de objectos baseadas em princípios físicos permitissem uma melhor modelização das deformações não rígidas, elas apresentam a desvantagem de serem baseadas na técnica matemática das diferenças finitas para a discretização e integração numérica das equações físicas inerentes. A utilização das diferenças finitas origina problemas severos com a amostragem, pois não permite a fixação das molas elásticas em pontos diferentes dos nodos de discretização. Este problema pode ser compensado pelo aumento do número de pontos de discretização, mas o tempo de cálculo é fortemente penalizado.

2.2.2 – Método dos elementos finitos

Para resolver de forma adequada os problemas associados à amostragem e à escala, pode-se utilizar o método dos elementos finitos na modelização física. Esta abordagem foi considerada na modelização de objectos sólidos deformáveis superquádricos em [Pentland, 1990, 1991] e posteriormente em [Terzopoulos, 1991]. Em [Cohen, 1990] é apresentada uma formulação para as *snakes* utilizando o método dos elementos finitos, que resultou na modelização de um objecto em termos de balões 3D deformáveis que podem ser insuflados para se ajustarem a conjuntos de dados de imagens médicas e de outros tipos [Cohen, 1992].

No método dos elementos finitos as funções de interpolação usadas permitem a consideração da continuidade das propriedades do material, tal como a massa e a rigidez, de forma a serem integradas ao longo da região de interesse. Note-se que, apesar da similaridade das equações resultantes, tal abordagem é bastante diferente da baseada na técnica das diferenças finitas [Bathe, 1996; Pentland, 1991; Segerlind, 1984]. Particularmente significativo é que o método dos elementos finitos disponibiliza uma caracterização analítica da superfície entre nodos e pode garantir convergência para uma solução [Bathe, 1996], enquanto os métodos de diferenças finitas não o permitem.

Contudo, indiferentemente da utilização do método dos elementos finitos ou das diferenças finitas, as representações baseadas em princípios físicos não podem ser utilizadas directamente na comparação de objectos. Virtualmente todos os métodos baseados em *splines*, em placas finas ou em polinómios apresentam esta inadequação para a obtenção de descrições canónicas [Sclaroff, 1995]; tal problema deve-se ao facto de os parâmetros para as superfícies poderem ser definidos de forma arbitrária, e assim não serem invariantes às alterações do ponto de vista, às oclusões, ou às deformações não rígidas. Para uma qualquer representação que utilize malhas, o único método geral para determinar se duas superfícies são equivalentes é gerar um número de pontos amostrados em posições correspondentes nas duas superfícies e observar as distâncias entre esses dois conjuntos de pontos. Além de se tratar de uma abordagem grosseira e custosa, pode acontecer que as superfícies apresentem parametrizações bastante diferentes o que implica o aumento da dificuldade na geração dos pontos de

amostragem em posições correspondentes.

2.2.3 – Decomposição modal

Para resolver o problema de não unicidade da representação obtida pela utilização de modelos deformáveis segundo princípios físicos foi apresentada uma solução baseada na análise modal em [Pentland, 1991]. Na análise modal, as equações resultantes do método dos elementos finitos são simplificadas por expressão destas equações dinâmicas utilizando os vectores próprios do modelo. Estes vectores próprios são designados por modos de deformação do modelo e, em conjunto, formam uma base ortonormal ordenada pela frequência para representação da forma do mesmo. A análise modal foi aplicada em problemas de obtenção da forma e de reconhecimento [Pentland, 1989a, 1990, 1991], e também para o seguimento de movimento não rígido [Pentland, 1989, 1991a].

Basicamente, a representação modal apresenta a vantagem de desagrupar os graus de liberdade do sistema dinâmico não rígido. Desacoplando os graus de liberdade obtêm-se vantagens substanciais, a mais importante das quais é o problema original se tornar mais simples e resolúvel de forma eficiente.

A transformação modal, por si só, não reduz o número de graus de liberdade, e assim a representação modal completa apresenta o mesmo problema de não unicidade de outras representações. A solução do problema passa pela eliminação de um número suficiente dos modos de frequências mais elevadas; a utilização de uma representação modal de base reduzida também origina uma representação única da forma, pois os modos formam um conjunto de base ortonormal ordenado pela frequência, semelhante à decomposição de Fourier. Tal como na decomposição de Fourier, desde que seja assumida uma subamostragem regular, a redução do número de pontos de amostragem não altera as componentes de frequências reduzidas. Do mesmo modo, a amostragem local e o ruído afectam principalmente os modos de frequências elevadas, e não os modos de frequências reduzidas. O resultado é um modelo deformável paramétrico cujos parâmetros apresentam um significado físico intuitivo.

Os modos utilizados para descrever a deformação de um objecto são determinados pela resolução de um problema de valores próprios de uma matriz de elevadas dimensões; tal significa que a análise modal pode apresentar a desvantagem de a base modal ser de difícil cálculo em tempo real. Contudo, verificou-se que para uma classe particular de formas similares os modos podem ser pré-calculados e generalizados [Pentland, 1990, 1991a]; para alguns casos, com topologias esféricas e tubulares, é demonstrado que os modos de deformação podem ser determinados de forma analítica [Nastar, 1993a, 1994].

A utilização da representação modal proporciona uma solução computacionalmente conveniente para a obtenção de um modelo de elementos finitos paramétrico, ao mesmo tempo que também resolve os problemas associados à amostragem e à não unicidade; contudo, um outro problema continua sem resolução. Em cada um dos métodos baseados em

princípios físicos a ligação por uma mola virtual entre pontos dos dois objectos especifica implicitamente as correspondências entre alguns dos nodos dos objectos deformáveis. Geralmente a correspondência a utilizar para o estabelecimento destas ligações não é conhecida e deve ser determinada. Por vezes, para o método apresentar um bom desempenho, o utilizador necessita de especificar manualmente quais as ligações adequadas a serem consideradas. Este é o aspecto mais problemático da modelização segundo princípios físicos; tal não deve ser surpreendente pois este problema é similar ao de determinação de correspondência entre objectos existente em muitas aplicações da visão por computador.

2.2.4 – Representações próprias

Existe uma classe de métodos próprios que derivam a sua parametrização directamente a partir da forma dos dados e, deste modo, evitam o problema da fixação das molas virtuais. Algumas destas técnicas também tentam determinar, de forma explícita e automática, as correspondências entre conjuntos de pontos característicos, enquanto outras evitam especificar a correspondência ao nível de características, mas procuram emparelhar imagens utilizando abordagens mais globais. Tal como na análise modal, cada um dos métodos próprios decompõe a deformação do objecto numa base ortogonal e ordenada. Geralmente estes métodos dividem-se em três categorias: formas próprias (*eigenshapes*), deformações próprias (*eigenwarps*), e imagens próprias (*eigenpictures*).

Formas próprias

A ideia base dos métodos baseados nas formas próprias é simples: a forma é descrita por uma matriz, simétrica e definida positivamente, medindo a ligação existente entre os dados pontuais. Esta descrição da forma pode ser decomposta de maneira única num conjunto de componentes lineares por análise dos vectores próprios da matriz de forma, e os vectores próprios resultantes podem ser utilizados para descrever as deformações mais significativas para tal classe de objectos. Estas deformações principais são similares aos eixos de simetria generalizados de um objecto, pois descrevem os eixos principais da sua deformação.

Uma destas matrizes para a descrição da forma, a matriz de proximidade [Shapiro, 1991, 1992, 1992a], é fortemente relacionada com a teoria potencial clássica e descreve distâncias com ponderação Gaussiana entre dados pontuais. Os vectores próprios desta matriz podem ser utilizados para determinar a correspondência entre dois conjuntos de pontos.

Deformações próprias

Em [Cootes, 1992] é introduzido um método para capturar as propriedades invariantes de uma classe de formas baseado na ideia de determinar as variações principais de um modelo de contorno. O método tem por base a representação de objectos como um conjunto de pontos etiquetados e a análise estatística das suas variações num conjunto de treino. Uma matriz de covariância é construída para a descrição dos deslocamentos dos pontos do modelo relativamente ao centróide do protótipo. Seguidamente é realizada uma análise de

componentes principais desta matriz de covariância e, depois, um reduzido número das componentes mais significativas é utilizado para o controlo das deformações do modelo.

Esta técnica tem a vantagem de poder ser treinada de maneira a capturar a informação ao longo dos eixos mais importantes de variação para o conjunto de treino e, deste modo, para a variação estimada nos novos modelos que sejam encontrados na mesma classe de objectos.

A técnica é baseada directamente nos pontos característicos amostrados. Quando diferentes pontos característicos são determinados em vistas distintas, ou resultam de densidades de amostragem desiguais, as matrizes de forma para duas vistas serão diferentes, mesmo que a pose e a forma do objecto sejam idênticas. O método também não pode incorporar informação acerca da conectividade entre características; isto é, os dados são tratados como nuvens de pontos idênticos. Uma desvantagem ainda mais significativa que este método apresenta é a sua inadequação para deformações acentuadas, a menos que previamente sejam dadas as correspondências entre características [Sclaroff, 1995].

Numa tentativa de diminuir os problemas associados a esta metodologia surgiram várias propostas de melhoramentos. Assim, em [Hill, 1994] é apresentada uma solução para a determinação automática dos pontos a serem utilizados na geração dos modelos e para a determinação da correspondência pontual, sendo apresentados resultados em imagens do coração e da mão. Em [Cootes, 1995] estes modelos são complementados com modelos de forma baseados na análise dos elementos finitos. Basicamente, a solução apresentada baseia-se na tradução das deformações admissíveis pela utilização dos modos de vibração do modelo finito, quando existem poucas formas de treino, e na consideração de mais modos estatísticos, quando um maior número de formas de treino está disponível.

Imagens próprias

Um outro grupo de métodos de descrição própria é designado por imagens próprias, pois estes métodos executam o cálculo das componentes principais directamente a partir das imagens originais. Utilizando esta abordagem foram construídos sistemas que executam com estabilidade o reconhecimento de faces, o reconhecimento de veículos, o seguimento de veículos em estradas, etc.

Por exemplo, em [Turk, 1991] é utilizada esta técnica para a descrição de novas faces por determinação das variações principais num vasto conjunto de treino de imagens em níveis de cinzento. Para reconhecer uma nova face, é determinada uma solução que sintetiza a nova face a partir de uma combinação pesada das faces próprias. A nova face pode ser posteriormente reconhecida pela comparação da solução para a sua síntese com as soluções para as sínteses das faces conhecidas. No limite, a decomposição em faces próprias pode conter muitas faces na sua base mas, geralmente, truncando-se para apenas as primeiras 10-20 faces próprias pode-se contemplar até 99% da variância do conjunto de treino [Sclaroff, 1995]. Além do mais, a descrição de faces pode ser conseguida com um número reduzido de parâmetros. Esta transformação para o espaço próprio truncado descreve um subespaço designado por espaço facial.

Como originalmente proposta, esta técnica apresenta problemas relativos a alterações na escala, na orientação e na iluminação. Em [Moghaddam, 1994; Pentland, 1994] este método foi estendido de forma a incorporar espaços próprios modulares, que podem incluir informação sobre alterações do ponto de vista, e modelos próprios, para melhor modelizar características faciais como os olhos, o nariz e a boca.

A utilização de subespaços para o reconhecimento de faces, reconhecimento de linguagem gestual e detecção de objectos é também realizada em [Moghaddam, 1997].

Em [Belhumeur, 1997] é apresentada uma abordagem baseada na análise de componentes principais para o reconhecimento de faces que é invariante à iluminação e às suas variações.

A análise de componentes principais é também utilizada em [Craw, 1999] para a detecção e reconhecimento de faces, em [Ohba, 1997] para o reconhecimento de objectos múltiplos, e em [Swets, 1996] para o reconhecimento de faces e de outros objectos.

Geralmente, apesar dos aperfeiçoamentos que tem vindo a sofrer, este método não consegue contemplar adequadamente os problemas associados ao escalamento, à rotação e às deformações [Sclaroff, 1995].

2.3 – Análise de movimento não rígido

O problema da análise de movimento não rígido é complexo: a não rigidez implica a variação da forma e, eventualmente, a variação da topologia da estrutura. Um objecto não rígido não pode ser representado por um conjunto fixo de parâmetros, a menos que certas restrições sejam utilizadas no comportamento do objecto. Assim, ao contrário do movimento rígido, não é possível utilizar um algoritmo geral para determinação dos parâmetros do movimento. Consequentemente, é necessário classificar o movimento não rígido de forma a guiar a escolha da abordagem a utilizar. Os objectos não rígidos podem ser separados em diferentes tipos tais como: articulados, elásticos e fluidos [Kambhamettu, 1998]. Diferentes métodos para a análise de movimento podem ser mais adequados para cada tipo. Limitando o âmbito de um problema de análise de movimento não rígido a um tipo particular, é possível definir considerações não rígidas específicas que podem ser incorporadas como restrições computacionais nos algoritmos a utilizar.

Nos últimos anos têm vindo a realizar-se progressos significativos na análise de movimento não rígido. Nesta secção, são classificadas diferentes abordagens na análise de movimento não rígido e indicadas as considerações e condições que utilizam.

É importante notar que as questões de análise de movimento e modelização da forma se tornam inseparáveis quando se considera o movimento do tipo não rígido. A perspectiva orientada à modelização sugere uma classificação possível da forma não rígida e do movimento. Modelos de forma não rígida podem ser divididos em dois grandes grupos: modelos locais e modelos globais. As abordagens de modelização local, concentram-se nas representações da forma local e incluem os métodos baseados em geometria diferencial e os métodos físicos baseados na técnica dos elementos finitos. Abordagens de modelização global

incluem vários modelos parametrizáveis (que são várias vezes adequados tanto para objectos rígidos como para não rígidos) tais como harmónicos esféricos, modelos polinomiais globais, hiperquádricos, etc. A classificação local/global não é a única possível e, de facto, vários autores desenvolveram recentemente modelos de forma com características globais e locais em simultâneo.

2.3.1 – Classificação do movimento não rígido

Uma classificação possível do movimento de objectos 3D, especialmente as suas superfícies, pode contemplar as seguintes classes¹ [Kambhamettu, 1998]:

- *Movimento rígido* – a distância entre quaisquer dois pontos do objecto é preservada. O objecto não estica nem dobra; desde modo, a curvatura² média e a curvatura Gaussiana na superfície mantêm-se invariantes.
- *Movimento articulado* – conjunto de elementos cada um dos quais com movimento rígido. Envolve o movimento de partes rígidas conectadas por ligações não rígidas. Claramente neste caso as restrições de rigidez são mais relaxadas.
- *Movimento quase rígido* – as deformações são limitadas a pequena amplitude. Quando visto em intervalos de tempo suficientemente reduzidos o movimento não rígido entre imagens é quase rígido.
- *Movimento isométrico* – movimento não rígido que preserva o comprimento ao longo da superfície assim como os ângulos entre curvas sobre a mesma.
- *Movimento homotético* – expansão ou contracção uniforme da superfície.
- *Movimento conforme* – movimento não rígido que preserva os ângulos entre curvas da superfície mas não os comprimentos das curvas.
- *Movimento elástico* – movimento não rígido cuja única restrição é algum grau de continuidade ou suavização. Este é o tipo de movimento de um objecto sólido mais difícil de analisar.
- *Movimento fluído* – movimento não rígido geral, não necessariamente contínuo. Pode envolver variações de topologia e deformações turbulentas.

¹ Também é comum verificar-se a classificação do movimento não rígido em apenas três classes: articulado, elástico e fluído.

² As superfícies têm dois tipos principais de curvatura [Farin, 1996]: a média e a Gaussiana. Nos pontos de uma superfície existem dois valores extremos de curvatura: k_1 e k_2 , designados por curvaturas principais; o produto $k_1 k_2$ é designado por curvatura Gaussiana e a soma $1/2(k_1 + k_2)$ é designada por curvatura média.

2.3.2 – Classes restringidas de movimento não rígido

2.3.2.1 – Movimento articulado

Um objecto articulado é um tipo de objecto não rígido bastante restringido, composto por partes rígidas com ligações entre si que permitem estilos definidos de movimento. Alguns exemplos simples de objectos articulados são: braços, pernas, tesouras, alicates, esqueletos de animais e manipuladores robóticos. A importância do movimento articulado no movimento de robôs é uma das razões para a sua grande importância na análise de movimento não rígido.

Um objecto pode ser classificado como articulado pela observação do seu comportamento ao longo de determinado período de tempo e comparando a sequência de imagens com todas as formas válidas que podem ser geradas por um modelo articulado conhecido. Uma outra abordagem viável é considerar toda a sequência de imagens de um objecto e integrá-las em função dos graus de liberdade de articulação em cada ponto. Muita investigação tem vindo a ser realizada na modelização, no reconhecimento e na análise de movimento do tipo articulado. Em geral, quando comparado com os restantes tipos de movimento não rígido, tem vindo a verificar-se um maior desenvolvimento neste tipo de movimento [Kambhamettu, 1998]. Tal deve-se ao facto de existir a possibilidade de decompor o corpo articulado em partes rígidas e aplicar-se a análise de movimento rígido em cada uma dessas partes.

Em [Pentland, 1990] é utilizada uma abordagem física para sistemas articulados, baseada no método dos elementos finitos e na dinâmica modal, para a segmentação da imagem 2D e posterior ajuste de modelos deformáveis a dados 3D associados com a imagem.

Um modelo para a representação de movimento não rígido, baseado em elasticidade relativa, com o qual é possível obter-se o movimento e a estrutura de objectos deformáveis articulados, sem o prévio conhecimento dos seus parâmetros físicos, é apresentado em [Smith, 1995]. Trata-se de uma tentativa de utilizar as técnicas aplicadas em movimento de objectos rígidos incluindo a elasticidade relativa nas equações de movimento rígido.

A análise de objectos articulados ou que se dobram é também considerada em [Sozou, 1995] através de uma generalização não linear dos modelos de distribuição de pontos utilizando regressão polinomial e permitindo, deste modo, que os pontos de controlo se desloquem segundo trajectórias polinomiais. Esta abordagem foi utilizada na análise de cromossomas em imagens, e complementada com a utilização de redes neuronais em [Sozou, 1995a].

Em [Kakadiaris, 1994, 1995, 1996] é estimado o movimento e a forma de objectos articulados utilizando uma abordagem física, por intermédio do método dos elementos finitos, e filtragem de Kalman [Maybeck, 1979] para estimar a posição do modelo na imagem seguinte.

Em [Jones, 1999] é apresentada uma abordagem que utiliza características invariantes dos objectos articulados para o reconhecimento baseado em modelos construídos previamente. Esta abordagem é aplicada em imagens de radar.

O problema de reconhecimento da forma de objectos articulados e deformáveis é também tratado em [Pelillo, 1999], através da utilização de grafos e de árvores de pesquisa para a determinação dos emparelhamentos.

Em [Tsap, 1999] é tratado o problema da análise de movimento não rígido de objectos elásticos e articulados utilizando modelos de elementos finitos não lineares, construídos a partir de conhecimento prévio do objecto e dos seus dados 3D. A ideia base da metodologia utilizada é a determinação das forças que são responsáveis pelo movimento ou deformação da forma do objecto, sem a necessidade da determinação da correspondência pontual.

2.3.2.2 – Movimento quase rígido

O movimento quase rígido restringe o grau de deformação. Um movimento geral não rígido é quase rígido quando analisado em intervalos de tempo suficientemente reduzidos entre imagens, isto é, quando a amostragem temporal for suficientemente elevada.

O trabalho inicial na área do movimento não rígido foi formulado tendo por base o facto de um objecto real não poder alterar a sua forma instantaneamente devido à inércia. Quando uma translação, uma rotação, e uma deformação, são aplicadas a um objecto e uma sequência de imagens é adquirida, utilizando-se intervalos de tempo reduzidos, o movimento não rígido que ocorre entre imagens é diminuto.

Em [Sethi, 1987] é abordado o problema da determinação da correspondência pontual em movimento não rígido. O método apresentado para estabelecer correspondências de objectos não rígidos em sequências de imagens utiliza uma restrição de suavidade do movimento. Utilizando coerência das trajectórias, é formulado um problema de optimização que assume que o objecto não pode alterar a sua forma instantaneamente. A abordagem utilizada implica que as trajectórias pontuais 2D, resultantes das projecções das trajectórias 3D, sejam suaves, resultando as trajectórias mais suaves entre todas as possíveis. Tal abordagem resolve automaticamente o problema da correspondência; contudo, esta técnica é computacionalmente intensiva, dependendo do número de imagens a considerar, e baseia-se na suavidade de movimento 2D.

Uma abordagem similar para medir as trajectórias pontuais em objectos deformáveis em sequências de imagens é apresentada em [Duncan, 1991], em que a fronteira do objecto é modelizada como um contorno deformável e os seus segmentos locais são seguidos ao longo da sequência temporal. É assumido reduzido movimento para as características utilizadas, de maneira a determinar-se os pontos candidatos a cada emparelhamento. A estimativa do movimento é realizada por emparelhamento de segmentos locais entre pares de contornos, baseada na minimização da deformação entre segmentos utilizando como medida a energia de flexão. A abordagem apresentada foi aplicada no seguimento do movimento do ventrículo esquerdo do coração.

Em [Zhang, 1992, 1994] é apresentada uma técnica iterativa, baseada no método dos mínimos quadrados, para determinar o emparelhamento entre os pontos de uma curva com os

pontos mais próximos de uma outra curva, admitindo que o movimento é reduzido. Também em [Kumar, 1995] é considerado o problema da determinação da correspondência entre pontos de objectos não rígidos ao longo de sequências de imagens. No método apresentado, é assumido que na imagem seguinte a localização de cada ponto é interior a um dado círculo centrado na posição que tinha na imagem anterior. Para determinar a correspondência é minimizada a soma dos quadrados das distâncias utilizando resultados das teorias dos grafos.

Em [Tavares, 1995a, 1995b, 1995c] é descrita uma abordagem para o seguimento de linhas ao longo de sequências de imagens para a obtenção de estrutura a partir do movimento conhecido de uma câmara. Após a detecção e seguimento das linhas presentes em cada imagem, é realizada a sua aproximação poligonal, simplificação dos segmentos de recta determinados em cada imagem e é realizado o seguimento destes segmentos ao longo da sequência. No seguimento é utilizada filtragem de Kalman, para prever o estado das entidades em cada etapa do movimento, e a distância de Mahalanobis em conjunto com restrições geométricas para o estabelecimento das correspondências.

2.3.2.3 – Movimento isométrico, homotético e conforme

O movimento isométrico é definido como o movimento que preserva o comprimento ao longo da superfície assim como os ângulos entre curvas sobre a mesma. Este tipo de movimento pode ser caracterizado como mantendo a curvatura Gaussiana, mas não a curvatura média. Um exemplo deste tipo de movimento é uma deformação por flexão, como por exemplo a flexão de um pedaço de papel, ou de uma placa metálica, a partir de uma configuração plana até uma forma cilíndrica. O movimento isométrico limita severamente a não rigidez, pois para muitos objectos curvos, tais como a esfera, a isometria não é possível.

Actualmente existem muitas abordagens para estimar o movimento isométrico a partir de sequências de imagens 2D. É importante notar que geralmente este tipo de métodos assume que a correspondência pontual entre imagens está previamente determinada [Kambhamettu, 1998].

O movimento homotético envolve expansão ou contracção uniforme de uma superfície, isto é, o estiramento (a quantidade de expansão ou de contracção) é igual em todos os pontos da superfície. O movimento isométrico é um caso especial de movimento homotético com o parâmetro de estiramento unitário em todos os pontos da superfície. Exemplos do movimento homotético incluem a expansão ou a contracção de um balão e uma esfera.

Em [Goldgof, 1988] é considerada a utilização das curvaturas média e Gaussiana para a classificação do movimento, e os movimentos articulados e homotéticos merecem destaque. Na abordagem utilizada, o estiramento da superfície durante o movimento é um parâmetro de movimento adicional. É realizada a extracção do estiramento da superfície sujeita a uma transformação homotética (constante em todos os pontos), e também são detectadas as partes da superfície onde o movimento homotético é violado.

O movimento conforme é definido como um movimento que preserva os ângulos entre as curvas na superfície, mas não os comprimentos. O movimento homotético é uma classe restrita do movimento conforme.

Em [Mishra, 1991] é apresentado um algoritmo para a determinação do estiramento local a partir da curvatura Gaussiana, baseado em aproximações polinomiais (lineares e quadráticas) da função de estiramento, sobre movimento conforme. A expressão utilizada para o estiramento linear em movimento conforme requer pelos menos a correspondência entre três pontos. Uma característica deste algoritmo é a não necessidade da preservação do sistema de coordenadas entre quaisquer dois conjuntos de dados. Este algoritmo é aplicado para estimar o estiramento da parede do ventrículo cardíaco esquerdo a partir dos dados obtidos por angiografia coronária.

Em [Amini, 1991] é apresentada uma abordagem para o seguimento da correspondência de pontos do ventrículo esquerdo em movimento que, além do modelo de estiramento, utiliza um modelo adicional para a flexão. A física do modelo do ventrículo esquerdo é simulada por uma placa fina, e o movimento envolvido é seguido por minimização da flexão e da divergência do estiramento conforme. As direcções principais antes e depois do movimento são utilizadas para definir o sistema de coordenadas.

2.3.3 – Movimento não rígido geral

Muitos autores têm vindo a trabalhar no problema da análise do movimento não rígido geral. Neste domínio, o movimento, além da invariância topológica, tem poucas restrições. A análise de movimento não rígido geral é possível em situações para as quais existem modelos específicos que utilizam conhecimento prévio sobre a aplicação em causa (métodos baseados em modelos). Contudo, abordagens mais globais podem utilizar restrições mais genéricas como, por exemplo, a suavidade do movimento.

2.3.3.1 – Movimento elástico

O movimento elástico é um movimento não rígido no qual a única restrição é algum grau de continuidade ou suavidade. Exemplos são o movimento de materiais elásticos como a borracha, de materiais viscoelásticos tais como a argila e o barro, e de materiais plásticos. Este tipo de movimento de objectos sólidos é o mais difícil de analisar. Movimento elástico inclui movimento rígido mais deformações de estiramento, de flexão e de torção.

Em [Terzopoulos, 1988] é introduzida uma abordagem genérica, baseada em princípios físicos para estimar o movimento elástico, utilizando modelos deformáveis. Estes modelos são definidos por primitivas dinâmicas construídas por material elástico simulado. O material, representado matematicamente por meio de *splines* generalizadas, permite utilizar restrições de suavidade intrínsecas e torna possível a determinação do movimento contínuo não rígido. Tal como os objectos reais, os modelos deformáveis movem-se em resposta a forças aplicadas

de acordo com os princípios da mecânica Lagrangiana. Nesta abordagem dinâmica, campos de forças externas são utilizados para aproximar o modelo deformável aos objectos da imagem. Estes campos são derivados a partir de funções de potencial e calculados a partir das imagens a considerar. Assim que o modelo deformável atinge o equilíbrio no campo de forças externas, ele reconstrói a forma do objecto em questão. Quando presentes em imagens de sequências de objectos em movimento não rígido, os modelos deformáveis são aptos a estimar e a seguir o movimento existente.

Esta abordagem física é também aplicável ao movimento não rígido plano, por exemplo através das *snakes*.

Estimadores recursivos do movimento não rígido têm vindo a ser desenvolvidos, utilizando as equações do movimento dos modelos deformáveis como modelos de sistema numa abordagem de estimação não linear por filtragem de Kalman.

2.3.3.2 – Movimento fluído

O movimento fluído é o tipo mais geral de movimento não rígido e inclui o movimento de objectos gasosos e líquidos. Estes movimentos, que não necessitam de ser contínuos, podem exibir estruturas topológicas altamente variáveis assim como comportamento não suave como, por exemplo, turbulência. Quando comparado com outras classes de movimento não rígido, relativamente pouco trabalho foi ainda realizado na análise deste tipo de movimento.

2.3.4 – Modelos de forma para objectos não rígidos

A modelização de formas para a análise de movimento não rígido tem vindo a atrair cada vez mais atenção. Modelos de forma poderosos são necessários para representar eficientemente objectos deformáveis e seguir os seus movimentos não rígidos. Primitivas parametrizáveis globais, tais como superquádricas e hiperquádricas, têm surgido como úteis na representação de formas. Estas primitivas permitem que sólidos e superfícies sejam construídos e facilmente modificados, utilizando-se apenas poucos parâmetros. Modelos parametrizáveis globais são úteis para o reconhecimento de objectos, utilizando-se bibliotecas de modelos. Uma outra classe útil de modelos de forma é a dos modelos de *splines* e de malha com forma livre, cuja definição envolve vários parâmetros locais. Estes modelos são úteis para o controlo local da forma e para representar detalhes locais. Recentemente, modelos híbridos têm vindo a ser propostos por combinação das características das representações parametrizáveis locais e globais. Existem muitos objectos reais que, para se obter uma simulação mais fidedigna, devem ser modelizados segundo primitivas volumétricas. Versões dinâmicas e baseadas em princípios físicos de alguns modelos destas classes têm vindo a ser propostas e são referenciadas nos pontos seguintes.

2.3.4.1 – Modelos locais

Trabalho significativo na área da visão por computador tem vindo a ser realizado no desenvolvimento de algoritmos de reconstrução da forma baseados em modelos locais utilizando *splines* generalizadas.

Em [Terzopoulos, 1991a] é apresentado um método que utiliza malhas adaptativas para amostragem não uniforme e reconstrução de dados de intensidade e de profundidade. Malhas adaptativas são modelos dinâmicos discretos agrupados por interligação de massas nodais por molas não lineares ajustáveis. Os nodos não são fixos e podem-se mover sobre a superfície. As molas podem ajustar automaticamente a sua rigidez utilizando a informação local sobre a profundidade, o gradiente e/ou a curvatura, de maneira a concentrar os nodos sujeitos a variações rápidas da forma. Assim, a posição dos nodos e a rigidez das molas que os ligam alteram-se automaticamente em função das propriedades da superfície (ou da imagem).

Malhas adaptativas elásticas, dependentes da presença de orlas de intensidade e/ou de pontos de elevada curvatura, são também utilizadas em [Benayoun, 1994, 1994a] na determinação do movimento 2D e 3D não rígido segundo princípios físicos, utilizando o método dos elementos finitos e minimização de energia. A metodologia apresentada é aplicada na reconstrução de imagens, nomeadamente, na área da imagem médica. Também em [Moulin, 1992] são utilizadas malhas elásticas adaptativas para compressão, restauração e representação de imagens.

2.3.4.2 – Modelos globais

Os harmónicos esféricos são comuns no desenvolvimento de modelos globais. O modelo harmónico esférico é uma representação paramétrica da superfície fechada que pode ser descrita por uma função radial. O modelo, de conceito similar ao descriptor de Fourier, decompõe a função radial em várias funções de base ortogonal. A desvantagem associada a tais modelos é que a função de base é global, tal como as funções seno e co-seno no descriptor de Fourier.

Em [Pentland, 1991a] é apresentada uma abordagem para a obtenção de movimento não rígido baseada num elemento finito elástico isoparamétrico do tipo hexaédrico com 20 nodos. O elemento aplica uma deformação global parametrizada a um modelo geométrico fechado do tipo esfera, cubo ou superquádrico. O algoritmo adoptado utiliza análise modal aproximada de maneira a desacoplar os graus de liberdade do elemento em modos rígidos e não rígidos. Na abordagem apresentada é modelizada e simulada a física do movimento elástico para estimar a forma do objecto e a sua velocidade. A estimação da forma é integrada ao longo do tempo, pela utilização de filtragem de Kalman, resultando uma estimação estável da forma 3D e também da velocidade 3D.

2.3.4.3 – Modelos híbridos

Em [Terzopoulos, 1991] é apresentada uma abordagem física para ajustar formas 3D complexas, utilizando uma nova classe de modelos dinâmicos que podem deformar-se localmente e globalmente ao mesmo tempo. É utilizada a formulação de superquádricas deformáveis, que incorpora os parâmetros globais da forma de um superelipsóide convencional com os graus de liberdade locais de uma *spline*.

O seguimento de objectos 3D utilizando modelos deformáveis híbridos segundo princípios físicos é realizado em [Metaxas, 1991]. Os modelos utilizados resultam da combinação de modelos superquádricos parametrizáveis, para as deformações globais, e de *splines* generalizadas, para as deformações locais.

Em [Donnell, 1994, 1994a] são utilizados cilindros generalizados deformáveis periodicamente para a transformação do problema de seguimento 2D num problema de ajuste de modelo 3D. Estes cilindros têm componentes rígidos (globais) e deformáveis (locais) e são utilizados no seguimento do ventrículo cardíaco esquerdo em fatias (*slices*) da parede deste.

Um modelo hiperquádrico híbrido é utilizado em [Cohen, 1994] para o ajuste de dados 2D e 3D de imagens médicas, que descreve propriedades locais e globais através de uma equação implícita e única para a representação da forma, sendo o ajuste obtido por minimização de energia.

Em [Metaxas, 1996] são utilizados modelos deformáveis elasticamente adaptativos para estimar a forma de objectos utilizando modelos deformáveis 2D e 3D, cujos parâmetros de elasticidade variam em função do erro de ajuste. São utilizados dois filtros independentes de Kalman: um para a transformação rígida e um outro para as deformações locais.

Em [DeCarlo, 1996, 1998] são desenvolvidos modelos alternativos que combinam elementos descritores primitivos, como por exemplo cilindros flexíveis, numa estrutura global. Assim, os novos modelos paramétricos resultam da interpolação linear de duas formas paramétricas, segundo os seus eixos médios, utilizando uma função de fusão governada por princípios físicos.

2.3.4.4 – Modelos volumétricos

Vários autores têm explorando a utilização de modelos deformáveis volumétricos ou sólidos para a face e a cabeça humana em aplicações de computação gráfica, como por exemplo [Essa, 1992, 1994, 1994a, 1995, 1997], e em aplicações médicas, particularmente em cirurgia reconstrutiva, como por exemplo [Cotin, 1996, 1999; Delingette, 1994], e para seguir e analisar o movimento do ventrículo esquerdo de forma mais precisa como, por exemplo, em [Park, 1996].

Outra aplicação dos modelos deformáveis volumétricos é na simulação cirúrgica; por exemplo, em [Bro-Nielsen, 1996] são utilizados elementos finitos volumétricos sólidos 3D para simular em tempo real o comportamento elástico em situações de cirurgia.

Em [Chan, 1994] é tratado o seguimento de objectos 3D em sequências 2D de imagens estéreo, segundo princípios físicos que assumem que os objectos são construídos a partir de classes de primitivas volumétricas. Na primeira imagem é realizado o ajuste de um modelo deformável, utilizando um elipsóide superquádrico deformável como referência, e é utilizada filtragem de Kalman para estimar o movimento e a forma do objecto, existindo a possibilidade de seguir vários objectos de forma independente. Esta abordagem é utilizada em [Chan, 1994a] na determinação da posição e estimação da forma de um objecto a partir de várias vistas do mesmo.

2.4 – Modelos deformáveis

Os fundamentos matemáticos dos modelos deformáveis representam a confluência da geometria, da física e da teoria da aproximação. A geometria serve para representar a forma do objecto, a física impõe restrições ao modo como esta pode variar no espaço e no tempo, e a teoria da aproximação óptima justifica formalmente o mecanismo para ajustar modelos aos dados.

Geralmente a geometria dos modelos deformáveis permite uma cobertura vasta de formas, pela utilização de representações geométricas que envolvem vários graus de liberdade, como as *splines*. Contudo, o modelo permanece controlável porque geralmente os graus de liberdade não são passíveis de evoluir independentemente, sendo antes governados por princípios físicos que conferem à geometria um comportamento intuitivamente significativo. A designação “modelo deformável” teve origem na utilização da teoria da elasticidade a um nível físico, geralmente num cenário de dinâmica Lagrangiana. A interpretação física de modelos deformáveis como corpos elásticos permite que estes respondam naturalmente a forças e a restrições aplicadas. Tipicamente estão associadas aos modelos deformáveis funções de energia de deformação, definidas em termos dos graus de liberdade geométricos. A energia aumenta monotonicamente assim que o modelo se deforma e se afasta de uma forma natural específica (forma de equilíbrio), e várias vezes inclui termos que impõem a suavidade ou a simetria do modelo. Numa formulação Lagrangiana, a energia de deformação origina forças elásticas internas ao modelo. Seguindo uma abordagem física da aproximação óptima clássica, funções de energia potencial externas são definidas em termos dos dados existentes, aos quais o modelo se deve ajustar. Estas energias potenciais originam forças externas que deformam o modelo de maneira que o mesmo se ajuste aos dados presentes.

As *snakes* representam um caso especial da teoria original do modelo deformável multidimensional. Na sua forma básica, a formulação matemática das *snakes* deriva da teoria da aproximação óptima envolvendo funcionais.

2.4.1 – Modelos deformáveis por minimização de energia

Geometricamente, uma *snake* é um contorno paramétrico definido no plano de imagem $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ que pode ser representado como $v(s) = (x(s), y(s))^T$, onde x e y são as funções de coordenadas e $s \in [0, 1]$ é o domínio paramétrico. A forma do contorno sujeito a uma imagem $I(x, y)$ é ditada pelo funcional:

$$\mathcal{E}(v) = S(v) + P(v). \quad (2.1)$$

O funcional pode ser interpretado como a representação da energia do contorno - $\mathcal{E}(v)$ - e a forma final do contorno corresponde ao mínimo dessa energia. O primeiro termo no funcional é a energia de deformação interna:

$$S(v) = \int_0^1 w_1(s) \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|^2 + w_2(s) \left| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right|^2 ds. \quad (2.2)$$

Esta energia caracteriza a deformação de um contorno flexível e elástico. Duas funções definem as características físicas simuladas do contorno: $w_1(s)$ controla a tensão do contorno, enquanto $w_2(s)$ controla a sua rigidez³. O segundo termo na equação (2.1) atrai a *snake* para o objecto desejado na imagem. Tradicionalmente este termo tem a forma:

$$P(v) = \int_0^1 \Pi(v(s)) ds \quad (2.3)$$

onde $\Pi(v(s))$ significa uma função potencial escalar a definir no plano imagem. Para aplicar *snakes* em imagens, potenciais externos são definidos de maneira a que os seus mínimos locais coincidam com extremos de intensidade, orlas ou outras características com interesse na imagem. Por exemplo, o contorno será atraído para orlas de intensidade numa imagem $I(x, y)$ por escolha de um potencial $\Pi(x, y) = -c \left| \nabla [G_\sigma * I(x, y)] \right|$ onde c controla a magnitude do potencial, ∇ é o operador de gradiente, e $G_\sigma * I$ significa a convolução da imagem original com um filtro de suavização (Gaussiano), cujo desvio padrão σ controla a extensão espacial do mínimo local de Π .

De acordo com o cálculo de variações, o contorno $v(s)$ que minimiza a energia $\mathcal{E}(v)$ deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange:

³ Os valores das funções não negativas $w_1(s)$ e $w_2(s)$ determinam quanto a *snake* pode, em qualquer um dos seus pontos s , esticar ou flectir. Por exemplo, aumentando a magnitude de $w_1(s)$ aumenta-se a tensão e tende-se, por redução do comprimento da *snake*, a eliminar laços e ondas estranhos. Aumentando $w_2(s)$ aumenta-se a rigidez de flexão da *snake* e suaviza-se e diminui-se a flexibilidade da mesma. Fazendo com que o valor de uma ou de ambas seja nulo num ponto s permite-se a descontinuidade do contorno nesse ponto.

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \nabla \Pi(v(s)) = 0. \quad (2.4)$$

Esta equação diferencial parcial expressa o balanço das forças internas e externas quando o contorno atinge o equilíbrio.

2.4.2 – Modelos deformáveis dinâmicos

Apesar de ser natural interpretar a minimização da energia como um problema estático, uma abordagem interessante para determinar o mínimo local de um funcional como o da equação (2.1) é construir um sistema dinâmico governado pelo funcional que permita que o sistema evolua para o equilíbrio. O sistema pode ser construído aplicando-se os princípios da mecânica Lagrangiana, obtendo-se modelos deformáveis dinâmicos que unificam as descrições da forma e do movimento, permitindo assim a possibilidade de quantificar não só formas estáticas mas também a evolução de uma forma ao longo do tempo. Os modelos dinâmicos exibem comportamento com significado intuitivamente físico, o que torna as suas evoluções apropriadas para interagirem com um utilizador.

Um exemplo simples é uma *snake* dinâmica que pode ser representada pela introdução de um contorno variante no tempo $v(s,t) = (x(s,t), y(s,t))^T$ com densidades de massa $\mu(s)$ e de amortecimento $\gamma(s)$. As equações de movimento de Lagrange para uma *snake* com energia interna dada pela equação (2.2) e energia externa dada pela equação (2.3) é:

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = -\Delta \Pi(v(s,t)). \quad (2.5)$$

Os dois primeiros termos do lado esquerdo desta equação diferencial parcial representam as forças de inércia e de amortecimento; os termos remanescentes representam as forças internas de estiramento e de flexão, enquanto o lado direito representa as forças externas. O equilíbrio é obtido quando o somatório das forças internas e externas é nulo e o contorno atinge o repouso ($\partial v / \partial t = \partial^2 v / \partial t^2 = 0$), a que corresponde a condição de equilíbrio da equação (2.4).

2.4.3 – Discretização e simulação numérica

De maneira a determinar-se numericamente uma solução de energia mínima é necessário discretizar a função de energia $\mathcal{E}(v)$. A abordagem usual é representar o modelo geométrico contínuo v em termos de combinações lineares de funções de base com suporte local ou com suporte global. Elementos finitos [Bathe, 1996], diferenças finitas [Press, 1992], e *splines* geométricas [Farin, 1996] são métodos de representação locais, enquanto os baseados na transformada de Fourier [Schalkoff, 1989] são métodos de representação global. O modelo contínuo $v(s)$ é representado de forma discreta por um vector $\{u\}$ para os parâmetros da

forma associados com as funções de base. A forma discreta da energia $\mathcal{E}(v)$ da *snake* pode ser escrita como:

$$E(u) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} + P(\{u\}), \quad (2.6)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez e $P(\{u\})$ é a versão discretizada do potencial externo. A solução para o mínimo de energia resulta fixando o gradiente da equação (2.6) igual a 0; tal é equivalente a resolver o sistema de equações algébricas:

$$[K] \{u\} = -\nabla \{P\} = \{f\}, \quad (2.7)$$

onde $\{f\}$ é o vector de forças externas generalizadas.

A versão discreta das equações dinâmicas Lagrangianas dadas pela equação (2.5) pode ser escrita por um conjunto de equações às diferenças ordinárias de segunda ordem em $\{u(t)\}$:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{f\}, \quad (2.8)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa e $[C]$ é a matriz de amortecimento. As derivadas em ordem ao tempo na equação (2.5) são aproximadas por diferenças finitas e métodos explícitos ou implícitos de integração temporal são utilizados para simular o sistema ordinário de equações diferenciais resultante, em termos dos parâmetros da forma $\{u\}$.

2.4.4 – Modelos deformáveis probabilísticos

Uma abordagem alternativa para os modelos deformáveis deriva da resolução do processo de ajuste do modelo utilizando métodos probabilísticos. Tal permite a incorporação de características conhecidas *a priori* em termos de distribuições probabilísticas. Esta metodologia probabilística também possibilita uma medida da incerteza dos parâmetros estimados para a forma depois do ajuste do modelo aos dados da imagem.

Seja u a representar os parâmetros da forma do modelo deformável com uma probabilidade *a priori* $p(u)$ nos seus parâmetros. Seja $p(I|u)$ o modelo de sensor de imagem – a probabilidade de produzir uma imagem I dado um modelo u . O teorema de Bayes:

$$p(u|I) = \frac{p(I|u)p(u)}{p(I)} \quad (2.9)$$

expressa a probabilidade *a posteriori* $p(u|I)$ de um modelo dada a imagem, em termos do modelo da imagem e das probabilidades *a priori* do modelo e da imagem.

É fácil converter a medida da energia interna da equação (2.2) do modelo deformável

numa distribuição *a priori* sobre as formas esperadas, com as formas de menor energia a serem as mais prováveis. Tal é atingido utilizando uma distribuição de Boltzmann (ou de Gibbs) com a forma:

$$p(u) = \frac{1}{Z_s} \exp(-S(u)), \quad (2.10)$$

onde $S(u)$ é a versão discreta de $S(v)$ na equação (2.2) e Z_s é uma constante de normalização (designada por função de separação). Este modelo *a priori* é depois combinado com um modelo simples do sensor, baseado em medidas lineares com ruído Gaussiano:

$$p(I|u) = \frac{1}{Z_I} \exp(-P(u)), \quad (2.11)$$

onde $P(u)$ é uma versão discreta do potencial $P(v)$ na equação (2.3), que é uma função da imagem $I(x, y)$.

Os modelos podem ser ajustados por determinação de uma solução para u que maximiza localmente $p(u|I)$ na equação (2.9); tal é designado por solução (MAP) máxima *a posteriori*. Com a construção anterior, é obtido um resultado idêntico ao obtido por minimização da equação (2.1).

A abordagem probabilística pode ser expandida assumindo *a priori* um modelo variante no tempo (modelo de sistema) em conjunção com o modelo de sensor, resultando num filtro de Kalman. O modelo do sistema descreve a evolução esperada dos parâmetros u ao longo do tempo. Se as equações do movimento do modelo físico das *snakes* da equação (2.8) forem utilizadas como modelo do sistema, o resultado é um algoritmo de estimação sequencial conhecido por *snakes* de Kalman.

Por exemplo, em [Baumberg, 1993, 1994, 1994a] são utilizadas *snakes* em conjunção com filtragem de Kalman para o seguimento de pessoas a caminhar (sistemas articulados) ao longo de cenas estáticas. Também em [Byrne, 1994] é realizado este tipo de seguimento, incorporando o nível de cinzento na modelização, e utilizando modelos de forma flexível em conjunção com filtragem de Kalman. Em [Bascle, 1994] é realizado o seguimento e a análise do movimento rígido e não rígido, utilizando também contornos activos e filtragem de Kalman.

A obtenção de uma descrição das restrições na geometria diferencial de uma superfície, pela observação de uma curva da mesma numa sequência de imagens, é realizada em [Cipolla, 1992, 1992a], sendo o seguimento dos contornos efectuado por *snakes* de Kalman.

2.4.5 – Aplicações de modelos deformáveis

Os modelos deformáveis têm vindo a ser bastante utilizados para a segmentação, classificação e seguimento de objectos não rígidos em geral. Por exemplo em [Jain, 1996] é considerado um modelo protótipo (*template*) e um conjunto de deformações prováveis do mesmo para o emparelhamento de objectos deformáveis; em [Bimbo, 1997] é determinado o objecto existente numa base de dados que mais se assemelha a um esboço definido pelo utilizador, através de uma utilização de um protótipo deformável para o esboço; em [Mardia, 1997] são utilizados protótipos deformáveis para o reconhecimento de múltiplos objectos.

O problema da modelização, extracção, detecção e classificação de contornos deformáveis através de protótipos deformáveis é abordado em [Lai, 1994, 1994a]. Na metodologia adoptada são utilizadas *snakes* generalizadas (*g-snakes*), para representação de formas de maneira única e invariante a transformações afins, sendo a inicialização dos modelos obtida por utilização da transformada de Hough.

Os modelos deformáveis são bastante utilizados para a segmentação e classificação de veículos ao longo de sequências de imagens; exemplos podem ser verificados em [Dubuisson, 1995, 1996].

Outra área na qual os modelos deformáveis são também empregues é a segmentação, classificação e reconhecimento de caracteres; exemplos podem ser analisados em [Jain, 1997; Kopec, 1997; Lai, 1994, 1994a; Wilfong, 1996].

A análise e reconhecimento de faces é outra área em que os modelos deformáveis são bastantes comuns; exemplos podem ser encontrados em [DeCarlo, 1996; Essa, 1992, 1994, 1994a, 1995, 1997; Lanitis, 1995; Moghaddam, 1996; Yuille, 1989, 1992].

Actualmente também se verifica grande utilização de modelos deformáveis em aplicações de simulação cirúrgica; um exemplo é descrito em [Bro-Nielsen, 1996].

O elevado número de aplicações dos modelos deformáveis na área da imagem médica é, sem dúvida, responsável por uma elevada percentagem do trabalho desenvolvido no âmbito dos corpos deformáveis. Nas subsecções seguintes são indicadas algumas aplicações dos modelos deformáveis nessa área e referenciados alguns trabalhos desenvolvidos.

2.4.5.1 – Análise de imagem médica com modelos deformáveis

Apesar de originalmente desenvolvidos para aplicações em problemas de visão por computador ou em computação gráfica, o potencial dos modelos deformáveis na análise de imagem médica tem vindo a ser rapidamente utilizado. Assim, têm vindo a ser aplicados em imagens geradas por diversas modalidades de aquisição de imagem médica [Acharya, 1998] tais como raios X, tomografia computadorizada, angiografia, ressonância magnética e ultrasons. Modelos deformáveis bidimensionais e tridimensionais têm vindo a ser utilizados para segmentar, visualizar, seguir e quantificar, uma variedade de estruturas anatómicas que vão

desde a escala macroscópica até à microscópica [Elliott, 1995]. Tais estruturas incluem o cérebro, o coração, a face, as artérias da retina e coronárias, o rim, o pulmão, o estômago, o fígado, o crânio, as vértebras e a coluna vertebral, e mesmo estruturas celulares como neurónios e cromossomas. Modelos deformáveis têm vindo a ser utilizados no seguimento de movimento não rígido do coração, do pulmão, da artéria coronária [Puentes, 1998], do estômago, etc. Também têm sido utilizados para localizar estruturas no cérebro, e no alinhamento de imagens da retina, da estrutura vertebral e de tecidos neurológicos.

2.4.5.1.1 – Segmentação de imagem com curvas deformáveis

A segmentação de estruturas anatómicas é uma primeira etapa essencial em muitas tarefas de análise de imagem médica, tais como alinhamento, etiquetagem e seguimento de movimento. Estas tarefas requerem que as estruturas anatómicas presentes na imagem original sejam reduzidas para uma representação compacta e analítica da sua forma. Executar manualmente tal segmentação é um processo extremamente trabalhoso e moroso. Um primeiro exemplo é a segmentação do coração, especialmente o ventrículo esquerdo, em imagem cardíaca. A segmentação do ventrículo esquerdo é um pré-requisito para se obter informação diagnóstica [Monteiro, 1994] tal como a fracção de ejeção ou o volume ventricular, para a análise do movimento parietal, etc.

Um esquema de segmentação baseado em modelos deformáveis, utilizado de forma concertada com técnicas de pré-processamento de imagem, pode ultrapassar muitas das limitações da edição manual e das técnicas tradicionais de processamento de imagem. Estes modelos geométricos, contínuos e interligados, consideram a fronteira de um objecto como um todo e podem utilizar conhecimento existente *a priori* sobre a forma do mesmo para restringir o problema da segmentação. A continuidade inerente e a suavidade destes modelos pode compensar o ruído, fendas e outras irregularidades presentes nas fronteiras dos objectos. Além do mais, a representação paramétrica dos modelos possibilita uma descrição compacta e analítica da forma do objecto. Estas propriedades originam uma técnica robusta para ligar características de imagem dispersas e misturadas com ruído num modelo coerente e consistente para o objecto [McInerney, 1996].

Entre as várias utilizações dos modelos deformáveis em análise de imagem médica destacam-se os modelos de contorno deformáveis, tais como as *snakes*, para segmentar estruturas em imagens 2D, como, por exemplo, em [Cohen, 1991; Gupta, 1994; Solaiyappan, 1996]. Tipicamente os utilizadores iniciam um modelo deformável próximo do objecto desejado e permitem que o mesmo se deforme até atingir o equilíbrio. Os utilizadores podem usar as capacidades interactivas destes modelos e afiná-los manualmente. Quando o utilizador estiver satisfeito com o resultado numa imagem inicial, o modelo de contorno ajustado pode ser utilizado como a aproximação inicial na imagem seguinte da sequência que esteja a ser considerada. A sequência de contornos 2D resultante pode ser posteriormente ligada, para formar um modelo superficial 3D contínuo como, por exemplo, é realizado em [Cohen, 1991].

Em [Xu, 1999] são utilizadas curvas elásticas Gaussianas para a segmentação de zonas de

cancro da pele. A segmentação de imagens médicas de ultrasons utilizando *snakes* é apresentada em [Maurincomme, 1993]. Em tal aplicação, as curvas são inicializadas numa determinada posição previamente determinada sendo, assim, o processo totalmente automático. Contornos activos são também utilizados na segmentação de tecidos cerebrais em imagens de ressonância magnética em [Kapur, 1996]. Em [Fishman, 1996] são utilizados contornos deformáveis paramétricos na segmentação de imagens 2D para o planeamento cirúrgico.

A aplicação de *snakes* e outros modelos de contornos deformáveis similares para extrair regiões de interesse não é, contudo, isenta de limitações. Por exemplo, as *snakes* foram desenvolvidas como modelos interactivos e, em aplicações não interactivas, devem ser inicializadas próximas à estrutura desejada de forma a garantir-se um bom desempenho. As restrições da energia interna das *snakes* podem limitar a flexibilidade geométrica e impedir que uma *snake* represente formas longas e do tipo tubular ou formas com bifurcações ou protusões significativas. A topologia da estrutura desejada deve ser conhecida antecipadamente pois os modelos deformáveis de contorno clássicos são paramétricos e, sem mecanismos adicionais, são incapazes de transformações topológicas.

Vários métodos têm vindo a ser propostos para melhorar e automatizar o processo de segmentação por contornos deformáveis. Em [Cohen, 1991] é utilizada uma força interna de inflação, expandindo o modelo da *snake* de maneira a ultrapassar falsas orlas, originadas pelo ruído, fazendo assim com que a *snake* seja menos sensível às condições iniciais e ao ruído. Em [Grzeszczuk, 1997] é minimizada a energia de modelos de contornos activos, utilizando um algoritmo que obtém soluções globais de minimização e permite a incorporação de restrições não diferenciáveis.

Em [Herlin, 1992] é integrada, nos modelos de contorno deformáveis, informação baseada em regiões numa tentativa de diminuir a sensibilidade a falsas orlas e à localização inicial do modelo. Também em [Ronfard, 1994] é utilizada uma técnica semelhante para segmentar imagens médicas, e em [Chesnaud, 1999] é utilizada informação estatística de regiões para diminuir a sensibilidade das *snakes* ao ruído.

Contornos activos poligonais foram sugeridos em [Delagnes, 1995] para o seguimento de objectos em sequências de imagens com fundos complexos. Segundo os autores, utilizando polígonos ajustáveis (conjunto de segmentos activos) é possível aproximar a forma de qualquer objecto, ultrapassando-se as limitações das *snakes* originais na representação de objectos com elevado número de vértices. Na abordagem utilizada, a energia é baseada em informação de textura e a posição inicial do contorno é predita utilizando informação do movimento obtida por estimativa.

2.4.5.1.2 – Segmentação de imagem 3D com superfícies deformáveis

Modelos de superfícies deformáveis em 3D foram primeiramente utilizados em visão por computador em [Terzopoulos, 1988], [McInerney, 1996]. Muitos autores têm desde então explorado a utilização de modelos de superfície deformáveis para segmentação de estruturas em imagens médicas 3D.

Em [Cohen, 1992a, McInerney, 1995] são utilizados elementos finitos e técnicas baseadas em princípios físicos na implementação de cilindros e esferas elasticamente deformáveis. Os modelos são utilizados para segmentar a parede interna do ventrículo esquerdo do coração a partir de imagens 3D de ressonância magnética ou de tomografia computadorizada. As superfícies deformáveis utilizadas, propostas em [Cohen, 1991a], são baseadas numa superfície do tipo *spline* modelizada por uma placa fina sob tensão, que controla e restringe o estiramento e a flexão da superfície. Os modelos são dinamicamente ajustados aos dados por integração das equações Lagrangianas do movimento ao longo do tempo, de forma a ajustar os graus de liberdade da deformação. O método dos elementos finitos é utilizado para representar os modelos como uma superfície contínua utilizando somatórios ponderados de funções de base polinomial. Em [Pentland, 1991a; Nastar, 1993] também são desenvolvidos modelos físicos, mas é utilizada uma base modal reduzida para os elementos finitos.

Outros trabalhos que envolvem modelos de superfícies deformáveis 3D e aplicações de imagem médica são revistos em [Davatzikos, 1995].

2.4.5.1.3 – Incorporação de conhecimento *a priori*

Em imagem médica a forma geral, a localização e a orientação de objectos são conhecidas, e este conhecimento pode ser incorporado no modelo deformável sob a forma de condições iniciais, de restrições nos dados, de restrições dos parâmetros da forma, ou no processo de ajuste. A utilização implícita ou explícita de conhecimento anatómico no processo da determinação da forma é especialmente importante na interpretação automática e robusta em imagem médica. Para interpretação automática, é essencial obter um modelo que não apenas descreva o tamanho, a forma, a localização e a orientação do objecto-alvo, mas que também permita variações esperadas destas características. A interpretação automática em imagem médica pode aliviar os clínicos dos aspectos laboratorialmente intensivos, ao mesmo tempo que aumenta a precisão, a consistência e a reprodutibilidade das interpretações.

Um número considerável de autores têm vindo a incorporar o conhecimento da forma do objecto nos modelos deformáveis pela utilização de protótipos deformáveis (*templates*). A ideia de protótipos deformáveis precede o desenvolvimento das *snakes*, mas sofreu um novo desenvolvimento provocado por estas [Blake, 1998].

Um exemplo da utilização deste tipo de modelos é dado em [Yuille, 1989, 1992] onde protótipos deformáveis são construídos para detectar e descrever características das faces,

como os olhos. É utilizado um protótipo parametrizado para o olho, constituído por um círculo circunscrito por duas parábolas, e deformado por optimização de uma função de custo baseada em características morfológicas.

Modelos deformáveis baseados em superquádricas são um outro exemplo de modelos frequentes na área da imagem médica. As superquádricas contêm um reduzido número de parâmetros globais intuitivos, que podem ser ajustados à forma média de uma estrutura anatómica alvo. Além do mais, os parâmetros globais podem frequentemente ser combinados com parâmetros locais como *splines*, resultando uma abordagem interessante para a representação da forma.

Em [Vemuri, 1994] é construído um modelo deformável superquádrico numa base ortonormal de onduletas (*wavelets*) para utilização em imagem médica 3D e 4D. Esta base de multiresolução possibilita ao modelo a capacidade de se transformar de maneira contínua de deformações locais para globais, permitindo assim, utilizando relativamente poucos parâmetros, a criação e a representação de uma quantidade contínua de modelos de forma.

Em [Bardinet, 1994, 1995, 1996] é ajustado um modelo superquádrico deformável para segmentar imagens cardíacas 3D e refinado o ajuste utilizando uma técnica de deformação volumétrica designada por deformações de forma livre. Estas deformações podem ser interpretadas como uma caixa, construída por borracha simulada, na qual o objecto a ser deformado, neste caso o superquádrico, está embebido; as deformações da caixa são transmitidas automaticamente aos objectos embebidos. Este aspecto volumétrico das deformações de forma livre, permite que dois modelos superquádricos superficiais sejam simultaneamente deformáveis de maneira a reconstruir as superfícies internas e externas do ventrículo esquerdo do coração e determinar o volume entre estas.

Em [Kelemen, 1996; Székely, 1996] são desenvolvidos modelos paramétricos de Fourier, aos quais foi adicionada elasticidade de maneira a criar *snakes* de Fourier (2D) e modelos de superfícies deformáveis de Fourier (3D). Pela utilização da parametrização de Fourier seguida de uma análise estatística de um conjunto de treino, são definidos modelos de órgãos médios e as suas deformações próprias. Um ajuste elástico do modelo médio no subespaço dos modos próprios restringe as deformações possíveis e determina um emparelhamento óptimo entre o modelo superficial e os candidatos. Um exemplo de aplicação é apresentado na segmentação 3D de estruturas profundas do cérebro.

Em [Taylor, 1995] é apresentada uma técnica estatística para a construção de protótipos deformáveis e são utilizados estes modelos para segmentar vários órgãos em imagens médicas 2D e 3D. A parametrização estatística fornece restrições globais para a forma e permite que o modelo se deforme apenas nas direcções implícitas no conjunto de treino. Para extrair o ventrículo esquerdo a partir de ecocardiogramas [Parker, 1994], os pontos são escolhidos ao redor da fronteira do ventrículo, perto da orla do ventrículo direito, e no topo da aurícula esquerda. Estes pontos podem ser ligados de forma a construir um contorno deformável. Pelo exame estatístico de conjuntos de treino cujos pontos foram manualmente especificados, e

utilizando uma análise de componentes principais, um protótipo é construído de maneira a descrever as posições médias e os principais modos de variação dos pontos do objecto.

2.4.5.1.4 – Emparelhamento

O emparelhamento de regiões pode ser executado entre a representação de uma região e um modelo (segmentação) ou entre a representação de duas regiões distintas (alinhamento). O alinhamento de imagens médicas 2D e 3D é necessário para se estudar a evolução de uma patologia num indivíduo, ou para fundir a informação complementar obtida a partir de diferentes modalidades de aquisição de imagem. Exemplos da utilização de modelos deformáveis para executar o alinhamento de imagens médicas são descritos em [Bainville, 1995; Christensen, 1996; Davis, 1995; Declerck, 1995; Malandain, 1993, 1995; Rohr, 1996; Subsol, 1994; Syn, 1995, 1995a, 1995b, 1996; Thirion, 1993]. Geralmente estas técnicas partem da construção de descrições altamente estruturadas. Esta operação é frequentemente conseguida pela extracção de regiões de interesse com um algoritmo de detecção de orlas de intensidade, seguida da extracção de pontos específicos ou contornos característicos (ou curvas na superfície fronteira extraída dos dados 3D). Geralmente (em 3D) estas curvas descrevem estruturas diferenciais tais como cumes, ou singularidades topológicas. Posteriormente, um algoritmo de emparelhamento elástico pode ser aplicado entre pontos correspondentes de curvas ou contornos, sendo o contorno inicial deformado iterativamente até coincidir com o contorno desejado, através de forças derivadas dos emparelhamentos de padrões locais com o contorno desejado.

Um exemplo de emparelhamento no qual a utilização de conhecimento explícito *a priori* foi envolvido nos modelos deformáveis é a extracção e etiquetagem de estruturas anatómicas no cérebro, especialmente a partir de imagens de ressonância magnética. O conhecimento anatómico é tornado explícito na forma de um atlas 3D para o cérebro. O atlas é modelizado como um objecto físico, com propriedades elásticas atribuídas. Depois de um alinhamento global inicial, o atlas deforma-se e emparelha-se nas correspondentes regiões da imagem volumétrica do cérebro, em resposta a forças derivadas das características da imagem. A suposição subjacente a esta abordagem é que, para um dado nível de representação, cérebros normais têm a mesma estrutura topológica e diferem apenas em detalhes da forma. A técnica de deformação elástica de um atlas tem sido uma área de investigação muito activa e tem vindo a ser explorada, por exemplo, em [Bajcsy, 1989; Christensen, 1996; Declerck, 1995; Subsol, 1994].

Existem várias dificuldades na abordagem baseada em atlas deformáveis. A técnica é sensível à posição inicial do atlas – se o alinhamento rígido inicial for afastado em demasia, então o emparelhamento elástico pode conduzir a resultados insatisfatórios. A presença de características fortes na vizinhança também pode causar problemas de emparelhamento – o atlas pode deformar-se para uma fronteira incorrecta. Por outro lado, sem a interacção do utilizador, o atlas pode não convergir para fronteiras de estrutura complexa. Uma solução para

estes problemas passa por técnicas de pré-processamento de imagem, como por exemplo detecção de orlas de intensidade e operações morfológicas de simplificação, em conjunção com o atlas deformável [McInerney, 1996].

2.4.5.1.5 – Análise e seguimento de movimento

A utilização principal de modelos deformáveis para o seguimento (*tracking*) em imagens médicas está relacionada com a medição do comportamento dinâmico do coração humano, especialmente do ventrículo esquerdo. A caracterização regional do movimento da parede do coração é necessária para isolar a severidade e a extensão de doenças como a isquemia. A ressonância magnética, e outras tecnologias de aquisição de imagem médica, permitem actualmente obter imagens 3D do coração, ao longo do tempo, com resolução espacial excelente e resolução temporal razoável.

Os modelos deformáveis são bastante adequados para este tipo de tarefa de análise de imagem. Na abordagem mais simples, um modelo de contorno 2D deformável é utilizado para segmentar a fronteira do ventrículo esquerdo em cada fatia (*slice*) de uma imagem inicial 3D. Estes contornos são depois utilizados como a aproximação inicial das fronteiras do ventrículo esquerdo nas correspondentes fatias da imagem 3D no instante seguinte, e são depois deformados de maneira a extrair o novo conjunto de fronteiras do ventrículo esquerdo; esta abordagem é utilizada, por exemplo, em [Geiger, 1995; Gupta, 1993; Herlin, 1992]. A propagação temporal dos contornos deformáveis diminui drasticamente o tempo necessário para segmentar manualmente o ventrículo esquerdo a partir de uma sequência de imagens 3D, obtida ao longo de um ciclo cardíaco. Em [McInerney, 1995] é aplicada a abordagem de propagação temporal em 3D, utilizando modelos de balão deformáveis dinamicamente.

Em [Amini, 1991] é utilizado um método baseado na energia de flexão e na curvatura da superfície para seguir e analisar o movimento do ventrículo esquerdo. Em cada instante são criados dois subconjuntos esparsos de pontos específicos, por selecção de pontos geometricamente significantes, um para a superfície endocárdica e o outro para a superfície epicárdica do ventrículo esquerdo. Fragmentos superficiais em torno destes pontos são então modelizadas por placas finas e flexíveis. Assumindo que num intervalo de tempo reduzido cada fragmento superficial se deforma apenas ligeiramente e localmente, é construída para cada ponto amostrado na primeira superfície uma área de pesquisa na superfície do ventrículo esquerdo da imagem 3D referente ao próximo instante. O melhor ponto para emparelhamento (correspondendo, por exemplo, ao mínimo da energia de flexão) no interior da janela de pesquisa na segunda superfície é considerado como correspondente ao ponto na primeira superfície. Este processo de emparelhamento produz um conjunto inicial de vectores associados ao movimento para pares de superfícies derivadas a partir de imagens de sequências 3D. É então realizado um procedimento de suavização para gerar um campo vectorial denso de movimento sobre a superfície do ventrículo esquerdo. Em [Cohen, 1992] também é aplicada uma técnica baseada na energia de flexão em 2D, e é realizada uma tentativa de melhorar o método anterior por adição à função de energia de flexão de um termo

que tende a preservar o emparelhamento dos pontos de elevada curvatura. Em [Goldgof, 1988; Kambhamettu, 1994; Mishra, 1991] também são apresentadas abordagens para a determinação da correspondência entre superfícies baseadas na variação da curvatura Gaussiana e assumindo um modelo de movimento do tipo conforme.

Em [Chen, 1994] é empregue uma abordagem alternativa que utiliza um modelo hierárquico de movimento do ventrículo esquerdo, construído por combinação de uma superquádrica deformável globalmente com uma superfície deformável localmente utilizando primitivas de modelização de forma harmónica. Utilizando este modelo, é estimado o movimento do ventrículo esquerdo a partir dos dados de angiografia, e é produzida uma decomposição hierárquica que caracteriza o movimento do ventrículo esquerdo, com resolução variante entre grosseira e fina.

Em [Benayoun, 1995; Nastar, 1994, 1996; Pentland, 1991] também é obtida uma caracterização do movimento do ventrículo esquerdo com resolução variante entre grosseira e fina. São utilizados modelos deformáveis para seguir e recuperar o movimento do ventrículo esquerdo, e análise modal para parametrizar os modelos. Esta parametrização é obtida a partir dos modos de vibração em regime livre e representações com diferentes detalhes são obtidas por variação do número de modos utilizado.

O coração é um órgão relativamente suave e conseqüentemente existem reduzidos pontos característicos fidedignos. O coração também sofre movimento não rígido complexo que inclui uma componente do movimento de torção (tangencial), assim como uma componente normal. Geralmente, os métodos de estimação do movimento não são capazes de capturar este movimento tangencial sem informações adicionais [McInerney, 1996]. Vários autores têm aplicado modelos deformáveis em sequências de imagens de ressonância magnética de dados etiquetados por modulação espacial da magnetização (*SPAMM – Spatial Modulation of Magnetization*); exemplos são descritos em [Donnell, 1995; Kumar, 1994; Park, 1996; Young, 1992]. Por exemplo em [Kumar, 1994] é descrita uma abordagem para o seguimento automático de pontos etiquetados em imagens cardíacas de ressonância magnética e conseqüente estimação dos parâmetros de deformação. Esta etiquetagem é conseguida pela produção de zonas localizadas de magnetizações distintas na parede do coração. A distinção da magnetização é uma propriedade do tecido e é constante ao longo do seu movimento.

Um outro problema existente, na maior parte dos métodos mais comuns, é a modelização separada das superfícies endocárdica e epicárdica. Na realidade, o coração é uma estrutura de paredes com determinada espessura. Em [Park, 1996] é desenvolvido um modelo que considera a natureza volumétrica da parede do coração e que incorpora a parametrização descritiva directamente na sua formulação. Em [Donnell, 1995] é utilizado um modelo híbrido e volumétrico, híbrido porque é um compromisso entre uma componente global (paramétrica) e uma componente local (explícita), para analisar e comparar o ventrículo esquerdo. Em [Young, 1992] também são construídos modelos 3D de elementos finitos a partir das representações das fronteiras das superfícies endocárdica e epicárdica.

A segmentação e o seguimento em imagens de raios X do estômago, obtidas a partir de diferentes pontos de vista, é abordada em [Kita, 1996]. A metodologia utilizada é baseada em modelos físicos deformáveis, sendo realizada a extracção das regiões de um objecto deformável a partir de várias vistas, enquanto é determinada a correspondência do objecto entre vistas. É utilizada uma modelização física por intermédio de dois tipos de molas elásticas: um que liga pontos ao longo do contorno e um outro que liga pontos não contíguos do contorno.

2.5 – Sumário

De maneira a modelizar-se adequadamente objectos deformáveis deve-se considerar a sua natureza física. Tal motivou a utilização de modelos deformáveis segundo princípios físicos de forma a interpolar e a suavizar os dados, assumindo-se determinadas considerações sobre o ruído, propriedades do material, etc. Utilizando-se uma representação segundo princípios físicos é possível modelizar-se as deformações não rígidas de maneira mais satisfatória; no entanto, as formulações iniciais utilizam a técnica das diferenças finitas o que implica a existência de problemas associados à amostragem. Para tornar esta modelização mais robusta a este tipo de problema, pode-se utilizar o método dos elementos finitos.

Representações baseadas em princípios físicos são bastante razoáveis para a modelização da deformação; contudo, não podem ser utilizadas para comparar objectos. Geralmente, os parâmetros obtidos para estes modelos físicos podem ser definidos arbitrariamente e, deste modo, não são invariantes às alterações do ponto de vista, às oclusões e às deformações não rígidas. Assim, se o objectivo do problema é a obtenção de descritores para o reconhecimento e comparação, a modelização segundo princípios físicos apresenta-se incapaz.

Este problema de não unicidade pode ser resolvido se for adoptada uma abordagem baseada em decomposição própria. Com tal abordagem a informação da imagem ou da forma é decomposta numa base ordenada de componentes principais. Como resultado, as componentes menos críticas, geralmente associadas ao ruído, são desprezadas de modo a obter-se uma descrição canónica restringida. Tal permite a selecção das componentes mais importantes e assim conseguir-se uma redução eficiente dos dados e uma reconstrução mais robusta.

Os vectores próprios de um modelo de elementos finitos são designados por modos próprios. Estes modos estão associados aos eixos de simetria generalizados e podem ser utilizados para descrever os eixos principais de deformação num conjunto de treino para a forma. Este sistema de coordenadas generalizado constitui uma representação robusta para o estabelecimento de correspondência entre formas similares. A característica mais importante deste tipo de representação é que assegura que as descrições obtidas serão únicas, o que torna possível a resolução de problemas de reconhecimento.

O movimento não rígido é ubíquo pois não existe nenhum objecto no mundo real que seja

perfeitamente rígido. A razão da recente onda de interesse no movimento não rígido baseia-se em dois factores principais: primeiro, investigação recente conduziu a novas abordagens promissoras para a análise de movimento não rígido; segundo, um elevado número de aplicações potenciais tornou-se evidente, incluindo reconhecimento da face/cabeça humana para teleconferência, reconhecimento gestual para realidade virtual [Pavlovic, 1997], construção de modelos de objectos não rígidos, estudos de deformação de materiais e de solos sujeitos a pressão, seguimento da formação de nuvens para previsão meteorológica, observação de crescimento de cristais, e análise do fluxo de fluídos. Também inúmeras aplicações existem na área biomédica, tal como a análise do movimento do ventrículo esquerdo, estudo do movimento pulmonar, e crescimento de tumores, entre outras.

A análise de movimento não rígido é uma área de investigação a florescer e o trabalho já realizado começou apenas a desbravar soluções para alguns dos muitos problemas de resolução complexa existentes. Muitos assuntos teóricos estão ainda em aberto nas áreas de seguimento do movimento de dados 3D, ou a partir das suas projecções 2D, da análise de objectos sujeitos a elevadas deformações, e da análise de movimento fluído e viscoelástico não restringido. Para objectos não rígidos, as questões de representação do movimento e da representação da forma estão muito mais relacionadas do que para objectos rígidos. Apenas alguns autores consideraram os problemas de representação de objectos não rígidos mais complexos do que objectos articulados [Kambhamettu, 1998]. A maior parte deste trabalho descreve objectos não rígidos constituídos por um único elemento. É evidente que para muitos objectos não rígidos são mais adequadas representações de elementos múltiplos. Por vezes, cada elemento é por si só um objecto não rígido existindo ainda a possibilidade destes objectos se dividirem e/ou se fundirem ao longo do movimento. Questões de representação tornam-se de importância crítica assim que se avança de problemas de seguimento e análise de movimento para problemas de reconhecimento de objectos não rígidos.

O papel crescente e importante da imagem médica, no diagnóstico e no tratamento de doenças, abriu um conjunto de problemas centrados na construção de modelos geométricos precisos para estruturas anatómicas, a partir de imagens médicas. Modelos deformáveis oferecem uma abordagem atractiva para resolver tais problemas, pois são capazes de representar formas complexas e variações vastas da forma das estruturas anatómicas. Os modelos deformáveis resolvem muitas das limitações das técnicas tradicionais de processamento de imagem de baixo nível, por possibilitarem representações compactas e analíticas da forma dos objectos, pela incorporação de conhecimento anatómico e por apresentarem capacidades interactivas.

Como ficou claro ao longo deste capítulo, a análise de movimento de objectos deformáveis é um problema deveras complexo existindo ainda muito trabalho a ser realizado.

Capítulo III

DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO ANÁLISE MODAL DA FORMA

O objectivo principal deste capítulo é a determinação de correspondências usando informação sobre a forma dos objectos a emparelhar.

O primeiro método a ser descrito para tal determinação baseia-se no princípio da distância mínima percorrida pelos pontos dos objectos em questão.

Como o método referido anteriormente não obtém bons resultados quando os objectos são de formas, ou posicionamento ou orientação, ligeiramente diferentes, é descrito um novo método, baseado neste, que utiliza informação sobre a forma de cada objecto e obtém resultados satisfatórios para as referidas situações.

Ao longo do trabalho desenvolvido verificou-se ser de grande utilidade identificar-se a transformação global, do tipo rígido, e as deformações mais localizadas existentes entre dois objectos; assim, neste capítulo é descrito o método realizado para a determinação da transformação geométrica rígida entre objectos 2D ou 3D, rígidos ou não.

Para cada método descrito são apresentados alguns resultados experimentais obtidos; o capítulo termina com um breve sumário.

3.1 – Introdução

Neste capítulo são apresentados dois métodos, implementados no âmbito deste trabalho, para a determinação de correspondências entre dois objectos, 2D ou 3D, rígidos ou não.

No primeiro método uma matriz de proximidade, geralmente não quadrada, é construída definindo-se os seus elementos a partir da utilização de uma função Gaussiana e das coordenadas dos pontos que constituem os dois objectos em questão. Após a construção, são determinados os vectores próprios da matriz e as correspondências pontuais são definidas de forma a minimizar as distâncias percorridas pelos pontos. O método é de implementação muito simples mas tem como grande desvantagem o facto de só produzir resultados satisfatórios quando os dois objectos a emparelhar são muito similares e com posições e orientações muito próximas.

Este inconveniente originou que surgisse um novo método, muito semelhante a este, mas no qual é utilizada uma análise modal da forma de cada objecto a emparelhar para se estabelecer as correspondências. Neste método começa-se por construir uma matriz de proximidade para cada objecto, com os seus elementos determinados pela utilização da mesma função Gaussiana e pelas coordenadas dos pontos que constituem o objecto respectivo. São depois determinados os vectores próprios das matrizes, e as correspondências são obtidas pela análise dos deslocamentos de cada ponto no seu espaço modal. Pontos com deslocamentos similares são definidos como correspondentes. Com este método já é possível obter-se bons resultados de emparelhamento mesmo quando os objectos apresentam formas mais distintas e a transformação rígida existente entre estes é considerável.

Durante este trabalho verificou-se que era de especial interesse a determinação da transformação geométrica rígida existente entre dois objectos quando são conhecidas todas ou algumas das correspondências entre os pontos que os constituem, e procedeu-se à implementação de um método para a sua determinação. O método adoptado é baseado em *quaternions* unitários e obtém a transformação geométrica existente através de uma minimização, por mínimos quadrados, do erro da transformação determinada. Este método obtém bons resultados mesmo quando o número de correspondências utilizado não é muito elevado.

Este capítulo está organizado do seguinte modo: em primeiro lugar, é apresentado o método utilizado para determinação da transformação rígida existente entre dois objectos devidamente emparelhados; em seguida, é apresentado o método para a determinação de correspondências entre objectos baseado no mapeamento segundo o princípio da distância mínima, após o que se apresenta o método para a determinação das mesmas correspondências utilizando análise modal da forma; por último, faz-se num breve sumário uma revisão do capítulo.

3.2 – Determinação da transformação rígida entre dois objectos utilizando quaternions unitários

A determinação da transformação rígida¹ [Foley, 1991; Hall 1993] entre dois objectos é um problema frequente nos diversos domínios da visão por computador. Nesta secção é apresentado um método, com base no inicialmente proposto por Horn [Horn, 1987], implementado para a determinação da transformação rígida, constituída por uma rotação em torno de um eixo que passa pela origem, um escalamento relativamente à origem e uma translação. O método adoptado baseia-se na minimização por mínimos quadrados do erro da transformação determinada e necessita, no mínimo, da correspondência entre três pontos para estimar a transformação envolvida.

Para a representação da rotação são utilizados *quaternions* unitários; a translação é determinada pela diferença entre as coordenadas do centróide do objecto t e as coordenadas do centróide do objecto $t+1$ previamente rodado e escalado; o escalamento é determinado pelo quociente da raiz quadrada dos desvios quadráticos das coordenadas dos dois objectos relativamente aos centróides correspondentes. O *quaternion* unitário que representa a rotação é o vector próprio associado ao valor próprio positivo mais elevado de uma matriz quadrada e simétrica de dimensões (4×4) .

3.2.1 – Introdução aos *quaternions* unitários

Um *quaternion* \dot{q} pode ser definido como um vector com quatro componentes, resultante da composição de um escalar e um vector 3D, ou como um número complexo com três partes imaginárias distintas. Utilizando a notação dos números complexos um *quaternion* pode ser representado como:

$$\dot{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k,$$

onde q_0 é a parte real e q_x , q_y e q_z as partes imaginárias. Considerando o resultado da composição de um escalar q e um vector 3D \vec{q} , um *quaternion* pode ser representado como:

$$\dot{q} = q + \vec{q},$$

onde $q = q_0$ e $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$.

Um *quaternion* unitário é um *quaternion* cuja amplitude é igual a um.

¹ Para um descrição mais detalhada ver [Tavares, 1995, 1995a].

3.2.1.1 – Relações com outras representações

Como é possível verificar em [Horn, 1987] as partes imaginárias do *quaternion* unitário representam a direcção do eixo de rotação \hat{w} enquanto o ângulo de rotação θ pode ser obtido a partir da parte real e da amplitude da parte imaginária:

$$\hat{w} = (w_x, w_y, w_z)^T = \vec{q} / \|\vec{q}\|,$$

$$\sin \theta = 2q \|\vec{q}\|,$$

$$\cos \theta = (q^2 - \|\vec{q}\|^2).$$

A matriz ortonormal $[R]$ para a rotação, que transforma um ponto P num outro ponto P' com $P' = [R]P$, correspondente ao *quaternion* unitário \hat{q} é definida [Horn, 1987] do seguinte modo:

$$[R] = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix}.$$

3.2.2 – Algoritmo implementado

O algoritmo adoptado pode ser resumido da seguinte forma:

Em primeiro lugar, devem-se determinar os centróides G_t e G_{t+1} de cada objecto. As coordenadas dos centróides determinados são subtraídas às coordenadas de cada ponto i ($X_{i,t}$ e $X_{i,t+1}$) do respectivo objecto, de modo a obterem-se as coordenadas centrais de cada um

($X'_{i,t} = [x'_{i,t} \quad y'_{i,t} \quad z'_{i,t}]^T$ e $X'_{i,t+1} = [x'_{i,t+1} \quad y'_{i,t+1} \quad z'_{i,t+1}]^T$):

$$X'_{i,t} = X_{i,t} - G_t,$$

$$X'_{i,t+1} = X_{i,t+1} - G_{t+1}.$$

Utilizando um *quaternion* unitário \hat{q} , para representar a rotação, e o método dos mínimos quadrados, de maneira a diminuir os erros residuais associados à rotação, obtém-se [Horn, 1987] o produto $\hat{q}^T [N] \hat{q}$ que deverá ser maximizado com a restrição de \hat{q} ser unitário e onde a matriz $[N]$ é simétrica e construída a partir das coordenadas dos pontos dos dois objectos:

$$[N] = \begin{bmatrix} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{xx} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & (-S_{xx} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & (-S_{xx} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix},$$

com S_{xx} , S_{xy} , ..., S_{zz} determinados calculando-se os nove produtos possíveis $x'_t x'_{t+1}$, $x'_t y'_{t+1}$, ..., $z'_t z'_{t+1}$ das coordenadas respectivas para cada par de pontos emparelhados:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x'_{i,t} x'_{i,t+1}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x'_{i,t} y'_{i,t+1}, \quad \dots$$

O *quaternion* unitário \hat{q} que maximiza o produto $\hat{q}^T [N] \hat{q}$ é [Horn, 1987] um vector unitário com a mesma direcção do vector próprio [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press 1992] da matriz $[N]$ associado ao valor próprio positivo mais elevado da mesma matriz.

O escalamento existente pode ser determinado pelo quociente da raiz quadrada dos desvios médios quadráticos dos dois conjuntos de coordenadas relativamente aos seus centróides:

$$s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|X'_{i,t+1}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|X'_{i,t}\|^2} \right)^{1/2}.$$

Analisando esta equação verifica-se que para a determinação do escalamento não é necessária a prévia determinação da rotação.

A melhor solução para a translação $\{T\}$ é obtida pela diferença entre as coordenadas do centróide do objecto $t+1$ e as coordenadas do centróide do objecto t previamente rodado e escalado:

$$\{T\} = G_{t+1} - s[R]G_t.$$

Deve-se notar que este é um método directo, e assim não existe a necessidade de correcção iterativa.

3.2.2.1 – Consideração da confiança associada às coordenadas dos pontos

Quando os erros esperados para as coordenadas dos pontos não são todos iguais deve-se considerar os respectivos pesos de forma a considerar tais medidas de incerteza. Assim, os centróides tornam-se centróides ponderados:

$$G_t = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_{i,t}}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

$$G_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_{i,t+1}}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

onde w_i é a medida de confiança associada às coordenadas do ponto i .

A determinação do melhor escalamento é alterada pela utilização das medidas de confiança:

$$s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i \|X'_{i,t+1}\|^2}{\sum_{i=1}^n w_i \|X'_{i,t}\|^2} \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

A única mudança no método para a determinação da rotação envolvida está no facto de os produtos nos somatórios serem agora ponderados, isto é:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n w_i x'_{i,t} x'_{i,t+1}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n w_i x'_{i,t} y'_{i,t+1}, \dots$$

3.2.3 – Resultados experimentais

Com o intuito de verificar a qualidade da solução determinada pelo método proposto para a transformação rígida existente entre objectos 2D e entre objectos 3D são neste ponto apresentados alguns dos resultados experimentais obtidos.

3.2.3.1 – Para objectos 2D

Na primeira experiência realizada, *Tabela 3.1*, aplicou-se a um objecto uma rotação de -20° em torno da origem, um escalamento relativamente ao mesmo ponto de 0.75 e uma translação de -10 pixels segundo o eixo x e de 100 pixels segundo o eixo y .

Analisando os resultados obtidos² é possível concluir que a solução determinada é de boa qualidade.

Numa segunda experiência, *Tabela 3.2*, aplicou-se a um objecto constituído por 84 pixels uma rotação de 45° em torno da origem, um escalamento relativamente ao mesmo ponto de 0.7 e uma translação de 150 pixels segundo o eixo x e de -100 pixels segundo o eixo y .

Analisando os resultados obtidos utilizando-se 82 correspondências e a incerteza associada³ é novamente possível concluir que a solução determinada é de boa qualidade.

² Deve-se ter em atenção que a utilização de coordenadas imagem do tipo inteiro implica um aumento na imprecisão da transformação determinada pois as coordenadas pós-transformação são arredondadas para valores inteiros.

³ O método utilizado para o emparelhamento é o baseado na análise modal da forma apresentado na secção 3.4. A medida de incerteza é: $1/(1+z_i)$ onde z_i é a medida de emparelhamento: entre 0, bom emparelhamento, e 2, mau emparelhamento.

Tabela 3.1 – Dados utilizados e resultados obtidos na primeira experiência para a determinação da transformação rígida.

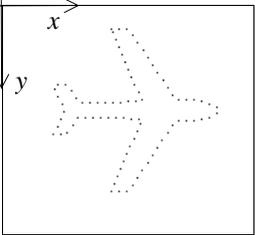
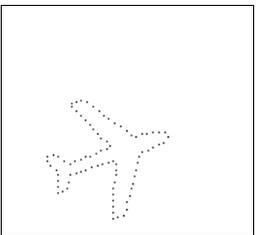
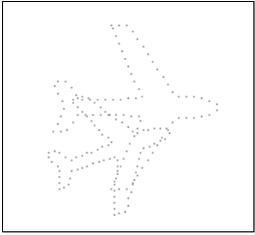
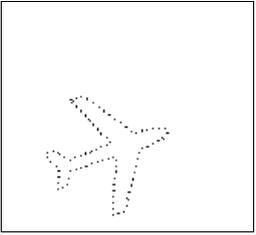
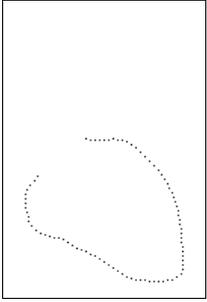
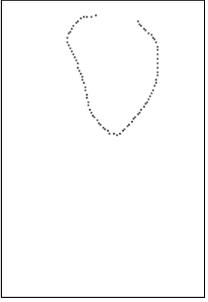
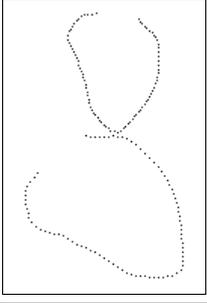
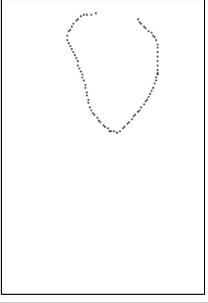
Objecto Original	Objecto Transformado				
	tx	ty	θ	s	w
	-10	100	-20°	0.75	Não
					
Objectos Sobrepostos	Transformação Obtida				
	-9.6	100.28	-19.97°	0.75	
					

Tabela 3.2 – Dados utilizados e resultados obtidos na segunda experiência para a determinação da transformação rígida.

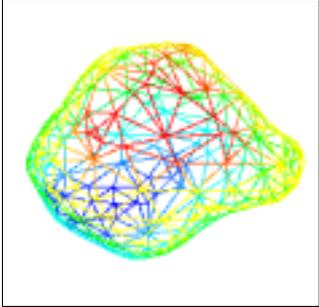
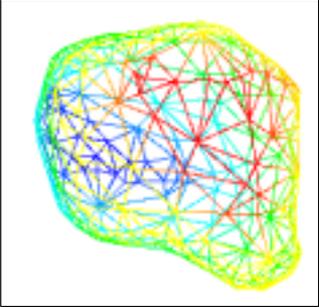
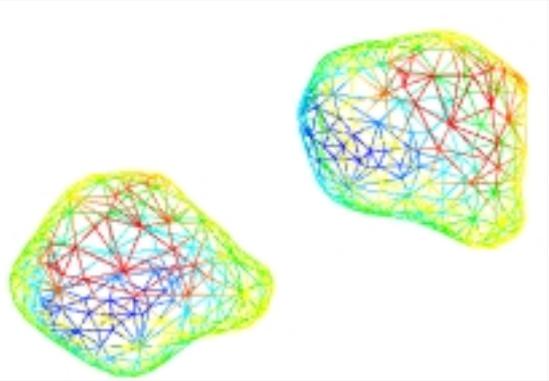
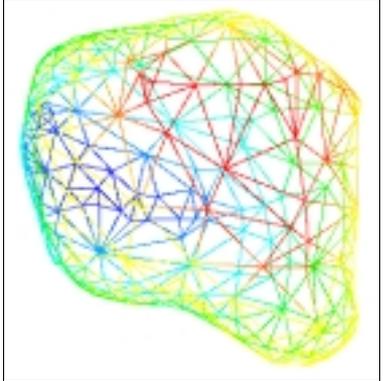
Objecto Original	Objecto Transformado				
	tx	ty	θ	s	w
	150	-100	45°	0.7	Sim
					
Objectos Sobrepostos	Transformação Obtida				
	150.09	-99.91	45.01°	0.69	
					

3.2.3.2 – Para objectos 3D

Na terceira experiência, *Tabela 3.3*, aplicou-se a um objecto constituído por 244 pontos uma rotação de 45° em torno do eixo z que passa pela origem, um escalamento relativamente ao mesmo ponto de 1.25 e uma translação de 10 segundo o eixo x , -25 segundo o eixo y e de -5 segundo o eixo z .

Analisando os resultados obtidos nesta terceira experiência, utilizando-se 244 correspondências e a incerteza associada, é mais uma vez possível concluir que a solução determinada é de boa qualidade.

Tabela 3.3 – Dados utilizados e resultados obtidos na terceira experiência para a determinação da transformação rígida.

<i>Objecto Original</i>	<i>Objecto Transformado</i>					
	tx	ty	tz	θ_z	s	w
	10	-25	-5	45°	1.25	<i>Sim</i>
						
<i>Objectos Sobrepostos</i>	<i>Transformação Obtida</i>					
	tx	ty	tz	θ_z	s	w
	10.00	-24.99	-4.99	45.00°	1.25	<i>Sim</i>
						

3.2.4 – Comentários aos resultados

Pelos resultados experimentais obtidos⁴, quer para objectos 2D quer para 3D, pode-se concluir que o método adoptado determina boas soluções para a transformação geométrica rígida existente entre dois objectos.

⁴ Outros resultados podem ser analisados em [Tavares, 2000, 2000a].

Ao longo de todo o trabalho, verificou-se a utilidade deste método na determinação da transformação rígida existente entre dois objectos, quer estes sejam rígidos ou não. Para a solução determinada ser satisfatória não é necessário utilizar um número muito elevado de correspondências, pelo que se podem seleccionar apenas as correspondências obtidas com maior grau de confiança.

Quando os escalamentos ao longo de cada eixo coordenado não são iguais, o escalamento obtido pela utilização da equação (3.1) pode não ser adequado. Verificou-se que, nestes casos, é geralmente preferível determinar-se escalamentos independentes para cada eixo utilizando-se equações semelhantes à equação (3.1), uma para cada eixo, em que apenas intervêm as coordenadas ao longo desse eixo.

3.3 – Determinação de correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima

Nesta secção é apresentado um método implementado para a determinação de correspondências entre pontos de objectos, baseado no mapeamento segundo a distância mínima de Scott e Longuet-Higgins [Shapiro 1991, 1992, 1992a].

Neste método é incorporada uma medida de afinidade entre pontos, baseada na distância entre elementos, e um esquema de concorrência permitindo que os pontos se candidatem a um dado emparelhamento. Este critério é formulado segundo um princípio de proximidade, favorecendo emparelhamentos através de distâncias o mais reduzidas possível, e um de exclusão, favorecendo o emparelhamento de um para um. O mapeamento resultante efectivamente minimizará a soma total do quadrado das distâncias percorridas pelos pontos tendo como restrição o emparelhamento de um para um.

Uma boa característica deste método é a possibilidade de implementá-lo, de forma elegante, através de uma solução bem condicionada para a determinação dos vectores próprios, não exigindo iterações.

3.3.1 – Princípio do método

Como entrada, este método recebe um conjunto de m pontos, de coordenadas X_t , de um objecto t e um conjunto de n pontos, de coordenadas X_{t+1} , de um objecto $t+1$. As fases intervenientes no método estão representadas de forma gráfica na *Figura 3.1*.

A primeira etapa (análise espacial cruzada) consiste na enumeração de todos os pares de emparelhamento possíveis e em guardar as suas afinidades numa matriz de proximidade $[G]$, em geral não simétrica. Cada elemento G_{ij} representa a atracção entre o ponto i do objecto t

e o ponto j do objecto $t+1$ através de uma distância de métrica Gaussiana ponderada⁵:

$$G_{ij} = e^{-\frac{(d_{ij})^2}{2\sigma^2}}, \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n,$$

onde $(d_{ij})^2 = \|X_{i,t} - X_{j,t+1}\|^2$ é o quadrado da distância Euclidiana entre os dois pontos. Deste modo G_{ij} varia de 0 (zero), para pontos bastante separados ($d_{ij} = \infty$), a 1 (um) para pontos coincidentes ($d_{ij} = 0$). O parâmetro σ controla a largura da curva Gaussiana e, desta forma, o grau de interacção entre os dois conjuntos de pontos. De forma simplista, este parâmetro pode ser encarado como a colocação de um círculo centrado num ponto do objecto t , permitindo que este interactue apenas com os pontos do objecto $t+1$ interiores a este círculo. Assim, um valor reduzido para σ favorece as interacções locais, enquanto um valor mais elevado permite interacções mais globais.

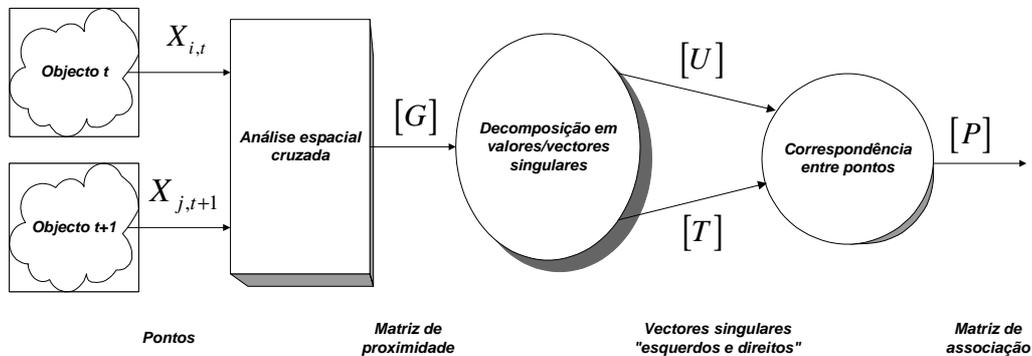


Figura 3.1 – Etapas do método de mapeamento segundo a distância mínima.

A segunda etapa do método consiste na realização da decomposição em valores singulares, geralmente designada por *SVD* [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press, 1992], da matriz $[G]$, exprimindo $[G]$ como:

$$[G] = [T][D][U],$$

onde $[T]$ é uma matriz ortogonal de dimensões $(m \times m)$, $[U]$ é uma matriz ortogonal de dimensões $(n \times n)$ e $[D]$ é uma matriz de dimensões $(m \times n)$ com elementos não diagonais nulos.

Como a matriz $[G]$ não é geralmente quadrada, os seus vectores singulares não podem ser obtidos directamente; em verdade não existem. Assim, a solução adoptada [Shapiro, 1991]

⁵ A utilização desta distância métrica prende-se com:

- na maior parte dos casos a matriz $[G]$ resultante é definida positivamente;
- cada elemento i, j , da matriz $[G]$ decresce com o aumento da distância, variando de um, para pontos coincidentes, ($d_{ij} = 0$) a zero, para os bastante distantes ($d_{ij} = \infty$).

passa pela utilização de duas matrizes adicionais $[G]_r$ e $[G]_l$ ambas quadradas e simétricas:

$$[G]_r = [G][G]^T,$$

$$[G]_l = [G]^T [G],$$

e os seus valores e vectores singulares são determinados:

$$[G]_r = [T][D][U][U]^T [D]^T [T]^T = [T][[D][D]^T][T]^T = [T][D]_r [T]^T,$$

$$[G]_l = [U]^T [D]^T [T]^T [T][D][U] = [U]^T [[D]^T [D]][U] = [U]^T [D]_l [U].$$

As matrizes $[T]$ e $[U]$ são ortogonais. As colunas da matriz $[T]$ são referidas como os vectores próprios direitos da matriz $[G]$, enquanto as linhas da matriz $[U]$ são referidas como os vectores próprios esquerdos⁶ da matriz $[G]$:

$$[T] = [\{T\}_1 \mid \{T\}_2 \mid \dots \mid \{T\}_m],$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \{U\}_1^T \\ \{U\}_2^T \\ \vdots \\ \{U\}_n^T \end{bmatrix}.$$

Os primeiros k valores próprios da matriz $[D]_r$ (com $k = \min\{m, n\}$) são idênticos aos da matriz $[D]_l$, e as suas raízes quadradas são elementos da matriz $[D]$ dos valores próprios da matriz $[G]$. (Porque a matriz $[D]$ não é quadrada, apenas é constituída por k elementos não nulos ao longo da sua diagonal.) Como as matrizes $[D]_r$ e $[D]_l$ contêm os quadrados dos valores singulares, pode-se arbitrar se a matriz $[D]$ conterà as raízes quadradas positivas ou negativas. Optando-se pelas raízes positivas, a matriz $[D]$ conterà os k valores singulares positivos ao longo da diagonal e em ordem decrescente ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$).

Em conjunto com os vectores singulares, os k valores singulares são suficientes para reconstruir completamente a matriz $[G]$:

$$[G] = \sum_{i=1}^k \lambda_i \{T_i\} \{U_i\}^T.$$

Quando a matriz $[G]$ é simétrica, $[G][G]^T = [G]^T [G] = [G]^2$, verifica-se $[T] = [U]$ e

⁶ Tal designação apenas deriva das suas posições relativas na respectiva equação.

$[D]_t = [D]_u = [D]^2$. Então os valores singulares da matriz $[D]$ correspondem aos valores singulares da matriz $[G]$, e as matrizes $[T]$ e $[U]$ contêm os seus vectores singulares.

Por analogia com sistema físicos de partículas vibratórias e com vibrações mecânicas [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986], os vectores próprios associados aos maiores valores próprios podem ser denominados por vectores próprios de baixa frequência, enquanto os associados aos menores valores próprios por vectores próprios de alta frequência.

A última etapa consiste no cálculo da correlação, no sentido do produto escalar, entre as linhas da matriz $[T]$ e as colunas da matriz $[U]$, resultando a matriz de associação $[P]$:

$$[P] = [T][E][U] = \sum_{i=1}^k \{T\}_i \{U\}_i^T,$$

onde a matriz $[E]$ é obtida por substituição dos elementos da diagonal da matriz $[D]$ por 1 (um) de forma a desprezar os vectores singulares em excesso da matriz de maiores dimensões. Deste modo o elemento P_{ij} indica a força de atracção entre os pontos i do objecto t e j do objecto $t+1$, onde 1 (um) indica um emparelhamento perfeito e 0 (zero) um falso emparelhamento. A correspondência entre dois pontos só deve ser classificada como forte caso P_{ij} seja máximo na sua linha e na sua coluna, o que significa que ambos os pontos reclamam um pelo outro para um bom emparelhamento. Quando P_{ij} é apenas máximo na sua coluna mas não na sua linha, ou vice-versa, uma correspondência fraca está implícita, com vários pontos competindo para o mesmo emparelhamento.

Este método maximiza o traço da matriz $[[P]^T [G]]$; por outras palavras, a matriz $[P]$ é uma máscara que actua sobre a matriz $[G]$ e selecciona os elementos de valor mais elevado. Como G_{ij} é elevado quando d_{ij} é reduzido, é garantido um mínimo para o quadrado total da distância de mapeamento. Isto pode ser entendido intuitivamente quando se imaginam pedaços de fio a ligar os pontos emparelhados com o objectivo de minimizar a quantidade total de fio utilizado; contudo, ao mesmo tempo, $[P]$ é ortogonal, e assim só pode existir um elemento máximo por linha ou coluna. Desta forma, nenhum ponto do objecto t pode ser fortemente emparelhado com mais do que um ponto do objecto $t+1$, garantindo-se o princípio da exclusão.

Deve-se notar que, para o emparelhamento, não é a *forma absoluta*⁷ dos vectores próprios que é importante mas sim a similaridade relativa entre estes.

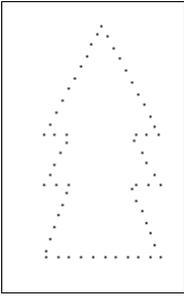
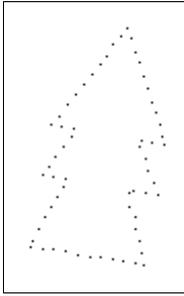
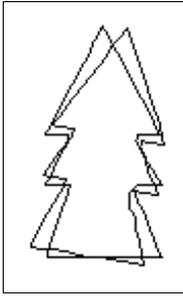
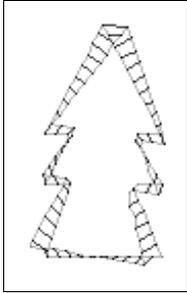
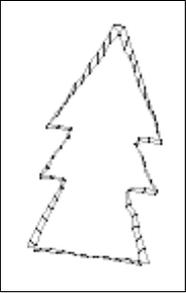
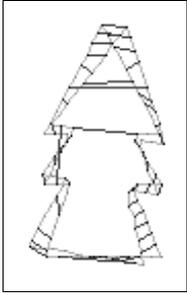
⁷ Isto é, a análise do sinal e do valor das componentes dos vectores próprios.

3.3.2 – Resultados experimentais

3.3.2.1 – Para objectos 2D

Considere-se para a primeira experiência, *Tabela 3.4*, o objecto 1, constituído por 62 *pixels* do contorno de um objecto, e o 2, resultante da aplicação ao primeiro de uma rotação de 10° em torno do centróide. Optando-se por um valor de σ igual à média da distância entre cada *pixel* e o seu vizinho seguinte determinaram-se 58 correspondências classificáveis como aceitáveis pois foi possível verificar que na sua grande maioria estavam correctas e apenas algumas estavam erradas. Utilizando um valor de σ quatro vezes superior ao anterior, obtiveram-se 45 correspondências sendo, desta feita, o número de correspondências erradas mais elevado; tal permite concluir que valores para σ demasiado elevados fazem com que as correspondências obtidas sejam globalmente de inferior qualidade.

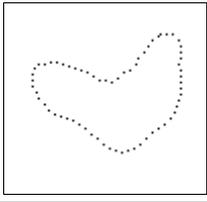
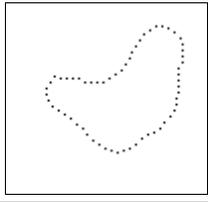
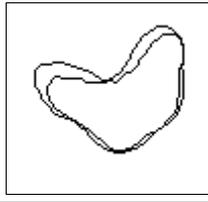
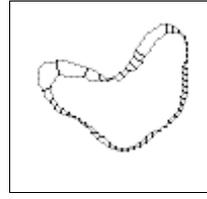
Tabela 3.4 – Dados utilizados e resultados obtidos na primeira experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima. (Nº de Corresp. é o número de correspondências, s/Transformação e c/Transformação indica se foi ou não aplicada a transformação determinada pelo método da secção anterior.)

<i>Objecto 1 (62 pixels)</i>	<i>Objecto 2 ($\theta = 10^\circ$)</i>	<i>Objectos Sobrepostos (pixels ligados)</i>
		
<i>Correspondências Obtidas</i>		
$\sigma : 5.8, N^\circ \text{ de Corresp.: } 58$		$\sigma : 23.3, N^\circ \text{ de Corresp.: } 45$
<i>s/Transformação</i>	<i>c/Transformação</i>	<i>s/Transformação</i>
		

Considere-se agora para a segunda experiência, *Tabela 3.5*, o objecto 3, constituído por 66 *pixels*, e o 4, constituído por 61 *pixels*. Optando-se por um valor de σ igual à distância entre os centróides dos objectos, o valor que durante as experiências desenvolvidas durante este trabalho geralmente originava os melhores resultados (e que é também sugerido por Shapiro), determinaram-se 48 correspondências aceitáveis. Utilizando-se apenas 75% dos vectores

singulares, considerados a partir do primeiro vector, obtiveram-se 47 correspondências que, pela análise das trajectórias estimadas para os *pixels*, se revelam de qualidade superior. Tal aumento de qualidade é provocado pela não consideração dos vectores associados às frequências mais elevadas geralmente associadas ao ruído.

Tabela 3.5 – Dados utilizados e resultados obtidos na segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.
(% dos Vect. é a percentagem dos vectores singulares considerada)

Objecto 3 (66 pixels)	Objecto 4 (61 pixels)	Objectos Sobrepostos (pixels ligados)
		
Correspondências Obtidas		
% dos Vect.: 100, N° de Corresp.: 48		% dos Vect.: 75%, N° de Corresp.: 47
		

Para a terceira experiência, *Tabela 3.6*, considere-se o objecto 5, constituído por 57 *pixels*, e o objecto 6, resultante da aplicação ao primeiro de uma translação de 15 *pixels* ao longo do eixo *x* e um escalamento de 1.25 em relação ao centróide. Optando por um valor de σ igual à distância entre os centróides dos objectos determinaram-se 41 correspondências que, ao analisar a imagem referente aos resultados, podem ser classificadas como de fraca qualidade pois muitas estão erradas. Outros valores para o parâmetro σ foram também considerados; todavia, não foi possível obter resultados que se pudessem classificar como aceitáveis. Tal permite concluir que o método utilizado não é adequado para objectos que apresentem formas bastante diferentes, mesmo quando a transformação envolvida é apenas do tipo rígido.

Considere-se para a quarta e última experiência, *Tabela 3.7*, o objecto 7, constituído por 84 *pixels*, e o 8, constituído por 81 *pixels*. Optando por um valor de σ igual à distância média entre cada *pixel* e o seu vizinho seguinte determinaram-se 78 correspondências que visualmente podem ser classificadas como aceitáveis. Esta experiência permite confirmar que quando os objectos envolvidos são semelhantes o método baseado no princípio do mapeamento segundo a distância mínima consegue obter resultados satisfatórios.

Tabela 3.6 – Dados utilizados e resultados obtidos na terceira experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.

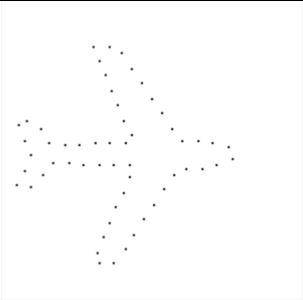
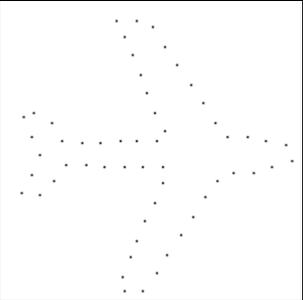
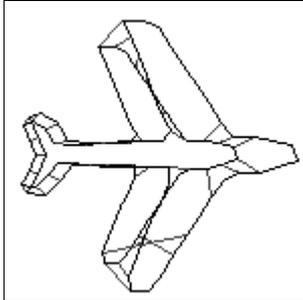
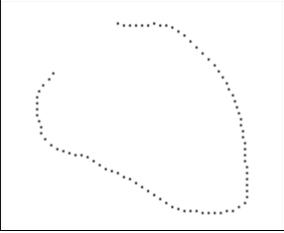
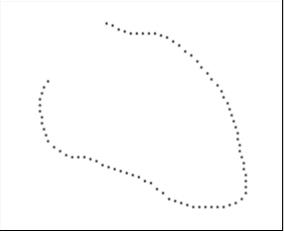
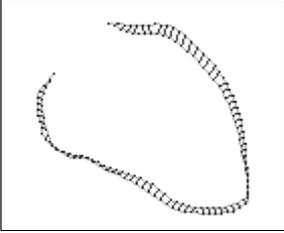
<i>Objecto 5 (57 pixels)</i>	<i>Objecto 6 (tx=15, s=1.25)</i>	<i>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 41</i>
		

Tabela 3.7 – Dados utilizados e resultados obtidos na quarta experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.

<i>Objecto 7 (84 pixels)</i>	<i>Objecto 8 (81 pixels)</i>	<i>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 78</i>
		

3.3.2.2 – Para objectos 3D

Na quinta experiência, primeira considerando objectos 3D, *Tabela 3.8*, utilizou-se o objecto 9, constituído por 161 pontos, e o 10, resultante da aplicação de uma transformação rígida ao primeiro constituída por uma translação de 10 unidades segundo o eixo z e uma rotação de 10° segundo o mesmo eixo e em relação ao centróide. Com um valor para o parâmetro σ igual à distância entre centróides obtiveram-se 155 correspondências que pela análise dos deslocamentos podem ser designadas como globalmente aceitáveis.

Numa sexta experiência, *Tabela 3.9*, utilizou-se o objecto 11, constituído por 231 pontos, e o 12, constituído por 255 pontos. Com um valor para o parâmetro σ igual à distância entre centróides obtiveram-se 124 correspondências que visualmente podem ser facilmente declaradas como de fraca qualidade. Apesar de outros valores para σ terem sido testados, não foi possível obter correspondências com qualidade razoável.

Na sétima e última experiência, *Tabela 3.10*, utilizou-se o objecto 13 constituído por 107, e o 14, constituído por 120 pontos. Com um valor para o parâmetro σ igual à distância entre centróides obtiveram-se 73 correspondências de qualidade razoável. Contudo, utilizando-se apenas 75% dos vectores próprios, a partir do primeiro, obtiveram-se 64 emparelhamentos que se revelam serem de qualidade superior.

Tabela 3.8 – Dados utilizados e resultados obtidos na quinta experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.

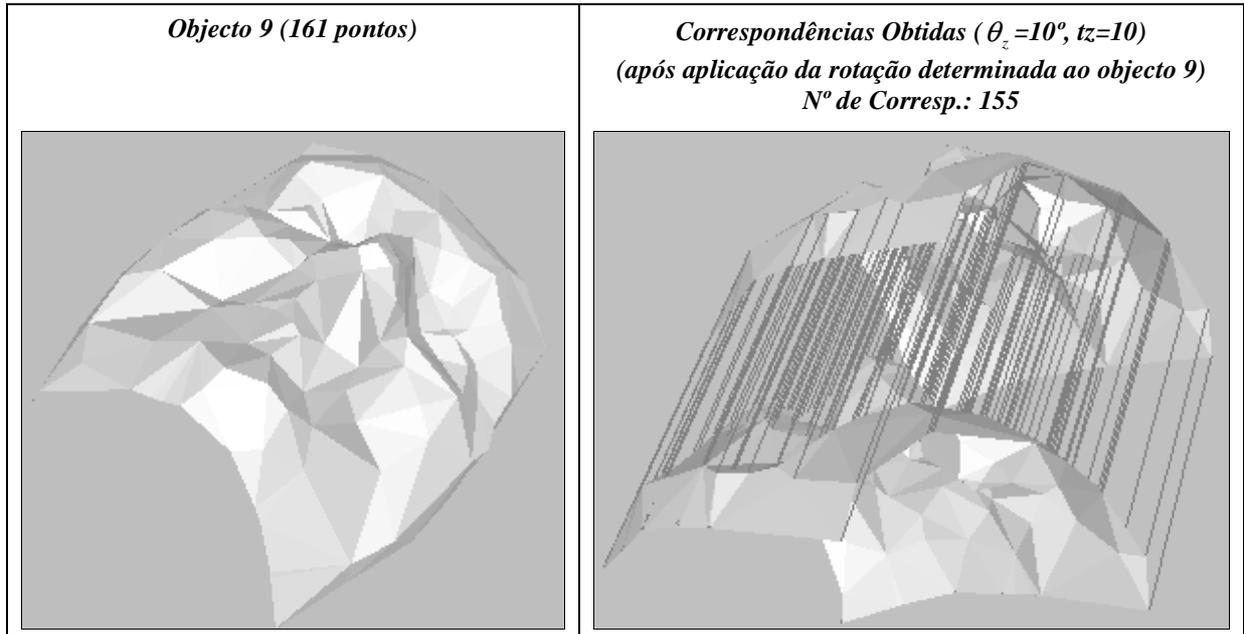


Tabela 3.9 – Dados utilizados e resultados obtidos na sexta experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.

[Reprodução a cores em anexo.]

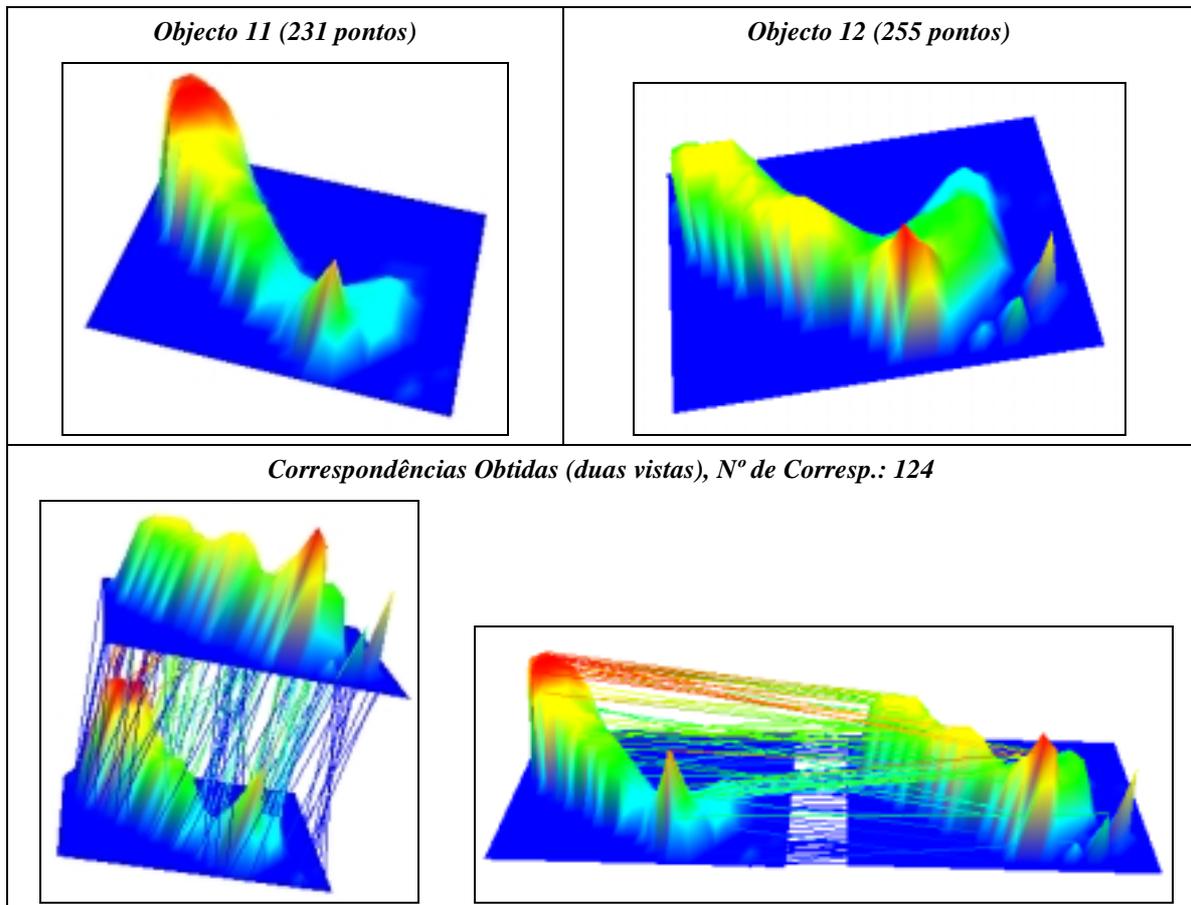
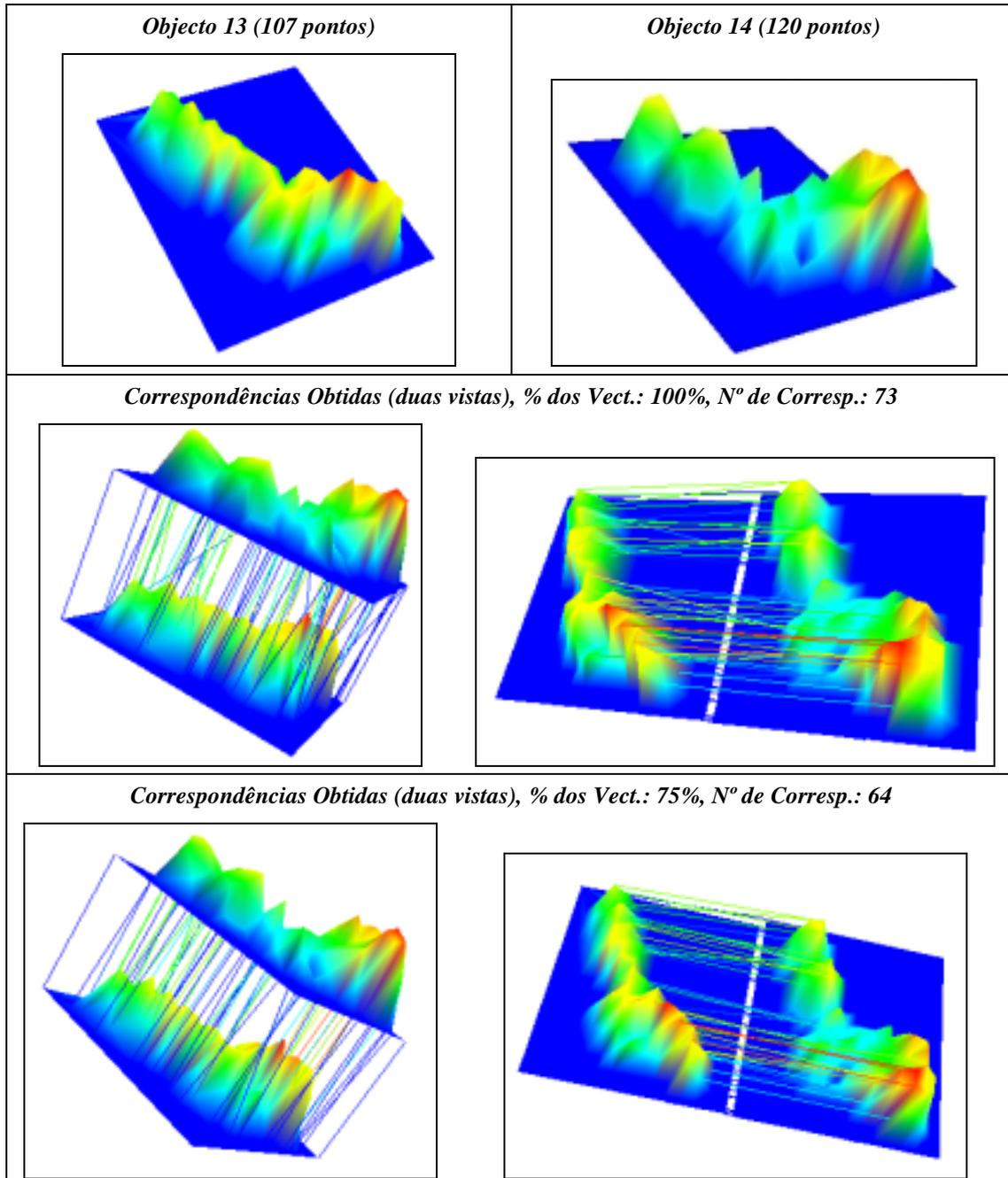


Tabela 3.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.

[Reprodução a cores em anexo.]



3.3.3 – Comentários aos resultados

Resultados empíricos demonstram que este método obtém com sucesso a correspondência para pontos de objectos com movimento de translação, expansão e corte. Uma prova teórica [Shapiro 1991, 1992, 1992a] confirma que este método recupera sempre estes mapeamentos deste que σ seja suficientemente elevado.

Contudo os resultados experimentais obtidos para objectos reais constituídos por um número razoável de pontos apenas confirmam estas características quando os objectos em

questão são muito semelhantes e a transformação rígida existente entre estes é reduzida, o que confirma, aliás, observações feitas por Shapiro nas referências citadas.

Os mesmos resultados experimentais indicaram algumas das fraquezas deste método:

- a) O método não funciona com sucesso quando existem rotações significativas entre os objectos. Este insucesso é a consequência do tratamento de igualdade para todos os pontos, isto é, sem entrar em consideração com a estrutura presente em cada objecto; por exemplo, não há restrições de continuidade que forcem pontos vizinhos do objecto t a conservarem-se vizinhos no objecto $t + 1$.
- b) Características de implementação podem fazer com que a consideração de valores elevados para σ não seja razoável, pois força os valores singulares a tenderem para zero. Consequentemente, algumas colunas da matriz $[T]$, e linhas da matriz $[U]$, tornam-se instáveis e a matriz de associação torna-se incorrecta. Este fenómeno é tão importante que, por vezes, com uma simples translação 1D os emparelhamentos não são determinados satisfatoriamente.
- c) Quando a distorção existente entre os dois objectos é elevada, o método não determina os emparelhamentos de maneira satisfatória uma vez que os vectores singulares reflectem tal distorção. Tal efeito pode ser atenuado pelo aumento do valor de σ utilizado (embora tal aumento implique efeitos colaterais como descrito em b)) e/ou pela consideração, no emparelhamento, de apenas uma percentagem dos modos existentes a partir do primeiro.
- d) Por vezes os vectores singulares obtidos são incorrectos⁸ devido a problemas numéricos. Assim, se o valor utilizado para σ for demasiado elevado a consideração dos modos de frequências mais elevadas poderá piorar o emparelhamento obtido. A solução para tal problema passa também pela consideração unicamente dos modos associados às frequências mais reduzidas.
- e) Por vezes, quando existem muitos pontos a emparelhar e é necessária uma truncagem dos vectores próprios a considerar, os vectores remanescentes são insuficientes para se obter um emparelhamento satisfatório.

O valor utilizado para o parâmetro σ é vital para o sucesso do método; basta verificar-se que σ , por si só, faz variar a matriz de proximidade $[G]$ entre as situações-limite de todos os elementos nulos, para $\sigma = 0$, e todos unitários, para $\sigma = \infty$. Algumas observações básicas sobre o valor deste parâmetro σ são as seguintes:

- a) Para valores de σ reduzidos, os valores singulares são todos quase nulos.

⁸ Quanto mais elevada a frequência do modo maior será o erro associado ao respectivo vector próprio.

- b) Quando σ aumenta, os valores singulares de baixa frequência aumentam mais rapidamente que os restantes.
- c) Para valores de σ muito elevados, apenas o primeiro valor singular é significativo, com valor aproximadamente igual ao número de pontos.
- d) O valor utilizado para σ deve ser suficientemente elevado. Em tal situação, os vectores próprios são estáveis e o primeiro é *completamente plano*⁹. Infelizmente, como já foi referido, um valor elevado para σ faz com que os valores singulares de elevada frequência sejam reduzidos tornando-se necessária uma truncagem dos vectores próprios.

Desta forma um balanço entre estes dois extremos é necessário; de forma empírica Shapiro propõe para o valor de σ a distância entre os centróides dos dois objectos. Nas experiências esta solução revelou-se geralmente satisfatória. No entanto, nos casos em que os centróides são praticamente coincidentes, verificou-se que uma solução mais aceitável era fazer σ igual à média da distância entre cada ponto e o seu vizinho seguinte.

O valor mais adequado para o parâmetro σ poderia ser determinado, de forma automática, se o método fosse iterativo de forma a parar quando os primeiros vectores próprios esquerdos e direitos fossem *quase planos*. Evidentemente que este processo seria demasiado custoso em termos computacionais, o que implicaria uma implementação paralela do mesmo¹⁰.

A robustez deste método pode ser aumentada com a consideração da estrutura de cada objecto no emparelhamento. Uma solução para a integração da informação sobre a estrutura dos objectos a emparelhar é a utilização da análise modal da forma dos mesmos, tal como é realizado no método apresentado na secção seguinte.

3.4 – Determinação de correspondências utilizando a descrição modal da forma

A robustez do método de mapeamento segundo a distância mínima pode ser aumentada incorporando informação sobre a estrutura dos objectos, tal como proposto por Shapiro nas referências citadas.

O novo método analisa individualmente cada objecto para extracção dos seus modos de forma e, seguidamente, utiliza-os para o estabelecimento das correspondências. Essencialmente os modos codificam a forma do objecto, baseando-se nas distâncias entre pontos.

⁹ Isto é, apresenta componentes com o mesmo sinal e de valor idêntico.

¹⁰ Actualmente existem muitas implementações paralelas da decomposição *SVD*, de domínio público; todavia, esta determinação não foi realizada pois, além de não se dispor de nenhuma máquina de cálculo paralelo, considerou-se que tal implementação não teria um relevante interesse devido às importantes limitações impostas pelo método relativamente à forma/alinhamento dos objectos a considerar.

Para uma compreensão intuitiva da abordagem utilizada neste método considere-se um objecto com m pontos e suponha-se que se define um conjunto de m eixos que represente um sistema de coordenadas num espaço de dimensão m . A cada ponto é então associada uma coordenada neste espaço de maior dimensão; por exemplo, cada ponto é mapeado a partir do seu espaço coordenado num hiperespaço de m eixos. Este mapeamento é independente para cada objecto e, quando as formas dos objectos são similares, pontos que deverão ser associados irão coincidir no hiperespaço.

3.4.1 – Princípio do método

Considere-se em primeiro lugar o problema de determinar os modos de forma de um objecto com m pontos de coordenadas X_i . Uma matriz quadrada de proximidade $[H]$ é construída, guardando as distâncias entre os pontos do objecto. Por outras palavras, são consideradas as distâncias no objecto em vez de distâncias entre objectos como no método anterior. Para a construção da matriz de proximidade é utilizada novamente a medida Gaussiana ponderada:

$$H_{ij} = e^{-\frac{(r_{ij})^2}{(2\sigma_x^2)}}, \quad (3.2)$$

onde $(r_{ij})^2 = \|X_i - X_j\|^2$ é a distância Euclidiana entre os pontos i e j do objecto em questão. Evidentemente, a matriz $[H]$ é simétrica ($r_{ij} = r_{ji}$) e os seus elementos da diagonal são unitários ($r_{ii} = 0$). O parâmetro σ_x controla a interacção entre pontos, com o índice x a enfatizar que a interacção ocorre, neste caso, entre pontos do mesmo objecto em vez de pontos em dois objectos distintos. Para valores de σ_x reduzidos, cada ponto apenas tem conhecimento da sua vizinhança local, enquanto que, para valores de σ_x elevados, cada ponto é influenciado mais globalmente. Como as duas análises são processadas independentemente, o valor para σ_x pode ser diferente para os dois objectos t e $t+1$; isto é, σ_t e σ_{t+1} respectivamente.

De seguida, determinam-se os valores¹¹ próprios λ_i e os vectores próprios $\{E\}_i$ da matriz $[H]$, resolvendo o sistema generalizado [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press, 1992]:

$$[H]\{E\}_i = \lambda_i \{E\}_i, \quad i = 1 \dots m. \quad (3.3)$$

Os vectores próprios são de norma unitária e mutuamente ortogonais e, deste modo, formam uma base ortonormal. Por analogia com as vibrações em sistemas mecânicos, cujos vectores próprios descrevem os modos de vibração [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986], são apelidados de modos. A equação (3.3) pode ser reescrita na forma matricial como:

¹¹ Shapiro, em [Shapiro, 1991], prova que os valores próprios de valor mais elevado têm maior peso na composição da matriz $[H]$ do que os de valor mais reduzido.

$$[H] = [V][D][V]^T.$$

A matriz diagonal $[D]$ contém os valores próprios, todos positivos pois a matriz $[H]$ é definida positivamente, ao longo da sua diagonal e de forma decrescente:

$$[D] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m] \text{ com } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m.$$

A matriz modal $[V]$ é ortogonal e tem os vectores próprios como os seus vectores coluna:

$$[V] = [\{E\}_1 | \dots | \{E\}_m].$$

Cada linha da matriz $[V]$ pode ser referida por um vector linha $\{F\}_i$ designado por vector característica:

$$[V] = \begin{bmatrix} \{F\}_1 \\ \vdots \\ \{F\}_m \end{bmatrix},$$

contendo as m coordenadas modais de cada ponto i , correspondendo à sua projecção nos m eixos modais do objecto.

Este processo de computação é executado para os dois objectos t e $t+1$. Isto é, para o objecto t , constituído por m pontos, obtemos:

$$[H]_t = [V]_t [D]_t [V]_t^T,$$

enquanto para o objecto $t+1$, constituído por n pontos, obtemos:

$$[H]_{t+1} = [V]_{t+1} [D]_{t+1} [V]_{t+1}^T.$$

Os vectores característica associados a cada ponto dos dois objectos t e $t+1$ são designados por $\{F\}_{i,t}$ e $\{F\}_{j,t+1}$.

A etapa final do método consiste na determinação da correlação entre os dois conjuntos de vectores característica, resultando a matriz de associação $[Z]$. Como no método apresentado na secção anterior, Z_{ij} traduz a confiança no emparelhamento entre os pontos i do objecto t e j do objecto $t+1$. Na construção desta matriz de associação $[Z]$ deverão ser notadas as seguintes três observações:

- a) Devido aos objectos terem possivelmente diferentes números de pontos, os números de modos a considerar serão diferentes. A solução passa pela truncagem dos $|m-n|$ modos menos significativos do objecto com mais pontos, onde os menos significativos são indicados pelos valores próprios mais reduzidos. Desta forma as matrizes modais

terão k colunas, ou modos, onde $k = \min\{m, n\}$; em realizações práticas poderão ser utilizados menos de k modos, conseguindo-se deste modo uma maior imunidade ao ruído. Efectivamente, com este procedimento são desprezadas as componentes dos vectores característica ao longo dos eixos menos importantes.

- b) O sinal de cada vector próprio não é único, pois invertendo a sua direcção não se viola a ortonormalidade da base; assim, é necessário que ambos os conjuntos de eixos tenham direcções consistentes pois deseja-se comparar directamente os vectores característica. Desta forma, deve-se utilizar um procedimento de correcção do sinal. Resumidamente (ver adiante secção 3.4.2), uma solução passa por considerar $\{V\}_t$, como a base de referência e proceder à orientação de cada eixo de $\{V\}_{t+1}$, um de cada vez, escolhendo para cada um a direcção que maximiza o alinhamento dos dois conjuntos de vectores característica.
- c) A matriz de associação $[Z]$ difere da matriz $[P]$ que lhe corresponde no método apresentado na secção anterior no facto de que um emparelhamento perfeito é, neste caso, indicando por 0 (zero), enquanto um valor igual a 2 (dois) indica um emparelhamento completamente falhado (deslocamentos no espaço modal segundo direcções opostas). Deste modo, os melhores emparelhamentos são indicados pelos elementos da matriz $[Z]$ que são mínimos na sua linha e na sua coluna. Os valores Z_{ij} são obtidos considerando a distância Euclidiana entre os vectores característica:

$$Z_{ij} = \left\| \{F\}_{i,t} - \{F\}_{j,t+1} \right\|^2,$$

em vez dos seus produtos escalares. A vantagem deste procedimento é a robustez à truncagem dos modos não necessários, o melhoramento da sensibilidade, devido a um aumento da gama de valores e, como pode ser analisado no ponto seguinte, uma interface conveniente para o algoritmo de correcção do sinal.

Na *Figura 3.2* são descritas as várias etapas que constituem o algoritmo deste método baseado na descrição modal da forma de cada objecto a emparelhar.

3.4.2 – Algoritmo de correcção de sinal dos modos e de emparelhamento

Neste ponto é apresentado o algoritmo para a correcção do sinal dos vectores próprios e para o emparelhamento entre os pontos que constituem dois objectos. O algoritmo¹² tenta, numa primeira fase, solucionar o problema da indefinição da direcção dos vectores próprios e, numa segunda fase, estabelecer o emparelhamento entre os vários pontos.

¹² Inicialmente apresentado, e proposto, por Shapiro, em [Shapiro, 1991, 1992, 1992a].

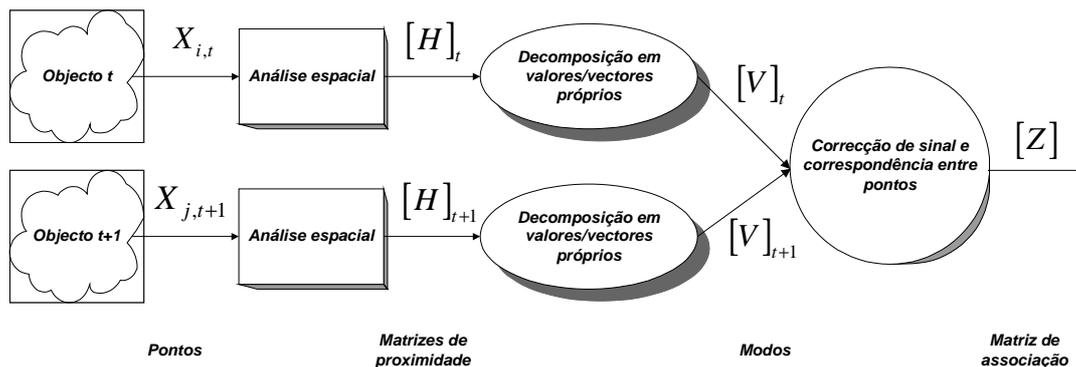


Figura 3.2 – Etapas do método baseado na descrição modal da forma.

Basicamente, para a solução do problema da indefinição do sinal, o algoritmo começa por admitir que os sinais dos modos do primeiro objecto estão correctos e define o sinal de cada modo do segundo objecto, um a um, de forma a maximizar o número de emparelhamentos obtidos. Para tal, é assumido que os objectos a emparelhar são de formas razoavelmente similares e explora-se o facto de os pontos deverem ser correlacionados. A fase correspondente do algoritmo, considerando-se que existem k modos para cada objecto, ordenados por ordem decrescente dos seus valores próprios, e que os objectos t e $t+1$ são constituídos por m e n pontos, pode ser descrita da seguinte forma:

- Para cada modo q , começando em $q = 1$ e crescendo até $q = k$, fazer:
 - a) Com o sinal do vector $\{E\}_{q,t+1}$ positivo, isto é, não trocado, calcular uma matriz $[ZP]_{(m \times n)}$ constituída pelas distâncias Euclidianas entre os vectores característica $\{\tilde{F}\}_{i,t}$, com $1 \leq i \leq m$, e $\{\tilde{F}\}_{j,t+1}$, com $1 \leq j \leq n$, onde os vectores característica são truncados a q componentes¹³:

$$\begin{aligned}
 ZP_{ij} &= \left\| \{\tilde{F}\}_{i,t} - \{\tilde{F}\}_{j,t+1} \right\|_{(q)}^2 \\
 &= \left\| \{\tilde{F}\}_{i,t} - \{\tilde{F}\}_{j,t+1} \right\|_{(q-1)}^2 + \left(\{\tilde{F}\}_{i,q,t} - \{\tilde{F}\}_{j,q,t+1} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Somar o menor elemento em cada coluna e guardar o resultado numa variável C_p .

- b) Repetir a) com o sinal de $\{E\}_{q,t+1}$ negativo, utilizando uma matriz $[ZN]_{(m \times n)}$ e uma variável C_n .

¹³ Um vector $\{\tilde{F}\}_i$ truncado a apenas q componentes é $\{\tilde{F}\}_i = \{ \{F\}_{i,1} \quad \{F\}_{i,2} \quad \dots \quad \{F\}_{i,q} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \}$ onde $\{F\}_i$ é o vector original.

- c) Se $C_p < C_n$, então melhores emparelhamentos são obtidos com $\{E\}_{q,t+1}$ positivo, isto é, com sinal não trocado; contudo se $C_n > C_p$, o sinal de $\{E\}_{q,t+1}$ deve ser trocado. Se $C_p \cong C_n$ então existe uma simetria de reflexão na forma e o sinal pode ser escolhido de forma arbitrária.
- d) A matriz de associação $[Z]$ é actualizada, fazendo-se igual a $[ZN]$ ou a $[ZP]$ em função do sinal determinado em c).

Na *Figura 3.3* está representada, de forma gráfica, a fase do algoritmo para a determinação dos sinais dos vectores próprios do objecto $t + 1$.

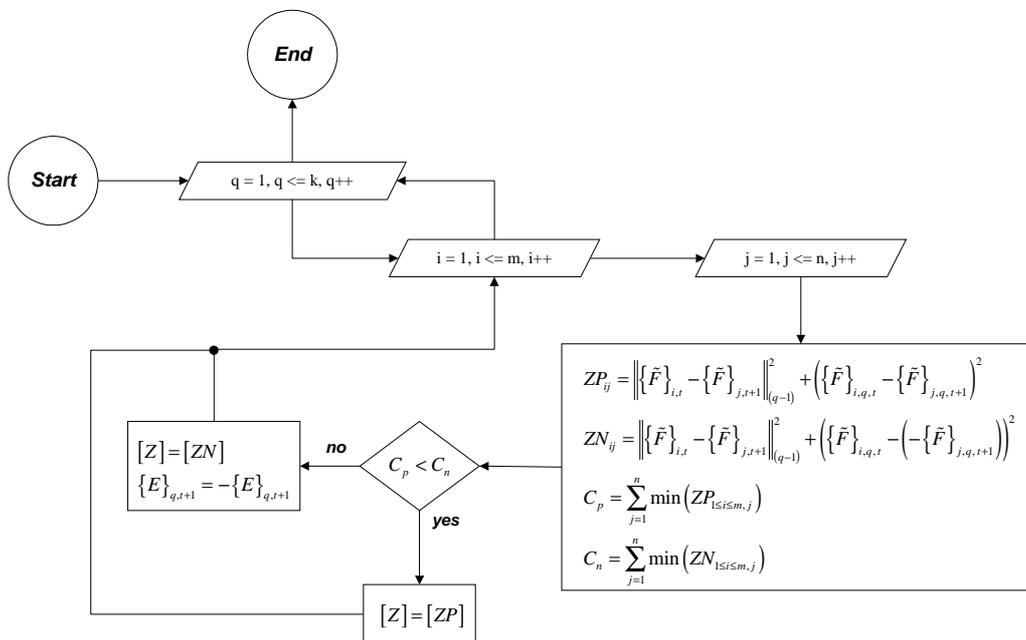


Figura 3.3 – Representação da fase do algoritmo correspondente à determinação dos sinais dos vectores próprios do objecto $t + 1$.

Para se determinar os emparelhamentos, a fase correspondente do algoritmo pode ser descrita da seguinte forma:

- Para cada linha i , com $1 \leq i \leq m$, da matriz $[Z]$, isto é para cada ponto i do objecto t :
 - a) Procurar o menor elemento dessa linha;
 - b) Verificar se o menor elemento encontrado em a) apresenta um grau de confiança aceitável através da verificação que o valor de associação não é superior a um limiar arbitrado e se também é o menor valor para a sua coluna: isto é, a associação apresenta um grau de confiança aceitável e o ponto j , com $1 \leq j \leq n$,

do objecto $t+1$ também reclama pelo ponto i como o melhor para emparelhar;

- c) Se a verificação realizada em b) for verdadeira, então o ponto i do objecto t é emparelhado com o ponto j do objecto $t+1$. Se tal verificação for falsa, então não é encontrado um bom emparelhamento para o ponto em questão.

Na *Figura 3.4* está representada, de forma gráfica, a fase do algoritmo para a determinação dos emparelhamentos entre os pontos que constituem os objectos t e $t+1$.

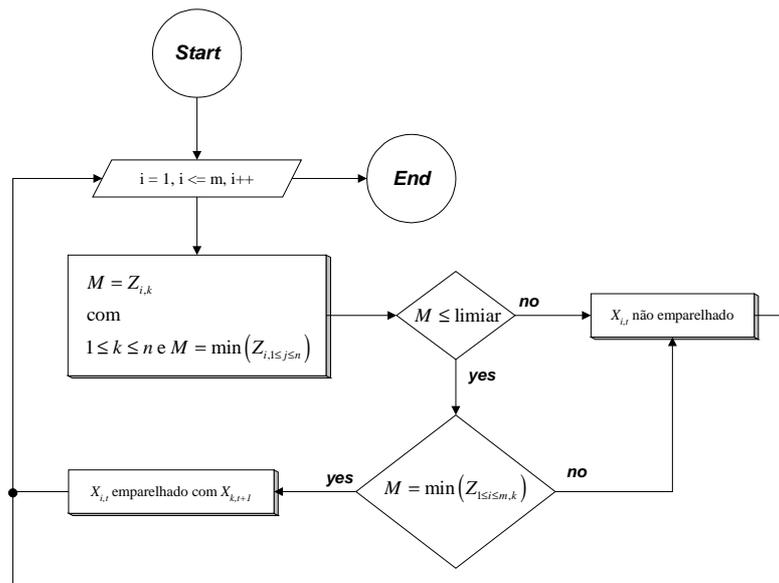


Figura 3.4 – Representação da fase do algoritmo para o emparelhamento dos pontos que constituem os objectos t e $t+1$.

3.4.3 – Resultados experimentais

Neste ponto são analisados alguns resultados experimentais obtidos por uma nossa implementação deste método para objectos, 2D e 3D, rígidos ou não. Em primeiro lugar, serão apresentados alguns resultados na análise modal de objectos 2D e 3D. Posteriormente serão verificados alguns resultados obtidos¹⁴ na determinação das correspondências entre objectos 2D e entre objectos 3D.

3.4.3.1 – Na análise modal

Como foi referido serão apresentados neste ponto alguns resultados obtidos na análise modal de objectos em “vibração de modo livre” (por analogia com sistemas mecânicos). Em primeiro lugar serão analisados resultados considerando-se objectos 2D e por último objectos 3D.

¹⁴ Outros resultados experimentais podem ser analisados em [Tavares, 1997].

3.4.3.1.1 – Para objectos 2D

Para a primeira análise modal a apresentar, *Tabela 3.11*, considere-se um objecto constituído por 62 *pixels* e utilize-se um valor para o parâmetro σ igual à média da distância entre todos os seus *pixels*, o valor que durante as experiências realizadas ao longo deste trabalho geralmente originava os melhores resultados de emparelhamento. Para verificar a influência dos modos de vibração nos deslocamentos impostos aos *pixels* que constituem o objecto original são apresentados os objectos resultantes¹⁵ da utilização dos primeiros dez, trinta e de todos os modos de vibração.

Analisando-se os objectos apresentados pode-se concluir que a influência dos modos de frequência mais elevadas traduz-se numa inclusão de deformações mais localizadas e semelhante à inclusão de ruído no objecto original (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes considerando os dez primeiros modos e todos os modos).

Para verificar-se a influência do parâmetro σ são também apresentados na mesma tabela os objectos resultantes considerando um valor para σ bastante menor do que o anterior, igual à média da distância entre cada ponto e o seu vizinho seguinte, e também a utilização dos primeiros dez, trinta e de todos os modos de vibração.

Analisando-se os objectos apresentados, para os dois valores de σ , pode-se concluir que a diminuição do valor utilizado implicou um efeito semelhante à diminuição da rigidez do objecto original (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes considerando todos os modos de vibração).

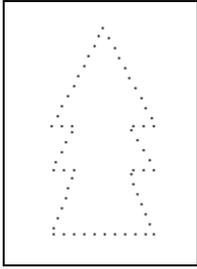
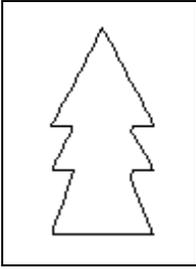
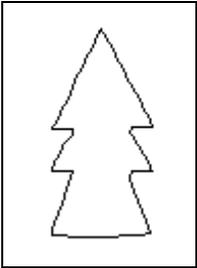
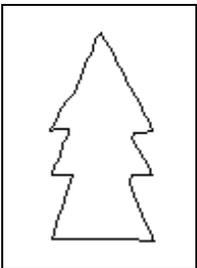
Considere-se numa nova experiência, *Tabela 3.12*, um objecto constituído por 120 *pixels*, resultante de uma amostragem semelhante à utilizada para o objecto considerado na análise anterior mas na qual são mantidos os pontos de elevada curvatura¹⁶, e utilize-se um valor para o parâmetro σ igual ao menor valor utilizado na experiência anterior. Na referida tabela é possível analisar-se os objectos resultantes utilizando-se a soma dos dez primeiros, de todos os modos e dos modos compreendidos entre o modo noventa e o último. Analisando-se o objecto resultante da consideração da soma dos modos compreendidos entre o modo noventa e o último é possível verificar que as deformações existentes estão essencialmente localizadas nas zonas de maior concentração de nodos.

Analisando-se os resultados apresentados para esta experiência e para a anterior pode-se concluir que a consideração dos pontos de elevada curvatura aumentou a concentração de pontos nos vértices do objecto e fez com que o mesmo ficasse “amarrado” nestes pontos.

¹⁵ Os objectos apresentados resultam da soma às coordenadas originais de cada *pixel* dos respectivos deslocamentos impostos pelos modos de vibração considerados. Os conjuntos de modos utilizados foram definidos de forma arbitrária apenas com o intuito de ilustrar de forma adequada os objectivos da experiência em causa.

¹⁶ Após o cálculo da curvatura em cada ponto do objecto original os *pixels* que apresentavam um valor elevado foram conservados durante a amostragem.

Tabela 3.11 – Objecto original e objectos resultantes da análise modal do mesmo utilizando-se dois valores diferentes para o parâmetro σ .

Objecto Original (62 pixels)		Objecto Original com Pixels Ligados	
			
Objectos Resultantes, $\sigma : 45.4$ n° de modos:			
10	30	62 (todos)	
			
Objectos Resultantes, $\sigma : 5.1$ n° de modos:			
10	30	62 (todos)	
			

Na *Figura 3.5* são sobrepostos os objectos resultantes da consideração da soma de todos os modos de vibração nas três análises modais apresentadas.

3.4.3.1.2 – Para objectos 3D

Consideremos um objecto 3D, constituído por 314 pontos, e um valor para o parâmetro σ igual à distância média entre todos os seus pontos, *Tabela 3.13*. Considerando-se a soma dos primeiros seis, doze, vinte e cinco, cem, duzentos e de todos os modos de vibração, obtiveram-se os objectos representados na referida tabela. Na mesma tabela estão também representados os objectos resultantes da consideração da soma dos modos de vibração compreendidos entre o modo vinte e cinco e o cem e entre o modo duzentos e o último.

Tabela 3.12 – Objecto original, resultante de utilização de uma amostragem que conservou os pixels de elevada curvatura, e objectos resultantes da análise modal do mesmo.

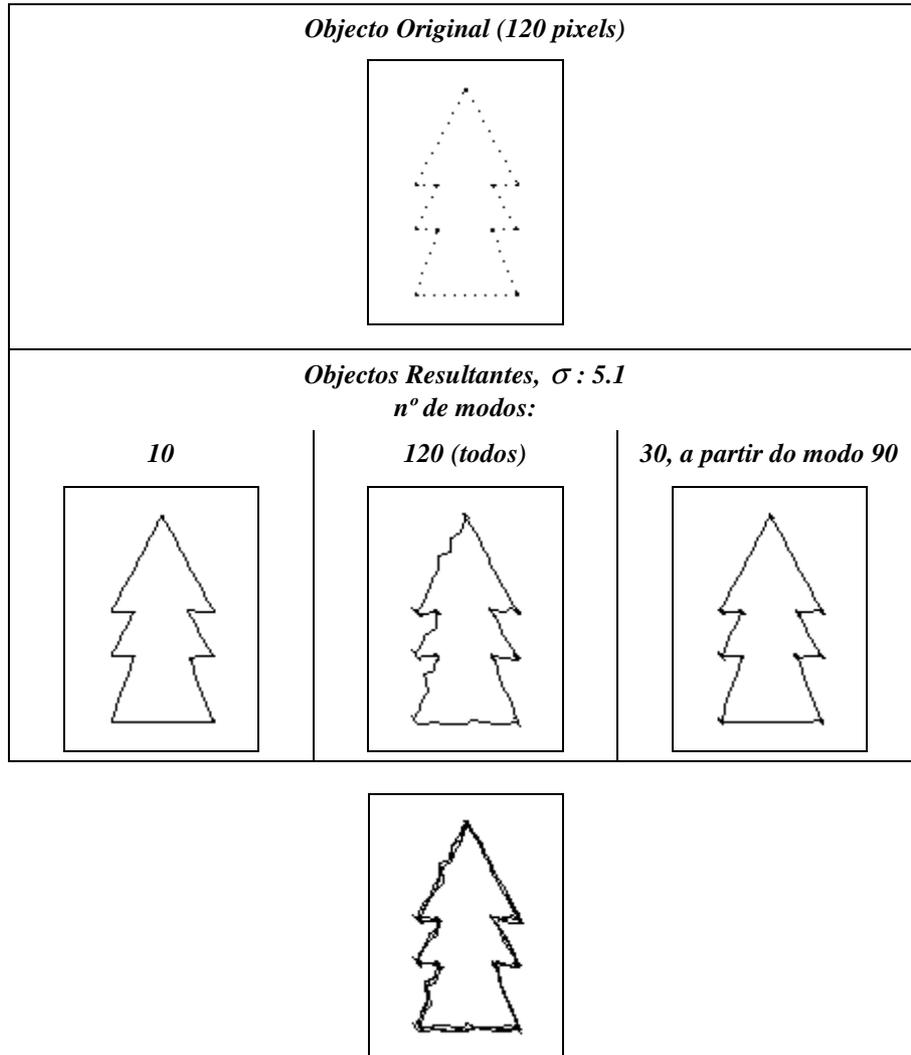


Figura 3.5 – Objectos resultantes em cada análise efectuada considerando-se todos os modos.

Considerando o mesmo objecto original mas desta vez um valor para o parâmetro σ bastante superior obtiveram-se, como seria de esperar, objectos que traduzem um aumento da rigidez do objecto original. Na Tabela 3.13 estão representados os objectos resultantes da consideração dos doze primeiros modos e da consideração dos vinte e cinco primeiros modos; analisando-se estes objectos, e também as Figura 3.6 e Figura 3.7, pode ser comprovado o aumento de rigidez verificado.

Como se pode comprovar a partir deste exemplo, quanto mais elevado o valor para o parâmetro σ mais rígido se torna o objecto e cada vez mais se começa a notar o efeito e a inclusão de perturbações semelhantes a ruído localizado, normalmente provocado pelos modos de frequências mais elevadas, nos primeiros modos (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes considerando-se a soma dos primeiros vinte e cinco modos).

Tabela 3.13 – Objecto original e objectos resultantes da análise modal do mesmo utilizando-se dois valores diferentes para o parâmetro σ .

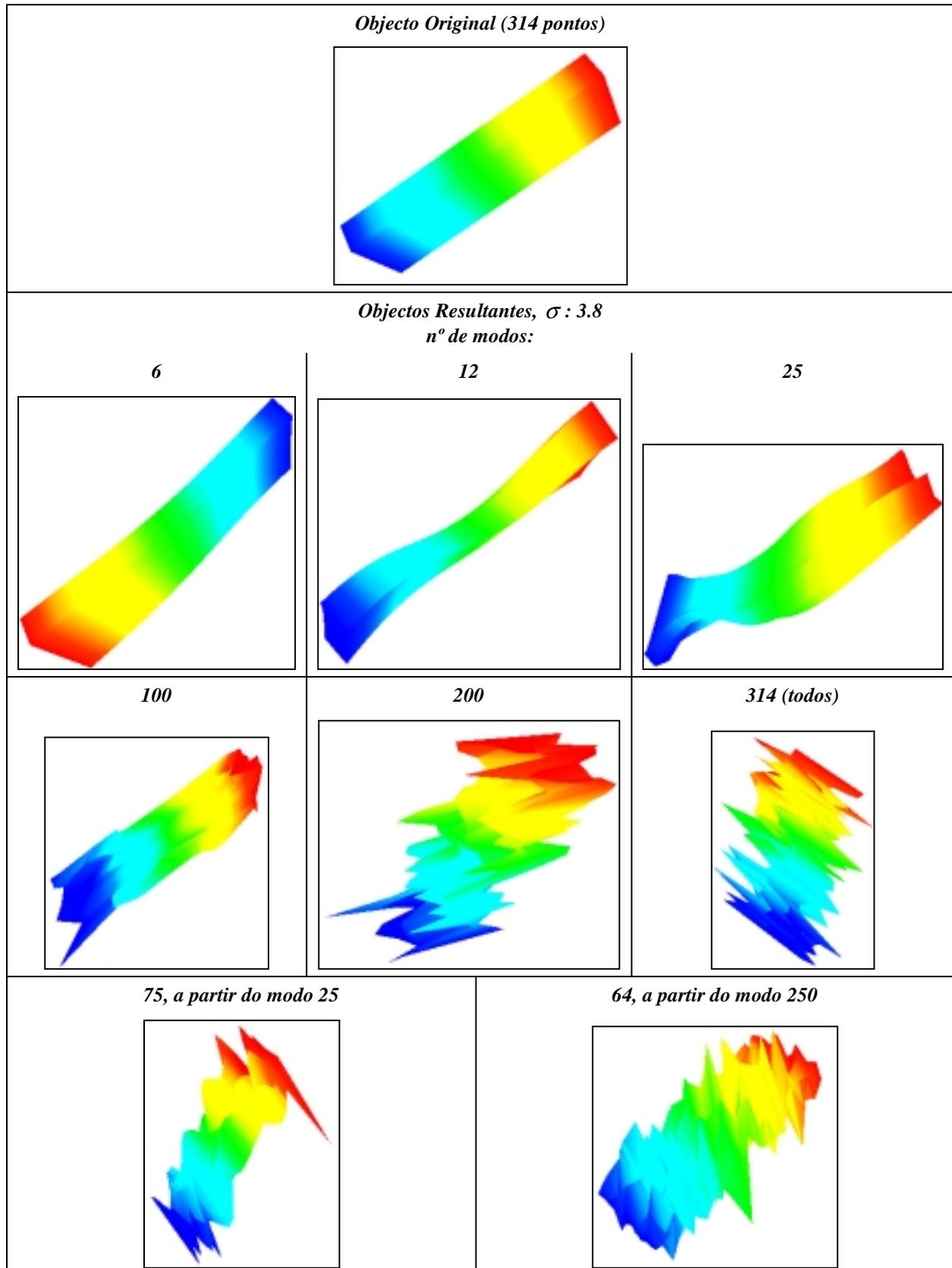


Tabela 3.13 – Objecto original e objectos resultantes da análise modal do mesmo utilizando-se dois valores diferentes para o parâmetro σ . (Continuação)

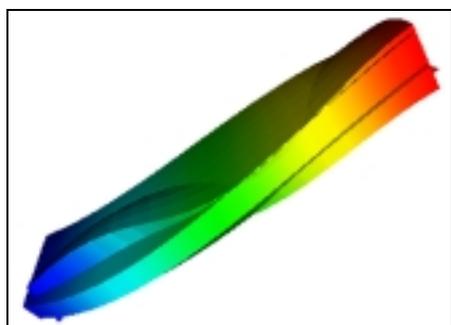
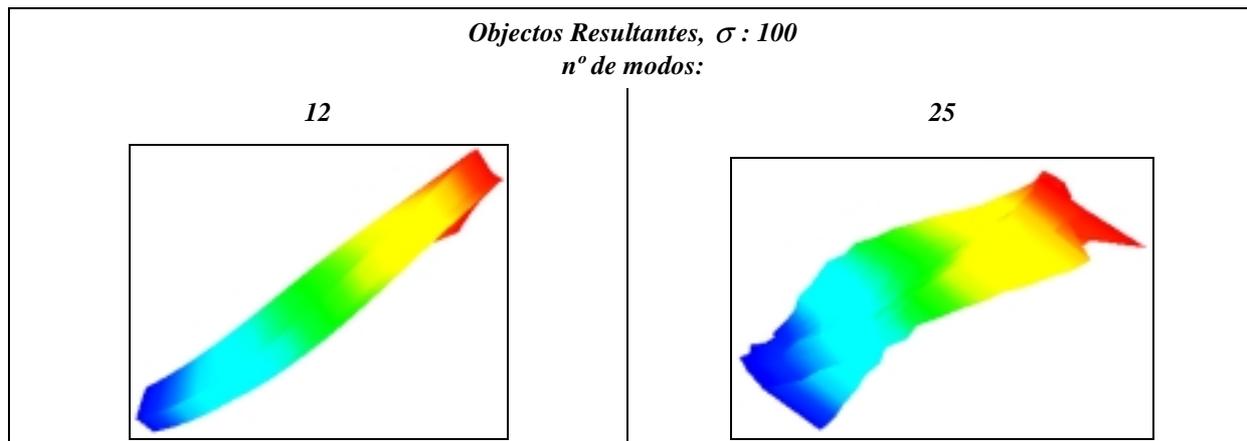


Figura 3.6 – Objectos obtidos utilizando-se os doze primeiros modos e com $\sigma = 3.8$ e $\sigma = 100$. [Reprodução a cores em anexo.]

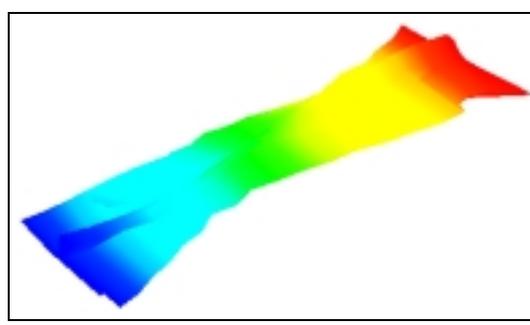


Figura 3.7 – Objectos obtidos utilizando-se os vinte e cinco primeiros modos e com $\sigma = 3.8$ e $\sigma = 100$. [Reprodução a cores em anexo.]

3.4.3.2 – Na determinação de correspondências

Neste ponto são apresentados alguns resultados experimentais obtidos na utilização deste método para a determinação de correspondências entres objectos rígidos e não rígidos. Em primeiro lugar serão apresentados resultados obtidos considerando-se objectos 2D e, seguidamente, serão apresentados resultados para objectos 3D.

3.4.3.2.1 – Para objectos 2D

Para se verificar os resultados obtidos por este método considere-se, o objecto 1, constituído por 62 *pixels*, e o 2, resultante da aplicação ao primeiro de uma transformação rígida constituída por uma rotação de -15° em torno do centróide e um escalamento de 1.25 em relação ao mesmo ponto e uma translação de 50 *pixels* em relação ao eixo x e de -65 *pixels* em relação ao eixo y , Tabela 3.14. Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 62 emparelhamentos correctos (100%). Aplicando-se ao objecto 1 a rotação e a translação determinadas, pelo método apresentado na primeira secção deste capítulo, obtivemos a figura

apresentada na referida tabela e na qual podem ser observadas as correspondências obtidas.

Numa segunda experiência, *Tabela 3.15*, utilizou-se o objecto 3, constituído por 57 pixels, e o 4, resultante da aplicação ao primeiro de uma rotação em torno da origem de -15° , um escalamento de 1.5 em relação ao mesmo ponto e uma translação de -25 pixels segundo o eixo x e de -25 pixels segundo o eixo y . Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 57 emparelhamentos correctos (100%). Aplicando-se ao objecto 3 a rotação e a translação determinadas obtivemos a figura apresentada na referida tabela e na qual se podem observar as correspondências obtidas.

Tabela 3.14 – Dados utilizados e resultados obtidos na primeira experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

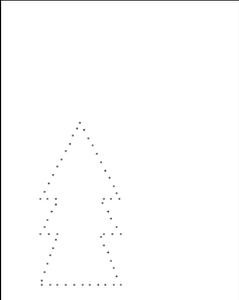
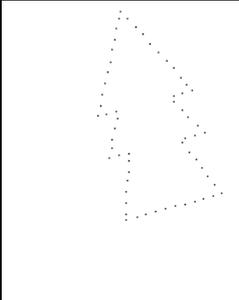
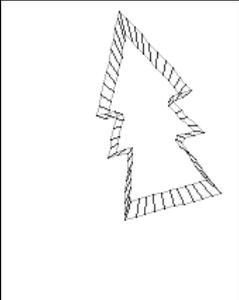
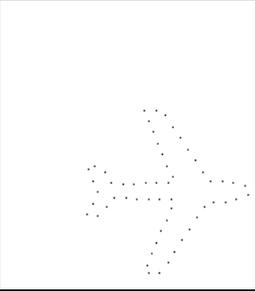
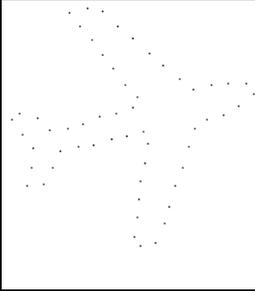
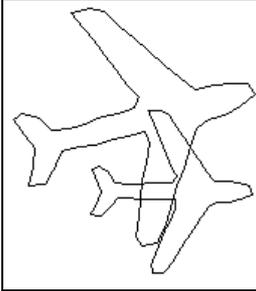
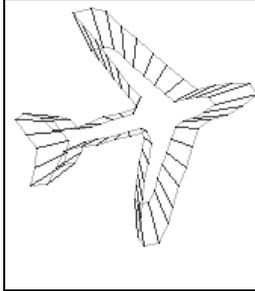
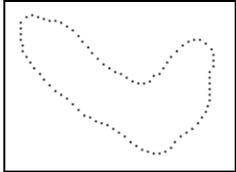
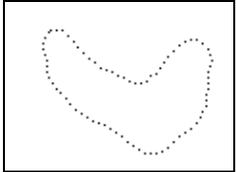
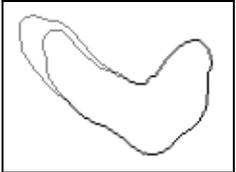
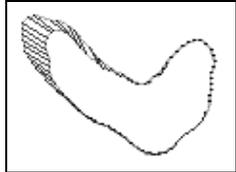
Objecto 1 (62 pixels)	Objecto 2 ($tx=50, ty=-65, \theta=-15^\circ, s=1.25$)	Objectos Sobrepostos (pixels ligados)	Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 62 (rotação e translação aplicadas)
			

Tabela 3.15 – Dados utilizados e resultados obtidos na segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

Objecto 3 (57 pixels)	Objecto 4 ($tx=-25, ty=-25, \theta=-15^\circ, s=1.5$)	Objectos Sobrepostos (pixels ligados)	Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 57 (rotação e translação aplicadas)
			

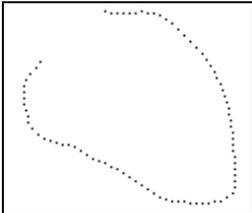
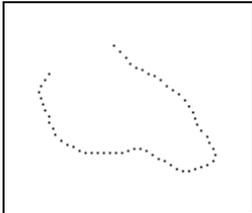
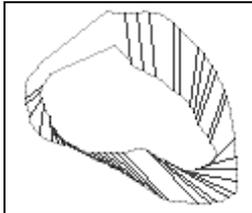
As experiências anteriores referem-se a transformações rígidas. As seguintes são não rígidas. Assim, numa terceira experiência, *Tabela 3.16*, utilizou-se o objecto 5, constituído por 78 pixels, e o 6, constituído por 85 pixels. Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 66 emparelhamentos que visualmente podem ser facilmente classificados como satisfatórios.

Tabela 3.16 – Dados utilizados e resultados obtidos na terceira experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

Objecto 5 (78 pixels)	Objecto 6 (85 pixels)	Objectos Sobrepostos (pixels ligados)	Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 66
			

O objecto 7, constituído por 84 *pixels*, e o 8, constituído por 50 *pixels*, foram considerados numa quarta experiência, Tabela 3.17. Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 38 emparelhamentos que analisando-se a imagem apresentada na referida tabela podem ser considerados como satisfatórios.

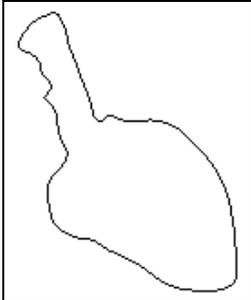
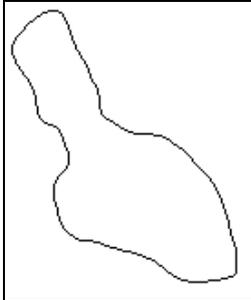
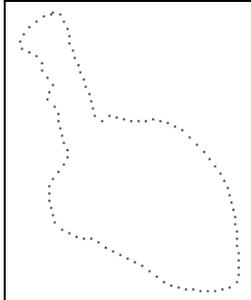
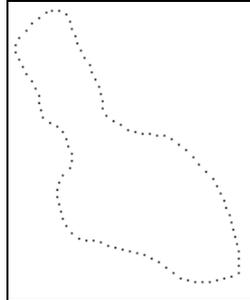
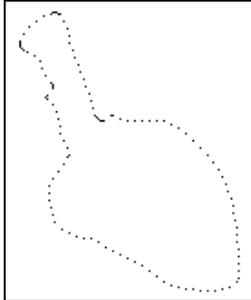
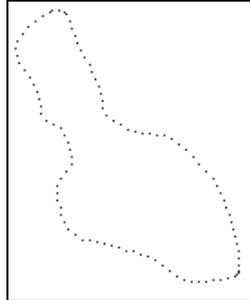
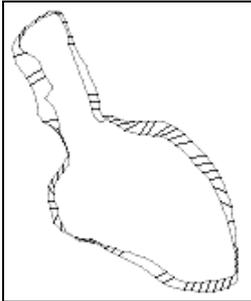
Tabela 3.17 – Dados utilizados e resultados obtidos na quarta experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

Objecto 7 (84 pixels)	Objecto 8 (50 pixels)	Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 38
		

Para a quinta experiência, Tabela 3.18, utilizaram-se o objecto 9', constituído por 105 *pixels*, e o 10', constituído por 100 *pixels*, resultantes de uma amostragem de quatro em quatro *pixels* dos objectos originais respectivos. Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 47 emparelhamentos satisfatórios.

Para se verificar a influência da concentração de *pixels* realizou-se uma sexta e última (para objectos 2D) experiência. Assim utilizaram-se novamente os objectos originais da experiência anterior mas desta feita amostrados de quatro em quatro *pixels* com conservação dos *pixels* de elevada curvatura (objectos 9'' e 10''), Tabela 3.18. Optando-se mais uma vez por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 63 emparelhamentos. Analisando-se as figuras apresentadas na referida tabela pode-se concluir que as correspondências obtidas conservando-se os *pixels* de elevada curvatura são de qualidade globalmente superior; nomeadamente, em maior número, visivelmente traduzem deslocamentos mais aceitáveis e verifica-se um aumento do número de correspondências obtidas nas zonas de maior concentração.

Tabela 3.18 – Dados utilizados e resultados obtidos na quinta e na sexta experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

Objectos Originais		Objectos Amostrados (de 4 em 4 pixels)	
Objecto 9	Objecto 10	Objecto 9' (105 pixels)	Objecto 10' (100 pixels)
			
Correspondências Obtidas entre Objectos 9' e 10', Nº de Corresp.: 47		Objectos Amostrados (de 4 em 4 pixels, mantendo pixels de elevada curvatura)	
		Objecto 9'' (122 pixels)	Objecto 10'' (104 pixels)
			
Correspondências Obtidas entre Objectos 9'' e 10'', Nº de Corresp.: 63			
sem rotação e translação determinadas		com rotação e translação determinadas	
			

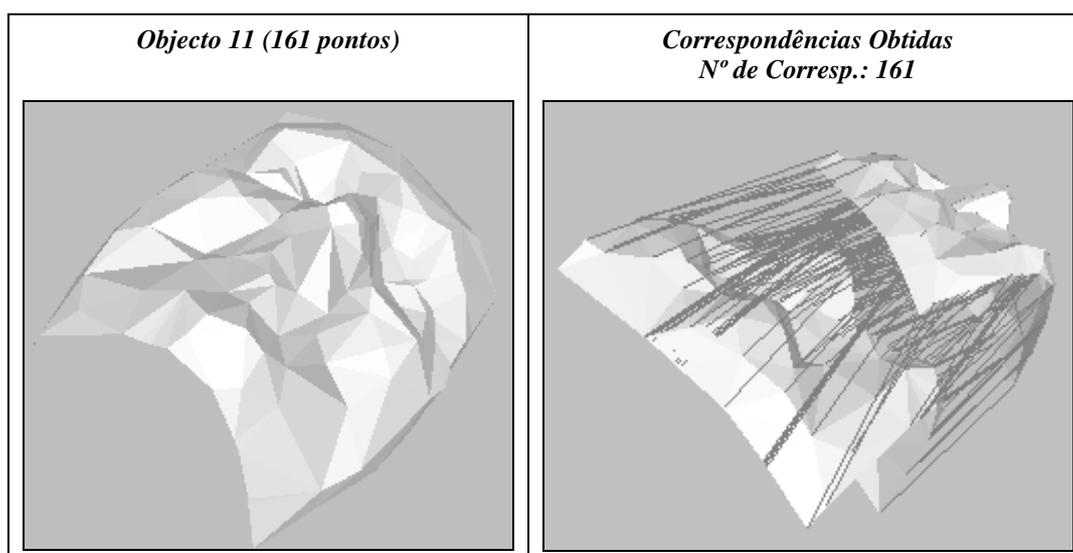
3.4.3.2.2 – Para objectos 3D

Na sétima experiência, *Tabela 3.19*, primeira considerando-se objectos 3D, utilizou-se o objecto 11, constituído por 161 pontos, e o 12, resultante da aplicação de uma transformação rígida ao primeiro constituída por uma rotação de 30° segundo o eixo z passante pelo centróide, um escalamento uniforme de 1.4 em relação ao mesmo ponto e uma translação de 50 segundo o eixo x , 35 segundo o eixo y e -75 segundo o eixo z . Optando-se por valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos

objectos obtiveram-se 161 correspondências correctas (100%).

Numa oitava experiência, para objectos não rígidos, *Tabela 3.20*, utilizou-se o objecto 13, constituído por 120 pontos, e o 14, constituído por 107 pontos. Considerando-se valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 38 correspondências que através de uma análise visual podem ser classificadas como satisfatórias.

Tabela 3.19 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.



Na nona experiência, *Tabela 3.21*, utilizou-se o objecto 15, constituído por 104 pontos, e o 16, constituído por 120. Considerando-se novamente valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 53 correspondências que, mais uma vez recorrendo a uma análise visual, podem ser classificadas como razoáveis.

Os objectos 3D 17 e 18, constituídos respectivamente por 160 e 145 pontos, foram considerados na décima e última experiência, *Tabela 3.22*. Considerando-se as cotas de cada ponto¹⁷ e valores para os parâmetros σ iguais à média da distância entre todos os pontos de cada um dos objectos obtiveram-se 74 correspondências que facilmente se verifica serem bastante satisfatórias.

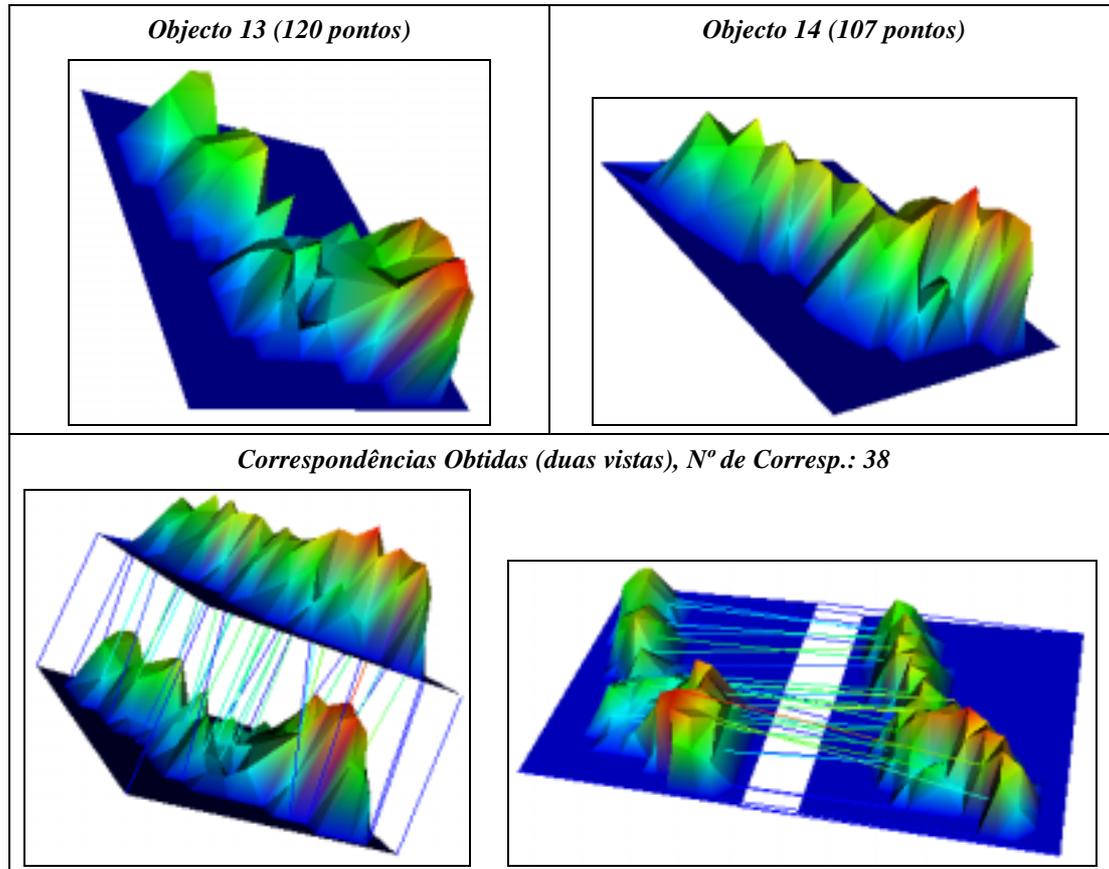
3.4.4 – Comentários aos resultados

A análise dos resultados obtidos (não só os aqui apresentados, mas também em [Tavares, 1997]) permite os seguintes comentários que, aliás, confirmam observações feitas por Shapiro em [Shapiro 1991, 1992, 1992a]:

¹⁷ Os objectos 17 e 18 correspondem a duas secções paralelas de uma mesma superfície, obtidas a cotas diferentes.

Tabela 3.20 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

[Reprodução a cores em anexo.]



- Como os modos apenas são baseados nas distâncias entre pontos, a descrição da forma não é afectada por transformações geométricas que preservem tais distâncias: rotações, translações e reflexões. O método também é robusto para escalamentos uniformes, pois escalar um objecto por s é equivalente a substituir σ por σ/s . Informação referente aos tamanhos relativos de σ_i e σ_{i+1} está contida nos valores próprios de $[H]_i$ e $[H]_{i+1}$. Tal justifica o sucesso deste método quando a transformação envolvida é apenas do tipo rígido.
- Nas experiências realizadas durante este trabalho confirmou-se que a descrição utilizada para a forma fornece informações sobre as simetrias de reflexão pela identificação de todos os emparelhamentos possíveis. Estas simetrias são detectadas quando a troca do sinal de um eixo modal não acarreta um detrimento nos emparelhamentos ($C_n \cong C_p$, ver ponto 3.4.2). Nestes casos, o número de escolhas arbitrárias para o sinal é igual ao número de simetrias ortogonais de reflexão. Estas simetrias são tanto mais importantes quanto mais baixa a ordem do modo respectivo.

Tabela 3.21 – Dados utilizados e resultados obtidos na nona experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.

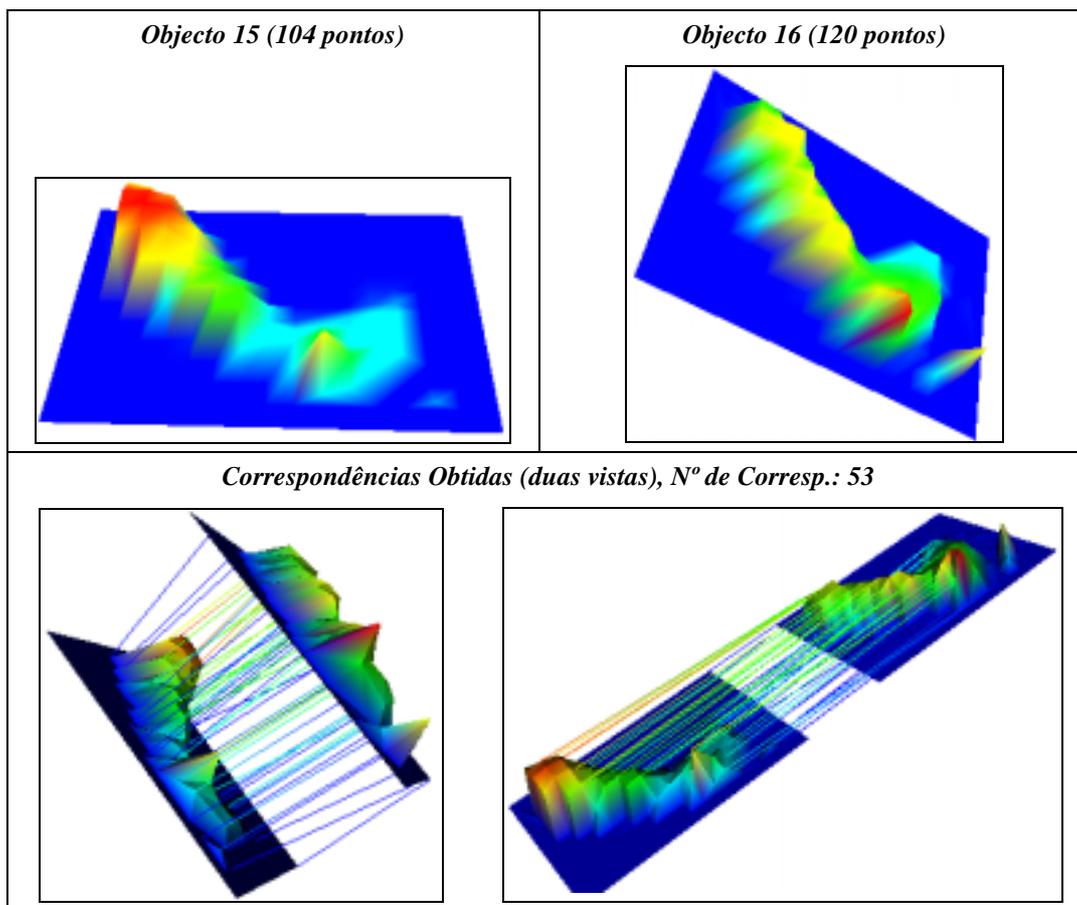
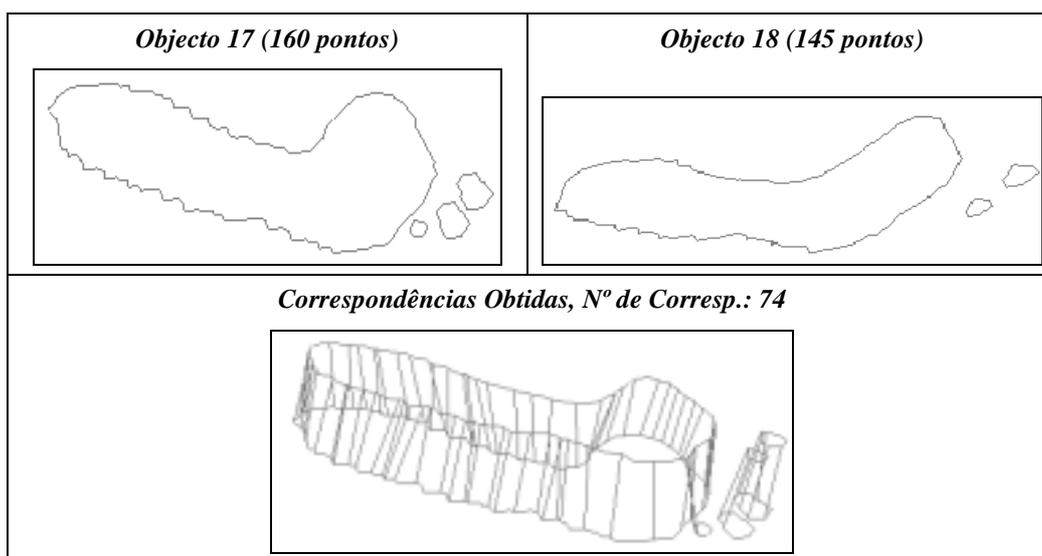


Tabela 3.22 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma.



- Os modos relevaram-se bastante robustos em relação às distorções, desde que a forma global não seja substancialmente alterada. Contudo, para distorções elevadas, a forma do objecto altera-se tanto que os emparelhamentos não são obtidos com êxito.

- Sob o ponto de vista de implementação o método é bem condicionado, linear em termos do número de pontos e potencialmente paralizável¹⁸.

3.4.4.1 – Valor considerado para o parâmetro σ

- A função do parâmetro σ é a de controlar a largura da função Gaussiana, centrada em cada ponto, determinando a influência dos pontos vizinhos. Se σ for reduzido, menor do que a distância entre pontos vizinhos, os elementos da matriz de proximidade não diagonais são aproximadamente iguais a zero e a matriz $[H]$ é praticamente diagonal. Assim que σ seja mais elevado, os elementos não diagonais aumentam até que no limite, para o qual $\sigma \rightarrow \infty$, todos os elementos da matriz $[H]$ são iguais a um.
- Quando σ é reduzido, os m valores próprios são aproximadamente iguais: $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \dots \approx \lambda_m \approx 1$. Quando σ aumenta, os valores próprios tornam-se mais distintos obtendo-se $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$.
- Quando σ é bastante elevado, o primeiro valor próprio λ_1 tende para m e, necessariamente, os restantes tendem para zero. Os modos associados a valores próprios tão reduzidos provocam severos problemas computacionais tornando-se, assim, necessário reduzir o valor de σ quando tal situação ocorre.

3.4.4.2 – Da análise modal de um objecto

Dos resultados experimentais obtidos na análise modal de objectos podemos concluir o seguinte:

- Quanto mais elevado é o valor do parâmetro σ menor é influência dos detalhes do objecto original e maior é a zona do objecto final perturbada pelos mesmos.
- O aumento do valor do parâmetro σ suaviza o objecto final.
- Os modos de baixa frequência estão associados a deformações globais e os de alta frequência a deformações locais.
- A consideração dos modos de alta frequência tem um efeito semelhante ao de inclusão de ruído no objecto final.

3.4.4.3 – Da determinação de correspondências

Os resultados experimentais obtidos na determinação das correspondências entre objectos 2D ou 3D, permitem concluir:

¹⁸ Em [Barbosa, 2000, 2000a] é descrita uma versão paralizada deste método.

- Quando a deformação existente entre os dois objectos é essencialmente rígida poucos modos de vibração são suficientes para se obterem emparelhamentos aceitáveis;
- Geralmente são obtidos melhores resultados de emparelhamento utilizando-se valores para os parâmetros σ próximos da média da distância entre todos os pontos que constituem cada objecto;
- A utilização de valores demasiado reduzidos (ou demasiado elevados) para os valores dos parâmetros σ torna impossível obter-se emparelhamentos aceitáveis;
- A não inclusão dos modos de alta frequência em geral favorece a obtenção de melhores emparelhamentos;
- Nos vários testes efectuados ao longo deste trabalho o valor do limiar para um emparelhamento ser considerado como possível não teve influência relevante nos resultados obtidos; tal sugere que a exigência de mínimo na linha e na coluna parece ser suficiente para classificá-lo como bom ou não;
- Também nos vários testes efectuados se verificou que a não consideração na base modal dos modos de vibração que tenham frequências praticamente iguais geralmente favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- Para obter-se bons resultados de emparelhamento a relação entre os valores de σ_t e σ_{t+1} deve reflectir a escala existente entre cada objecto de modo que os dois conjuntos de valores próprios tenham a mesma ordem de grandeza;
- Por vezes, a inclusão dos pontos de elevada curvatura facilita a resolução dos casos para os quais é difícil obter-se emparelhamentos satisfatórios;
- Os emparelhamentos obtidos são de melhor qualidade se a deformação existente entre os dois objectos não for apenas restrita a uma zona reduzida dos mesmos;
- O processo de determinação das correspondências pode ser bastante acelerado se não forem determinados todos os valores/vectores próprios para cada objecto, mas apenas um número suficiente¹⁹ de forma a ser possível obter-se correspondências satisfatórias. A consideração de apenas 25% dos modos revelou-se, ao longo das experiências, um número geralmente adequado.

3.4.4.4 – Adaptação do método para objectos do tipo contorno

Na construção da matriz de proximidade $[H]$ para cada objecto é considerada, na equação (3.2), a distância Euclidiana entre cada ponto e todos os restantes. Contudo, quando o objecto em questão é um contorno, e assim não apresenta pontos no seu interior, tal consideração faz

¹⁹ Por exemplo, em [Bathe, 1996] são descritos vários métodos iterativos para a determinação de um subconjunto dos valores/vectores próprios de uma matriz simétrica.

com que a influência de pontos já afastados de zonas particulares dos contornos possam ainda exercer elevada influência sobre estas. Numa tentativa de se adaptar este método a objectos deste tipo entendeu-se que seria preferível passar a utilizar na equação (3.2) as distâncias entre os pontos determinadas ao longo do contorno, em vez das distâncias Euclidianas.

3.5 – Sumário

Neste capítulo é inicialmente apresentado um método para a determinação da transformação geométrica rígida existente entre dois objectos, 2D ou 3D, cujos pontos tenham sido previamente emparelhados. Este método, baseado em minimização por mínimos quadrados do erro da transformação determinada, utiliza *quaternions* unitários para representar a rotação envolvida e é de fácil implementação sem qualquer processo iterativo. Os resultados obtidos pela implementação desenvolvida demonstram que é possível obter-se boas estimativas para a transformação geométrica existente sem a necessidade de considerar um elevado número de correspondências. Ao longo do trabalho, verificou-se também que a possibilidade de determinar a transformação rígida é de facto de muito interesse mesmo quando os objectos a emparelhar são deformáveis, pois assim é possível distinguir-se as transformações globais do tipo rígido das essencialmente localizadas.

Seguidamente foi descrito um método para determinar as correspondências entre dois objectos, 2D ou 3D, rígidos ou não, segundo um mapeamento baseado no princípio da distância mínima. Apesar de o método ser bastante atraente do ponto de vista de implementação, pela sua simplicidade, os resultados obtidos para objectos reais só são satisfatórios quando existir uma elevada semelhança no posicionamento, na orientação e nas formas dos objectos em questão. Esta inadaptação, verificada pelas experiências realizadas, deve-se ao facto de não ser considerada a estrutura de cada objecto na modelização utilizada.

A referida inadequação para objectos relativamente diferentes na forma, posicionamento ou orientação, originou o desenvolvimento de um novo método, apresentado na quarta secção deste capítulo. Este método utiliza informação da estrutura de cada objecto na modelização, através da análise dos vectores próprios de forma dos dois objectos a emparelhar. Os resultados experimentais obtidos comprovam a sua melhor adaptação para objectos reais e confirmam tratar-se de um método bastante interessante para a determinação das correspondências entre objectos 2D ou 3D, rígidos ou não.

Capítulo IV

DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS UTILIZANDO MODELIZAÇÃO FÍSICA E ANÁLISE MODAL

Na sequência dos dois métodos antes apresentados para a determinação de correspondência entre objectos, apresenta-se neste capítulo uma nova abordagem ao mesmo problema, incorporando princípios físicos. Em vez de se basear a determinação das correspondências nodais na construção de matrizes de proximidade geométrica, usa-se uma modelização física dos objectos por meio do método dos elementos finitos, na qual o objecto se considera constituído por um certo material virtual e se utiliza a análise modal para determinação dos emparelhamentos nodais.

Após uma introdução ao método dos elementos finitos, é formulada a análise modal e analisado o método proposto.

4.1 – Introdução

O problema do seguimento de objectos ao longo de uma sequência de imagens é um dos temas centrais da visão por computador. O reconhecimento do objecto nas imagens e o seu emparelhamento na sequência exige a definição de modelos de descrição dos objectos baseados em descritores como contornos, superfícies ou volumes. As primeiras dificuldades associadas a essa descrição são: os descritores do objecto são sensíveis ao ruído, o objecto pode não ser rígido, a aparência de um objecto deforma-se se a geometria utilizada na captação das imagens for alterada. Estes problemas motivaram a utilização de modelos deformáveis para interpolar, suavizar e segmentar dados.

Modelos deformáveis, por si só, não incluem um método para cálculo dos descritores canónicos para reconhecimento ou para obter a correspondência entre conjuntos de dados. Para resolver este problema Sclaroff e Pentland, [Pentland, 1990, 1991], desenvolveram um método para representar objectos por deformações canónicas a partir de um objecto protótipo. Descrevendo a forma do objecto em termos dos valores próprios da matriz de rigidez do objecto protótipo, é possível obter para a mesma uma descrição robusta e ordenada pela frequência. Além do mais, estes vectores ou modos próprios são um método intuitivo para descrição da forma pois correspondem aos eixos de simetria generalizados do objecto. Representando os objectos em termos das deformações modais, este método é robusto para a modelização 3D, reconhecimento de objectos, e seguimento 3D utilizando pontos, contornos, distâncias e fluxo óptico.

Contudo, este método ainda não resolve o problema da determinação da correspondência entre conjuntos de dados ou entre dados e modelos. Tal é devido à imposição de cada objecto ser necessariamente descrito por deformações a partir de um único objecto protótipo, o que impõe *a priori* uma parametrização implícita dos dados para assim determinar (implicitamente) a correspondência entre os dados e o protótipo.

Para solucionar este problema, Sclaroff [Sclaroff, 1995, 1995a] propôs um método com o qual é possível obter os invariantes modais de forma directamente a partir dos dados, permitindo calcular descritores canónicos robustos para o reconhecimento e resolver problemas de correspondência. Sclaroff modeliza cada objecto por intermédio de um elemento finito isoparamétrico [Bathe, 1996; Segerlind, 1984] e determina para este as matrizes de massa, de rigidez e dos modos próprios de vibração. Obtendo estas matrizes para cada um dos dois modelos, obtêm-se os emparelhamentos através da similaridade dos deslocamentos de cada dado pontual no respectivo espaço modal; desta forma, dados que apresentam deslocamentos semelhantes nos dois espaços modais são declarados como correspondentes. Para determinar os deslocamentos dos dados não emparelhados por análise modal, Sclaroff utiliza um processo de minimização da energia de deformação, segundo princípios físicos. Com este procedimento, são estimados os deslocamentos para os dados não emparelhados de forma a serem congruentes com o próprio objecto em análise e com as propriedades do material virtual utilizado na sua modelização. O valor determinado para a

energia de deformação pode ser posteriormente utilizado como medida global de similaridade entre os dois objectos em análise. Com a descrição modal utilizada, as deformações são descritas de forma perfeitamente ordenada, do nível global para o local, através das frequências de vibração em modo livre [Meirovitch, 1986].

O método que a seguir se apresenta para a determinação de correspondências entre objectos 2D ou 3D, rígidos ou não, foi adaptado do método proposto por Sclaroff, e generalizado a qualquer tipo de modelização física dos objectos pelo método dos elementos finitos. Com o novo método proposto é possível obter os emparelhamentos dos dados pontuais que constituem dois objectos, estimar os deslocamentos dos dados que tenham falhado o emparelhamento por análise modal, e obter uma medida da deformação, independentemente do tipo de elementos finitos utilizados na modelização.

4.2 – Princípio do método

Considere-se o problema de, a partir de dois conjuntos de dados pontuais, se pretender determinar se eles correspondem ou não a dois objectos similares. A abordagem mais comum para resolver este tipo de problema é a de tentar determinar características locais distintivas que possam ser emparelhadas com alguma confiança; essa abordagem falha quando existe insuficiente informação local e quando as condições de obtenção dos dados ou a sua deformação alteraram significativamente a aparência das características locais utilizadas.

Uma outra abordagem consiste em determinar um referencial de corpo centrado para cada objecto e depois tentar emparelhar os dados pontuais. Desde que os dados estejam descritos por coordenadas intrínsecas, ou por coordenadas de corpo centrado, em vez de coordenadas cartesianas, é mais fácil obter a correspondência entre os dados dos dois objectos.

Muitos métodos para determinar o referencial de corpo centrado têm sido sugeridos, incluindo métodos de momentos de inércia, de determinação das simetrias e descritores polares de Fourier. Geralmente estes métodos apresentam as seguintes dificuldades: erros de amostragem, erros de parametrização e de não unicidade. A grande contribuição do método proposto (na sequência do trabalho de Sclaroff) é a de determinar um sistema de referência local que evita, em grande parte, estas três dificuldades.

Os erros de amostragem são bem compreendidos: os dados observados e as suas localizações podem ser drasticamente alteradas de imagem para imagem. A solução mais comum para este tipo de problema é a de apenas utilizar estatísticas globais, como momentos de inércia; contudo, na melhor das hipóteses, tais métodos oferecem soluções fracas ou parciais.

Os erros de parametrização são mais subtis. O problema ocorre quando, por exemplo, se ajusta um conjunto de dados pontuais utilizando-se uma esfera deformável 3D, o que impõe um sistema coordenado radial nos dados em vez de permitir que os mesmos determinem por si só um adequado sistema de coordenadas. Consequentemente, a descrição resultante é

afectada fortemente, por exemplo, pelas distorções compressivas e de corte típicas da perspectiva. O elevado número de artigos sobre simetrias distorcidas é indicativo da seriedade deste tipo de problema.

A não unicidade é um problema óbvio para o reconhecimento e emparelhamento, mas que é muitas vezes ignorado quando se procura um qualquer tipo de descrição estável. Virtualmente, todos os métodos baseados em *splines*, em placas finas e em polinómios, não são capazes de gerar descrições canónicas; geralmente este problema é devido ao facto de os parâmetros para as entidades consideradas serem definidos de forma arbitrária, e assim não serem invariantes à mudança de vista, a oclusões e a deformações não rígidas.

O método proposto para a determinação de correspondências entre dois objectos procura solucionar as três dificuldades referidas nas seguintes etapas:

1. *É calculada uma descrição da forma de cada objecto, robusta em relação à amostragem, pela utilização de interpolação de Galerkin, matematicamente associada ao método dos elementos finitos.*
2. *É utilizada uma modelização de cada objecto por intermédio de elementos finitos, o que permite obter a parametrização da forma directamente a partir dos dados.*
3. *São utilizados os modos próprios de vibração de cada objecto modelizado para se obter um sistema de coordenadas canónico ortogonal e ordenado pela frequência. Cada um destes sistemas pode ser encarado como os eixos de simetria generalizados para a forma do respectivo objecto.*

Com a descrição da localização dos dados pontuais neste sistema de corpo centrado é fácil emparelhar dados correspondentes e medir a similaridade entre objectos diferentes, o que permite o reconhecimento de objectos e determinar se diferentes objectos são relacionados por simples transformações físicas.

Um diagrama do método proposto está representado na *Figura 4.1*.

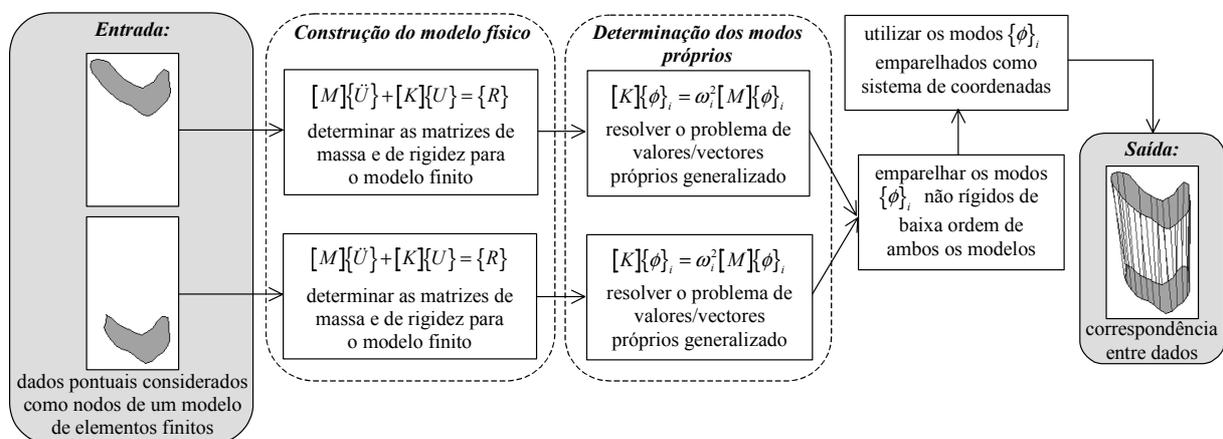


Figura 4.1 – Diagrama do método proposto neste capítulo.

Para cada imagem, consideram-se as localizações dos dados pontuais $X = [X_1 \ \cdots \ X_m]$ do objecto em questão e utilizam-se estes como nodos na construção do seu modelo de elementos finitos, constituídos por um determinado material virtual (por exemplo, borracha).

De seguida, são determinados os modos próprios de vibração $\{\phi\}_i$ dos modelos de elementos finitos. Estes modos proporcionam uma descrição ortogonal, ordenada pela frequência, de cada objecto e das suas deformações naturais. Tais vectores são, por vezes, designados por vectores de forma para cada modo [Kelly, 1993; Meirovitch, 1986] pois descrevem como cada modo deforma o objecto por alteração das localizações originais dos dados, por meio de:

$$X_{deformado} = X + a \{\phi\}_i,$$

em que a é um escalar.

Os primeiros modos (3 em 2D e 6 em 3D) são os modos de corpo rígido enquanto os restantes respeitam a movimento não rígido [Bathe, 1996; Meirovitch, 1986]. Os modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, os modos (não rígidos) de baixa frequência descrevem deformações globais, enquanto que os modos de elevada frequência descrevem essencialmente as deformações localizadas. Este ordenamento do global para o local é bastante útil na comparação e emparelhamento de objectos.

Os modos próprios também formam um sistema de coordenadas ortogonal e centrado no objecto para descrição da localização dos dados pontuais. Isto é, a localização de cada dado pontual pode ser descrita de forma única em termos do seu movimento segundo cada modo próprio. A transformação entre as localizações no sistema cartesiano e no sistema modal é conseguida pela utilização dos vectores próprios do modelo finito como uma base coordenada. Na técnica adoptada, dois grupos de dados são comparados neste espaço próprio. A ideia base é que os modos de baixa ordem para dois objectos similares deverão ser bastante próximos mesmo na presença de deformações afins [Folley 1991; Hall, 1993], deformações não rígidas, perturbações locais da forma ou de ruído.

Utilizando esta propriedade, a correspondência entre dois objectos é determinada por emparelhamento modal, sendo a correspondência entre dois objectos determinada por comparação das suas trajectórias em cada espaço modal. Dados cujo emparelhamento apresenta um elevado grau de confiança são obtidos por este processo; os deslocamentos dos restantes dados serão estimados pela utilização do modelo físico como uma restrição de suavização.

Finalmente, determinada a correspondência entre os dados pontuais que constituem dois objectos, pode-se medir as suas diferenças de forma. Como o processo modal decompõe as deformações num conjunto ortogonal, pode-se medir selectivamente as diferenças de corpo rígido, ou deformações do tipo projectivo de baixa ordem, ou deformações que são principalmente locais. Consequentemente, pode-se reconhecer objectos duma maneira flexível e geral.

Alternativamente, dadas as correspondências, pode-se alinhar ou distorcer um objecto num outro. Tal alinhamento é útil na fusão de dados obtidos por sensores diferentes, ou na comparação de dados obtidos em instantes de tempo distintos ou sob condições diferentes. Também é útil em computação gráfica, domínio em que a referida distorção é designada por *morphing* [Folley 1991].

Em resumo, pode-se afirmar que esta técnica modal oferece duas vantagens sobre outras técnicas existentes:

- Pode ser utilizada automaticamente para identificar e etiquetar dados correspondentes em dois objectos; de tal forma, pode ser possível, sem intervenção de um utilizador, alinhar, comparar e realizar *morphing* entre os dois.
- A representação modal obtida permite a separação de diferentes tipos de deformação.

Além destas vantagens, deve-se ter em conta que a representação modal é suportada pelas teorias defendidas por biólogos envolvidos no estudo da morfologia dos esqueletos e das formas dos animais, segundo as quais espécies diferentes estão relacionadas entre si por deformações. Estudos recentes também utilizam as deformações modais para a descrição do crescimento de órgãos de animais e no alinhamento entre órgãos do mesmo tipo [Martin, 1998; Syn, 1995, 1995a] e demonstram que os parâmetros de deformação correspondem qualitativamente aos que são utilizados pelos humanos em animação e na pesquisa em bases de dados.

Quando o volume de dados é muito elevado, a obtenção dos modos próprios pode ser um processo bastante custoso em termos computacionais; contudo, para se obter um procedimento mais rápido existem algumas soluções possíveis: para uma classe particular de formas similares, os modos podem ser predeterminados e generalizados [Pentland, 1990, 1991a]; em alguns casos, para topologias do tipo tubo e esfera, Nastar [Nastar, 1994] demonstrou que os modos de deformação podem ser determinados analiticamente; é também possível utilizar-se o método proposto utilizando interpolação do espaço modal (ver adiante secção 4.5.1); podem utilizar-se implementações paralelizadas para a determinação dos modos próprios de vibração [Barbosa, 2000, 2000a].

4.3 – Introdução ao método dos elementos finitos

O aumento da complexidade das estruturas e da capacidade dos computadores favoreceu o aparecimento de novos métodos computacionais de análise, nomeadamente o método dos elementos finitos. Após uma utilização inicial em problemas de elasticidade [Bathe, 1996; Segerlind, 1984], a mesma técnica foi-se rapidamente estendendo a outros domínios como o da transferência de calor e da mecânica dos fluidos, do electromagnetismo, das vibrações mecânicas e acústicas [Kelly, 1993; Meirovitch, 1986], da computação gráfica [Essa, 1992;

Pentland, 1989; Pentland, 1989a], da realidade virtual, nomeadamente em simulações cirúrgicas [Bro-Nielsen, 1996; Keeve, 1996], da visão por computador¹, etc. O objectivo do método é a obtenção de uma formulação que possa explorar a análise, de forma automática, de sistemas complexos e/ou irregulares, por intermédio de programas computacionais. Para atingir tal objectivo, o método considera o sistema global como equivalente a um agrupamento de elementos finitos no qual cada um deles é uma estrutura contínua mais simples. Impondo que em certos pontos comuns a vários elementos, designados por nodos ou nós, os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas estejam em equilíbrio, o sistema global resultante do agrupamento reage como uma única entidade.

Apesar do método dos elementos finitos considerar os elementos individuais como contínuos, ele é, na sua essência, um procedimento de discretização pois exprime os deslocamentos, as deformações e as tensões em qualquer ponto de um elemento contínuo em termos de um número finito de deslocamentos nos seus pontos nodais, usando funções de interpolação² apropriadas. A vantagem do método é que a equação de movimento para o sistema global pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas individualmente para cada elemento finito utilizado na modelização. O movimento em qualquer ponto do interior de cada um destes elementos é obtido por intermédio de interpolação, sendo as funções de interpolação, geralmente, polinómios de grau reduzido e iguais para elementos do mesmo tipo.

Uma outra vantagem do método dos elementos finitos é a facilidade com que a sua generalização pode ser conseguida para a resolução de problemas bidimensionais e tridimensionais constituídos por vários materiais e com fronteiras irregulares.

Os passos essenciais de uma solução numérica pelo método dos elementos finitos são os seguintes:

1. Subdivisão do sistema global contínuo em elementos finitos;

¹ Desde a primeira utilização do método dos elementos finitos por Pentland em 1989, [Pentland, 1989], no domínio da visão por computador, que a mesma tem vindo a generalizar-se às suas diferentes áreas, nomeadamente:

- análise de movimento 2D e 3D, rígido e não rígido [Benayoun, 1994, 1994a; Cootes, 1995; Nastar, 1994, 1994a; Pentland, 1991; Sclaroff, 1994a];
- obtenção de estruturas 2D e 3D [Cohen, 1991; Kakadiaris, 1996; Pentland, 1991a];
- análise de faces [Essa, 1995];
- análise de objectos deformáveis 2D e 3D [McInerney, 1996; Park, 1996; Pentland, 1990; Pentland, 1991];
- representação de imagens 2D e 3D [Moulin, 1992];
- alinhamento de imagens e modelos 2D e 3D [Syn, 1995a, 1995b, 1996];
- descrição de objectos 2D e 3D [Sclaroff, 1994, 1995, 1995a; Syn, 1995, 1996].

² Também designadas por funções de forma, devem ser contínuas e em cada nodo do respectivo elemento o seu somatório deve ser igual a 1 [Bathe, 1996].

2. Para cada elemento finito e , cálculo da sua matriz de rigidez $[K^{(e)}]$ e, para problemas dinâmicos, das suas matrizes de massa $[M^{(e)}]$ e de amortecimento $[C^{(e)}]$ relativamente a um referencial local conveniente;
3. Determinação, para o sistema global, da matriz de rigidez $[K]$ e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa $[M]$ e da matriz de amortecimento $[C]$, por agrupamento das matrizes de cada elemento finito, relativamente a um mesmo sistema de referência global;
4. Determinação do vector das cargas aplicadas ao sistema global $\{R\}$;
5. Estabelecimento das equações de equilíbrio para o sistema global:
 - Para problemas estáticos: $[K]\{U\} = \{R\}$,
 - Para problemas dinâmicos: $[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}$;
6. Cálculo das variáveis do problema em questão, tais como: deslocamentos, velocidades, deformações e tensões.

O método dos elementos finitos apresenta diversas formulações possíveis. Em problemas estáticos, por exemplo no caso da análise estrutural, é comum derivar-se a matriz de rigidez utilizando-se a abordagem directa que consiste no relacionamento do vector dos deslocamentos nodais com o vector das forças nodais. Tal abordagem apresenta algumas dificuldades em problemas dinâmicos, tais como a análise de vibrações, sendo preferível neste tipo de problemas obter-se para cada elemento individual a derivação das matrizes de elementos finitos de rigidez, de massa e do vector das forças não conservativas nodais a partir, respectivamente, da energia cinética, da energia potencial e da expressão dos trabalhos virtuais [Bathe, 1996; Timoshenko, 1994]; esta abordagem é geralmente designada por abordagem variacional.

Note-se que o método dos elementos finitos não dá, em princípio, soluções exactas; no entanto, à medida que se usem mais e mais elementos na modelização, a solução obtida deve convergir para a solução exacta.

4.3.1 – Formulação do método dos elementos finitos

Neste ponto são derivadas as equações que governam o método dos elementos finitos. Em primeiro lugar consideremos um corpo tridimensional geral representado na *Figura 4.2*, na qual:

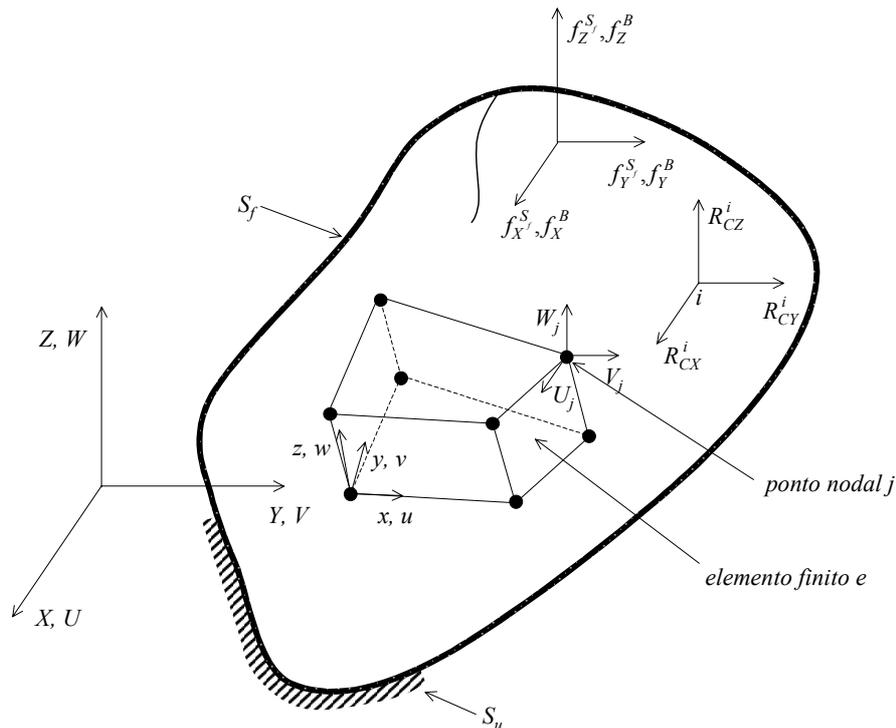


Figura 4.2 – Corpo tridimensional e um elemento finito tridimensional de oito nós.

- S_f representa a superfície do corpo sujeita a forças de superfície, S_u a superfície restringida ou de suporte do corpo ($S_f \cup S_u = S$, onde S é a superfície total do corpo);
- (X, Y, Z) é um referencial global para o corpo e U , V e W são os deslocamentos nodais segundo os seus eixos;
- (x, y, z) é um referencial local ao elemento e e u , v e w são os deslocamentos nodais segundo os seus eixos;
- U_j , V_j e W_j são os deslocamentos do nodo j segundo os eixos do referencial global;
- R_{CX}^i , R_{CY}^i e R_{CZ}^i são as componentes de uma carga aplicada no nodo i segundo os eixos do referencial global;
- f_X^B , f_Y^B e f_Z^B são as componentes das forças de corpo (ou de volume, por exemplo o peso próprio do corpo, forças de atracção eléctrica, forças de inércia) segundo os eixos do referencial global;
- $f_X^{S_f}$, $f_Y^{S_f}$ e $f_Z^{S_f}$ são as componentes das forças de superfície (forças distribuídas) segundo os eixos do referencial global.

No método dos elementos finitos, o corpo em questão é aproximado pela consideração de

que o mesmo é equivalente a um conjunto de elementos finitos discretos agrupados, de forma adequada, pelos pontos nodais localizados nas suas fronteiras. Os deslocamentos $\{u^{(e)}\}$, referenciados a um sistema de coordenadas local (x, y, z) (a ser escolhido de forma conveniente no interior de cada elemento), são assumidos como sendo função dos deslocamentos dos nodos que o constituem. Deste modo, para o elemento e tem-se:

$$\{u^{(e)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(e)}]_{(x,y,z)} \{U\}, \quad (4.1)$$

onde $[N^{(e)}]$ é a matriz das funções de forma, por vezes também designada por matriz de interpolação dos deslocamentos, e $\{U\}$ é o vector dos deslocamentos de todos os m pontos nodais do conjunto agrupado relativamente ao sistema de coordenadas global com três componentes U_i , V_i e W_i , incluindo os deslocamentos na superfície S_u de suporte; por exemplo, considerando um sistema constituído por m nodos com três graus de liberdade por nodo, $\{U\}$ é um vector de dimensão $3m$:

$$\{U\}^T = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots \quad U_m \quad V_m \quad W_m].$$

Este vector pode ser escrito de forma mais geral como:

$$\{U\}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_{3m}],$$

onde cada componente U_i se refere ao grau de liberdade i que pode corresponder a um deslocamento segundo uma qualquer direcção X , Y ou Z , e também pode significar uma rotação caso esta seja permitida. Como $\{U\}$ inclui os deslocamentos (e as rotações) nos pontos de suporte do conjunto agrupado, numa fase seguinte é necessário impor os valores conhecidos de $\{U\}$ antes de se resolver o problema para os deslocamentos nodais não conhecidos.

Na *Figura 4.2* está representado um elemento finito típico para uma modelização possível do corpo. Este elemento tem oito nós, um em cada um dos seus vértices, e pode ser interpretado como um elemento finito 3D equivalente a um tijolo. Deve-se interpretar a modelização como uma construção de elementos deste tipo, agrupados de forma a não existirem falhas entre os vários domínios de cada elemento. O elemento considerado é apenas um exemplo; na prática podem ser utilizados elementos com geometrias diferentes e com nós nas suas faces e no seu interior.

A escolha do elemento e a construção das correspondentes entradas na matriz $[N^{(e)}]$, que depende da sua geometria, do seu número de nós/graus de liberdade, e dos requisitos de convergência, constituem as etapas básicas do método dos elementos finitos.

Apesar de todos os deslocamentos nodais do conjunto agrupado estarem representados no vector $\{U\}$, deve-se notar que, para um dado elemento, apenas os deslocamentos nos seus nodos afectam a distribuição dos deslocamentos e das deformações no seu interior.

Assumindo os deslocamentos da equação (4.1) pode-se agora determinar para o elemento e as correspondentes deformações³ $\{\mathcal{E}^{(e)}\}$:

$$\{\mathcal{E}^{(e)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(e)}]_{(x,y,z)} \{U\}, \quad (4.2)$$

onde a matriz $[B^{(e)}]$, geralmente designada por matriz de deformação, relaciona os deslocamentos com as deformações e é obtida pela apropriada derivação e combinação das linhas da matriz $[N^{(e)}]$ (ver adiante secção 4.3.1.2).

O propósito de definir os deslocamentos e as deformações do elemento em termos do vector dos deslocamentos nodais do conjunto agrupado pode, por agora, ainda não ser óbvio. Contudo, será verificado que procedendo desta forma, a utilização da equação (4.2) e do princípio dos deslocamentos virtuais⁴ permite, de forma automática, um processo eficiente de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos nas matrizes do sistema global. Este processo de agrupamento é designado por método directo de rigidez⁵.

³ Deformação [Timoshenko, 1994]: alongamento por unidade de comprimento, ou alongamento específico, ou alongamento relativo. (Por exemplo, a deformação \mathcal{E} de uma barra de comprimento L que sofre um alongamento total δ pela acção de uma força axial é: $\mathcal{E} = \delta/L$.)

⁴ Princípio dos deslocamentos virtuais, também designado por princípio dos trabalhos virtuais, [Bathe, 1996]: se um sistema em equilíbrio for deslocado de um pequena quantidade, o incremento de trabalho realizado pelas forças é nulo se a força resultante do sistema for nula.

⁵ O método directo de rigidez [Bathe, 1996] é a designação dada ao procedimento de incorporar as matrizes dos elementos no sistema final de equações. O método é simples e directo. Os valores numéricos associados aos nós de cada elemento e que constituem as suas matrizes $[K^{(e)}]$ e $[M^{(e)}]$ e o vector $\{R^{(e)}\}$ são inseridos nas colunas de $[K]$ e $[M]$ e ao longo das linhas de $[K]$, $[M]$ e $\{R\}$ identificando as células de inserção pela utilização da referência dos graus de liberdade associados a cada nodo do elemento no sistema agrupado. O procedimento directo de rigidez é facilmente entendido recorrendo-se a um simples exemplo: considere-se um elemento linear constituído pelos nodos cujos graus de liberdade associados são referenciados no sistema agrupado por 2 e 3 e utilize-se a seguinte matriz de rigidez (para a matriz de massa o procedimento é idêntico) e o seguinte vector de forças:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \{R^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \end{Bmatrix}.$$

A localização destes coeficientes na matriz global de rigidez $[K]$ e no vector global de cargas $\{R\}$ é:

- 4 é adicionado a K_{22} ; 6 é adicionado a K_{23} ; 5 é adicionado a K_{32} ; 7 é adicionado a K_{33} ; 8 é adicionado a R_2 e 9 é adicionado a R_3 .

Neste exemplo é utilizada a expressão *é adicionado* pois podem existir contribuições para K_{22} , K_{23} , K_{32} , K_{33} , R_2 e R_3 , de outros elementos que não foram considerados.

Como se depreende deste exemplo, o método directo de rigidez é facilmente implementado computacionalmente.

Num elemento finito e as tensões⁶ $\{\sigma^{(e)}\}$ estão relacionadas com as suas deformações e com as suas tensões iniciais pela expressão:

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}] \{\varepsilon^{(e)}\} + \{\sigma^{I(e)}\}, \quad (4.3)$$

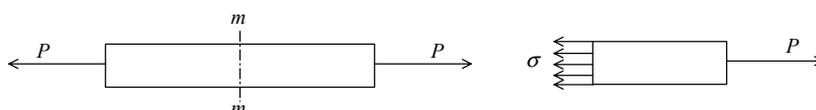
onde $[D^{(e)}]$ é a matriz de elasticidade para o elemento e $\{\sigma^{I(e)}\}$ é o vector das tensões iniciais conhecidas para o mesmo. O comportamento elástico do material adoptado está especificado na matriz $[D^{(e)}]$ e pode respeitar a um elemento isotrópico ou anisotrópico, podendo variar de elemento para elemento (ver adiante secção 4.3.1.2).

Utilizando os deslocamentos no interior de cada elemento, como descritos na equação (4.1), pode-se agora derivar as equações de equilíbrio que correspondem aos deslocamentos nodais do conjunto de elementos finitos devidamente agrupados. Em primeiro lugar, escreve-se a equação do princípio dos deslocamentos virtuais [Bathe, 1996] como uma soma de integrações sobre os volumes $V^{(e)}$ e sobre as áreas $S^{(e)}$ de todos os n_e elementos finitos utilizados na discretização do corpo:

$$\sum_e \int_{V^{(e)}} \{\bar{\varepsilon}^{(e)}\}^T \{\sigma^{(e)}\} dV^{(e)} = \sum_e \int_{V^{(e)}} \{\bar{u}^{(e)}\}^T \{f^{B(e)}\} dV^{(e)} + \sum_e \int_{S_1^{(e)}, \dots, S_q^{(e)}} \{\bar{u}^{S(e)}\}^T \{f^{S(e)}\} dS^{(e)} + \sum_i \{\bar{u}^i\}^T \{R_C^i\}, \quad (4.4)$$

onde $e = 1, 2, \dots, n_e$, $S_1^{(e)}, \dots, S_q^{(e)}$ representa as superfícies do elemento e que pertencem à superfície S do corpo, $\{\bar{u}\}$ são os respectivos deslocamentos virtuais e $\{\bar{\varepsilon}\}$ as deformações virtuais. Para elementos totalmente rodeados por outros elementos não existe este tipo de superfície; contudo, para elementos na superfície do corpo uma ou mais superfícies deste tipo são incluídas no integral das forças que sobre ela actuam. Note-se que foi assumido que na equação (4.4) os nodos estão localizados nos pontos onde as cargas concentradas estão aplicadas, apesar de uma carga concentrada poder obviamente ser incluída no integral de forças de superfície.

⁶ Tensão [Timoshenko, 1994]: força por unidade de área. (Exemplo: considere-se uma barra prismática de área constante A carregada nas suas extremidades por forças axiais, P , que produzem um alongamento uniforme na barra. Fazendo um corte imaginário (secção mm) na barra, normal ao seu eixo, é possível isolar parte dela como corpo livre. A força P é aplicada na extremidade direita, aparecendo à esquerda as forças que traduzem a acção da parte transversal, de modo análogo à distribuição da pressão hidrostática sobre uma superfície imersa. A tensão σ , uniformemente distribuída na secção mm , é $\sigma = P/A$.)



É importante notar que, desde que as integrações na equação (4.4) sejam executadas sobre os volumes e superfícies dos elementos utilizados, por razões de eficiência pode ser utilizado nos cálculos um qualquer diferente sistema de coordenadas conveniente para cada elemento (ver adiante secção 4.3.1.1). Pois deve-se ter presente que, para um dado campo dos deslocamentos virtuais, o trabalho interno virtual é um número, assim como também o é o trabalho externo virtual, e este número pode ser determinado por integração utilizando um qualquer sistema de coordenadas. Obviamente que é assumido que para cada integral na equação (4.4) é utilizado um único sistema de coordenadas para todas as variáveis; por exemplo, o vector $\{\bar{u}^{(e)}\}$ está definido no mesmo sistema de coordenadas que o vector $\{f^{B(e)}\}$.

As relações nas equações (4.1) e (4.2) foram obtidas para os deslocamentos e deformações reais e desconhecidos do elemento e . Na utilização do princípio dos deslocamentos virtuais pode-se utilizar as mesmas considerações para os deslocamentos e deformações virtuais:

$$\{\bar{u}^{(e)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(e)}]_{(x,y,z)} \{\bar{U}\} \quad \text{e} \quad \{\bar{\epsilon}^{(e)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(e)}]_{(x,y,z)} \{\bar{U}\}.$$

Desta forma as matrizes de rigidez e de massa do elemento serão matrizes simétricas.

Se agora se proceder à substituição destas igualdades na equação (4.4) obtém-se:

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\} \left[\sum_e \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV^{(e)} \right] \{U\} = \{\bar{U}\}^T \left[\sum_e \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{f^{B(e)}\} dV^{(e)} \right] \\ + \left[\sum_e \int_{S_1^{(e)}, \dots, S_q^{(e)}} [N^{S(e)}]^T \{f^{S(e)}\} dS^{(e)} \right] - \left[\sum_e \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{\sigma^{I(e)}\} dV^{(e)} \right] + \{R_C\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde as matrizes de interpolação dos deslocamentos na superfície $[N^{S(e)}]$ são obtidas a partir das matrizes de interpolação dos deslocamentos $[N^{(e)}]$ da equação (4.1) por adequada substituição das coordenadas da superfície do elemento e $\{R_C\}$ é o vector das cargas concentradas aplicadas nos nós dos elementos agrupados.

Deve-se notar que a componente i do vector $\{R_C\}$ é a força nodal concentrada que corresponde à componente i do vector de deslocamentos $\{U\}$. Na equação (4.5) os vectores de deslocamentos nodais $\{U\}$ e $\{\bar{U}\}$ do conjunto agrupado são independentes do elemento e .

Para se obter a partir da equação (4.5) as equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o princípio dos deslocamentos virtuais o número de vezes necessário para impor deslocamentos virtuais unitários a todas as componentes do vector $\{\bar{U}\}$. Assim na

primeira aplicação obtém-se $\{\bar{U}\} = \{e\}_1^7$, na segunda aplicação $\{\bar{U}\} = \{e\}_2$, e assim por adiante até que, após a última aplicação, resulta:

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (4.6)$$

O vector de carga $\{R\}$ é:

$$\{R\} = \{R_B\} + \{R_S\} - \{R_I\} + \{R_C\}. \quad (4.7)$$

A matriz $[K]$ é a matriz de rigidez para o sistema global:

$$[K] = \sum_e \int_{V^{(e)}} \underbrace{[B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV^{(e)}}_{[K^{(e)}]}. \quad (4.8)$$

O vector de carga $\{R\}$ inclui o efeito das forças de corpo $\{R_B\}$:

$$\{R_B\} = \sum_e \int_{V^{(e)}} \underbrace{[N^{(e)}]^T \{f^{B(e)}\} dV^{(e)}}_{\{R_B^{(e)}\}}, \quad (4.9)$$

o efeito das forças de superfície $\{R_S\}$:

$$\{R_S\} = \sum_e \int_{S_1^{(e)}, \dots, S_q^{(e)}} \underbrace{[N^{S(e)}]^T \{f^{S(e)}\} dS^{(e)}}_{\{R_S^{(e)}\}}, \quad (4.10)$$

o efeito da tensão inicial no vector $\{R_I\}$:

$$\{R_I\} = \sum_e \int_{V^{(e)}} \underbrace{[B^{(e)}]^T \{\sigma^I(e)\} dV^{(e)}}_{\{R_I^{(e)}\}}, \quad (4.11)$$

e as cargas concentradas $\{R_C\}$.

Note-se que o somatório dos integrais de volume na equação (4.8) exprime a adição directa das matrizes de rigidez dos elementos utilizados $[K^{(e)}]$ de forma a obter-se a matriz de rigidez do sistema global $[K]$. Do mesmo modo, o agrupamento do vector de forças de corpo $\{R_B\}$ é determinado pela adição directa dos vectores das forças de corpo dos elementos utilizados $\{R_B^{(e)}\}$; os vectores $\{R_S\}$ e $\{R_I\}$ são obtidos de forma similar. Como já foi referido, o processo de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos por esta

⁷ O vector $\{e\}_i$ tem todas as suas componentes nulas exceptuando a componente i que é unitária.

adição directa é designado por método directo de rigidez.

Este processo de agrupamento baseia-se em dois factores principais: as dimensões de todas as matrizes e de todos os vectores são as mesmas, e os graus de liberdade de cada elemento são iguais aos graus de liberdade do conjunto agrupado. Evidentemente que na prática, apenas as linhas e as colunas diferentes de zero para as matrizes e vectores de cada elemento são calculadas (correspondendo aos efectivos graus de liberdade nodais de cada elemento), e o agrupamento é executado utilizando para cada elemento um vector de conectividade no qual são guardados os índices, em relação ao conjunto agrupado, dos graus de liberdade associados ao elemento. Na prática, também as matrizes e os vectores de cada elemento finito podem, por questões de simplificação do seu cálculo, ser primeiramente calculadas relativamente aos seus graus de liberdade locais, não alinhados com os graus de liberdade do conjunto agrupado; neste caso, antes de se proceder ao agrupamento deve-se realizar uma transformação dos graus de liberdade locais para os graus de liberdade globais (ver adiante secção 4.3.1.1). Isto equivale a transformar o sistema de coordenadas local no sistema de coordenadas global.

A equação (4.6) é a equação de equilíbrio estático para o sistema global. Na consideração deste equilíbrio, as forças aplicadas podem variar com o tempo e neste caso, os deslocamentos também variam com o tempo e a equação (4.6) é a equação de equilíbrio para um qualquer instante de tempo específico. Contudo, se as cargas forem aplicadas de forma rápida, as forças de inércia não podem ser desprezadas; isto é, é necessário resolver um verdadeiro sistema dinâmico. Utilizando-se o princípio de d'Alembert⁸ pode-se simplesmente incluir as forças de inércia como parte das forças de corpo. Assumindo que as acelerações são aproximadas da mesma maneira que os deslocamentos na equação (4.7), a contribuição das forças totais de corpo no vector das cargas $\{R\}$ é (com o sistema de coordenadas (X, Y, Z) estacionário):

$$\{R_B\} = \sum_e \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left[\{f^{B(e)}\} - \rho^{(e)} [N^{(e)}] \{\ddot{U}\} \right] dV^{(e)}, \quad (4.12)$$

onde o vector $\{f^{B(e)}\}$ já não inclui as forças de inércia, $\{\ddot{U}\}$ é o vector das acelerações nodais (isto é, a segunda derivada de $\{U\}$ em relação ao tempo), e $\rho^{(e)}$ é a densidade de massa do elemento e . Neste caso as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}, \quad (4.13)$$

onde $\{R\}$ e $\{U\}$ são dependentes do tempo. A matriz $[M]$ é a matriz de massa para o sistema global:

⁸ Princípio de d'Alembert [Beer, 1981]: as forças externas que actuam sobre um corpo rígido são equivalentes às forças efectivas dos vários pontos materiais que formam o corpo. Este princípio permite utilizar o princípio dos deslocamentos virtuais, definido para problemas de equilíbrio estático, em problemas de equilíbrio dinâmico através da consideração da força de inércia como parte das forças de corpo.

$$[M] = \sum_e \int_{V^{(e)}} \underbrace{\rho^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}]}_{[M^{(e)}]} dV^{(e)}. \quad (4.14)$$

Na medição das respostas dinâmicas reais do sistema global é observado que alguma energia é dissipada durante a vibração; na análise de vibrações tal dissipação é geralmente considerada pela introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Introduzindo estas forças na equação (4.12) como contribuições adicionais às forças de corpo, obtém-se:

$$\{R_B\} = \sum_e \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left[\{f^{B(e)}\} - \rho^{(e)} [N^{(e)}] \{\dot{U}\} - \kappa^{(e)} [N^{(e)}] \{\dot{U}\} \right] dV^{(e)}.$$

Neste caso o vector $\{f^{B(e)}\}$ já não inclui as forças de inércia nem as do amortecimento dependente da velocidade, $\{\dot{U}\}$ é o vector das velocidades nodais (isto é a primeira derivada de $\{U\}$ em relação ao tempo), e $\kappa^{(e)}$ é o parâmetro de amortecimento para o elemento e . Neste caso, as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}, \quad (4.15)$$

onde $[C]$ é a matriz de amortecimento do sistema global:

$$[C] = \sum_e \int_{V^{(e)}} \underbrace{\kappa^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}]}_{[C^{(e)}]} dV^{(e)}.$$

Na prática é difícil, se não impossível, determinar para sistemas gerais de elementos finitos os parâmetros de amortecimento para os elementos que os constituem, particularmente porque as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, a matriz $[C]$ não é geralmente obtida por agrupamento das matrizes de amortecimentos dos elementos mas sim construída a partir das matrizes de massa e de rigidez do sistema global conjuntamente com resultados experimentais do valor de amortecimento.

Por exemplo, no caso de amortecimento proporcional, a matriz de amortecimento do sistema é uma combinação linear de potências das matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ [Bathe, 1996], isto é:

$$[C] = \alpha [K]^r + \beta [M]^s,$$

onde α e β são valores reais e r e s são valores inteiros.

No caso de amortecimento proporcional com r e s iguais a um, então o amortecimento é proporcional e viscoso ficando a equação matricial de movimento para o sistema global com a forma:

$$[M]\{\dot{U}\} + [\alpha[M] + \beta[K]]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}.$$

Em resumo, uma análise completa de um sistema pelo método dos elementos finitos consiste no cálculo da matriz de rigidez $[K]$ (e numa análise dinâmica, das matrizes de massa $[M]$ e de amortecimento $[C]$) e do vector das cargas $\{R\}$, na determinação dos deslocamentos $\{U\}$ a partir da equação (4.6) (ou numa análise dinâmica dos deslocamentos $\{U\}$, das velocidades $\{\dot{U}\}$ e das acelerações $\{\ddot{U}\}$ a partir da equação (4.13) ou da (4.15)), e de seguida no cálculo das deformações e das tensões nos elementos, utilizando respectivamente as equações (4.2) e (4.3).

4.3.1.1 – Graus de liberdade locais e globais

Para a derivação das matrizes dos elementos é geralmente mais fácil e conveniente estabelecer em primeiro lugar as matrizes desejadas relativamente aos seus graus de liberdade locais. A construção das matrizes do elemento finito correspondentes aos graus de liberdade globais pode ser depois obtida directamente pela identificação dos graus de liberdade globais que correspondem aos seus graus de liberdade locais. Uma vez que as matrizes dos elementos (por exemplo, $[N^{(e)}]$, $[B^{(e)}]$ ou $[K^{(e)}]$) foram definidas para os graus de liberdade globais, o processo de agrupamento fica facilitado, visto que nessas matrizes são nulos todos os elementos que não se situem nas linhas e colunas relativas aos graus de liberdade do elemento. Assim, considerando incluídos no vector $\{\hat{u}\}$ (cujas entradas são os deslocamentos em $\{U\}$ que pertencem ao elemento) apenas os graus de liberdade locais dos nodos do elemento pode-se escrever:

$$\{u\} = [N]\{\hat{u}\}, \quad (4.16)$$

onde as entradas no vector $\{u\}$ são os deslocamentos do elemento relativamente ao sistema de coordenadas local. Por outro lado, também se tem:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{u}\}. \quad (4.17)$$

Nas equações (4.16) e (4.17), as matrizes de interpolação são definidas relativamente aos graus de liberdade locais do elemento a que se referem. Reescrevendo para o elemento as relações antes usadas para as matrizes de massa e de rigidez e para o vector de carga, obtém-se:

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV, \quad (4.18)$$

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV, \quad (4.19)$$

$$\{R_B\} = \int_V [N]^T \{f^B\} dV, \quad (4.20)$$

$$\{R_S\} = \int_S [N^S]^T \{f^B\} dS, \quad (4.21)$$

$$\{R_I\} = \int_V [B]^T \{\sigma^I\} dV, \quad (4.22)$$

onde todas as variáveis são definidas como nas equações (4.8) até (4.14), mas correspondendo aos graus de liberdade locais do elemento finito considerado. Desde que as matrizes dadas nas equações (4.18) até (4.22) estejam calculadas para todos os elementos, elas podem ser agrupadas directamente, pelo processo já descrito, determinando-se assim as matrizes para o sistema global.

Neste processo de agrupamento é assumido que as direcções dos deslocamentos nodais do elemento $\{\hat{u}\}$ na equação (4.16) são as mesmas que as direcções dos deslocamentos nodais globais $\{U\}$. Contudo, por vezes é conveniente começar a derivação das matrizes e dos vectores relativamente aos graus de liberdade locais do elemento $\{\hat{u}\}$ que não são alinhados com os graus de liberdade globais do sistema agrupado $\{\hat{u}\}$. Neste caso tem-se:

$$\{u\} = [\hat{N}] \{\hat{u}\}, \quad (4.23)$$

e

$$\{\hat{u}\} = [T] \{\hat{u}\}, \quad (4.24)$$

onde a matriz $[T]$ transforma os graus de liberdade $\{\hat{u}\}$ nos graus de liberdade $\{\hat{u}\}$; a equação (4.24) corresponde a uma transformação de tensor de primeira ordem; as entradas na coluna j da matriz $[T]$ são os co-senos directores de um vector unitário correspondendo ao grau de liberdade j do vector $\{\hat{u}\}$ quando medido segundo as direcções dos graus de liberdade $\{\hat{u}\}$. Substituindo a equação (4.24) na (4.23), obtém-se:

$$\{N\} = [\hat{N}] [T]. \quad (4.25)$$

Assim, identificando por $[\hat{K}]$, $[\hat{M}]$, $\{\hat{R}_B\}$, $\{\hat{R}_S\}$ e $\{\hat{R}_I\}$ as matrizes e vectores do método dos elementos finitos relativamente aos graus de liberdade $\{\hat{u}\}$, obtém-se, a partir da equação (4.25) e das equações (4.18) até (4.22):

$$[K] = [T]^T [\hat{K}] [T], \quad [M] = [T]^T [\hat{M}] [T],$$

$$\{R_B\} = [T]^T \{\widehat{R}_B\}, \{R_S\} = [T]^T \{\widehat{R}_S\}, \{R_I\} = [T]^T \{\widehat{R}_I\}.$$

Deve-se notar que estas transformações também são utilizadas quando são impostos deslocamentos na fronteira que não correspondem aos graus de liberdade globais do sistema agrupado.

4.3.1.2 – Determinação das deformações e das tensões

Conhecido o campo dos deslocamentos num elemento, o cálculo das componentes do tensor das deformações segue-se por diferenciação [Bathe, 1996; Branco, 1985]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

ou utilizando a notação matricial:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \{\hat{u}\} = [B] \{\hat{u}\},$$

onde u é o deslocamento e ε_{xx} a deformação segundo o eixo x , v é o deslocamento e ε_{yy} a deformação segundo o eixo y , w é o deslocamento e ε_{zz} a deformação segundo o eixo z , γ_{xy} (igual a γ_{yx}) a deformação de corte no plano (x, y) , γ_{yz} (igual a γ_{zy}) a deformação de corte no plano (y, z) e γ_{zx} (igual a γ_{xz}) a deformação de corte no plano (x, z) . Por questões de tratamento matricial do método dos elementos finitos, as componentes das deformações são geralmente agrupadas num vector designado por vector das deformações $\{\varepsilon\}$:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T.$$

Conhecidos em cada ponto do elemento os deslocamentos e as deformações, pode ser realizado o cálculo das tensões instaladas. Admitindo que, para o nível das forças aplicadas ao elemento, o material se encontra no domínio linear-elástico, isto é, no domínio de aplicabilidade da lei de Hooke, as componentes do tensor das tensões $\{\sigma\}$ podem ser

calculadas a partir de:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

onde $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$ é o vector das tensões de componentes σ_{xx} para a tensão segundo o eixo x , σ_{yy} para a tensão segundo o eixo y , σ_{zz} para a tensão segundo o eixo z , τ_{xy} (igual a τ_{yx}) para a tensão de corte no plano (x, y) , τ_{yz} (igual a τ_{zy}) para a tensão de corte no plano (y, z) e τ_{zx} (igual a τ_{xz}) para a tensão de corte no plano (x, z) .

A matriz de elasticidade $[D]$ para estados tridimensionais de tensão tem a seguinte forma [Branco, 1985]:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson⁹, E o módulo de elasticidade, $\alpha_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ e $\beta_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$.

Utilizando-se a lei de Hooke generalizada pode-se escrever:

$$\{\varepsilon\} = [\square]\{\sigma\},$$

onde $[\square]$ é a matriz que relaciona as tensões com as deformações para o material considerado e é dada por [Branco, 1985]:

$$[\square] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

⁹ Quando uma barra é traccionada, o alongamento axial é acompanhado por uma contracção lateral, isto é, a largura da barra torna-se menor e o seu comprimento aumenta. A relação entre as deformações transversal e longitudinal, dentro da região elástica, é constante e conhecida [Timoshenko, 1994] por coeficiente de Poisson.

4.3.1.2.1 – Estado plano de tensão

Quando o sistema elástico é muito fino e não existem forças aplicadas segundo a direcção paralela à espessura, pode-se considerar que as tensões resultantes são constantes ao longo da espessura e está-se perante o que é usualmente designado por estado plano de tensão. O deslocamento de um ponto P , de coordenadas (x, y, z) , será descrito pelas duas componentes, u e v , do seu vector de deslocamento $\{u\}$. Em geral os deslocamentos serão diferentes de um ponto para outro mas independentes da cota z . As componentes u e v serão portanto funções de x e y . Usando uma notação matricial pode-se escrever:

$$\{u\} = \{u \quad v\}^T.$$

Conhecido o campo dos deslocamentos, o cálculo das componentes do tensor das tensões será efectuado de acordo com a Mecânica dos Meios Contínuos. Dado o carácter bidimensional do problema o vector das tensões resultante é $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}\}^T$, não havendo tensões envolvendo o eixo z (na realidade são bastante reduzidas e por isso desprezadas). O vector das deformações resultante é $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy}\}^T$; isto é, apesar de estado plano, existe deformação segundo o eixo z :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

desprezando-se as restantes deformações de corte relacionadas com o eixo z por serem bastante reduzidas. Para este estado a matriz de elasticidade $[D]$ é definida como [Branco, 1985]:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

4.3.1.2.2 – Estado plano de deformação

Quando o sistema não expande segundo a direcção perpendicular ao plano das forças aplicadas, isto é, quando a espessura é elevada, pode-se considerar o sistema como em estado plano de deformação. Se as forças aplicadas actuam no plano (x, y) então w , o deslocamento segundo a direcção z , é zero e os deslocamentos u e v são apenas funções de x e y . Este conjunto de deslocamentos faz com que as deformações relacionadas com o eixo z sejam nulas, resultando o vector de deformações $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T$ e o vector das tensões

$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy}\}^T$ com a tensão segundo o eixo z determinada a partir da lei de Hooke como:

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right],$$

e as restantes tensões relacionadas com o mesmo eixo reduzidas e por isso desprezadas. Para este estado a matriz de elasticidade $[D]$ é definida como [Branco, 1985]:

$$[D] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha_2 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{ e } \beta_2 = \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

4.3.2 – Material adoptado

Na *Tabela 4.1* [Crandall, 1978] estão indicados os valores do módulo de Young E , do coeficiente de Poisson ν e da densidade ρ para alguns materiais isotrópicos.

Tabela 4.1 – Algumas propriedades para materiais isotrópicos à temperatura ambiente.

$(1 \text{ GN/m}^2 = 145 \times 10^3 \text{ psi}, 1 \text{ psi} = 6.895 \text{ kN/m}^2)$

<i>Material</i>	<i>E (GN/m²)</i>	<i>ν</i>	<i>ρ (10³ kg/m³)</i>
<i>Alumínio</i>	68-78.6	0.32-0.34	2.66-2.88
<i>Bronze</i>	100-110	0.33-0.36	8.36-8.50
<i>Cobre</i>	117-118	0.33-0.36	8.94-8.97
<i>Ferro fundido</i>	89-145	0.21-0.30	6.95-7.34
<i>Aço</i>	193-220	0.26-0.29	7.72-7.86
<i>Titânio</i>	106-114	0.34	4.51
<i>Vidro</i>	50-79	0.21-0.27	2.38-3.88
<i>Polietileno</i>	0.14-0.38	0.45	0.91
<i>Borracha</i>	0.00076-0.0041	0.50	1.0-1.24

Obviamente que as propriedades do material adoptado condicionam o comportamento do modelo construído; assim é possível, variando as suas propriedades, alterar o seu comportamento esperado e adaptá-lo a um problema concreto. Como será possível analisar no próximo capítulo, verifica-se que as propriedades do material influenciam o comportamento do modelo na análise em modo livre de vibração, e no valor da energia de deformação necessária para alinhar dois modelos; no entanto, no que respeita ao emparelhamento entre dois modelos, a única propriedade que exerce influência relevante é o coeficiente de Poisson, que controla a resistência do modelo ao corte.

4.4 – Formulação da análise modal

O sistema de equações do equilíbrio dinâmico do modelo de elementos finitos agrupado:

$$[M]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\},$$

pode ser desacoplado impondo as suas equações numa base definida pelos vectores próprios de $[M]^{-1}[K]$ ortonormais à matriz de massa $[M]$. Estes vectores próprios e os respectivos valores próprios são a solução $(\{\phi\}_i, \omega_i^2)$ do problema de valores próprios generalizado [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press, 1992]:

$$[K]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [M]\{\phi\}_i. \quad (4.28)$$

O vector $\{\phi\}_i$ é designado por vector de forma para o modo i e ω_i é a correspondente frequência de vibração [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986].

Os vectores de forma podem ser interpretados como uma descrição dos eixos generalizados de simetria do objecto. A equação (4.28) pode ser escrita como:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega], \quad (4.29)$$

onde, para um objecto 2D constituído por m nodos:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \mid \dots \mid \{\phi\}_{2m}] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix};$$

e para um objecto 3D constituído por m nodos:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \mid \dots \mid \{\phi\}_{3m}] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \\ \{w\}_1^T \\ \vdots \\ \{w\}_m^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{3m}^2 \end{bmatrix}.$$

Como já foi referido, cada vector de forma $\{\phi\}_i$ é ortonormal em relação à matriz de massa $[M]$; isto significa que:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], \quad (4.30)$$

e, utilizando a equação (4.29), é ortogonal em relação à matriz de rigidez $[K]$:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega]. \quad (4.31)$$

Esta transformação de coordenadas generalizada $[\Phi]$ é então utilizada para transformar os deslocamentos modais $\{\tilde{U}\}$ nos nodais $\{U\}$, e vice-versa:

$$\{U\} = [\Phi] \{\tilde{U}\}.$$

O sistema de equações do equilíbrio dinâmico do modelo de elementos finitos agrupado pode agora ser reescrito em termos dos deslocamentos modais obtendo-se, para cada instante de tempo t , um sistema desacoplado de equações:

$$\{\ddot{\tilde{U}}\}_t + [\tilde{C}] \{\dot{\tilde{U}}\}_t + [\Omega]_t \{\tilde{U}\}_t = [\Phi]_t^T \{R\}_t, \quad (4.32)$$

onde $\{\ddot{\tilde{U}}\}$ e $\{\dot{\tilde{U}}\}$ são respectivamente a segunda e a primeira derivada em relação ao tempo do vector de deslocamentos modais e $[\tilde{C}]$ é a matriz diagonal de amortecimento modal.

As equações desacopladas podem ser facilmente resolvidas obtendo-se uma solução para o problema de equilíbrio dinâmico. Formulando-se a solução de equilíbrio entre dois objectos pode ser obtida directamente a correspondência pontual.

Desprezando-se os modos associados às altas frequências, o esforço computacional pode ser reduzido sem degradação significativa da qualidade da correspondência obtida. Além do mais, o conjunto de amplitudes modais fornece uma descrição canónica robusta da forma em termos da deformação aplicada ao objecto elástico original, o que permite a sua utilização directa para o reconhecimento de objectos [Cootes, 1995; Sclaroff, 1995, 1995a; Syn, 1995, 1995a, 1996].

4.5 – Determinação das correspondências

Para se determinar a correspondência entre os nodos que constituem dois modelos de elementos finitos t e $t+1$ deve-se, em primeiro lugar, determinar as matrizes de massa e de rigidez de cada um. De seguida, determinam-se os valores ω_i e vectores $\{\phi\}_i$ próprios de cada modelo através da resolução do problema de valores/vectores próprios generalizado da

equação (4.29).

Desta forma, para cada modelo, determinam-se as frequências modais de vibração ω_i e os respectivos vectores de forma $\{\phi\}_i$. Os quadrados das frequências de vibração são ordenados de forma crescente na matriz diagonal $[\Omega]$.

O vector coluna $\{\phi\}_i$ descreve o deslocamento modal ((u, v) para objectos 2D e (u, v, w) para objectos 3D) para cada nodo do modelo devido ao modo de vibração i , enquanto os vectores $\{u\}_i$ e $\{v\}_i$ para objectos 2D, e $\{u\}_i$, $\{v\}_i$ e $\{w\}_i$ para objectos 3D, são designados por vectores característica i e, em conjunto, descrevem a localização do nodo i no sistema de coordenadas modal.

Construídas as matrizes modais $[\Phi]_t$ e $[\Phi]_{t+1}$ para os dois modelos, com respectivamente m e n nodos, as correspondências podem ser estabelecidas comparando os vectores de forma para os dois conjuntos de nodos; cada ponto nodal será caracterizado pela sua participação relativa nos vários modos próprios. Desta forma, utilizando os dois conjuntos de vectores característica, i e j , determina-se a matriz de afinidade $[Z]$, com dimensão $(m \times n)$, de modo idêntico ao descrito no capítulo anterior:

- Para objectos 2D: $Z_{ij} = \left\| \{u\}_{t,i} - \{u\}_{t+1,j} \right\|^2 + \left\| \{v\}_{t,i} - \{v\}_{t+1,j} \right\|^2$;
- Para objectos 3D: $Z_{ij} = \left\| \{u\}_{t,i} - \{u\}_{t+1,j} \right\|^2 + \left\| \{v\}_{t,i} - \{v\}_{t+1,j} \right\|^2 + \left\| \{w\}_{t,i} - \{w\}_{t+1,j} \right\|^2$.

Nesta matriz $[Z]$ ao valor nulo corresponde um emparelhamento óptimo e a valores mais elevados correspondem emparelhamentos mais fracos. Os melhores emparelhamentos são indicados pelos elementos que são mínimos na sua linha e na sua coluna: ao nodo i do modelo t corresponde o nodo j do modelo $t+1$ e a este o nodo i do modelo t . Deverão apenas ser considerados os emparelhamentos que apresentem um valor de afinidade inferior a um dado limiar, obtendo-se assim apenas as correspondências de elevada confiança.

Na construção da matriz de associação $[Z]$ deverão também ser tidas em conta as considerações apresentadas na secção 3.4 do capítulo anterior, em resumo:

- a) É necessário realizar a truncagem dos $|m - n|$ modos menos significativos do modelo com mais nodos;
- b) Deve-se corrigir o sinal de cada vector próprio de $[\Phi]_{t+1}$;

- c) Quando o sinal de um vector de $[\Phi]_{t+1}$ é indiferente no alinhamento tal traduz a existência de uma simetria de reflexão.
- d) Quando alguns modos apresentam frequências de vibração praticamente iguais (o que implicaria um emparelhamento no subespaço modal), eles são retirados da respectiva base modal [Sclaroff, 1995, 1995a; Shapiro 1991].
- e) Quando não se pretender considerar a transformação rígida existente entre os dois modelos, os correspondentes modos devem ser ignorados.

Das considerações a) e e), resulta uma divisão de cada espaço modal $[\Phi]_t$ e $[\Phi]_{t+1}$ em três grupos de vectores característica, para modelos 2D:

$$[\Phi]_t = \left[\underbrace{\{\phi\}_{t,1} \mid \{\phi\}_{t,2} \mid \{\phi\}_{t,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t,2m}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right],$$

$$[\Phi]_{t+1} = \left[\underbrace{\{\phi\}_{t+1,1} \mid \{\phi\}_{t+1,2} \mid \{\phi\}_{t+1,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t+1,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t+1,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t+1,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t+1,2n}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

e para modelos 3D:

$$[\Phi]_t = \left[\underbrace{\{\phi\}_{t,1} \mid \{\phi\}_{t,2} \mid \{\phi\}_{t,3} \mid \{\phi\}_{t,4} \mid \{\phi\}_{t,5} \mid \{\phi\}_{t,6}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t,7} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t,3m}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right],$$

$$[\Phi]_{t+1} = \left[\underbrace{\{\phi\}_{t+1,1} \mid \{\phi\}_{t+1,2} \mid \{\phi\}_{t+1,3} \mid \{\phi\}_{t+1,4} \mid \{\phi\}_{t+1,5} \mid \{\phi\}_{t+1,6}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t+1,6} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t+1,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{t+1,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{t+1,3n}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

Considerando a truncagem de cada espaço modal, resulta o conjunto de vectores característica truncados correspondentes aos modos intermédios que constituem a matriz modal truncada $[\bar{\Phi}]$, para objectos 2D:

$$[\bar{\Phi}] = \left[\{\Phi\}_4 \mid \cdots \mid \{\Phi\}_p \right] = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{u}\}_m^T \\ \{\bar{v}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{v}\}_m^T \end{bmatrix},$$

e para objectos 3D:

$$[\bar{\Phi}] = [\{\Phi\}_7 \mid \dots \mid \{\Phi\}_p] = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{u}\}_m^T \\ \{\bar{v}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{v}\}_m^T \\ \{\bar{w}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{w}\}_m^T \end{bmatrix},$$

onde os vectores $\{\bar{u}\}_i$, $\{\bar{v}\}_i$ e $\{\bar{w}\}_i$ resultam da truncagem dos vectores não correspondentes às componentes relativas aos modos intermédios e, em conjunto, definem os deslocamentos para o nodo i no espaço modal truncado.

4.5.1 – Interpolação do espaço modal

Quando os elementos em consideração são constituídos por muitos dados pontuais a construção dos modelos de elementos finitos e a determinação dos seus modos próprios pode ser uma tarefa computacionalmente pesada. Embora durante este trabalho não tenha sido implementada, pode-se utilizar uma abordagem sugerida por Sclaroff [Sclaroff, 1995, 1995a] para aumentar a eficiência do método, de acordo com a qual um subconjunto de dados pontuais é utilizado para construir um modelo de elementos finitos de baixa resolução, e os modos próprios deste modelo são utilizados para se determinar as correspondências para o conjunto original. O procedimento a utilizar é o seguinte:

Primeiro, para cada objecto a emparelhar, um subconjunto de dados pontuais é seleccionado para constituir os nodos do modelo de elementos finitos de baixa resolução. Este subconjunto pode ser constituído por pontos característicos (por exemplo, vértices, junções, pontos de orlas) ou escolhidos com espaçamento uniformemente e de forma arbitrária. São determinadas para este modelo as suas matrizes de massa, de rigidez e modal.

Com as matrizes modais para os dois modelos de elementos finitos de baixa resolução, determina-se a correspondência entre os dois conjuntos de vectores modais.

Com os modos emparelhados para os subconjuntos de dados, determinam-se as correspondências entre os conjuntos globais. Para tal, utiliza-se a matriz de interpolação modal $[\hat{N}]$, para se obter a respectiva matriz modal interpolada $[\hat{\Phi}]$:

$$[\hat{\Phi}] = [\hat{N}][\Phi].$$

A matriz de interpolação $[\hat{N}]$ relaciona os deslocamentos nos nodos dos elementos de baixa

resolução, com os deslocamentos nos dados pontuais dos correspondentes elementos de mais elevada resolução.

Finalmente, uma matriz de afinidade é determinada para os conjuntos de dados originais, utilizando as matrizes modais interpoladas $[\hat{\Phi}]_t$ e $[\hat{\Phi}]_{t+1}$, e as correspondências podem ser determinadas utilizando-se a abordagem anteriormente apresentada.

4.6 – Alinhamento, comparação e descrição de objectos

Uma vantagem da técnica modal é que os modos próprios calculados para a determinação da correspondência podem também ser utilizados para descrever as deformações rígidas e não rígidas necessárias para alinhar um objecto com um outro. Desde que esta descrição modal esteja calculada, pode ser realizada a comparação entre objectos pela observação das amplitudes modais ou – como o modelo utilizado é um modelo físico – pode ser calculada e comparada a energia de deformação necessária para alinhar dois objectos e utilizar esta energia como medida de similaridade. Se os deslocamentos modais, ou a energia de deformação para alinhar dois conjuntos de dados for relativamente pequena então os objectos em questão são similares.

Os modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, os modos de baixa frequência descrevem deformações globais enquanto os modos de alta frequência descrevem essencialmente as deformações mais localizadas. Tal ordenamento global/local das deformações permite seleccionar quais os tipos de deformação a serem comparados.

Por exemplo, pode ser desejável fazer comparações independentes da rotação e da posição. Para tal, ignoram-se os deslocamentos de baixa ordem, ou modos de corpo rígido, e assim desprezam-se as diferenças de posição e orientação. Em complemento, não considerando os modos de elevada ordem, pode-se tornar as comparações mais robustas ao ruído e às variações de forma locais. Este procedimento de selecção modal também é útil para a compressão dos dados que definem um objecto, pois desta forma é possível descrever com poucos modos a sua derivação a partir de um protótipo.

Contudo, antes de ser possível comparar dois conjuntos de dados é em primeiro lugar necessário determinar as deformações modais $\{\tilde{U}\}$. Métodos para determinar os parâmetros da deformação modal são apresentados a seguir.

4.6.1 – Determinação das deformações

Pretende-se descrever os parâmetros da deformação modal $\{\tilde{U}\}$ que transformam um objecto t num outro objecto $t+1$. Desde que as matrizes modais $[\Phi]_t$ e $[\Phi]_{t+1}$ estejam construídas e as correspondências estejam determinadas, pode-se obter os deslocamentos modais de forma directa. Tal é conseguido notando que os deslocamentos nodais $\{U\}$ que alinham os dados

correspondentes de ambos os objectos, podem ser escritos como:

$$\{U\}_i = \{X\}_{t,i} - \{X\}_{t+1,i}, \quad (4.33)$$

onde $\{U\}_i$ se refere aos deslocamentos nodais do nodo i , $\{X\}_{t,i}$ representa o nodo i no primeiro objecto t e $\{X\}_{t+1,i}$ o nodo j com o qual foi emparelhado no segundo objecto $t+1$.

Relembrando que $\{U\} = [\Phi]\{\tilde{U}\}$, e utilizando as equações (4.30) e (4.31), obtém-se:

$$\{\tilde{U}\} = [\Phi]^{-1}\{U\} = [\Phi]^T [M]\{U\}. \quad (4.34)$$

Normalmente não existe uma correspondência de um para um entre os dados dos dois objectos. Na maior parte dos casos é desejável que os dados não emparelhados se movam de maneira consistente com as propriedades do material utilizado na modelização e com as forças nos nodos emparelhados. Este tipo de solução pode ser obtido de diversas maneiras.

Numa primeira abordagem, pode-se considerar os deslocamentos nodais nos nodos emparelhados e, no vector das forças $\{R\}$ anular as componentes referentes aos nodos não emparelhados. O sistema de equilíbrio resultante é $[K]\{U\} = \{R\}$ onde existem tantas incógnitas como equações. Os deslocamentos modais são depois determinados utilizando-se a equação (4.34). Esta abordagem é de aplicação fácil; no entanto, considera que as forças nos nodos não emparelhados são nulas o que em certos casos pode não ser adequado pois todos os nodos sofrem as acções exercidas pelas forças de deformação existentes entre os modelos a emparelhar.

Um procedimento similar ao anterior consiste em resolver uma versão do sistema físico truncada no número de modos a considerar. Assumindo que foi obtida correspondência para p dos x modos¹⁰ de um objecto t , pode-se reduzir o número de graus de liberdade desprezando-se $(x - p)$ modos de mais alta frequência na equação (4.34) e depois determinar os modos por inversão de uma matriz.

Este método pode ser descrito do seguinte modo: assumindo que é conhecida a correspondência para alguns dos modos, reordenam-se as colunas da matriz $[\Phi]^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]_{conhecida}^{-1} & [\Phi]_{não\ conhecido}^{-1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_{conhecido} \\ \{U\}_{não\ conhecido} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{U}\}_{não\ conhecido} \\ \{0\} \end{array} \right\},$$

onde $\{U\}_{conhecido}$ é o vector dos deslocamentos conhecidos para os p modos emparelhados, $\{U\}_{não\ conhecido}$ é o vector dos deslocamentos nodais não conhecidos e $\{\tilde{U}\}_{não\ conhecido}$ é o vector

¹⁰ O número de modos emparelhado é igual em 2D ao dobro, e em 3D ao triplo, do número de emparelhamentos.

das amplitudes modais a determinar. Nesta formulação é assumido que as amplitudes dos modos desprezados são nulas. Os termos na equação anterior podem ser reagrupados obtendo-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]_{conhecida}^{-1} & \begin{Bmatrix} [0] \\ [I] \end{Bmatrix} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{U\}_{conhecido} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} [I] & [\Phi]_{não\ conhecida}^{-1} \\ [0] & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{\tilde{U}\}_{não\ conhecido} \\ \{U\}_{não\ conhecido} \end{Bmatrix}.$$

As amplitudes dos modos pretendidas podem ser obtidas directamente por inversão da matriz do lado direito desta equação. Note-se que, com este procedimento obteve-se novamente uma solução para determinar as amplitudes não conhecidas, mas foi assumido que os deslocamentos modais são nulos para os modos $i > p$. Esta simplificação pode não ser a mais adequada pois, por exemplo, zonas relativamente extensas cujos pontos não foram emparelhados por análise modal não se deformam com esta solução, o que pode ser inconsistente com a deformação existente.

Adicionando uma restrição de minimização da energia de deformação podem-se evitar os inconvenientes das duas soluções anteriores [Sclaroff, 1995, 1995a]. A energia de deformação pode ser obtida directamente a partir dos deslocamentos modais:

$$E_s = \frac{1}{2} \{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}. \quad (4.35)$$

Analisando esta equação é possível concluir que, apesar de normalmente os modos mais elevados corresponderem a deslocamentos de baixa amplitude (semelhantes a ruído), as suas contribuições no valor total da energia de deformação podem ser importantes pois é tomado o quadrado das correspondentes frequências (elevadas). Esta observação sugere que, no cálculo da energia de deformação para efeitos de comparação de objectos, pode ser vantajoso não considerar, ou considerar de forma menos acentuada, a participação dos modos mais elevados.

Formulando uma solução por mínimos quadráticos restringida, na qual se minimiza o erro de alinhamento que inclua o termo da energia de deformação, obtém-se:

$$Erro = \underbrace{\left[\{U\} - [\Phi] \{\tilde{U}\} \right]^T \left[\{U\} - [\Phi] \{\tilde{U}\} \right]}_{\text{erro de ajuste quadrático}} + \lambda \underbrace{\{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}}_{\text{energia de deformação}}, \quad (4.36)$$

onde λ é o parâmetro de Lamé [Bathe, 1996] para o material adoptado:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Diferenciando a equação (4.36) em relação ao vector dos deslocamentos modais $\{\tilde{U}\}$ resulta a equação de minimização da energia de deformação:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T \{U\}.$$

Desta forma, podem-se explorar as características do modelo físico utilizado de forma a incluir certas restrições geométricas numa solução pelo método dos mínimos quadrados. A medida da energia de deformação permite a incorporação de algum conhecimento prévio acerca do esticamento admissível para o objecto, da sua resistência à compressão, etc. Utilizando este conhecimento adicional, podem-se prever razoavelmente os deslocamentos que os nodos não emparelhados deverão assumir.

Como o algoritmo para a determinação dos emparelhamentos calcula o grau de certeza para os emparelhamentos obtidos, pode-se também utilizar esta informação directamente na fase de alinhamento, o que é obtido por inclusão de uma matriz diagonal $[W]$:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [W]^2 [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T [W]^2 \{U\}.$$

Os elementos da matriz $[W]$ variam inversamente com a medida de afinidade para o emparelhamento do respectivo nodo¹¹. O vector dos deslocamentos nodais $\{U\}$ é determinado através dos emparelhamentos obtidos (equação (4.33)), considerando-se nulas, para os nodos não emparelhados, as respectivas entradas na matriz $[W]$.

Este procedimento de minimização da energia de deformação é semelhante ao utilizado no domínio dos contornos activos: o modelo físico é utilizado como restrição de suavização [Blake, 1998; Cohen, 1991; Kass, 1988].

4.6.2 – Solução dinâmica: *Morphing*

No ponto anterior foram descritos métodos para determinar os deslocamentos modais que deformam directamente e alinham dois conjuntos de dados. Embora não tenha sido implementado durante este trabalho, também é possível resolver o problema de alinhamento de dois modelos por simulação física, integrando no tempo as equações do modelo de elementos finitos até se atingir um equilíbrio. Neste caso, determinam-se as deformações em cada instante de tempo através da equação dinâmica de equilíbrio dada pela equação (4.32). De seguida, calculam-se as deformações intermédias de uma maneira consistente com as propriedades do material utilizado na formulação do modelo. As deformações intermédias também podem ser utilizadas para *morphing* segundo princípios físicos.

Quando se resolve a equação dinâmica utilizam-se dados de um modelo 2 para exercer forças que os transformem nos dados do outro modelo 1. As cargas dinâmicas $\{R(t)\}$ nos nodos dos modelos de elementos finitos são assim proporcionais às distâncias entre nodos

¹¹ Por exemplo, $W_{ij} = \psi / (\psi + Z_{ij})$ sendo Z_{ij} a afinidade do emparelhamento entre os pontos i e j respectivamente dos objectos t e $t+1$. Nas implementações realizadas durante este trabalho utilizou-se ψ igual a 1.

emparelhados:

$$\{R(t + \Delta t)\}_i = \{R(t)\}_i + k \left\{ \{X\}_{1,i} + \{U(t)\}_i - \{X\}_{2,i} \right\}, \quad (4.37)$$

onde k é uma constante global de rigidez e $\{U(t)\}_i$ é o deslocamento nodal para o nodo i no instante de tempo anterior. Estas forças simulam forças elásticas a actuar sobre os nodos dos dois modelos e vão diminuindo até que estes estejam perfeitamente ajustados.

O equilíbrio dinâmico modal pode ser descrito por um sistema de $2m$ (2D) ou $3m$ (3D) equações independentes com a seguinte forma:

$$\{\ddot{U}(t)\}_i + \tilde{C}_i \{\dot{U}(t)\}_i + \omega_i^2 \{\tilde{U}(t)\}_i = \{\tilde{R}(t)\}_i,$$

onde $\{\tilde{R}(t)\}_i$ contém as componentes para o nodo i do vector de carga transformado:

$$\{\tilde{R}(t)\} = [\Phi]^T \{R(t)\}.$$

Estas equações independentes de equilíbrio podem ser resolvidas por um procedimento de integração numérica iterativa, por exemplo, pelo método de Newmark [Bathe, 1996]. O sistema é integrado no tempo até a diferença na carga ser inferior a um dado limiar δ :

$$\|\{R(t + \Delta t)\} - \{R(t)\}\|^2 < \delta^2.$$

A carga $\{R(t)\}_i$ a actuar no nodo i é actualizada em cada instante de tempo considerado através da equação (4.37).

4.6.3 – Consideração de rotações elevadas

Se a rotação necessária para alinhar os dois conjuntos de dados for potencialmente muito elevada então, antes de se determinarem as deformações modais, é conveniente realizar um alinhamento inicial. A orientação, o posicionamento e o escalamento podem ser determinados utilizando-se o algoritmo baseado em *quaternions* unitários apresentado na secção 3.2 do capítulo anterior.

Utilizando-se apenas as correspondências determinadas para alguns nodos emparelhados com elevada certeza, a transformação de corpo rígido pode ser determinada directamente. Os parâmetros adicionais resultantes para este alinhamento prévio são:

- vector de posição: $\{p\}_0$;
- *quaternion* unitário definindo a orientação: \dot{q} ;
- factor de escala: s ;

- centróides dos dois conjuntos: $\{c\}_t$ e $\{c\}_{t+1}$.

Como a estimação dos parâmetros da transformação rígida existente é realizada utilizando-se apenas as correspondências com certeza elevada, obtêm-se geralmente boas soluções.

Os objectos podem então ser alinhados através da determinação das deformações modais $\{\tilde{U}\}$, como foi previamente descrito. Como anteriormente, são calculadas as cargas virtuais que deformam os dados de um modelo nos dados do outro modelo com que foram devidamente emparelhados. Como foi introduzida mais uma rotação, uma translação e um escalamento, a equação (4.33) deve ser modificada de forma a traduzir a distância entre os dados no sistema de coordenadas correcto:

$$\{U\}_i = \left\{ \frac{1}{s} [R]^T \left\{ \{X\}_{2,i} - \{p\}_0 - \{c\}_t \right\} + \{c\}_t - \{X\}_{1,i} \right\},$$

onde $[R]$ é a matriz de rotação obtida a partir do *quaternion* unitário \hat{q} .

4.6.4 – Comparação de objectos

Conhecidas as amplitudes dos modos, pode-se calcular a energia de deformação utilizando a equação (4.35). Esta energia pode ser utilizada como medida de similaridade. Em certos casos também pode ser desejável comparar a energia de deformação num dado subconjunto de modos, considerados como importantes na medição da similaridade, ou então a energia associada a cada modo. A energia de deformação associada ao modo i com deslocamento modal \tilde{U}_i e frequência ω_i é simplesmente:

$$E_{S_i} = \frac{1}{2} \tilde{U}_i^2 \omega_i^2.$$

Por vezes pode ser útil avaliar a similaridade de objectos, sem determinar previamente a correspondência entre os seus dados, o que pode ser conseguido através da comparação das respectivas amplitudes modais. Determinam-se em primeiro lugar as descrições modais de cada objecto e, depois, utiliza-se uma qualquer métrica de distância para medir a distância entre os descritores modais, o que sugere um espaço coordenado alternativo para descrição da dissemelhança entre objectos: o espaço de similaridade modal. Neste espaço a similaridade de objectos é proporcional à distância Euclidiana entre os seus descritores modais.

A energia necessita de ser modificada, se se pretender usá-la como medida de distância, uma vez que não satisfaz uma das condições para uma métrica:

- Existência de mínimo: $\delta(A, B) \geq \delta(A, A) = 0$;

- Simetria: $\delta(A, B) = \delta(B, A)$;
- Desigualdade triangular: $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C)$.

Embora a existência de mínimo e a desigualdade triangular sejam satisfeitas, a energia de deformação não satisfaz a simetria. A energia de deformação não é simétrica para objectos com tamanhos diferentes; por exemplo, se a escala de dois objectos A e B diferir, então a energia necessária para alinhar A com B pode ser diferente da necessária para alinhar B com A . A diferença na deformação será inversamente proporcional ao produto das escalas nos diferentes eixos. Deste modo, quando se comparam objectos com diferentes escalas deve-se dividir a energia de deformação pela área/volume do objecto em questão. Quando um mapa de suporte for conhecido, esta área/volume pode ser determinada directamente. No caso de suporte infinito, a área/volume dos dados pode ser aproximada pelo cálculo do menor círculo/esfera que os engloba.

Existe uma propriedade adicional que prova a utilidade da definição de uma métrica, a adição segmentada:

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C),$$

se B estiver na fronteira entre A e C .

Para satisfazer a adição segmentada pode-se considerar a raiz quadrada da energia de deformação:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2a} \sum_i \tilde{U}_i^2 \omega_i^2},$$

onde a é a área/volume do objecto. Tal resulta numa distância métrica ponderada semelhante à distância de Mahalanobis [Tavares, 1995a]: as amplitudes modais são desagregadas, cada qual tendo uma “variância” inversamente proporcional ao valor próprio do modo. Como resultado, esta formulação pode ser utilizada como parte de um esquema de regularização evolutiva no qual a matriz de covariância inicial $[\Omega]$ é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias dos parâmetros modais observados, por exemplo utilizando filtragem de Kalman [Maybeck, 1979; Tavares, 1995a] ou análise das componentes principais [Cootes, 1992, 1994a, 1995; Martin, 1998; Nastar, 1996].

Utilizando-se a análise das componentes principais pode-se descrever uma classe dos modos próprios de um objecto a partir de um conjunto de treino. Utilizando um modelo modal como uma estimativa inicial, pode-se de seguida aprender iterativamente os “verdadeiros” modos por via de uma análise recursiva das componentes principais. Como resultado, obter-se-á um esquema regularizado de aprendizagem, no qual a matriz inicial de covariância é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias para os parâmetros modais observados.

4.7 – Sumário

Neste capítulo foi apresentado um método para determinação de correspondências entre dois objectos 2D ou 3D, rígidos ou não, baseado em modelização física e na análise modal de vibração em modo livre dos objectos modelizados. Na modelização é utilizado o método dos elementos finitos, considerando-se que os objectos a emparelhar são construídos por um determinado material virtual responsável pelo seu comportamento elástico.

Após a modelização de cada um dos dois objectos a emparelhar, os seus modos de vibração em modo livre são determinados. Com os dois conjuntos de vectores de forma, que constituem os respectivos espaços modais, são analisados os deslocamentos nestes espaços de cada dado pontual que constitui os objectos. Pontos que apresentem deslocamentos similares são classificados como pontos correspondentes.

Para se estimar os deslocamentos dos pontos não emparelhados, utiliza-se a minimização da energia de deformação necessária para alinhar o primeiro objecto com o segundo. Esta energia de deformação constitui uma medida da deformação necessária para se alinhar dois objectos e permite a sua comparação.

A vantagem deste método, relativamente aos métodos apresentados no capítulo anterior, está relacionada com a consideração de um material virtual na construção dos objectos a emparelhar, conseguindo-se deste modo uma modelização física para os mesmos e fazendo com que as correspondências sejam determinadas, não por um processo “estatístico” sem grande ligação ao comportamento físico esperado para os objectos mas, pelo contrário, de acordo com as características elásticas do material adoptado.

Capítulo V

MODELOS PONTUAIS E ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Neste capítulo são apresentados os modelos de objectos a serem utilizados no método de determinação de correspondências, baseado em modelização física e análise modal, tratado no capítulo anterior.

São apresentados os dois tipos de modelização física adoptados: o baseado num único elemento finito isoparamétrico, e o que agrupa elementos finitos axiais. São também descritos os métodos usados para selecção dos nodos que constituem o modelo de representação de cada objecto.

O capítulo apresenta ainda alguns resultados experimentais ilustrativos, para análise de vibração em modo livre, para determinação de correspondências e estimação de deslocamentos nodais e para cálculo da energia de deformação como medida de semelhança.

5.1 – Introdução

Tendo sido tratada a metodologia proposta para a determinação de correspondências entre objectos 2D e 3D, abordam-se neste capítulo os tipos de elementos finitos considerados na construção dos modelos físicos e os processos usados na determinação do conjunto de pontos que constituem a rede de nós a partir das imagens.

A secção seguinte apresenta a construção das matrizes de massa e de rigidez, para modelos 2D e 3D, relativas a dois tipos de elementos finitos: o modelo finito isoparamétrico¹ de Sclaroff e o agrupamento de modelos finitos axiais lineares.

A terceira secção trata da extracção, a partir das imagens, do conjunto de pontos definidores de objectos 2D e 3D, em especial contornos 2D e superfícies 3D; no caso das superfícies 3D também se considera a sua modelização por meio de um conjunto de contornos 2D isonível.

Na quarta secção apresentam-se e discutem-se alguns resultados experimentais, nos quais os modelos precedentes são usados para se efectuar a análise modal em regime livre de vibração, para determinar a correspondência entre objectos e estimar os deslocamentos nodais, e para determinar a energia de deformação.

A última secção apresenta um sumário do capítulo em que se destacam algumas das principais conclusões.

5.2 – Elementos finitos utilizados

Os elementos finitos usados e a definição das respectivas matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ são apresentados, de forma separada para os objectos 2D e 3D, nas subsecções 5.2.1 e 5.2.2.

5.2.1 – Para objectos 2D

Apresentam-se de seguida os dois tipos de elementos finitos que foram utilizados na modelização de objectos bidimensionais. Em primeiro lugar é apresentado o elemento isoparamétrico de Sclaroff e, seguidamente, o elemento finito axial linear. Com um único elemento finito de Sclaroff é possível modelizar-se um objecto definido pelos seus pontos sem a necessidade de existência de ordem entre eles; no caso de um conjunto de elementos finitos do tipo axial, devidamente agrupados, torna-se necessária a existência de ordem entre os nodos que definem o objecto.

¹ Fundamentalmente [Bathe, 1996] os elementos isoparamétricos caracterizam-se por utilizarem a mesma função de aproximação, ou de forma, para descrever a geometria do elemento e o campo dos deslocamentos.

5.2.1.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff

Na técnica de modelização de Sclaroff utilizam-se os próprios dados pontuais do objecto em questão para a construção das matrizes de rigidez e de massa, considerando esses pontos como os nodos do elemento finito a ser considerado. Em primeiro lugar desenvolve-se uma formulação para o elemento finito utilizando funções Gaussianas como interpoladores de Galerkin² e, seguidamente, utilizam-se estes interpoladores para se obter as matrizes generalizadas de massa e de rigidez.

Intuitivamente, as funções de interpolação suavizam os dados pontuais, e as áreas delimitadas por estes são preenchidas com um material virtual que tem propriedades físicas de massa e de rigidez. Esta suavização e preenchimento da nuvem de pontos fazem com que exista uma boa imunidade ao ruído e à falta de alguns pontos, assim como torna desnecessária a informação acerca da conectividade entre pontos. As funções de interpolação também permitem atribuir maior peso a pontos importantes e diminuir o peso associado a pontos com menor importância. Este aumento ou diminuição do peso é conseguido por variação das propriedades do material virtual entre os dados pontuais.

5.2.1.1.1 – Interpoladores Gaussianos

Dado um conjunto de m pontos amostrados de um objecto (X_i) é necessário construir as matrizes de massa e de rigidez apropriadas. O primeiro passo é optar por um conjunto de funções de interpolação a partir das quais seja possível derivar (ver capítulo anterior) as matrizes das funções de forma³ $[N]$ e de deformação $[B]$.

Em soluções típicas do método dos elementos finitos aplicados em engenharia são utilizadas funções de interpolação polinomiais de Lagrange ou de Hermite [Bathe, 1996; Segerlind, 1984]; as matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ são determinadas para cada tipo de elemento finito utilizado na modelização e são agrupadas de forma a obter-se as correspondentes matrizes para o sistema global (ver capítulo anterior).

O problema presente é diferente, pois o pretendido é examinar os modos próprios de uma nuvem de dados pontuais. Este problema é idêntico ao verificado na interpolação de redes: tem-se um certo número de medidas dispersas e pretende-se encontrar um conjunto de

² A determinação dos coeficientes, habitualmente designados por parâmetros nodais, das funções de interpolação utilizadas na formulação de um elemento finito, pode fazer-se de diversas formas correspondendo cada uma à imposição de um conjunto de condições fronteira a serem verificadas. Um destes métodos é o método de Galerkin [Bathe, 1996; Segerlind, 1984], que é a base do método dos elementos finitos em problemas nos quais estão envolvidos termos da primeira derivada. Este método impõe erro médio pesado nulo em todo o domínio e usa no método dos Resíduos Pesados as próprias funções de interpolação como funções de ponderação.

³ Isto é, optar por um conjunto de funções de interpolação contínuas h_i de tal forma que:

1. os seus valores são unitários para o nodo i a que estão associadas e nulos nos restantes;
2. $\sum_{i=1}^m h_i = 1.0$ em qualquer ponto do objecto.

funções de base que permitam a inserção e movimentação de dados pontuais. Funções de base Gaussianas são candidatas ideais para este tipo de problema de interpolação, tendo a forma:

$$g_i(X) = e^{-\|X-X_i\|^2/(2\sigma^2)}, \quad (5.1)$$

onde X_i é o centro de dimensão n da função Gaussiana e σ é o desvio padrão, que controla a interação entre os dados.

Nesta modelização desenvolvem-se as funções de interpolação h_i como a soma de m funções de base, uma por cada dado pontual X_i :

$$h_i(X) = \sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X), \quad (5.2)$$

onde a_{ik} são os coeficientes que satisfazem os requisitos para as funções de forma. A matriz dos coeficientes de interpolação $[A]$ pode ser determinada por inversão da matriz $[G]$ definida como:

$$[G] = \begin{bmatrix} g_1(X_1) & \cdots & g_1(X_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m(X_1) & \cdots & g_m(X_m) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Utilizando os interpoladores Gaussianos como funções de forma para a aproximação de Galerkin, é possível formular facilmente elementos finitos de qualquer dimensão, os quais podem ser obtidos por agrupamento de Gaussianos de menor dimensão. Um aspecto bastante útil dos interpoladores Gaussianos é que eles são factorizáveis: interpoladores multidimensionais podem ser formados a partir de Gaussianos de menor dimensão. Este facto não só reduz o custo computacional, como pode ser também útil para implementações de *hardware VLSI* ou de redes neuronais.

Deve-se notar que o somatório dos interpoladores Gaussianos não é conforme [Bathe, 1996], pois não satisfaz a condição de, em qualquer ponto de elemento, o somatório das funções de forma ser igual a 1 (um). Como consequência, a interpolação entre nodos da deformação e da tensão não é conservativa em termos de energia. Normalmente este facto não apresenta inconvenientes em aplicações da visão por computador; de facto, a grande maioria das formulações de elementos finitos utilizadas em visão são também não conformes [Sclaroff, 1995, 1995a]; contudo, se for pretendido um elemento conforme, ele pode ser obtido através da inclusão de um factor de normalização em h_i :

$$h_i(X) = \frac{\sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X)}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk} g_k(X)}. \quad (5.4)$$

De seguida serão utilizados interpoladores não conformes, principalmente porque deste modo os integrais para as matrizes de massa e de rigidez podem ser determinados analiticamente.

5.2.1.1.2 – Formulação do elemento de Sclaroff

Começa-se por construir para o elemento finito uma matriz de interpolação $[N]$ de dimensão $(2 \times 2m)$, em que m é o número de pontos utilizados; as funções de forma h_i são como definidas na equação (5.2):

$$[N] = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_1 & \cdots & h_m \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Substituindo esta matriz na equação para a matriz de massa $[M]$ dada no capítulo anterior:

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV, \quad (5.6)$$

onde ρ é a densidade do material adoptado e V o volume do elemento, e executando as multiplicações envolvidas obtém-se a matriz de massa para o elemento de área A [Sclaroff, 1995, 1995a]:

$$[M] = \int_A \rho [N]^T [N] dA = \begin{bmatrix} [M]_{aa} & [0] \\ [0] & [M]_{aa} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

onde a submatriz $[M]_{aa}$ é simétrica, de dimensão $(m \times m)$, definida positivamente e os seus elementos têm a forma:

$$M_{aa_{ij}} = \rho \int_A \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g_k(X) g_l(X) dA.$$

Trocando a ordem de integração e soma, obtém-se:

$$M_{aa_{ij}} = \rho \sum_{k,l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{ik} a_{jl} g_k(X) g_l(X) dx dy.$$

Efectuando a integração e reagrupando os termos resulta:

$$M_{aa_{ij}} = \rho \pi \sigma^2 \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \sqrt{g_{kl}},$$

onde g_{kl} é o elemento (k, l) da matriz $[G]$ e a_{xy} o elemento (x, y) da matriz de coeficientes $[A]$.

Optando-se por notação matricial, a submatriz $[M]_{aa}$ fica definida como:

$$[M]_{aa} = \rho\pi\sigma^2 [A]^T \sqrt{[G]} [A] = \rho\pi\sigma^2 [G]^{-1} \sqrt{[G]} [G]^{-1},$$

onde $\sqrt{[G]}$ representa a matriz $[G]$ da equação (5.3), após extração da raiz quadrada aos seus elementos.

Utilizando a equação para a matriz de rigidez $[K]$ dada no capítulo anterior:

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV, \quad (5.8)$$

onde $[B]$ é a matriz de deformação e $[D]$ a matriz de elasticidade, obtém-se a matriz de rigidez, para um elemento bidimensional, em estado plano de deformação e construído por material elástico isotrópico para o qual as constantes α , β e ξ , são funções do módulo de elasticidade de Young E e do coeficiente de Poisson ν :

$$\alpha = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (5.9)$$

$$\beta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (5.10)$$

$$\xi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (5.11)$$

A matriz de rigidez $[K]$ com dimensão $(2m \times 2m)$ resulta na forma [Sclaroff, 1995, 1995a]:

$$[K] = \int_A [B]^T [D][B] dA = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix},$$

onde cada submatriz de dimensão $(m \times m)$ é simétrica, definida positivamente e $[K]_{ab} = [K]_{ba}$. Os elementos da submatriz $[K]_{aa}$ têm a forma:

$$K_{aa_{ij}} = \beta \int_A \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} \right] dA.$$

Trocando a ordem de integração e soma, resulta:

$$K_{aa_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} \right] dx dy. \quad (5.12)$$

Integrando esta equação e reagrupando os termos obtém-se:

$$K_{aa_{ij}} = \pi\beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{(\hat{x}_{kl}^2 + \xi \hat{y}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}},$$

onde $\hat{x}_{kl} = (x_k - x_l)$ e $\hat{y}_{kl} = (y_k - y_l)$. Do mesmo modo, os elementos de $[K]_{bb}$ têm a forma:

$$K_{bb_{ij}} = \pi\beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{(\hat{y}_{kl}^2 + \xi \hat{x}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}.$$

Finalmente, os elementos de $[K_{ab}]$ e $[K_{ba}]$ têm a forma:

$$K_{ab_{ij}} = \beta \int_A \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dA,$$

$$K_{ab_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dx dy.$$

Após integração resulta:

$$K_{ab_{ij}} = K_{ba_{ij}} = -\frac{\pi\beta(\alpha + \xi)}{4\sigma^2} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{y}_{kl} \sqrt{g_{kl}}.$$

Na formulação deste elemento finito foi considerado que o mesmo tem suporte infinito; Sclaroff também desenvolveu um elemento finito isoparamétrico, em tudo idêntico a este, considerando suporte finito [Sclaroff, 1995]. Para a formulação deste elemento, que durante este trabalho não foi utilizado, é empregue uma função de suporte de maneira a “cortar” o elemento finito isoparamétrico segundo uma forma qualquer. Tal é conseguido pela definição de uma função de suporte $s(X)$ que assume o valor nulo fora da região de interesse R e o valor unitário no seu interior. Esta função pode ser utilizada para definir a forma e a espessura do modelo elástico adoptado.

5.2.1.1.3 – Exemplos

Para se verificar o cálculo e o significado das matrizes do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff considere-se, a título de demonstração, os três pontos representados na *Figura 5.1* e cujas coordenadas são:

$$\{X\} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3\}^T = \{150 \quad 182 \quad 134 \quad 53 \quad 115 \quad 71\}^T.$$

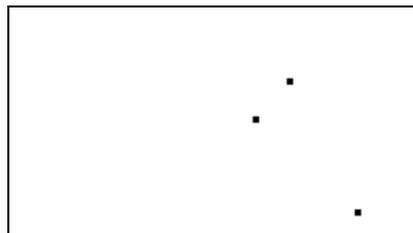


Figura 5.1 – Pontos utilizados para a construção de um elemento finito de Sclaroff.

Considerando-se, por exemplo, um valor para o parâmetro σ igual a 25% da distância média entre todos os pontos e borracha para o material virtual obtiveram-se as seguintes matrizes⁴:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.192 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.192 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 578.269 & 0.331 & 46.984 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.331 & 617.495 & 1.400 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 46.984 & 1.400 & 578.269 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 578.269 & 0.331 & 46.984 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.331 & 617.495 & 1.400 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 46.984 & 1.400 & 578.269 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.017 & 0.000 & -0.005 & -0.002 & -0.000 & 0.005 \\ 0.000 & 0.016 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 \\ -0.005 & -0.000 & 0.017 & 0.005 & -0.000 & -0.002 \\ -0.002 & -0.000 & 0.005 & 0.017 & -0.000 & -0.006 \\ -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.016 & -0.000 \\ 0.005 & -0.000 & -0.002 & -0.006 & -0.000 & 0.017 \end{bmatrix}.$$

Optando-se agora por aço para o material virtual obtiveram-se as seguintes matrizes de massa e de rigidez:

$$[M] = \begin{bmatrix} 4022.068 & 2.301 & 326.790 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 2.301 & 4294.895 & 9.739 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 326.790 & 9.739 & 4022.068 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 4022.068 & 2.301 & 326.790 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 2.301 & 4294.895 & 9.739 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 326.790 & 9.739 & 4022.068 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 578.215 & -0.721 & -162.738 & -41.919 & -0.810 & 113.4206 \\ -0.720 & 537.082 & -6.667 & -0.810 & 0.000 & -3.896 \\ -162.738 & -6.667 & 578.215 & 113.420 & -3.896 & -41.919 \\ -41.919 & -0.810 & 113.420 & 588.112 & -3.156 & -189.518 \\ -0.810 & 0.000 & -3.896 & -3.156 & 537.082 & -5.495 \\ 113.420 & -3.896 & -41.919 & -189.518 & -5.495 & 588.112 \end{bmatrix}.$$

Comparando estas matrizes com as obtidas na experiência anterior verifica-se, como seria de esperar, que os seus elementos aumentaram em valor. Deste modo, estas matrizes traduzem o aumento da densidade e da rigidez correspondente à passagem de borracha para aço como material virtual adoptado.

⁴ Os valores dos elementos destas matrizes foram arredondados para a terceira casa decimal.

Considerando-se novamente borracha para o material virtual mas desta vez um valor para o parâmetro σ igual à distância média entre todos os pontos (ou seja, 4 vezes superior) obtiveram-se as seguintes matrizes:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.420 & 0.902 \\ 0.420 & 1.000 & 0.470 \\ 0.902 & 0.470 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 28512.655 & 824.925 & -23519.137 & 0.000 & 0.00 & 0.000 \\ 824.925 & 9390.075 & -2411.798 & 0.000 & 0.00 & 0.000 \\ -23519.137 & -2411.798 & 28604.415 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 28512.655 & 824.925 & -23519.137 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 824.925 & 9390.075 & -2411.798 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -23519.137 & -2411.798 & 28604.415 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.082 & 0.015 & -0.081 & -0.033 & -0.002 & 0.034 \\ 0.015 & 0.022 & -0.025 & -0.002 & +0.005 & -0.005 \\ -0.081 & -0.025 & 0.101 & 0.034 & -0.005 & -0.029 \\ -0.033 & -0.002 & 0.034 & 0.089 & -0.017 & -0.073 \\ -0.002 & 0.005 & -0.005 & -0.017 & 0.021 & 0.005 \\ 0.034 & -0.005 & -0.029 & -0.073 & 0.005 & 0.079 \end{bmatrix}.$$

Comparando estas matrizes com às obtidas no primeiro exemplo (com σ inferior) é possível concluir que se verificou um aumento da influência que cada nodo sofre por parte dos restantes nodos o que origina um elemento finito mais rígido.

5.2.1.1.4 – Elemento para contornos

Na construção do elemento finito de Sclaroff utilizam-se funções de base Gaussianas (equação (5.1)) para construir as funções de forma a utilizar na formulação das matrizes de massa e de rigidez. Nestas funções é considerada a distância Euclidiana entre cada nodo que constitui o elemento finito; seguindo-se um procedimento idêntico ao referido no método de determinação de correspondências baseado na análise modal da forma (apresentado no terceiro capítulo), optou-se por adequar esta técnica para a modelização de objectos do tipo contorno considerando-se as distâncias entre os nodos determinadas ao longo do contorno. Assim a equação para objectos do tipo contorno equivalente à equação (5.1) é modificada para:

$$g_i(X_j) = e^{-dist_{ij}^2 / (2\sigma^2)},$$

onde $dist_{ij}$ é a distância ao longo do contorno entre os nodos i e j .

Para se verificar o efeito da alteração introduzida na formulação original do elemento finito de Sclaroff, considere-se o contorno constituído pelos quatro pontos representados e

identificados na *Figura 5.2* e cujas coordenadas são:

$$\{X\} = \{100 \ 112 \ 134 \ 130 \ 45 \ 41 \ 43 \ 109\}^T.$$

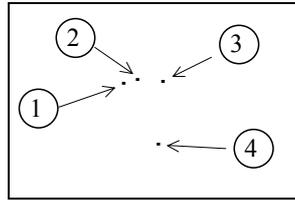


Figura 5.2 – Pontos utilizados para a construção de um elemento finito de Sclaroff para um contorno.

Considerando-se, por exemplo, um valor para o parâmetro σ igual a 50% da distância média entre todos os pontos, borracha para o material virtual e a formulação original obtiveram-se as seguintes matrizes:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.860 & 0.334 & 0.009 \\ 0.860 & 1.000 & 0.630 & 0.009 \\ 0.334 & 0.630 & 1.000 & 0.016 \\ 0.009 & 0.009 & 0.016 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 4687.610 & -3723.977 & 1438.961 & 261.689 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -3723.977 & 4614.731 & -1868.232 & -240.385 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1438.961 & -1868.232 & 2460.228 & 237.714 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 261.689 & -240.385 & 237.714 & 1852.143 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 4687.610 & -3723.977 & 1438.961 & 261.689 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -3723.977 & 4614.731 & -1868.232 & -240.385 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1438.961 & -1868.232 & 2460.228 & 237.714 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 261.689 & -240.385 & 237.714 & 1852.143 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.084 & -0.092 & 0.017 & -0.002 & -0.015 & 0.014 & 0.001 & -0.003 \\ -0.092 & 0.136 & -0.046 & 0.002 & 0.014 & -0.012 & -0.003 & 0.000 \\ 0.017 & -0.046 & 0.037 & 0.000 & 0.001 & -0.003 & 0.004 & 0.001 \\ -0.002 & 0.002 & 0.000 & 0.016 & -0.003 & 0.000 & 0.001 & 0.000 \\ -0.015 & 0.014 & 0.001 & -0.003 & 0.057 & -0.053 & 0.019 & -0.005 \\ 0.014 & -0.012 & -0.003 & 0.000 & -0.053 & 0.067 & -0.026 & 0.004 \\ 0.001 & -0.003 & 0.004 & 0.001 & 0.019 & -0.026 & 0.025 & -0.007 \\ -0.003 & 0.000 & 0.001 & 0.000 & -0.005 & 0.004 & -0.007 & 0.016 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a alteração sugerida para a modelização de objectos do tipo contorno obtiveram-se as seguintes matrizes:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.860 & 0.319 & 0.009 \\ 0.860 & 1.000 & 0.630 & 0.001 \\ 0.319 & 0.630 & 1.000 & 0.016 \\ 0.009 & 0.001 & 0.016 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 4565.669 & -3487.052 & 1408.415 & 844.367 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -3487.052 & 4197.662 & -1752.839 & -1036.613 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1408.415 & -1752.839 & 2435.106 & 555.524 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 844.367 & -1036.613 & 555.524 & 1829.475 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 4565.669 & -3487.052 & 1408.415 & 844.367 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -3487.052 & 4197.662 & -1752.839 & -1036.613 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1408.415 & -1752.839 & 2435.106 & 555.524 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 844.367 & -1036.613 & 555.524 & 1829.475 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.092 & -0.105 & 0.025 & -0.002 & -0.015 & 0.014 & 0.001 & -0.008 \\ -0.105 & 0.154 & -0.055 & 0.002 & 0.014 & -0.012 & -0.004 & 0.008 \\ 0.025 & -0.055 & 0.041 & 0.000 & 0.001 & -0.004 & 0.004 & -0.002 \\ -0.002 & 0.002 & 0.000 & 0.016 & -0.008 & 0.008 & -0.002 & 0.000 \\ -0.015 & 0.014 & 0.001 & -0.008 & 0.062 & -0.060 & 0.023 & -0.024 \\ 0.014 & -0.012 & -0.004 & 0.008 & -0.060 & 0.075 & -0.031 & 0.030 \\ 0.001 & -0.004 & 0.004 & 0.002 & 0.023 & -0.031 & 0.028 & -0.017 \\ -0.008 & 0.008 & -0.002 & 0.000 & -0.024 & 0.030 & -0.017 & 0.017 \end{bmatrix}.$$

Comparando as matrizes obtidas, utilizando-se a formulação original e a modificada, verifica-se, de forma mais acentuada, que com a formulação sugerida para contornos se diminui a influência do nodo 4 sobre o nodo 2.

Torna-se assim evidente que com a modificação sugerida se consegue ponderar de forma mais adequada a este tipo de objectos a influência exercida por cada nodo sobre os restantes. Esta ponderação assume maior importância nos casos em que se pretende diminuir a influência exercida sobre os pontos que constituem zonas particulares de um contorno pelos pontos cuja distância Euclidiana é reduzida, apesar de estarem muito afastadas ao longo do contorno.

5.2.1.2 – Elementos axiais lineares

Durante este trabalho desenvolveu-se uma metodologia original para modelizar objectos segundo princípios físicos, que consiste na utilização de um conjunto de elementos finitos do tipo axial, devidamente agrupados. De seguida descreve-se a formulação para este tipo de elementos finitos *standard*.

Utilizando-se a abordagem variacional [Meirovitch, 1986], as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais equivalentes podem ser obtidos através das expressões em coordenadas nodais, para a energia potencial, para a energia cinética e para o trabalho virtual, respectivamente.

O deslocamento axial $u(x,t)$ do sistema de segunda ordem da *Figura 5.3* pode ser escrito com a forma:

$$u(x,t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) = \{N(x)\}^T \{u(t)\}, \quad (5.13)$$

onde $\{N(x)\}$ é o vector de dimensão 2 das funções de forma, com o índice a indicar qual o nodo com que cada função de forma está associada, e $\{u(t)\}$ é o correspondente vector de deslocamentos nodais. Deve-se notar que esta equação apenas é válida no interior do elemento em questão e não é aplicável fora deste.

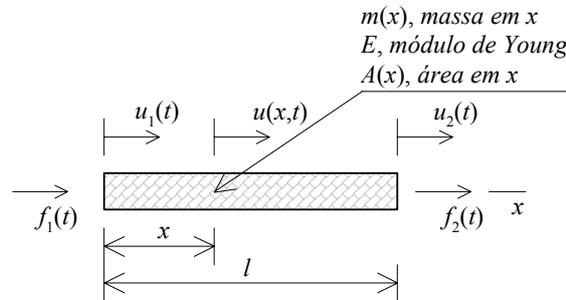


Figura 5.3 – Elemento axial.

A energia cinética $T(t)$ para um elemento finito e do tipo axial é simplesmente:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \{ \dot{u}(t) \}^T \{ N(x) \} \{ N(x) \}^T \{ \dot{u}(t) \} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{ \dot{u}(t) \}^T [M^{(e)}] \{ \dot{u}(t) \},$$

onde:

$$[M^{(e)}] = \int_0^l m(x) \{ N(x) \} \{ N(x) \}^T dx,$$

é a matriz simétrica de massa para o elemento e (de dimensão (2×2)) e $m(x)$ a massa em x .

Da mesma forma, a energia potencial $V(t)$ é:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \{ u(t) \}^T \{ N'(x) \} \{ N'(x) \}^T \{ u(t) \} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{ u(t) \}^T [K^{(e)}] \{ u(t) \},$$

onde:

$$[K^{(e)}] = \int_0^l EA(x) \{ N'(x) \} \{ N'(x) \}^T dx,$$

é a matriz simétrica de rigidez para o elemento e (de dimensão (2×2)), $A(x)$ a área da secção em x e $\{N'(x)\} = \frac{d}{dx}\{N(x)\}$.

Para derivar o vector das forças nodais, utiliza-se a expressão para o trabalho virtual [Bathe, 1996]. Assumindo que o elemento é sujeito à força axial distribuída não conservativa⁵ $f(x,t)$ e considerando a equação (5.13) pode-se obter:

$$\bar{W}(t) = \int_0^l f(x,t) \bar{u}(x,t) dx = \int_0^l f(x,t) \{N(x)\}^T \{\bar{u}(t)\} dx = \{f(t)\}^T \{\bar{u}(t)\},$$

onde $\bar{W}(t)$ representa o trabalho virtual, $\bar{u}(x,t)$ o deslocamento virtual em x , $\{\bar{u}(t)\}$ o vector de deslocamentos nodais virtuais e:

$$\{f(t)\} = \int_0^l f(x,t) \{N(x)\} dx, \quad (5.14)$$

é o vector das forças nodais não conservativas.

Utilizando para o elemento finito do tipo axial de massa m as funções de forma polinomiais de grau 1: $N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$ e $N_2(x) = \frac{x}{l}$, representadas na *Figura 5.4*, obtém-se a matriz de massa:

$$[M^{(e)}] = m \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix}^T dx = m \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

isto é, para um elemento finito axial de secção constante, de área A , e de material com densidade ρ :

$$[M^{(e)}] = \frac{\rho A l^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

⁵ Esta consideração sobre a força não é limitativa, pois deve-se notar que forças concentradas podem ser transformadas em forças distribuídas por intermédio da função espacial delta de Dirac; por exemplo, a força $P(t)$ concentrada no ponto $x = l/3$ pode ser expressa na forma distribuída como $f(x,t) = P(t) \delta(x - l/3)$ onde $\delta(x - l/3)$ é a função espacial delta de Dirac.

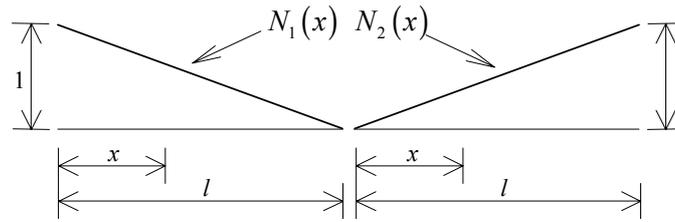


Figura 5.4 – Funções de forma polinomiais de grau um para um elemento finito do tipo axial de comprimento l .

Para se determinar a matriz de rigidez do elemento é necessário calcular $\{N'(x)\}$:

$$\{N'(x)\} = \frac{d}{dx} \{N(x)\} = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Deste modo, obtém-se a matriz de rigidez para o elemento de rigidez axial EA constante:

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para se determinar o vector das forças nodais para uma força distribuída do tipo, por exemplo, $f(x,t) = a + bx$ utiliza-se a equação (5.14) e obtém-se:

$$\{f(t)\} = \int_0^l (a + bx) \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} dx = \int_0^l \begin{Bmatrix} a + \left(b - \frac{a}{l}\right)x - \frac{b}{l}x^2 \\ \frac{a}{l}x + \frac{b}{l}x^2 \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}al + \frac{1}{6}bl^2 \\ \frac{1}{2}al + \frac{1}{3}bl^2 \end{Bmatrix}.$$

5.2.1.2.1 – Determinação das matrizes no sistema global

De acordo com o método dos elementos finitos, o sistema global é composto por elementos discretos que deverão ser agrupados. As componentes dos deslocamentos nos nodos em cada elemento são especificadas segundo as direcções que melhor se adaptam ao mesmo. No caso de um elemento axial com os seus nodos designados por i e j (Figura 5.5) é conveniente especificar as componentes para os deslocamentos em cada um dos nodos de maneira que uma componente ocorra segundo a direcção axial \hat{x} e a outra lhe seja ortogonal. As componentes dos deslocamentos nos nodos i e j ao longo destes eixos são designadas na Figura 5.5, respectivamente, por \hat{u}_1, \hat{u}_2 e \hat{u}_3, \hat{u}_4 .

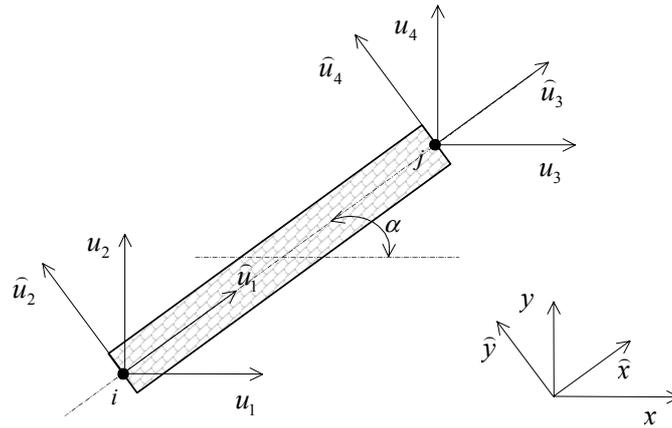


Figura 5.5 – Sistemas de referência para um elemento axial.

Como geralmente os elementos individuais são parte de um sistema mais complexo, e provavelmente têm orientações diferentes, torna-se óbvio que exprimir os deslocamentos num sistema de coordenadas particular a cada elemento – sendo um tal sistema designado por sistema de coordenadas locais – pode criar dificuldades no emparelhamento dos deslocamentos em cada nodo. Por esta razão, torna-se vantajoso trabalhar com as componentes dos deslocamentos num único sistema de coordenadas, enquanto se mantém a vantagem de identificar as componentes dos deslocamentos em cada elemento segundo as direcções que lhe são mais convenientes. Assim, pretende-se escolher um único sistema de referência global (x, y) e denotar as componentes dos deslocamentos ao longo destas direcções em i por u_1 e u_2 e em j por u_3 e u_4 . Então, uma simples transformação de coordenadas [Foley, 1991; Hall, 1993] permite exprimir as componentes dos deslocamentos de um elemento particular ao longo do sistema de referência global (x, y) a partir das componentes ao longo do seu sistema de coordenadas local (\hat{x}, \hat{y}) e vice-versa. Para se obter tal transformação de coordenadas, utiliza-se a matriz $[tg]$ dos co-senos directores:

$$[tg] = \begin{bmatrix} tg_{\hat{x}x} & tg_{\hat{x}y} \\ tg_{\hat{y}x} & tg_{\hat{y}y} \end{bmatrix},$$

onde $tg_{\hat{x}x}$ representa o co-seno do ângulo entre os eixos \hat{x} e x , etc. Esta matriz permite escrever a transformação de coordenadas do sistema global para o local:

$$\begin{Bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{Bmatrix} = [tg] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

e a transformação do sistema local para o global:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [tg]^T \begin{Bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{Bmatrix}.$$

A mesma transformação de coordenadas pode ser aplicada às componentes dos deslocamentos, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = [tg] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{Bmatrix} = [tg] \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [tg]^T \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [tg]^T \begin{Bmatrix} \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{Bmatrix}.$$

Estas equações podem ser combinadas de forma a que a transformação seja aplicada ao elemento como um todo, obtendo-se:

$$\{\hat{u}\} = [Tg]\{u\}, \tag{5.15}$$

e

$$\{u\} = [Tg]^T \{\hat{u}\},$$

onde $\{\hat{u}\}$ e $\{u\}$ são os vectores coluna dos deslocamentos nodais com componentes $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4$ e u_1, u_2, u_3, u_4 , respectivamente, e a matriz de transformação $[Tg]$ é definida como:

$$[Tg] = \begin{bmatrix} [tg] & [0] \\ [0] & [tg] \end{bmatrix}.$$

Obviamente, existem diferentes matrizes de transformação $[Tg]$ para diferentes elementos, a menos que alguns sejam do mesmo tipo e tenham a mesma orientação. Deve ser notado que a matriz $[Tg]$ é ortonormal e, assim, $[Tg]^{-1} = [Tg]^T$, pois $[tg]$ representa uma transformação entre dois sistemas de eixos ortogonais.

No caso da *Figura 5.5*, sistema plano com $z \equiv \bar{z}$, a matriz dos co-senos directores é:

$$[tg] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Para transformar as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais do sistema de referência local para o global, e vice-versa, utiliza-se novamente a matriz de transformação geométrica $[Tg]$. Para se obter tal transformação, deve-se notar que a energia cinética T e a energia potencial V podem ser reescritas na forma de um produto matricial triplo:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M^{(e)}] \{\dot{u}\} \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2} \{u\}^T [K^{(e)}] \{u\},$$

enquanto o trabalho virtual tem a expressão $\bar{W} = \{\bar{u}\}^T \{f\}$. Mas, se as componentes dos deslocamentos locais e globais estão relacionadas pela equação (5.15), então as componentes locais e globais das velocidades estão relacionadas por $\{\dot{\hat{u}}\} = [Tg]\{\dot{u}\}$ e os correspondentes deslocamentos virtuais por:

$$\{\bar{\hat{u}}\} = [Tg]\{\bar{u}\}. \tag{5.16}$$

Assim, utilizando estas relações, pode-se obter:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [Tg]^T [\widehat{M}^{(e)}] [Tg] \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M^{(e)}] \{\dot{u}\},$$

onde $[M^{(e)}] = [Tg]^T [\widehat{M}^{(e)}] [Tg]$ é a matriz de massa para o elemento referida ao sistema de coordenadas global (x, y) . Da mesma forma, pode-se escrever a energia potencial como:

$$V = \frac{1}{2} \{u\}^T [Tg]^T [\widehat{K}^{(e)}] [Tg] \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [K^{(e)}] \{u\},$$

onde $[K^{(e)}] = [Tg]^T [\widehat{K}^{(e)}] [Tg]$ é a matriz de rigidez para o elemento expressa no sistema de coordenadas global (x, y) . Note-se que as matrizes $[M^{(e)}]$ e $[K^{(e)}]$ são simétricas pois $[\widehat{M}^{(e)}]$ e $[\widehat{K}^{(e)}]$ também o são. Finalmente, inserindo a relação da equação (5.16) na expressão do trabalho virtual obtém-se:

$$\overline{W} = \{\bar{u}\}^T [Tg]^T \{\hat{f}\} = \{\bar{u}\}^T \{f\},$$

onde $\{f\} = [Tg]^T \{\hat{f}\}$ é o vector das forças nodais no sistema de coordenadas global (x, y) .

As matrizes de massa e de rigidez e o vector das forças nodais, expressos no sistema de referência global, podem ser utilizadas na escrita das equações do movimento do elemento individual relativamente ao mesmo sistema. Contudo, se o objectivo final for a escrita das equações do movimento do sistema global, é então necessário proceder (ver capítulo anterior) ao agrupamento das matrizes de massa e de rigidez e do vector de forças nodais de cada elemento que constitui tal sistema.

5.2.1.2.2 – Agrupamento

A essência do método dos elementos finitos é considerar o sistema global como a soma de elementos individuais. Para esta soma, ou agrupamento, dos elementos individuais representar adequadamente o sistema global deve existir compatibilidade geométrica nos nodos dos elementos; por exemplo, os deslocamentos nos nodos partilhados por vários elementos devem ser iguais para cada um destes. Do mesmo modo, as correspondentes forças nodais devem ser estaticamente equivalentes às forças aplicadas. Deve-se notar que os deslocamentos podem incluir rotações e as forças podem incluir binários.

Assumindo que o sistema global consiste em L elementos e que estes são identificados pelo índice e , com $e = 1, 2, \dots, L$, então, considerando um elemento e , o vector nodal de deslocamentos é designado por $\{u^{(e)}\}$, o das forças por $\{f^{(e)}\}$, a matriz de massa por $[M^{(e)}]$ e a de rigidez por $[K^{(e)}]$ (onde todas as quantidades se referem a este elemento e estão

expressas no sistema de coordenadas global). De seguida, assumindo que o sistema tem um total de N graus de liberdade (N deslocamentos u_j , com $j = 1, 2, \dots, N$), designa-se o vector dos N deslocamentos nodais no sistema global por $\{U\}$. Para ser executado o processo de agrupamento, define-se para o elemento e um vector de deslocamentos nodais expandido $\{U^{(e)}\}_{\text{exp}}$ obtido a partir da adição ao vector $\{u^{(e)}\}$ de componentes com valor nulo de forma que a dimensão do vector $\{U^{(e)}\}_{\text{exp}}$ seja igual a N . Da mesma maneira se definem o vector das forças nodais expandido $\{F^{(e)}\}_{\text{exp}}$, assim como as matrizes (de dimensão $(N \times N)$) de massa $[M^{(e)}]_{\text{exp}}$ e de rigidez $[K^{(e)}]_{\text{exp}}$ expandidas.

As equaoes de movimento para o sistema global podem ser obtidas por um processo de agrupamento que consiga exprimir a energia cinética, a energia potencial e o trabalho virtual em termos da contribuiao dos elementos individuais utilizados na modelizaao. Assim, a energia cinética $T(t)$ pode ser escrita com a forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^L \{\dot{u}^{(e)}\}^T [M^{(e)}] \{\dot{u}^{(e)}\} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^L \{\dot{U}\}_{\text{exp}}^T [M^{(e)}]_{\text{exp}} \{\dot{U}\}_{\text{exp}} = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\},$$

onde

$$[M] = \sum_{e=1}^L [M^{(e)}]_{\text{exp}},$$

é a matriz simétrica de massa para o sistema global, obtida simplesmente pela adiao das matrizes de massa expandidas dos elementos que constituem tal sistema. Da mesma forma, a energia potencial $V(t)$ é escrita como:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^L \{u^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^L \{U^{(e)}\}_{\text{exp}}^T [K^{(e)}]_{\text{exp}} \{U^{(e)}\}_{\text{exp}} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\},$$

onde $[K] = \sum_{e=1}^L [K^{(e)}]_{\text{exp}}$ é a matriz simétrica de rigidez para o sistema global.

Também o trabalho virtual pode ser escrito com a forma:

$$\bar{W} = \sum_{e=1}^L \{f^{(e)}\}^T \{\bar{u}^{(e)}\} = \sum_{e=1}^L \{F^{(e)}\}_{\text{exp}}^T \{\bar{U}^{(e)}\}_{\text{exp}} = \{F\}^T \{\bar{U}\},$$

onde $\{F\} = \sum_{e=1}^L \{F^{(e)}\}_{\text{exp}}$ é o vector das forças nodais não conservativas para o sistema global.

Utilizando as matrizes de massa e de rigidez, o vector das forças nodais não conservativas, e o vector dos deslocamentos nodais do sistema global é possível, desprezando o efeito de amortecimento que eventualmente possa existir, escrever as equaoes de movimento de

Lagrange [Bathe, 1996] para o sistema com a seguinte forma matricial:

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}.$$

Considerando o efeito de amortecimento, as equações de movimento de Lagrange são:

$$[M]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\},$$

onde $[C]$ é a matriz de amortecimento e $\{\dot{U}\}$ o vector das velocidades nodais. Esta matriz pode também ser obtida a partir do agrupamento das matrizes de amortecimento dos elementos utilizados na modelização. Contudo, como foi referido no capítulo anterior, geralmente esta matriz é obtida utilizando-se as matrizes de massa e de rigidez do sistema global conjuntamente com resultados experimentais do valor de amortecimento.

5.2.1.2.3 – Exemplos

Para se verificar o cálculo e o significado das matrizes de um sistema modelizado por um conjunto de elementos finitos axiais lineares, considere-se novamente os três pontos representados na *Figura 5.1* ligados por intermédio de elementos axiais como na *Figura 5.6*.

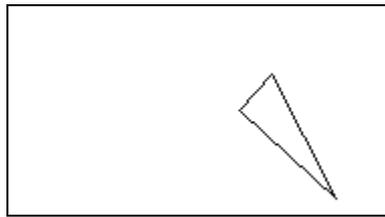


Figura 5.6 – Três pontos ligados por intermédio de elementos finitos axiais.

Considerando-se, por exemplo, que os elementos são de área unitária e construídos por borracha obtiveram-se as seguintes matrizes⁶:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2033.920000 & 908.693333 & 108.266667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 908.693333 & 3400.320000 & 791.466667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 108.266667 & 791.466667 & 1799.466667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 2033.920000 & 908.693333 & 108.266667 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 908.693333 & 3400.320000 & 791.466667 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 108.266667 & 791.466667 & 1799.466667 \end{bmatrix},$$

⁶ Os valores dos elementos destas matrizes foram arredondados para a sexta casa decimal.

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.000052 & -0.000007 & -0.000045 & 0.000036 & 0.000014 & -0.000050 \\ -0.000007 & 0.000028 & -0.000020 & 0.000014 & -0.000033 & 0.000019 \\ -0.000045 & -0.000020 & 0.000065 & -0.000050 & 0.000019 & 0.000032 \\ 0.000036 & 0.000014 & -0.000050 & 0.000084 & -0.000028 & -0.000056 \\ 0.000014 & -0.000033 & 0.000019 & -0.000028 & 0.000045 & -0.000017 \\ -0.000050 & 0.000019 & 0.000032 & -0.000056 & -0.000017 & 0.000073 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz de rigidez obtida, verifica-se que o sistema resultante apresenta baixa rigidez.

Optando-se agora pelo aço como o material a utilizar na construção dos elementos axiais, obtiveram-se as seguintes matrizes de massa e de rigidez:

$$[M] = \begin{bmatrix} 14146.640000 & 6320.286667 & 753.033333 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 6320.286667 & 23650.440000 & 12515.933333 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 753.033333 & 5504.933333 & 1799.466667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 14146.640000 & 6320.286667 & 753.033333 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 6320.286667 & 23650.440000 & 5504.933333 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 753.033333 & 5504.933333 & 12515.933333 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 4.407162 & -0.622579 & -3.784583 & 3.051410 & 1.206246 & -4.257656 \\ -0.622579 & 2.345850 & -1.723272 & 1.206246 & -2.785912 & 1.579666 \\ -3.784583 & -1.723272 & 5.507855 & -4.257656 & 1.579666 & 2.677990 \\ 3.051410 & 1.206246 & -4.257656 & 7.126964 & -2.337102 & -4.789863 \\ 1.206246 & -2.785912 & 1.579666 & -2.337102 & 3.785128 & -1.448027 \\ -4.257656 & 1.579666 & 2.677990 & -4.789863 & -1.448027 & 6.237890 \end{bmatrix}.$$

Comparando estas matrizes com as obtidas na experiência anterior verifica-se, como seria de esperar, que os seus elementos aumentaram em valor, traduzindo o aumento da densidade e da rigidez correspondente à passagem de borracha para aço como o material virtual adoptado para os elementos.

Considerando-se novamente borracha para o material virtual mas desta vez um valor para a área dos elementos 10 vezes superior, obtiveram-se as seguintes matrizes:

$$[M] = \begin{bmatrix} 20339.200000 & 9086.933333 & 1082.666667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 9086.933333 & 34003.200000 & 7914.666667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1082.666667 & 7914.666667 & 1799.666667 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 20339.200000 & 9086.933333 & 1082.666667 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 9086.933333 & 34003.200000 & 7914.666667 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1082.666667 & 7914.666667 & 1799.666667 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.000519 & -0.000073 & -0.000445 & 0.000359 & 0.000142 & -0.000501 \\ -0.000073 & 0.000276 & -0.000203 & 0.000142 & -0.000328 & 0.000186 \\ -0.000445 & -0.000203 & 0.000648 & -0.000501 & 0.000186 & 0.000315 \\ 0.000359 & 0.000142 & -0.000501 & 0.000839 & 0.000275 & -0.000564 \\ 0.000142 & -0.000328 & 0.000186 & 0.000275 & 0.000445 & -0.000170 \\ -0.000501 & 0.000186 & 0.000315 & -0.000564 & -0.000170 & 0.000734 \end{bmatrix}.$$

Comprando estas matrizes relativamente às obtidas para áreas unitárias é possível concluir que os valores dos seus elementos são aproximadamente 10 vezes superiores, o que traduz um aumento de densidade e de rigidez do sistema global proporcional ao aumento verificado para a área dos elementos utilizados.

5.2.2 – Para objectos 3D

A seguir é apresentada a determinação das matrizes de massa e de rigidez para os elementos tridimensionais utilizados na modelização de objectos 3D. Em primeiro lugar considera-se o elemento finito isoparamétrico de Sclaroff e, seguidamente, o agrupamento de elementos finitos axiais lineares.

5.2.2.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff

Para se determinarem as matrizes de massa e de rigidez começa-se por construir a matriz das funções de forma $[N]$ de dimensão $(3 \times 3m)$, sendo m o número de dados pontuais para o elemento, ou seja o seu número de nodos:

$$[N] = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_m & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N]_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{aa} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{aa} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

onde $[N]_{aa} = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_m]$.

Substituindo esta matriz na equação (5.6) resulta a matriz de massa $[M]$:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{aa} & [0] & [0] \\ [0] & [M]_{aa} & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{aa} \end{bmatrix},$$

onde a submatriz $[M]_{aa}$, de dimensão $(m \times m)$, é simétrica e definida positivamente. Os elementos desta matriz têm a forma:

$$M_{aa_{ij}} = \rho \int_V \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g_k(X) g_l(X) dV = \rho \pi^2 \sigma^3 \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \sqrt{g_{kl}},$$

onde a_{xy} é o elemento (x, y) da matriz de coeficientes $[A]$, g_k e g_l são as funções 3D de

base Gaussiana e $g_{kl} = g_k(X_l)$ é o elemento (k,l) da matriz $[G]$. Utilizando-se notação matricial resulta:

$$[M]_{aa} = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 [A]^T \sqrt{[G]} [A] = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 [G]^{-1} \sqrt{[G]} [G]^{-1},$$

onde $\sqrt{[G]}$ representa a matriz $[G]$ após extracção da raiz quadrada aos seus elementos.

A matriz de rigidez $[K]$, com dimensão $(3m \times 3m)$, é obtida a partir da equação (5.8) e tem a forma [Sclaroff, 1995]:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} \\ [K]_{12}^T & [K]_{22} & [K]_{23} \\ [K]_{13}^T & [K]_{23}^T & [K]_{33} \end{bmatrix}.$$

Note-se que esta matriz é simétrica e, como são utilizadas funções de base Gaussianas, as suas submatrizes também o são.

Os elementos da matriz simétrica $[K]_{11}$, de dimensão $(m \times m)$, têm a forma:

$$[K]_{11_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial z} \right) \right] dx dy dz.$$

Integrando esta equação e reagrupando os termos resulta:

$$[K]_{11_{ij}} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{x}_{kl}^2 + \xi(\hat{y}_{kl}^2 + \hat{z}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}},$$

onde $\hat{x}_{kl} = (x_k - x_l)$, $\hat{y}_{kl} = (y_k - y_l)$ e $\hat{z}_{kl} = (z_k - z_l)$. Da mesma forma os elementos de $[K]_{22}$ e de $[K]_{33}$ têm a forma:

$$[K]_{22_{ij}} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{y}_{kl}^2 + \xi(\hat{x}_{kl}^2 + \hat{z}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}$$

e

$$[K]_{33_{ij}} = \pi^{\frac{3}{2}} \alpha \beta \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\frac{1+\xi}{2} - \frac{\hat{z}_{kl}^2 + \xi(\hat{x}_{kl}^2 + \hat{y}_{kl}^2)}{4\sigma^2} \right] \sqrt{g_{kl}}.$$

Os elementos da matriz $[K]_{12}$ têm a forma:

$$[K]_{12_{ij}} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \left[\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dx dy dz.$$

Após a integração resulta:

$$[K]_{12_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\beta(\alpha+\xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{y}_{kl} \sqrt{g_{kl}}.$$

Procedendo de modo idêntico, os elementos das matrizes $[K]_{13}$ e $[K]_{23}$ têm a forma:

$$[K]_{13_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\beta(\alpha+\xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{x}_{kl} \hat{z}_{kl} \sqrt{g_{kl}}$$

e

$$[K]_{23_{ij}} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\beta(\alpha+\xi)}{4\sigma} \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \hat{y}_{kl} \hat{z}_{kl} \sqrt{g_{kl}}.$$

5.2.2.2 – Elementos axiais lineares

Utilizando um procedimento idêntico ao considerado em 5.2.1.2, são facilmente determinadas as matrizes de massa e de rigidez e o vector das forças nodais não conservativas para um elemento finito do mesmo tipo e para o correspondente sistema agrupado tridimensional. Assim, para um elemento e , considerando-se os deslocamentos do primeiro nó u_1, u_3 e u_5 e do segundo nó u_2, u_4 e u_6 segundo os eixos x, y e z do referencial local, obtém-se a matriz de massa [Meirovitch, 1986]:

$$[M^{(e)}] = \frac{\rho A l^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e a matriz de rigidez:

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde ρ é a densidade, E é o coeficiente de elasticidade do material adoptado, A é a área e l é o comprimento do elemento finito.

A matriz de transformação [Foley, 1991; Hall, 1993] $[Tg]$ entre os sistemas global e local será neste caso uma matriz de dimensão (6×6) constituída por duas rotações 3D.

5.3 – Modelos pontuais utilizados

Nesta secção são descritos os procedimentos utilizados na determinação dos dados pontuais de cada objecto presente numa dada imagem e na modelização dos mesmos. Em primeiro lugar serão apresentados os procedimentos para objectos 2D e seguidamente para objectos 3D.

5.3.1 – Para objectos 2D

Para segmentar os dados pontuais dos objectos 2D presentes numa dada imagem dotou-se o sistema designado por “plataforma de desenvolvimento e ensaio” e apresentado no capítulo seguinte, de várias técnicas *standard* de processamento e análise de imagem [Lim, 1990; Schalkoff, 1995] como por exemplo:

1. Para a fase de pré-processamento:

- remoção de *pixels* com baixo valor de intensidade;
- suavização de uma imagem;
- operações de convolução;
- operações lógicas e aritméticas entre duas imagens;
- binarização.

2. Para a fase de segmentação:

- detectores de orlas de intensidade [Correia, 1995; Tavares, 1995a];
- seguimento de linhas com histerese [Tavares, 1995a];
- análise de regiões com a possibilidade de extracção de uma região;
- segmentação utilizando contornos activos (vulgarmente designados por *snakes*, ver segundo capítulo).

3. Para a fase de simplificação dos dados:

- operações de adelgaçamento;
- operações de amostragem.

Com as técnicas implementadas é possível remover o ruído presente numa imagem original, suavizar a imagem resultante de maneira a diminuir a influência dos *pixels*

“degenerados”, segmentar o objecto de interesse presente na imagem e, finalmente, de forma a diminuir os custos computacionais sem contudo se perder informação relevante, proceder-se a uma simplificação dos objectos. Com esta abordagem, obtêm-se *pixels* verdadeiramente representativos do objecto em questão, sem tornar o processo de computação excessivamente pesado.

Quando a modelização de um objecto 2D é efectuada através de um elemento finito isoparamétrico 2D de Sclaroff não é necessária a existência de ordem dos *pixels* a utilizar como nodos do modelo; contudo, quando a modelização é realizada utilizando-se elementos finitos axiais lineares é necessário determinar a ordem correcta dos mesmos, de forma a se estabelecer o correcto agrupamento. Neste caso, para se obter a ordem adequada dos nodos é utilizado o algoritmo 2D de Delaunay [Foley, 1991; Schroeder, 1998, 1999].

Como pode ser confirmado no sétimo capítulo, os objectos 2D do tipo contorno mereceram durante este trabalho uma atenção especial. Assim, no ponto seguinte está descrito o procedimento utilizado para segmentar os dados destes objectos e para se proceder às suas modelizações.

5.3.1.1 – Para contornos

O principal procedimento utilizado para segmentar os contornos dos objectos presentes numa dada imagem pode ser decomposto nas seguintes etapas:

1. Aplicação à imagem original, *Figura 5.7a*, de um detector de orlas de intensidade, *Figura 5.7b*;
2. Seguimento das orlas detectadas utilizando-se um algoritmo com histerese, com um dado valor de limiar para início de um contorno e um limiar, determinado localmente para agregação, *Figura 5.7c*;
3. Selecção do contorno com interesse e sua amostragem.

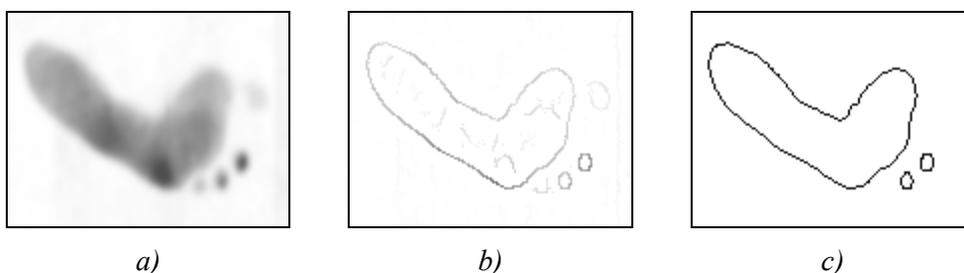


Figura 5.7 – Exemplo de determinação dos contornos presentes numa imagem: a) imagem original; b) imagem após a aplicação de um detector de orlas; c) contornos obtidos após aplicação de um algoritmo de detecção e seguimento com histerese.

Nas imagens em que a utilização dos detectores de orlas de intensidade não é adequada,

por exemplo em imagens médicas de ultrasons, optou-se por segmentar os objectos utilizando-se contornos activos.

Para se determinar as correspondências entre dois contornos, estimar os deslocamentos nodais envolvidos e a energia de deformação necessária para os alinhar, foram utilizadas dois tipos de modelização:

- No primeiro é utilizado um único elemento finito isoparamétrico 2D de Sclaroff para modelizar cada um dos contornos.
- No segundo foram utilizados elementos finitos do tipo axial linear de forma a se construir o modelo de cada um dos contornos, *Figura 5.8*.

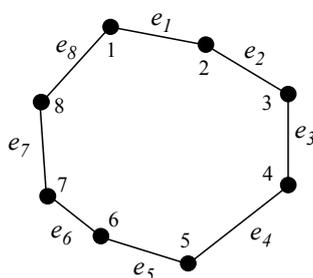


Figura 5.8 – Modelização de um contorno por intermédio de um conjunto e_i de elementos finitos do tipo axial.

Utilizando-se um elemento finito de Sclaroff o contorno delimita um objecto virtual com propriedades elásticas obtendo-se um modelo em tudo semelhante a uma membrana elástica. Já se for considerado um conjunto de elementos axiais agrupados, os *pixels* do contorno delimitam um modelo “oco” constituído unicamente por lados que são os elementos finitos unidimensionais. Desta forma, com esta segunda modelização, toda a contribuição do interior do objecto é desprezada, resultando um modelo mais simples.

5.3.2 – Para objectos 3D

Sendo os dados originais do objecto em consideração já definidos por três coordenadas a sua modelização pode ser realizada por intermédio de um elemento finito isoparamétrico 3D de Sclaroff ou, então, por um conjunto de elementos finitos axiais lineares devidamente agrupados utilizando-se, neste caso, o algoritmo 3D de Delaunay para determinar a ordem dos nodos.

Como por vezes o volume original de dados é demasiado elevado, foi implementado no sistema de desenvolvimento um algoritmo de decimação [Schroeder, 1998, 1999] que permite a simplificação de malhas poligonais e assim diminuir os custos computacionais exigidos sem, contudo, perder informação necessária. Por vezes, também se verifica a necessidade de se proceder à suavização da malha poligonal reduzindo-se assim o ruído associado às altas

frequências. Verificando-se tal necessidade, procedeu-se à implementação de um algoritmo que ajusta a posição dos nodos através de uma suavização Laplaciana [Schroeder, 1998, 1999].

Em várias situações da visão por computador, um objecto presente numa dada imagem 2D é uma representação de um objecto 3D real, existindo uma forte relação entre o nível de brilho de cada *pixel* que constitui o objecto na imagem e uma característica importante do objecto real. Exemplos de tais relações podem ser verificados, por exemplo, em análise e reconhecimento de faces [Cootes, 1993, 1994; Moghaddam, 1996] e em imagens de pedobarografia dinâmica (ver sétimo capítulo).

Se o nível de brilho de cada *pixel* do objecto na imagem 2D traduzir uma propriedade do objecto real, então torna-se útil proceder-se à modelização do objecto utilizando-se a referida informação. Assim, utilizando-se para cada *pixel* as suas duas coordenadas imagem e o seu nível de brilho como a respectiva terceira coordenada, obtêm-se as superfícies de intensidade.

Apesar de se poderem considerar todos os *pixels* que constituem o objecto na imagem original, tal implicaria um custo computacional exagerado. Assim, optou-se por se proceder à amostragem regular do objecto na imagem 2D utilizando-se uma grelha rectangular. Com este tipo de amostragem reduz-se significativamente o número de nodos a considerar na modelização, mas poderá perder-se alguma informação em zonas particulares do objecto, assim como podem existir zonas homogéneas do objecto com demasiados nodos. Tendo presente esta desvantagem da amostragem regular, optou-se por também implementar uma amostragem adaptativa, em que são utilizados os pontos máximos locais de intensidade como “sementes” de amostragens radiais que resultam da análise dos respectivos perfis de intensidade. Seguidamente são descritos os procedimentos para se obter as superfícies de intensidade a partir de imagens 2D utilizando-se amostragem regular e amostragem adaptativa.

5.3.2.1 – Amostragem regular

Na abordagem utilizada para se obter uma superfície de intensidade a partir de uma imagem 2D, começa-se por realizar um pré-processamento na imagem original de forma a remover o ruído e a diminuir a influência dos *pixels* “degenerados”. De seguida realiza-se a amostragem do objecto presente na imagem 2D e constrói-se a superfície de intensidade utilizando o algoritmo de Delaunay 2D, para se obter a triangulação dos *pixels* resultantes da amostragem, e utiliza-se o nível brilho de cada *pixel* como a sua terceira coordenada. Estando construída a superfície poligonal realiza-se a sua simplificação, de forma a reduzir-se nas zonas homogéneas os nós em excesso, e suaviza-se a malha de maneira a reduzir-se o ruído associado às altas frequências. Os procedimentos envolvidos nesta abordagem podem ser descritos do seguinte modo:

1. “removem-se” os *pixels* considerados como ruído e aplica-se um filtro Gaussiano de

forma a suavizar a imagem original, *Figura 5.9a e Figura 5.9b*;

2. determina-se o rectângulo que circunscreve o objecto a modelizar e realiza-se uma amostragem rectangular e regular desse rectângulo, *Figura 5.9c*;
3. realiza-se a triangulação dos pontos amostrados através do algoritmo 2D de Delaunay e considera-se o nível de brilho de cada *pixel* na imagem original como a sua terceira coordenada, *Figura 5.9d*;
4. realiza-se uma simplificação da malha triangular resultante de maneira a diminuir-se o número de nodos a considerar com conseqüente redução dos custos computacionais, *Figura 5.9e*;
5. realiza-se uma suavização da malha para se reduzir o ruído associado às altas frequências, *Figura 5.9f*.

5.3.2.2 – Amostragem adaptativa

Como já anteriormente referido, foi desenvolvido um algoritmo para amostrar um objecto presente numa imagem original, que utiliza informação sobre a variação dos brilhos dos *pixels* que constituem o objecto na imagem. De forma resumida, este algoritmo pode ser descrito do seguinte modo: os máximos locais de intensidade são considerados como “sementes” da amostragem; centradas em cada “semente”, são realizadas várias análises radiais, separadas entre si de um determinado ângulo, dos perfis de brilho; na análise dos perfis de brilho, *pixels* que apresentem valores traduzindo variações assinaláveis são considerados como nodos da superfície.

Com esta amostragem adaptativa, as superfícies de intensidade são mais consistentes com o objecto presente na imagem original, sendo constituídas por um número mais elevado de nodos nas zonas que apresentam maior variação de brilho e por um número mais reduzido nas zonas mais homogéneas.

Na imagem da *Figura 5.10a* está representado o objecto resultante da amostragem adaptativa do objecto presente na *Figura 5.9b*. Realizando-se a triangulação de Delaunay resultou a superfície de intensidade da *Figura 5.10b*, após a simplificação e a suavização da malha poligonal obteve-se a superfície de intensidade da *Figura 5.10c*. Confrontando as superfícies de intensidade obtidas com as duas amostragens, verifica-se a vantagem da utilização da amostragem adaptativa.

5.3.2.3 – Modelizações utilizadas

Para se determinar as correspondências entre duas superfícies distintas, estimar os deslocamentos nodais e a energia de deformação necessária para as alinhar, foram também utilizados dois tipos de modelização:

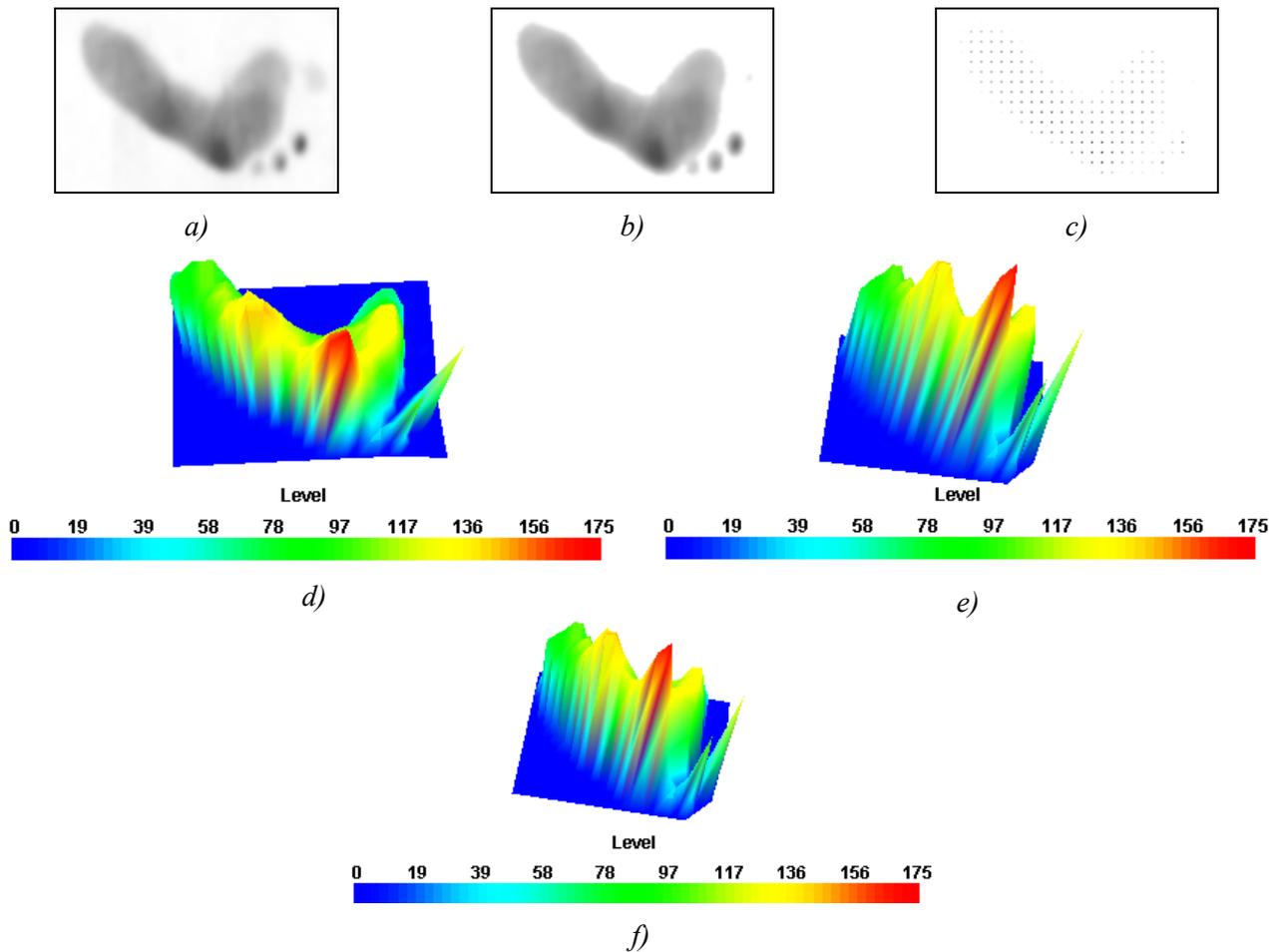


Figura 5.9 – Construção de uma superfície de intensidade: a) Imagem original; b) Imagem após remoção do ruído e aplicação de um filtro Gaussiano; c) Objecto após amostragem regular; d) Superfície resultante da triangulação (469 nodos); e) Superfície resultante após simplificação (259 nodos); f) Superfície resultante após simplificação e suavização.

- No primeiro é utilizado um único elemento finito isoparamétrico 3D de Sclaroff para modelizar cada uma das superfícies;
- No segundo foram utilizados elementos finitos do tipo axial linear de forma a construir cada uma das superfícies, *Figura 5.11*. De notar que a ordem necessária dos nodos da superfície é obtida pela triangulação de Delaunay utilizada para construir a malha triangular.

Com a primeira modelização os nodos que constituem a superfície são envolvidos por uma película elástica o que origina um modelo do tipo “casca”, com as suas células totalmente preenchidas pelo material virtual adoptado. Já com a segunda modelização, a superfície é apenas constituída por lados, que são os elementos finitos unidimensionais utilizados, sendo assim constituída por células desprovidas de material virtual no seu interior. Com esta modelização consegue-se uma modelização de uma superfície utilizando-se simples elementos finitos unidimensionais.

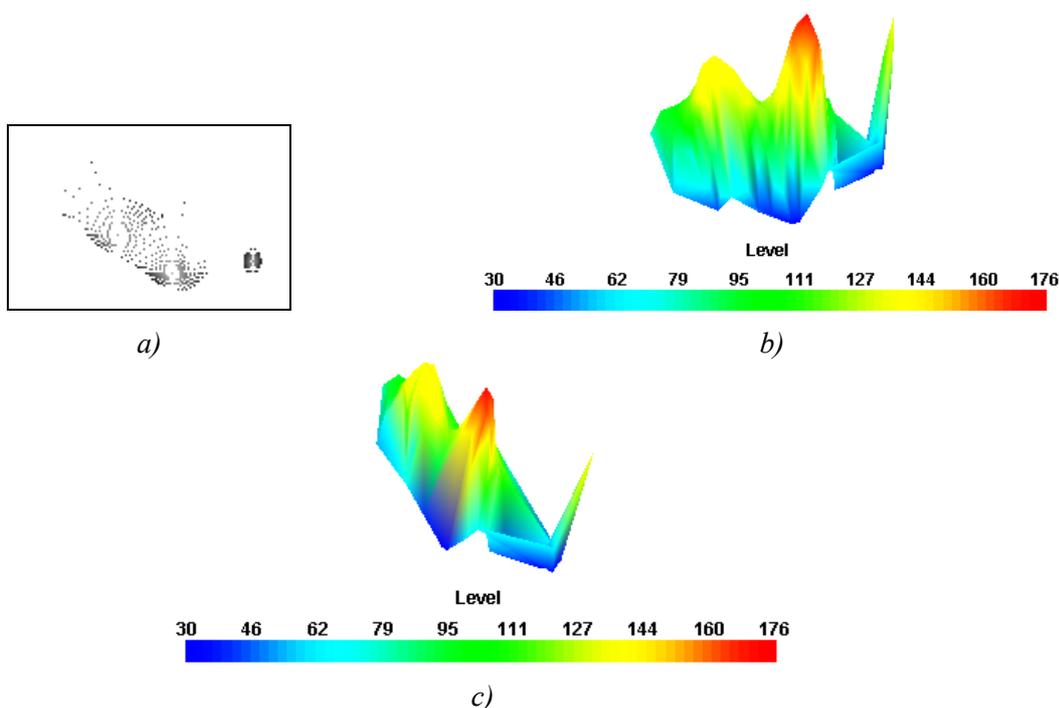


Figura 5.10 – Superfície resultante utilizando-se amostragem adaptativa: a) Objecto da Figura 5.9a) após amostragem adaptativa; b) Superfície resultante por triangulação (232 nodos); c) Superfície resultante após simplificação e suavização (115 nodos).
[Reprodução a cores em anexo.]

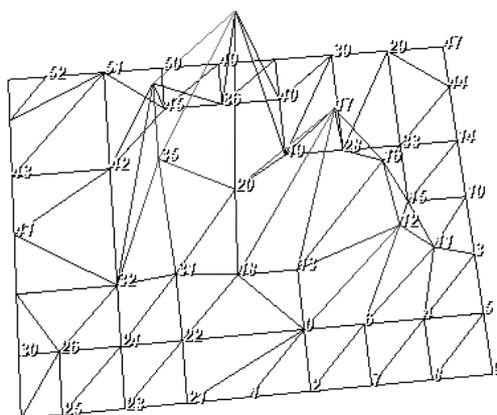


Figura 5.11 – Modelização de uma superfície por intermédio de um conjunto de elementos finitos do tipo axial. Cada nodo está ligado aos seus vizinhos por intermédio de elementos axiais.

5.3.3 – Para contornos de isonível

Uma alternativa para representar uma superfície de intensidade é considerar-se um conjunto de contornos 2D de isonível, *Figura 5.12*. Como em muitos problemas tal representação tem uma importância relevante, procedeu-se à implementação de algumas técnicas para extracção de contornos de isonível a partir de imagens 2D e a partir de superfícies de intensidade.

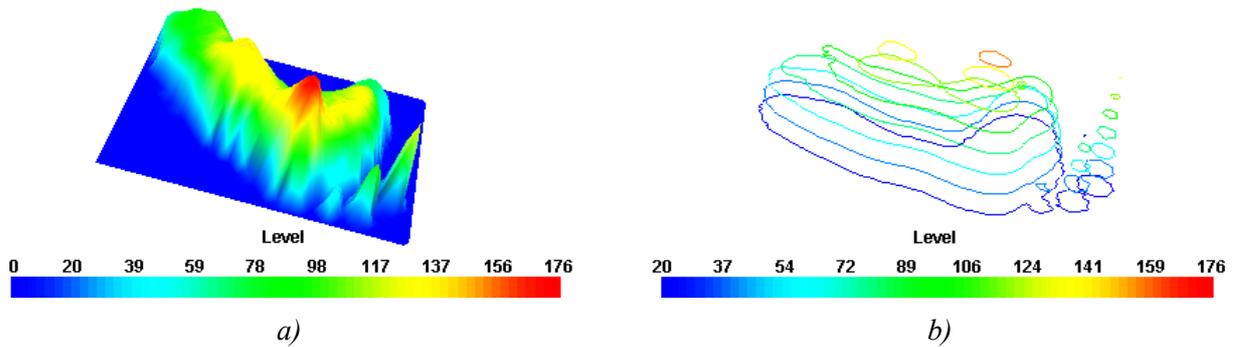


Figura 5.12 – Representação de uma superfície de intensidade utilizando um conjunto de contornos de isonível: a) Superfície de intensidade; b) Oito contornos de isonível.

Para se determinar as correspondências entre contornos de isonível, estimar os deslocamentos nodais e a energia de deformação necessária para os alinhar, foram também utilizadas dois tipos de modelização 2D e 3D:

- No primeiro é utilizado um único elemento finito isoparamétrico 2D ou 3D de Sclaroff para modelizar cada um dos contornos;
- No segundo foram utilizados modelos 2D ou 3D construídos por agrupamento de elementos finitos do tipo axial linear.

5.4 – Resultados experimentais

Nesta secção são apresentados resultados experimentais⁷ obtidos utilizando o método de determinação de correspondências segundo modelização física e análise modal, apresentado no capítulo anterior, e as modelizações apresentadas neste capítulo.

Em primeiro lugar, são apresentados resultados obtidos na análise modal de objectos, na determinação de correspondências entre objectos, na estimação dos deslocamentos nodais, e na utilização da energia de deformação para tradução da deformação existente entre objectos, utilizando modelizações por intermédio do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff.

Posteriormente, serão apresentados resultados experimentais equivalentes utilizando a modelização dos objectos por intermédio de elementos finitos axiais lineares devidamente agrupados.

5.4.1 – Elemento isoparamétrico de Sclaroff

5.4.1.1 – Na análise modal

Como foi referido, serão apresentados neste ponto alguns resultados obtidos na análise modal de objectos, modelizados por intermédio do elemento finito de Sclaroff, em vibração de modo livre. Em primeiro lugar serão analisados resultados considerando-se objectos 2D e por último

⁷ Outros resultados experimentais podem ser analisados em [Tavares, 1998, 1998a, 1999, 1999a, 2000, 2000a, 2000b].

objectos 3D.

5.4.1.1.1 – Para objectos 2D

Para a primeira análise modal a apresentar, *Tabela 5.1*, considere-se um objecto constituído por 62 *pixels* e utilize-se um valor para o parâmetro σ igual à distância média entre cada *pixel* e o seu vizinho seguinte (igual a 5.8), valor que em muitas experiências 2D conduziu a bons resultados de emparelhamento, e borracha para o material virtual. Para verificar a influência dos modos de vibração nos deslocamentos impostos aos *pixels* que constituem o objecto original são apresentados os objectos resultantes⁸ da utilização dos primeiros três, vinte e cinco, cinquenta e de todos os modos de vibração. Analisando estes objectos verifica-se que quanto mais modos se consideram mais o objecto resultante é deformado (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes considerando os vinte e cinco primeiros modos e todos os modos).

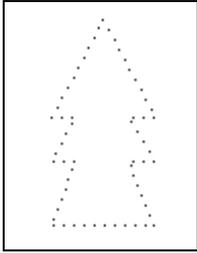
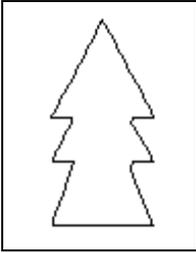
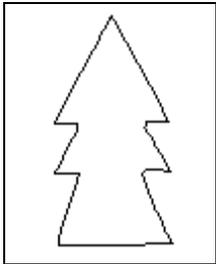
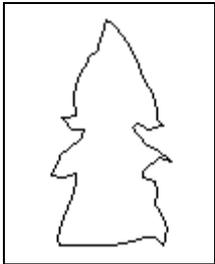
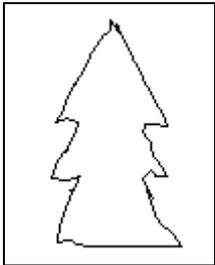
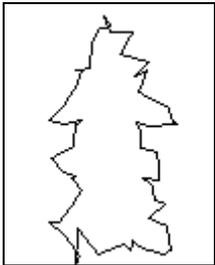
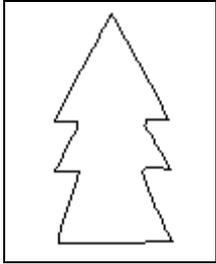
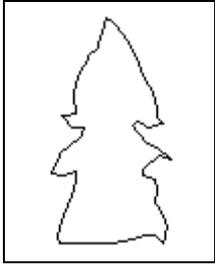
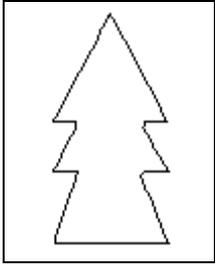
Na referida tabela estão também representados os objectos resultantes da utilização dos modos de vibração compreendidos entre o modo cem e último modo e entre o modo cinquenta e o modo cem. Comparando estes objectos, é possível concluir que as deformações impostas pelos modos mais altos são mais localizadas e semelhantes à inclusão de ruído no objecto original.

Para se verificar a influência do material adoptado na modelização, estão também representados na mesma *Tabela 5.1* os objectos resultantes da utilização dos primeiros cinquenta e de todos os modos de vibração considerando-se um valor igual para σ mas cobre em vez de borracha. Analisando-se os objectos representados é possível verificar que, como seria de esperar, os objectos resultantes traduzem correctamente o aumento da rigidez do modelo (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes considerando-se todos os modos de vibração e material virtual do tipo borracha e do tipo cobre).

Voltando a considerar o mesmo objecto original, cobre para o material utilizado na modelização mas um valor para o parâmetro σ igual à distância média entre todos os *pixels* (igual a 51) obteve-se um modelo consideravelmente mais rígido. Para se analisar este aumento de rigidez compare-se os objectos representados na *Tabela 5.1* obtidos utilizando-se cobre, todos os modos de vibração e σ igual a 5.8 e igual a 51.

⁸ Os objectos apresentados resultam da soma às coordenadas originais de cada *pixel* dos respectivos deslocamentos impostos pelos modos de vibração considerados. Os conjuntos de modos utilizados foram definidos de forma arbitrária apenas com o intuito de ilustrar de forma adequada os objectivos da experiência em causa.

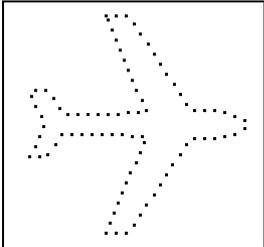
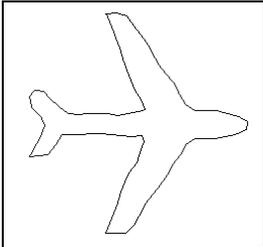
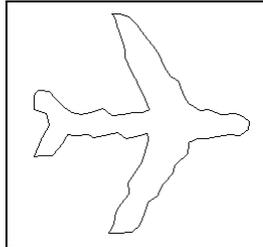
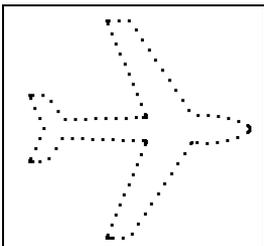
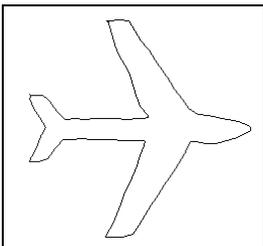
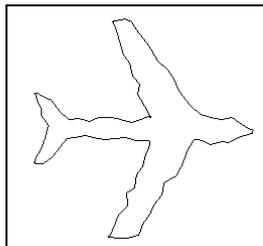
Tabela 5.1 – Análise modal de um objecto 2D utilizando o elemento de Sclaroff, diferentes materiais e distintos valores para σ .

<p>Objecto Original (62 pixels)</p> 		<p>Objecto Original com Pixels Ligados</p> 	
<p>Objectos Resultantes, borracha, $\sigma : 5.8$ nº de modos:</p>			
<p>3</p> 		<p>25</p> 	
			<p>50</p> 
<p>124 (todos)</p> 		<p>24, a partir do modo 100</p> 	
			<p>50, a partir do modo 50</p> 
<p>Objectos Resultantes, cobre, $\sigma : 5.8$ nº de modos:</p>			
<p>50</p> 		<p>124 (todos)</p> 	
			<p>Objecto Resultante, cobre, $\sigma : 51$ nº de modos: 124 (todos)</p> 

Para se verificar o efeito da concentração de nodos na modelização de um objecto foram modelizados, considerando borracha para o material virtual e valores iguais para o parâmetro σ , dois objectos resultantes de amostragens de um mesmo contorno original optando-se por

conservar os *pixels* de elevada curvatura⁹ no segundo objecto. Como pode ser comprovado ao analisar-se os objectos representados na *Tabela 5.2* o aumento da concentração dos *pixels* em zonas de elevada curvatura fez com que o contorno ficasse mais rígido nas mesmas zonas.

Tabela 5.2 – Verificação do efeito da concentração de nodos na modelização 2D de Sclaroff.

<p>Objecto original 1</p> 	<p>Objectos Resultantes nº de modos:</p> <p style="text-align: center;">50 todos</p>  	
<p>Objecto original 2</p> 	<p>Objectos Resultantes nº de modos:</p> <p style="text-align: center;">50 todos</p>  	

5.4.1.1.2 – Para objectos 3D

Considere-se um objecto 3D, constituído por 144 nodos, feito em borracha, e um valor de σ igual à distância média entre cada nodo e o seu vizinho seguinte (igual a 0.86). Utilizando-se os primeiros seis, vinte e cinco, cem, e todos os modos de vibração obtiveram-se os objectos representados na *Tabela 5.3*. Na mesma tabela é possível observar-se o objecto resultante considerando-se a soma dos modos de vibração compreendidos entre o modo cem e o último.

Analisando-se os objectos obtidos verifica-se um comportamento semelhante ao observado para objectos 2D.

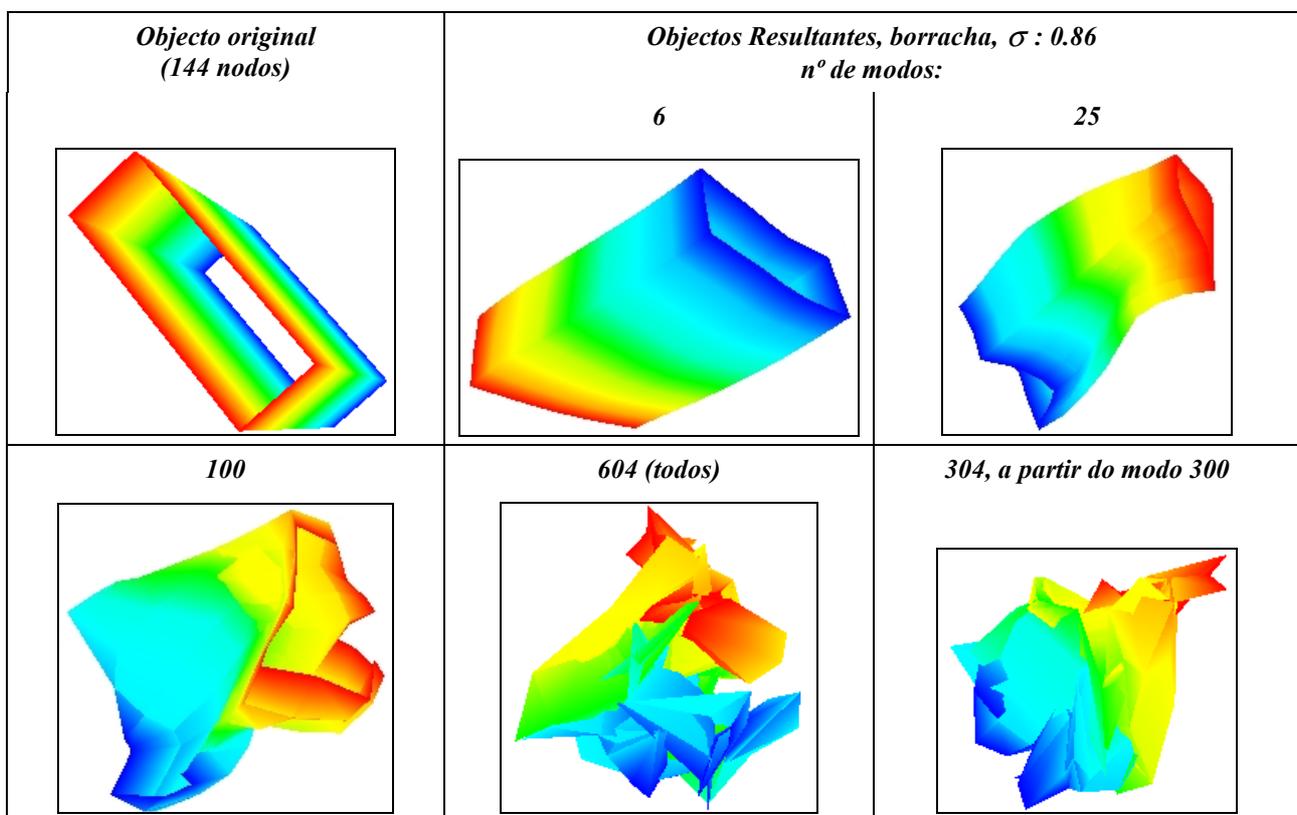
Para se verificar a influência do material virtual, realizou-se uma modelização semelhante à anterior mas, desta feita, considerando-se cobre. Utilizando-se os primeiros vinte e cinco, e todos os modos de vibração obtiveram-se os objectos representados na já referida *Tabela 5.3*.

⁹ Após o cálculo da curvatura em cada ponto do objecto original os *pixels* que apresentavam um valor elevado foram conservados durante a amostragem.

Como seria de esperar, o modelo do objecto tornou-se mais rígido (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes utilizando-se todos os modos de vibração, considerando-se para o material virtual borracha e cobre).

Considerando novamente borracha para material virtual mas um valor para o parâmetro σ mais elevado, igual à distância média entre todos os nodos do objecto (igual a 2.28), e realizando a análise modal do modelo, verifica-se que o mesmo se tornou mais rígido; tal pode ser verificado ao analisar o objecto resultante apresentado na *Tabela 5.3* considerando-se todos os modos de vibração.

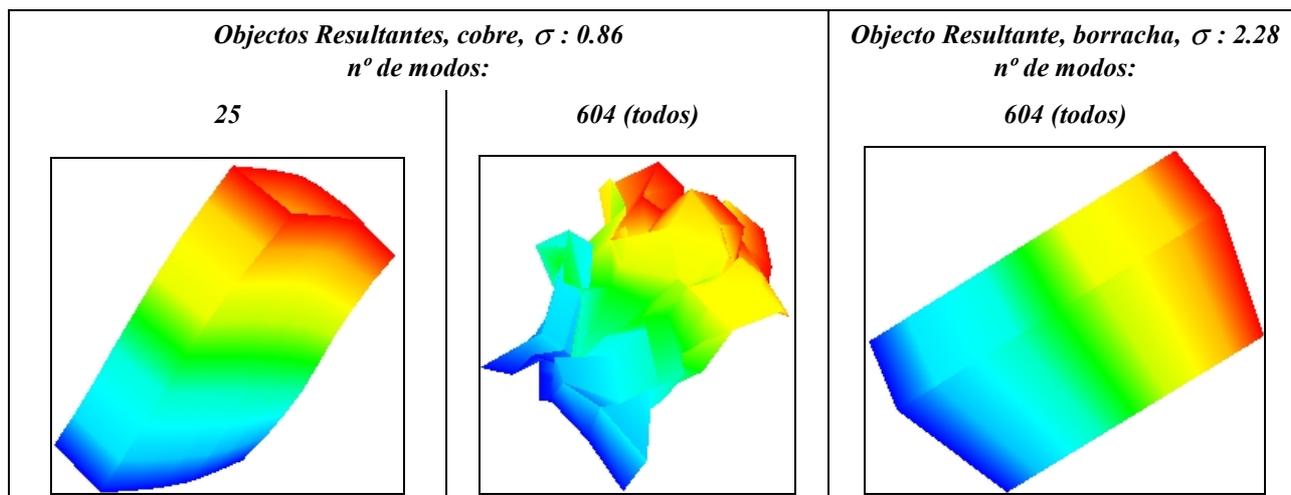
Tabela 5.3 – Análise modal de um objecto utilizando o elemento 3D de Sclaroff, diferentes materiais e distintos valores para σ .



5.4.1.2 – Na determinação de correspondências

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos na determinação de correspondências, na estimação dos deslocamentos por minimização da energia de deformação e na utilização do valor dessa energia como medida da deformação existente. Em primeiro lugar serão considerados objectos 2D e, seguidamente, objectos 3D.

Tabela 5.3 – Análise modal de um objecto utilizando o elemento 3D de Sclaroff, diferentes materiais e distintos valores para σ . (Continuação.)



5.4.1.2.1 – Para objectos 2D

Para se verificar os resultados obtidos por este tipo de modelização considere-se, o objecto 1, constituído por 57 *pixels*, e o 2, resultante da aplicação ao primeiro de uma transformação rígida constituída por uma rotação de 45° em torno do centróide, um escalamento de 1.25 em relação ao mesmo ponto e uma translação de 150 *pixels* em relação ao eixo x e de -150 *pixels* em relação ao eixo y , Tabela 5.4. Optando-se por um valor para o parâmetro σ igual à distância média entre cada *pixel* e o seu vizinho seguinte e por borracha para o material virtual obtiveram-se 57 emparelhamentos correctos (100%). Aplicando-se ao objecto 1 a rotação e a translação determinadas pelo método baseado em *quaternions* unitários, apresentado na segunda secção do terceiro capítulo, obteve-se a figura apresentada na referida tabela e na qual podem ser observadas as correspondências obtidas. Na mesma tabela estão também representadas as correspondências obtidas aplicando-se ao objecto 1 a transformação rígida determinada (uma rotação de 45.01°, um escalamento de 1.25 em torno da origem e uma translação de 150.6 *pixels* ao longo do eixo x e de -149.98 *pixels* ao longo do eixo y) e mais uma vez se pode comprovar a boa qualidade das correspondências obtidas e também da solução determinada para a transformação rígida.

Numa segunda experiência utilizaram-se os objectos reais 3 (84 *pixels*) e 4 (79 *pixels*), Tabela 5.5. Utilizando-se as mesmas condições de modelização da experiência anterior obtiveram-se 42 emparelhamentos que, por análise da imagem apresentada, se revelam bastante satisfatórios. Na referida tabela, estão também apresentadas as correspondências obtidas aplicando-se aos *pixels* do objecto 3 os deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Tabela 5.4 – Dados utilizados e resultados obtidos na primeira experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.

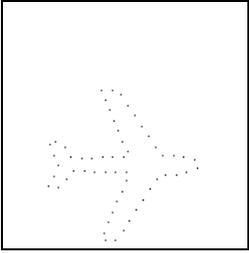
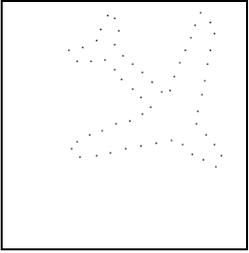
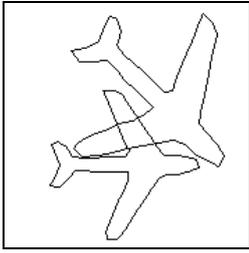
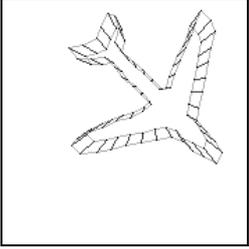
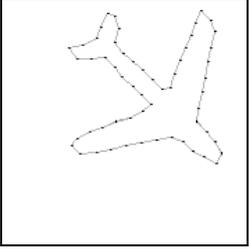
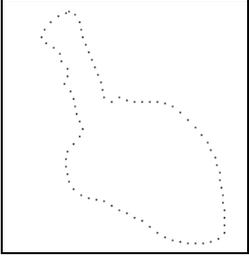
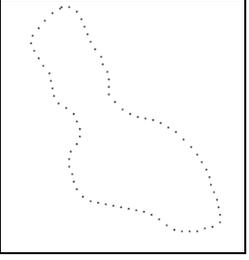
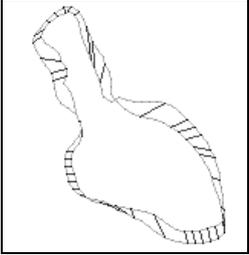
<p>Objecto 1 (57 pixels)</p> 	<p>Objecto 2 ($t_x=150$, $t_y=-150$, $\theta=45^\circ$, $s=1.25$)</p> 	<p>Objectos Sobrepostos (pixels ligados)</p> 
<p>Correspondências Obtidas, N° de Corresp.: 62</p>		
<p>(rotação e translação aplicadas)</p> 	<p>(transformação rígida aplicada)</p> 	

Tabela 5.5 – Dados utilizados e resultados obtidos na segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.

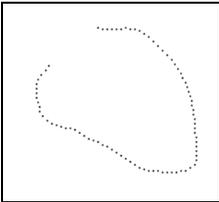
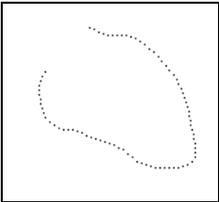
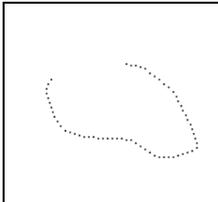
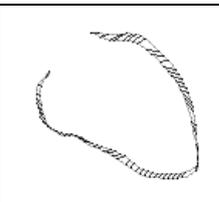
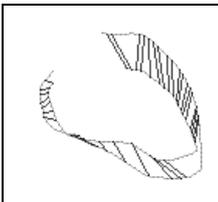
<p>Objecto 3 (84 pixels)</p> 	<p>Objecto 4 (79 pixels)</p> 
<p>Correspondências Obtidas, N° de Corresp.: 42</p>	
<p>(deslocamentos nodais estimados aplicados)</p> 	<p>(deslocamentos nodais estimados aplicados)</p> 

Para a terceira experiência considere-se os objectos reais 5 (84 pixels) e 6 (81 pixels), representados na Tabela 5.6, e as mesmas condições de modelização das experiências anteriores. Tais condições permitem obter 62 correspondências que, por análise da figura apresentada na referida tabela, podem ser classificadas como bastante aceitáveis. Na mesma

Tabela 5.6 é também possível verificar os deslocamentos nodais estimados e comprovar a boa qualidade que apresentam. O valor da energia de deformação obtido para a deformação existente entre estes dois objectos foi igual a 4.5.

Para a quarta experiência considere-se novamente o objecto 5 da experiência anterior e desta feita o objecto 7 (62 pixels) também representado na Tabela 5.6 e as mesmas condições de modelização. Na referida tabela são visíveis as 35 correspondências que se obtiveram e pode-se verificar que as mesmas são globalmente aceitáveis. Nesta experiência, o valor da energia de deformação foi igual a 28.3 que, quando comparado com o valor obtido na experiência anterior, traduz de forma adequada a maior diferença existente entre estes dois objectos.

Tabela 5.6 – Dados utilizados e resultados obtidos na terceira e na quarta experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.

Objecto 5 (84 pixels)	Objecto 6 (81 pixels)	Objecto 7 (62 pixels)
		
Correspondências Obtidas		
Objectos 5 e 6, N° de Corresp.: 62, Energia: 4.5 (deslocamentos nodais estimados aplicados)		Objectos 5 e 7, N° de Corresp.: 35, Energia: 28.3 

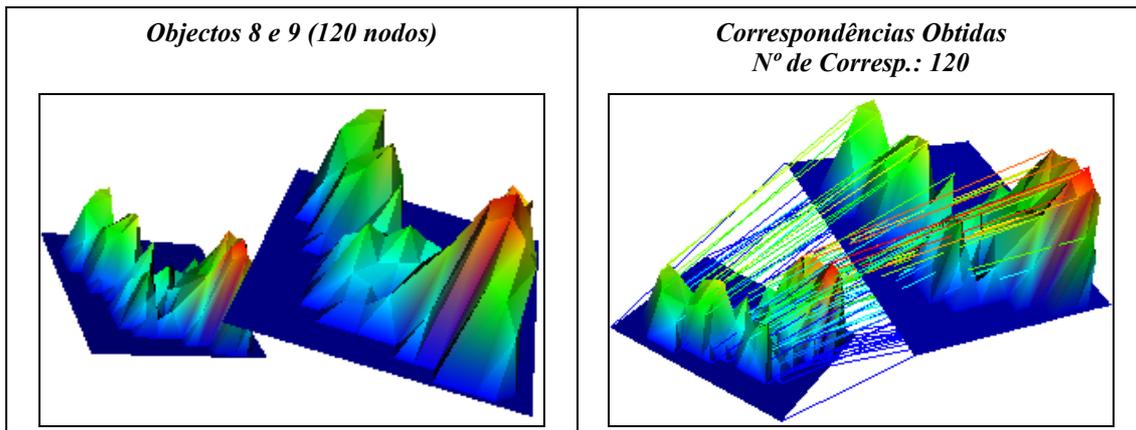
5.4.1.2.2 – Para objectos 3D

Na quinta experiência, Tabela 5.7, primeira considerando-se objectos 3D, utilizou-se o objecto 8, constituído por 120 nodos, e o 9, resultante da aplicação de uma transformação rígida ao primeiro constituída por uma rotação de -5° em torno do eixo x , 5° em torno do eixo y e 35° em torno do eixo z , do referencial centrado na origem, um escalamento de 1.5 em relação ao mesmo referencial, e uma translação de 20 segundo o eixo x , -25 segundo o eixo y e 75 segundo o eixo z . Optando-se por borracha para o material virtual e fazendo cada parâmetro σ igual a 25% da distância média entre todos os nodos do respectivo objecto, solução que nas várias experiências realizadas durante este trabalho geralmente possibilitava a obtenção de bons resultados de emparelhamento entre objectos 3D, obtiveram-se 120 (100%)

correspondências correctas.

Considere-se para a sexta experiência, *Tabela 5.8*, os objectos *10* (336 nodos) e *11* (316 nodos) resultantes da construção proposta neste capítulo para as imagens originais incluídas na mesma tabela. Utilizando uma modelização semelhante à utilizada na experiência anterior, obtiveram-se 49 emparelhamentos que, através de uma análise visual das duas vistas apresentadas, podem ser classificadas como aceitáveis.

Tabela 5.7 – Dados utilizados e resultados obtidos na quinta experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.

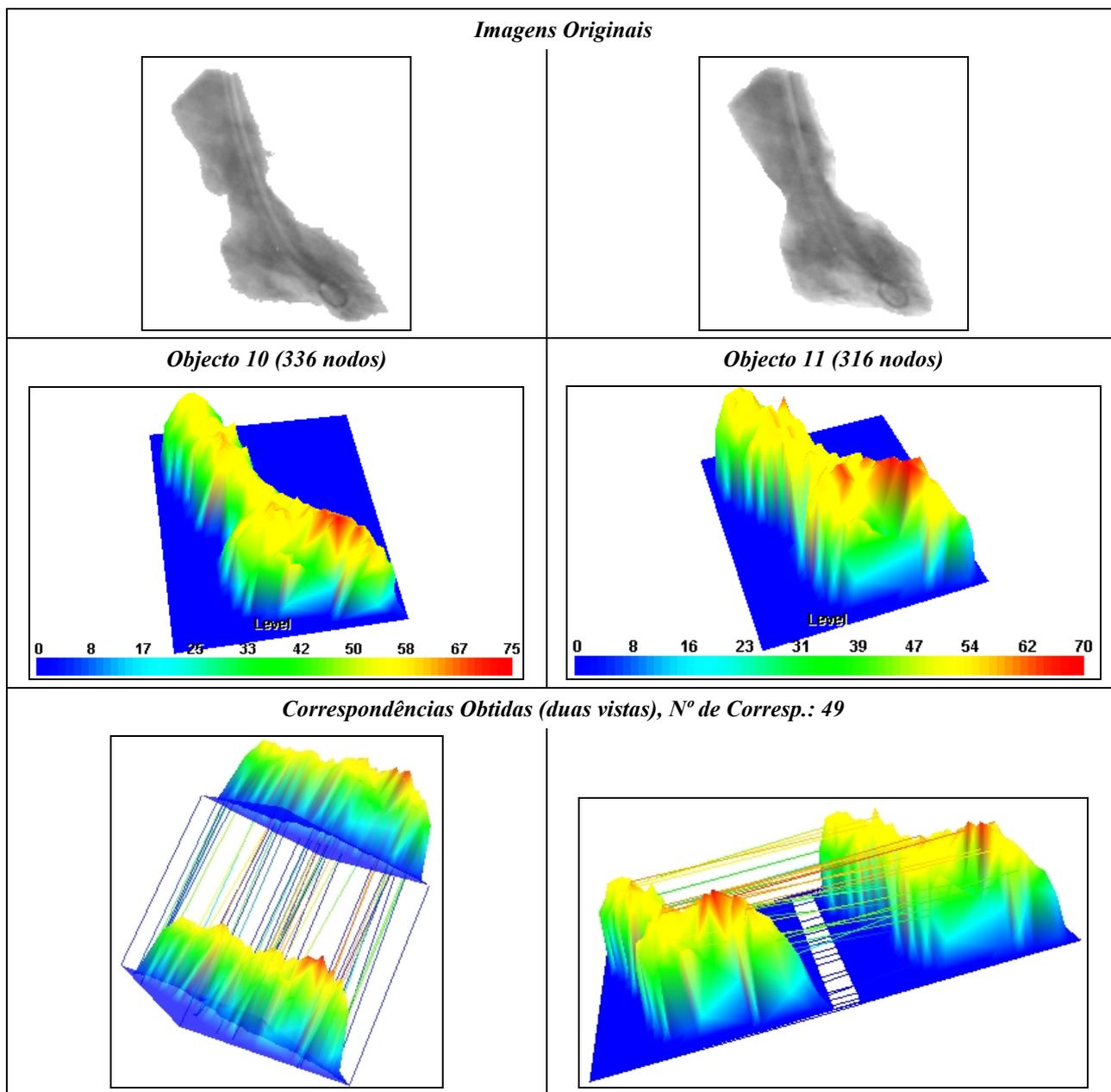


Considere-se desta feita, *Tabela 5.9*, os objectos *12* (143 nodos) e *13* (111 nodos) também construídos a partir das imagens originais da *Tabela 5.8*, mas utilizando-se uma simplificação da malha mais elevada. Utilizando-se uma modelização física semelhante à utilizada nas experiências anteriores, obtiveram-se 42 emparelhamentos que, mais uma vez recorrendo a uma análise visual, podem ser classificados como satisfatórios.

Considere-se para a oitava experiência, *Tabela 5.10*, os objectos *14* (176 nodos) e *15* (190 nodos) construídos a partir das imagens originais apresentadas. Utilizando-se as mesmas condições de modelização das experiências anteriores, obtiveram-se 90 emparelhamentos que, através de análise visual das duas vistas apresentadas, podem ser considerados como bastante satisfatórios. O valor da energia de deformação para esta experiência foi igual a 2501.9.

Considerando-se para a nona experiência, *Tabela 5.11*, o objecto *16* (192 nodos) construído a partir da imagem original apresentada e novamente o objecto *15* da experiência anterior e utilizando-se as mesmas condições de modelização obtiveram-se 68 emparelhamentos que, novamente recorrendo a uma análise visual, podem ser declarados como aceitáveis. Nesta experiência o valor obtido para a energia de deformação foi igual a 1413.3 o que, quando comparado ao valor obtido na experiência anterior, indica uma maior semelhança entre estes dois objectos.

Tabela 5.8 – Dados utilizados e resultados obtidos na sexta experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.



Para a décima e última experiência, *Tabela 5.12*, considere-se os três contornos de isonível extraídos do objecto original apresentado. Para se determinar as correspondências entre cada par de contornos, utilizaram-se os mesmos parâmetros de modelização das experiências anteriores, a cota de cada contorno como a terceira coordenada para o respectivo elemento, e obtiveram-se emparelhamentos correctos para todos os nodos de cada contorno. As energias de deformação obtidas foram, para o primeiro caso, de 0.0046 e, para o segundo, de 0.0011, traduzindo de forma correcta as diferenças entre cada par de contornos.

Tabela 5.9 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. [Reprodução a cores em anexo.]

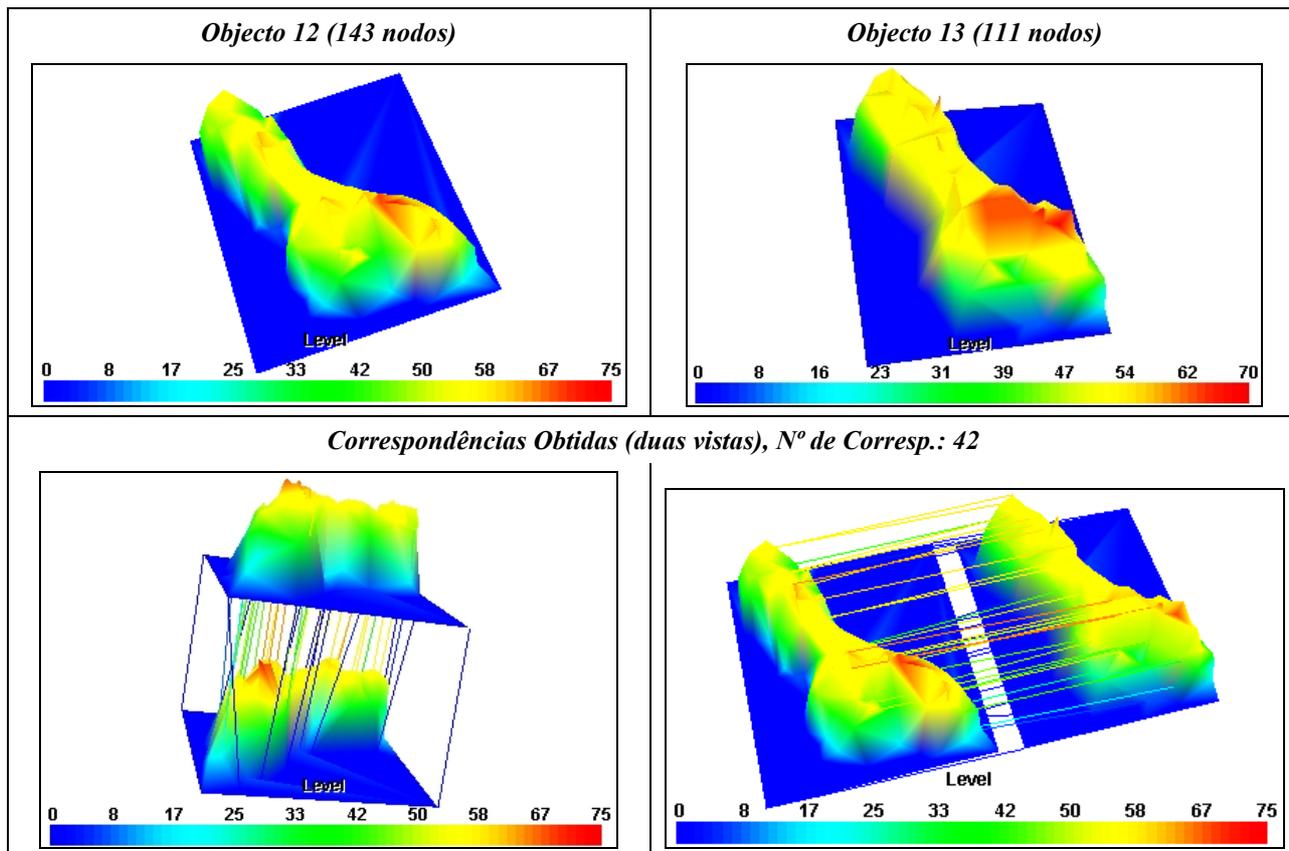


Tabela 5.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. [Reprodução a cores em anexo.]

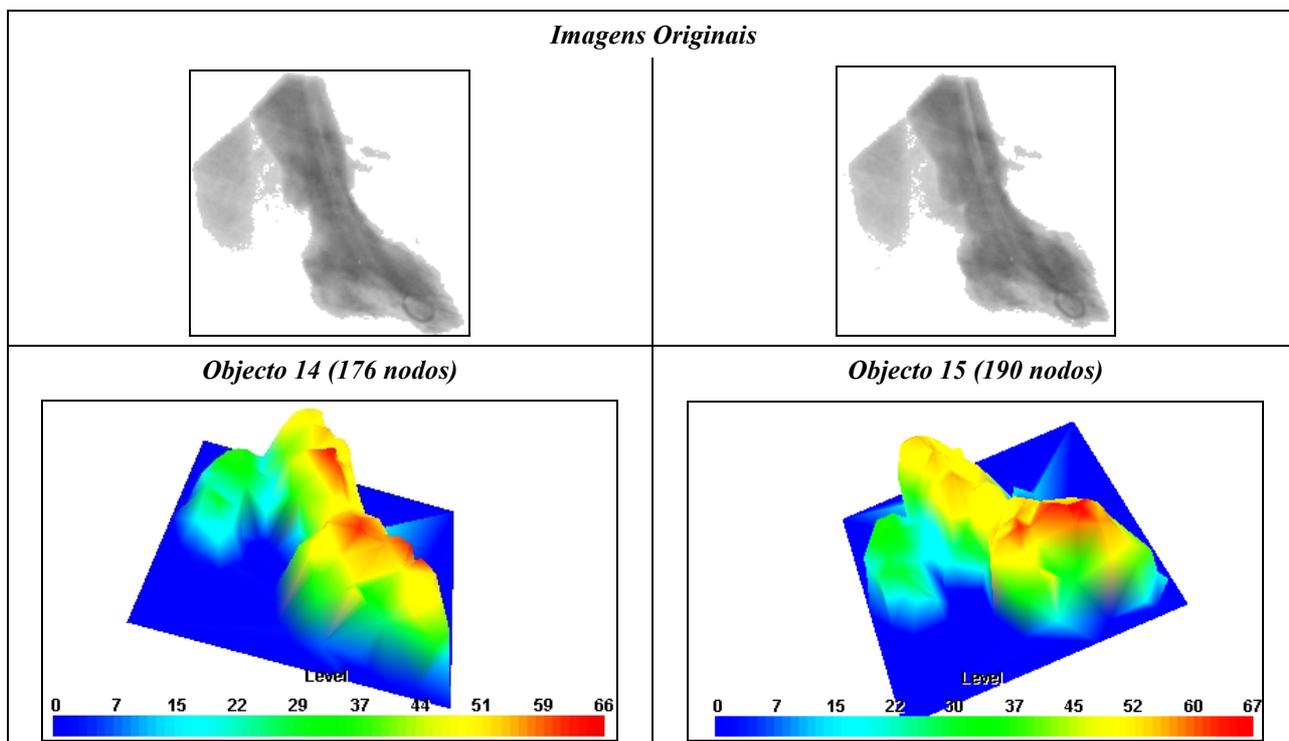


Tabela 5.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (Continuação.)

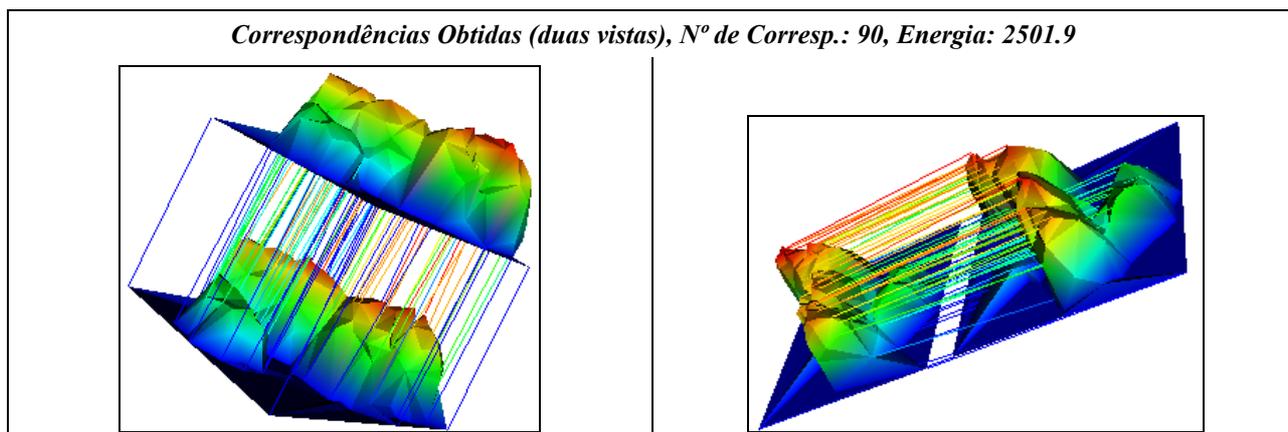
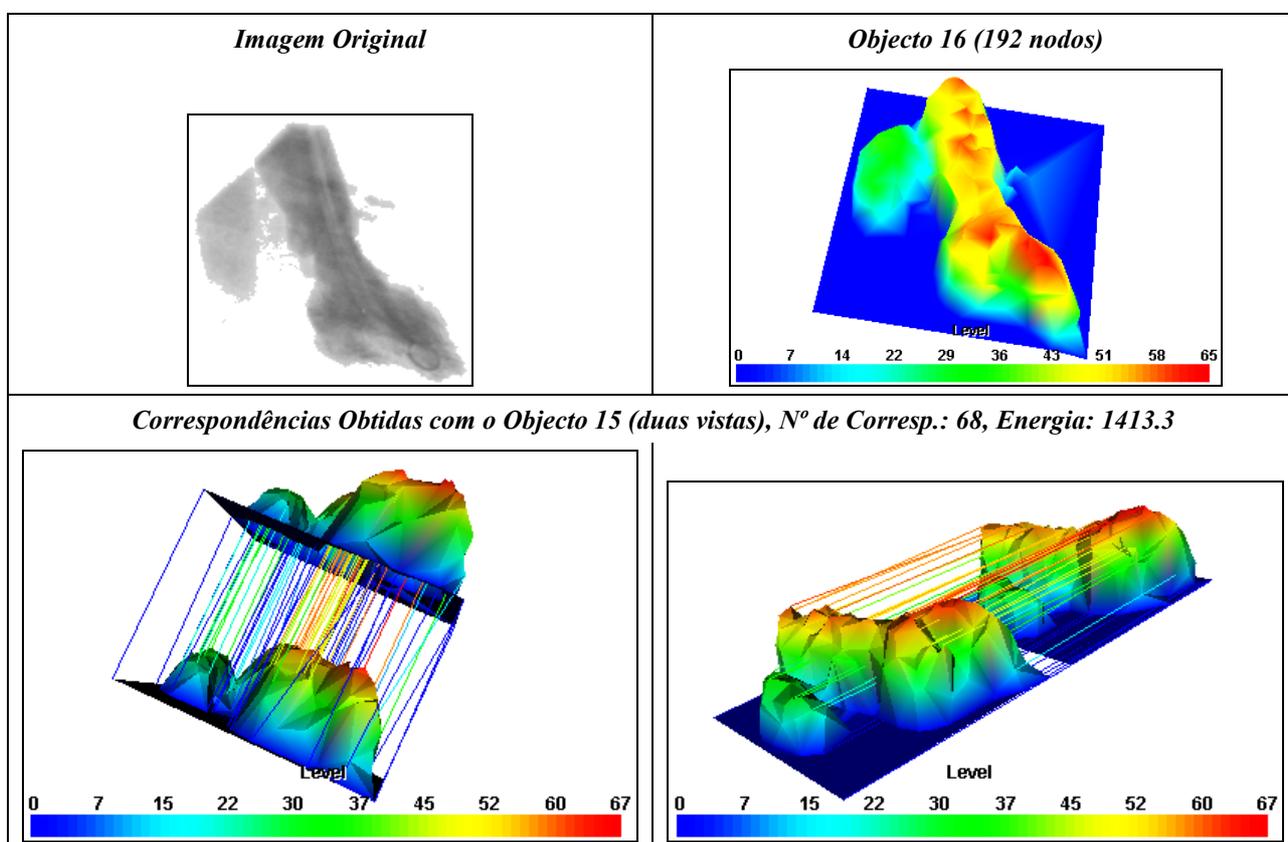


Tabela 5.11 – Dados utilizados e resultados obtidos na nona experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. [Reprodução a cores em anexo.]

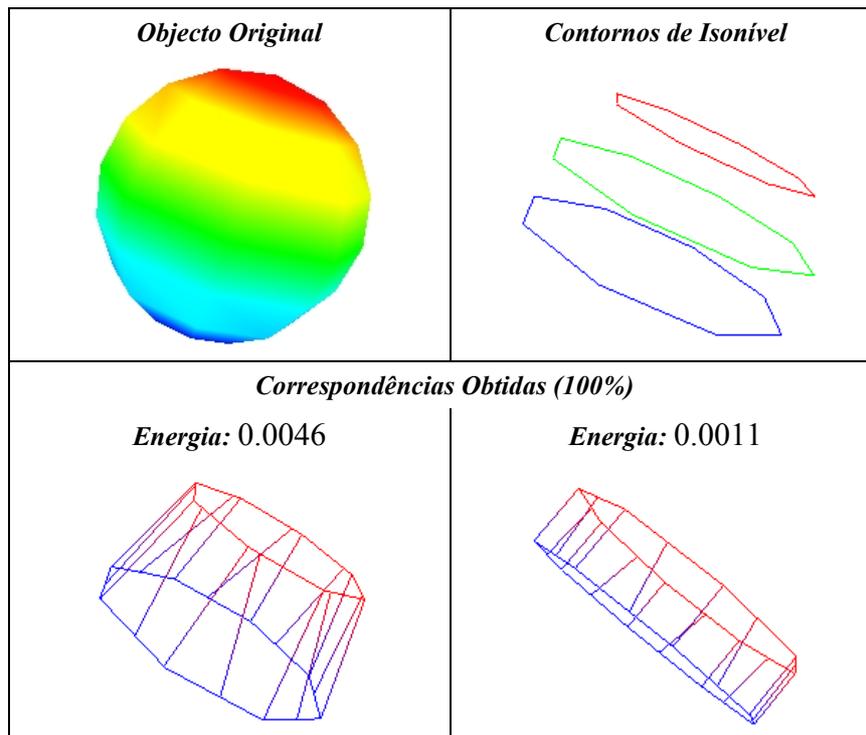


5.4.1.3 – Comentários aos resultados

Os resultados experimentais obtidos¹⁰ na utilização do elemento finito de Sclaroff para a modelização física dos objectos em questão permitem apresentar neste ponto algumas observações:

¹⁰ Outros resultados experimentais podem ser analisados em [Tavares, 1998, 1999, 1999a, 2000, 2000a, 2000b].

Tabela 5.12 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff.



- Essencialmente os modos de baixa frequência estão associados a deformações globais e os de alta frequência a deformações locais;
- A consideração dos modos de alta frequência tem um efeito semelhante ao da inclusão de ruído no objecto final;
- A não inclusão dos modos de alta frequência, em geral favorece a obtenção da melhores emparelhamentos;
- Verificou-se que geralmente a não inclusão dos modos rígidos, os primeiros três em 2D e os seis primeiros em 3D, não favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- Na grande maioria dos casos em que o número de modos é significativo, apenas um reduzido conjunto dos primeiros modos é necessário para se obter bons resultados de emparelhamento;
- Geralmente os resultados determinados para a transformação rígida existente são de boa qualidade, mesmo quando o número de emparelhamentos obtidos é reduzido;
- Quando o número de bons emparelhamentos é significativo, obtém-se uma boa estimativa para os deslocamentos nodais e modais pelo processo de minimização da energia de deformação, e o valor da energia de deformação traduz geralmente de forma aceitável a deformação existente.

5.4.1.3.1 – Influência do parâmetro σ

Considerando os resultados experimentais obtidos para diferentes valores de σ pode-se concluir:

- Se o valor de σ for reduzido, menor do que a distância média entre cada nodo e os seus vizinhos, os elementos da matriz $[G]$ não diagonais são aproximadamente iguais a zero e a matriz é praticamente diagonal; tal implica que o objecto seja demasiado elástico deformando-se em demasia. Para valores de σ mais elevados, os elementos não diagonais da matriz $[G]$ aumentam até que, no limite, para o qual $\sigma \rightarrow \infty$, todos os elementos da matriz $[G]$ são iguais a um. Tal aumento do valor de σ suaviza o objecto final e faz com que este se torne mais rígido: os elementos das matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ aumentam em valor absoluto, as amplitudes dos vectores de forma diminuem, os valores das frequências tornam-se menores, os primeiros modos tendem a assumir o valor nulo e passam a ter valores mais próximos.
- A utilização de valores demasiado reduzidos ou demasiado elevados para os parâmetros σ torna impossível obter-se emparelhamentos aceitáveis.
- Nas várias experiências realizadas durante este trabalho, verificou-se que geralmente são obtidos melhores resultados de emparelhamento utilizando-se em problemas 2D, valores para σ próximos da média da distância entre cada nodo e o seu vizinho seguinte e em problemas 3D, valores sensivelmente iguais a 25% da distância média entre todos os nodos.

5.4.1.3.2 – Influência dos pontos interiores em 2D

Foram realizadas várias experiências de emparelhamento para objectos bidimensionais, nas quais apenas eram considerados os pontos do interior do objecto ou em conjunto com os pontos do contorno. Destas experiências obtiveram-se as mesmas conclusões para a modelização e verificou-se que, geralmente, a inclusão dos pontos interiores não melhora os emparelhamentos obtidos. Este facto comprova que a descrição de um objecto bidimensional através do seu contorno é uma solução bastante adequada.

5.4.1.3.3 – Influência das propriedades do material

No emparelhamento modal foi assumido um material isotrópico de espessura uniforme e ainda que ambos os objectos eram modelados pelo mesmo material.

A formulação utilizada para o elemento finito tem três parâmetros que descrevem o material: densidade ρ , módulo de elasticidade de Young E e coeficiente de Poisson ν . Os dois primeiros escalam uniformemente as matrizes de massa e de rigidez. Alterando estes

parâmetros resulta um escalamento uniforme dos valores próprios; contudo, tal não afecta quer o ordenamento quer a forma dos modos. Sendo assim, a variação de ρ e/ou E não afecta os resultados de emparelhamento obtidos, apesar de ter influência na descrição modal de cada objecto. Contudo, alterando o coeficiente de Poisson a forma dos modos é alterada. Ao longo das experiências realizadas, verificou-se que este terceiro parâmetro controla a resistência do objecto ao corte.

Os três parâmetros utilizados para descrever as propriedades do material virtual influenciam, obviamente, a estimação obtida para os deslocamentos nodais assim como os valores obtidos para a energia de deformação necessária para alinhar dois objectos.

5.4.1.3.4 – Influência do limiar de emparelhamento

Das várias experiências realizadas o valor do limiar usado para considerar um dado emparelhamento como aceitável, não teve influência significativa sobre a qualidade dos emparelhamentos obtidos. Assim, a condição do valor de afinidade do emparelhamento ser mínimo na sua linha e na sua coluna parece ser suficiente para classificar o referido emparelhamento como aceitável ou não. No entanto, este parâmetro pode ser útil nos casos em que apenas se pretendam as correspondências determinadas com um grau muito elevado de afinidade.

5.4.1.3.5 – Robustez à rotação

Como foi descrito, pode-se tornar o emparelhamento e a descrição modal invariante face às rotações planas. Nas experiências feitas verificou-se que o emparelhamento modal é robusto para rotações não planas até $\pm 15^\circ$. De facto, o emparelhamento modal, em vários casos, dá bons resultados mesmo quando a rotação envolvida chega a ser de 45° . Contudo, no geral, as correspondências obtidas tendem a degradar-se para rotações não planas superiores a $\pm 15^\circ$, pois tais rotações alteram radicalmente o aspecto global da forma, o que implica uma alteração da sequência e da forma dos modos de baixa ordem.

Para problemas tridimensionais as observações sobre a rotação existente são semelhantes.

A robustez à rotação não plana poderá ser aumentada se o efeito da rotação sobre a forma do objecto for compensado; por exemplo, utilizando-se apenas as correspondências com elevada afinidade pode-se determinar a rotação e aplicá-la de forma a realizar-se um alinhamento prévio dos dados.

5.4.1.3.6 – Concentrações de nodos

Verificou-se que, em zonas onde ocorrem concentrações de nodos do modelo físico o mesmo se torna mais rígido, funcionando estes nodos como “amarras”, e o número de emparelhamentos obtidos com êxito é geralmente superior. Assim, nos casos para os quais é difícil obter-se emparelhamentos aceitáveis, verificou-se que o aumento da concentração de

nodos nas zonas de elementos característicos, como por exemplo pontos de elevada curvatura, vértices, etc., permitia obter emparelhamentos melhores e em maior número.

5.4.1.3.7 – Consideração da distância ao longo do contorno

Verificou-se que, por vezes, quando se pretende emparelhar os *pixels* que constituem dois contornos e estes apresentam zonas bastante distintas, se obtêm melhores resultados se se diminuir a influência dos *pixels* mais distantes. Isto pode ser conseguido por duas maneiras: diminuindo-se o valor do parâmetro σ , o que implica efeitos globais que podem ser indesejáveis; ou considerar a distância ao longo do contorno, tal como é descrito no ponto 5.2.1.1.4.

5.4.1.3.8 – Robustez ao ruído e a dados perdidos

Das experiências realizadas e também das reportadas por Sclaroff [Sclaroff, 1995, 1995a], conclui-se que o emparelhamento modal é bastante robusto em relação ao ruído. Esta robustez é resultado directo da estabilidade verificada na forma dos modos de baixa ordem na presença de ruído e de deformações não rígidas. Esta propriedade também se verifica quando ocorre a oclusão de pequenas parcelas dos objectos.

5.4.1.3.9 – Limitações do método

Neste ponto são apresentadas algumas limitações à utilização deste tipo de modelização física para determinação de correspondências entre objectos 2D e entre objectos 3D.

Valores próprios múltiplos e simetrias

Por vezes acontece que um par de modos apresenta valores próprios praticamente iguais, o que é particularmente verificado nos modos próprios de baixa ordem de objectos simétricos e de formas homogéneas. Na implementação, tais modos podem ser excluídos para evitar emparelhamentos no subespaço modal; contudo, verificou-se na prática que geralmente tal exclusão não necessita de ser efectuada, a menos que os objectos apresentem simetrias de reflexão evidentes.

Valores próprios múltiplos são indicadores de simetrias. Assim, pode-se utilizar esta informação para detectar quando pode existir mais do que uma correspondência válida para a forma. O caso mais severo de tal ocorrência é o do quadrado, com quatro alinhamentos possíveis, ou o do círculo, com um número infinito de alinhamentos possíveis.

O emparelhamento modal pode ser utilizado para emparelhar objectos espelhados se a formulação invariante à rotação for utilizada. Simetrias de reflexão necessitam de ser tratadas como um caso especial durante a fase de emparelhamento. O alinhamento correcto para um objecto espelhado será aquele que necessita de menos deformação, por não requerer que o

objecto se dobre sobre si mesmo.

No estado actual da implementação realizada as simetrias são resolvidas pela intervenção do utilizador e verifica-se, como seria de esperar, que a influência da correcta determinação do sinal de cada modo nos resultados de emparelhamento é tanto mais importante quanto mais baixa for a frequência do modo.

Topologia e modos de baixa ordem

Se uma mudança na topologia acontecer em grande escala pode, por vezes, afectar de forma adversa a qualidade obtida para o emparelhamento. Tal é devido à alteração, imposta por grandes diferenças da topologia, das formas dos modos de baixa ordem utilizados no emparelhamento modal, fazendo com que seja difícil emparelhar objectos similares mas com topologias diferentes. Por outro lado, diferenças de topologia em pequena escala têm pequena ou nenhuma influência nos modos de baixa ordem e assim, nestes casos, a qualidade obtida no emparelhamento permanece inalterada.

Em geral, se a diferença de topologia entre dois objectos ocorrer numa escala igual ou inferior ao valor do parâmetro σ (por exemplo pequenas fendas ou pequenos buracos), então o emparelhamento modal irá funcionar correctamente: as funções de base são suficientemente largas para suavizar as fendas. Contudo, se as fendas forem largas, o emparelhamento modal necessita de ser complementado com um algoritmo local de determinação de correspondência.

5.4.2 – Elementos axiais lineares

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos pela utilização da modelização física de objectos por intermédio de elementos finitos axiais lineares devidamente agrupados. Em primeiro lugar serão apresentados resultados obtidos na análise modal de vibrações em modo livre de objectos 2D e 3D; seguidamente serão apresentados resultados obtidos na determinação de correspondências, na estimação dos deslocamentos e na utilização da energia de deformação para medir a deformação existente, entre objectos 2D e entre objectos 3D.

Finalmente serão apresentadas alguns comentários aos resultados experimentais obtidos para este tipo de modelização.

5.4.2.1 – Na análise modal

5.4.2.1.1 – Para objectos 2D

Para a primeira experiência, *Tabela 5.13*, considere-se um objecto constituído por 62 *pixels* e proceda-se à sua modelização física utilizando elementos axiais lineares construídos por borracha e de área unitária. Considerando-se os primeiros vinte e cinco, cinquenta, cem e todos os modos de vibração, obtêm-se os objectos representados. Na mesma tabela é também

possível observar-se o objecto resultante quando se consideram os modos de vibração compreendidos entre o modo setenta e cinco e o último.

Como se depreende das figuras apresentadas, os modos de frequências mais elevadas estão essencialmente associados a deformações locais enquanto os modos de mais baixa frequência afectam deformações mais globais.

Para se analisar o efeito do valor da área, considere-se novamente o mesmo objecto original e proceda-se à sua modelização física utilizando elementos finitos axiais também construídos por borracha mas agora de área igual a cinco. Na mesma *Tabela 5.13* estão representados os objectos resultantes da consideração dos primeiros vinte e cinco, cinquenta, e todos os modos de vibração. Comparando estes objectos com os obtidos na experiência anterior verifica-se que, como seria de esperar, o modelo agrupado se tornou mais rígido.

Com a intenção de se verificar o efeito do material virtual, considere-se mais uma vez o mesmo objecto original e proceda-se à sua modelização física utilizando agora elementos finitos axiais construídos por cobre e de área unitária. Considerando-se os primeiros vinte e cinco, cinquenta e todos os modos de vibração, obtêm-se os objectos representados na já referida *Tabela 5.13*. Como seria de esperar o modelo de elementos finitos tornou-se mais rígido, reflectindo a mudança de material (confrontar, por exemplo, os objectos resultantes da consideração de todos os modos de vibração, borracha e cobre para o material virtual).

Tabela 5.13 – Análise modal de um objecto 2D modelizado utilizando elementos finitos axiais lineares agrupados, distintos valores para a área e diferentes materiais.

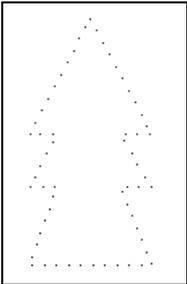
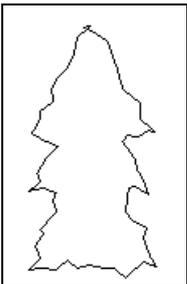
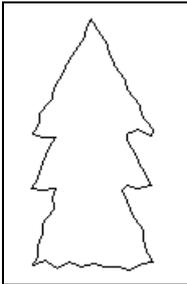
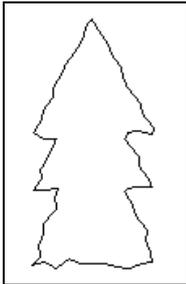
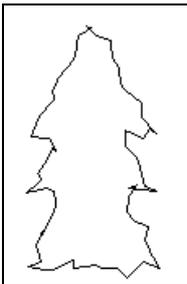
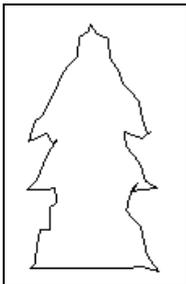
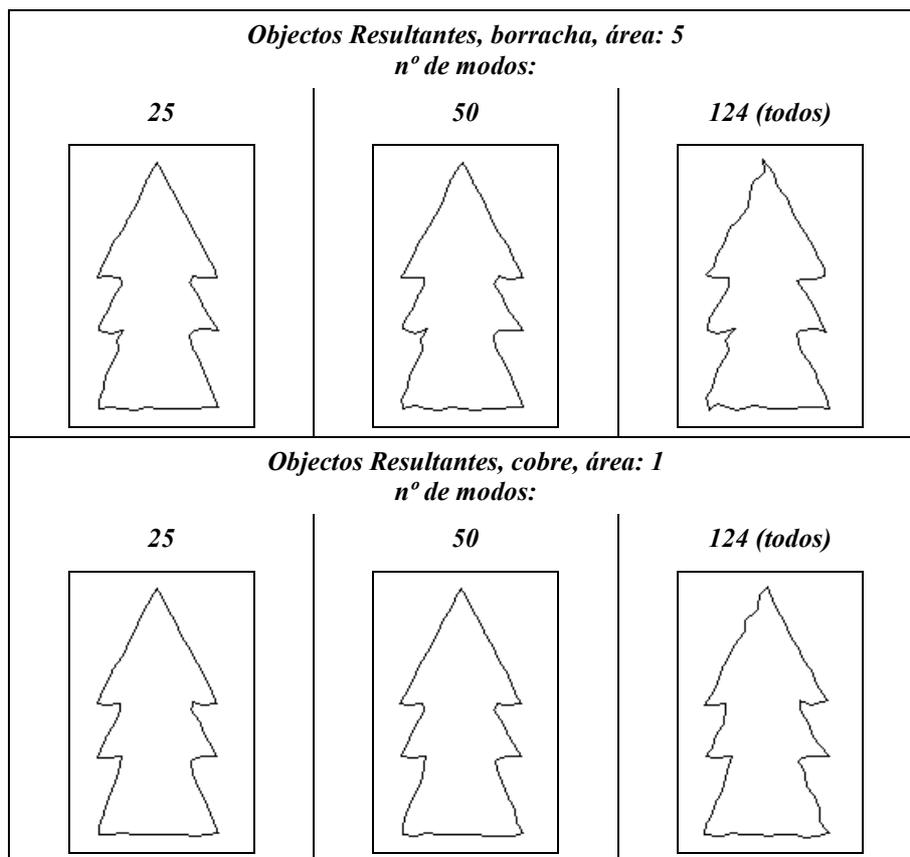
<p>Objecto Original (62 pixels)</p> 	<p>Objectos Resultantes, borracha, área: 1 nº de modos:</p>	
<p>100</p> 	<p>25</p> 	<p>50</p> 
	<p>124 (todos)</p> 	<p>49, a partir do 75</p> 

Tabela 5.13 – Análise modal de um objecto 2D modelizado utilizando elementos finitos axiais lineares agrupados, distintos valores para a área e diferentes materiais. (Continuação.)



Para se analisar o efeito da concentração dos nodos considere-se os objectos 1 e 2 representados na Tabela 5.14 resultantes da amostragem de um mesmo contorno original, em que para o objecto 2 foram conservados os *pixels* de elevada curvatura. Utilizando-se as mesmas condições de modelização e considerando os cinquenta primeiros modos e todos os modos de vibração, foram obtidos os objectos apresentados na referida tabela.

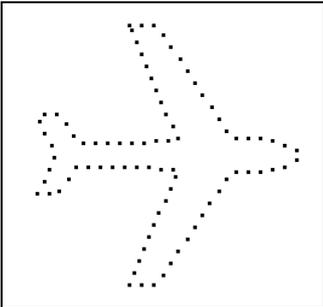
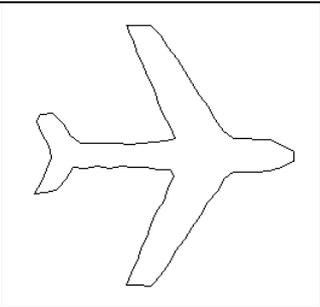
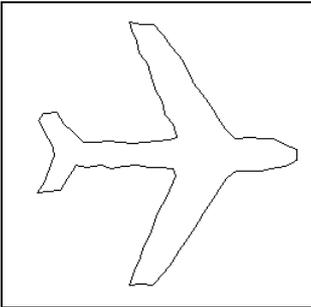
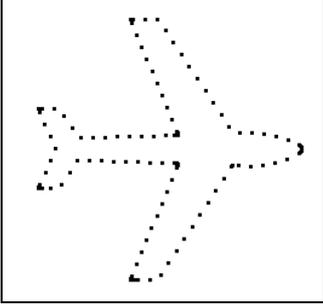
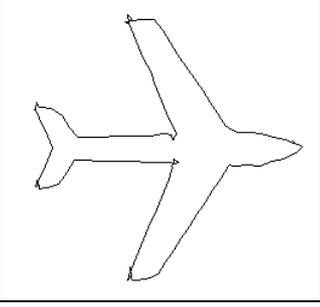
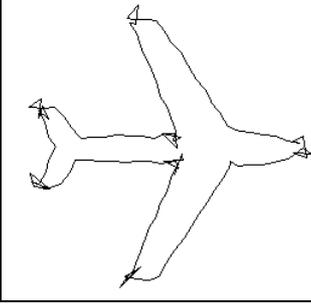
Como se pode observar a partir das figuras apresentadas, a concentração de nodos provoca a ocorrência de deslocamentos demasiado severos, semelhantes a ruído, nas zonas de elevada concentração. Tal efeito pode, como foi verificado ao longo das várias experiências realizadas, originar dificuldades na determinação de correspondências no caso dos objectos apresentarem zonas com diferentes concentrações de nodos.

5.4.2.1.2 – Para objectos 3D

Considere-se o objecto 3D, constituído por 56 nodos, representado na Tabela 5.15 e proceda-se à sua modelização por intermédio de elementos finitos axiais constituídos por borracha e de área unitária. Considerando a soma dos primeiros vinte e cinco, cinquenta e de todos os modos de vibração em modo livre, foram obtidos os objectos representados na referida tabela. Também na mesma tabela está representado o objecto resultante da consideração da soma dos modos compreendidos entre o modo setenta e cinco e o último.

Analisando os objectos obtidos pode-se concluir que o comportamento do modelo 3D é semelhante ao verificado, no ponto anterior, para o modelo 2D: os modos mais baixos estão associados a deformações mais globais e os modos mais altos estão essencialmente associados às deformações locais, que exercem um efeito semelhante ao da inclusão de ruído.

Tabela 5.14 – Verificação do efeito da concentração de nodos na modelização por elementos axiais lineares agrupados.

<p>Objecto original 1</p> 	<p>Objectos Resultantes <i>nº de modos:</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="632 573 960 936"> <p>50</p>  </div> <div data-bbox="983 573 1305 936"> <p>todos</p>  </div> </div>	
<p>Objecto original 2</p> 	<p>Objectos Resultantes <i>nº de modos:</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="632 1030 960 1393"> <p>50</p>  </div> <div data-bbox="983 1030 1305 1393"> <p>todos</p>  </div> </div>	

Para se analisar o efeito da área dos elementos na modelização, considere-se o mesmo objecto original, uma modelização por intermédio de elementos finitos axiais também construídos por borracha, mas desta vez com área igual a cinco. Como seria de esperar o modelo resultante tornou-se mais rígido.

Com a intenção de se verificar o efeito do material virtual adoptado, considerou-se mais uma vez o mesmo objecto original, utilizaram-se elementos finitos axiais de área unitária mas desta feita construídos por cobre. Observando-se os objectos resultantes, considerando os primeiros vinte e cinco modos e todos os modos de vibração, também apresentados na Tabela 5.15, verifica-se que o modelo reflecte o aumento da rigidez do novo material adoptado.

Tabela 5.15 – Análise modal de um objecto utilizando um modelização 3D por agrupamento de elementos axiais lineares, considerando distintos valores para a área e diferentes materiais.

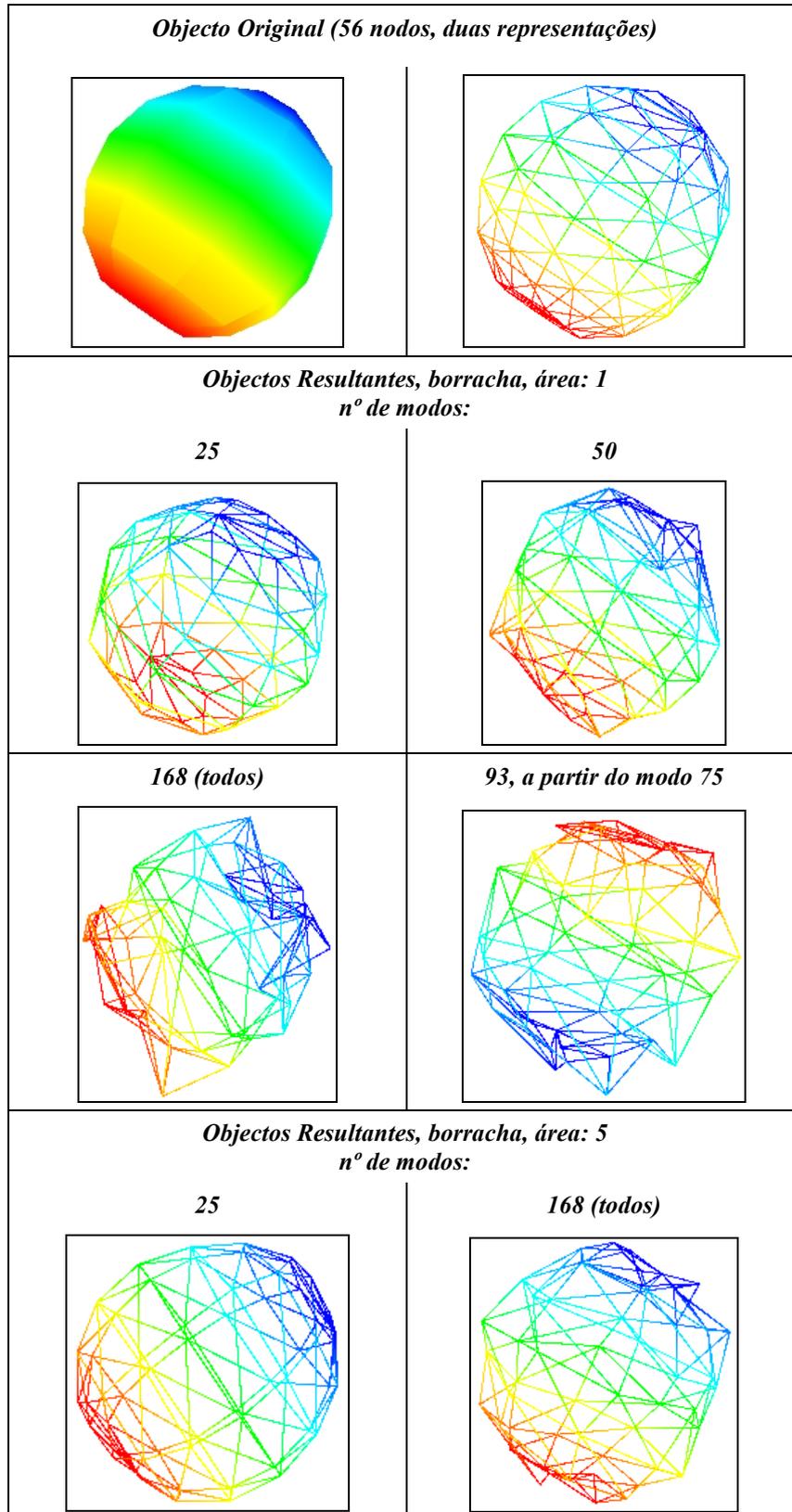
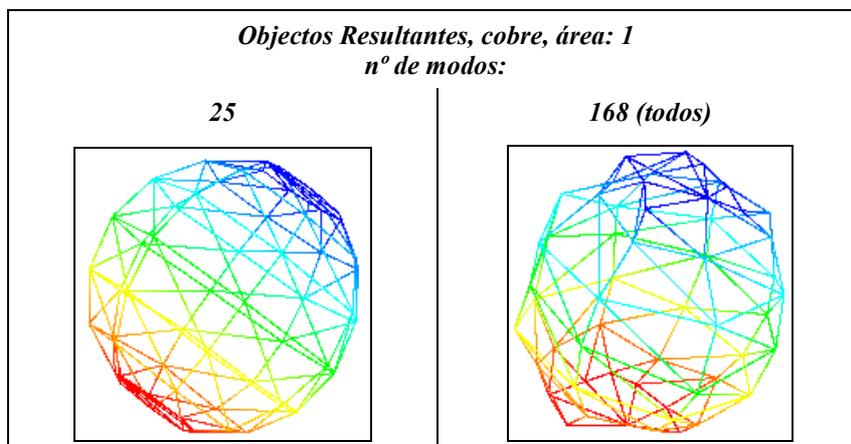


Tabela 5.15 – Análise modal de um objecto utilizando um modelização 3D por agrupamento de elementos axiais lineares, considerando distintos valores para a área e diferentes materiais. (Continuação.)



5.4.2.2 – Na determinação de correspondências

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos na determinação de correspondências, na estimação dos deslocamentos por minimização da energia de deformação e na utilização do valor dessa energia como medida da deformação existente. Em primeiro lugar serão apresentados resultados obtidos considerando-se objectos 2D e, seguidamente, serão apresentados resultados para objectos 3D.

5.4.2.2.1 – Para objectos 2D

Numa primeira experiência, *Tabela 5.16*, considere-se os objectos 1, constituído por 33 *pixels*, e 2, resultante da aplicação ao primeiro de uma transformação rígida constituída por uma rotação de 10° e um escalamento de 0.75 em torno da origem e por uma translação de 90 e 85 *pixels* segundo os eixos *x* e *y*.

Utilizando uma modelização por intermédio de elementos axiais lineares, construídos por borracha e de área unitária, obtém-se 33 (100%) emparelhamentos correctos e uma transformação rígida constituída por uma rotação de 10.05° e um escalamento de 0.75 em torno da origem, e por uma translação de 90.06 e 84.88 *pixels* segundo os eixos *x* e *y*. Na mesma *Tabela 5.16* estão representadas as correspondências obtidas e é possível verificar que estas são correctas e também comprovar a boa qualidade da solução estimada para a transformação rígida existente.

Para a segunda experiência, *Tabela 5.17*, considere-se os objectos 3 e 4, ambos constituídos por 8 *pixels*. Utilizando-se uma modelização idêntica à utilizada na experiência anterior obtiveram-se 100% de emparelhamentos correctos.

Numa terceira experiência, *Tabela 5.18*, considere-se os objectos 5 e 6, ambos constituídos por 5 *pixels*. Utilizando-se uma modelização idêntica à utilizada nas experiências anteriores

obtiveram-se 4 emparelhamentos, sendo facilmente verificado que apenas um está correcto. No entanto, passando-se a considerar na modelização de cada contorno a ligação, por intermédio de elementos axiais, de cada nodo com os dois nodos seguintes obtém-se 5 (100%) emparelhamentos correctos. Na referida *Tabela 5.18* estão visíveis as ligações consideradas nesta modelização e os emparelhamentos obtidos.

Esta experiência torna evidente que em algumas situações é possível obter melhores resultados de emparelhamento utilizando ligações suplementares entre os nodos do objecto. A utilização destas ligações suplementares aumenta a rigidez do modelo e torna-o mais estável.

Tabela 5.16 – Dados utilizados e resultados obtidos na primeira experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

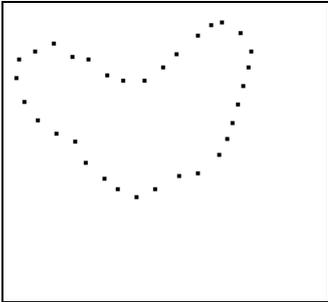
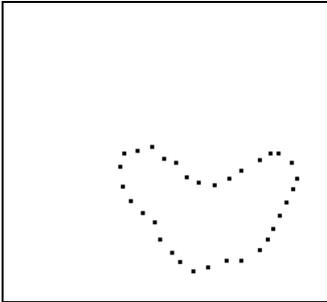
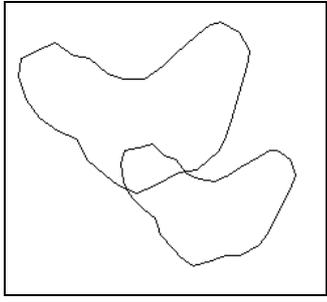
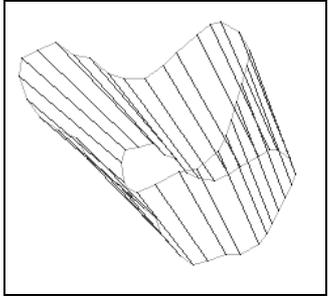
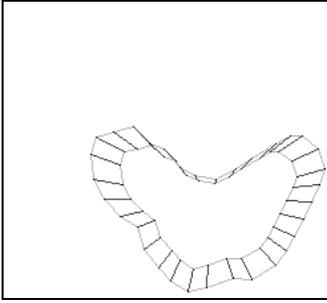
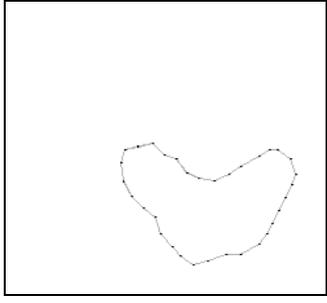
<p>Objecto 1 (33 pixels)</p> 	<p>Objecto 2 ($t_x=90$, $t_y=85$, $\theta=10^\circ$, $s=0.75$)</p> 	<p>Objectos Sobrepostos (pixels ligados)</p> 
<p>Correspondências Obtidas, N° de Corresp.: 33 (100%)</p>		
	<p>(rotação e translação aplicadas)</p> 	<p>(transformação rígida aplicada)</p> 

Tabela 5.17 – Dados utilizados e resultados obtidos na segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

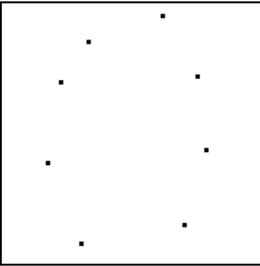
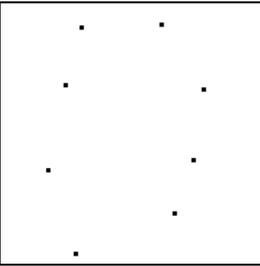
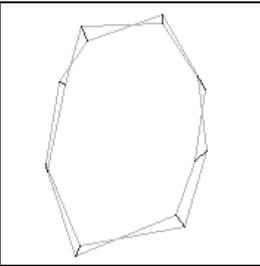
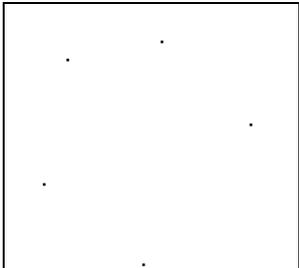
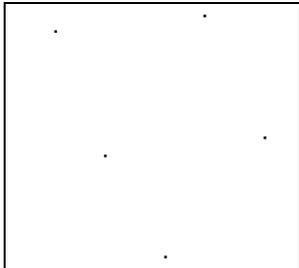
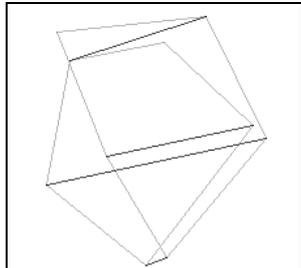
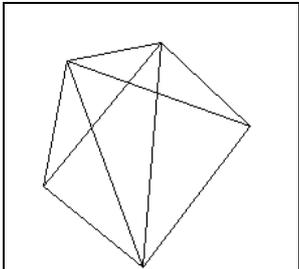
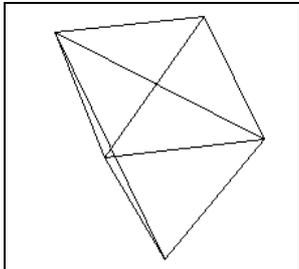
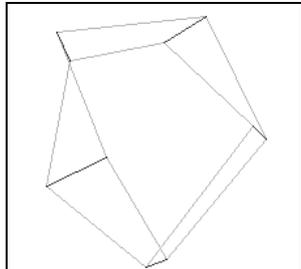
<p>Objecto 3 (8 pixels)</p> 	<p>Objecto 4 (8 pixels)</p> 	<p>Correspondências Obtidas N° de Corresp.: 8 (100%)</p> 
--	--	--

Tabela 5.18 – Dados utilizados e resultados obtidos na terceira experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

<p>Objecto 5 (5 pixels)</p> 	<p>Objecto 6 (5 pixels)</p> 	<p>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 4</p> 
<p>Modelização c/2 Ligações entre Nodos</p>		
<p>Objecto 5</p> 	<p>Objecto 6</p> 	<p>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 5</p> 

Para a quarta experiência, primeira para objectos reais, considere-se os objectos 7 (33 pixels) e 8 (31 pixels), Tabela 5.19. Utilizando novamente uma modelização com ligações simples entre nodos e com elementos axiais construídos por borracha e de área unitária, obtiveram-se 27 emparelhamentos que, por análise visual, podem ser considerados como satisfatórios, e um valor para a energia de deformação igual a 0.0056.

Considere-se para a quinta experiência, Tabela 5.19, os objectos 9 (39 pixels) e 10 (49 pixels). Utilizando o mesmo tipo de modelização da experiência anterior obtiveram-se 23 emparelhamentos que, por análise visual, na sua grande maioria podem ser considerados como satisfatórios, e um valor para a energia de deformação igual a 0.0158 que, quando comparado com o valor obtido na experiência anterior, traduz de forma correcta a maior diferença entre estes dois objectos.

Para a sexta experiência, Tabela 5.20, considere-se os objectos 11 e 12, constituídos por 25 pixels, e uma modelização idêntica às anteriores. Nestas condições obtêm-se 25 (100%) emparelhamentos correctos e valor para a energia de deformação igual a 0.0023.

Na sétima experiência, Tabela 5.20, considere-se novamente o objecto 12 mas desta feita o objecto 13 (35 pixels). Utilizando-se uma modelização semelhante às anteriores obteve-se 22 emparelhamentos satisfatórios e um valor para a energia de deformação igual a 0.0222. Este valor para a energia, quando comparado com o obtido na experiência anterior, traduz fielmente as diferenças existentes entre as formas dos objectos em questão.

Tabela 5.19 – Dados utilizados e resultados obtidos na quarta e na quinta experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

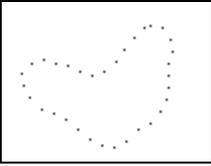
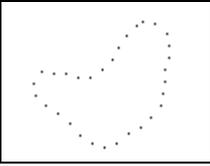
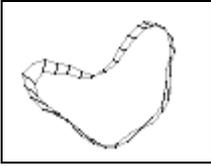
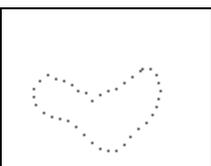
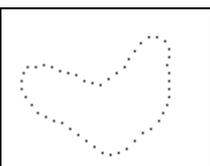
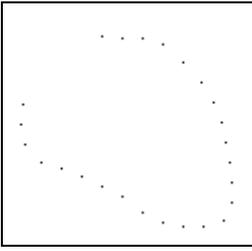
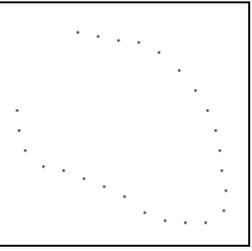
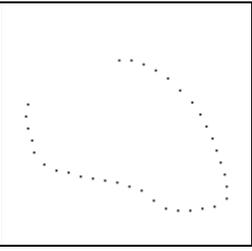
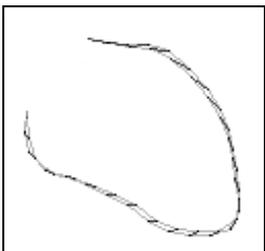
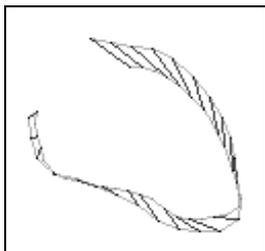
<p>Objecto 7 (33 pixels)</p> 	<p>Objecto 8 (31 pixels)</p> 	<p>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 27, Energia: 0.0056</p> 
<p>Objecto 9 (39 pixels)</p> 	<p>Objecto 10 (49 pixels)</p> 	<p>Correspondências Obtidas Nº de Corresp.: 23, Energia: 0.0158</p> 

Tabela 5.20 – Dados utilizados e resultados obtidos na sexta e na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

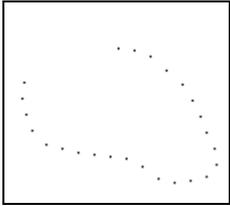
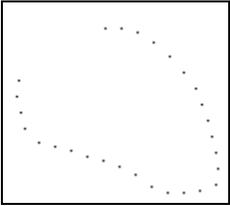
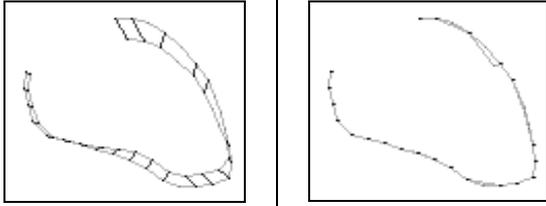
<p>Objecto 11 (25 pixels)</p> 	<p>Objecto 12 (25 pixels)</p> 	<p>Objecto 13 (35 pixels)</p> 
<p>Correspondências Obtidas</p>		
<p>Objectos 11 e 12 Nº de Corresp.: 25 (100%), Energia: 0.0023</p> 		<p>Objectos 12 e 13 Nº de Corresp.: 22, Energia: 0.0222</p> 

Na oitava e última experiência para objectos 2D, Tabela 5.21, considere-se os objectos 14 (25 pixels) e 15 (28 pixels). Utilizando-se uma modelização em que cada nodo foi ligado, por intermédio de elementos axiais de borracha e de área unitária, aos dez nodos seguintes obtiveram-se 22 emparelhamentos. Recorrendo a uma análise visual, os emparelhamentos obtidos podem ser classificados como bastante satisfatórios. Na mesma Tabela 5.21 é possível observar os emparelhamentos obtidos após aplicação ao objecto 14 dos deslocamentos nodais estimados, e concluir que estes deslocamentos apresentam uma qualidade satisfatória.

Nesta experiência também foram utilizadas modelizações com menos ligações entre nodos;

no entanto os deslocamentos nodais estimados eram de qualidade inferior. Tal facto também sugere que em certos problemas é conveniente utilizar modelos mais estáveis, através da utilização de ligações suplementares entre nodos.

Tabela 5.21 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

<p>Objecto 14 (25 pixels)</p> 	<p>Objecto 15 (28 pixels)</p> 	<p>Correspondências Obtidas, N° de Corresp.: 22 (deslocamentos nodais estimados aplicados)</p> 	
--	--	--	--

5.4.2.2.2 – Para objectos 3D

Considere-se para a nona experiência e primeira para objectos 3D, Tabela 5.22, os objectos 16 e 17, constituídos por 25 nodos, sendo o segundo objecto obtido a partir do primeiro por aplicação de uma transformação rígida constituída por uma rotação de -5° , 5° e 10° em torno dos eixos x , y e z do referencial centrado na origem, um escalamento de 1.25 em relação ao mesmo referencial e uma translação de -1 , 1 e 0.5 ao longo dos eixos x , y e z . Utilizando-se uma modelização física com ligações, por intermédio de elementos axiais lineares de borracha e área unitária, simples entre nodos obtiveram-se 25 (100%) emparelhamentos correctos.

Para a décima experiência, Tabela 5.23, foram utilizados os objectos 18 (21 nodos), resultante da aplicação de uma amostragem adaptativa da imagem original apresentada, e 19, resultante da aplicação ao primeiro de uma rotação de 15° em torno do eixo z passante pelo seu centróide, um escalamento de 1.25 em torno do mesmo ponto e uma translação de 80 segundo o eixo z . Utilizando uma modelização semelhante à utilizada na experiência anterior obtiveram-se 21 (100%) emparelhamentos correctos e um valor para a energia de deformação igual a 0.1266.

Considere-se para a décima primeira experiência, Tabela 5.23, novamente o objecto 18 da experiência anterior mas desta feita o objecto 20 obtido a partir da aplicação ao primeiro de uma rotação de 15° em torno do eixo z passante pelo seu centróide, um escalamento de 1.5 em torno do mesmo ponto e uma translação de 80 segundo o eixo z . Utilizando-se uma modelização idêntica às anteriores, obtiveram-se 21 (100%) emparelhamentos correctos e um valor para a energia de deformação igual a 0.4084. Comparado este valor com o obtido na experiência anterior verifica-se que a energia de deformação traduz correctamente a maior diferença entre estes dois objectos provocada pelo diferente escalamento.

Tabela 5.22 – Dados utilizados e resultados obtidos na nona experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados. [Reprodução a cores em anexo.]

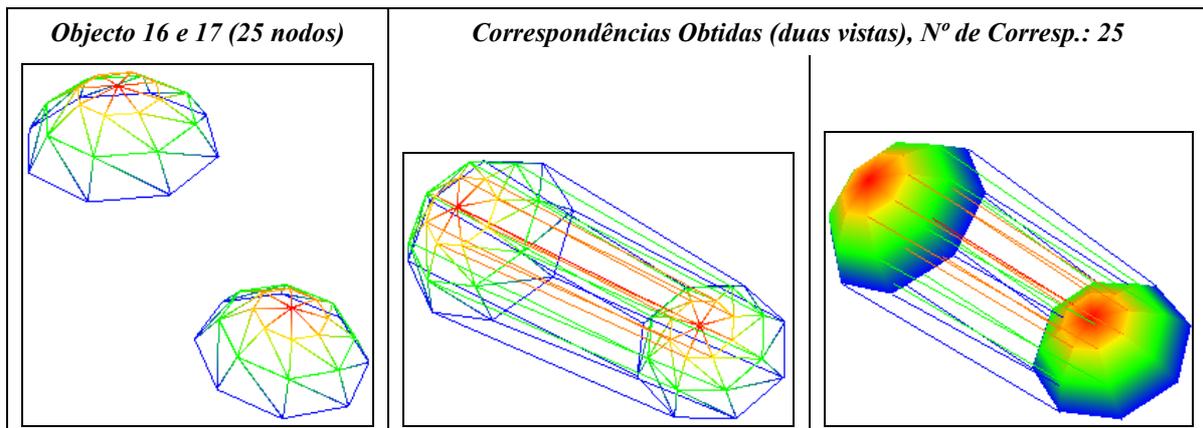
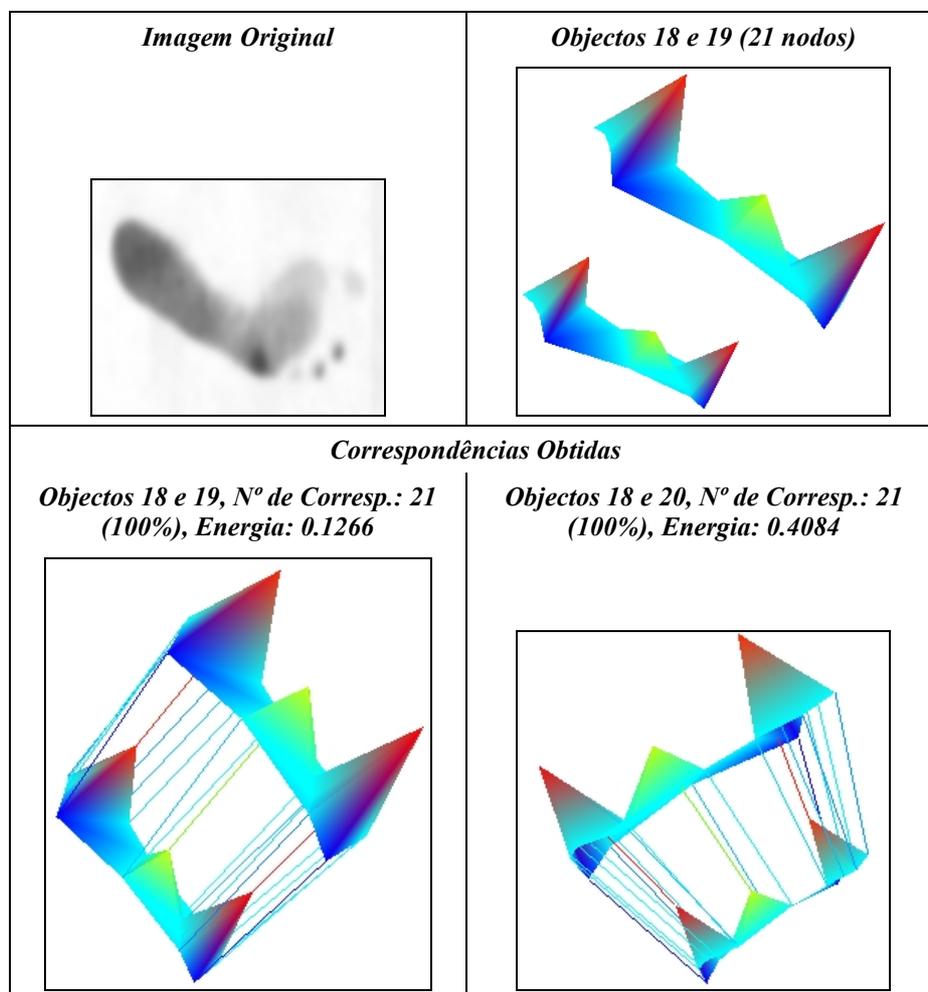


Tabela 5.23 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima e na décima primeira experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

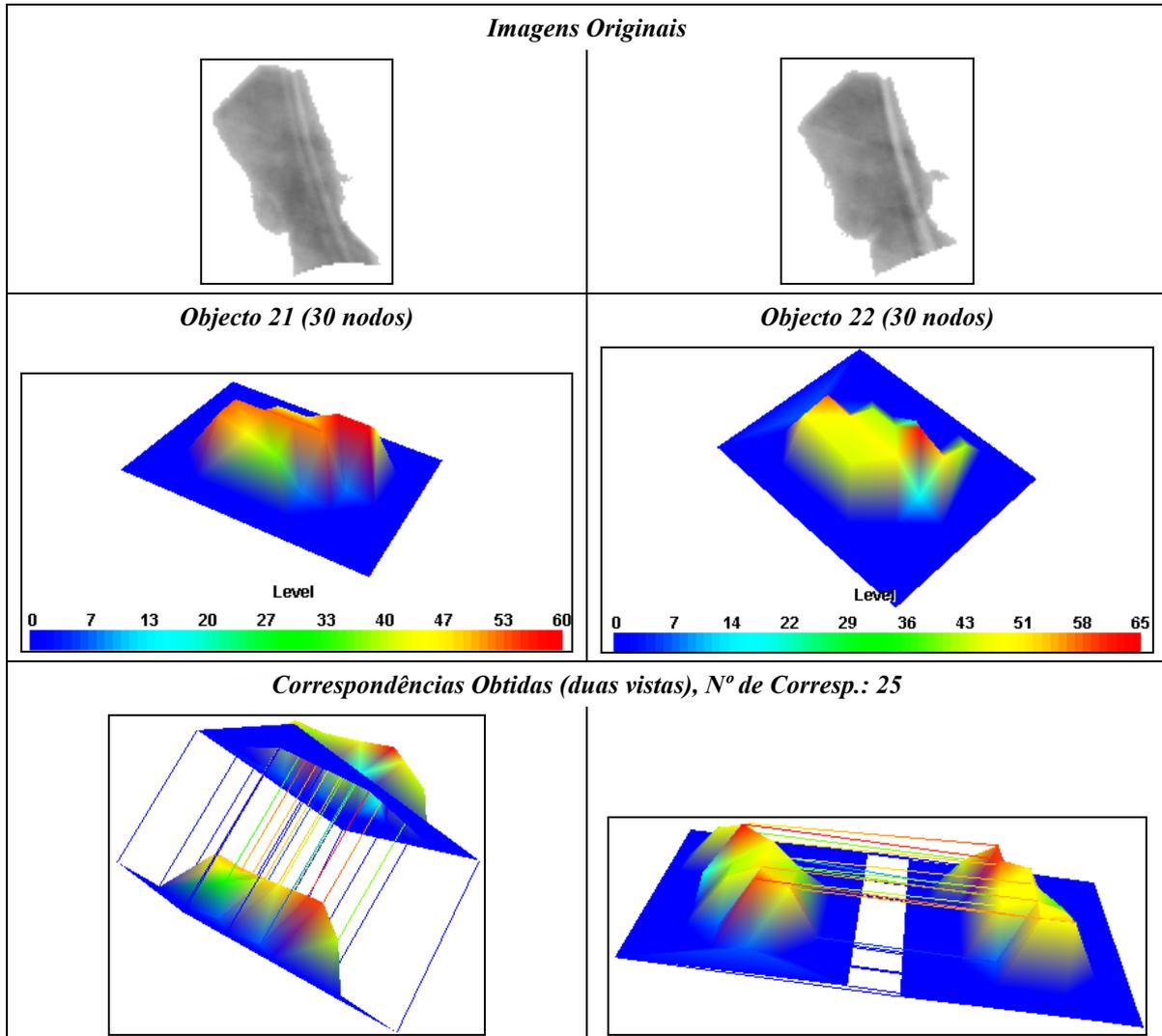


Utilizando-se os objectos 21 e 22 representados na Tabela 5.24, ambos constituídos por 30 nodos e construídos a partir das imagens originais representadas, realizou-se uma décima segunda experiência. Com uma modelização por elementos finitos também construídos por borracha mas desta vez considerando-se área igual a mil (valor arbitrado) obtiveram-se 25

emparelhamentos que, recorrendo-se a uma análise visual, podem ser considerados como bastante satisfatórios, concluindo-se que o parâmetro área não tem efeito na qualidade dos emparelhamentos.

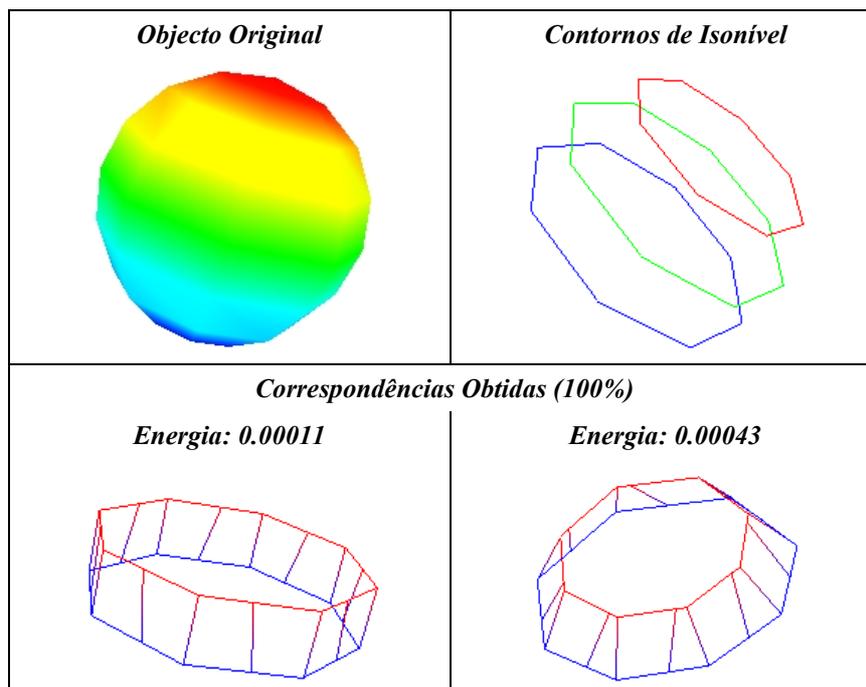
Tabela 5.24 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados.

[Reprodução a cores em anexo.]



Considerando três contornos de isonível, constituídos por 16 nodos e determinados a partir do objecto original representado, foi realizada uma última experiência, *Tabela 5.25*. Com uma modelização 3D (a cota de cada contorno foi considerada como a terceira coordenada dos respectivos nodos) considerando elementos de área unitária e construídos por borracha, obteve-se 100% de emparelhamentos correctos para cada par de contornos. O valor da energia de deformação obtido entre os contornos mais semelhantes foi igual a 0.00011 e entre os mais distintos foi igual a 0.00043, verificando-se assim que esta energia traduz correctamente as similaridades existentes.

Tabela 5.25 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima terceira experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos finitos axiais lineares agrupados.



5.4.2.3 – Comentários aos resultados

Os resultados experimentais¹¹ obtidos na determinação de correspondências entre objectos utilizando o método modal com modelização física por intermédio de conjuntos de elementos finitos axiais lineares devidamente agrupados permite concluir:

- É possível obter-se bons resultados de emparelhamento quando a deformação entre os objectos é apenas do tipo rígido.
- É possível obter-se resultados de emparelhamento satisfatórios quando a deformação não rígida existente entre os dois objectos é reduzida.
- Geralmente obtêm-se melhores resultados quando a amostragem dos objectos não é muito fina, é regular e de número idêntico de nodos.
- A não inclusão dos modos de mais alta frequência, em geral, favorece a obtenção de melhores emparelhamentos.
- Geralmente a não inclusão dos modos rígidos, os três primeiros em 2D e os seis primeiros em 3D, não favorece os resultados de emparelhamento obtidos.

¹¹ Outros resultados experimentais podem ser analisados em [Tavares, 1998a, 1999, 2000, 2000a].

- A não consideração em cada base modal dos modos de vibração que tenham frequências praticamente iguais geralmente favorece os resultados de emparelhamento obtidos.
- Tendo-se optado por modelizar os dois objectos a emparelhar com o mesmo material virtual, verificou-se ao longo das várias experiências efectuadas que, geralmente, as propriedades definidas para o material não afectam os resultados obtidos para o emparelhamento. Contudo, estas propriedades afectam grandemente a estimação dos deslocamentos nodais obtida por minimização da energia de deformação assim como o valor determinado para esta energia.
- Nas várias experiências realizadas optou-se por modelizar os dois objectos a emparelhar utilizando-se o mesmo valor para a área dos elementos e verificou-se que, com este procedimento, tal valor não afecta os resultados obtidos para o emparelhamento. No entanto, este valor afecta a estimação dos deslocamentos nodais e o valor da energia de deformação.
- O valor do limiar para considerar um dado emparelhamento como aceitável geralmente não tem influência sobre a qualidade dos emparelhamentos obtidos. Assim, mais uma vez, a condição do valor de afinidade do emparelhamento ser mínimo na sua linha e na sua coluna parece ser suficiente para classificar o referido emparelhamento como aceitável ou não.
- Quando o número de bons emparelhamentos obtidos é significativo obtém-se uma estimativa razoável para os deslocamentos nodais e modais pelo processo de minimização da energia de deformação, e o valor da energia de deformação traduz geralmente de forma aceitável a deformação existente.

Como foi verificado, este método não produz bons resultados de emparelhamento quando a deformação não rígida existente entre os dois objectos a emparelhar for considerável. Tal incapacidade está associada à relativa facilidade com que os modelos resultantes entram em instabilidade. De facto, verifica-se que em alguns casos se obtêm melhores resultados se se passar a utilizar ligações suplementares entre os nodos do objecto; por exemplo, ligando por intermédio de elementos finitos axiais cada nodo a um determinado conjunto de nodos vizinhos ou então, maximizando-se a rigidez do conjunto, ligando todos os nodos do objecto entre si. Com este conjunto de ligações suplementares aumenta-se a estabilidade dos modelos.

Outra solução para resolver os casos em que deformação não rígida existente for considerável é dividir o problema original em duas fases: na primeira, são determinadas as correspondências por um outro qualquer processo; na segunda, e desde que o número de emparelhamentos seja elevado, são determinados os deslocamentos por minimização da energia de deformação e é determinado o valor desta energia. Em [Tavares, 1997a] os

emparelhamentos são determinados utilizando a técnica modal da forma, apresentada na quarta secção do terceiro capítulo, e os deslocamentos e o valor da energia de deformação são calculados utilizando esta modelização, obtendo-se resultados bastante satisfatórios.

5.5 – Sumário

Neste capítulo foram descritos os dois tipos de modelização física utilizados para objectos 2D e 3D. O primeiro utiliza um único elemento finito isoparamétrico de Sclaroff para modelizar cada um dos objectos; no segundo são utilizados elementos finitos axiais lineares, agrupados de maneira a obter-se o modelo físico global.

Foram também descritas as técnicas utilizadas para se determinar os nodos de cada objecto nas imagens originais. Os objectos que mereceram destaque foram os do tipo contorno e os do tipo superficial.

Enquanto que nas modelizações por intermédio do elemento finito de Sclaroff os nodos são totalmente envolvidos por uma película elástica, obtendo-se modelos com o seu interior totalmente preenchido pelo material virtual, nas modelizações por intermédio de elementos finitos axiais agrupados os modelos resultantes apenas são constituídos por lados (os elementos elásticos dimensionais), obtendo-se assim modelos “ocos” mais simples. Neste segundo caso, os modelos obtidos são geralmente mais flexíveis e menos densos o que, de certo modo, é mais conforme com o intuitivamente esperado para objectos do tipo contorno.

Após a descrição da construção dos modelos foram apresentados alguns resultados experimentais obtidos para a análise de vibração em modo livre de objectos, para a determinação de correspondências entre objectos, para estimativa dos deslocamentos nodais, e para utilização da energia de deformação para medida da deformação existente entre dois objectos.

Verifica-se que a modelização por intermédio do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff geralmente obtém resultados satisfatórios, e que a modelização por intermédio do agrupamento de elementos finitos axiais obtém melhores resultados se as deformações não rígidas entre os dois objectos forem reduzidas. A inadequação da modelização por intermédio de elementos finitos axiais lineares, no caso de deformações não rígidas elevadas, deve-se à facilidade com que os mesmos entram em instabilidade; tal pode ser evitado aumentando a rigidez do sistema global através da utilização de ligações suplementares entre os nodos.

Os valores determinados para a energia de deformação traduzem, geralmente, de forma correcta as deformações existentes entre os objectos e, caso as correspondências obtidas sejam em número significativo, os deslocamentos nodais estimados apresentam-se consistentes com o esperado.

No caso de objectos bidimensionais, foram realizadas várias experiências nas quais também se considerava na modelização os pontos do interior dos objectos. No entanto, os

resultados eram semelhantes aos obtidos considerando-se apenas os pontos dos seus contornos, pelo que a descrição de um objecto bidimensional por intermédio do seu contorno é adequada.

Com os resultados obtidos, verifica-se que a modelização física dos objectos dá aos modelos um significado intuitivo, governado pelas propriedades elásticas do material virtual adoptado, em contraste com a descrição puramente estatística dos métodos descritos no terceiro capítulo.

O emparelhamento modal apresenta limitações em casos em que ocorre a oclusão, fusão ou divisão de parcelas dos objectos, pois os modos próprios não podem ser utilizados para emparelhar parcelas de um objecto com o objecto global. Por exemplo, será difícil identificar uma pessoa utilizando-se apenas os dados da metade superior da silhueta, pois os modos da metade de uma forma podem ser bastante diferentes dos modos da forma completa. Para se resolver este problema o algoritmo de emparelhamento necessita de utilizar alguma combinação das medidas globais (modal) com medidas locais (características) de maneira a emparelhar sub-estruturas distintas de um mesmo objecto.

Para o problema da fusão ou divisão de parcelas de um objecto, a modelização tridimensional de objectos 2D (tomando-se a intensidade de um *pixel* como a sua cota relativamente a um plano de referência), proporciona uma solução adequada, como se verificou em problemas de pedobarografia dinâmica.

Capítulo VI

PLATAFORMA DE DESENVOLVIMENTO E ENSAIO

No decurso desta tese foi criada, expandida e utilizada uma plataforma de desenvolvimento e ensaio para o processamento e análise de imagem. Esta plataforma, desenvolvida em linguagem C++ no sistema integrado de desenvolvimento *Microsoft Visual C++* para sistemas operativos *Microsoft Windows 95/98/NT/2000*, obedece a uma filosofia que permite que a mesma seja, por si só, uma aplicação para o processamento e análise de imagem, mas também um sistema base no qual outros investigadores possam desenvolver, ensaiar e integrar os seus próprios algoritmos.

Neste capítulo é apresentada a plataforma de desenvolvimento e ensaio criada, sendo enumeradas as bibliotecas de domínio público incorporadas, descritas as entidades suportadas, apresentada a sua interface, relatado o processo de integração de uma nova função e apresentadas algumas das operações disponíveis, quer as de âmbito geral quer as de âmbito mais directamente relacionado com o tema desta tese.

6.1 – Introdução

Um dos objectivos principais desta tese foi a construção de um banco de ensaios com ferramentas variadas que permitisse o estudo detalhado de diversos métodos de modelização de objectos deformáveis.

O carácter fechado da maior parte das aplicações existentes para processamento e análise de imagem, bem como o propósito de incorporar as metodologias desenvolvidas nesta tese num sistema de acesso e uso fáceis, conduziu a que se tenha resolvido desenvolver um novo sistema que, além de permitir a implementação e ensaio dos métodos desenvolvidos no âmbito do trabalho, fosse, por si só, uma aplicação genérica de processamento e análise de imagem, e um sistema aberto para outros investigadores desenvolverem, ensaiarem e incorporarem os seus algoritmos.

A linguagem seleccionada para o desenvolvimento da aplicação foi *C/C++* [Stroustrup, 1995] em ambiente *Microsoft Visual C++* [Young, 1998]. A opção por esta linguagem deveu-se essencialmente à sua larga disseminação, robustez, modularidade, eficiência, facilidade de manutenção, à existência de alguns algoritmos já implementados nesta linguagem e que poderiam ser facilmente reutilizados, à existência de algumas bibliotecas de domínio público, implementadas nesta linguagem, que poderiam ser incorporadas, etc. A escolha do ambiente de programação foi essencialmente devida à estreita relação entre este e os sistemas operativos alvo da aplicação: os sistemas *Microsoft Windows 95/98/NT/2000*.

Para a estrutura a utilizar entendeu-se que uma solução adequada seria considerar a plataforma como um conjunto de módulos; assim, existe um módulo principal, ou base, que contém as funções básicas necessárias a um qualquer sistema mínimo de processamento e análise de imagem e outros módulos que disponibilizam funções mais específicas a determinada aplicação. Esta estrutura modular facilita a manutenção e a integração de novas funções.

A acessibilidade por parte do utilizador aos módulos mais específicos, e às funções que os constituem, é possível por configuração da aplicação. Esta configuração, ao nível dos menus e das barras de ferramentas, pode ser realizada durante a execução e permite ajustar o sistema a diferentes tipos de utilizadores e aplicações.

Uma vantagem da plataforma desenvolvida está relacionada com a capacidade de controlo das operações incorporadas, por meio da especificação detalhada de parâmetros, e visualização adequada dos resultados obtidos, o que permite o ensaio pormenorizado dos métodos utilizados. Outra vantagem que o sistema apresenta é a integração modular e transparente de funções orientadas para o processamento e análise de imagem, para o tratamento de sequências de imagens (de movimento e/ou de deformação), e de ferramentas de computação (e visualização) gráfica.

Na fase actual da plataforma já foram integradas múltiplas contribuições de outros investigadores, nomeadamente: para a leitura e escrita de imagens com formato diferente do *Bitmap*, [Pinto, 1999]; para a escrita em ficheiro dos parâmetros opcionais para as funções disponíveis, para a sua leitura a partir de ficheiros, para o seu armazenamento no fim de cada execução da plataforma e posterior recuperação no início de cada execução [Vieira, 1999]; para a segmentação de imagens utilizando contornos activos (ver segundo capítulo) [Barbosa, 1996; Vieira, 1999]; para a determinação dos pontos de um contorno sobre uma grelha rectangular [Vieira, 1999]; para o mecanismo de configuração da plataforma [Vieira, 1999]. Este esforço distribuído tem permitido aumentar rapidamente a funcionalidade do sistema, tendo-se verificado que a integração de novas funções é bastante fácil.

Desde há algum tempo a plataforma tem vindo a ser utilizada como sistema de demonstração em cursos de processamento e análise de imagem, e vários alunos, de licenciatura e de mestrado, têm-na utilizado como sistema base para o desenvolvimento e ensaio dos seus algoritmos. Este tipo de uso tem vindo a comprovar o valor do sistema em contexto de aprendizagem e a demonstrar a facilidade com que novas funcionalidades podem ser integradas.

Nas secções seguintes serão identificadas as bibliotecas de domínio público incorporadas na plataforma, apresentadas as entidades suportadas, exposta a interface do sistema, explicado o modo como se processa a integração de uma nova função na plataforma, serão discriminadas as funções disponíveis de âmbito geral e também as funções mais específicas ao tema desta tese.

6.2 – Bibliotecas de domínio público integradas

No sentido de maximizar a reutilização de código, optou-se por incorporar no sistema algumas bibliotecas de domínio público existentes e que disponibilizam funções de grande utilidade, quer para o sistema base quer para o mais específico a esta tese.

Para cálculo matricial incorporou-se a biblioteca *Newmat* escrita em C^{++} , na sua versão 10, [Davies, 1999]; desta forma, as seguintes operações matriciais tornaram-se disponíveis: multiplicação, soma, diferença, concatenação, inversão, transposição, conversão entre tipos diferentes, submatrizes, determinantes, decomposição de *Cholesky*, triangulação *QR*, decomposição *SVD*, valores próprios de uma matriz simétrica, ordenação, transformada rápida de *Fourier*, e interface para os algoritmos do livro *Numerical Recipes in C* [Press, 1992]. Os tipos de matrizes definidas nesta biblioteca são: rectangulares, triangulares superior e inferior, diagonais, simétricas, de banda, de banda superior e inferior, simétricas de banda, vectores linha e coluna. Foram ainda acrescentadas funções para escrita em ficheiro e apresentação dos elementos para cada um destes tipos de matriz.

Actualmente existem vários formatos de ficheiros de imagem utilizados nos mais diversos

tipos de aplicações de processamento e análise de imagem. Quando se iniciou o desenvolvimento da plataforma base optou-se pela utilização do formato *BMP* como formato nativo. Rapidamente se constatou que seria desejável incluir suporte para outros formatos; destes destacavam-se [Rimmer, 1991] o *JPEG*, o *GIF* e o *TIFF*. Dado o elevado número de classes de domínio público disponíveis optou-se por suportar este tipo de formatos através da incorporação de algumas destas bibliotecas. Devido essencialmente à facilidade de integração na aplicação e à sua portabilidade para o ambiente de programação utilizado, optámos pelas bibliotecas em C^{++} *Cimage*, na sua versão 1.2 [Smart, 1997] e *Jpeglib*, na sua versão 6 [Lane, 1996]. Desta forma a plataforma, desde a sua versão base, suporta este tipo de formatos de ficheiros de imagem.

No decurso do trabalho foi reconhecida a necessidade de utilização de algumas estruturas e ferramentas normalmente utilizadas no domínio da computação gráfica; destas destacam-se:

- classes definidoras de entidades poligonais 2D e 3D;
- funções para escrita, leitura e representação dessas entidades;
- triangulação de um conjunto de pontos não estruturados;
- simplificação e suavização de malhas poligonais;
- extracção de contornos de isonível;
- segmentação e amostragem de uma entidade poligonal;
- realização de operações lógicas e determinação das fases intermédias (*morphing*) entre duas estruturas;
- identificação dos vértices e dos centros das células que constituem uma dada entidade;
- determinação de algumas características de um objecto poligonal;
- filtragem de uma estrutura;
- representação das normais nos vértices de um objecto; etc.

Dada a sua grande utilização e as suas características de robustez, capacidade, eficiência, contínua actualização, elevado suporte e manutenção, existência de uma versão em linguagem C^{++} facilmente portada para o ambiente de programação *Microsoft Visual C^{++}* e o facto de ser de domínio público, a escolha recaiu sobre a biblioteca *VTK, The Visualization Toolkit* [Schroeder, 1996, 1998, 1999]. Esta biblioteca gráfica, na sua versão 3.1 em C^{++} , foi incorporada na plataforma, estando assim as suas entidades e algumas das suas funções

disponíveis em diferentes módulos do sistema.

Na *Figura 6.1* estão identificadas as bibliotecas de domínio público integradas na plataforma de desenvolvimento e ensaio.

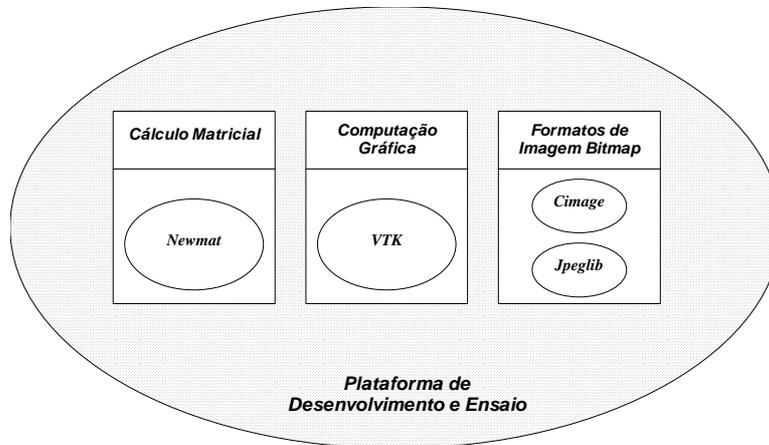


Figura 6.1 – Identificação das bibliotecas de domínio público integradas na plataforma de desenvolvimento e ensaio.

Além das quatro bibliotecas referidas foram também incluídos alguns algoritmos de análise e processamento de imagem que se considerou deverem ser disponibilizados num sistema base; assim foram integrados alguns algoritmos de outros investigadores do grupo: de funções básicas [Lima, 1995; Reis, 1996] e de detecção de orlas de intensidade [Correia, 1995]; e também foram portados alguns algoritmos incluídos no sistema *XITE – X-based Image Processing Tools and Environment*, [Lønnestad, 1992]. As ferramentas de detecção e seguimento de linhas em imagens de orlas, de simplificação e de seguimento em sequências de imagem desenvolvidas e implementadas durante o trabalho de dissertação de mestrado do autor desta tese [Tavares, 1995, 1995a] foram também portadas para a nova aplicação.

6.3 – Entidades suportadas

Actualmente várias entidades são suportadas na plataforma de desenvolvimento e ensaio. Estas entidades podem ser agrupadas em dois grandes grupos: o do tipo *Bitmap* e o do tipo vectorial. No grupo *Bitmap* são consideradas as imagens constituídas por um conjunto de *pixels*; no grupo vectorial estão incluídas as estruturas definidas para pontos, para linhas, para contornos, para superfícies e para as entidades definidas na biblioteca *VTK*.

No caso dos pontos, estes não têm uma estrutura específica, sendo cada elemento definido unicamente pelas suas coordenadas; as linhas são definidas pelas coordenadas dos seus pontos extremos; os contornos podem ser de dois tipos: contornos abertos ou contornos fechados, sendo definidos pelas coordenadas dos pontos que os constituem e pelo seu tipo; as superfícies são definidas por um conjunto de pontos distribuídos ao longo de linhas e colunas; as entidades definidas na biblioteca *VTK* e actualmente utilizadas são: pontos estruturados ou

não, entidades poligonais e grelhas de pontos estruturadas ou não.

Na implementação da plataforma são considerados dois tipos de documentos: o documento imagem, que pode ser constituído por uma imagem *Bitmap* e/ou por uma imagem vectorial com pontos, rectas, contornos e superfícies; e o documento *VTK*, que pode ser constituído por entidades definidas na biblioteca *VTK*.

Para cada tipo de documento estão suportadas as respectivas funções de escrita em ficheiro e de leitura, de cópia de entidades e de conversão entre algumas das entidades suportadas.

Uma imagem *Bitmap* pode originar um documento *VTK* através de uma sua amostragem e um documento *VTK* pode ser copiado para um documento imagem através da criação de uma imagem *Bitmap* com a cópia do conteúdo de uma das suas janelas de visualização.

Na *Figura 6.2* estão representados, de forma gráfica, os dois tipos de documentos implementados na plataforma, as entidades que os podem constituir e as operações de cópia, escrita e de leitura, suportadas.

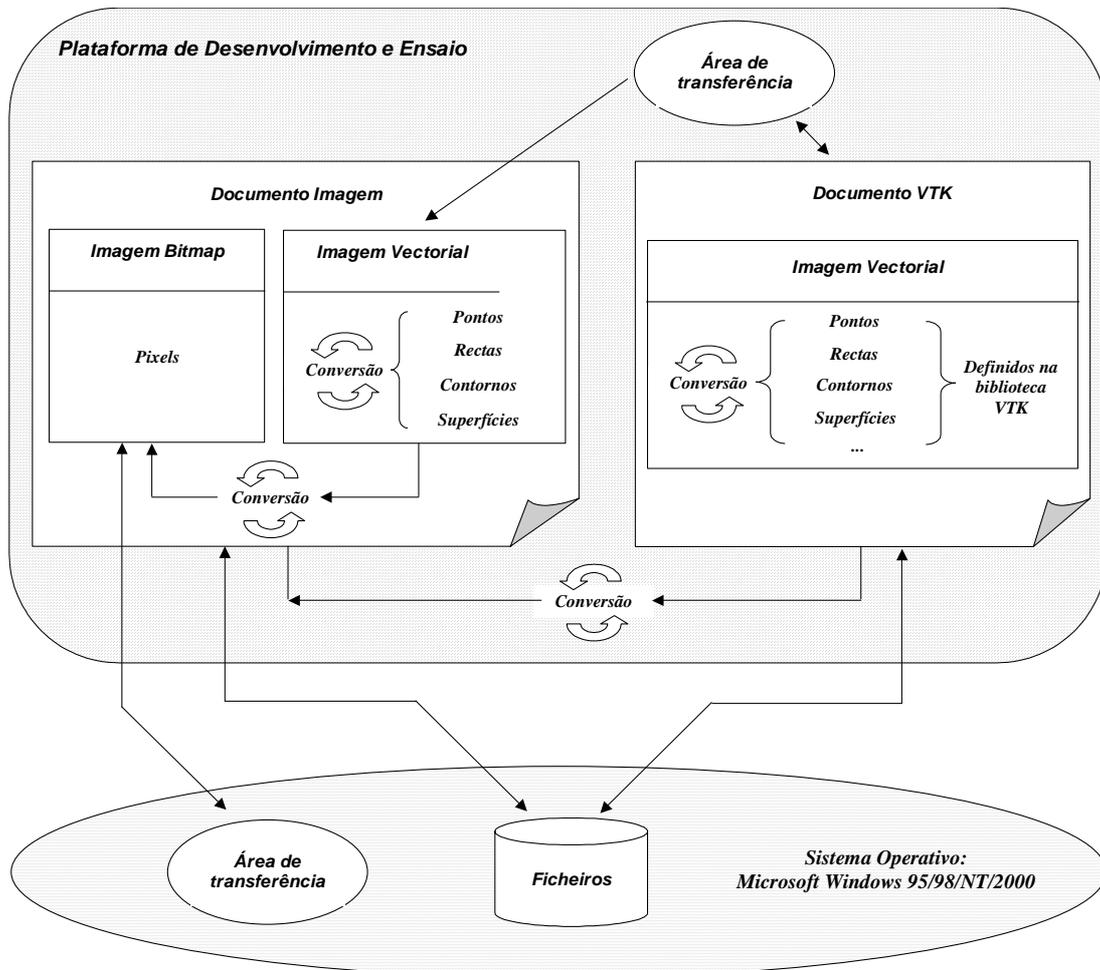


Figura 6.2 – Entidades suportadas na plataforma de desenvolvimento e ensaio.

6.4 – Interface

A interface do sistema segue a filosofia geral das aplicações desenvolvidas para os sistemas operativos *Microsoft Windows*. Dos elementos que a constituem destacam-se os seguintes: a zona dos menus, os menus emergentes de contexto, as barras de ferramentas e a barra de estado (Figura 6.3).

Estes elementos alteram-se dinamicamente conforme o tipo de documento activo e consoante as entidades que os constituem. Desta forma, as funções existentes na plataforma podem estar disponíveis ou não, consoante os seus requisitos estejam satisfeitos ou não.

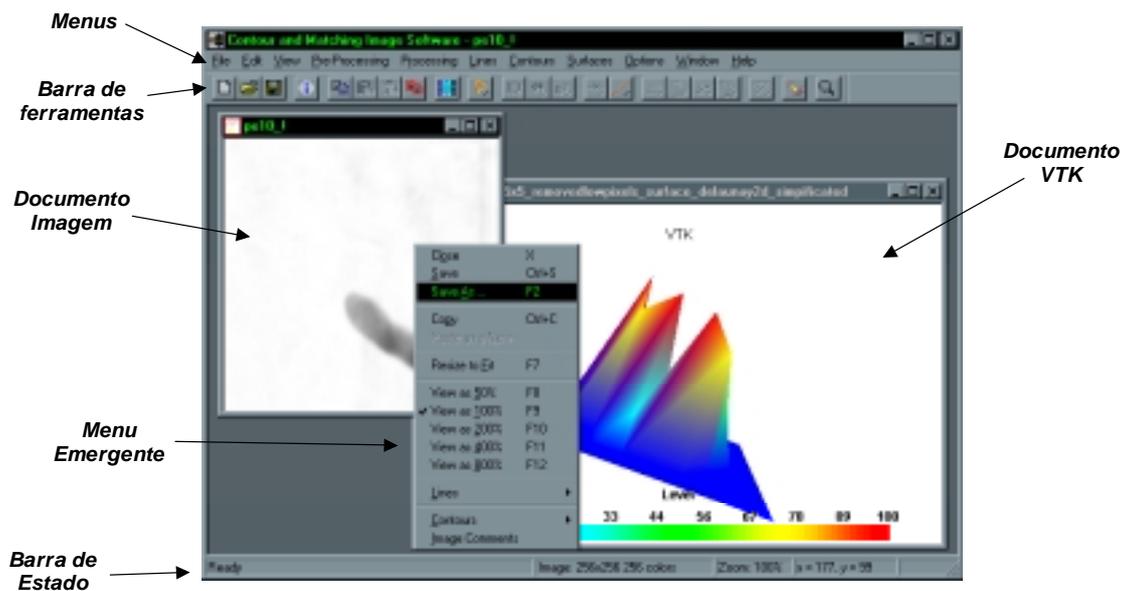


Figura 6.3 – A interface da plataforma de desenvolvimento e ensaio. (O documento activo é do tipo imagem; assim as funções disponíveis são as existentes para este tipo de documento.) [Reprodução a cores em anexo.]

Para a interacção dos utilizadores com o sistema desenvolvido optou-se por utilizar a seguinte filosofia:

- As operações unárias são aplicadas no documento activo;
- As operações binárias recebem a indicação dos documentos a serem considerados pelo clique com o botão esquerdo do rato sobre uma qualquer janela de visualização dos mesmos;
- Para cada nova operação é criado um novo documento, com o seu título a reflectir a designação do(s) documento(s) original(ais) e a operação efectuada, ficando o(s) documento(s) original(ais) intacto(s);
- No caso de as operações efectuadas alterarem o conteúdo do documento, é pedido ao utilizador para confirmar a realização da operação seleccionada;

- Na barra de estado surgem mensagens para o utilizador indicando a utilidade da operação seleccionada, a operação a efectuar, etc., e para documentos do tipo imagem é também indicado o nível de *zoom* actualmente utilizado, a dimensão e o número de cores da imagem activa;
- Quando se pressiona o botão direito do rato sobre um documento do tipo imagem surge o menu de contexto;
- Efectuando-se um duplo clique no botão esquerdo do rato sobre uma imagem *Bitmap* surge na secção direita da barra de estado o valor do respectivo *pixel*;
- Clicando-se no botão esquerdo do rato sobre uma imagem *Bitmap* e mantendo-o pressionado enquanto se arrasta o rato, define-se uma zona rectangular de selecção na imagem, com a possibilidade de visualizar-se as suas dimensões (*Figura 6.4*), a qual poderá ser posteriormente copiada e duplicada.

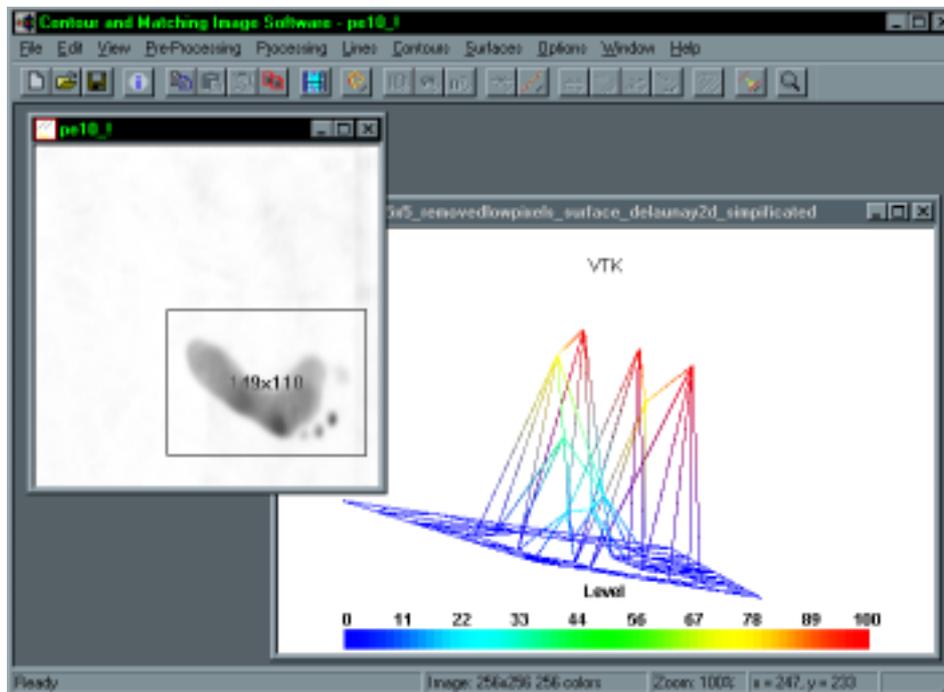


Figura 6.4 – Selecção de uma zona rectangular numa imagem Bitmap.

A interface da plataforma de desenvolvimento e ensaio muda dinamicamente quando passa a estar seleccionado um documento do tipo *VTK* (*Figura 6.5*). Como a classe responsável pela visualização destes tipos de documentos deriva, por herança, da correspondente classe do *VTK* os botões do rato podem ser utilizados para controlar a visualização dos objectos. Assim, no modo de interacção com a cena do tipo câmara é possível: rodar em torno do ponto focal da câmara, deslocar a câmara ao longo do plano da vista actual, alterar o nível de *zoom* e executar uma rotação plana da câmara em torno do seu eixo óptico. Já no modo de interacção

com a cena do tipo actor¹, através dos mesmos botões, é possível aplicar ao objecto: uma rotação em torno da origem, uma deslocação plana, um escalamento uniforme, uma rotação plana e uma translação.

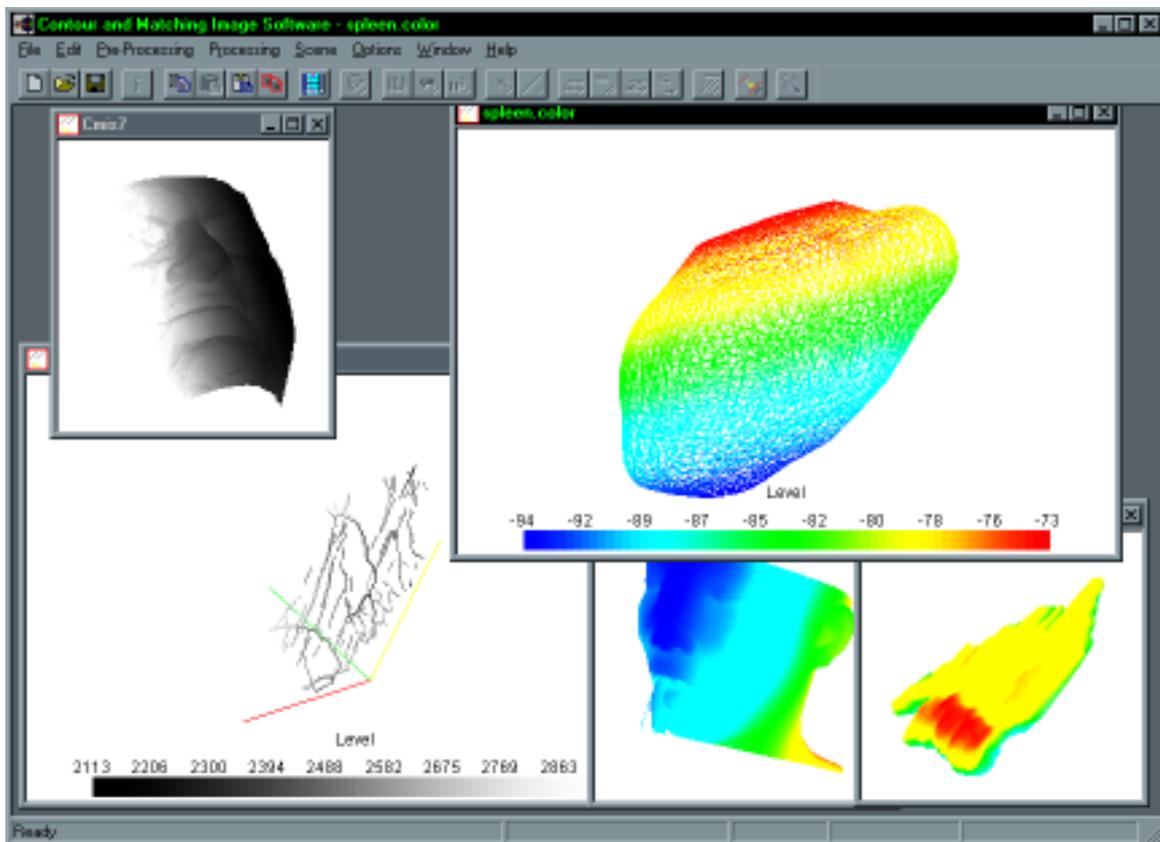


Figura 6.5 – Interface da plataforma de desenvolvimento e ensaio quando está activo um documento VTK. [Reprodução a cores em anexo.]

Devido à herança das classes *VTK* algumas teclas assumem determinadas funções para este tipo de documentos. Essencialmente estas teclas permitem alterar o tipo de interacção do utilizador com a cena e a representação dos objectos na mesma: comutar entre o modo do tipo actor (os eventos do rato alteram o actor actualmente seleccionado) ou do tipo câmara (os eventos do rato alteram a posição da câmara e o ponto focal), reinicializar a vista da câmara, representar todos os actores em modo de estrutura em arame ou em modo de superfície e representar o paralelepípedo que circunscreve o actor seleccionado.

Sempre que uma operação necessita de um tempo de execução significativo, são apresentados ao utilizador diálogos com a indicação do progresso do processamento (Figura 6.6).

Como já foi referido, as funções disponíveis na plataforma de desenvolvimento e ensaio dependem dos módulos que estão configurados como disponíveis. Esta configuração,

¹ Cada objecto *VTK* presente na cena de visualização é, por vezes, designado no âmbito do *VTK* por actor.

realizada em tempo de execução, permite definir os menus disponíveis, as funções que constituem cada um destes menus, as barras de ferramentas disponíveis, os botões que as constituem e os itens que formam os menus emergentes, tornando assim o sistema adaptável a diferentes níveis de utilizadores e a diferentes tipos de aplicação.



Figura 6.6 – Exemplo de um diálogo de progresso utilizado na plataforma.

6.5 – Integração de novas funções

Na Figura 6.7 estão representadas as classes principais da plataforma de desenvolvimento e ensaio; estas classes são responsáveis pelo controlo da aplicação, pela gestão da sua janela principal, pelos documentos imagem e VTK e pelas janelas de visualização de cada um destes documentos.

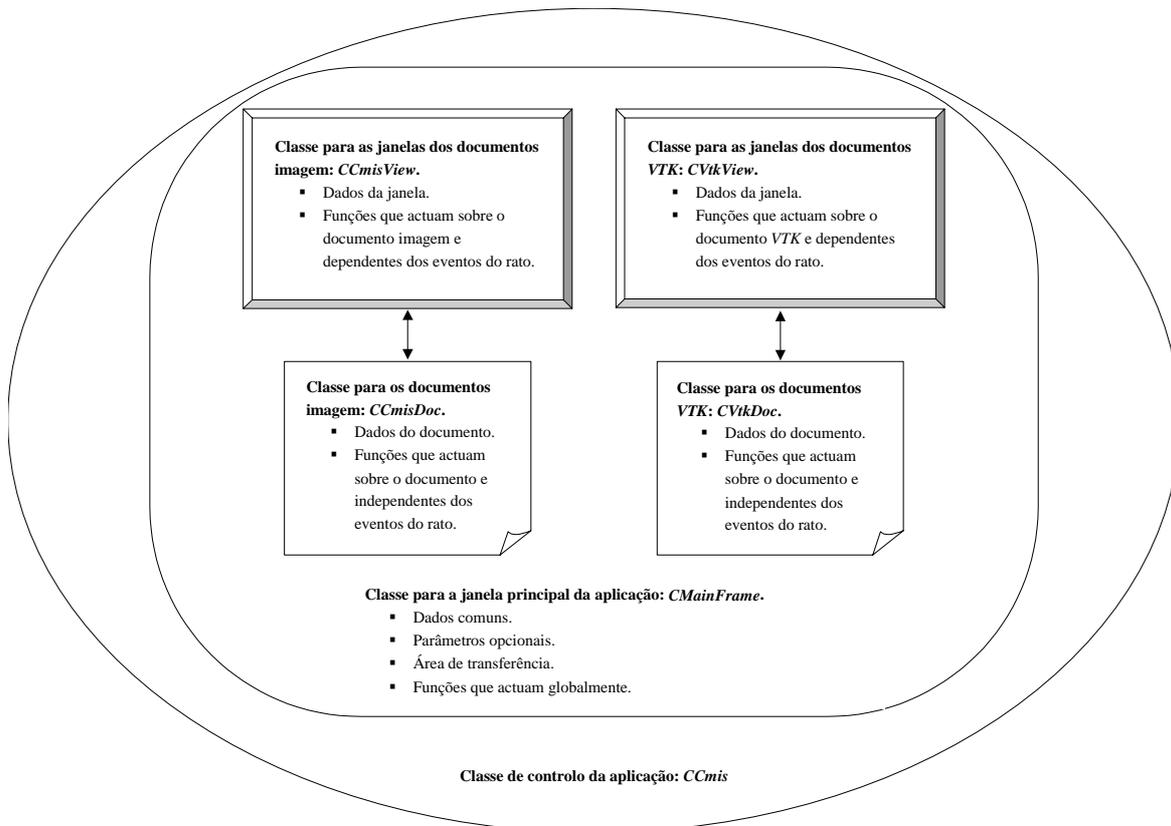


Figura 6.7 – Classes principais da plataforma de desenvolvimento e ensaio.

Com a filosofia utilizada na plataforma, sempre que um utilizador pretenda acrescentar-lhe uma nova função, já não necessita de se preocupar com a interface com os dados de entrada e

de saída a considerar, nem com o modo como é realizada a gestão e manipulação dos mesmos. Assim, os passos a realizar para a integração de uma nova função são:

1. Acrescentar o(s) ficheiro(s) de implementação da nova função ao projecto do sistema no *Microsoft Visual C++*;
2. No *Microsoft Visual C++*, acrescentar um item para a função no menu apropriado;
3. Utilizando o *MFC ClassWizard* do *Microsoft Visual C++*, associar o item criado com uma das classes principais da plataforma² e definir a função dessa classe a ser chamada quando o item for seleccionado;
4. Identificar quais as condições a serem verificadas para a função ser considerada como disponível;
5. Identificar qual o módulo da plataforma que conterà a função;
6. Caso seja necessário, desenhar no *Microsoft Visual C++* uma caixa de diálogo para entrada dos parâmetros da função; utilizando o *MFC ClassWizard* do *Microsoft Visual C++*, criar a classe responsável pela interface desse diálogo com o utilizador; podem-se definir os parâmetros por omissão na classe *CMainFrame* e efectuar a sua inicialização na função *defaultValues()* da mesma; caso se pretenda que a plataforma guarde o valor dos parâmetros utilizados quando a execução terminar e os retome no início de nova execução, deve acrescentar-se o procedimento de escrita na função *InitInstance()* da classe *CCmisApp* e o de leitura na função *DestroyWindow()* da classe *CMainFrame*;
7. Caso seja necessário, utilizar um diálogo de progresso com a indicação da fase de processamento actual;
8. Caso seja útil, para facilitar a interface com o utilizador, enviar mensagens para a primeira zona (secção esquerda) da barra de estado, informando-o com os passos a seguir;
9. Recompilar a plataforma de desenvolvimento e ensaio no *Microsoft Visual C++*.

² Caso a função esteja relacionada com os parâmetros globais da plataforma esta deve ser associada à *CMainFrame*; caso esteja associada com os documentos do tipo imagem e independente dos eventos associados ao rato deve ser associada à classe *CCmisDoc*; caso esteja associada a este tipo de documentos e dependente dos eventos referidos deve ser associada à classe *CCmisView*, sendo a chamada da função efectuada no interior da função associada ao evento pretendido; caso esteja associada com os documentos do tipo *VTK* e independente dos eventos associados ao rato deve ser associada à classe *CVtkDoc*; caso esteja associada com este tipo de documentos e dependente dos referidos eventos deve ser associada à classe *CVtkView*, sendo a chamada da função efectuada no interior da função associada ao evento pretendido.

6.6 – Selecção de funções disponíveis

Nesta secção serão brevemente descritas algumas das funções actualmente disponíveis na plataforma de desenvolvimento e ensaio. Em primeiro lugar serão descritas as funções de índole mais geral e seguidamente, as funções mais específicas ao tema desta tese.

6.6.1 – Utilitárias

6.6.1.1 – Documentos imagem

As funções básicas disponíveis para este tipo de documento estão relacionadas com entrada e saída de dados: criar novos documentos, abrir documentos já existentes a partir dos seus ficheiros, fechar o documento activo e todos os documentos abertos, gravar o documento activo e todos os documentos abertos, alterar o título de um documento, escolher os parâmetros de escrita dos documentos em ficheiros (por exemplo, o factor de qualidade para ficheiros do tipo *JPEG*), escolher e configurar a impressora, realizar a previsão da impressão do documento, imprimir o documento, abrir um documento presente na lista dos últimos documentos abertos e terminar a execução.

Para a edição de documentos imagem estão essencialmente disponibilizadas as funções associadas à cópia das entidades que um documento deste tipo pode conter. Assim, é possível: copiar uma imagem *Bitmap* ou apenas uma zona desta; repor a imagem *Bitmap* copiada no documento actual ou criar um novo documento com a mesma; duplicar o documento activo; copiar, e posteriormente inserir num outro documento, as entidades vectoriais consideradas neste tipo de documentos; realizar um novo documento com uma cópia da imagem *Bitmap* activa utilizando um diferente número de *bits* para a definição do valor dos *pixels* que a constituem, isto é, com diferente resolução de intensidade.

As funções relacionadas com a visualização dos documentos imagem disponíveis na plataforma são as seguintes: activar ou desactivar a visualização das barras de ferramentas e de estado; alterar o factor de *zoom*; redesenhar as entidades presentes na janela activa; activar ou desactivar o desenho de duas rectas ortogonais que se cruzam no cursor do rato de forma a facilitar a identificação dos elementos presentes (*Figura 6.8*); visualizar um conjunto de documentos, seleccionados pelo utilizador, numa mesma janela com um intervalo de tempo de visualização entre cada um especificado e com total controlo sobre a exibição da sequência (*Figura 6.9*), sendo possível visualizar-se ao mesmo tempo mais do que uma série de imagens devido a utilizar-se na implementação *multithreads* com sincronização e envio de mensagens entre si [Richter, 1995] (esta função é útil para se visualizar uma série de imagens independentes como se tratasse de um filme); visualizar uma descrição da imagem activa (*Figura 6.10*), podendo o utilizador editar texto que pode ficar guardado com a imagem no

mesmo ficheiro³ e ser posteriormente recuperado quando a mesma for aberta na plataforma.

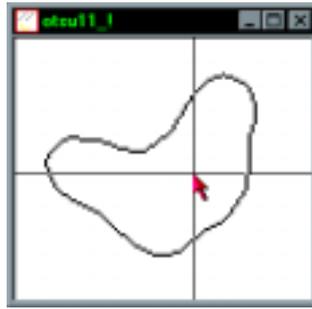
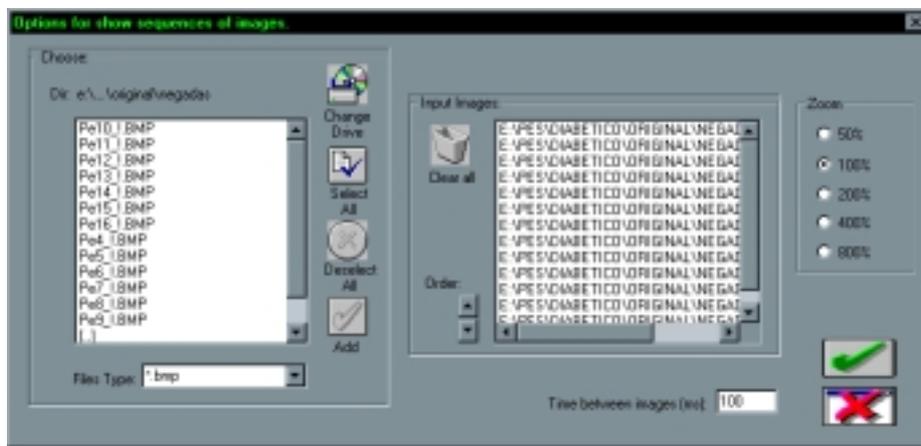


Figura 6.8 – Desenho de duas rectas ortogonais centradas no cursor do rato para auxílio de localização das entidades presentes.



a)



b)

Figura 6.9 – Visualização de uma série de documentos imagem: a) Selecção das imagens a serem visualizadas, especificação do factor de zoom e do valor do intervalo entre a visualização de cada uma; b) Visualização (Do lado direito, a caixa de diálogo de controlo da visualização e na qual é possível alterar-se o intervalo de tempo.).

³ Esta informação ASCII é guardada no fim do ficheiro da imagem e é desprezada por outras aplicações durante a leitura da mesma.

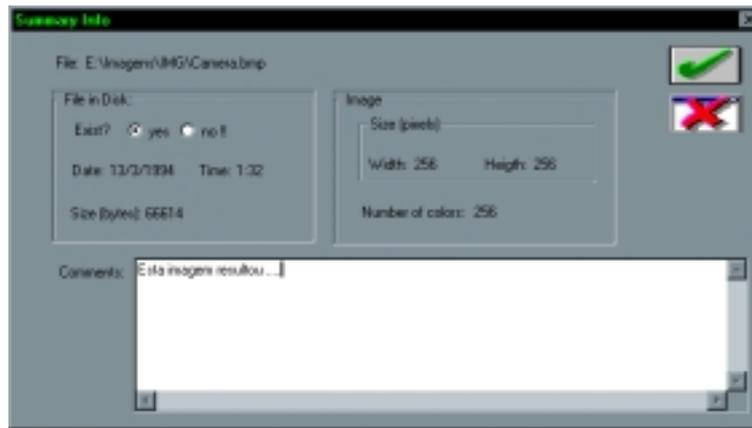
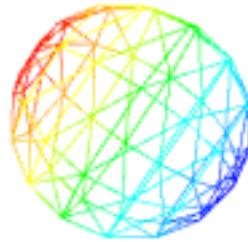


Figura 6.10 – Visualização de algumas características de uma determinada imagem.
(É possível adicionar e editar comentários associados à mesma.)

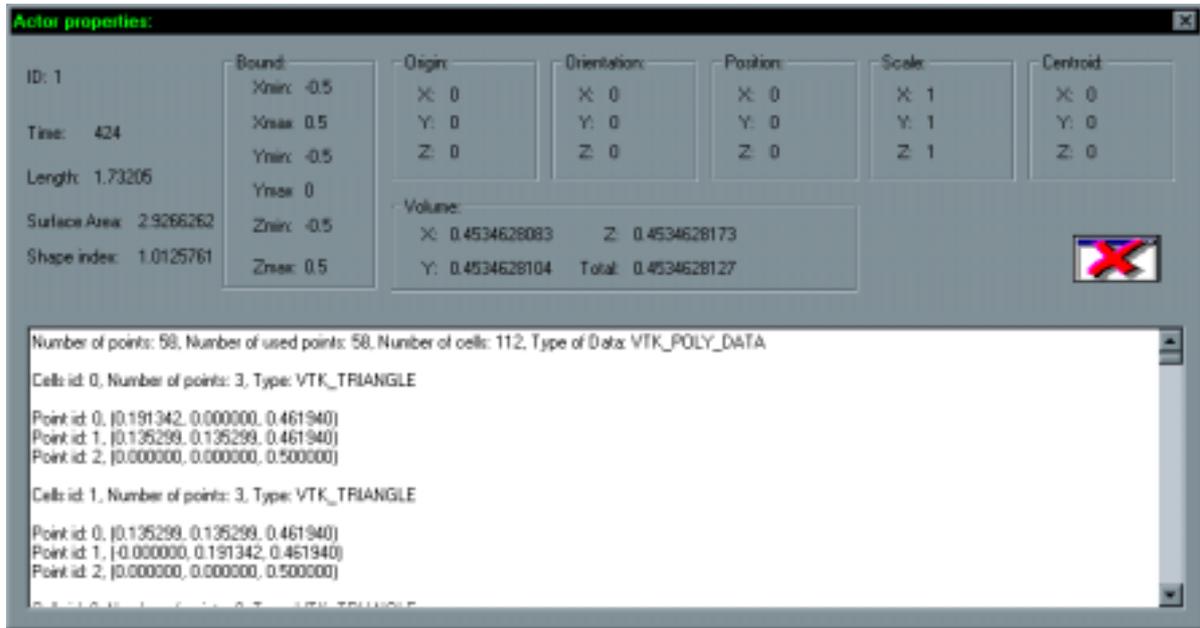
6.6.1.2 – Documentos VTK

As funções básicas associadas aos documentos VTK são também relacionadas com a entrada e saída de dados: criar um novo documento, abrir um documento gravado previamente em ficheiro, acrescentar um novo objecto VTK definido num determinado ficheiro no documento activo, criar um novo documento com dois objectos seleccionados pelo utilizador, fechar o documento activo e todos os documentos abertos, gravar o documento activo e todos os documentos abertos, definir o título do documento activo, seleccionar e configurar a impressora, realizar a previsão da impressão do documento actual, imprimir o documento, abrir um documento presente na lista de últimos documentos abertos e terminar a aplicação.

Para a edição deste tipo de documentos estão disponíveis as seguintes funções: copiar o conteúdo da janela de visualização activa para a área de transferência do sistema operativo; criar um documento do tipo imagem através de uma nova imagem *Bitmap* com o conteúdo existente na área de transferência; copiar um objecto VTK existente no documento activo; inserir no documento actual um objecto VTK copiado; criar um novo documento com um objecto copiado; duplicar o documento activo; alterar algumas propriedades de um objecto como a sua origem, a posição, a orientação, a escala e a opacidade; repor os valores por omissão das propriedades origem, posição, orientação e escala de um objecto; repor os valores por omissão destas propriedades em todos os objectos presentes num documento; apagar um dado actor; apagar todos os actores de um documento; determinar o número de objectos que constituem um documento; visualizar algumas características e a constituição de um objecto: coordenadas máximas e mínimas, comprimento da diagonal do paralelepípedo que o delimita, origem, orientação, posição, escala, coordenadas do centróide, número de pontos e de células, tipo de objecto, identificação de cada ponto e de cada célula, área da superfície, índice de forma do objecto relativamente a uma esfera e volume total e projectado segundo planos alinhados com cada um dos três eixos [Schroeder, 1998, 1999] (Figura 6.11); visualizar as características de um objecto: número de pontos, coordenadas máximas e mínimas e do centróide, área da superfície, índice de forma e volume total e projectado (Figura 6.11).



a)



b)



c)

Figura 6.11 – Visualização das propriedades de um objecto VTK: a) Objecto original; b) Alguns dos seus parâmetros e descrição da sua constituição; c) Alguns dos seus parâmetros.

6.6.1.3 – Configuração

De forma a adequar-se o funcionamento da plataforma desenvolvida a vários tipos de aplicação e a diferentes níveis de utilizador é possível configurar vários parâmetros da mesma. Destes podem-se destacar parâmetros para: os detectores de orlas de intensidade de

Deriche, de *Chen & Castan*, de *Canny* e de *Spacek*; o seguimento de segmentos de recta ao longo de sequências de imagens; escolha das imagens resultantes dos operadores de gradiente de *Robert*, de *Prewitt*, de *Sobel* e de *Grad*; a configuração do funcionamento global da plataforma.

6.6.2 – Processamento de imagem

Como se pretende que a plataforma de desenvolvimento seja por si só um sistema base para processamento de imagem, foram integradas funções consideradas como úteis para um tal sistema. Seguidamente serão destacadas algumas dessas funções.

No grupo das operações geométricas, foram integradas funções para: a rotação em torno de um ponto especificado utilizando vários tipos de interpolação, o espelho e o verso, e a alteração das dimensões.

Para alterar o brilho dos *pixels* que constituem uma imagem foram incorporadas as seguintes funções: aumentar e diminuir o brilho de um determinado valor especificado; aumentar e diminuir o contraste; atribuir um determinado valor aos *pixels* que apresentem valor inferior a um dado limiar ficando os restantes com o valor original (útil para a remoção de *pixels* que possam ser considerados como ruído).

Por vezes pode ser útil adicionar ou multiplicar uma imagem com ruído do tipo Gaussiano ou do tipo aleatório, ou criar uma nova imagem com um desses tipos de ruído. Funções para essas operações foram disponibilizadas no sistema, sendo facilmente configuradas.

Vários tipos de filtros [Lim, 1990; Schalkoff, 1989] foram implementados na plataforma de desenvolvimento e ensaio; destes podem ser destacados os seguintes:

- de média, de mediana, de mínimo, de máximo, do mais próximo do máximo e do mínimo, sendo o tamanho do núcleo definido pelo utilizador;
- de gradiente⁴ [Tavares, 1995a] de *Roberts*, de *Prewitt*, de *Grad* (diferenças de 1ª ordem) e de *Sobel*;
- de Laplaciano, com núcleo definido pelo utilizador ou seleccionado a partir de núcleos *standard*, e de determinação das passagens por zero do Laplaciano;
- de convolução, com núcleo definido pelo utilizador (*Figura 6.12*);
- de Gaussiano e de *LoG*, seleccionados pelo utilizador, com ou sem normalização.

⁴ Por omissão são criadas cinco novas imagens: uma para o gradiente segundo a direcção *x*, outra segundo a direcção *y*, uma para a magnitude, uma quarta para a direcção, e uma última para a combinação da magnitude e da direcção; as imagens que resultam destes filtros podem ser seleccionadas nas opções de configuração da plataforma.

Também foram integradas no sistema as operações morfológicas de erosão, de dilatação, de fecho e de abertura, com núcleo definido pelo utilizador (*Figura 6.12*).

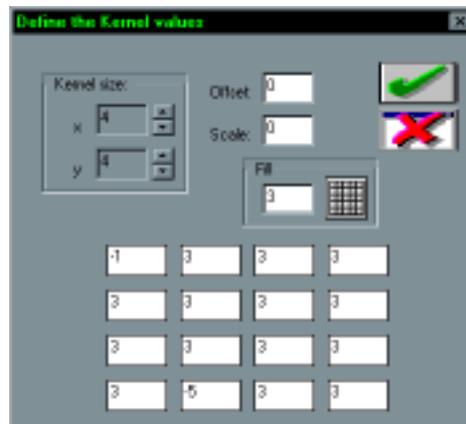


Figura 6.12 – Definição do núcleo de um filtro de convolução.

A detecção de orlas de intensidade utilizando os operadores [Correia, 1995; Tavares, 1995a] de *Deriche*, de *Shen & Castan*, de *Canny*, e de *Spacek*, é bastante útil em várias aplicações de processamento de imagem. Estes operadores foram também implementados na plataforma desenvolvida, sendo a sua parametrização facilmente conseguida.

Como as operações lógicas e aritméticas são bastante úteis, nomeadamente para a comparação e verificação de resultados, foram integradas na plataforma as operações lógicas: negação, ou, e, e ou exclusivo, e as operações aritméticas entre duas imagens de adição, subtracção, multiplicação, divisão e máximo, e, entre uma imagem e um valor numérico especificado de adição, subtracção, multiplicação e divisão.

6.6.3 – Análise de imagem

Nesta subsecção são descritas as funções relacionadas com a análise de imagem integradas na plataforma de desenvolvimento. Em primeiro lugar, são descritas as funções incorporadas de índole mais geral, seguidamente são apresentadas as funções directamente relacionadas com linhas.

6.6.3.1 – Genéricas

As funções básicas para a análise de imagem integradas na plataforma de desenvolvimento são as seguintes: calcular o histograma de uma imagem (*Figura 6.13*), determinar a distância entre dois *pixels* definidos pelo utilizador através do rato (*Figura 6.14*), determinar o máximo e o mínimo valor dos *pixels* que constituem uma imagem, determinar o número de *pixels* que apresentam um determinado valor numa imagem.

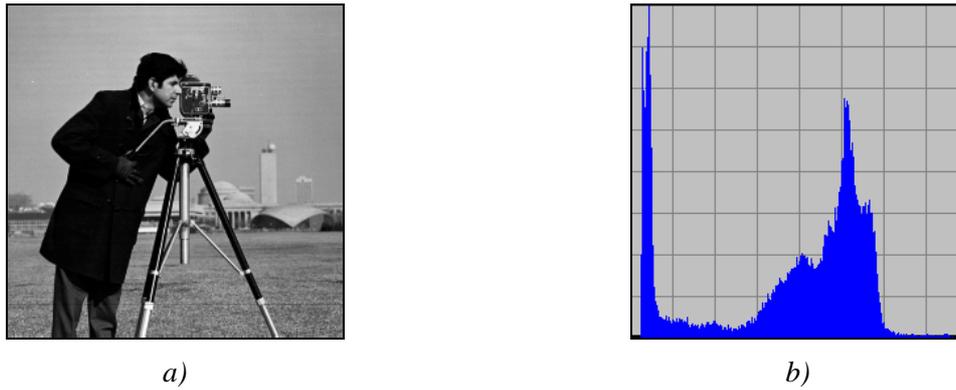


Figura 6.13 – Histograma de uma imagem: a) Imagem original; b) Histograma determinado.

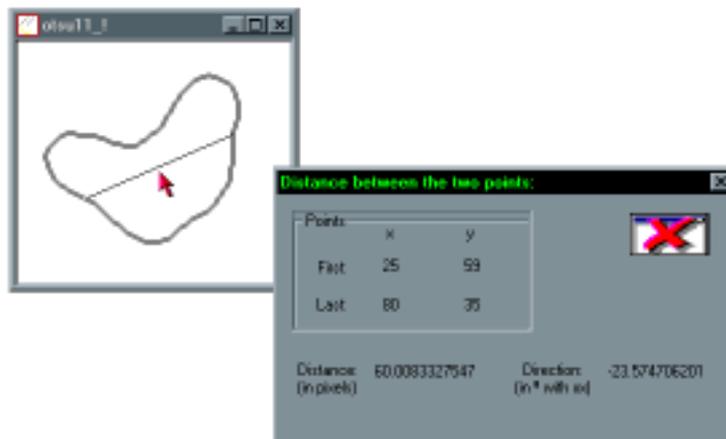


Figura 6.14 – Apresentação da distância, e da direcção, entre dois pixels especificados pelo utilizador.

Uma operação que tem muitas vezes utilidade num sistema de análise de imagem é a binarização. Assim foram integradas no sistema desenvolvido várias técnicas para se realizar a referida operação: determinação dos *pixels* com valor de brilho não inferior a um limiar; determinação dos *pixels* com valor de brilho dentro de um intervalo definido; determinação dos *pixels* com valor de brilho não inferior ao limiar determinado pelo método de *Otsu* [Otsu, 1978] ou pelo método de *Kittler* [Kittler, 1986]; determinação dos *pixels* com valor de brilho não inferior a um limiar definido interactivamente pelo utilizador (ao mesmo tempo é possível binarizar-se interactivamente mais do que uma imagem devido a utilizar-se na implementação *multithreads* com sincronização e envio de mensagens entre si) (Figura 6.15); binarização utilizando-se histerese de amplitude; binarização de objectos pelos métodos de *White & Rohrer's* [White, 1983].

Também foram integradas no sistema desenvolvido funções para processar os objectos constituídos por *pixels* de valor uniforme presentes numa imagem, nomeadamente para: esqueletizar, determinar as linhas centrais, determinar o rectângulo que circunscreve um objecto, realizar o preenchimento, determinar os *pixels* fronteira, anular os *pixels* interiores, amostrar utilizando uma grelha rectangular, determinar os pontos exteriores de um objecto previamente amostrado por uma grelha quadrada.

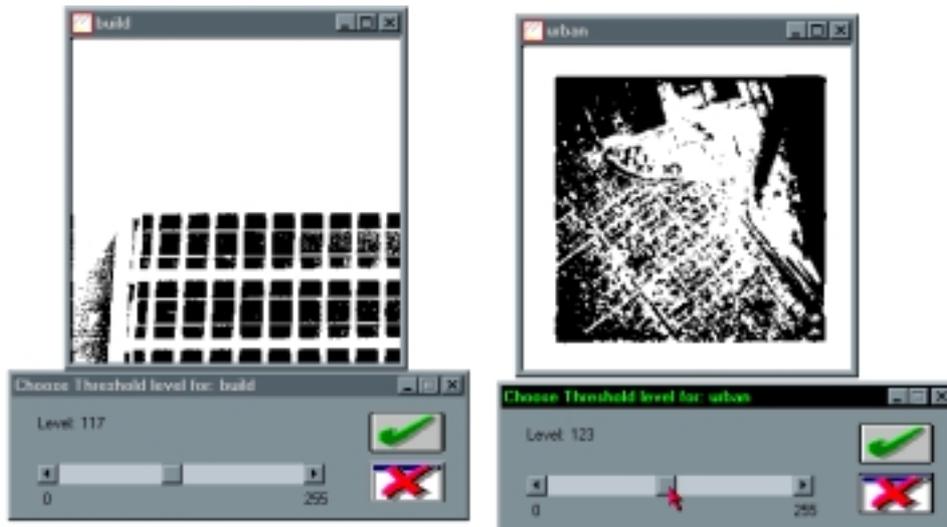


Figura 6.15 – Binarização interactiva de imagens Bitmap.

Em muitas aplicações da visão por computador assume uma importância relevante a análise das regiões presentes numa imagem. Assim resolveu-se incluir na plataforma desenvolvida uma operação [Lønnestad, 1992], implementada utilizando-se *multithreads* com sincronização e envio de mensagens entre si, que permite: determinar as regiões presentes numa imagem, verificar algumas características de cada região determinada e criar uma nova imagem a partir de uma região seleccionada (Figura 6.16).

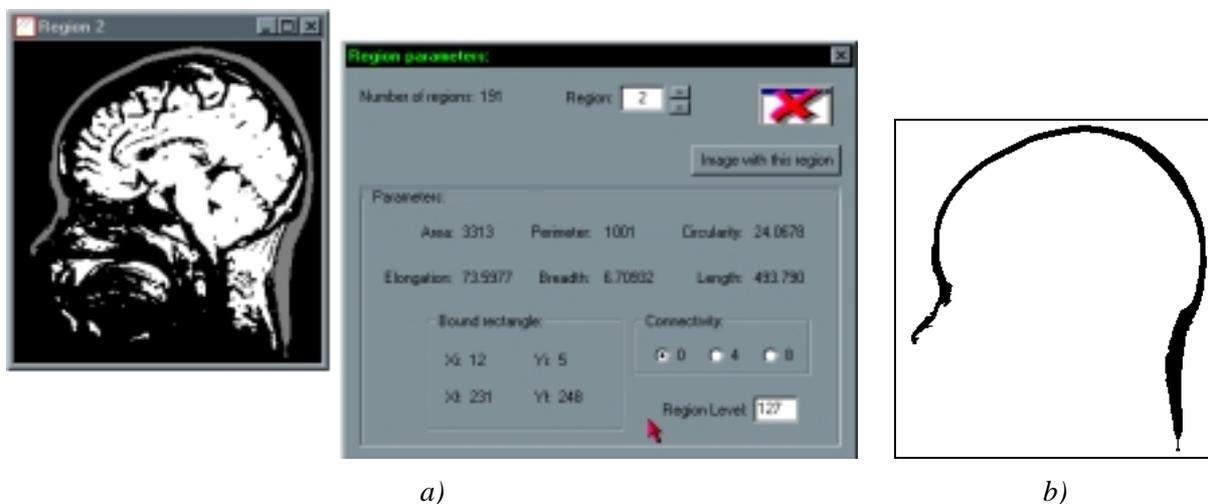


Figura 6.16 – Análise das regiões de uma imagem: a) Imagem original e alguns parâmetros da região seleccionada; b) Imagem (negada) criada a partir da região seleccionada.

Como foi descrito no segundo capítulo, no domínio dos objectos deformáveis os contornos activos (vulgarmente designados por *snakes*) são bastante utilizados para segmentar objectos. Com uma importância tão relevante, e com resultados satisfatórios em vários tipos de aplicações, incluíram-se na plataforma algoritmos de contornos activos baseados em regiões e baseados em orlas de intensidade (Figura 6.17).

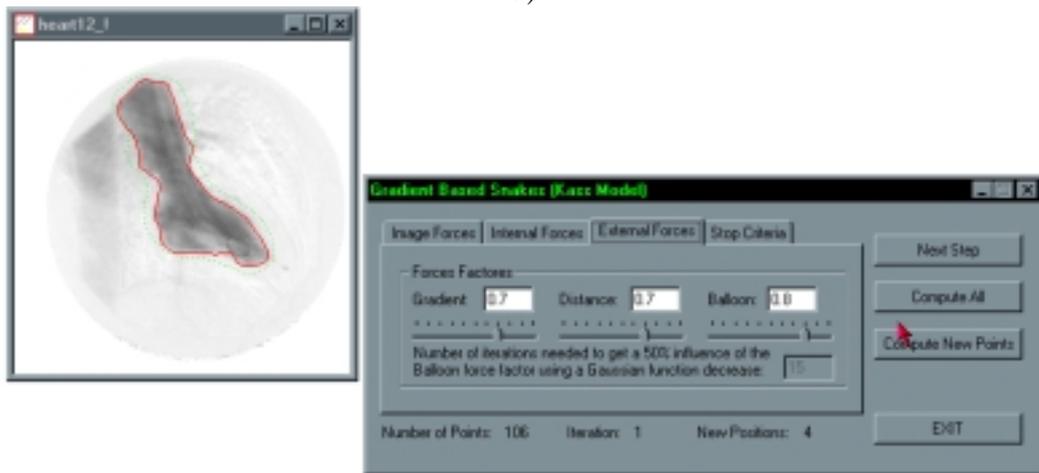
Os *pixels* resultantes da segmentação podem posteriormente ser convertidos em contornos

ou em linhas tornando-se assim possível utilizar as ferramentas desenvolvidas e existentes no sistema para estas entidades (Figura 6.18).

Ao analisar a Figura 6.17 é possível verificar a facilidade existente para visualizar e alterar os parâmetros do método envolvido, sendo assim facilitada a interacção do utilizador e permitindo um controlo correcto sobre todo o processo.



a)



b)

Figura 6.17 – Segmentação de um objecto utilizando o modelo de snake de Kass: a) Definição da snake inicial, utilizando o rato, e aplicação do método; b) Snake final obtida.

[Reprodução a cores em anexo.]

ID: 1			
Coordenates:		Number of pixels: 361	
x	y	Area: 6416	
First Pixel:	132	96	
Medium Pixel:	129.51	108.97	Perimeter: 444.374878

Figura 6.18 – Alguns parâmetros do contorno resultante da conversão da snake final da Figura 6.17.

6.6.3.2 – Para linhas

Para entidades do tipo linha estão essencialmente disponíveis as ferramentas implementadas durante a dissertação de mestrado do autor desta tese [Tavares, 1995, 1995a]; nomeadamente para a detecção e o seguimento de linhas em imagens de orlas, a aproximação poligonal de linhas utilizando faixas dinâmicas, a simplificação de segmentos de recta, e o seguimento de segmentos de recta ao longo de sequências de imagens. Seguidamente descreve-se, de forma sucinta, as funções disponíveis para este tipo de entidade.

Em qualquer instante o utilizador pode verificar os parâmetros de um determinado segmento de recta, determinar o número de segmentos de recta que constitui um documento, determinar um segmento de recta presente num documento a partir das coordenadas dos seus pontos extremos ou a partir da sua identificação, apagar ou inserir um segmento de recta, determinar os segmentos de recta que constituem um documento e têm comprimento superior a um determinado número de *pixels*, converter os segmentos de recta especificados em contornos.

Para detectar, seguir e aproximar as linhas presentes em imagens de orlas, foi implementado um algoritmo que utiliza no seguimento histerese de amplitude e critérios de direcção e, na aproximação poligonal, um algoritmo baseado em faixas dinâmicas. As imagens de entrada a considerar deverão ser resultantes de um qualquer detector de orlas de intensidade aplicado na imagem original; este detector deverá criar uma imagem para as amplitudes e uma outra para as direcções.

Na *Figura 6.19* é possível verificar-se os segmentos de recta resultantes da detecção, seguimento e aproximação poligonal das linhas existentes numa imagem original.

No sistema desenvolvido dois segmentos de recta podem ser simplificados por dois processos: um, utilizando o algoritmo implementado na dissertação de mestrado do autor desta tese que considera, na determinação do segmento de recta resultante, o comprimento e a posição de cada um dos segmentos a fundir; e um outro que determina o segmento de recta resultante através da ligação dos pontos mais extremos dos segmentos de recta a simplificar. Cada um destes dois tipos de simplificação pode também ser aplicado de uma só vez a todos os segmentos de recta presentes num documento.

Na *Figura 6.20* está representado um exemplo de fusão de dois segmentos de recta e na *Figura 6.21* um exemplo idêntico para a simplificação.

O seguimento de segmentos de recta ao longo de uma sequência é possível utilizando uma implementação da metodologia, desenvolvida durante a dissertação de mestrado do autor desta tese, baseada em filtragem de *Kalman*, distância de *Mahalanobis* e em restrições geométricas. Com a implementação utilizada, é possível especificar todos os parâmetros para o controlo da metodologia (*Figura 6.22*) e verificar, durante a execução, todo o processo de seguimento (*Figura 6.23*), o que com a implementação anteriormente realizada não era

conseguido de forma tão fácil e cómoda.

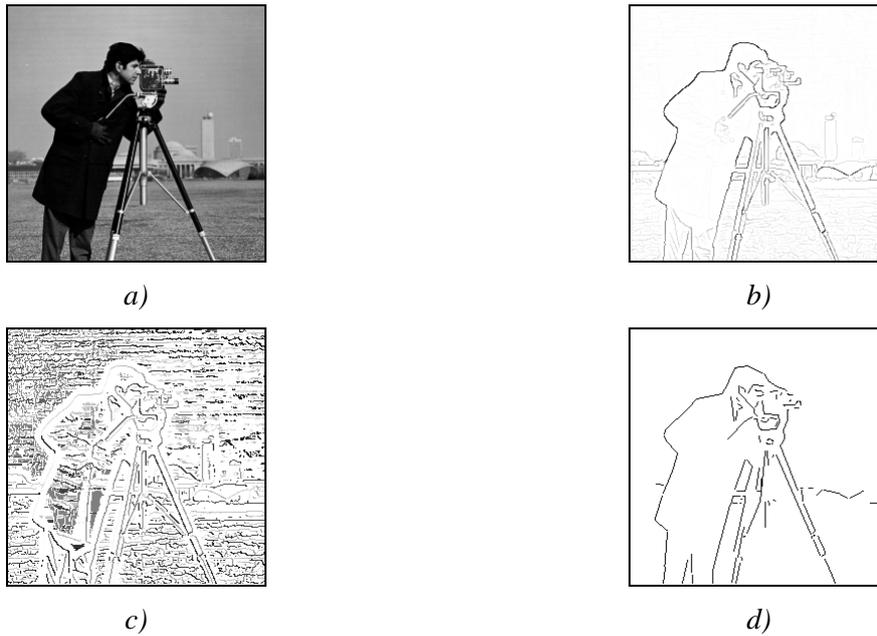


Figura 6.19 – Detecção, seguimento e aproximação poligonal de linhas: a) Imagem original; b) Imagem (negada) de amplitudes resultante do detector de Deriche; c) Imagem (negada) de direcções resultante do detector de Deriche; d) Aproximação resultante, utilizando-se os parâmetros definidos por omissão.

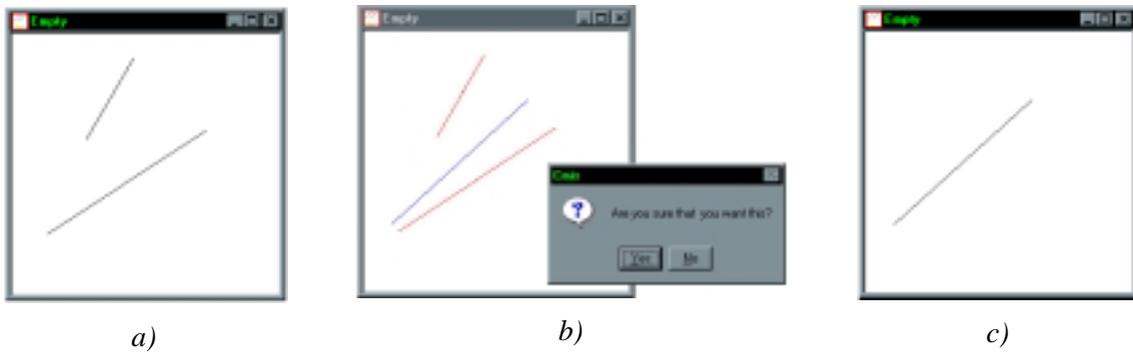


Figura 6.20 – Fusão de dois segmentos: a) Segmentos originais; b) Confirmação da fusão; c) Segmento resultante. [Reprodução a cores em anexo.]

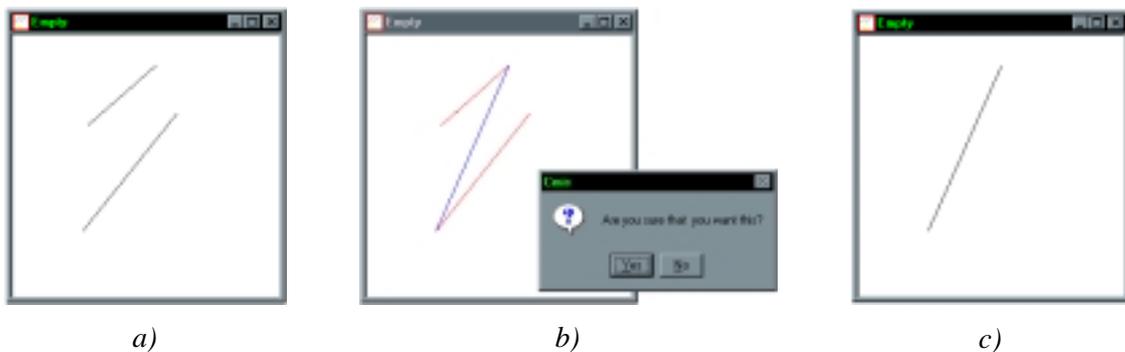


Figura 6.21 – Simplificação de dois segmentos: a) Segmentos originais; b) Confirmação da simplificação; c) Segmento resultante. [Reprodução a cores em anexo.]

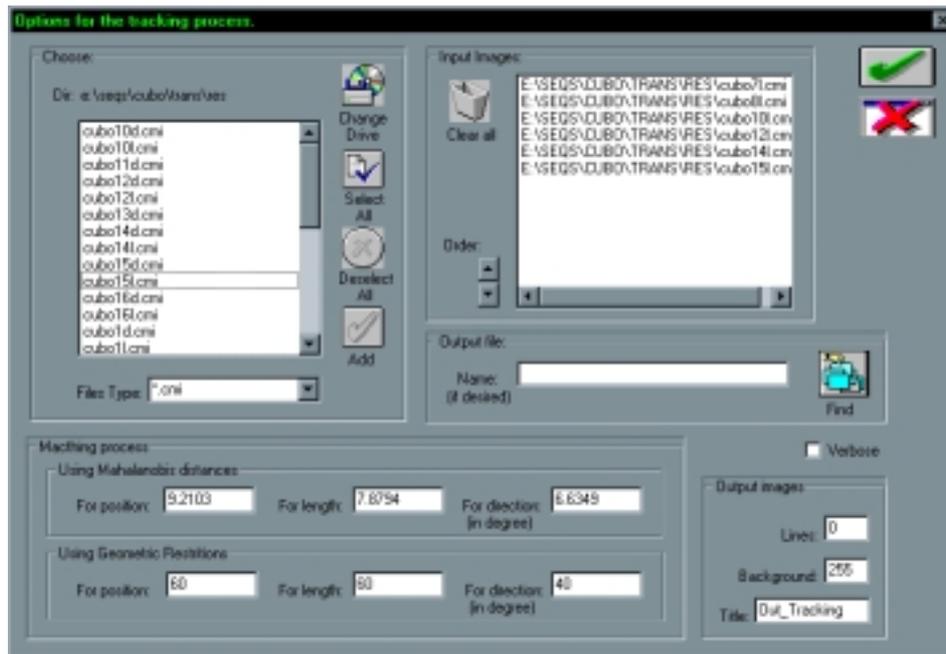


Figura 6.22 – Especificação dos ficheiros, e dos parâmetros a considerar, no processo de seguimento dos segmentos de recta que os constituem.

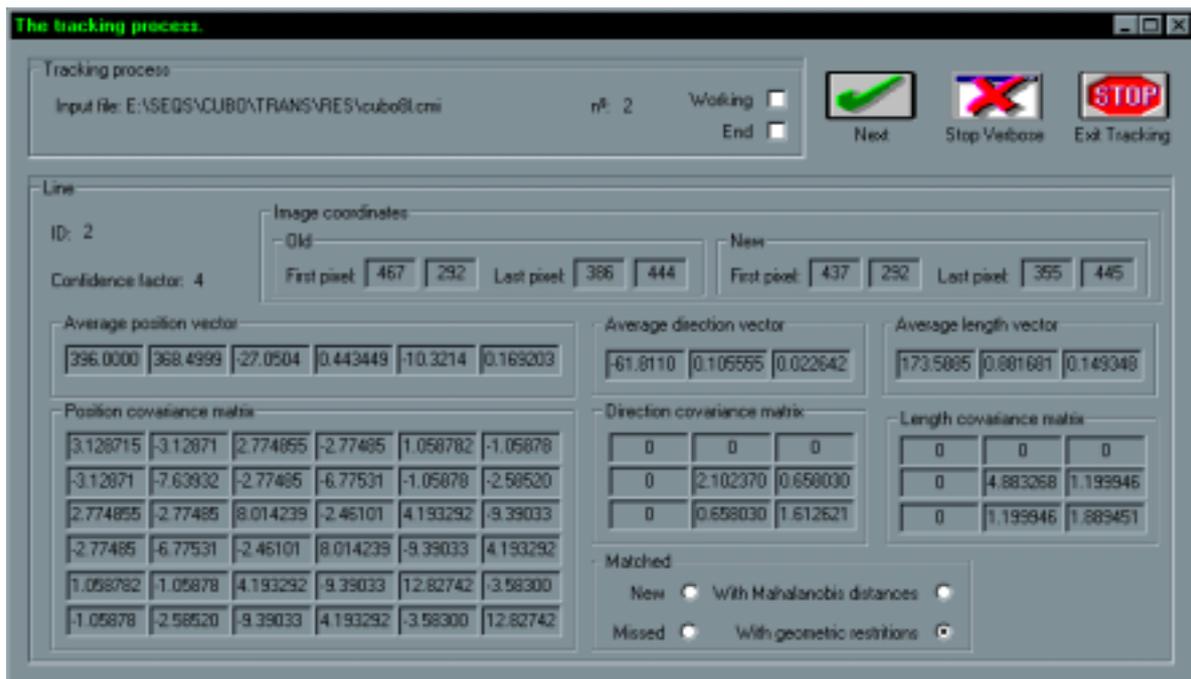


Figura 6.23 – Descrição do processo de seguimento de segmentos de recta ao longo de uma sequência.

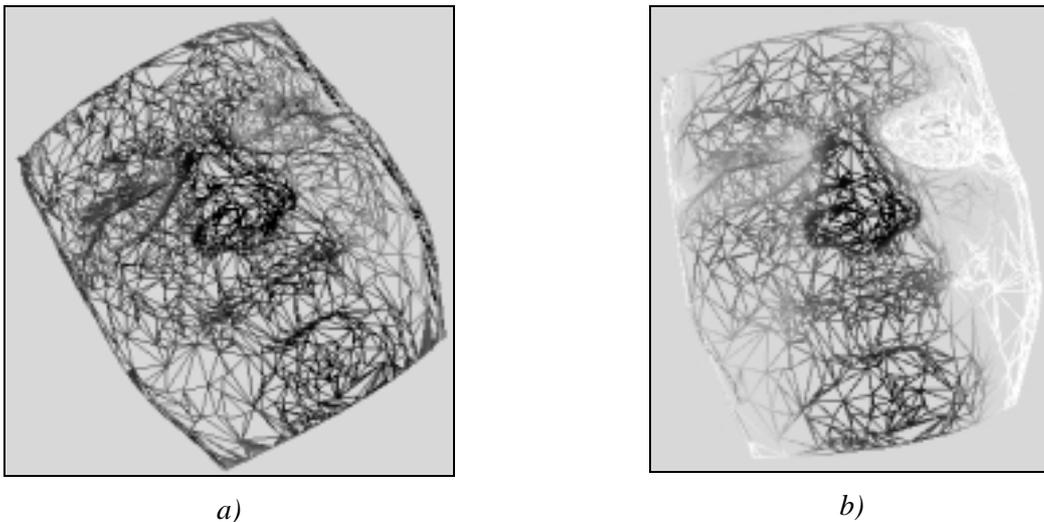
6.6.4 – Computação e visualização gráfica

Uma das características interessantes da plataforma desenvolvida é a integração, num só sistema, de ferramentas de processamento e análise de imagem com ferramentas e entidades habitualmente existentes em computação gráfica. Com esta integração, totalmente transparente, torna-se possível utilizar numa só aplicação imagens *Bitmap* e entidades usuais

em computação gráfica e, com a utilização de adequadas conversões, utilizar as ferramentas que estão normalmente disponíveis em cada domínio aumentando-se assim a funcionalidade do sistema global.

De seguida, são referidas algumas das funções disponíveis para objectos gráficos:

- eliminação de pontos duplicados e primitivas degeneradas;
- simplificação de objectos, por meio de uma técnica de decimação [Foley, 1991; Schroeder, 1998, 1999] (*Figura 6.24*) ou por amostragem; também, em sentido oposto, foi incluída uma função para a subdivisão das células de um objecto;



*Figura 6.24 – Simplificação de um objecto: a) Objecto original (2943 pontos);
b) Objecto simplificado (2075) pontos.*

- diminuição do ruído presente na estrutura de um objecto gráfico por suavização Laplaciana;
- conversão entre diferentes tipos de estrutura de objectos gráficos;
- visualização das normais nos vértices de um objecto gráfico;
- deformação geométrica de um objecto gráfico utilizando o escalar associado a cada um dos seus pontos: cada ponto é deslocado ao longo da normal que por ele passa, sendo este deslocamento definido por um valor, arbitrado pelo utilizador, multiplicado pelo escalar associado ao ponto (*Figura 6.25*);
- projecção de um objecto gráfico 3D num dos três planos coordenados;
- alteração das dimensões de um objecto gráfico por normalização das coordenadas dos seus pontos;

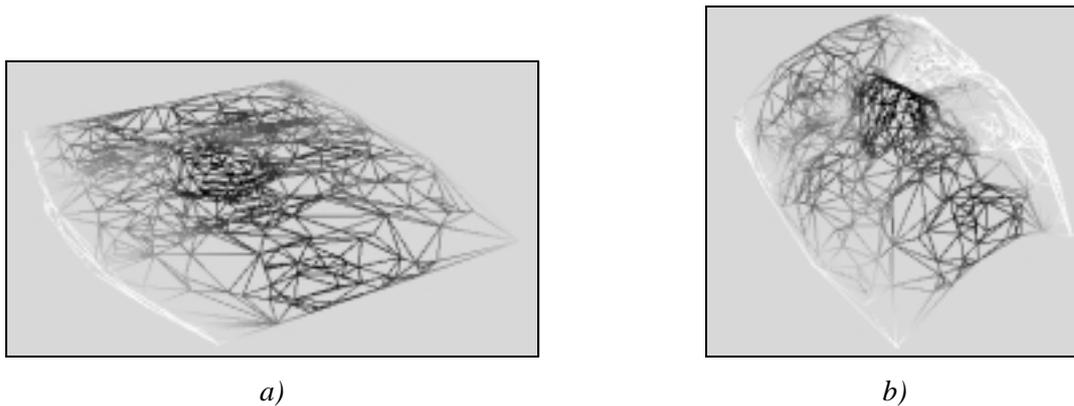


Figura 6.25 – Deformação da geometria de um objecto utilizando os escalares: a) Objecto original com valores escalares associados aos seus pontos; b) Objecto resultante.

- encolhimento, num determinado valor, das células que constituem um objecto gráfico (Figura 6.26);



Figura 6.26 – Encolhimento das células de um objecto: a) Objecto original; b) Objecto resultante.

- determinação do centro das células de um objecto gráfico;
- binarização de um objecto gráfico, quer ao nível dos seus pontos quer ao nível das seus células, por valor mínimo, por valor máximo ou por uma faixa de valores (Figura 6.27);
- realização das operações lógicas de união, diferença, intersecção e união de magnitudes (Figura 6.28) entre dois objectos gráficos;
- visualização da transformação, de forma faseada, de um objecto gráfico num outro (esta transformação, geralmente designada por *morphing*, foi implementada permitindo que os objectos intermédios sejam visualizados numa mesma janela e desfasados entre si de um intervalo de tempo especificado pelo utilizador, podendo o número de etapas utilizadas na transformação ser também definido);
- amostragem de um objecto gráfico nos pontos que constituem um outro objecto;

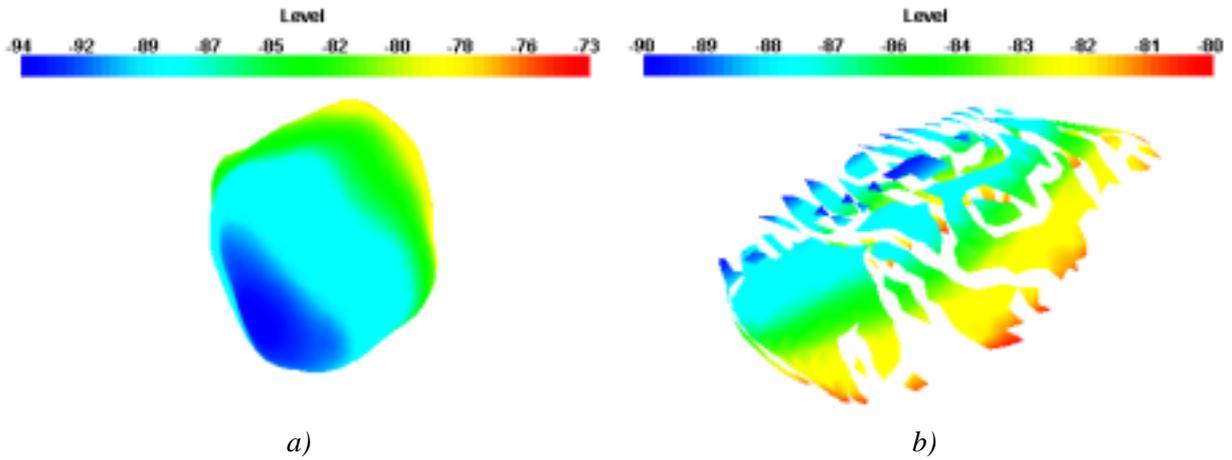


Figura 6.27 – Binarização das células de um objecto: a) Objecto original; b) Objecto resultante da binarização das células com valores entre -90.0 e -80.0 .
[Reprodução a cores em anexo.]

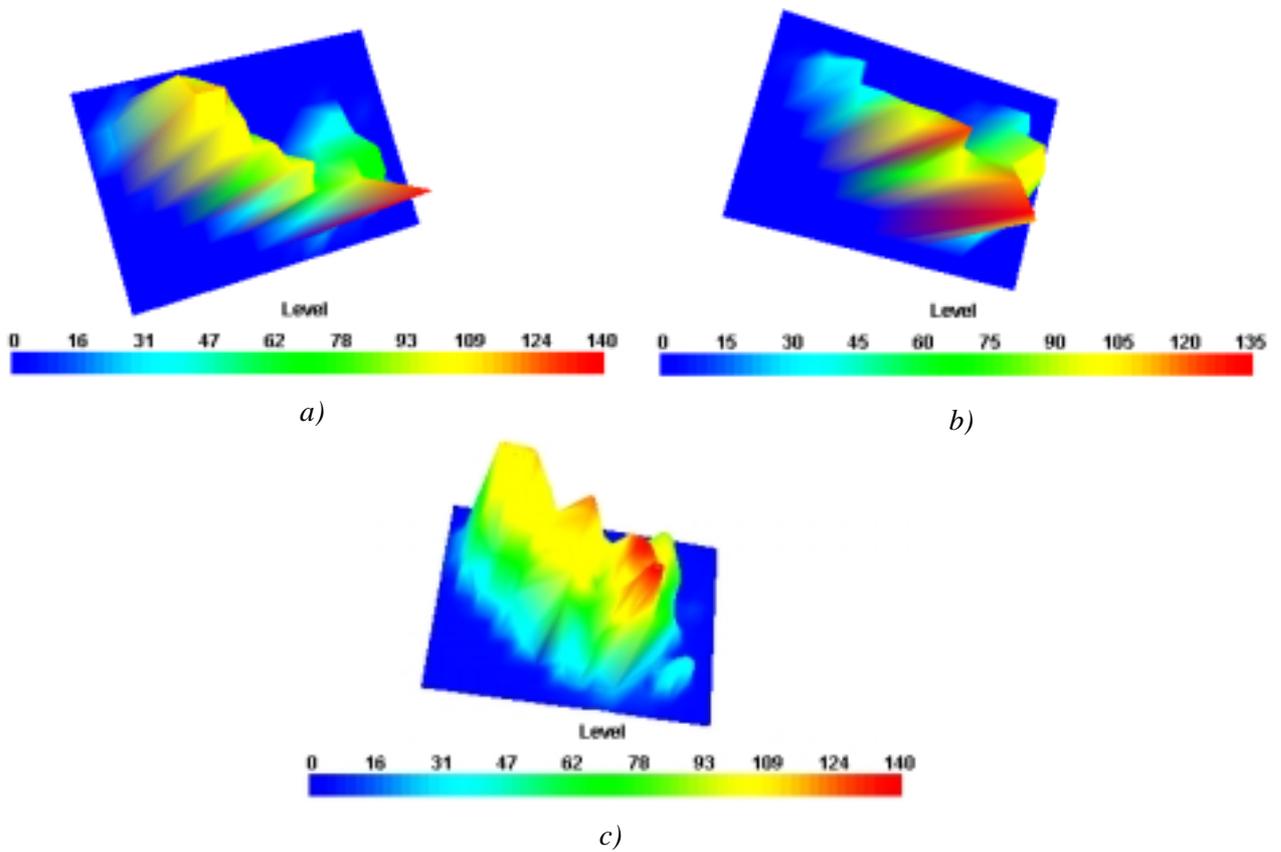


Figura 6.28 – União de dois objectos: a) Objecto original 1; b) Objecto original 2; c) Objecto resultante.

- aplicação a um objecto gráfico de uma transformação 3D rígida constituída por uma rotação em torno de um determinado ponto, um escalamento em relação a um dado ponto e uma translação (Figura 6.29);
- extracção do contorno exterior, de contornos de isonível e de arestas específicas, de um objecto gráfico (Figura 6.30 e Figura 6.31);

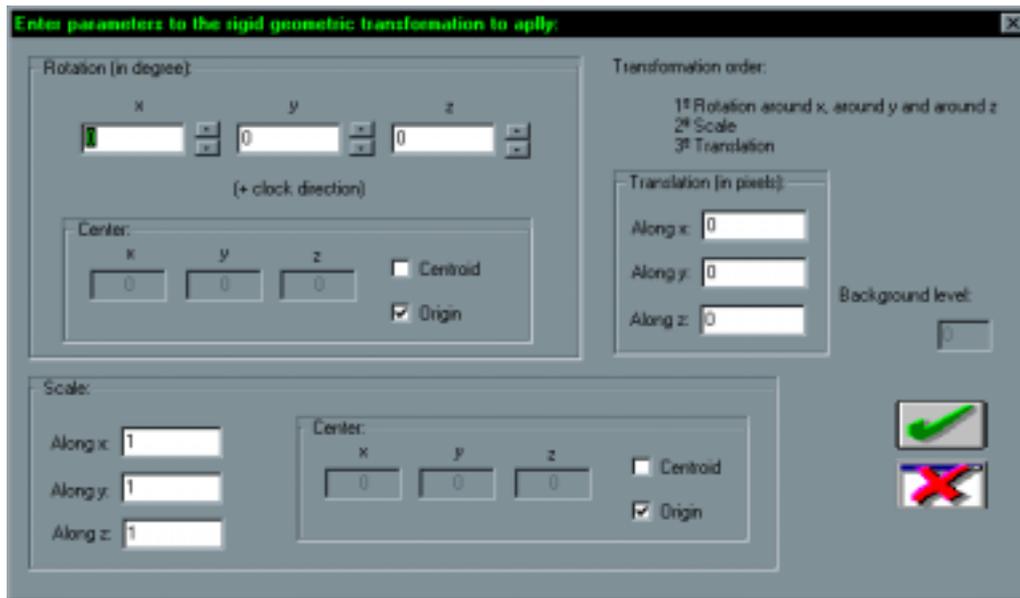


Figura 6.29 – Especificação dos parâmetros da transformação rígida a aplicar.

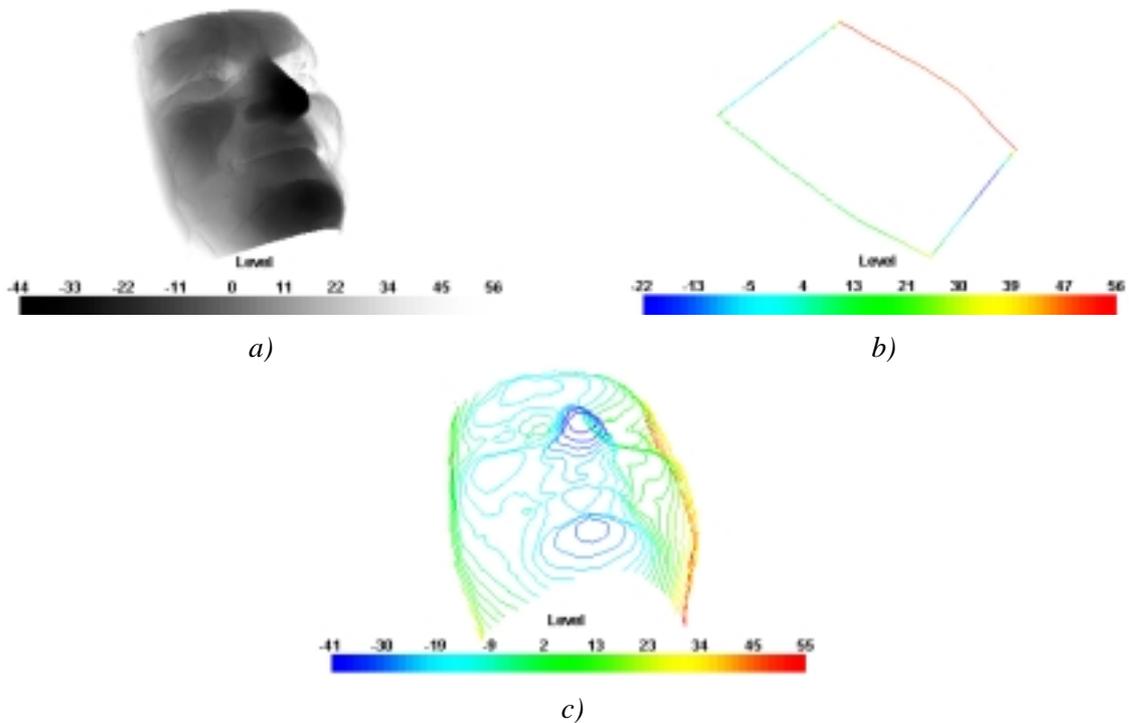


Figura 6.30 – Determinação dos contornos de um objecto: a) Objecto original; b) Contorno exterior; c) Alguns contornos de isonível. [Reprodução a cores em anexo.]



Figura 6.31 – Determinação das orlas de um objecto: a) Objecto original; b) Arestas determinadas.

- triangulação 2D e 3D de Delaunay e reconstrução de superfícies de sólidos tridimensionais [Schroeder, 1998, 1999];
- extrusão rotacional (*Figura 6.32*);

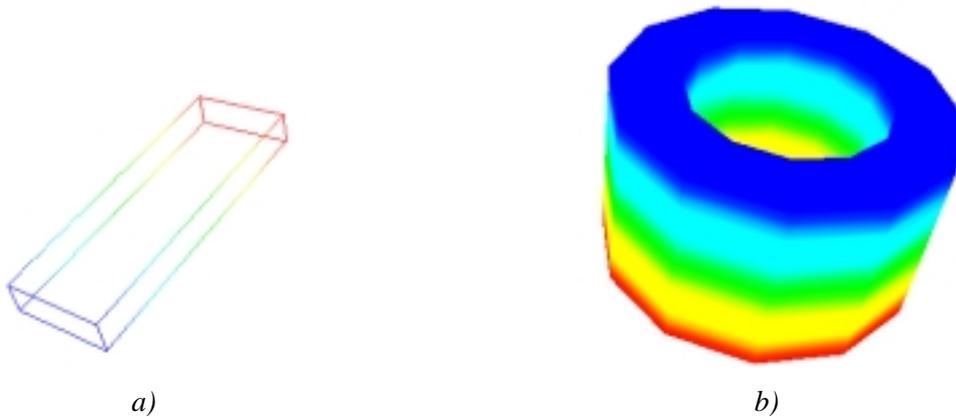


Figura 6.32 – Extrusão rotacional de um objecto: a) Objecto a extrudir; b) Objecto resultante da extrusão de 360° com translação nula e raio nulo.

Na plataforma desenvolvida é possível ao utilizador controlar uma série de parâmetros de visualização e de representação dos objectos *VTK*, nas respectivas janelas de visualização. As funções disponíveis para tal controlo são as seguintes:

- Definir o texto, e a respectiva formatação, a inserir na janela de visualização do documento (*Figura 6.33*).

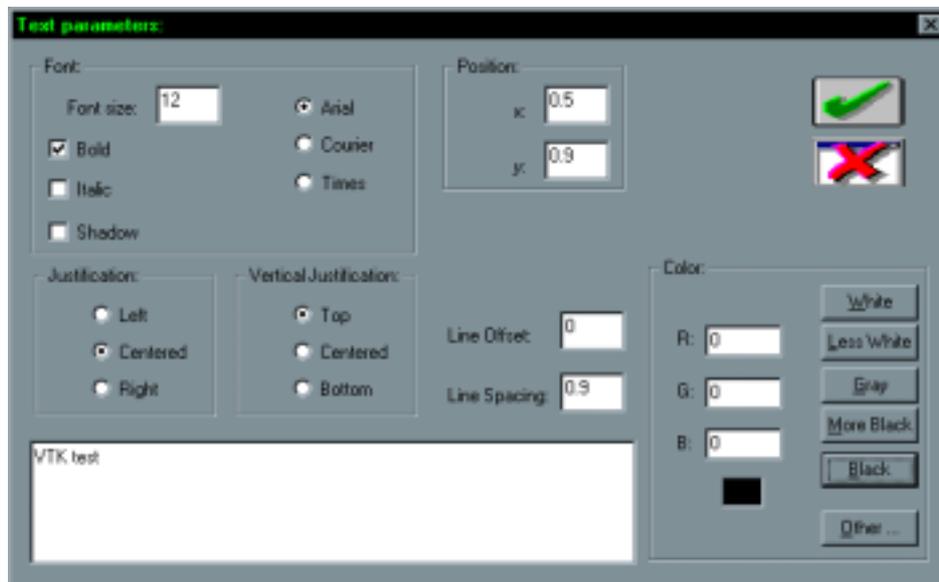


Figura 6.33 – Especificação e formatação do texto a inserir numa cena.

- Activar ou desactivar a identificação dos pontos visíveis dos objectos (*Figura 6.34*).
- Activar ou desactivar a identificação das células visíveis dos objectos.

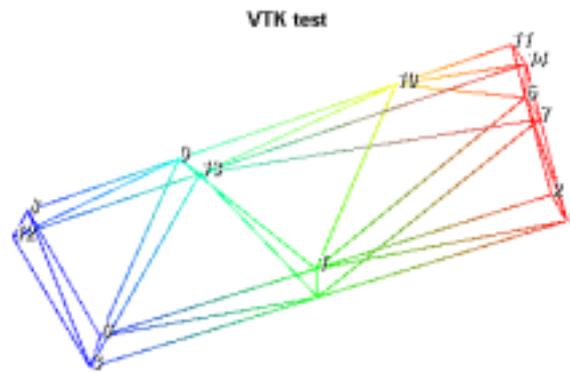


Figura 6.34 – Identificação dos pontos de um objecto.

- Activar ou desactivar a representação dos eixos coordenados; é possível ao utilizador especificar a origem e a escala.
- Escolher do tipo de vista pretendida para a cena: de cima, de baixo, de frente, de trás, da esquerda, da direita ou isométrica.
- Activar ou desactivar a barra de cores para os valores escalares associados aos pontos que constituem os objectos representados; é possível especificar a sua posição na janela, o título e sua formatação, o número de etiquetas e a formatação numérica das mesmas (Figura 6.35).



Figura 6.35 – Formatação da barra de cores associada aos escalares dos objectos.

- Seleccionar do tipo de tabela de cores utilizada na representação dos objectos: a cores, a preto e branco, de saturação ou de tonalidade; é possível o utilizador definir o número de níveis a utilizar.
- Seleccionar a cor do fundo da janela activa.
- Seleccionar a representação a utilizar para os objectos: por pontos, por estruturas em

arame, por superfícies.

- Definir o tipo de interpolação a utilizar para os objectos: Flat, Gouraud ou Phong.
- Definir o tamanho da janela de visualização activa; as janelas de visualização dos documentos podem também ser redimensionadas com a utilização do rato.

6.6.5 – Específicas à tese

Nesta subsecção serão descritas sucintamente as funções disponíveis na plataforma de desenvolvimento e ensaio consideradas como mais específicas à tese. Em primeiro lugar serão descritas as funções relacionadas com os documentos do tipo imagem e seguidamente as relacionadas com os documentos *VTK*.

6.6.5.1 – Documentos imagem

6.6.5.1.1 – Para contornos

A detecção de contornos dos objectos presentes numa imagem foi implementada utilizando-se histerese da amplitude, com a possibilidade de efectuar a aproximação poligonal dos contornos detectados através do algoritmo de faixas dinâmicas, e da determinação da curvatura e do *chain-code* [Schalkoff, 1989]. A respectiva função deve ser utilizada sobre uma imagem de amplitudes resultante de um qualquer detector de orlas de intensidade aplicado na imagem original.

Na *Figura 6.36* está representado um exemplo de detecção dos contornos presentes numa imagem original.

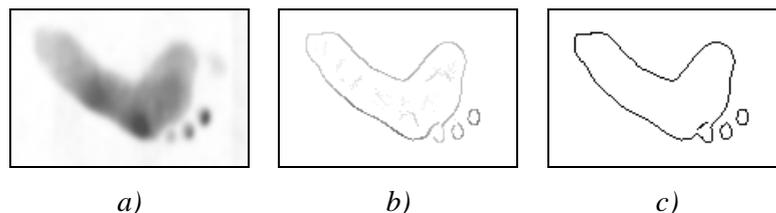


Figura 6.36 – Exemplo de detecção de contornos: a) Imagem original; b) Imagem de amplitudes resultante de um detector de orlas de intensidade aplicado na imagem original; c) Contornos determinados.

A qualquer momento o utilizador pode inserir um novo contorno, aberto ou fechado, utilizando o rato para identificar os *pixels* que o constituem. No caso de contorno fechado os *pixels* são automaticamente ligados entre si.

Também é possível ao utilizador apagar um contorno especificado, definir os contornos existentes como pertencentes a um único contorno fechado ou aberto, determinar o número de contornos presentes, verificar algumas características de um contorno especificado (*Figura 6.37*) e identificar um *pixel* pertencente a um contorno; foi igualmente implementada a

transformação rígida 2D de contornos, com especificação de rotação, escala e translação.

Foram implementadas funções para a determinação do *chain-code* e do valor da curvatura dos *pixels* que constituem um dado contorno, operações bastante utilizadas e que foram também necessárias durante esta tese.

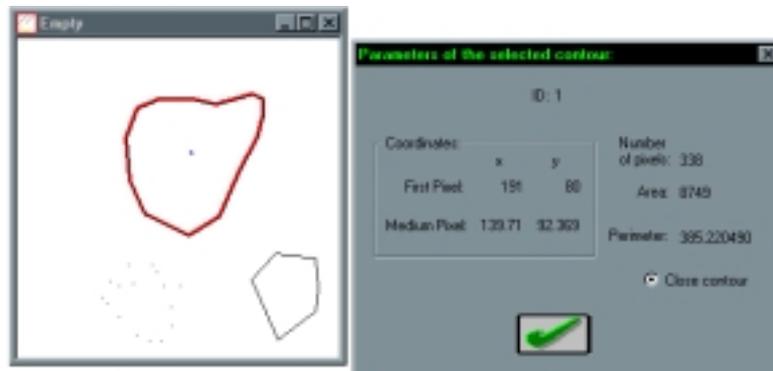


Figura 6.37 – Verificação de algumas características de um contorno.

A determinação da cobertura convexa (*Convex Hull*) [Foley, 1991; Schroeder, 1998] de um conjunto de pontos é também uma operação bastante utilizada em visão por computador; durante este trabalho, esta operação foi implementada e utilizada essencialmente para se determinar o contorno exterior de um conjunto de pontos não estruturados.

Na Figura 6.38 está representado um exemplo da determinação do *Convex Hull* de um conjunto original de pontos.

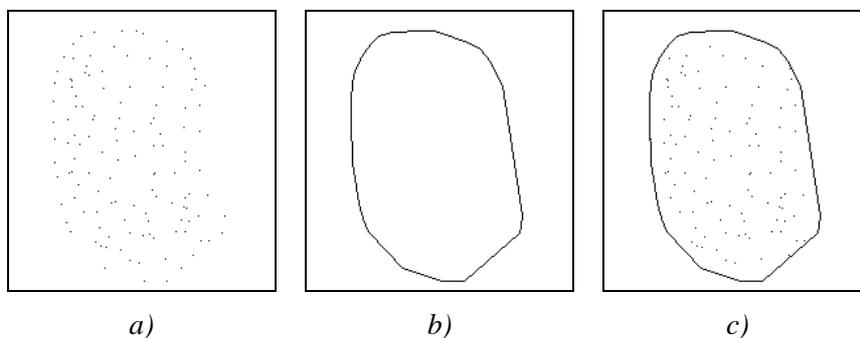


Figura 6.38 – Determinação do *Convex Hull* de um conjunto de pontos: a) Conjunto original; b) *Convex Hull* determinado; c) Representação sobreposta do *Convex Hull* determinado e do conjunto original de pontos.

Na plataforma de desenvolvimento e ensaio foram integradas funções que permitem a análise da vibração de um contorno em modo livre utilizando os modos próprios da forma do objecto (ver terceiro capítulo), ou a modelização física do contorno por intermédio de um elemento finito isoparamétrico 2D de *Scleroff* ou por intermédio de um conjunto de elementos finitos axiais lineares agrupados (ver capítulo anterior). Após o cálculo dos modos próprios de vibração, o utilizador pode visualizá-los, determinar os deslocamentos obtidos considerando um determinado conjunto de modos, criar uma imagem considerando os deslocamentos

associados a este conjunto e criar uma imagem para cada modo de vibração considerando os deslocamentos associados.

Na *Figura 6.39* está visível o diálogo disponível ao utilizador para este verificar os resultados obtidos e construir, segundo os seus próprios critérios, as imagens de resultados.

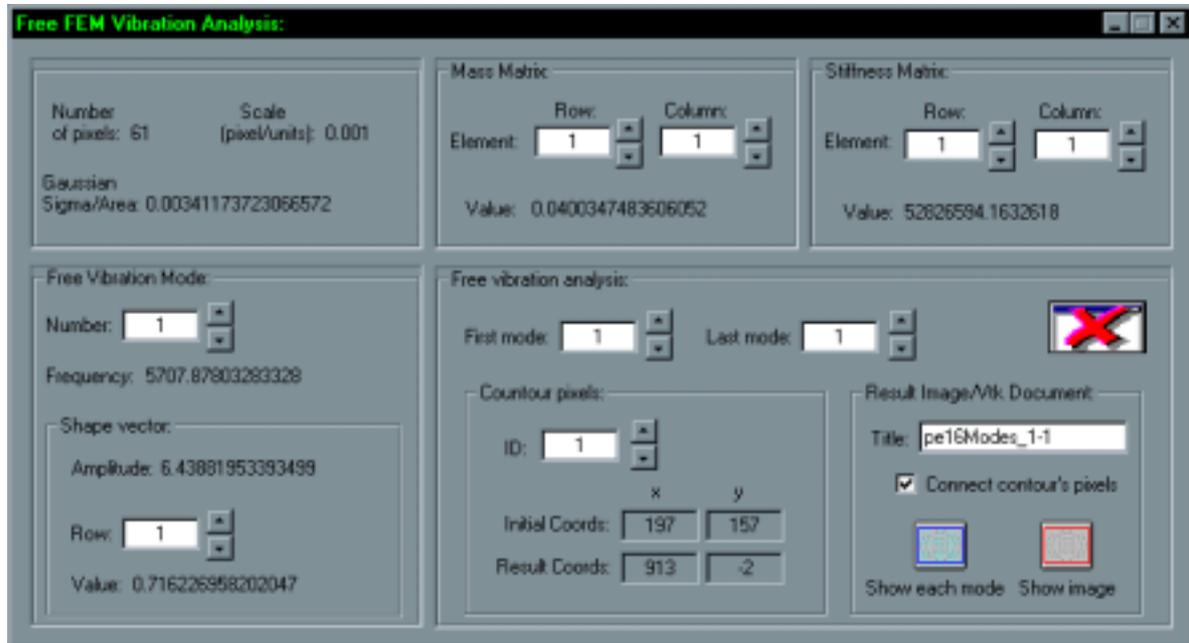


Figura 6.39 – Diálogo disponível ao utilizador para este verificar a análise da vibração de um contorno em modo livre.

A determinação das correspondências entre dois contornos utilizando o método de mapeamento segundo a distância mínima, apresentado no terceiro capítulo, foi implementada na plataforma desenvolvida. Além das correspondências obtidas é possível verificar a estimação para a transformação rígida existente entre os dois contornos, obtida utilizando uma implementação do método de *quaternions* unitários também apresentado no referido capítulo.

Na *Figura 6.40* pode-se analisar o diálogo apresentado ao utilizador para este verificar os resultados obtidos, criar as imagens de resultados pretendidas e, caso deseje, alterar as condições de emparelhamento utilizadas.

Também foi implementada uma função para determinar as correspondências entre dois contornos utilizando o método baseado na análise modal da forma, apresentado no terceiro capítulo, ou utilizando o método apresentado no quarto capítulo baseado em modelização física, por intermédio de dois elementos finitos isoparamétricos 2D de *Scleroff* ou por intermédio de dois conjuntos de elementos finitos axiais lineares agrupados, com posterior emparelhamento modal. Com esta função é possível determinar-se as correspondências entre os dois contornos, a transformação geométrica rígida existente entre os dois, estimar os deslocamentos nodais por minimização da energia de deformação do modelo físico considerado (caso seja utilizado o método da análise modal da forma, é criado um modelo físico para cada contorno sendo os parâmetros e o tipo de modelização pretendidos

especificados pelo utilizador), determinar o valor da energia de deformação necessária para os alinhar, criar uma imagem com os resultados obtidos e alterar as condições utilizadas para o emparelhamento modal.

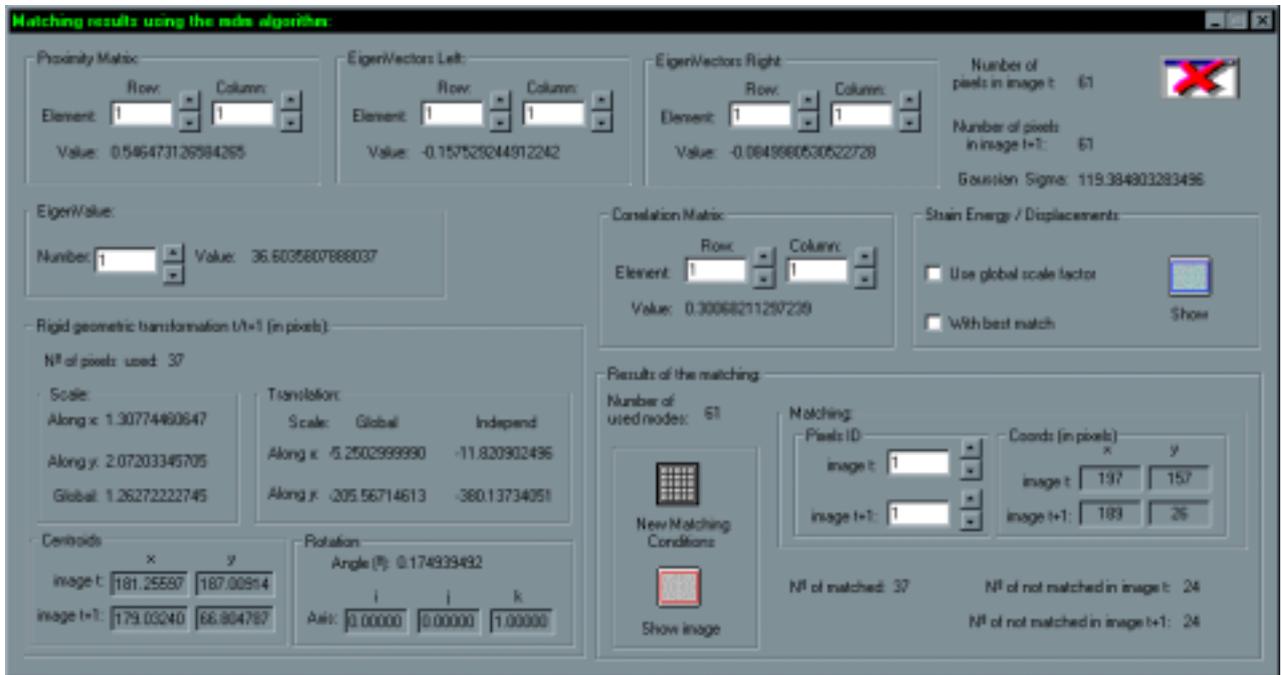


Figura 6.40 – Resultados da determinação das correspondências entre dois contornos utilizando o método do mapeamento segundo a distância mínima.

Na Figura 6.41 é possível visualizar-se o diálogo para o utilizador especificar a metodologia, e as respectivas condições pretendidas para determinar o emparelhamento entre dois contornos. Analisando-se a referida figura, é possível verificar os vários parâmetros a utilizar e a facilidade com que os mesmos podem ser especificados pelo utilizador.

O diálogo disponível para o utilizador verificar os resultados de emparelhamento, alterar as condições do emparelhamento modal, criar as imagens de resultados pretendidas e para executar a estimação dos deslocamentos nodais e cálculo da energia de deformação, está representado na Figura 6.42. Analisando a referida figura, é possível, mais uma vez, comprovar as boas condições de ensaio disponíveis na plataforma desenvolvida.

Na Figura 6.43 estão representados dois contornos originais e uma imagem com as correspondências obtidas entre estes.

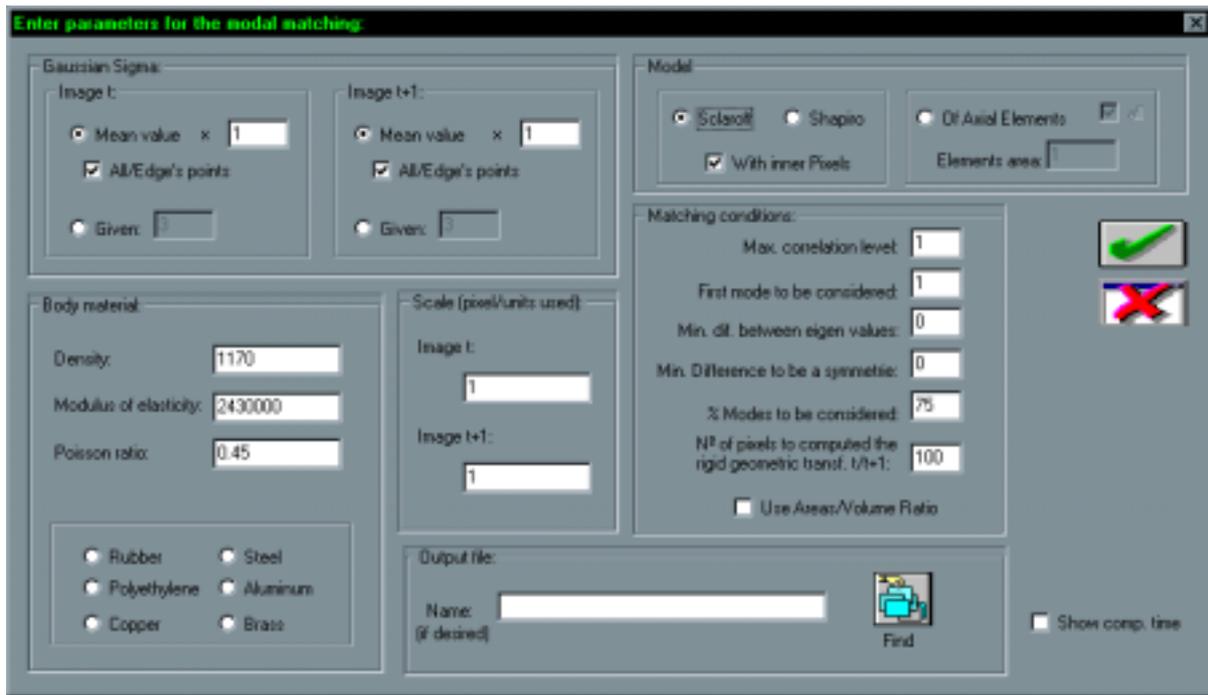


Figura 6.41 – Escolha do tipo de modelização física e dos seus parâmetros pretendidos e das condições desejadas para o emparelhamento modal.

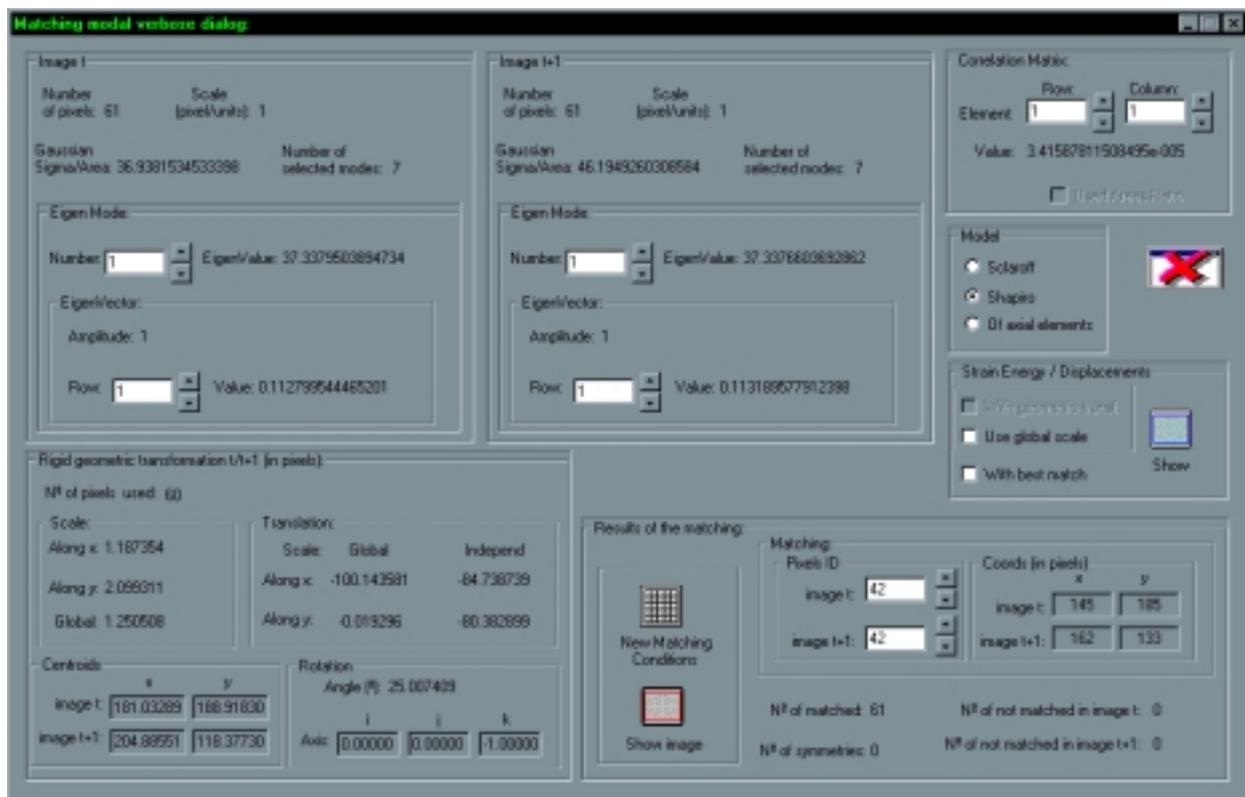


Figura 6.42 – Verificação dos resultados obtidos na determinação das correspondências entre dois contornos.

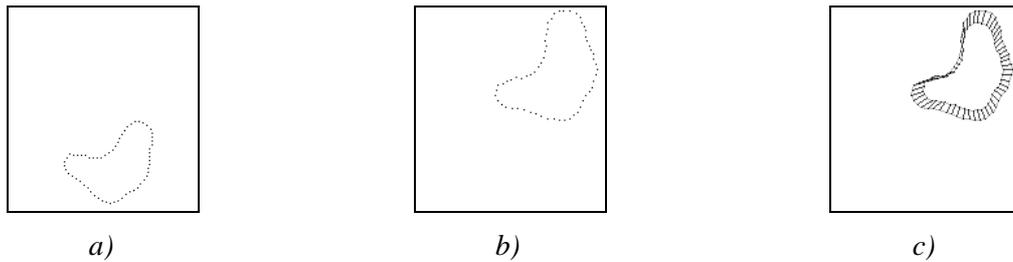


Figura 6.43 – Determinação das correspondências entre dois contornos: a) Contorno 1; b) Contorno 2; c) Correspondências determinadas após aplicação aos pixels do contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

6.6.5.1.2 – Para superfícies

Criação de superfícies

Para inserir uma superfície, constituída por n linhas e m colunas, o utilizador pode especificar, através de cliques no botão esquerdo do rato, as localizações pretendidas para os seus nodos na imagem *bitmap* original, sendo o nível de brilho de cada *pixel* seleccionado tomado como a sua terceira coordenada.

Em vez de utilizar esta inserção manual, é também possível criar automaticamente uma superfície por amostragem rectangular de uma imagem *bitmap*, utilizando dois níveis de detalhe: um para a zona interior do rectângulo que circunscreve o objecto e um outro para a zona exterior, ou considerando o mesmo nível de detalhe para toda imagem.

Na *Figura 6.44* é possível verificar-se a visualização de uma superfície utilizando-se a aplicação de domínio público *Win4Dv* [Shenoy, 1995], útil para a visualização de malhas poligonais, resultante de uma amostragem rectangular uniforme de uma imagem original.

Também foi implementada uma função para a criação automática de superfícies utilizando-se amostragem adaptativa (ver capítulo anterior). Nesta amostragem também é considerado o nível de intensidade de cada *pixel* como a sua terceira coordenada, sendo a amostragem realizada por análise dos perfis de intensidade radiais centrados nos pontos de máximos locais de brilho.

Na *Figura 6.45* está representada a superfície resultante da amostragem adaptativa da imagem original da *Figura 6.44*.

Utilitários

Em qualquer instante o utilizador pode apagar uma superfície, converter uma superfície num contorno aberto, realizar a normalização das coordenadas dos *pixels* de uma superfície ao longo do eixo z , atribuir uma cota uniforme aos *pixels* que constituem uma superfície, determinar o número de *pixels* que a constituem, identificar um determinado *pixel* de uma superfície e verificar se é ou não uma superfície com multiresolução e medir os seguintes

parâmetros: número de *pixels*, coordenadas do primeiro *pixel* e do centróide, dimensões máximas e mínimas.

Durante este trabalho foi muitas vezes necessário aplicar a uma superfície uma transformação geométrica rígida 3D, constituída por uma rotação em torno de um determinado ponto, um escalamento em relação a um dado ponto e uma translação. Esta transformação foi implementada na plataforma desenvolvida sendo os parâmetros da transformação pretendida facilmente especificados pelo utilizador.

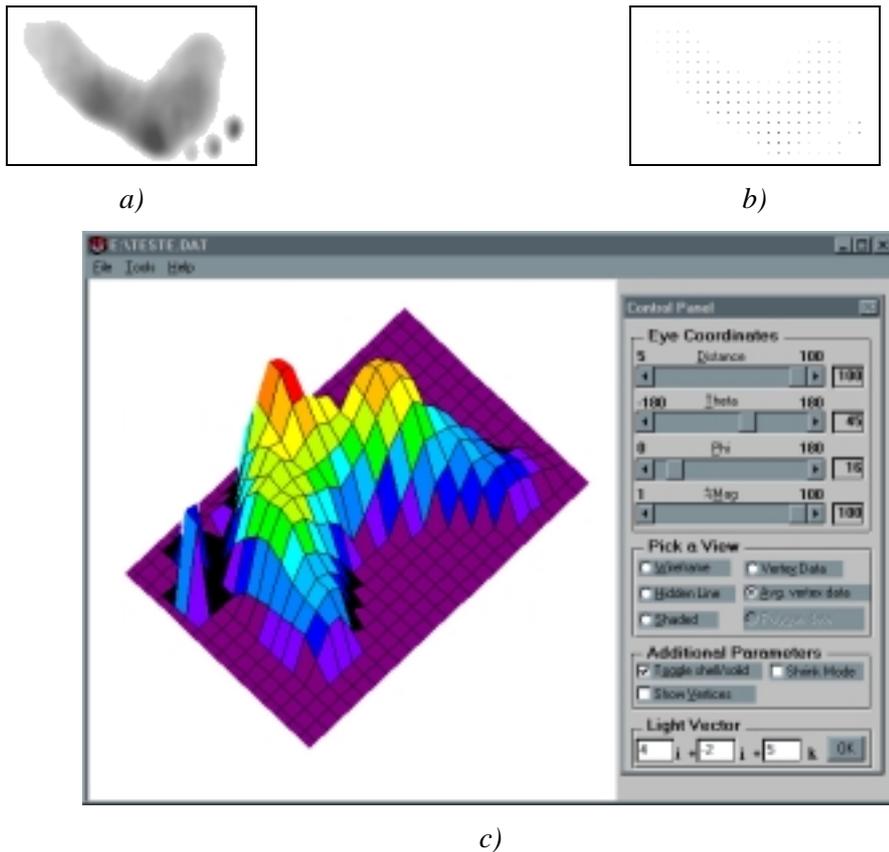


Figura 6.44 – Visualização 3D de uma superfície: a) Imagem original (negada); b) Amostragem resultante; c) Superfície visualizada na aplicação Win4Dv. [Reprodução a cores em anexo.]



Figura 6.45 – Criação de uma superfície para a imagem original da Figura 6.44 utilizando-se amostragem adaptativa.

Como já foi referido, a aplicação de domínio publico *Win4Dv* é útil para se visualizar objectos de malha poligonal; assim foram integradas funções para exportar uma ou duas superfícies especificadas sendo, neste caso, possível definir qual a translação a utilizar entre elas e qual a escala a considerar para cada uma, para visualização 3D na referida aplicação.

Reconstrução/determinação da estrutura

Após a determinação dos pontos que constituem uma dada superfície é por vezes necessário determinar a estrutura de malha triangular que melhor se adapta a tal conjunto de pontos. Assim foram implementadas funções para realizar a triangulação 2D de *Delaunay* [Foley, 1991; Schroeder, 1998, 1999], considerando ou não a cota dos pontos originais como terceira coordenada dos pontos do objecto resultante, e a triangulação 3D de *Delaunay*.

Na *Figura 6.46* estão representados estes tipos de triangulação considerando os pontos originais da *Figura 6.45*.

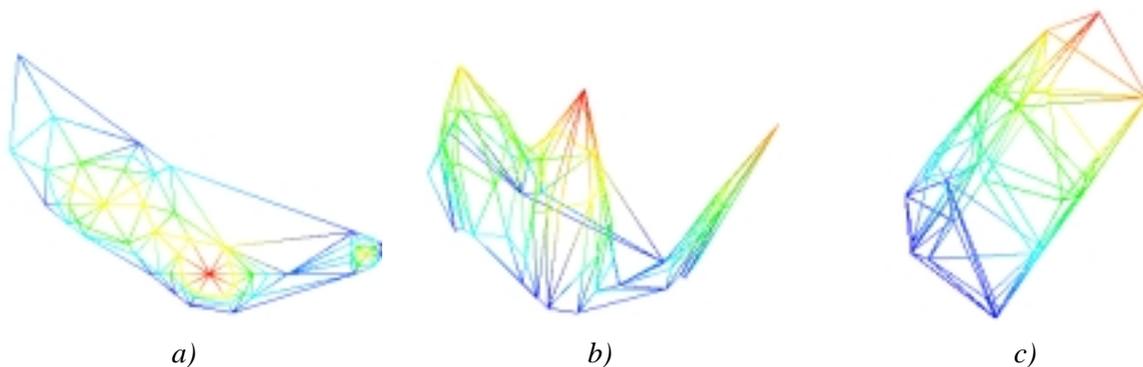


Figura 6.46 – Triangulações de *Delaunay* dos pontos da *Figura 6.45*: a) Triangulação 2D; b) Triangulação 2D utilizando a cota como a terceira coordenada; c) Triangulação 3D.

A ferramenta para reconstrução de superfícies [Schroeder, 1998, 1999] existente no *VTK* foi também disponibilizada na plataforma. Assim, sempre que um dado conjunto de pontos não estruturados pertença a uma superfície de um sólido 3D, pode-se reconstruir a superfície utilizando-se esta função.

Emparelhamento de superfícies

A análise da vibração de uma superfície em modo livre foi também implementada na plataforma desenvolvida. Esta análise pode ser efectuada utilizando-se os modos próprios da forma, ou modelização física, por intermédio de um único elemento finito isoparamétrico 3D de *Scalaroff* ou por intermédio de um conjunto de elementos finitos axiais lineares agrupados. Após o cálculo dos modos próprios de vibração o utilizador pode: visualizá-los; determinar os deslocamentos obtidos considerando um determinado conjunto de modos; criar uma imagem *Bitmap*, ou um ficheiro para posterior visualização 3D na aplicação *Win4Dv*, considerando os deslocamentos associados a um único ou a um conjunto de modos.

Na *Figura 6.47* está representado o diálogo para o utilizador verificar os resultados da análise e criar as imagens de resultados pretendidas.

A determinação das correspondências entre duas superfícies utilizando o método de mapeamento segundo a distância mínima foi também implementada na plataforma de desenvolvimento.

Na *Figura 6.48* está representado o diálogo que permite ao utilizador verificar os resultados obtidos para o emparelhamento e a transformação rígida estimada, alterar as condições de emparelhamento e construir as imagens de resultados que pretenda.

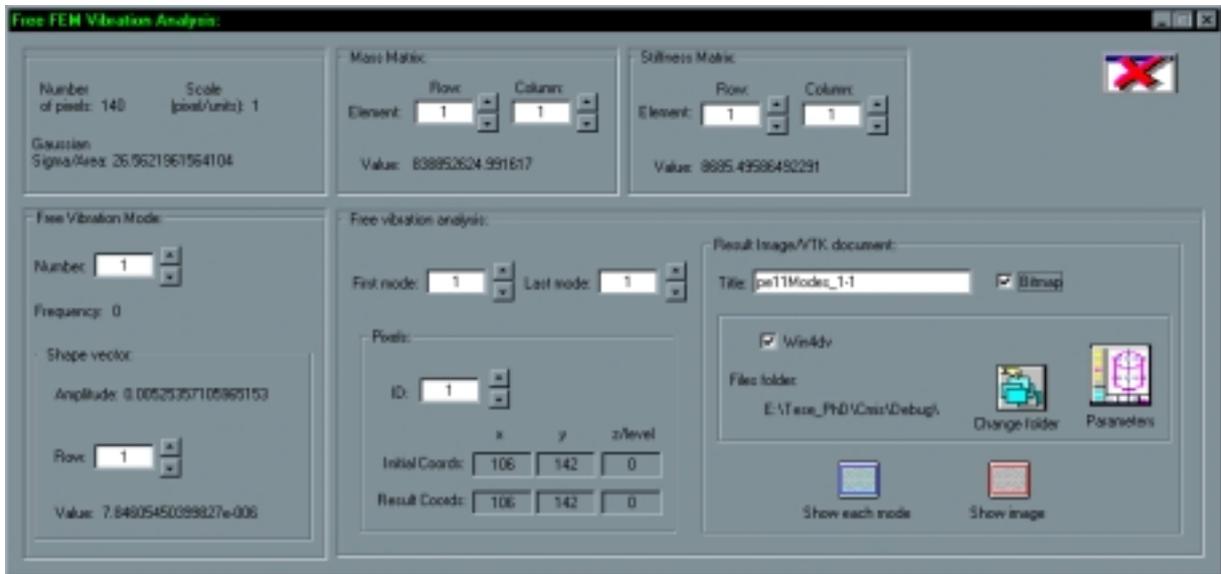


Figura 6.47 – Análise da vibração de uma superfície em modo livre.

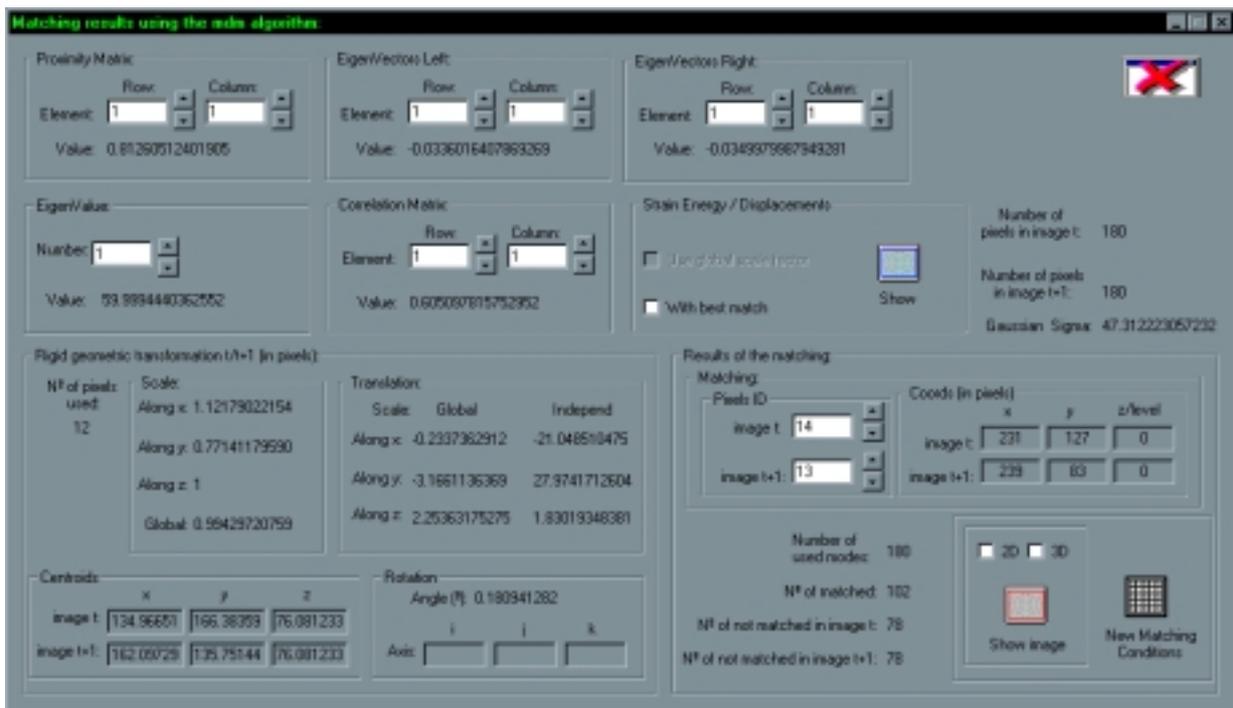


Figura 6.48 – Determinação das correspondências entre duas superfícies utilizando-se o método de mapeamento segundo a distância mínima.

Também foi implementada a determinação das correspondências entre duas superfícies utilizando o método baseado na análise modal da forma, ou utilizando o método baseado em modelização física, por intermédio de dois elementos finitos isoparamétricos 3D de *Sclaroff* ou por intermédio de dois conjuntos de elementos finitos axiais lineares agrupados, e posterior

emparelhamento modal. Com esta implementação é possível: determinar-se as correspondências; estimar a transformação geométrica rígida 3D existente entre as duas superfícies; estimar os deslocamentos nodais, por minimização da energia de deformação do modelo físico considerado; determinar o valor da energia de deformação necessária para as alinhar; criar uma imagem *Bitmap*, ou um ficheiro para a aplicação *Win4Dv*, com os resultados obtidos; e alterar as condições do emparelhamento modal e visualizar os novos resultados obtidos.

Na *Figura 6.49* está visível o diálogo apresentado ao utilizador para controlar os resultados obtidos no emparelhamento de duas superfícies, e na *Figura 6.50* é possível verificar-se um exemplo de visualização das correspondências obtidas utilizando-se a aplicação *Win4Dv*.

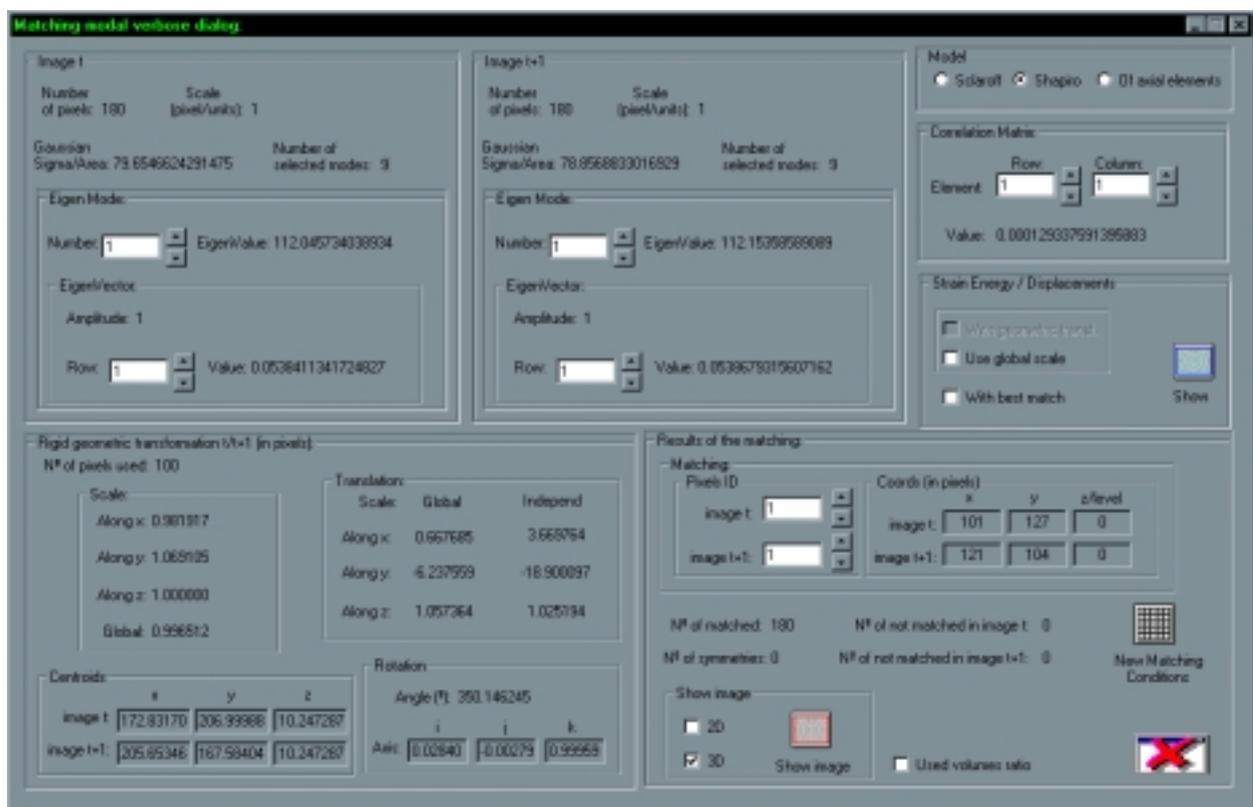


Figura 6.49 – Determinação das correspondências entre duas superfícies.

6.6.5.2 – Documentos VTK

Para documentos do tipo *VTK* foram integradas mais algumas funções na plataforma desenvolvida relacionadas com a análise de vibrações de um objecto em modo livre, a determinação das correspondências entre dois objectos, a estimação da transformação rígida existente entre os dois, a determinação dos deslocamentos nodais e o valor da energia de deformação necessária para os alinhar. Seguidamente são descritas as funções implementadas.

Foi implementada a análise (2D ou 3D) da vibração de um objecto⁵ em modo livre

⁵ Na análise 2D as coordenadas ao longo do eixo z dos objectos são desprezadas.

utilizando os modos próprios da forma, ou utilizando a modelização física do objecto. Após o cálculo dos modos próprios de vibração, o utilizador pode visualizá-los, determinar os deslocamentos obtidos considerando um determinado conjunto de modos, criar um novo documento considerando os deslocamentos associados a este conjunto, e criar um novo documento para cada modo de vibração considerando os deslocamentos associados.

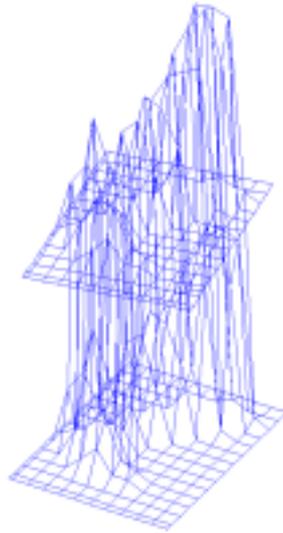


Figura 6.50 – Visualização 3D, através da aplicação Win4Dv, das correspondências obtidas entre duas superfícies.

A determinação das correspondências entre dois objectos utilizando o método de mapeamento segundo a distância mínima foi também implementada. Nesta determinação pode-se considerar apenas as coordenadas do objecto no plano xy (utilizando-se a metodologia 2D), ou considerar-se as três coordenadas de cada nodo dos objectos (utilizando-se a metodologia 3D). Além das correspondências obtidas, o utilizador pode visualizar a transformação rígida estimada, alterar as condições de emparelhamento e criar novos documentos com os resultados obtidos.

Também foi implementada a determinação (2D ou 3D) das correspondências entre dois objectos *VTK* utilizando⁶ o método baseado na análise modal da forma, ou o método baseado em modelização física, e posterior emparelhamento modal. Com a respectiva função é possível verificar-se as correspondências obtidas, analisar e estimar a transformação geométrica rígida existente entre os dois objectos, estimar os deslocamentos nodais, por minimização da energia de deformação do modelo físico considerado, determinar o valor da energia de deformação necessária para os alinhar, criar um novo documento com os resultados obtidos, e alterar as condições de emparelhamento modal, visualizando os novos resultados obtidos.

Na *Figura 6.51* é possível verificar-se um exemplo da representação das correspondências obtidas entre dois objectos 3D.

⁶ No caso 2D, são apenas consideradas as suas coordenadas no plano xy .

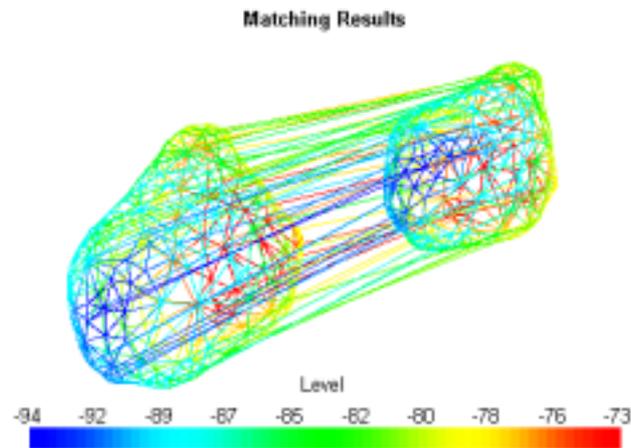


Figura 6.51 – Exemplo da representação das correspondências determinadas entre dois objectos.

6.7 – Sumário e conclusões

Neste capítulo foi apresentada a plataforma de desenvolvimento e ensaio iniciada, expandida e utilizada durante o trabalho relacionado com esta tese. Esta plataforma foi desenvolvida em linguagem C^{++} no ambiente integrado de desenvolvimento *Microsoft Visual C^{++}* para sistemas operativos *Microsoft Windows 95/98/NT/2000*.

A plataforma integra algumas bibliotecas de domínio público que foram apresentadas e referenciadas. Com estas bibliotecas ficam disponíveis estruturas e operações para cálculo matricial, operações para leitura e escrita de imagens em vários formatos, e estruturas e operações normalmente comuns em aplicações de processamento e análise de imagem e em aplicações de computação gráfica.

A filosofia utilizada na estrutura e implementação da plataforma permite que esta seja facilmente configurada e adaptada a níveis diferentes de utilizadores e de aplicação, e a sua manutenção não seja demasiado complexa.

A plataforma desenvolvida apresenta duas características importantes. A primeira é a integração, num mesmo sistema, de entidades e de ferramentas normalmente consideradas em dois domínios distintos: o da visão por computador e o da computação gráfica; esta integração torna possível aos utilizadores disporem e operarem num só sistema com um vasto conjunto de entidades e de ferramentas. A segunda característica que a plataforma apresenta é a facilidade com que as funções incorporadas podem ser parametrizadas e controladas; os resultados obtidos podem ser verificados e visualizados, conseguindo-se assim realizar ensaios exaustivos dos métodos envolvidos.

As funções integradas no sistema foram descritas de forma sucinta neste capítulo. Assim, em primeiro lugar foram apresentadas as funções de índole mais geral e comum a um sistema de processamento e análise de imagem, a seguir foram descritas as funções geralmente

associadas a sistemas de computação gráfica e, por fim, foram relatadas as funções mais directamente relacionadas com o tema desta tese.

Actualmente a aplicação já incorporou contribuições de outros investigadores do grupo e serviu de plataforma de desenvolvimento e ensaio a vários alunos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, nos seus trabalhos de licenciatura e de mestrado, na área da análise e processamento de imagem. Confirmou-se que a integração de novas funções, descrita de forma breve neste capítulo, é fácil e transparente o que torna mais rápida a adaptação de novos investigadores.

O sistema desenvolvido também tem sido utilizado como aplicação de demonstração em cursos de processamento e análise de imagem, revelando-se uma aplicação com valor na aprendizagem.

Com a plataforma de desenvolvimento e ensaio atingiu-se um dos objectivos principais desta tese: a criação de um sistema para a análise e processamento de imagem, que constituísse, por si só, uma aplicação independente e utilizável em diferentes contextos e, ao mesmo tempo, permitisse que outros investigadores facilmente a utilizassem para o desenvolvimento dos seus próprios algoritmos, ensaio e posterior incorporação. Por outro lado, o facto de investigadores com objectivos diversos partilharem o mesmo sistema base incentiva a sua interacção e facilita as operações de actualização e de manutenção do sistema.

Em resumo, em vez de um sistema fechado, desenvolveu-se um sistema aberto que é interessante para várias aplicações e utilizadores, nomeadamente como banco de ensaio com ferramentas variadas, de processamento e análise de imagem e de computação gráfica, permitindo o estudo detalhado de novos algoritmos. Com as ferramentas desenvolvidas e implementadas no âmbito específico desta tese conseguiu-se estender as potencialidades da plataforma ao domínio da modelização de objectos deformáveis.

Capítulo VII

ENSAIOS EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA DINÂMICA

Neste capítulo são apresentados resultados de aplicação da metodologia desenvolvida a sequências de imagens de pedobarografia dinâmica.

Após uma introdução ao tema da pedobarografia, são apresentados os resultados obtidos para diferentes tipos de modelização das imagens: por contornos 2D, por superfícies de intensidade (com amostragem regular e com amostragem adaptativa), e por isocontornos.

O capítulo termina com um breve sumário e com a identificação de algumas das principais conclusões.

7.1 – Introdução

Os objectivos principais deste capítulo são a ilustração das diferentes possibilidades de modelização de objectos deformáveis estudadas e implementadas, analisar possíveis alternativas a práticas analíticas correntes numa aplicação exemplo, e verificar as capacidades da plataforma de desenvolvimento e ensaio numa situação real.

Com estes objectivos são apresentados neste capítulo alguns ensaios de aplicação da metodologia, descrita no quarto capítulo, baseada na modelização física por intermédio de elementos finitos e na análise modal dos modelos construídos, para a determinação de correspondência, estimação dos deslocamentos por minimização da energia de deformação e na utilização do valor dessa energia como medida da deformação existente, entre objectos em imagens de pedobarografia dinâmica. Esta aplicação é tomada apenas como um exemplo não constituindo uma aplicação-alvo condicionante do desenvolvimento dos trabalhos. Deve-se referir que os resultados apresentados não foram determinados tendo como objectivo principal obter-se os melhores resultados possíveis, mas antes mantendo-se os parâmetros do método constantes e determinados automaticamente a partir dos dados dos objectos a considerar.

Seguidamente é realizada uma introdução breve à pedobarografia dinâmica; depois desta introdução é descrita a filosofia utilizada na modelização dos objectos considerados em cada imagem; na secção seguinte são apresentados os resultados experimentais obtidos para objectos do tipo contorno, superfície de intensidade e isocontorno; na última secção é apresentado um sumário e algumas conclusões.

7.1.1 – Pedobarografia dinâmica

A pedobarografia [Padilha, 1995; Tavares, 2000b] é um método de medir e visualizar a distribuição de pressões sob a planta do pé. O registo de impressões pedobarográficas ao longo do tempo de uma passada em marcha normal permite a análise dinâmica do comportamento do pé; a introdução da dimensão temporal amplia o potencial deste tipo de exame como auxiliar de diagnóstico e de planeamento terapêutico.

Na prática corrente, a avaliação da dinâmica das pressões plantares é quase inteiramente subjectiva.

O sistema básico de pedobarografia consiste numa placa de vidro ou acrílico, transluminada pelos seus bordos polidos, de tal modo que a luz se reflecte internamente; a placa é coberta na sua face de topo por uma fina camada simples ou dupla de plástico, sobre a qual são aplicadas as pressões, *Figura 7.1*. Quando observada a face inferior da placa, destacam-se áreas de brilho nas zonas correspondentes à aplicação de pressão, devido à alteração localizada da relação de índices de refração produzida pelo esvaziamento da interface de ar entre a placa e a camada plástica. A relação entre a intensidade do brilho e a

pressão aplicada é de quase proporcionalidade, com uma selecção adequada de materiais e uma conveniente calibração do sistema de aquisição de imagem.

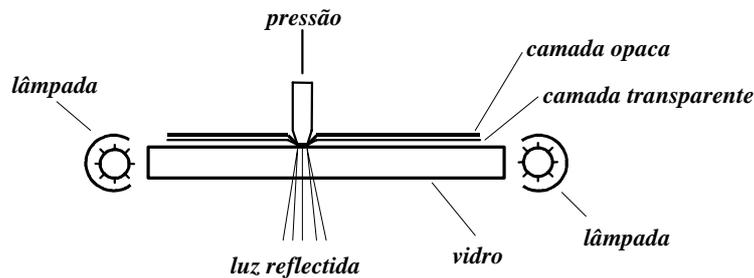
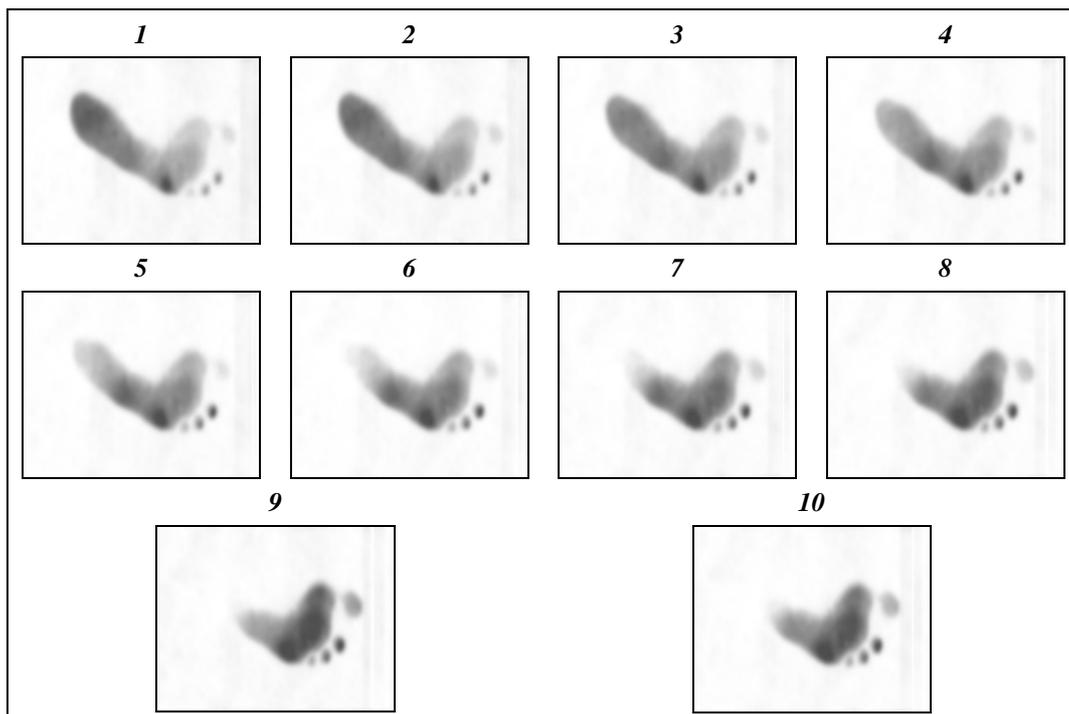


Figura 7.1 – Sistema básico de pedobarografia.

As imagens captadas, numa sequência temporal, são muito densas e ricas em informação sobre a interacção da planta do pé com a superfície plana da placa.

Na Tabela 7.1 podem observar-se dez imagens, negadas e reduzidas no seu tamanho original em 65%, extraídas de uma sequência de imagens de pedobarografia dinâmica.

Tabela 7.1 – Dez imagens (negadas) de uma sequência exemplo.



Nas imagens apresentadas, o pé em estudo é de um paciente diabético que já sofreu a amputação de um dos seus dedos devido à doença de que padece. Ao longo do tempo as zonas da planta dos pés deste tipo de doentes começam cada vez mais a sofrer problemas de irrigação sanguínea; as zonas sujeitas a elevadas pressões, provocadas pela marcha do doente e agravadas pela insensibilidade à dor, sofrem forças de atrito que provocam elevado desgaste e ulcerações. Torna-se assim de grande interesse clínico a análise das condições que potenciam a ocorrência desses efeitos, seja em apoio estático ou em marcha normal.

As soluções técnicas actualmente utilizadas para a caracterização das sequências de imagens pedobarográficas apresentam ainda algumas deficiências, pelo que existe campo aberto para a experimentação de metodologias alternativas.

Sem preocupação de exaustividade, podem-se referir como objectivos de interesse a caracterização da evolução temporal das superfícies de apoio do pé, a detecção e localização das zonas de hiperpressão plantar, e a análise dos gradientes espaciais e temporais nas zonas de pressões elevadas.

Seguidamente é descrita a filosofia utilizada na determinação de correspondências, na estimação dos deslocamentos por minimização da energia de deformação e na utilização dessa energia para quantificação da deformação existente, ao longo da sequência de imagens apresentada.

7.1.2 – Filosofia utilizada

Uma abordagem inovadora ao problema da análise das sequências de imagens de pedobarografia dinâmica consiste em modelizar cada imagem como uma superfície de pressão em que se considera um membrana, plana nas zonas em que não há pressão aplicada e que se deforma nas zonas submetidas a pressão, adquirindo uma cota proporcional aos valores pontuais da pressão.

As superfícies virtuais correspondentes às diversas imagens da sequência podem ser analisadas como se de objectos físicos se tratasse, recorrendo às metodologias desenvolvidas para análise de movimento e deformação de objectos.

Na primeira fase dos ensaios optou-se por considerar apenas os contornos presentes em cada imagem e tentar obter o emparelhamento entre os *pixels* que os constituem. Apesar dos resultados encorajadores obtidos, o primeiro problema que surgiu relaciona-se com a possibilidade, facilmente verificada ao analisar-se as imagens apresentadas na *Tabela 7.1*, da existência de mais do que um contorno em cada imagem.

Este problema pode ser facilmente resolvido utilizando um outro qualquer processo que identifique, previamente, quais os contornos a emparelharem em cada uma das imagens. Uma possível solução automática seria a utilização de filtragem de Kalman [Maybeck, 1979; Tavares, 1995a, 1995b], que estimasse em cada uma das imagens qual a localização do centróide do contorno em questão; outra solução, que parece também viável, seria a utilização da energia de deformação necessária para alinhar cada conjunto de contornos entre diferentes imagens e seleccionar o emparelhamento entre os que apresentassem um menor valor.

No entanto, mesmo com a existência de mais do que uma solução para resolver este primeiro problema, surge um outro: a possibilidade de existir fusão ou divisão de alguns dos contornos presentes em cada imagem ao longo da sequência. Este segundo problema pode ser resolvido pela modelização superficial atrás descrita, considerando o nível de brilho de cada *pixel* como a sua terceira coordenada. Com esta modelização, evolui-se para elementos

superficiais, o que permite resolver em simultâneo os dois problemas iniciais: cada imagem passa a ser constituída por um único modelo superficial do tipo casca.

Como em pedobarografia dinâmica [Padilha, 1995], de forma semelhante ao que se verifica em muitas outras aplicações, os contornos isonível (isobáricos no caso presente) têm especial interesse na análise das imagens que constituem uma dada sequência, e como a plataforma de desenvolvimento e ensaio permite facilmente a extracção deste tipo de entidades a partir de uma mesma imagem ou ao longo de uma série de imagens, optou-se por também ensaiar a metodologia desenvolvida considerando-se este tipo de objectos.

7.2 – Resultados experimentais

Nesta secção são apresentados alguns resultados experimentais obtidos, considerando as imagens que constituem a sequência exemplo da *Tabela 7.1*, na determinação de correspondências, na estimação dos deslocamentos por minimização da energia de deformação e na utilização dessa energia para quantificação da deformação existente entre objectos do tipo contorno, do tipo superfície de intensidade e, finalmente, do tipo contorno isobárico.

A abordagem utilizada baseia-se na modelização física do objecto considerado em cada imagem da sequência exemplo, por intermédio de um único elemento finito isoparamétrico de Sclaroff¹ e na análise modal dos modelos pontuais construídos.

7.2.1 – Modelização por contornos

Os dez contornos a serem considerados ao longo da sequência exemplo estão representados na *Tabela 7.2* e resultaram da aplicação às imagens representadas na *Tabela 7.1* da seguinte metodologia (ver quinto capítulo):

1. remoção em cada imagem original dos *pixels* com valor reduzido de brilho (*Figura 7.2a*);
2. binarização das imagens filtradas através do algoritmo de Otsu;
3. selecção da zona desejada (a zona correspondente à palma do pé) em cada imagem binarizada através de análise das regiões [Lønnestad, 1992] presentes (*Figura 7.2b*);
4. determinação do contorno de cada zona com interesse através de uma operação lógica do tipo ou exclusivo entre a imagem respectiva e a imagem resultante da aplicação de

¹ Optou-se por utilizar este elemento finito devido essencialmente à sua melhor e mais fácil adaptação e controlo para os objectos determinados nestas imagens. Como se pode verificar as imagens originais são demasiado separadas entre si o que origina objectos bastante distintos ao longo da sequência. Este facto implica ser pouco adequado utilizar-se a modelização por intermédio de elementos finitos axiais (ver quinto capítulo). Contudo, se a sequência de imagens fosse obtida utilizando-se uma amostragem temporal mais rápida, também este tipo de modelização seria adequado.

uma operação morfológica de erosão (*Figura 7.2c*);

5. seguimento dos *pixels* que constituem cada contorno e realização de uma amostragem² regular de 4 em 4 *pixels*.

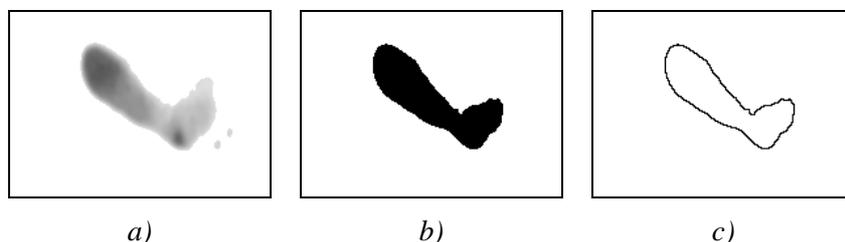
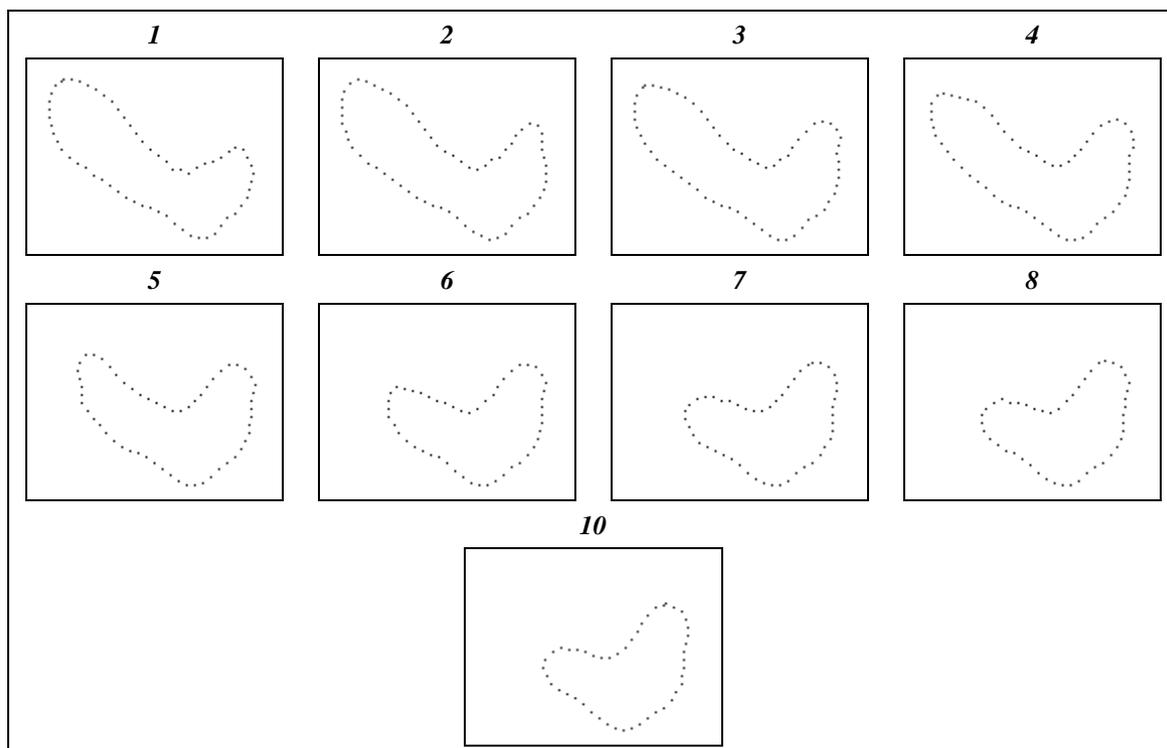


Figura 7.2 – Exemplo da determinação de um contorno (imagens negadas): a) Imagem original após remoção dos pixels com reduzido valor de brilho; b) Após binarização e selecção da zona com interesse; c) Contorno determinado após a operação lógica ou exclusivo entre a imagem b) e a imagem resultante da operação morfológica de erosão à mesma imagem.

Tabela 7.2 – Dez contornos a considerar ao longo da sequência.



Na *Figura 7.3* podem observar-se todos os contornos a considerar ao longo da sequência, com os *pixels* ligados entre si.

Na *Tabela 7.3* estão indicadas algumas propriedades de cada contorno: o número de *pixels* e as medidas³: área, perímetro, factor de circularidade, largura, comprimento e alongamento.

² De forma a diminuir-se o tempo computacional exigido.

³ Obtidas por análise de regiões utilizando-se conectividade 4.



Figura 7.3 – Contornos a considerar ao longo da sequência. [Reprodução a cores em anexo.]

Tabela 7.3 – Algumas propriedades dos contornos a considerar ao longo da sequência. (**ID** é a identificação e **Pixels** é o número de pixels.)

ID	Pixels	Área	Perímetro	Circularidade	Largura	Comprimento	Alongamento
1	64	3362	384	3.49	19.49	172.51	8.85
2	67	3637	404	3.57	19.98	182.02	9.11
3	67	3694	402	3.48	20.46	180.54	8.82
4	64	3543	392	3.45	20.15	175.85	8.73
5	58	3062	350	3.18	19.72	155.28	7.87
6	51	2640	300	2.71	20.36	129.64	6.37
7	50	2536	284	2.53	20.95	121.05	5.78
8	48	2472	280	2.52	20.73	119.27	5.76
9	48	2445	276	2.48	20.88	117.12	5.61
10	46	2347	266	2.40	20.95	112.05	5.35

Considerando-se os elementos finitos construídos por material do tipo borracha, valores para o parâmetro σ iguais a 25% da distância média entre todos os *pixels* que constituem cada contorno, e considerando 25% dos modos de vibração, obtiveram-se os emparelhamentos representados nas imagens da Tabela 7.4. Na Figura 7.4 é possível observar-se, com uma ampliação de 200%, todos os emparelhamentos obtidos ao longo da sequência.

Estimando os deslocamentos por minimização da energia de deformação, obtêm-se as imagens representadas na Tabela 7.5. Analisando as referidas imagens pode-se verificar que, apesar da apreciável variação da forma dos contornos ao longo da sequência, os deslocamentos estimados são de boa qualidade.

Na Tabela 7.6 indica-se o número e a percentagem de emparelhamentos e o valor da energia de deformação ao longo da sequência.

O número de emparelhamentos obtidos, variando ao longo da sequência entre 47% e 83%, e atendendo que os mesmos não foram obtidos tendo em conta qualquer tipo de otimização, pode ser classificado como bastante satisfatório.

Deve-se notar que o menor número de emparelhamentos foi obtido para o emparelhamento 8 em que os contornos visualmente parecem ter formas bastante próximas; tal resultado verificou-se devido a dois factores essenciais: primeiro, a amostragem aplicada aos contornos fez com que estes ficassem bastante diferentes nas zonas onde a amostragem terminou; segundo, nos casos em que as formas são muito similares, deve-se incluir mais modos na

determinação do emparelhamento pois as deformações existentes são principalmente do tipo local. Por exemplo, considerando-se 50% dos modos de vibração, obtêm-se 32 emparelhamentos ou seja 68.8% (*Figura 7.5* com uma ampliação de 150%).

Tabela 7.4 – Emparelhamentos obtidos entre os contornos ao longo da sequência.

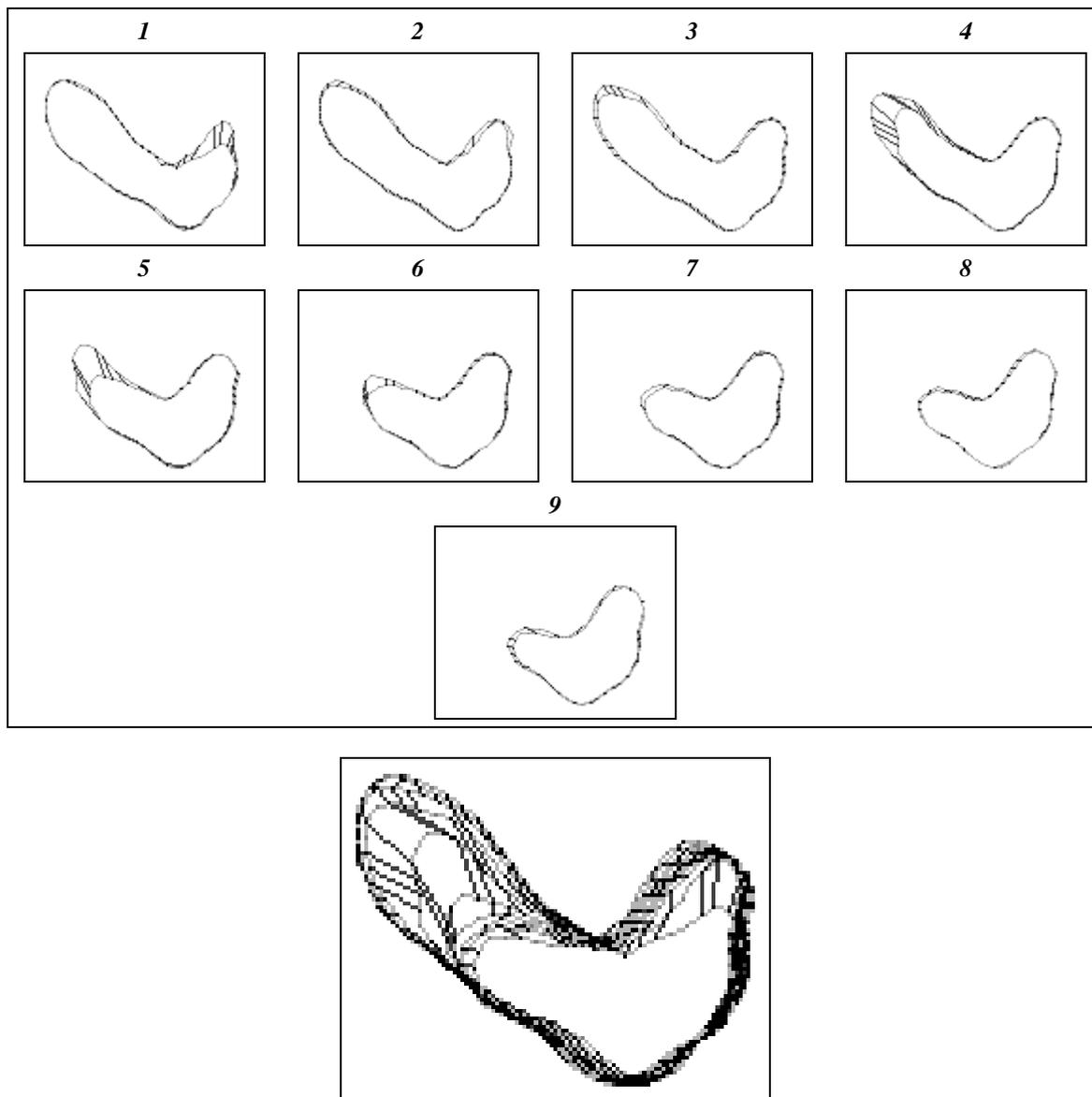


Figura 7.4 – Emparelhamentos obtidos ao longo da sequência.

Nas *Figura 7.6* e *Figura 7.7* analisa-se, de forma gráfica, respectivamente a percentagem de emparelhamentos e a energia de deformação ao longo da sequência.

Analisando-se os emparelhamentos obtidos, representados nas imagens da *Tabela 7.4*, e a evolução da energia de deformação, representada de forma gráfica da *Figura 7.7*, pode-se concluir que esta energia traduz as deformações existentes ao longo da sequência de forma satisfatória.

Tabela 7.5 – Deslocamentos nodais estimados, por minimização da energia de deformação, para os contornos emparelhados ao longo da sequência.

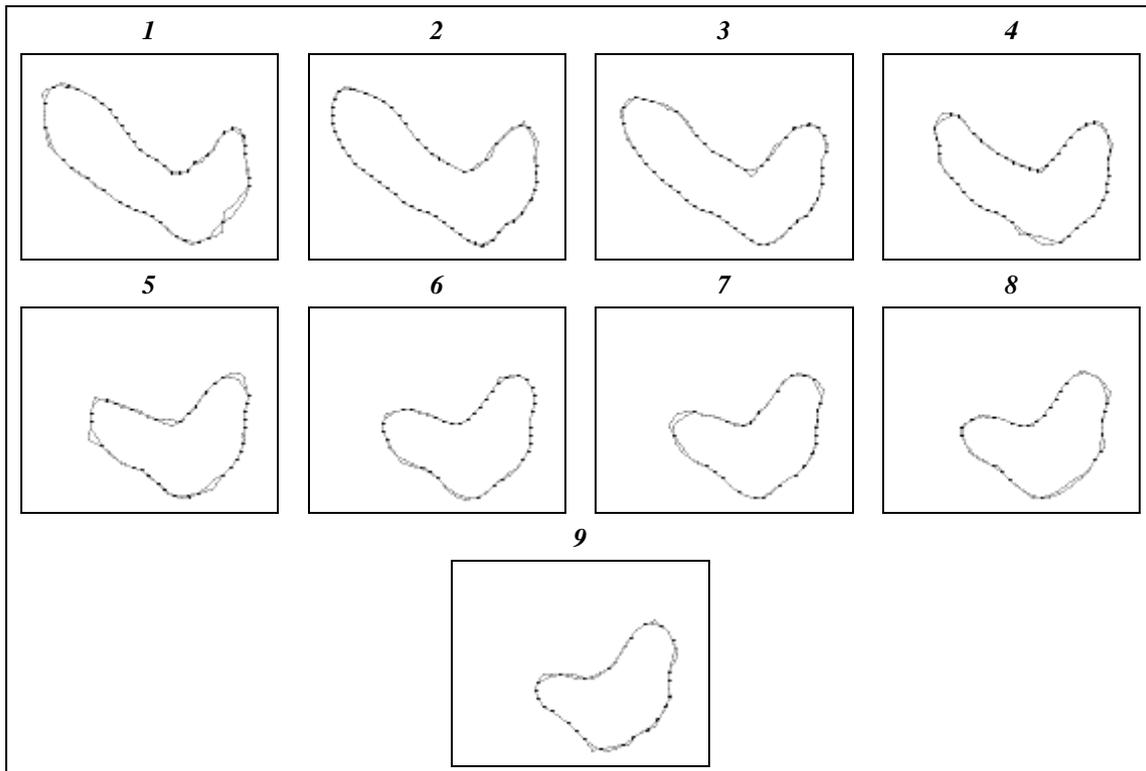


Tabela 7.6 – Número (**Nº Emp.**) e % de emparelhamentos (**% Emp.**) e valor da energia de deformação ao longo da sequência de contornos.

ID	Nº Emp.	% Emp.	Energia
1	43	67.2%	32.6
2	54	80.6%	18.8
3	47	73.4%	19.9
4	46	79.3%	79.0
5	31	60.8%	61.0
6	33	66.0%	28.2
7	26	54.2%	23.4
8	23	47.9%	19.6
9	24	52.2%	24.6

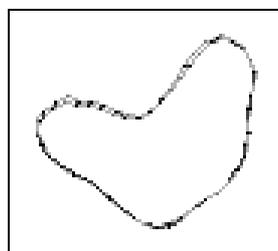


Figura 7.5 – Emparelhamento 8 considerando-se 50% dos modos.

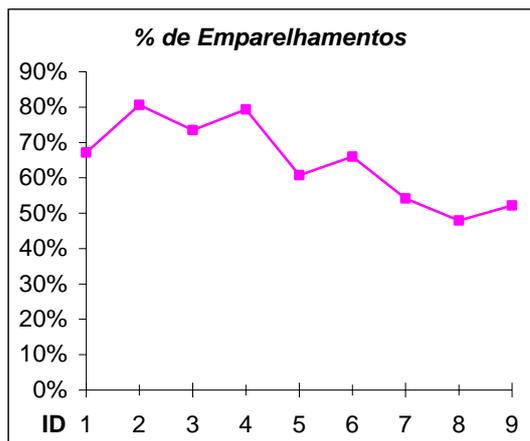


Figura 7.6 – Percentagem dos emparelhamentos obtidos ao longo da sequência de contornos.

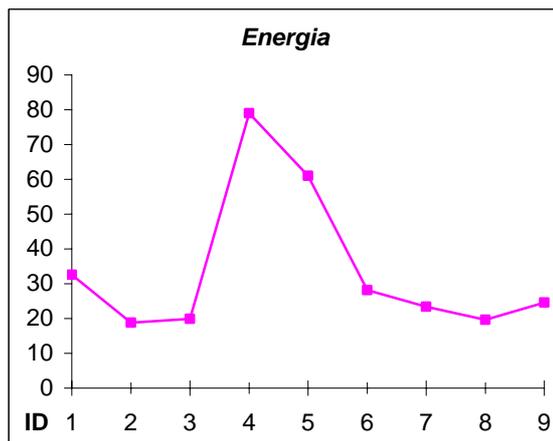


Figura 7.7 – Evolução da energia de deformação ao longo da sequência de contornos.

Para se analisar a importância dos vários modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência apresenta-se, de forma gráfica, na *Figura 7.8*, para cada emparelhamento a contribuição dos mesmos modos agrupados em doze classes⁴ no valor global dessa energia.

Ao longo dos vários ensaios verificou-se que, como seria previsível, quando a deformação entre dois objectos é essencialmente global, a energia concentra-se mais nos primeiros grupos de modos; assim que as deformações se tornam mais locais, os grupos intermédios e os mais altos passam a ter uma maior contribuição no valor global da energia. Tal pode ser verificado ao analisar-se as *Figura 7.9* e *Figura 7.10* que representam a distribuição da energia de deformação ao longo das doze classes de modos para os emparelhamentos 4, de deformação mais global, e 8, de deformações mais localizadas.

A distribuição da energia de deformação pelos modos de vibração também justifica a necessidade de considerar um maior número de modos para se obter correspondências mais aceitáveis quando os objectos a emparelhar apresentam formas muito similares (como é o caso do emparelhamento 8): os modos de ordem mais elevada assumem um maior protagonismo na tradução da deformação existente.

Em termos de conclusão, pode-se afirmar que se obteve emparelhamentos satisfatórios ao longo da sequência; os deslocamentos estimados, por minimização da energia de deformação, podem ser classificados como bastante aceitáveis e o valor global da energia de deformação traduz de forma correcta a deformação existente; confirmou-se que a distribuição dessa energia ao longo dos modos é função do tipo de deformação existente entre os objectos a emparelhar.

⁴ O número de classes utilizado foi simplesmente arbitrado; cada uma das onze primeiras classes é constituída por um número idêntico de modos sendo a última classe constituída pelos modos restantes; os modos foram ordenados de forma crescente relativamente à frequência.

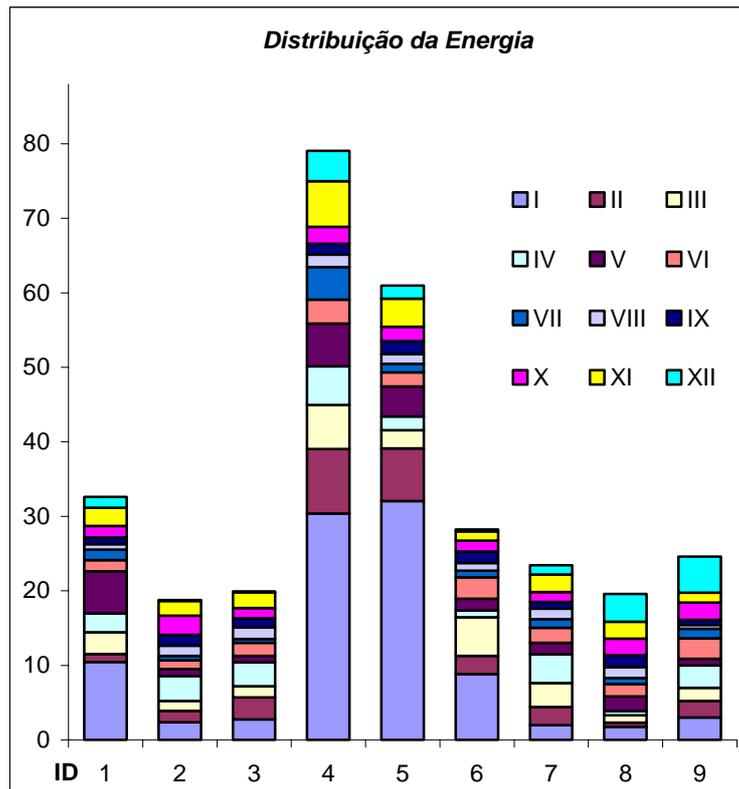


Figura 7.8 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de contornos. [Reprodução a cores em anexo.]

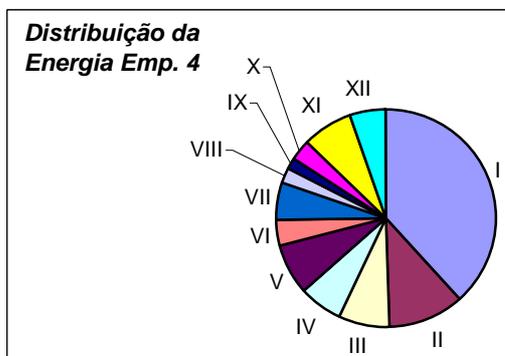


Figura 7.9 – Distribuição da energia para o emparelhamento 4 entre contornos. [Reprodução a cores em anexo.]

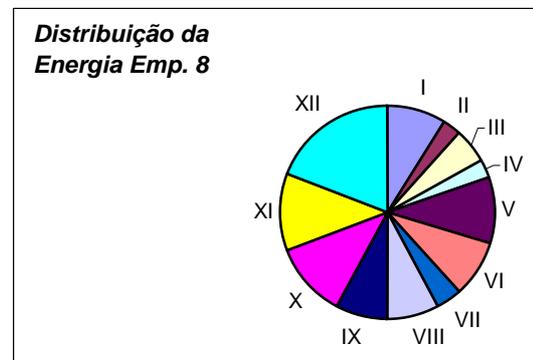


Figura 7.10 – Distribuição da energia para o emparelhamento 8 entre contornos. [Reprodução a cores em anexo.]

7.2.2 – Modelização por superfícies de intensidade

Neste ponto são apresentados resultados experimentais obtidos considerando-se superfícies de intensidade construídas a partir das imagens originais da sequência exemplo, em primeiro lugar, por amostragem regular e, seguidamente, por amostragem adaptativa.

Deve-se notar que, ao contrário do que sucedeu na experiência anterior, com este tipo de modelização já não é necessário proceder à selecção do objecto com interesse em cada

imagem. No entanto, devido à influência das áreas de pressão dos dedos do pé, a variação da topologia dos modelos construídos ao longo da sequência pode ser mais acentuada. Estas variações poderão ser mais severas no caso das superfícies baseadas em amostragem regular devido ao espaçamento uniforme utilizado que pode provocar efeitos distintos nos modelos construídos ao longo da sequência. Para se diminuir este efeito, deve-se utilizar amostragens suficientemente finas para a construção das superfícies.

7.2.2.1 – Amostragem regular

As dez superfícies a serem consideradas ao longo da sequência estão representadas na *Tabela 7.7* e resultaram da aplicação às imagens originais da *Tabela 7.1* da seguinte metodologia baseada em amostragem regular (ver quinto capítulo):

1. remoção em cada imagem original dos *pixels* com valor reduzido de brilho;
2. aplicação em cada imagem filtrada de um filtro Gaussiano, de dimensões 9×9 , para suavização (*Figura 7.11a*);
3. realização de uma amostragem regular, de dimensões $8 \times 8 \times 5$, de cada imagem suavizada (*Figura 7.11b*);
4. triangulação 2D de Delaunay dos pontos amostrados em cada imagem;
5. simplificação e suavização das superfícies poligonais determinadas (*Figura 7.11c*).

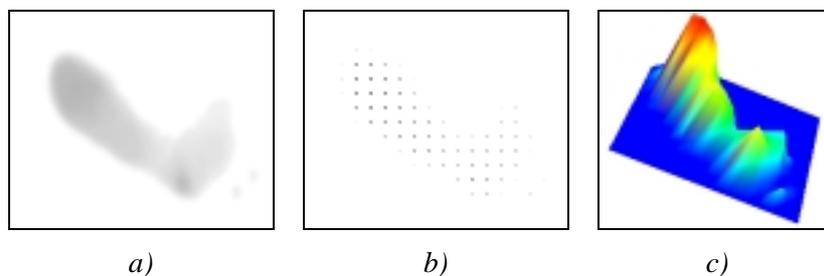


Figura 7.11 – Criação de uma superfície de intensidade a partir de uma imagem Bitmap por amostragem regular: a) Imagem (negada) após remoção dos pixels considerados como ruído e aplicação do filtro Gaussiano; b) Amostragem regular do objecto (imagem negada); c) Superfície resultante após triangulação, simplificação e suavização.

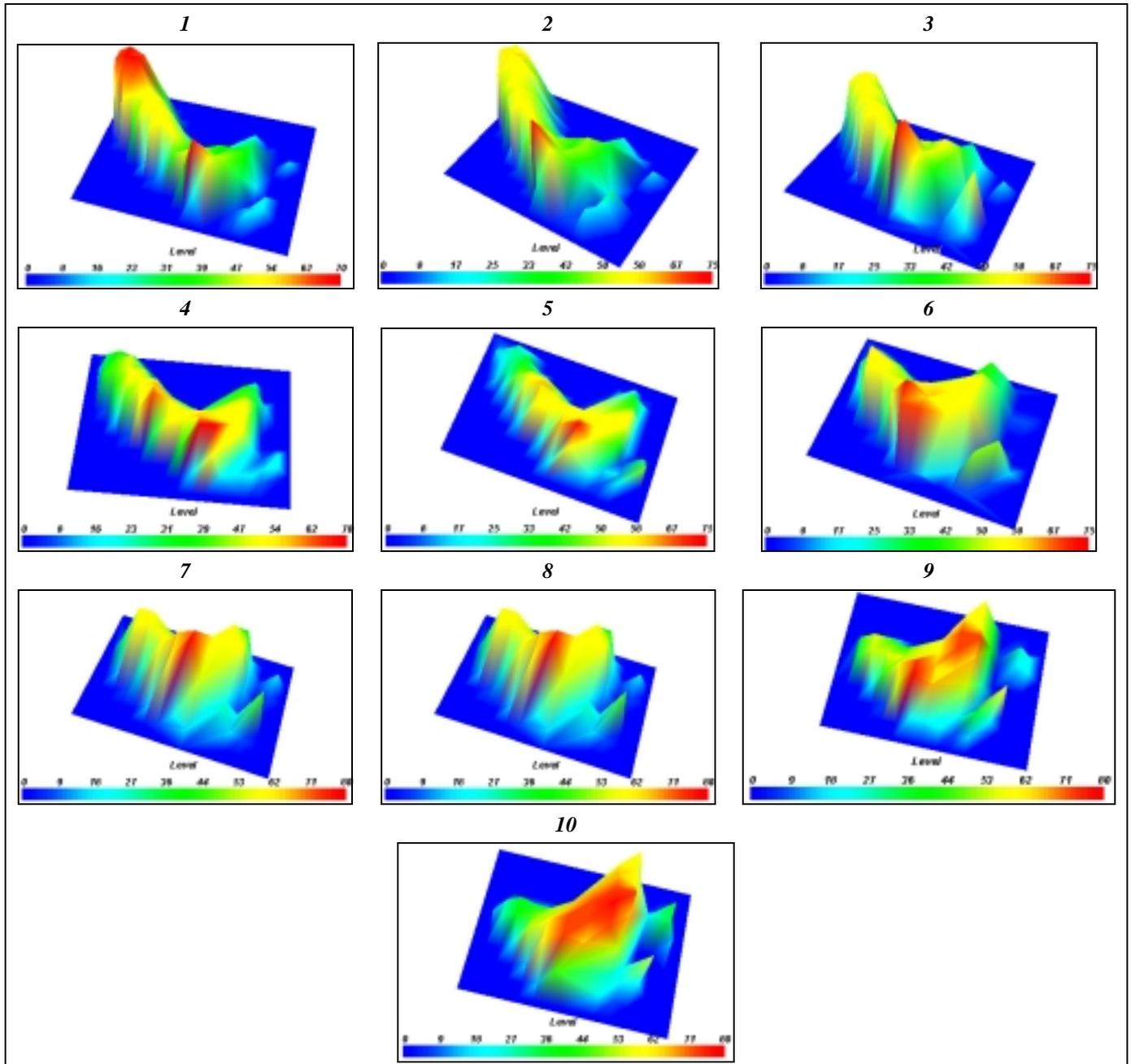
[Reprodução a cores em anexo.]

Na *Tabela 7.8* são indicadas algumas propriedades das superfícies a considerar ao longo da sequência: o número de nodos e as medidas [Schroeder, 1999]: volume, área e factor de forma relativamente a uma esfera.

Utilizando-se elementos isoparamétricos 3D de Sclaroff construídos por material do tipo borracha, valores para o parâmetro σ iguais a 25% da distância média entre todos os modos

de cada superfície, e considerando 10% dos modos de vibração, obtiveram-se os emparelhamentos representados nas figuras das *Tabela 7.9* e *Tabela 7.10*.

Tabela 7.7 – Superfícies, resultantes de amostragem regular, a considerar para o emparelhamento ao longo da sequência.



O número e a percentagem de emparelhamentos e o valor da energia de deformação ao longo da sequência estão indicados na *Tabela 7.11*.

Nas *Figura 7.12* e *Figura 7.13* analisa-se graficamente a percentagem de emparelhamentos e a energia de deformação ao longo da sequência.

O número de emparelhamentos obtidos, variando ao longo da sequência entre 33% e 89%, e atendendo que os mesmos não foram obtidos tendo em conta qualquer tipo de otimização,

pode ser classificado como satisfatório. A título de exemplo, optando-se por apenas utilizar os 9 primeiros modos de vibração no emparelhamento 9 (por análise da *Figura 7.14a* é possível verificar que a energia de deformação está mais concentrada nos primeiros grupos de modos) é possível obter 52 correspondências aceitáveis (*Figura 7.14b*) a que corresponde uma percentagem de 61.2% bastante superior à obtida com as condições globais.

Tabela 7.8 – Algumas propriedades das superfícies baseadas em amostragem regular (C. F. é o coeficiente da forma) a considerar ao longo da sequência.

ID	Nº Nodos	Volume	Área	C. F.
1	131	181920.0	28092.6	1.345
2	131	192533.3	29019.6	1.342
3	125	182986.7	28101.1	1.343
4	109	169760.0	24330.4	1.281
5	107	156906.7	23079.1	1.281
6	96	146186.7	21393.3	1.263
7	98	150346.7	21072.3	1.241
8	95	155946.7	22488.7	1.267
9	99	158933.3	23008.0	1.273
10	85	165760.0	22422.4	1.240

Tabela 7.9 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. [Reprodução a cores em anexo.]

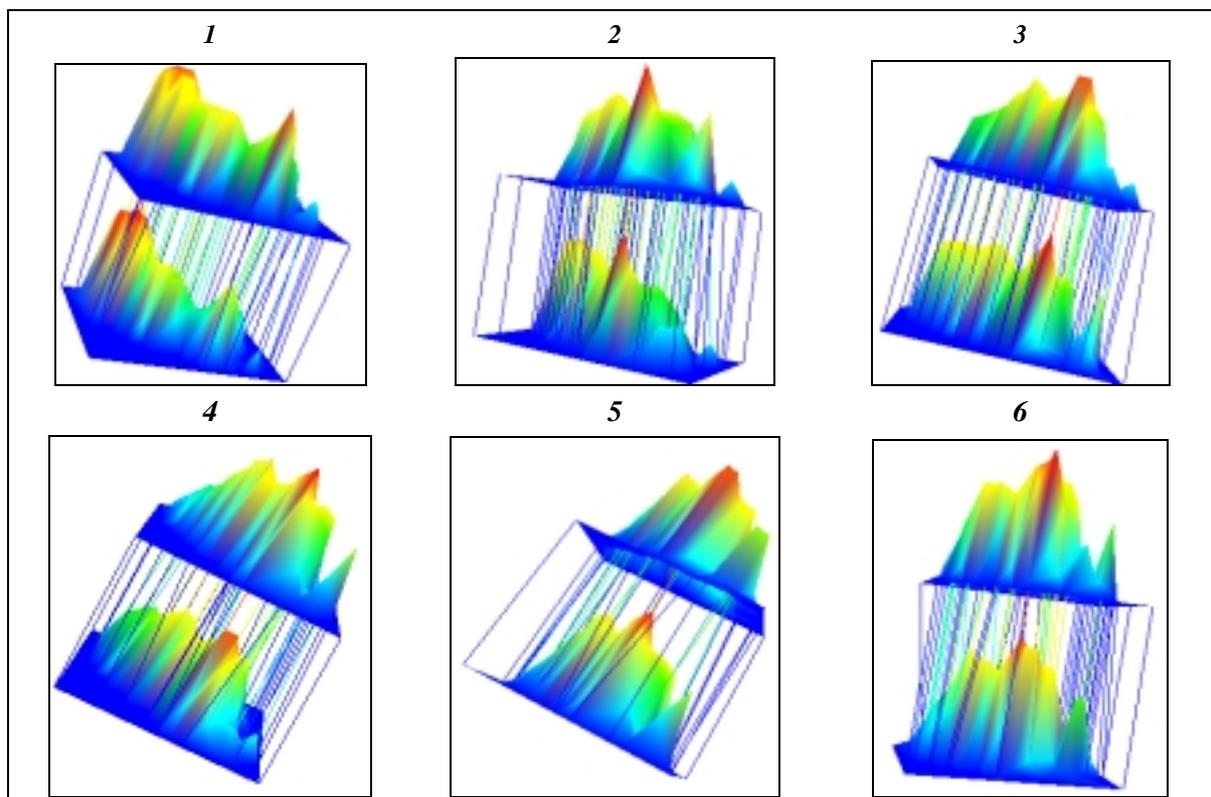


Tabela 7.9 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. (Continuação.)

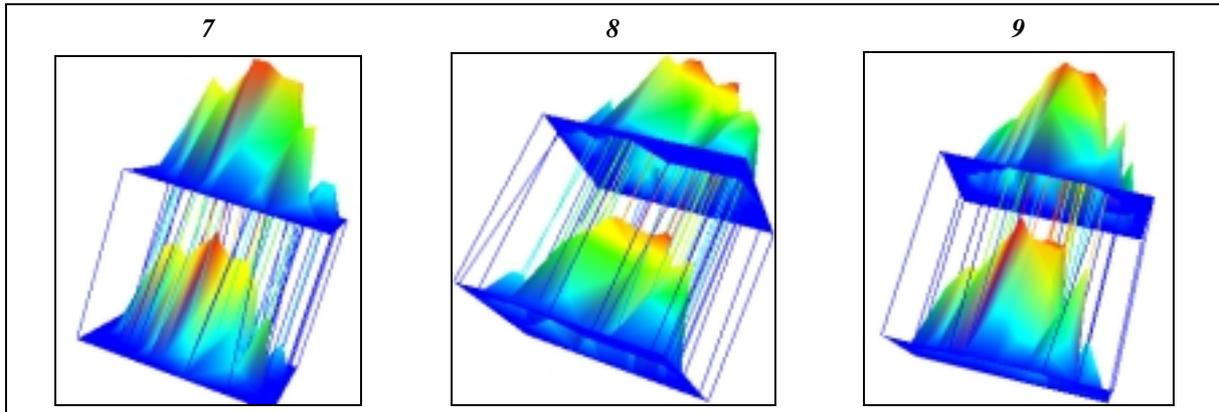


Tabela 7.10 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. [Reprodução a cores em anexo.]

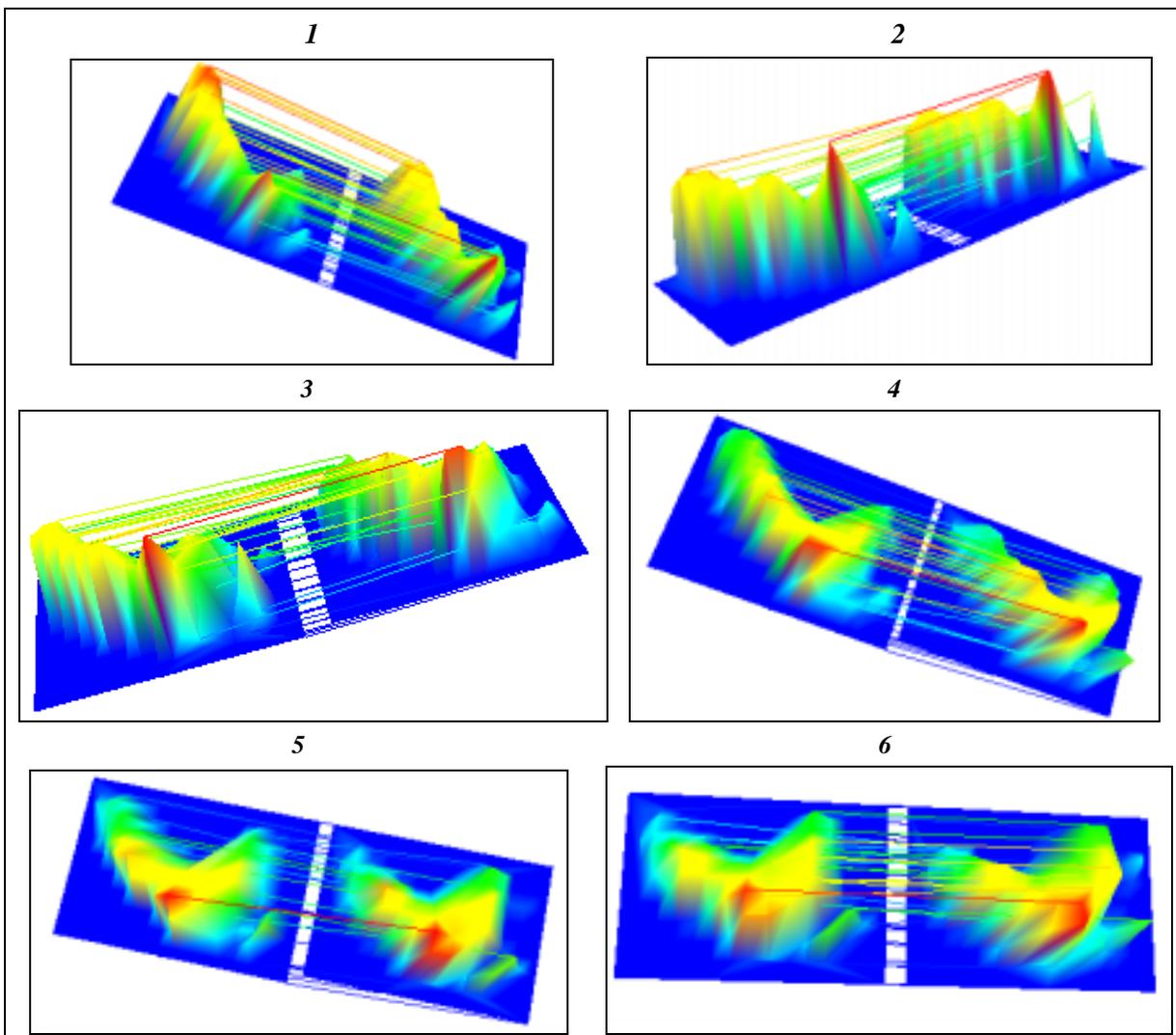


Tabela 7.10 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. (Continuação.)

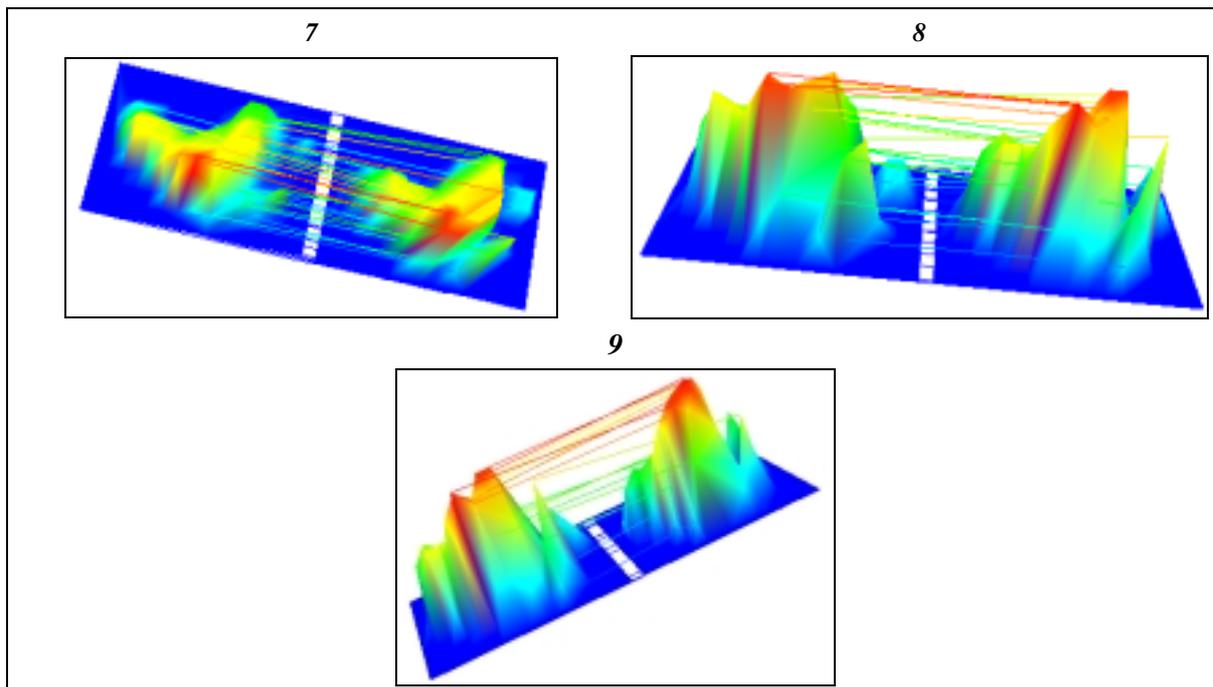


Tabela 7.11 – Número e % de emparelhamentos e valor da energia de deformação ao longo da sequência de superfícies obtidas por amostragem regular.

ID	Nº Emp.	% Emp.	Energia
1	117	89.3%	372.5
2	69	55.2%	1422.1
3	63	57.8%	1581.5
4	57	53.3%	2334.6
5	32	33.3%	1418.5
6	50	52.1%	1195.2
7	52	54.7%	1633.5
8	50	52.6%	880.1
9	32	37.6%	812.9

Para analisar a importância dos vários modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência apresenta-se, de forma gráfica, na *Figura 7.15* a contribuição dos modos de vibração no valor global dessa energia.

Em termos de conclusão, pode-se afirmar que se obteve emparelhamentos satisfatórios ao longo da sequência e que, geralmente, a energia de deformação traduz de forma correcta a deformação existente entre as superfícies a considerar.

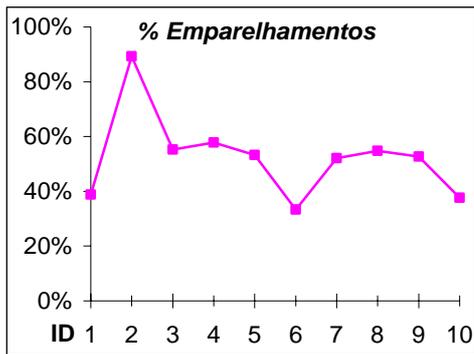


Figura 7.12 – Percentagem de emparelhamentos obtidos ao longo da seqüência de superfícies baseadas em amostragem regular.

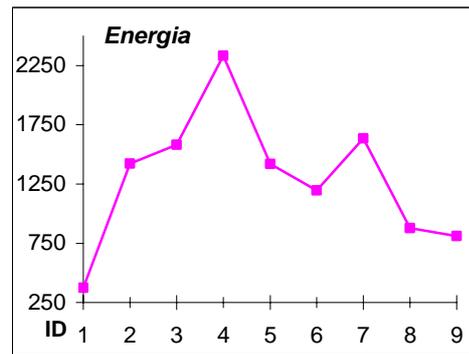
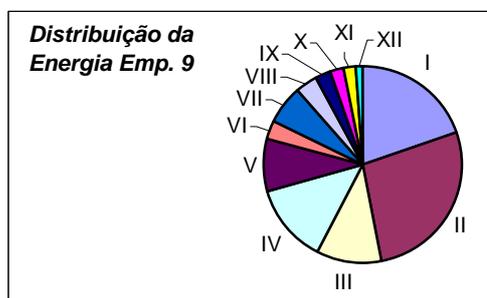
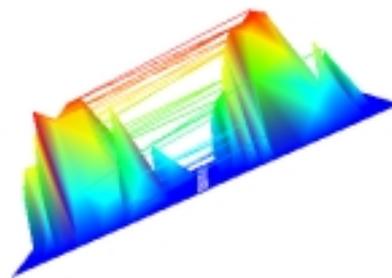


Figura 7.13 – Energia de deformação ao longo da seqüência de superfícies baseadas em amostragem regular.



a)



b)

Figura 7.14 – Emparelhamento 9 entre superfícies baseadas em amostragem regular: a) Distribuição da energia de deformação ao longo dos modos de vibração; b) Correspondências obtidas utilizando-se os 9 primeiros modos de vibração. [Reprodução a cores em anexo.]

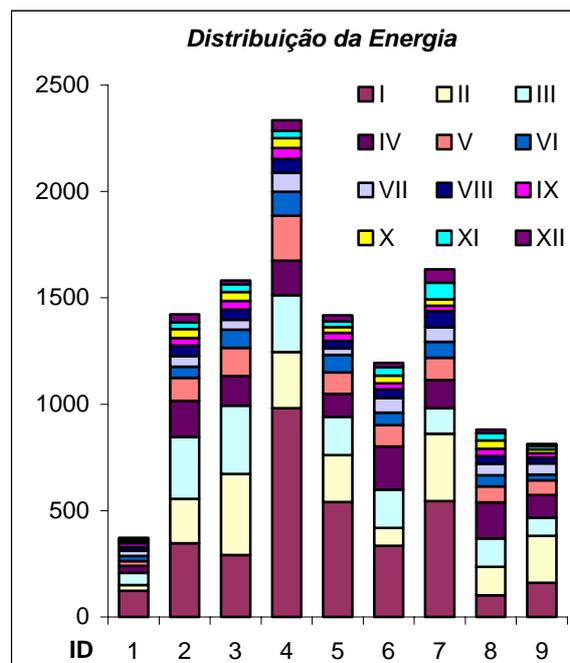


Figura 7.15 – Comparticipação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da seqüência de superfícies baseadas em amostragem regular. [Reprodução a cores em anexo.]

7.2.2.2 – Amostragem adaptativa

As dez superfícies a serem consideradas para o emparelhamento ao longo da sequência exemplo, apresentada na *Tabela 7.1*, estão visíveis na *Tabela 7.12* e resultaram da seguinte metodologia (ver quinto capítulo) aplicada às imagens originais:

1. remoção em cada imagem dos *pixels* com valor reduzido de brilho;
2. aplicação em cada imagem filtrada de um filtro Gaussiano, de dimensões 9×9 , para suavização;
3. realização de uma amostragem adaptativa, baseada na análise do brilho ao longo dos perfis radiais de intensidade centrados nos máximos locais, de cada imagem suavizada;
4. triangulação 2D de Delaunay dos pontos amostrados em cada imagem;
5. simplificação e suavização das superfícies poligonais determinadas.

Na *Tabela 7.13* estão indicadas algumas das propriedades das superfícies a considerar ao longo da sequência: o número de nodos e as medidas: volume, área e factor de forma relativamente a uma esfera.

Tabela 7.12 – Superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, a emparelhar ao longo da sequência.

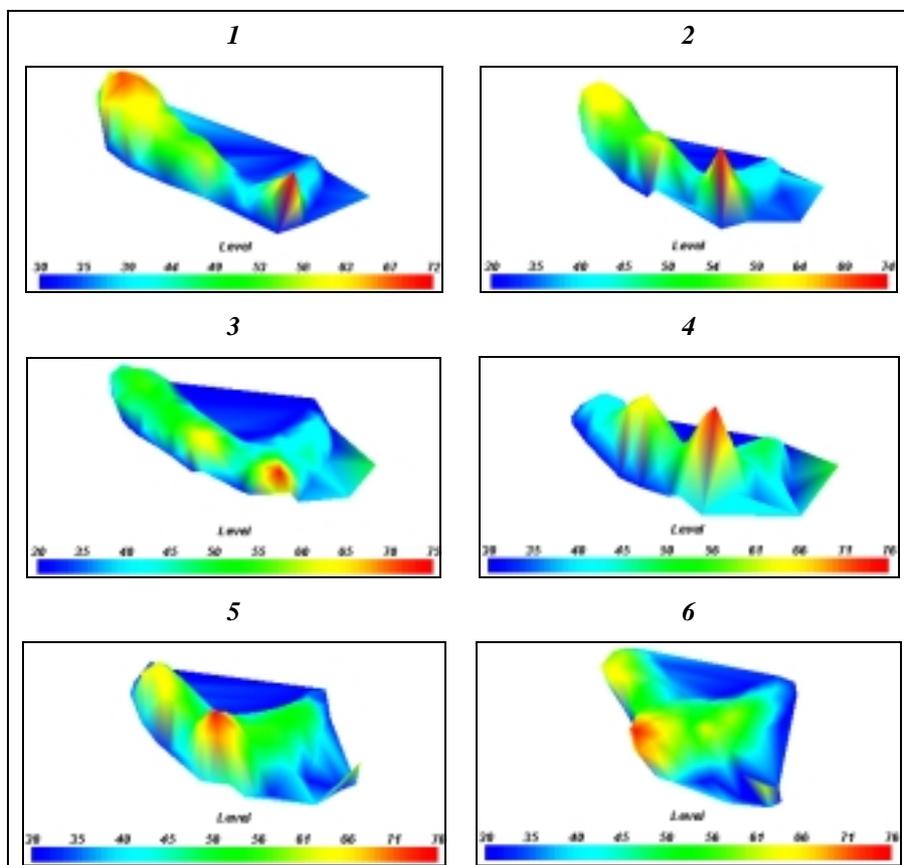


Tabela 7.12 – Superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, a emparelhar ao longo da sequência. (Continuação.)

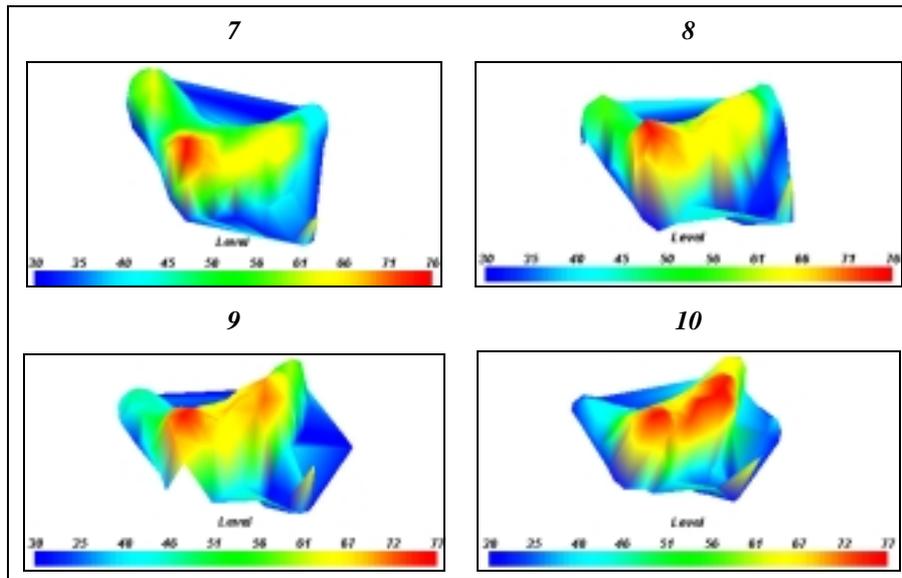


Tabela 7.13 – Algumas propriedades das superfícies, construídas utilizando amostragem adaptativa, a considerar ao longo da sequência.

ID	Nº Nodos	Volume	Área	C. F.
1	93	80215.0	8106.1	0.9493
2	103	100892.8	8701.4	0.9112
3	117	113451.0	8353.9	0.8586
4	112	57104.9	8210.6	1.0700
5	119	108901.9	7021.5	0.7979
6	120	85956.3	7509.7	0.8929
7	124	73657.1	7603.4	0.9459
8	125	69080.5	8144.2	1.0001
9	123	125919.5	8199.3	0.8215
10	122	93369.7	8788.9	0.9397

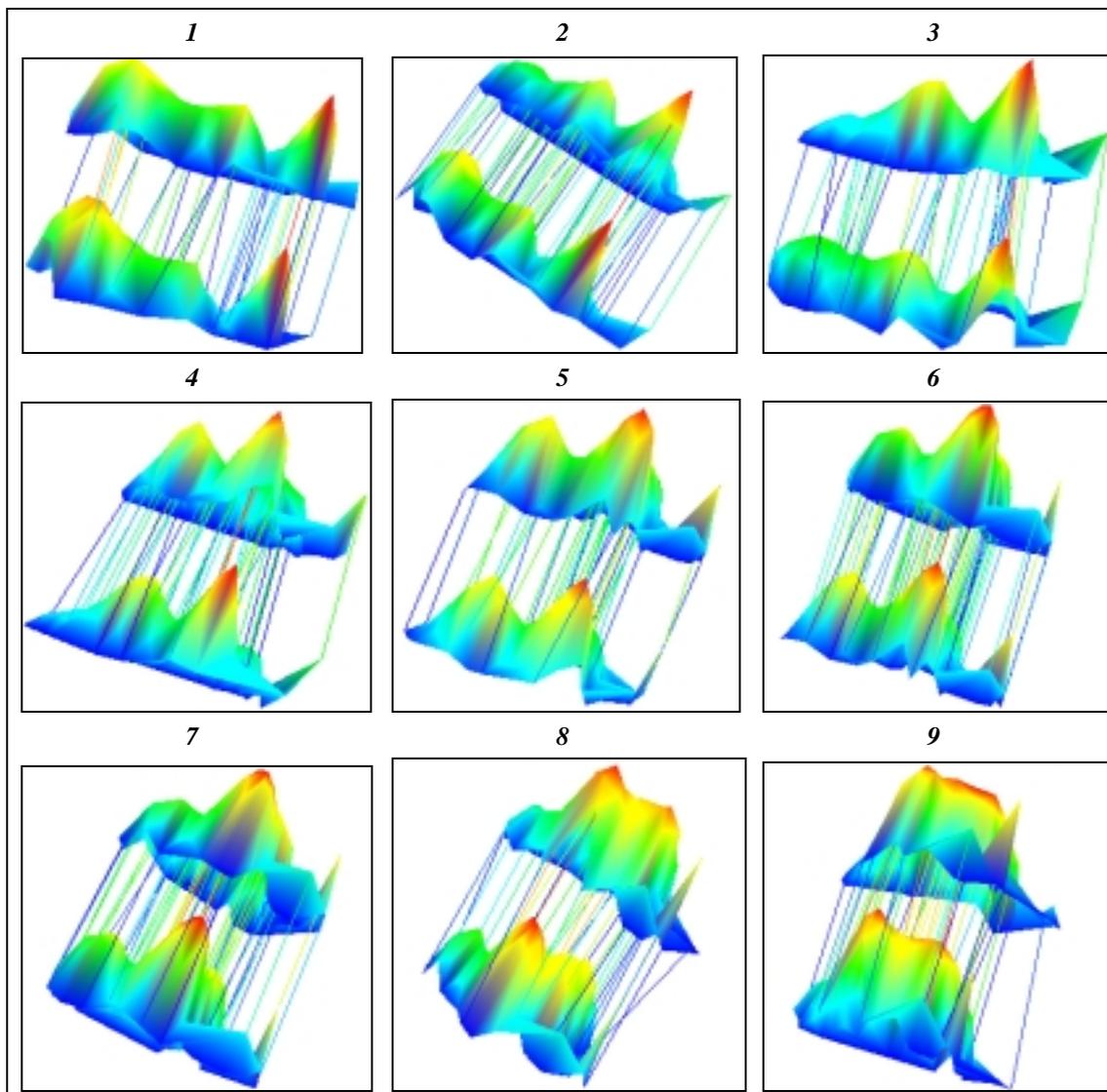
Utilizando-se elementos isoparamétricos 3D de Sclaroff construídos por material do tipo borracha, valores para o parâmetro σ iguais a 25% da distância média entre todos os modos de cada superfície, e considerando 10% dos modos de vibração, obtiveram-se os emparelhamentos representados nas imagens das *Tabela 7.14* e *Tabela 7.15*.

O número e a percentagem de emparelhamentos e o valor da energia de deformação ao longo da sequência estão indicados na *Tabela 7.16*. A percentagem de emparelhamentos e a energia de deformação ao longo da sequência estão representados de forma gráfica nas *Figura 7.16* e *Figura 7.17*.

O número de emparelhamentos obtidos, variando ao longo da sequência entre 27% e 57%, e atendendo que os mesmos não foram obtidos tendo em conta qualquer tipo de otimização, pode ser classificado como satisfatório. A título de exemplo, optando-se no emparelhamento 8 por apenas utilizar os 25 primeiros modos de vibração é possível obter 42 correspondências aceitáveis (*Figura 7.18a*) a que corresponde uma percentagem de 34.1% superior à obtida

com as condições globais (na *Figura 7.18b* é possível verificar que a energia necessária para alinhar as duas superfícies concentra-se em grande parte nos primeiros grupos de modos).

Tabela 7.14 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. [Reprodução a cores em anexo.]



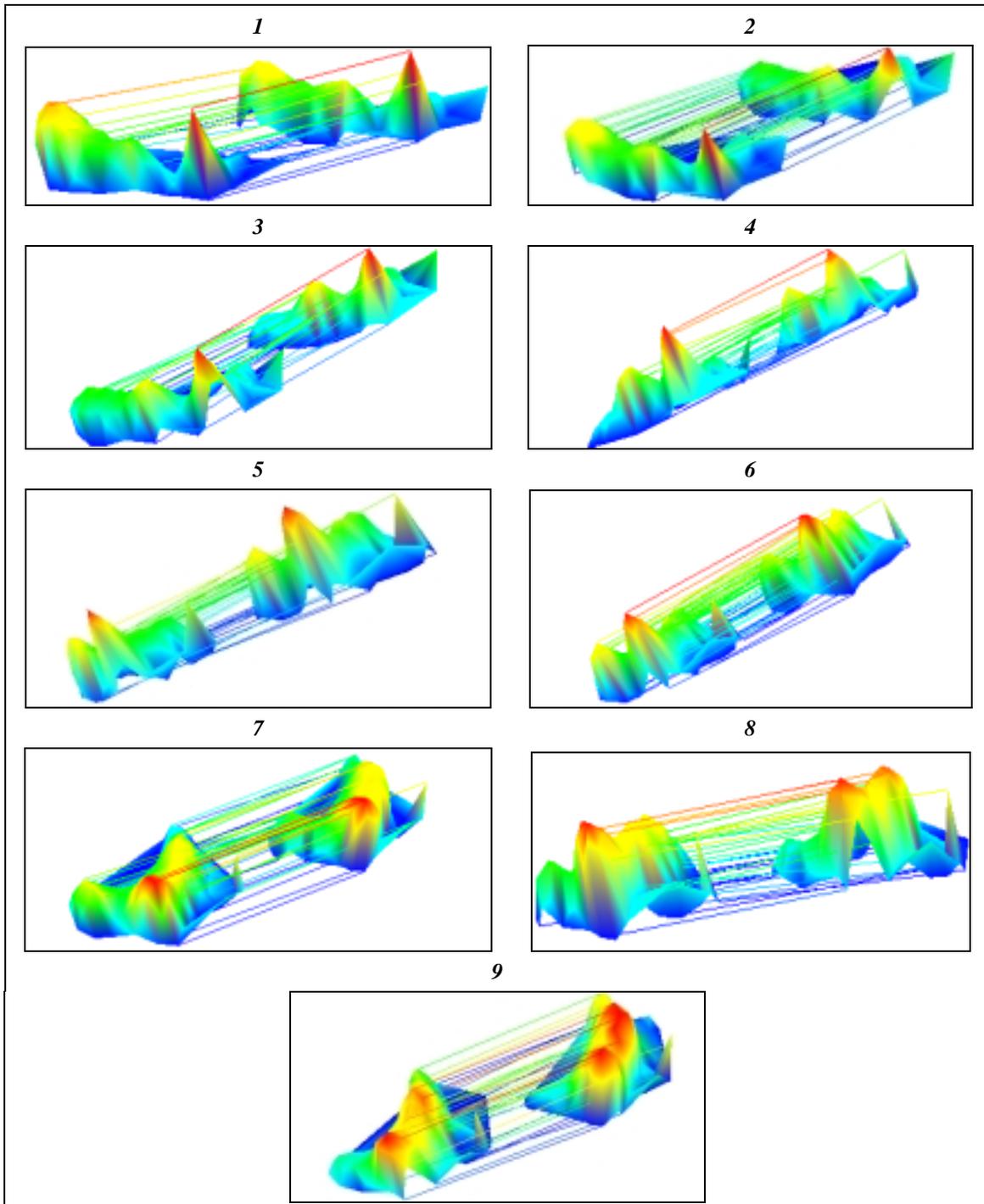
Para se analisar a importância dos vários modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência apresenta-se, de forma gráfica, na *Figura 7.19* a contribuição dos mesmos modos, agrupados em doze classes, no valor global da referida energia.

A título de exemplo, é possível verificar-se na *Figura 7.20* a influência da aplicação prévia da transformação rígida na distribuição da energia de deformação ao longo dos modos no quarto emparelhamento: verifica-se uma redução da contribuição dos primeiros grupos de modos.

Também com esta experiência se pode concluir que, quando a deformação entre duas superfícies é essencialmente global, a energia se concentra nos primeiros grupos de modos;

assim que as deformações se tornam mais locais, a energia passa a concentrar-se nos grupos intermédios até ficar, nos casos de deformações semelhantes a ruído localizado, praticamente concentrada nos grupos de modos mais altos.

Tabela 7.15 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. [Reprodução a cores em anexo.]



Em termos de conclusão, pode-se afirmar que se obteve emparelhamentos satisfatórios ao longo da sequência e que geralmente a energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente. Nesta experiência verificou-se que a energia de deformação e a

variação do factor da forma apresentam comportamentos semelhantes ao longo da sequência o que também indicia que os valores desta energia traduzem satisfatoriamente as deformações existentes.

Tabela 7.16 – Número e % de emparelhamentos e valor da energia de deformação ao longo da sequência de superfícies adaptativas.

ID	Nº Emp.	% Emp.	Energia
1	33	35.5%	521.6
2	58	56.3%	559.7
3	35	31.3%	1467.1
4	39	34.8%	1874.4
5	33	27.7%	701.3
6	63	52.5%	389.9
7	51	41.1%	421.1
8	33	26.8%	646.3
9	41	33.6%	497.4

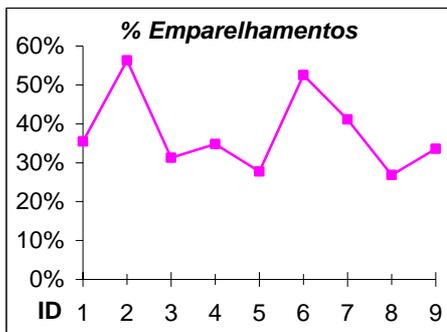


Figura 7.16 – Percentagem de emparelhamentos obtidos ao longo da sequência de superfícies baseadas em amostragem adaptativa.

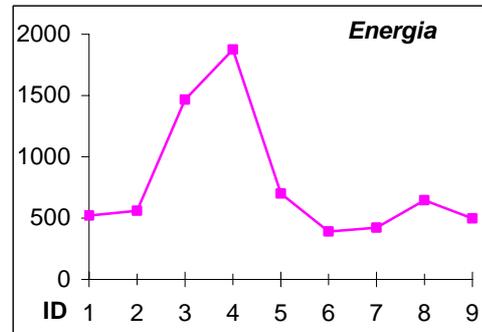


Figura 7.17 – Energia de deformação ao longo da sequência de superfícies baseadas em amostragem adaptativa.

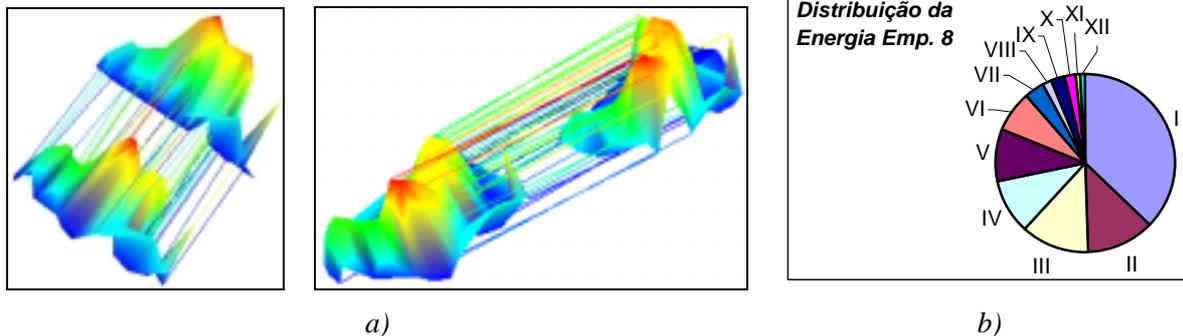


Figura 7.18 – Emparelhamento 8 entre superfícies baseadas em amostragem adaptativa: a) Duas vistas das correspondências obtidas utilizando-se os primeiros 25 modos de vibração; b) Distribuição da energia de deformação ao longo dos modos de vibração.

[Reprodução a cores em anexo.]

A título de exemplo, estão representadas na Figura 7.21 as superfícies 5 e 6 após aplicação à primeira dos deslocamentos estimados por minimização da energia de deformação.

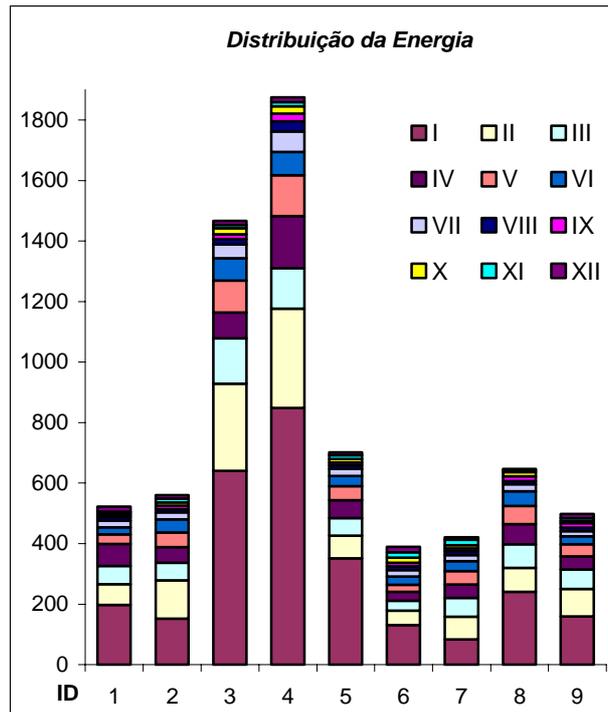
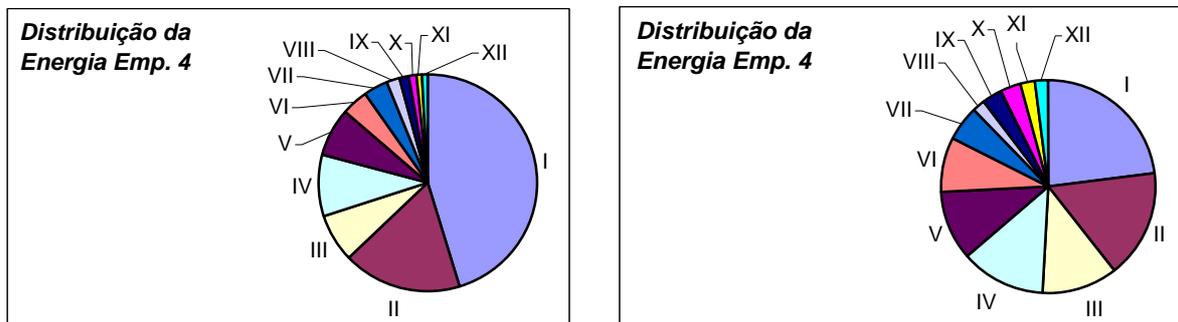


Figura 7.19 – Comparticipação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de superfícies baseadas em amostragem adaptativa.

[Reprodução a cores em anexo.]



a)

b)

Figura 7.20 – Distribuição da energia de deformação por 12 classes de modos, sem (a) e com (b) a prévia aplicação da transformação rígida obtida, para o emparelamento 4 entre superfícies baseadas em amostragem adaptativa. [Reprodução a cores em anexo.]

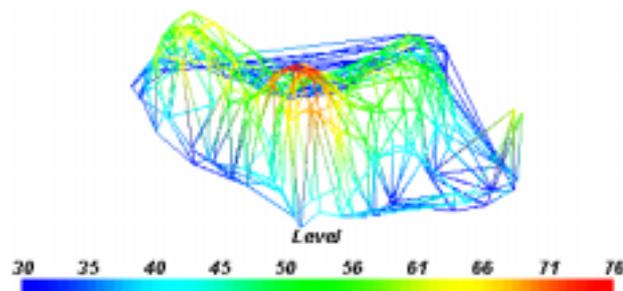


Figura 7.21 – Emparelamento 5 após aplicação dos deslocamentos nodais estimados à superfície 5. [Reprodução a cores em anexo.]

7.2.3 – Modelização por contornos isobáricos

Neste ponto serão apresentados alguns resultados obtidos considerando-se isocontornos de intensidade. Em primeiro lugar, serão apresentados resultados entre contornos determinados numa mesma imagem da sequência; seguidamente, serão apresentados resultados entre contornos correspondentes ao nível de brilho médio ao longo da sequência.

Também com este tipo de modelização se deve notar que, de forma semelhante ao que acontece com a modelização de objectos em imagens de pedobarografia dinâmica por superfícies de intensidade, as áreas de pressão dos dedos do pé podem originar variações severas na topologia dos modelos construídos. Estas variações poderão ser ainda mais importantes nos isocontornos determinados ao longo da sequência. Para se diminuir este efeito, deve-se optar por amostragens suficientemente finas na construção dos modelos.

7.2.3.1 – Contornos de uma mesma imagem

Considerando-se a quarta imagem da sequência apresentada na *Tabela 7.1*, procedeu-se à remoção dos *pixels* de reduzido brilho, construiu-se uma superfície de intensidade utilizando amostragem regular de dimensões $10 \times 10 \times 5$, realizou-se a triangulação 2D de Delaunay e determinaram-se os onze contornos de isonível a considerar nesta experiência, *Figura 7.22*.

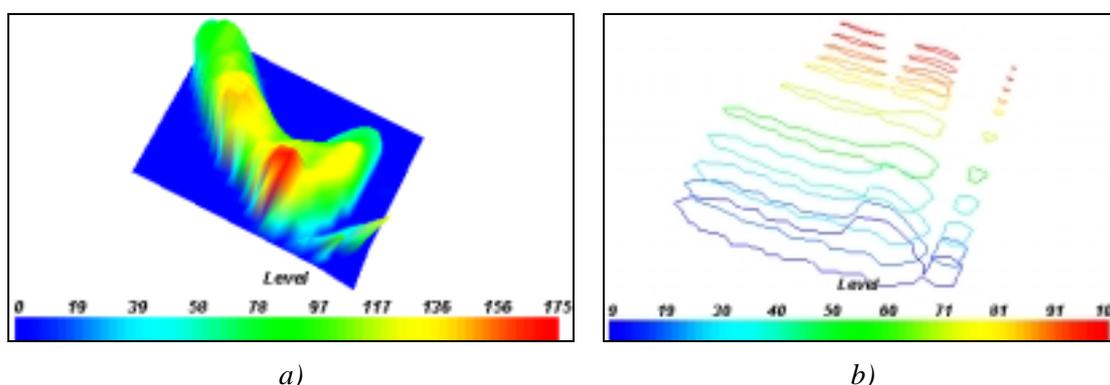


Figura 7.22 – Determinação dos isocontornos a considerar: a) Superfície de intensidade construída a partir da imagem 4 da sequência; b) Onze contornos isobáricos extraídos a partir da superfície. [Reprodução a cores em anexo.]

Na *Tabela 7.17* indicam-se algumas propriedades dos isocontornos a considerar para o emparelhamento: o número de *pixels*, a cota correspondente ao nível de intensidade e a área.

Utilizando-se elementos isoparamétricos 3D de Sclaroff construídos por material do tipo borracha, valores para o parâmetro σ iguais a 25% da distância média entre todos os *pixels* de cada contorno, e considerando 10% dos modos de vibração, obtiveram-se os emparelhamentos representados na *Figura 7.23*.

O número e a percentagem de emparelhamentos e o valor da energia de deformação ao

longo da sequência de isocontornos estão indicados na *Tabela 7.17*. A porcentagem de emparelhamentos e a energia de deformação são analisados, de forma gráfica, nas *Figura 7.24* e *Figura 7.25*.

Tabela 7.17 – Algumas propriedades dos isocontornos a considerar.

ID	Nº de Pixels	Cota	Área
1	76	9	9206.9
2	76	18	8737.0
3	74	27	8308.0
4	76	40.5	7695.8
5	70	54	7106.0
6	54	71	4539.6
7	46	92	3396.6
8	38	86.9	3195.0
9	34	91.7	2976.5
10	34	96.6	2765.5
11	34	101	2562.1

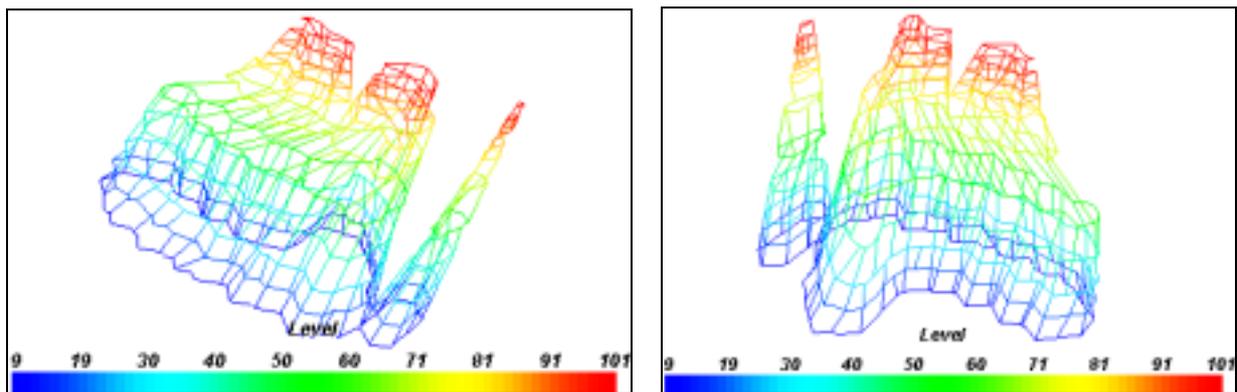


Figura 7.23 – Duas vistas dos emparelhamentos determinados entre contornos de isonível de uma mesma imagem. [Reprodução a cores em anexo.]

Tabela 7.18 – Número e % de emparelhamentos e valor da energia de deformação ao longo dos isocontornos de uma mesma imagem.

ID	Emp.	Emp. (%)	Energia
1	52	68.4%	2235.8
2	57	77.0%	2251.9
3	52	70.3%	4703.4
4	40	57.1%	4025.8
5	32	59.3%	6328.9
6	24	52.2%	1878.9
7	22	57.9%	419.3
8	17	50.0%	329.6
9	32	94.1%	317.8
10	17	50.0%	212.9

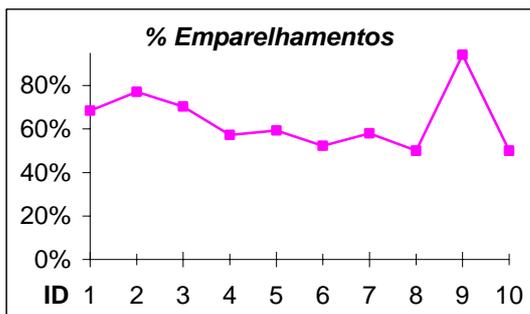


Figura 7.24 – Percentagem de emparelhamentos obtidos ao longo dos isocontornos de uma mesma imagem.

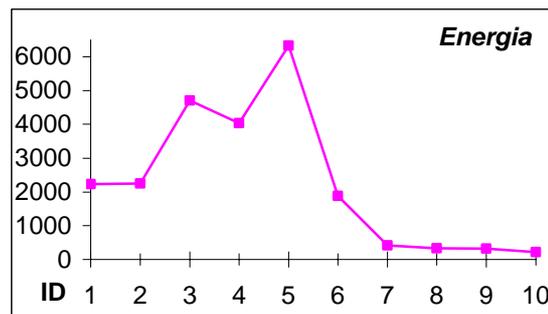


Figura 7.25 – Energia de deformação obtida ao longo dos isocontornos de uma mesma imagem.

O número de emparelhamentos obtidos entre os contornos de isonível de uma mesma imagem original, variando entre 52% e 94%, e atendendo que os mesmos não foram obtidos tendo em conta qualquer tipo de otimização, pode ser classificado como bastante satisfatório.

Para, mais uma vez, se proceder à análise da importância dos modos de vibração na energia de deformação apresenta-se, de forma gráfica, na *Figura 7.26*, para cada emparelhamento a contribuição no valor global da referida energia dos modos agrupados em doze classes. Ao analisar-se a referida figura, verifica-se que, principalmente até ao sexto emparelhamento, as classes primeiras e intermédias assumem uma participação relevante no valor global da energia. Isto evidencia a existência de uma transformação global considerável entre os objectos e que, para se determinar as correspondências de forma aceitável, se deve apenas considerar, a partir do primeiro modo, um reduzido conjunto de modos de vibração.

Também com esta experiência é possível concluir que, quando a deformação entre dois contornos é essencialmente global, a energia se concentra nos primeiros grupos de modos e, assim que as deformações se tornam mais locais, a energia passa a concentrar-se nos grupos intermédios até ficar praticamente concentrada nos grupos de modos mais altos, nos casos de deformações do tipo ruído localizado.

Na *Figura 7.27* estão representados os contornos de isonível considerados nesta experiência após aplicação dos deslocamentos nodais estimados por minimização da energia de deformação. Analisando-se as referidas figuras é possível verificar que os deslocamentos estimados, de modo geral, são bastante razoáveis.

Em termos de conclusão pode-se afirmar que se obteve emparelhamentos satisfatórios ao longo dos contornos de isonível de uma mesma imagem original, que a energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente entre os objectos e que os deslocamentos nodais estimados, por minimização dessa energia, podem ser classificados como bastante satisfatórios.

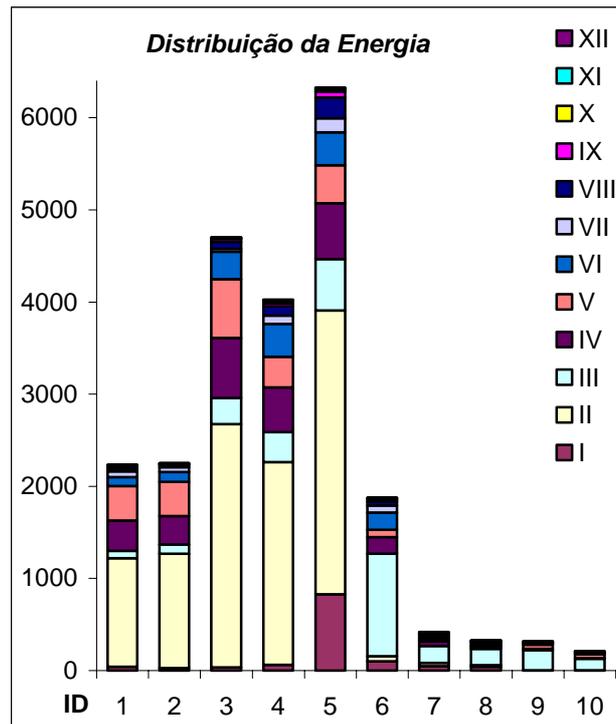


Figura 7.26 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo do emparelhamento dos isocontornos de uma mesma imagem.

[Reprodução a cores em anexo.]

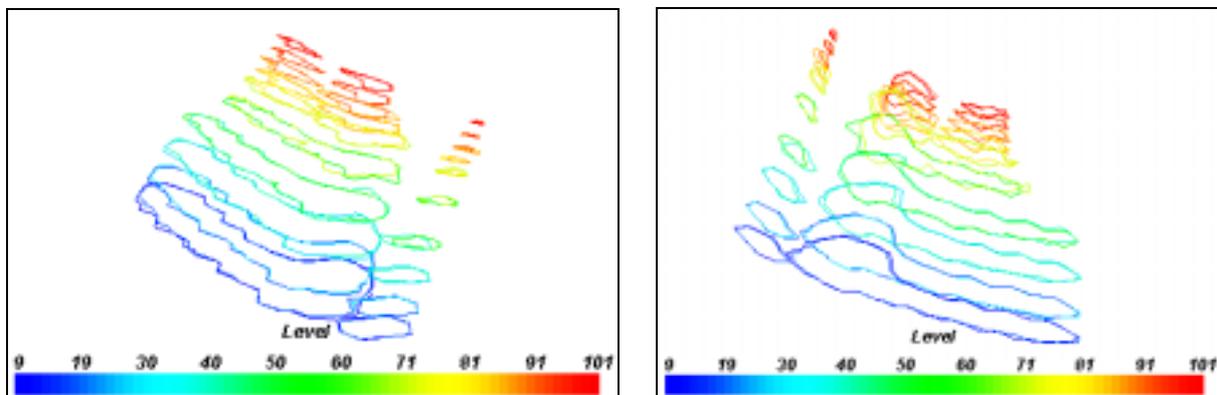


Figura 7.27 – Duas vistas dos deslocamentos estimados para os contornos de isonível de uma mesma imagem. [Reprodução a cores em anexo.]

7.2.3.2 – Contornos de diferentes imagens

Considerando as imagens representadas na Tabela 7.1 da sequência exemplo, para se determinar os contornos de nível de brilho médio ao longo da sequência a utilizar nesta experiência, e visíveis na Figura 7.28, procedeu-se ao seguinte conjunto de operações:

1. remoção dos *pixels* de reduzido nível de brilho presentes em cada imagem original;
2. aplicação de um filtro Gaussiano, de dimensões 9×9 , de forma a suavizar cada imagem filtrada;

3. para cada imagem suavizada construiu-se a respectiva superfície de intensidade, utilizando-se uma amostragem regular de dimensões $10 \times 10 \times 5$, e uma triangulação 2D de Delaunay;
4. em cada superfície de intensidade construída determinou-se o contorno de nível médio de brilho.

Na *Tabela 7.19* são indicadas algumas propriedades dos isocontornos determinados ao longo da sequência: o número de *pixels*, a cota e a área.

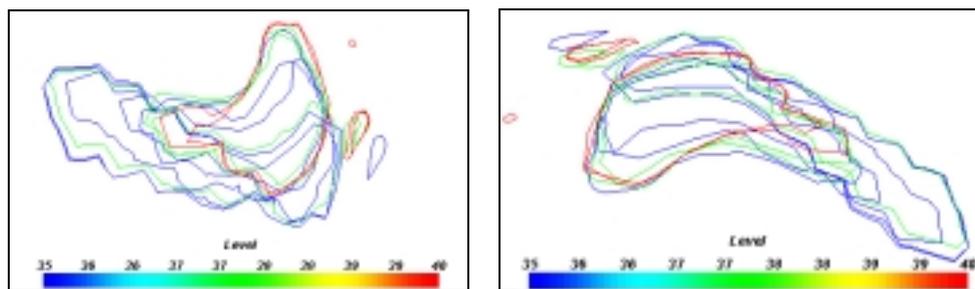


Figura 7.28 – Duas vistas dos dez isocontornos a considerar ao longo da sequência exemplo. [Reprodução a cores em anexo.]

Tabela 7.19 – Algumas propriedades dos isocontornos a considerar ao longo da sequência.

ID	Nº de Pixels	Cota	Área
1	58	35	6626.7
2	53	35	6920.5
3	62	37.5	6183.2
4	61	35	6920.1
5	37	35	3214.3
6	46	37.5	4226.2
7	42	35	3880.8
8	52	37.5	4079.1
9	47	40	4197.8
10	46	40	4477.9

Utilizando-se elementos isoparamétricos 3D de Sclaroff construídos por material do tipo borracha, valores para o parâmetro σ iguais a 25% da distância média entre todos os *pixels* de cada contorno, e considerando 10% dos modos de vibração, obtiveram-se os emparelhamentos representados nas imagens da *Tabela 7.20*.

O número e a percentagem de emparelhamentos e o valor da energia de deformação ao longo dos contornos de isonível da sequência estão indicados na *Tabela 7.21*.

A percentagem de emparelhamentos obtida ao longo da sequência, variando entre 19% e 68%, e atendendo que os mesmos não foram obtidos tendo em conta qualquer tipo de otimização e à considerável diferença existente entre as imagens da sequência, pode ser classificada como satisfatória.

Tabela 7.20 – Emparelhamentos obtidos entre os isocontornos ao longo da sequência.

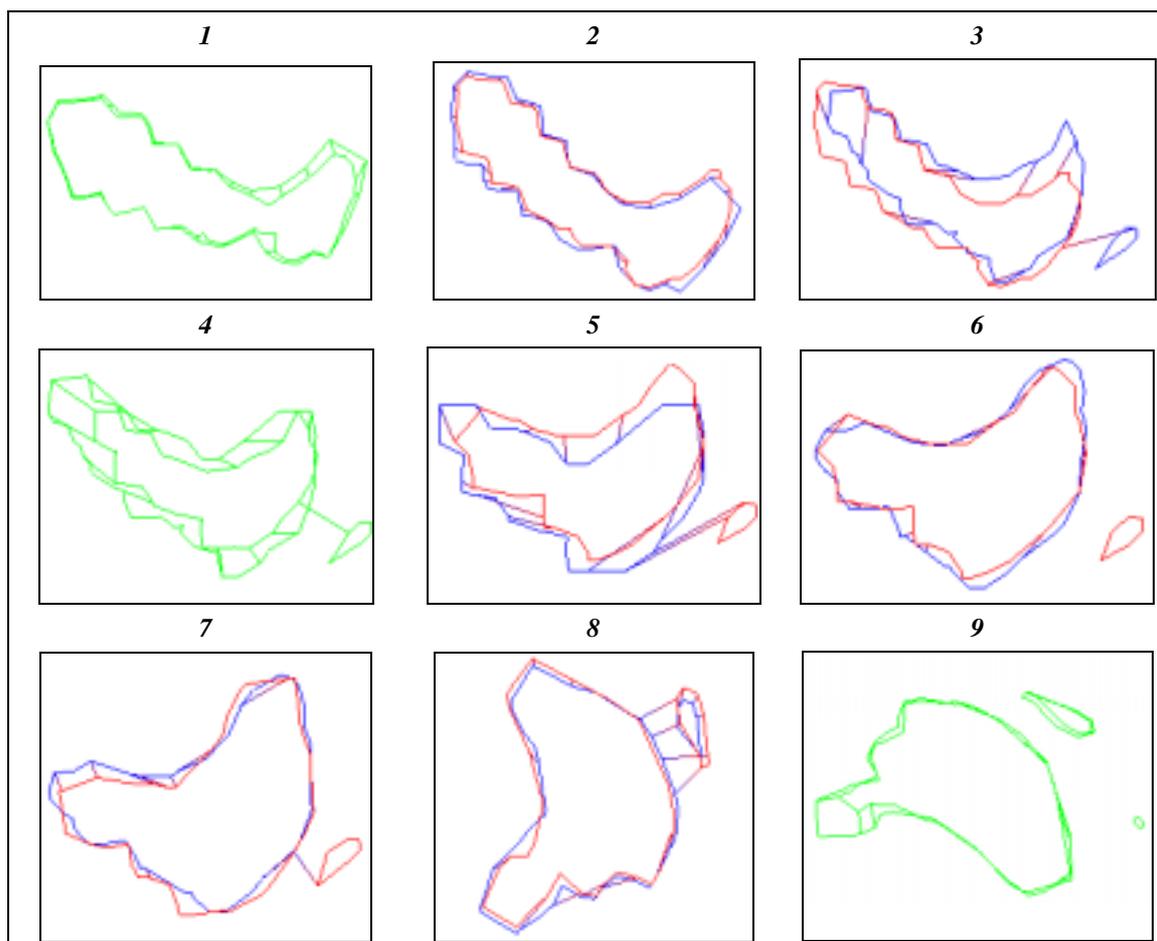


Tabela 7.21 – Número e % de emparelhamentos e valor da energia de deformação ao longo da sequência de isocontornos de nível de brilho médio.

ID	Nº Emp.	Emp. (%)	Energia
1	36	67.9%	278.86
2	28	52.8%	1143.11
3	13	21.3%	1056.71
4	13	35.1%	1559.67
5	13	35.1%	310.88
6	8	19.0%	384.41
7	13	31.0%	344.50
8	23	48.9%	342.41
9	13	28.3%	72.31

Para também nesta experiência se analisar ao longo da sequência a importância dos vários modos de vibração no valor global da energia de deformação apresenta-se, de forma gráfica, na *Figura 7.31*, para cada emparelhamento a contribuição dos mesmos modos, agrupados em doze classes, no valor global da referida energia.

Também nesta experiência se pode concluir que, quando a deformação entre dois isocontornos é essencialmente global, a energia se concentra principalmente nos primeiros

grupos de modos e, assim que as deformações se tornam mais locais, a energia passa a concentrar-se de forma mais acentuada nos grupos intermédios até, para os casos de deformações essencialmente do tipo ruído localizado, ficar praticamente concentrada nos grupos de modos mais altos.

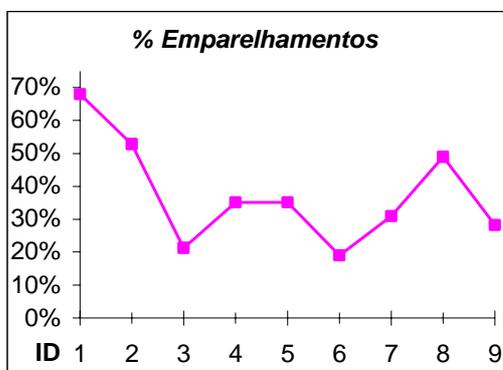


Figura 7.29 – Percentagem de emparelhamentos obtidos entre os isocontornos ao longo da sequência.

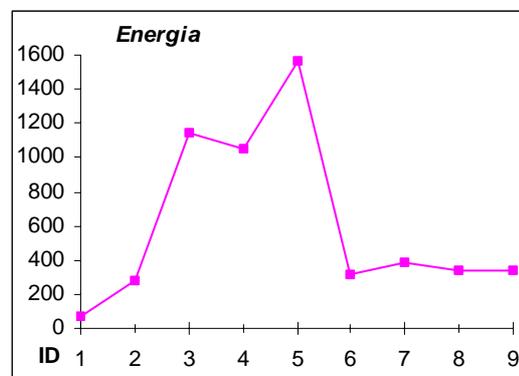


Figura 7.30 – Energia de deformação obtida entre os isocontornos ao longo da sequência.

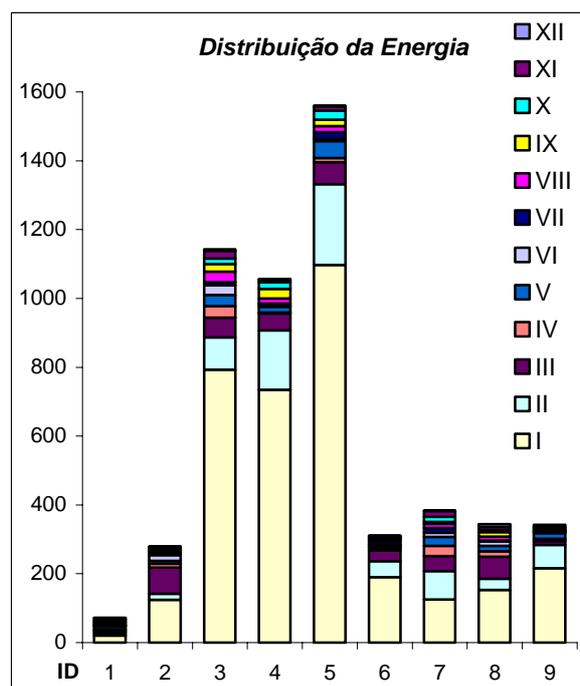


Figura 7.31 – Comparticipação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de isocontornos de nível de brilho médio.

[Reprodução a cores em anexo.]

A título de exemplo, estão representados na Figura 7.32 os isocontornos 1 e 2 após aplicação ao primeiro dos deslocamentos estimados por minimização da energia de deformação.

Em termos de conclusão, pode-se afirmar que se obteve emparelhamentos satisfatórios ao

longo da sequência de contornos de isonível e, mais uma vez, que a energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente ao longo da sequência.



Figura 7.32 – Emparelhamento 1 após aplicação ao primeiro contorno dos deslocamentos nodais estimados.

7.3 – Sumário e conclusões

Neste capítulo foram apresentados alguns ensaios de aplicação da abordagem baseada em modelização física e em análise modal, para a determinação de correspondências em imagens de pedobarografia dinâmica.

Antes da apresentação dos resultados experimentais obtidos foi realizada uma breve introdução à pedobarografia dinâmica e apresentada a sequência de imagens exemplo utilizada nos ensaios realizados.

Os objectos considerados em cada imagem da referida sequência exemplo foram: contornos 2D, superfícies de intensidade determinadas por amostragem regular e por amostragem adaptativa, contornos de isonível determinados numa mesma imagem e determinados ao longo da sequência.

Para cada um destes tipos de objectos, modelizados segundo as metodologias descritas no quinto capítulo, foram apresentadas as correspondências obtidas, foi verificada a quantificação das deformações existentes pela energia de deformação e analisados os deslocamentos nodais estimados por minimização dessa energia.

Utilizando-se parâmetros constantes ao longo de cada experiência, e determinados automaticamente pelos dados a considerar de cada objecto, obtiveram-se resultados que, de modo geral, podem ser classificados como bastante aceitáveis e promissores.

Nos vários ensaios realizados confirmou-se que a energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente entre os objectos a emparelhar, e que a contribuição dos modos no valor global dessa energia é função do tipo de deformação existente: se a deformação é mais global, os primeiros modos assumem uma contribuição mais elevada; se pelo contrário as deformações são mais localizadas e do tipo ruído, então os modos mais altos assumem uma maior importância no valor global da energia de deformação. Esta distribuição da energia de deformação pelos modos de vibração justifica quais os modos a utilizar para se estabelecer satisfatoriamente as correspondências entre dois objectos: se a deformação é mais global, os primeiros modos assumem um papel mais importante no valor da energia e deve ser

utilizado um conjunto reduzido dos primeiros modos de vibração; caso a deformação seja mais localizada, os modos intermédios e mais altos assumem maior relevo no valor global da energia e deverá ser utilizado um número mais elevado de modos.

Os deslocamentos nodais estimados por minimização da energia de deformação apresentaram ao longo dos ensaios realizados qualidade bastante razoável, o que confirma uma possibilidade interessante da modelização física adoptada: a estimação dos deslocamentos nodais, a partir de um conjunto de emparelhamentos estabelecidos, em função das propriedades do material virtual adoptado.

Para não resultarem tempos computacionais muito elevados, a amostragem espacial utilizada em cada imagem ao longo dos ensaios foi algo grosseira. A amostragem a utilizar poderá ser mais fina, facilitando a obtenção de resultados mais satisfatórios, principalmente nos casos dos isocontornos; no entanto, os tempos de computação exigidos serão bastante elevados o que sugere uma implementação paralela da metodologia adoptada. Actualmente já se realizaram experiências de paralelização dos algoritmos, sendo bastantes encorajadores os resultados obtidos na diminuição do tempo de computação [Barbosa, 2000, 2000a].

A modelização dos objectos, considerando o nível de intensidade de cada *pixel* como a sua terceira coordenada, permitiu passar de objectos do tipo contorno 2D para objectos do tipo superfície de intensidade e assim resolver simultaneamente dois problemas complexos: o primeiro relacionado com a possibilidade de existirem em cada imagem mais do que um objecto a considerar, e o segundo devido ao facto desses objectos poderem dividir-se ou fundir-se ao longo da sequência. Estes dois problemas são não só verificados na aplicação considerada neste capítulo, mas também em inúmeras outras aplicações existentes e nas quais este tipo de modelização pode ser bastante útil e adequado.

Com a utilização das correspondências determinadas e com a consideração dos modelos físicos construídos é possível, em pedobarografia dinâmica, dotar o clínico de novos instrumentos analíticos que permitam a caracterização objectiva da dinâmica plantar, como por exemplo, a análise da distribuição das forças e das tensões ao longo do tempo e, assim, a localização das zonas mais sujeitas a ulceração.

Será possível obter-se resultados de qualidade consideravelmente superior em sequências de imagens de pedobarografia dinâmica obtidas com uma amostragem temporal mais fina. O problema da amostragem grosseira da sequência utilizada é mais acentuado para os objectos do tipo isocontorno determinados ao longo da sequência, pois estes resultam demasiado diferentes o que dificulta seriamente a utilização de parâmetros constantes e a determinação de correspondências em número elevado e de boa qualidade.

Aquando da realização dos testes para contornos 2D, procedeu-se à experiência de também incluir pontos no interior dos modelos; contudo, não se verificaram diferenças significativas nos resultados obtidos relativamente que foram apresentados. Tal verificação confirma que a modelização de objectos 2D pelos seus contornos é uma boa solução.

Capítulo VIII

CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO

8.1 – Conclusões finais

Nesta publicação foi apresentada a metodologia concebida e implementada durante os trabalhos desenvolvidos ao longo desta tese. Tendo sempre presentes as considerações e os objectivos delineados inicialmente, as tarefas desenvolvidas foram as seguintes: estudo bibliográfico dos métodos mais significativos actualmente existentes no âmbito do tema da tese e verificação de algumas das suas aplicações; criação de uma plataforma de desenvolvimento e ensaio para análise e processamento de imagem, integrando nesta plataforma ferramentas habitualmente utilizadas para a análise de movimento de corpos rígidos; implementação de um método para determinar a transformação rígida existente entre dois conjuntos de pontos devidamente emparelhados; implementação de metodologias para a determinação de correspondência entre dois objectos, rígidos ou não; implementação de uma abordagem física para a determinação da mesma correspondência, para a estimação, de forma congruente com as propriedades do material virtual adoptado, dos deslocamentos e quantificação da deformação existente; desenvolvimento de modelos para os objectos a emparelhar; e, por último, utilização da metodologia desenvolvida numa aplicação exemplo.

Seguidamente são apresentadas, para cada uma das tarefas cumpridas, algumas observações e conclusões.

A análise de movimento de corpos deformáveis é mais complexa do que a de corpos rígidos. Na implementação das técnicas para tal tarefa é necessário considerar certas restrições para o tipo de movimento ou para a forma, uma vez que para este tipo de objectos a análise do movimento e da forma estão estreitamente relacionados. Tal implica uma classificação do movimento não rígido em vários tipos e, para cada um, a utilização de um conjunto de restrições que tornam a implementação específica desse tipo de movimento não rígido. O número existente de aplicações da análise de movimento de corpos deformáveis é elevado e em crescimento contínuo, nomeadamente na área da imagem médica.

No domínio da análise de movimento de objectos deformáveis, os modelos deformáveis assumem um papel primordial pois resolvem muitas das limitações das técnicas tradicionais, por possibilitarem representações compactas e analíticas da forma dos objectos, pela incorporação de conhecimento *a priori*, e por apresentarem capacidades interactivas.

Como ficou claro ao longo do segundo capítulo, a análise de movimento de objectos deformáveis é um problema de veras complexo, existindo ainda muito trabalho a ser realizado, nomeadamente na modelização de objectos constituídos no plano imagem por várias entidades e que, ao longo do movimento, se podem fundir e/ou dividir, sem que tal corresponda a uma variação real da sua topologia.

A plataforma de desenvolvimento e ensaio iniciada e expandida durante este trabalho apresenta duas características importantes: a primeira é a integração, num mesmo sistema, de entidades e de ferramentas normalmente consideradas em dois domínios distintos: o da visão por computador e o da computação gráfica; esta integração, transparente e harmoniosa, torna

possível aos seus utilizadores disporem num só sistema de um elevado número de entidades e de ferramentas; a segunda característica que a plataforma apresenta é a facilidade com que as funções incorporadas podem ser parametrizadas e controladas e com que os resultados obtidos podem ser analisados e visualizados, conseguindo-se assim realizar ensaios exaustivos dos métodos envolvidos.

A filosofia utilizada na estrutura e implementação da plataforma permite que esta seja facilmente configurada e adaptada a níveis diferentes de utilizadores e de aplicação, e que a sua manutenção não seja demasiado complexa.

Actualmente, a aplicação já incorporou contribuições de vários outros investigadores do grupo e serviu de plataforma de desenvolvimento e ensaio a vários alunos de licenciatura e mestrado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Comprovou-se que a integração de novas funções é fácil e expedita, o que torna mais rápida a adaptação de novos investigadores.

O sistema desenvolvido também tem sido utilizado como aplicação de demonstração em cursos de processamento e análise de imagem, revelando-se uma aplicação com valor na aprendizagem.

Actualmente a plataforma já integra um número elevado de funções para um sistema de processamento e análise de imagem, estando ainda em aberto a construção de um sistema de ajuda que auxilie os seus utilizadores na incorporação dos seus algoritmos e na utilização das funções disponíveis.

A determinação da transformação geométrica rígida existente entre dois objectos, 2D ou 3D, cujos pontos tenham sido previamente emparelhados é conseguida pela utilização de uma metodologia, baseada em minimização por mínimos quadrados do erro da transformação determinada, que utiliza *quaternions* unitários para representar a rotação envolvida. Os resultados obtidos permitem concluir que é possível obter-se boas estimativas para a transformação geométrica existente sem a necessidade de considerar um elevado número de correspondências, e assim distinguir-se as transformações globais do tipo rígido das deformações essencialmente localizadas.

A primeira metodologia implementada para determinar a correspondência entre dois objectos utiliza a análise dos valores e vectores próprios de uma matriz, construída considerando a distância entre os dados pontuais de cada objecto, e estabelecendo as correspondências segundo o princípio da distância mínima. Apesar de a metodologia ser bastante atraente do ponto de vista de implementação, pela sua simplicidade, os resultados obtidos para objectos reais só são satisfatórios quando existir uma grande semelhança no posicionamento, na orientação e nas formas dos objectos em questão.

A inadequação da metodologia referida para objectos relativamente diferentes na forma, posicionamento ou orientação, deve-se ao facto de não ser considerada a estrutura de cada objecto na modelização utilizada. Tal facto originou o desenvolvimento de um novo método que utiliza informação estrutural e estabelece as correspondências através da análise dos

vectores próprios de forma dos dois objectos a emparelhar. Os resultados experimentais obtidos comprovam a melhor adaptação deste novo método para objectos reais e confirmam tratar-se de um método bastante interessante para a determinação das correspondências entre objectos 2D ou 3D, rígidos ou não.

Apesar dos bons resultados obtidos pelo novo método, por vezes verificava-se que os mesmos não eram consistentes com o comportamento físico esperado, se os objectos correspondessem a entidades físicas reais, o que se deve à natureza puramente geométrica do método.

A simulação do comportamento dos objectos reais segundo princípios físicos foi conseguida através de uma modelização física por intermédio do método dos elementos finitos. Após a construção dos modelos para os objectos a emparelhar, as correspondências são determinadas por análise das trajectórias de cada nodo no respectivo espaço modal.

Para se estimar os deslocamentos dos nodos não emparelhados, utiliza-se a minimização da energia de deformação necessária para alinhar o primeiro objecto com o segundo. Esta energia constitui uma medida da deformação necessária para se alinhar dois objectos e permite a sua comparação.

A vantagem deste método está relacionada com a consideração de um material virtual na construção dos objectos a emparelhar, conseguindo-se deste modo uma modelização física para os mesmos e fazendo com que as correspondências sejam determinadas, não por um processo “estatístico” sem grande ligação ao comportamento físico esperado para os objectos mas, pelo contrário, de acordo com as características elásticas do material adoptado.

Nas modelizações físicas consideradas para cada objecto foram utilizados um único elemento finito isoparamétrico de Scleroff, no qual são empregues funções de interpolação de base Gaussiana, e conjuntos de elementos finitos axiais *standard* devidamente agrupados.

Enquanto que nas modelizações por intermédio do elemento finito de Scleroff os nodos são totalmente envolvidos por uma película elástica, obtendo-se modelos com o seu interior totalmente preenchido pelo material virtual, nas modelizações por intermédio de elementos finitos axiais agrupados os modelos resultantes apenas são constituídos por lados (os elementos elásticos dimensionais), obtendo-se assim modelos “ocos” mais simples. Neste segundo caso, os modelos obtidos são geralmente mais flexíveis e menos densos.

A modelização física por intermédio de elementos finitos axiais *standard* agrupados é capaz de produzir bons resultados quando os objectos a emparelhar são rígidos ou quando a deformação existente é reduzida; no entanto, nas situações em que tal não se verifica e desde que os emparelhamentos sejam determinados por um outro processo, continuam a ser úteis na estimação dos deslocamentos e na quantificação da deformação existente; a modelização por intermédio do elemento finito isoparamétrico é mais adaptável, de utilização mais genérica e geralmente produz bons resultados.

Há indícios claros de que a inadequação da modelização por intermédio de elementos finitos axiais lineares, no caso das deformações não rígidas serem elevadas, se deve à

facilidade com que os mesmos entram em instabilidade; tal efeito pode ser atenuado ou evitado aumentando a rigidez do sistema global, através da utilização de ligações suplementares entre os nodos.

Ao longo dos ensaios efectuados verificou-se que as propriedades densidade e módulo de elasticidade do material virtual praticamente não influenciavam as correspondências obtidas; no entanto, o coeficiente de Poisson já as influenciava por alterar a resistência dos modelos ao corte. O valor da energia de deformação e os deslocamentos nodais, estimados por minimização desta energia, são influenciados pelos valores adoptados para todas estas propriedades do material virtual, sendo o módulo de elasticidade a propriedade que apresenta uma influência preponderante.

As várias experiências desenvolvidas permitem concluir que a abordagem baseada em modelização física produz bons resultados de emparelhamento, que os deslocamentos estimados por minimização da energia de deformação geralmente são de boa qualidade e congruentes com as propriedades adoptadas para o material virtual, e que a energia de deformação quantifica de forma aceitável a transformação existente entre os dois objectos a emparelhar. A contribuição dos modos de vibração no valor global dessa energia é função da deformação existente: se a deformação for essencialmente global, os primeiros modos assumem um maior relevo; se as deformações forem mais locais, os modos intermédios e mais elevados assumem então um maior protagonismo no valor global da energia.

A modelização das entidades presentes em cada imagem através de uma superfície de intensidade permite ultrapassar situações bastante comuns em visão por computador, nas quais as imagens 2D de objectos reais são constituídas por várias entidades que, ao longo do seu movimento, se vão agrupando e/ou dividindo, sem que isso corresponda a uma variação real da sua topologia. Assim, desde que o nível de brilho esteja relacionado com alguma característica do objecto a modelizar, a modelização por superfície de intensidade torna possível considerar um único modelo do tipo “casca” em cada imagem e resolver em simultâneo os dois problemas referidos.

As superfícies de intensidade foram construídas a partir das imagens originais de duas maneiras distintas: uma na qual é utilizada uma amostragem rectangular e regular, e uma outra em que é utilizada uma amostragem adaptativa, baseada na análise dos perfis radiais de intensidade centrados nos máximos locais presentes na imagem. Enquanto a amostragem rectangular e regular pode originar superfícies em que existam zonas com excessivo e/ou com reduzido número de nodos, a amostragem adaptativa origina superfícies com uma distribuição dos nodos que é função das características das zonas presentes na imagem original, obtendo-se assim modelos mais adequados aos objectos existentes.

Para se construir os modelos de superfície de intensidade, algumas ferramentas comuns no âmbito da computação gráfica tornaram-se necessárias: triangulação de pontos não estruturados, suavização e simplificação de malhas, etc. Tal foi conseguido pela integração na plataforma de desenvolvimento e ensaio da biblioteca de domínio público *VTK – The*

Visualization Toolkit [Schroeder, 1996, 1998, 1999]. Esta integração permitiu que várias das entidades e algumas das ferramentas comuns na área da computação gráfica ficassem disponíveis, de forma transparente e em perfeita simbiose, num sistema típico de processamento e análise de imagem.

A título de exemplo, a metodologia física e os modelos implementados foram aplicados em imagens de pedobarografia dinâmica. Os primeiros objectos considerados foram do tipo contorno e, apesar dos bons resultados obtidos, comprovou-se o interesse dos modelos de superfície pois existiam imagens constituídas por mais do que um contorno e que ao longo da sequência se dividiam e/ou se agrupavam. Como nesta aplicação existe uma forte relação entre a intensidade de cada *pixel* e o valor de pressão exercida sobre o sistema sensor, foram utilizados modelos de superfície de intensidade e obtiveram-se bons resultados para o emparelhamento, para a estimação dos deslocamentos nodais por minimização da energia de deformação, e para a quantificação da deformação existente entre os objectos através dessa energia. Acresce ainda que a modelização por contornos não permite obter informação sobre as zonas de hiperpressão e sobre os gradientes espaciais e temporais de pressão.

Como em pedobarografia dinâmica, assim como em outras aplicações existentes em visão por computador, tem especial interesse analisar a deformação existente entre contornos de isonível, foram também integradas na plataforma de desenvolvimento e ensaio funções que possibilitam a determinação de tais entidades; as metodologias implementadas para determinar a correspondência, estimar os deslocamentos nodais e determinar a energia de deformação foram alargadas a este tipo de objectos.

Para não serem necessários tempos computacionais muito elevados, a amostragem espacial utilizada nos ensaios realizados em imagens de pedobarografia dinâmica foi algo grosseira. A amostragem a utilizar poderá ser mais fina, facilitando a obtenção de resultados mais satisfatórios, principalmente nos casos dos isocontornos; no entanto, os tempos de computação exigidos serão bastante elevados, o que sugere uma implementação paralela da metodologia adoptada.

Será possível obter-se resultados de qualidade consideravelmente superior em sequências de imagens de pedobarografia dinâmica obtidas quando se utilizar uma amostragem temporal mais fina.

Aquando da aplicação da abordagem utilizada para modelizar objectos 2D, procedeu-se à experiência de também incluir na sua modelização pontos do seu interior; contudo, não se verificaram grandes diferenças nos resultados obtidos relativamente aos determinados utilizando-se unicamente os pontos que constituem os seus contornos. Tal verificação confirma que a modelização de objectos 2D pelos seus contornos é uma boa solução.

A aplicação da abordagem física e dos modelos desenvolvidos em imagens de pedobarografia dinâmica permitiu obter bons resultados e verificar a utilidade e adequação dos modelos de superfície de intensidade para problemas reais. Pensa-se que idênticos

benefícios poderão também ser verificados em muitos outros problemas similares.

8.2 – Perspectivas de desenvolvimento futuro

Apesar do trabalho desenvolvido já possibilitar a obtenção de resultados experimentais bastante satisfatórios e promissores, ele pode ser enriquecido, complementado e melhorado, nomeadamente nas seguintes etapas:

- *Na modelização:*
 - a) Nas modelizações baseadas em distâncias Gaussianas ponderadas, verificou-se que a utilização de curvas Gaussianas de largura constante pode não ser adequada nos casos em que a densidade não é uniforme ou quando os dados a modelizar pertencem a entidades distintas. Nestes casos, será interessante utilizar-se curvas cuja largura é determinada localmente, de forma a obter-se uma melhor modelização.
 - b) Visto que actualmente já estão disponíveis na plataforma de desenvolvimento e ensaio ferramentas que permitem a construção de elementos finitos *standard* mais complexos, deve-se realizar um estudo da sua utilização na modelização física.
 - c) Como por vezes a deformação existente entre dois objectos é acentuada, os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos clássicos, utilizando a teoria da elasticidade linear, não são satisfatórios. Nestes casos poderão ser utilizados elementos finitos não lineares.
 - d) As propriedades elásticas do material deverão ser determinadas de forma a que o modelo se deforme segundo o esperado. Assim, caso seja possível, as propriedades do material deverão ser incluídas na modelização e estimadas a partir do comportamento verificado para o modelo ao longo do seu movimento.

- *Na determinação da correspondência:*
 - a) Na fase de determinação das correspondências deverá ser considerada informação sobre a vizinhança; por exemplo, os nodos vizinhos deverão permanecer vizinhos na imagem seguinte, a correspondência determinada não deverá implicar uma dobragem do modelo sobre si mesmo, a ordem dos nodos não deverá ser alterada em demasia ao longo da sequência, etc.
 - b) Na pesquisa das correspondências na matriz de correlação, determinada utilizando a distância euclidiana entre os modos de vibração que constituem cada modelo a emparelhar, deverá ser maximizada a correspondência obtida em termos globais e não locais. Isto é, deverá ser encontrada a solução cujas

correspondências conduzem à melhor solução para todos os nodos, e não à melhor correspondência para cada um.

- c) Existem muitas situações em que a correspondência do tipo “um para um” não deverá ser imposta. Assim, na fase da determinação da correspondência, deverão ser permitidos emparelhamentos entre vários nodos e um único nodo e vice-versa.
- d) Ao longo dos testes efectuados verificou-se que, consoante o conjunto dos modos de vibração considerado, se obtinham emparelhamentos variáveis. A situação de melhor compromisso passou por considerar apenas uma percentagem dos primeiros modos; tal poderá ser complementado através de uma combinação ponderada de vários conjuntos de modos de vibração. Os pesos a considerar deverão reflectir a importância dos vários conjuntos em cada situação.
- e) Em sequências de imagem, antes de se proceder à modelização de cada objecto a emparelhar, poderá realizar-se um alinhamento rígido. Os parâmetros a utilizar em tal alinhamento poderão ser estimados, de forma recursiva ao longo da sequência, por filtragem de Kalman.

- *Na aplicação em pedobarografia dinâmica:*

Na aplicação da abordagem física e dos modelos utilizados em pedobarografia dinâmica, verificou-se que as imagens a considerar estavam bastante separadas no tempo, o que implicava objectos bastante distintos. Se as imagens a considerar forem adquiridas utilizando uma amostragem temporal mais rápida, os resultados obtidos serão de qualidade bastante superior.

Evidentemente que a exploração dos resultados, de forma a produzir informação clinicamente relevante, não sendo do âmbito deste trabalho, constitui outro vector de desenvolvimento.

- *Nos resultados obtidos:*

- a) Utilizando modelização física por intermédio do método dos elementos finitos torna-se extremamente fácil o cálculo das tensões instaladas e das deformações existentes ao longo do modelo. Tal informação pode ser bastante útil em várias aplicações; por exemplo, na avaliação dos esforços a que o modelo está sujeito.
- b) Além da energia global de deformação pode ser interessante, em várias aplicações, determinar a energia de deformação local e a sua variação. Assim poderia ser calculada a energia de deformação necessária para cada conjunto restrito de nodos emparelharem, por exemplo utilizando-se elementos finitos axiais, e visualizar essa energia ao longo do modelo.

- c)* Nas aplicações em que existam conjuntos de dados disponíveis para treino, a análise das componentes principais das deformações poderá ser bastante útil para validar os resultados obtidos, para limitar as deformações admissíveis, para comparar, classificar e reconhecer objectos, etc.
- d)* A abordagem física e os modelos utilizados deverão ser aplicados e analisados em outros tipos de imagem; por exemplo em imagens de faces, do pulmão, do coração, etc. Actualmente está em fase inicial a aplicação da metodologia desenvolvida em imagens renais de medicina nuclear.
- *Na plataforma de desenvolvimento e ensaio:*

 - a)* Qualquer aplicação informática necessita de um razoável período de validação; a plataforma criada encontra-se nessa fase. Um grande número de utilizadores tem contribuído para este processo.
 - b)* O sistema de ajuda para as funções disponíveis na plataforma ainda não está concluído. Tal sistema é indispensável a qualquer plataforma que pretenda ser de utilização genérica e disponível a diferentes tipos de utilizadores, como é o caso.
 - c)* Parte das funções actualmente disponíveis na plataforma apresenta elevados custos de processamento. Seria desejável e de grande utilidade a paralelização de algumas destas funções. Bastante trabalho já foi realizado nessa área, nomeadamente na paralelização, utilizando o *Windows PVM - Parallel Virtual Machine*, do método utilizado para determinação da correspondência entre dois objectos através da análise modal da forma [Barbosa, 2000, 2000a], dos algoritmos de contornos activos [Barbosa, 1996] e de detecção de orlas de intensidade com o algoritmo de Shen & Castan e de construção do histograma [Barbosa, 1998].

Bibliografia

[Acharya, 1998] – *Raj Acharya, Richard Wasserman, Jeffrey Stevens, Carlos Hinojosa*
BIOMEDICAL IMAGING MODALITIES: AN OVERVIEW
 DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998

[Amini, 1991] – *Amir A. Amini, James S. Duncan*
POINTWISE TRACKING OF LEFT-VENTRICULAR MOTION IN 3D
 DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1991)

[Åström, 1999] – *Kalle Åström, Fredrik Kahl*
MOTION ESTIMATION IN IMAGE SEQUENCES USING THE DEFORMATION OF APPARENT CONTOURS
 IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 21, Nº 2 – FEBRUARY 1999

[Bainville, 1995] – *E. Bainville, G. Champeboux, P. Cinquin, V. Dessenne, A. Hamadeh, J. Troccaz, S. Lavallée, O. Péria, P. Sautot, R. Seliski*
ANATOMICAL SURFACES BASED 3D/3D AND 3D/2D REGISTRATION FOR COMPUTER ASSISTED MEDICAL INTERVENTIONS
 MEDICAL IMAGING - ANALYSIS OF MULTIMODALITY 2D/3D IMAGES, IOS PRESS – 1995

[Bajcsy, 1989] – *Ruzena Bajcsy, Stane Kovačič*
MULTIRESOLUTION ELASTIC MATCHING
 DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1989)

[Barbosa, 1996] – *Jorge G. Barbosa, João Manuel Tavares, A. Jorge Padilha*
PARALELLISATION OF ACTIVE CONTOURS
 RECPAD'96 – 8TH PORTUGUESE CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION
 GUIMARÃES, PORTUGAL – 21/22 DE MARÇO DE 1996

[Barbosa, 1998] – *Jorge Barbosa, Armando Padilha*
ALGORITHM-DEPENDANT METHOD TO DETERMINE THE OPTIMAL NUMBER OF COMPUTERS IN PARALLEL VIRTUAL MACHINES
 VECTOR AND PARALLEL PROCESSING – VECPAR'98, THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE
 PORTO, PORTUGAL – JUNE 1998

[Barbosa, 2000] – *Jorge G. Barbosa, João Manuel Tavares, A. Jorge Padilha*
PARALLEL IMAGE PROCESSING SYSTEM ON A CLUSTER OF PERSONAL COMPUTERS
 VECPAR 2000 – 4TH INTERNATIONAL MEETING ON VECTOR AND PARALLEL PROCESSING
 FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO, PORTO, PORTUGAL – 21/23 DE JUNHO DE 2000

[Barbosa, 2000a] – *Jorge G. Barbosa, João Manuel Tavares, A. Jorge Padilha*
LINEAR ALGEBRA ALGORITHMS IN A HETEROGENEOUS CLUSTER OF PERSONAL COMPUTERS
 HCW 2000 – 9TH HETEROGENEOUS COMPUTING WORKSHOP, CANCUN, MEXICO – 2000

[Bardinet, 1994] – *Eric Bardinet, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*
FITTING 3-D DATA USING SUPERQUADRICS AND FREE-FORM DEFORMATIONS
 IEEE 1051-4651/94, PP. 79/83 – 1994

[Bardinet, 1995] – *Eric Bardinet, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*
TRACKING MEDICAL 3D DATA WITH A PARAMETRIC DEFORMABLE MODEL
IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION, FLORIDA, PP. 299/304 – 1995

[Bardinet, 1996] – *Eric Bardinet, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*
TRACKING AND MOTION ANALYSIS OF THE LEFT VENTRICLE WITH DEFORMABLE SUPERQUADRICS
MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, NUMBER 2, PP. 129/149, OXFORD UNIVERSITY PRESS – 1996

[Bascle, 1992] – *B. Bascle, R. Deriche*
FEATURES EXTRACTION USING PARAMETRIC SNAKES
IEEE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, NETHERLANDS – 1992

[Bascle, 1994] – *Benedicte Bascle, Patrick Bouthemy, Rachild Deriche, Francois Meyer*
SUIVI DE PRIMITIVES COMPLEXES SUR UNE SEQUENCES D’IMAGES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 2468 – DECEMBRE 1994

[Bathe, 1996] – *Klaus-Jürgen Bathe*
FINITE ELEMENT PROCEDURES
PRENTICE HALL – 1996

[Baumberg, 1993] – *A. M. Baumberg, D. C. Hogg*
LEARNING FLEXIBLE MODELS FROM IMAGE SEQUENCES
UNIVERSITY OF LEEDS, SCHOOLS OF COMPUTER STUDIES, REPORT N° 93.36 – OCTOBER 1993

[Baumberg, 1994] – *A. M. Baumberg, D. C. Hogg*
AN EFFICIENT METHOD FOR CONTOUR TRACKING USING ACTIVE SHAPE MODELS
UNIVERSITY OF LEEDS, SCHOOLS OF COMPUTER STUDIES, REPORT N° 94.11 – APRIL 1994

[Baumberg, 1994a] – *Adam Baumberg, David Hogg*
AN ADAPTIVE EIGENSHAPE MODEL
BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE – 1994

[Beer, 1981] – *Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.*
MECÂNICA VETORIAL PARA ENGENHEIROS, VOLUME II, DINÂMICA
MCGRAW-HILL – 1981

[Belhumeur, 1997] – *Peter N. Belhumeur, João P. Hespanha, David J. Kriegman*
EIGENFACES VS FISHERFACES: RECOGNITION USING CLASS SPECIFIC LINEAR PROJECTION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 7 – JULY 1997

[Benayoun, 1994] – *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*
ADAPTIVE MESHES AND NONRIGID MOTION COMPUTATION
IEEE - 1051-4651/94 – MAI 1994

- [Benayoun, 1994a]** – *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*
AN ADAPTIVE MODEL FOR 2D AND 3D DENSE NON RIGID MOTION COMPUTATION
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 2297 – MAI 1994
- [Benayoun, 1995]** – *Serge Benayoun, Chahab Nastar, Nicholas Ayache*
DENSE NON-RIGID MOTION ESTIMATION IN SEQUENCES OF 3D IMAGES USING DIFFERENTIAL CONSTRAINTS
SUBMISSION TO CVRMED'95 – 1995
- [Bimbo, 1997]** – *Alberto Del Bimbo, Pitro Pala*
VISUAL IMAGE RETRIEVAL BY ELASTIC MATCHING OF USER SKETCHES
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 2 – FEBRUARY 1997
- [Blake, 1993]** – *Andrew Blake, Rupert Curwen, Andrew Zisserman*
A FRAMEWORK FOR SPATIOTEMPORAL CONTROL IN THE TRACKING OF VISUAL CONTOURS
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 11:2, pp. 127/145 – 1993
- [Blake, 1998]** – *Andrew Blake, Michael Isard*
ACTIVE CONTOURS
SPRINGER-VERLAG – 1998
- [Branco, 1985]** – *Carlos A. G. De Moura Branco*
MECÂNICA DOS MATERIAIS
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN – 1985
- [Bro-Nielsen, 1996]** – *Morten Bro-Nielsen*
SURGERY SIMULATION USING FAST FINITE ELEMENTS
VBC'96 – VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING, 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, HAMBURG, GERMANY, SPRINGER – SEPTEMBER 1996
- [Byrne, 1994]** – *N. J. Byrne, A. M. Baumberg, D. C. Hogg*
USING SHAPE AND INTENSITY TO TRACK NON-RIGID OBJECTS
UNIVERSITY OF LEEDS, SCHOOLS OF COMPUTER STUDIES, REPORT N° 94.14 – MAY 1994
- [Chan, 1994]** – *Michael Chan, Dimitri Metaxas, Sven Dickinson*
PHYSICS-BASED TRACKING OF 3D OBJECTS IN 2D IMAGE SEQUENCES
12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION – 1994
- [Chan, 1994a]** – *Michael Chan, Dimitri Metaxas*
PHYSICS-BASED OBJECT POSE AND SHAPE ESTIMATION FROM MULTIPLE VIEWS
12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION – 1994
- [Chapra, 1988]** – *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*
NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS
MCGRAW-HILL – 1988

[Chen, 1994] – *Chang Wen Chen, Thomas S. Huang, Matthew Arrott*
MODELING, ANALYSIS, AND VISUALIZATION OF LEFT VENTRICLE SHAPE AND MOTION BY HIERARCHICAL DECOMPOSITION
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)

[Chesnaud, 1999] – *Christophe Chesnaud, Philippe Réfrégier, Vlady Boulet*
STATISTICAL REGION SNAKE-BASED SEGMENTATION ADAPTED TO DIFFERENT PHYSICAL NOISE MODELS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 21, N° 11 – NOVEMBER 1999

[Christensen, 1996] – *Gary E. Christensen, Michael I. Miller, Michael W. Vannier*
INDIVIDUALIZING NEURO-ANATOMICAL ATLASES USING A MASSIVELY PARALLEL COMPUTER
IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS, VOL. 29, N° 1 – JANUARY 1996

[Cipolla, 1992] – *Roberto Cipolla, Andrew Zisserman*
QUALITATIVE SURFACE SHAPE FROM DEFORMATION OF IMAGE CURVES
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 8:1, PP. 53/69 – 1992

[Cipolla, 1992a] – *Roberto Cipolla, Andrew Blake*
SURFACE SHAPE FROM THE DEFORMATION OF APPARENT CONTOURS
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 9:2, PP. 83/112 – 1992

[Cohen, 1990] – *Laurent Cohen, Isaac Cohen*
A FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO THE NEW ACTIVE CONTOUR MODELS AND 3-D RECONSTRUCTION FROM CROSS SECTIONS
THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION – DECEMBER 1990

[Cohen, 1991] – *Laurent D. Cohen*
NOTE ON ACTIVE CONTOUR MODELS AND BALLOONS
CVGIP: IMAGE UNDERSTANDING, VOL. 53, N° 2, MARCH, PP. 211/218 – 1991
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1991)

[Cohen, 1991a] – *Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*
INTRODUCING DEFORMABLE SURFACES TO SEGMENT 3D IMAGES AND INFER DIFFERENTIAL STRUCTURES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 1403 – MARS 1991

[Cohen, 1992] – *Isaac Cohen, Nicholas Ayache, Patrick Sulger*
TRACKING POINTS ON DEFORMABLE OBJECTS USING CURVATURE INFORMATION
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1992)

[Cohen, 1992a] – *Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, Nicholas Ayache*
USING DEFORMABLE SURFACES TO SEGMENT 3-D IMAGES AND INFER DIFFERENTIAL STRUCTURES
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1992)

- [Cohen, 1994] – *Isaac Cohen, Laurent D. Cohen*
A HYBRID HYPERQUADRIC MODEL FOR 2-D AND 3-D DATA FITTING
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, ROCQUENCOURT,
RAPPORT DE RECHERCHE N° 2188 – 1994
- [Cootes, 1992] – *T. F. Cootes, C. J. Taylor, D. H. Cooper, J. Graham*
TRAINING MODELS OF SHAPE FROM SETS OF EXAMPLES
DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1992
- [Cootes, 1993] – *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
ACTIVE SHAPE MODEL SEARCH USING GREY-LEVEL MODELS: A QUANTITATIVE EVALUATION
BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE, BMVA PRESS, PP. 639/648 – 1993
- [Cootes, 1994] – *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
MODELLING OBJECT APPEARANCE USING THE GREY-LEVEL SURFACE
BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE, PP. 479/488 – 1994
- [Cootes, 1994a] – *T. F. Cootes, C. J. Taylor, A. Lanitis*
MULTI-RESOLUTION SEARCH WITH ACTIVE SHAPE MODELS
IEEE 1051-4651/94, PP. 610/612 – 1994
- [Cootes, 1995] – *T. F. Cootes, C. J. Taylor*
COMBINING POINT DISTRIBUTION MODELS WITH SHAPE MODELS BASED ON FINITE ELEMENT ANALYSIS
IMAGE AND VISION COMPUTING, VOL. 13, N° 5, PP. 403/410 – JUNE 1995
- [Correia, 1995] – *Miguel F. P. Velhote Correia*
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: ANÁLISE DE MOVIMENTO EM SEQUÊNCIAS DE IMAGENS
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1995
- [Cotin, 1996] – *Stéphane Cotin, Hervé Delingette, Nicholas Ayache*
REAL TIME VOLUMETRIC DEFORMABLE MODELS FOR SURGERY SIMULATION
VBC'96 – VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING, 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE,
HAMBURG, GERMANY, SPRINGER – SEPTEMBER 1996
- [Cotin, 1999] – *Stéphane Cotin, Hervé Delingette, Nicholas Ayache*
REAL-TIME ELASTIC DEFORMATIONS OF SOFT TISSUES FOR SURGERY SIMULATION
IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS, VOL. 5, N° 1 –
JANUARY-MARCH 1999
- [Crandall, 1978] – *Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl, Thomas J. Lardner*
AN INTRODUCTION TO THE MECHANICS OF SOLIDS
MCGRAW-HILL – 1978
- [Craw, 1999] – *Ian Craw, Nicholas Costen, Takashi Kato, Shigeru Akamatsu*
HOW SHOULD WE REPRESENT FACES FOR AUTOMATIC RECOGNITION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 21, N° 8 –
AUGUST 1999

[Davatzikos, 1995] – *Chris Davatzikos, R. Nick Bryan*
USING A DEFORMABLE SURFACE MODEL TO OBTAIN A SHAPE REPRESENTATION OF THE CORTEX

IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION, FLORIDA, PP. 212/217 – 1995

[Davatzikos, 1999] – *Christos Davatzikos, Jerry L. Prince*

CONVEXITY ANALYSIS OF ACTIVE CONTOUR PROBLEMS

IMAGE AND VISION COMPUTING 17, PP. 27/36 – 1999

[Davies, 1999] – *Robert Davies*

NEWMAT, A MATRIX LIBRARY IN C⁺⁺, [HTTP://WEBNZ.CO.NZ/ROBERT/](http://webnz.co.nz/robert/) – 1999

[Davis, 1995] – *Malcolm H. Davis, Alireza Khotanzad, Duane P. Flaming, Steven E. Harms*
COORDINATE TRANSFORMATION IN 3D IMAGE MATCHING BY A PHYSICS BASED METHOD-ELASTIC BODY SPLINES

IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION, FLORIDA, PP. 218/222 – 1995

[DeCarlo, 1996] – *Douglas DeCarlo, Dimitri Metaxas*

BLENDED DEFORMABLE MODELS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 4 – APRIL 1996

[DeCarlo, 1998] – *Douglas DeCarlo, Dimitri Metaxas*

SHAPE EVOLUTION WITH STRUCTURAL AND TOPOLOGICAL CHANGES USING BLENDING

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 20, N° 11 – NOVEMBER 1998

[Declerck, 1995] – *Jérôme Declerck, Gérard Subsol, Jean-Philippe Thirion, Nicholas Ayache*
AUTOMATIC RETRIEVAL OF ANATOMICAL STRUCTURES IN 3D MEDICAL IMAGES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 2485 – FEVRIER 1995

[Delagnes, 1995] – *Philippe Delagnes, Jenny Benois, Dominique Barba*

ACTIVE CONTOURS APPROACH TO OBJECT TRACKING IN IMAGE SEQUENCES WITH COMPLEX BACKGROUND

PATTERN RECOGNITION LETTERS 16, PP. 171/178 – 1995

[Delingette, 1994] – *Hervé Delingette*

SIMPLEX MESHES: A GENERAL REPRESENTATION FOR 3D SHAPE RECONSTRUCTION

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 2214 – MARS 1994

[Donnell, 1994] – *Thomas O'Donnell, Xi-Sheng Fanf, Terrence E. Boulton, Alok Gupta*

THE EXTRUDED GENERALIZED CYLINDER: A DEFORMABLE MODEL FOR OBJECT RECOVERY

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)

[Donnell, 1994a] – *Thomas O'Donnell, Alok Gupta, Terrence E. Boulton*

A PERIODIC GENERALIZED CYLINDER MODEL WITH LOCAL DEFORMATIONS FOR TRACKING CLOSED CONTOURS EXHIBITING REPEATING MOTION

IEEE 1051-4651/94, PP. 397/402 – 1994

- [Donnell, 1995] – *Thomas O'Donnell, Alok Gupta, Terry Boulton*
THE HYBRID VOLUMETRIC VENTRICULOID: A MODEL FOR MR-SPAMM 3-D ANALYSIS
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1995)
- [Dubuisson, 1995] – *M.-P. Dubuisson, S. Lakshmanan, A. K. Jain*
VEHICLE SEGMENTATION USING DEFORMABLE TEMPLATES
IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION, FLORIDA, PP. 581/586 – 1995
- [Dubuisson, 1996] – *Marie-Pierre Dubuisson Jolly, Sridhar Lakshmanan, Anil K. Jain*
VEHICLE SEGMENTATION AND CLASSIFICATION USING DEFORMABLE TEMPLATES
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 3 –
MARCH 1996
- [Duncan, 1991] – *J. S. Duncan, R. L. Owen, L. H. Staib, P. Anandan*
MEASUREMENT OF NON-RIGID MOTION USING CONTOUR SHAPE DESCRIPTORS
CVPR'91 – COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, HAWAII – 1991
- [Elliott, 1995] – *Dr Peter Elliott*
INTERACTIVE IMAGE SEGMENTATION IN COVIRA
MEDICAL IMAGING, ANALYSIS OF MULTIMODALITY 2D/3D IMAGES, IOS PRESS – 1995
- [Essa, 1992] – *Irfan A. Essa, Stan Sclaroff, Alex P. Pentland*
PHYSICALLY-BASED MODELING FOR GRAPHICS AND VISION
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N°
184 – 1992
- [Essa, 1994] – *Irfan A. Essa, Alex Pentland*
A VISION SYSTEM FOR OBSERVING AND EXTRACTING FACIAL ACTION PARAMETERS
IEEE CPVR 1994 CONFERENCE, SEATTLE, WASHINGTON, PP. 76/83 – JUNE 1994
- [Essa, 1994a] – *Irfan A. Essa, Trevor Darrell, Alex Pentland*
TRACKING FACIAL MOTION
IEEE WORKSHOP ON NONRIGID AND ARTICULATE MOTION, AUSTIN, TEXAS – NOVEMBER
1994
- [Essa, 1995] – *Irfan Aziz Essa*
PHD THESIS: ANALYSIS, INTERPRETATION AND SYNTHESIS OF FACIAL EXPRESSIONS
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY – FEBRUARY 1995
- [Essa, 1997] – *Irfan A. Essa, Alex P. Pentland*
CODING, ANALYSIS, INTERPRETATION, AND RECOGNITION OF FACIAL EXPRESSIONS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 7 –
JULY 1997
- [Farin, 1996] – *Gerald Farin*
CAGD A PRACTICAL GUIDE
ACADEMIC PRESS – 1996

[Fishman, 1996] – *Elliot K. Fishman, Brian S. Kuszyk, David G. Heath, Luomin Gao, Brian Cabral*

SURGICAL PLANNING FOR LIVER RESECTION

IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS, VOL. 29, Nº 1 – JANUARY 1996

[Foley, 1991] – *Foley, vanDam, Feiner, Highes*

COMPUTER GRAPHICS

ADDISON-WESLEY – 1991

[Geiger, 1995] – *David Geiger, Alok Gupta, Luiz A. Costa, John Vlontzos*

DYNAMIC PROGRAMMING FOR DETECTING, TRACKING, AND MATCHING DEFORMABLE CONTOURS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 17, Nº 3, PP. 294/302 – MARCH 1995

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1995)

[Goldgof, 1988] – *Dmitry B. Goldgof, Hua Lee, Thomas S. Huang*

MOTION ANALYSIS OF NONRIGID SURFACES

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, PP. 375/380 – 1988

[Grzeszczuk, 1997] – *Robert P. Grzeszczuk, David N. Levin*

“BROWNIAN STRINGS”: SEGMENTING IMAGES WITH STOCHASTICALLY DEFORMABLE CONTOURS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, Nº 10 – OCTOBER 1997

[Gunn, 1997] – *Steve R. Gunn, Mark S. Nixon*

A ROBUST SNAKE IMPLEMENTATION: A DUAL ACTIVE CONTOUR

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, Nº 1 – JANUARY 1997

[Gupta, 1993] – *A Gupta, L Von Kurowski, A Singh, D Geiger, C-C Liang, M-Y Chiu, LP Adler, M Haacke, DL Wilson*

CARDIAC MR IMAGE SEGMENTATION USING DEFORMABLE MODELS

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1993)

[Gupta, 1994] – *A Gupta, T O'Donnell, A Singh*

SEGMENTATION AND TRACKING OF CINE CARDIAC MR AND CT IMAGES USING A 3-D DEFORMABLE MODEL

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)

[Hall, 1993] – *Ernest L. Hall*

FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF ROBOT VISION

SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII, PP. 321/333 – 1993

[Harrow, 1998] – *D. L. Harrow, P. J. Conlon, C. J. Page, J. P. Cubillo*

MACHINE VISION FOR ARM GESTURE RECOGNITION USING ACTIVE SHAPE MODELS AND TRAJECTORY PREDICTION TECHNIQUES

8TH PORTUGUESE CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION – 1998

[Henricsson, 1994] – *Olof Henricsson, Walter Neuenschwander*

CONTROLLING GROWING SNAKES BY USING KEY-POINTS
IEEE 1051-4651/94 – 1994

[Herlin, 1992] – *Isabelle L. Herlin, Nicholas Ayache*

FEATURES EXTRACTION AND ANALYSIS METHODS FOR SEQUENCES OF ULTRASOUND IMAGES
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1992)

[Hill, 1994] – *A. Hill, C. J. Taylor*

AUTOMATIC LANDMARK GENERATION FOR POINT DISTRIBUTION MODELS
DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1994

[Horn, 1987] – *Berthold K. P. Horn*

CLOSED-FORM SOLUTION OF ABSOLUTE ORIENTATION USING UNIT QUATERNIONS
JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA A, VOL. 4, 629/642 – APRIL 1987

[Jain, 1996] – *Anil K. Jain, Yu Zhong, Sridhar Lakshmanan*

OBJECT MATCHING USING DEFORMABLE TEMPLATES
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 3 – MARCH 1996

[Jain, 1997] – *Anil K. Jain, Douglas Zongker*

REPRESENTING AND RECOGNITION OF HANDWRITTEN DIGITS USING DEFORMABLE TEMPLATES
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 12 – DECEMBER 1997

[Jones, 1999] – *Grinnell Jones, Bir Bhanu*

RECOGNITION OF ARTICULATED AND OCCLUDED OBJECTS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 21, N° 7 – JULY 1999

[Kakadiaris, 1994] – *Ioannis A. Kakadiaris, Dimitri Metaxas, Ruzena Bajcsy*

ACTIVE PART-DECOMPOSITION, SHAPE AND MOTION ESTIMATION OF ARTICULATED OBJECTS: A PHYSICS-BASED APPROACH
IEEE COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION CONFERENCE, PP. 980/984, SEATTLE, WASHINGTON – JUNE 1994

[Kakadiaris, 1995] – *Ioannis A. Kakadiaris, Dimitri Metaxas*

3D HUMAN BODY MODEL ACQUISITION FROM MULTIPLE VIEWS
FIFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION, PP. 618/623, BOSTON, MA – 20/23 JUNE 1995

[Kakadiaris, 1996] – *Ioannis A. Kakadiaris, Dimitri Metaxas, Ruzena Bajcsy*

INFERRING 2D OBJECT STRUCTURE FROM THE DEFORMATION OF APPARENT CONTOURS
TO APPEAR IN THE SPECIAL ISSUE OF COMPUTER VISION AND IMAGE UNDERSTANDING ON PHYSICS-BASE MODELING AND REASONING IN COMPUTER VISION – 1996

[Kambhamettu, 1994] – *Chandra Kambhamettu, Dmitry B. Goldgof*
CURVATURE-BASED APPROACH TO POINT CORRESPONDENCE RECOVERY IN CONFORMAL NONRIGID MOTION

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)

[Kambhamettu, 1998] – *Chandra Kambhamettu, Dmitry B. Goldgof, Demetri Terzopoulos, Thomas S. Huang*
NONRIGID MOTION ANALYSIS

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998

[Kapur, 1996] – *Tina Kapur, W. Eric L. Grimson, William M. Wells III, Ron Kikinis*
SEGMENTATION OF BRAIN TISSUE FROM MAGNETIC RESONANCE IMAGES

MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, N° 2, PP. 109/127, OXFORD UNIVERSITY PRESS – 1996

[Kass, 1988] – *Michael Kass, Andrew Witkin, Demetri Terzopoulos*
SNAKES: ACTIVE CONTOUR MODELS

INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, PP. 321/331 – 1988

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1988)

[Keeve, 1996] – *Erwin Keeve, Sabine Girod, Bernd Girod*
CRANIOFACIAL SURGERY SIMULATION

VBC'96 – VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING, 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, HAMBURG, GERMANY, SPRINGER – SEPTEMBER 1996

[Kelemen, 1996] – *A. Kelemen, G. Székely, H-W. Reist, G. Gerig*

AUTOMATIC SEGMENTATION OF CELL NUCLEI FROM CONFOCAL LASER SCANNING MICROSCOPY IMAGES

VBC'96 – VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING, 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, HAMBURG, GERMANY, SPRINGER – SEPTEMBER 1996

[Kelly, 1993] – *S. Graham Kelly*

FUNDAMENTALS OF MECHANICAL VIBRATIONS

MCGRAW-HILL – 1993

[Kita, 1996] – *Yasuyo Kita*

ELASTIC-MODEL DRIVEN ANALYSIS OF SEVERAL VIEWS OF A DEFORMABLE CYLINDRICAL OBJECT

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 12 – DECEMBER 1996

[Kittler, 1986] – *Josef Kittler, John Illingworth*

MINIMUM ERROR THRESHOLDING

PATTERN RECOGNITION, VOL 19, PP. 41/47 – 1986

[Kopec, 1997] – *Gary E. Kopec, Mauricio Lomelin*

SUPERVISED TEMPLATE ESTIMATION FOR DOCUMENT IMAGE DECODING

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 12 – DECEMBER 1997

- [Kumar, 1994] – *Senthil Kumar, Dmitry Goldgof*
AUTOMATIC TRACKING OF SPAMM GRID AND THE ESTIMATION OF DEFORMATION PARAMETERS FROM CARDIAC MR IMAGES
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)
- [Kumar, 1995] – *Senthil Kumar, Maha Sallam, Dmitry Goldgof, Kevin Bowyer*
POINT CORRESPONDENCE IN UNSTRUCTURED NONRIGID MOTION
IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION, FLORIDA, PP. 289/298 – 1995
- [Lai, 1994] – *Kok F. Lai, Roland T. Chin*
ON CLASSIFYING DEFORMABLE CONTOURS USING THE GENERALIZED ACTIVE CONTOUR MODEL
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, 1994
- [Lai, 1994a] – *Kok F. Lai*
PHD THESIS: DEFORMABLE CONTOURS: MODELING, EXTRACTION, DETECTION AND CLASSIFICATION
UNIVERSITY OF WISCONSIN-MADISON – 1994
- [Lane, 1996] – *Thomas G. Lane*
JPEG LIBRARY – 1996
- [Lanitis, 1995] – *A. Lanitis, T. F. Cootes, C. J. Taylor*
A UNIFIED APPROACH TO CODING AND INTERPRETING FACE IMAGES
DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1995
- [Lim, 1990] – *Jae S. Lim*
TWO-DIMENSIONAL SIGNAL AND IMAGE PROCESSING
PTR PRENTICE HALL – 1990
- [Lima, 1995] – *Rui Lima*
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: PROCESSAMENTO DE IMAGEM NA ANÁLISE DE DOCUMENTOS DE ENGENHARIA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1995
- [Lønnestad, 1992] – *Tor Lønnestad, Otto Milvang*
XITE: X-BASED IMAGE PROCESSING TOOLS AND ENVIRONMENT USER'S MANUAL – OCTOBER 21, 1992
- [Malandain, 1993] – *Grégoire Malandain, Jean-Marie Rocchisani*
MATCHING OF 3D MEDICAL IMAGES WITH A POTENTIAL BASED METHOD
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 1890 – MARS 1993
- [Malandain, 1995] – *Grégoire Malandain, Sara Fernández-Vidal, Jean-Marie Rocchisani*
PHYSICALLY BASED RIGID REGISTRATION OF 3-D FREE-FORM OBJECTS: APPLICATION TO MEDICAL IMAGING
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 2453 – JANVIER 1995

- [Mardia, 1997]** – *Kanti V. Mardia, Wei Qian, Druti Shah, Kevin M. A. de Souza*
DEFORMABLE TEMPLATE RECOGNITION OF MULTIPLE OCCLUDED OBJECTS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, Nº 9 –
SEPTEMBER 1997
- [Martin, 1998]** – *J. Martin, Alex Pentland, Stan Sclaroff, R. Kikinis*
CHARACTERIZATION OF NEUROPATHOLOGICAL SHAPE DEFORMATIONS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 20, Nº 3 –
FEBRUARY 1998
- [Maurincomme, 1993]** – *Eric Maurincomme, Denis Friboulet, Gérard Finet, Isabelle
Magnin, Johan H. C. Reiber*
**ADDER: A SNAKE-BASED SEGMENTATION APPROACH FOR INTRAVASCULAR ULTRASOUND
IMAGES**
DICTA-93 – 1993
- [Maybeck, 1979]** – *Peter S. Maybeck*
STOCHASTIC MODELS, ESTIMATION, AND CONTROL, VOLUME I
MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING, VOL. 141, ACADEMIC PRESS – 1979
- [McInerney, 1995]** – *Tim McInerney, Demetri Terzopoulos*
**A DYNAMIC FINITE ELEMENT SURFACE MODEL FOR SEGMENTATION AND TRACKING IN
MULTIDIMENSIONAL MEDICAL IMAGES WITH APPLICATION TO CARDIAC 4D IMAGE
ANALYSIS**
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1995)
- [McInerney, 1996]** – *Tim McInerney, Demetri Terzopoulos*
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS: A SURVEY
MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOL. 1, Nº 2, PP. 91/108, OXFORD UNIVERSITY PRESS – 1996
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1996)
- [Meirovitch, 1986]** – *Leonard Meirovitch*
ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS
MCGRAW-HILL – 1986
- [Metaxas, 1991]** – *Dimitri Metaxas, Demetri Terzopoulos*
CONSTRAINED DEFORMABLE SUPERQUADRICS AND NONRIGID MOTION TRACKING
IEEE CVPR'91 – COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, HAWAII – 1991
- [Metaxas, 1996]** – *Dimitri Metaxas, Ioannis A. Kakadiaris*
ELASTICALLY ADAPTIVE DEFORMABLE MODELS
FOURTH EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTER VISION, PP. II: 550/559, CAMBRIDGE, UK –
APRIL 1996
- [Mishra, 1991]** – *Sanjoy K. Mishra, Dimitry B. Goldgof, Thomas S. Huang*
**MOTION ANALYSIS AND EPICARDIAL DEFORMATION ESTIMATION FROM ANGIOGRAPHY
DATA**
IEEE CVPR'91 – COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, HAWAII – 1991

- [**Moghaddam, 1994**] – *Baback Moghaddam, Alex Pentland*
FACE RECOGNITION USING VIEW-BASED AND MODULAR EIGENSPACES
AUTOMATIC SYSTEMS FOR THE IDENTIFICATION AND INSPECTION OF HUMANS, SPIE VOL. 2277
– JULY 1994
- [**Moghaddam, 1996**] – *Baback Moghaddam, Chahab Nastar, Alex P. Pentland*
BAYESIAN FACE RECOGNITION USING DEFORMABLE INTENSITY SURFACES
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N°
371 – 1996
- [**Moghaddam, 1997**] – *Baback Moghaddam, Alex Pentland*
PROBABILISTIC VISUAL LEARNING FOR OBJECT REPRESENTATION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, N° 7 –
JULY 1997
- [**Monteiro, 1994**] – *António Miguel Pontes Pimenta Monteiro*
**DISSERTAÇÃO DE DOUTORAMENTO: PROCESSAMENTO E ANÁLISE AUTOMÁTICA DE
ECOCARDIOGRAMAS**
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1994
- [**Moulin, 1992**] – *Pierre Moulin*
AN ADAPTIVE FINITE-ELEMENT METHOD FOR IMAGE REPRESENTATION
IEEE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, NETHERLANDS – 1992
- [**Nastar, 1993**] – *Chahab Nastar, Nicholas Ayache*
FAST SEGMENTATION, TRACKING, AND ANALYSIS OF DEFORMABLE OBJECTS
FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION, BERLIN, GERMANY – 11/14
MAY 1993
- [**Nastar, 1993a**] – *Chahab Nastar*
**ANALYTICAL COMPUTATION OF THE FREE VIBRATION MODES: APPLICATION TO NON
RIGID MOTION ANALYSIS AND ANIMATION IN 3D IMAGES**
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, ROCQUENCOURT,
RAPPORT DE RECHERCHE N° 1935 – JUIN 1993
- [**Nastar, 1994**] – *Chahab Nastar*
**THESE POUR LE GRADE DE DOCTEUR: MODELES PHYSIQUES DEFORMABLES ET MODES
VIBRATOIRES POUR L'ANALYSE DU MOUVEMENT NON-RIGIDE DANS LES IMAGES
MULTIDIMENSIONNELLES**
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES – 1994
- [**Nastar, 1994a**] – *Chahab Nastar, Nicholas Ayache*
FAST SEGMENTATION, TRACKING, AND ANALYSIS OF DEFORMABLE OBJECTS
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, ROCQUENCOURT,
RAPPORT DE RECHERCHE N° 1783 – 1994

[Nastar, 1996] – *Chahab Nastar, Nicholas Ayache*

FREQUENCY-BASED NONRIGID MOTION ANALYSIS: APPLICATION TO FOUR DIMENSIONAL MEDICAL IMAGES

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, Nº 11, NOVEMBER 1996

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1996)

[Neuenschwander, 1994] – *W. Neuenschwander, P. Fua, G. Székely, O. Kübler*

MAKING SNAKES CONVERGE FROM MINIMAL INITIALIZATION

IEEE 1051-4651/94 – 1994

[Ohba, 1997] – *Kohtaro Ohba, Katsushi Ikeuchi*

DETECTABILITY, UNIQUENESS, AND RELIABILITY OF EIGEN WINDOWS FOR STABLE VERIFICATION OF PARTIALLY OCCLUDED OBJECTS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, Nº 9 – SEPTEMBER 1997

[Olstad, 1996] – *Bjørn Olstad, Anders H. Torp*

ENCODING OF A PRIORI INFORMATION IN ACTIVE CONTOUR MODELS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, Nº 9 – SEPTEMBER 1996

[Otsu, 1978] – *Otsu, N.*

A THRESHOLD SELECTION METHOD FROM GRAY-LEVEL HISTOGRAMS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. SMC-8, PP. 62/66 – 1978

[Padilha, 1995] – *A. Jorge Padilha, Luís A. Serra, Susana A. Pires, A. Filipe N. Silva*

RELATÓRIO INTERNO: CARACTERIZAÇÃO ESPACIO-TEMPORAL DE PRESSÕES PLANTARES EM PEDOBAROGRAFIA DINÂMICA

INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1995

[Park, 1996] – *Jinah Park, Dimitri Metaxas, Leon Axel*

ANALYSIS OF LEFT VENTRICULAR WALL MOTION BASED ON VOLUMETRIC DEFORMABLE MODELS AND MRI-SPAMM

MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOL. 1, Nº 1, PP. 53/71, OXFORD UNIVERSITY PRESS – 1996

[Parker, 1994] – *A. D. Parker, A. Hill, T. F. Cootes, X. Y. Jin, D. G. Gibson*

APPLICATION OF POINT DISTRIBUTION MODELS TO THE AUTOMATED ANALYSIS OF ECHOCARDIOGRAMS

DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1994

[Pavlovic, 1997] – *Vladimir I. Pavlovic, Rajeev Sharma, Thomas S. Huang*

VISUAL INTERPRETATION OF HAND GESTURES FOR HUMAN-COMPUTER INTERACTION: A REVIEW

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 19, Nº 7 – JULY 1997

[Pentland, 1989] – *Alex Pentland, Jonh Williams*

GOOD VIBRATIONS: MODAL DYNAMICS FOR GRAPHICS AND ANIMATION

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N° 115 – 1989

[Pentland, 1989a] – *Alex Pentland, Jonh Williams*

PERCEPTION OF NON-RIGID MOTION: INFERENCE OF SHAPE, MATERIAL AND FORCE

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N° 113 – 1989

ELEVENTH INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, DETROIT, MICHIGAN USA – 20/25 AUGUST 1989

[Pentland, 1990] – *Alex P. Pentland*

AUTOMATIC EXTRACTION OF DEFORMABLE PART MODELS

INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 4, PP. 107/126 – MARCH 1990

[Pentland, 1991] – *Alex Pentland, Stan Sclaroff*

CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR PHYSICALLY BASED SHAPE MODELING AND RECOGNITION

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, N° 7, PP. 715/729 – JULY 1991

[Pentland, 1991a] – *Alex Pentland, Bradley Horowitz*

RECOVERY OF NONRIGID MOTION AND STRUCTURE

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, N° 7 – JULY 1991

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE, 1998 (1991)

[Pentland, 1994] – *Alex Pentland, Baback Moghaddan, Thad Starner*

VIEW-BASED AND MODULAR EIGENSPACES FOR FACE RECOGNITION

IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION – 1994

[Pelillo, 1999] – *Marcello Pelillo, Kaleem Siddiqi, Steven W. Zucker*

MATCHING HIERARCHICAL STRUCTURES USING ASSOCIATION GRAPHS

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 21, N° 11 – NOVEMBER 1999

[Pinto, 1999] – *Tânia Pinto*

RELATÓRIO DA BOLSA DE INVESTIGAÇÃO 1998/1999

INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1999

[Press, 1992] – *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*

NUMERICAL RECIPES IN C - THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS – 1992

[Puentes, 1998] – *John Puentes, Mireille Garreau, Hervé Lebreton, Cristian Roux*

UNDERSTANDING CORONARY ARTERY MOVEMENT: A KNOWLEDGE-BASED APPROACH

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN MEDICINE 13, PP. 207/237 – 1998

[Reis, 1995] – *Luís Paulo Gonçalves dos Reis*

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: SISTEMA INTEGRADO DE DETECÇÃO E SEGUIMENTO DE CONTORNOS

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – SETEMBRO DE 1995

[Richter, 1995] – *Jeffrey Richter*

ADVANCED WINDOWS

MICROSOFT PRESS – 1995

[Rimmer, 1991] – *Steve Rimmer*

SUPERCHARGED BITMAPPED GRAPHICS

WINDCREST/MCGRAW-HILL – 1991

[Rohr, 1996] – *K. Rohr, H. S. Stiehl, R. Sprengel, W. Beil, T. M. Buzug, J. Weese, M. H. Kuhn*
POINT-BASED ELASTIC REGISTRATION OF MEDICAL IMAGE DATA USING APPROXIMATING THIN-PLATE SPLINES

VBC'96 – VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING, 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, HAMBURG, GERMANY, SPRINGER – SEPTEMBER 1996

[Ronfard, 1994] – *Rémi Ronfard*

REGION-BASED STRATEGIES FOR ACTIVE CONTOUR MODELS

INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 13:2, PP. 229/251 – 1994

[Schalkoff, 1989] – *Robert J. Schalkoff*

DIGITAL IMAGE PROCESSING AND COMPUTER VISION

JOHN WILEY & SONS, INC. – 1989

[Schroeder, 1996] – *Will Schroeder, Ken Martin, Bill Lorensen*

THE DESIGN AND IMPLEMENTATION OF AN OBJECT-ORIENTED TOOLKIT FOR 3D GRAPHICS AND VISUALIZATION

VISUALIZATION '96 – 1996

[Schroeder, 1998] – *Will Schroeder, Ken Martin, Bill Lorensen*

THE VISUALIZATION TOOLKIT, 2ND EDITION

PRENTICE HALL – 1998

[Schroeder, 1999] – *Will Schroeder, Ken Martin*

THE VTK USER'S GUIDE

KITWARE INC. – JUNE 1999

[Sclaroff, 1994] – *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

OBJECT RECOGNITION AND CATEGORIZATION USING MODAL MATCHING

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N° 267 – 1994

[Sclaroff, 1994a] – *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

PHYSICALLY-BASED COMBINATIONS OF VIEWS: REPRESENTING RIGID AND NON RIGID MOTION

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N° 273 – NOVEMBER 1994

[Sclaroff, 1995] – *Stanley Edward Sclaroff*

PHD THESIS: MODAL MATCHING: A METHOD FOR DESCRIBING, COMPARING, AND MANIPULATING DIGITAL SIGNALS

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY – 1995

[Sclaroff, 1995a] – *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEDIA LABORATORY, TECHNICAL REPORT N° 95-008 – 1995

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 17, N° 6 – JUNE 1995

[Segerlind, 1984] – *Larry J. Segerlind*

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

JOHN WILEY & SONS, INC. – 1984

[Sethi, 1987] – *Ishwar K. Sethi, Ramesh Jain*

FINDING TRAJECTORIES OF FEATURE POINTS IN A MONOCULAR IMAGE SEQUENCE

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 9, N° 1 – JANUARY 1987

[Shapiro, 1991] – *Larry Shapiro*

REPORT: TOWARDS A VISION-BASED MOTION FRAMEWORK

ROBOTICS RESEARCH GROUP, DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE, OXFORD UNIVERSITY, TECHNICAL REPORT – 1991

[Shapiro, 1992] – *Larry Shapiro, J. Michael Brady*

A MODAL APPROACH TO FEATURE-BASED CORRESPONDENCE

ROBOTICS RESEARCH GROUP, DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE, OXFORD UNIVERSITY – 1992

[Shapiro, 1992a] – *Larry Shapiro, J. Michael Brady*

FEATURE-BASED CORRESPONDENCE: AN EIGENVECTOR APPROACH

BUTTERWORTH-HEINEMANN LTD, VOL. 10, N° 5 – JUNE 1992

[Shenoy, 1995] – *Shiva Shenoy*

WIN4Dv v1.0: VIEWER FOR 3D POLYGONAL MESHES AND DATA

DEPARTMENT OF AEEM, IOWA STATE UNIVERSITY, IA 50010, USA – 1995

[Smart, 1997] – *Julian Smart and others*

CIMAGE CLASS VERSION 1.2

[HTTP://WEB.UKONLINE.CO.UK/MEMBERS/JULIAN.SMART](http://web.ukonline.co.uk/members/julian.smart) – 1997

[Smith, 1995] – *Philip W. Smith, N. Nandhakumar, A. K. Ramadorai*

REPRESENTATION OF DEFORMABLE OBJECT STRUCTURE AND MOTION FOR AUTONOMOUS MANIPULATION USING RELATIVE ELASTICITY

IEEE 0-8186-7190-4/95, PP. 200/205 – APRIL 1995

- [**Solaiyappan, 1996**] – *Meiyappan Solaiyappan, Tim Postin*
INTERACTIVE VISUALIZATION FOR RAPID NONINVASIVE CARDIAC ASSESSMENT
IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS, VOL. 29, N° 1 –
JANUARY 1996
- [**Sozou, 1995**] – *P. D. Sozou, T. F. Cootes, C. J. Taylor, E. C. Di-Mauro*
A NON-LINEAR GENERALIZATION OF PDMS USING POLYNOMIAL REGRESSION
DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1995
- [**Sozou, 1995a**] – *P. D. Sozou, T. F. Cootes, C. J. Taylor, E. C. Di-Mauro*
NON-LINEAR POINT DISTRIBUTION MODELLING USING A MULTI-LAYER PERCEPTRON
DEPARTMENT OF MEDICAL BIOPHYSICS, UNIVERSITY OF MANCHESTER – 1995
- [**Staib, 1991**] – *Lawrence H. Staib, James S. Duncan*
PARAMETRICALLY DEFORMABLE CONTOURS MODELS
CVPR'91 – COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, HAWAII – 1991
- [**Stroustrup, 1995**] – *Bjarne Stroustrup*
THE C++ PROGRAMMING LANGUAGE
ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY – 1995
- [**Subsol, 1994**] – *G. Subsol, J. Ph. Thirion, N. Ayache*
NON RIGID REGISTRATION FOR BUILDING 3D ANATOMICAL ATLASES
IEEE 1051-4651/94, pp. 576/578 – 1994
- [**Swets, 1996**] – *Daniel L. Swets, John Weng*
USING DISCRIMINANT EIGENFEATURES FOR IMAGE RETRIEVAL
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 8 –
AUGUST 1996
- [**Syn, 1995**] – *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
FEM EIGENMODES AS SHAPE FEATURES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT, TECHNICAL REPORT N° 211 – 1995
- [**Syn, 1995a**] – *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
BAYESIAN REGISTRATION OF MODELS USING FEM EIGENMODES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT, TECHNICAL REPORT N° 213 – 1995
- [**Syn, 1995b**] – *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
A BIOLOGICAL GROWTH METRIC FOR 3D SHAPE REGISTRATION
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT, TECHNICAL REPORT N° 225 – 1995
- [**Syn, 1996**] – *Michael Hsien-Min Syn*
PHD THESIS: MODEL-BASED THREE-DIMENSIONAL FREEHAND ULTRASOUND IMAGING
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE – 1996
- [**Székely, 1996**] – *Gábor Székely, András Kelemen, Christian Brechbühler, Guido Gerig*
**SEGMENTATION OF 2-D AND 3-D OBJECTS FROM MRI VOLUME DATA USING CONSTRAINED
ELASTIC DEFORMATIONS OF FLEXIBLE FOURIER CONTOUR AND SURFACE MODELS**
MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOL. 1, N° 1, pp. 19/34, OXFORD UNIVERSITY PRESS – 1996

- [Tavares, 1995] – *João Manuel R. S. Tavares*
ALGUMAS FERRAMENTAS PARA VISÃO TRIDIMENSIONAL POR COMPUTADOR
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1995
- [Tavares, 1995a] – *João Manuel R. S. Tavares*
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: OBTENÇÃO DE ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE MOVIMENTO DE CÂMARA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1995
- [Tavares, 1995b] – *João Manuel R. S. Tavares, A. Jorge Padilha*
MATCHING LINES IN IMAGE SEQUENCES WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS
7TH PORTUGUESE CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, AVEIRO, PORTUGAL – 23/24 DE MARÇO DE 1995
- [Tavares, 1995c] – *João Manuel R. S. Tavares, A. Jorge Padilha*
A NEW APPROACH FOR MERGING EDGE LINE SEGMENTS
7TH PORTUGUESE CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, AVEIRO, PORTUGAL – 23/24 DE MARÇO DE 1995
- [Tavares, 1997] – *João Manuel R. S. Tavares*
RELATÓRIO INTERNO: APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE PIXELS DE DOIS CONTORNOS NÃO RÍGIDOS
INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1997
- [Tavares, 1997a] – *João Manuel R. S. Tavares*
RELATÓRIO INTERNO: ESTUDO DE DOIS MODELOS PARA SEGUIMENTO EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA
INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1997
- [Tavares, 1998] – *João Manuel R. S. Tavares*
RELATÓRIO INTERNO: ABORDAGEM MODAL PARA A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE OBJECTOS NÃO RÍGIDOS UTILIZANDO O MODELO FEM DE SCLAROFF
INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1998
- [Tavares, 1998a] – *João Manuel R. S. Tavares*
RELATÓRIO INTERNO: APRESENTAÇÃO DE UMA MODELIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS LINEARES DO TIPO AXIAL
INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1998
- [Tavares, 1999] – *João Manuel R. S. Tavares, J. Barbosa, A. Jorge Padilha*
DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE OBJECTOS, EM VISÃO POR COMPUTADOR, UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E ANÁLISE MODAL
4º ENCONTRO NACIONAL DO COLÉGIO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA, LISBOA, PORTUGAL – 27/28 DE MAIO DE 1999

[Tavares, 1999a] – *João Manuel R. S. Tavares*

RELATÓRIO INTERNO: DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS ENTRE IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA DINÂMICA

INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO – 1999

[Tavares, 2000] – *João Manuel R. S. Tavares, J. Barbosa, A. Jorge Padilha*

DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE OBJECTOS UTILIZANDO MODELAÇÃO FÍSICA

9º ENCONTRO PORTUGUÊS DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA, MARINHA GRANDE, PORTUGAL – 16/18 DE FEVEREIRO DE 2000

[Tavares, 2000a] – *João Manuel R. S. Tavares, J. Barbosa, A. Jorge Padilha*

DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE MODELOS DE CONTORNO E DE SUPERFÍCIE, UTILIZANDO MODELIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS E ANÁLISE MODAL, EM VISÃO POR COMPUTADOR

VI CONGRESSO NACIONAL DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL, AVEIRO, PORTUGAL – 17/19 DE ABRIL DE 2000

[Tavares, 2000b] – *João Manuel R. S. Tavares, J. Barbosa, A. Jorge Padilha*

MATCHING IMAGE OBJECTS IN DYNAMIC PEDOBAROGRAPHY

11TH PORTUGUESE CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, PORTO, PORTUGAL – 11/12 DE MAIO DE 2000

[Taylor, 1995] – *C. J. Taylor, T. F. Cootes, A. Hill, J. Haslam*

MEDICAL IMAGE SEGMENTATION USING ACTIVE SHAPE MODELS

MEDICAL IMAGING, ANALYSIS OF MULTIMODALITY 2D/3D IMAGES, IOS PRESS – 1995

[Terzopoulos, 1988] – *Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, Michael Kass*

CONSTRAINTS ON DEFORMABLE MODELS: RECOVERING 3D SHAPE AND NONRIGID MOTION

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1988)

[Terzopoulos, 1991] – *Demetri Terzopoulos, Dimitri Metaxas*

DYNAMIC 3D MODELS WITH LOCAL AND GLOBAL DEFORMATIONS: DEFORMABLE SUPERQUADRICS

DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1991)

[Terzopoulos, 1991a] – *Demetri Terzopoulos, Manuela Vasilescu*

SAMPLING AND RECONSTRUCTION WITH ADAPTIVE MESHES

IEEE CVPR'91 – COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, HAWAII – 1991

[Thirion, 1993] – *Jean-Philippe Thirion, Alexis Gourdon*

THE MARCHING LINES ALGORITHM: NEW RESULTS AND PROOFS

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 1881 ET N° 1881-2 – APRIL 1993

[Timoshenko, 1994] – *Stephen. P. Timoshenko, James E. Gere*

MECÂNICA DOS SÓLIDOS - VOL. I E II

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA – 1994

- [**Tsap, 1999**] – *Leonid V. Tsap, Dmitry B. Goldgof, Sudeep Sarkar*
MODEL-BASED FORCE-DRIVEN NONRIGID MOTION RECOVERY FROM SEQUENCES OF RANGE IMAGE WITHOUT POINT CORRESPONDENCES
IMAGE AND VISION COMPUTING 17, PP. 997/1007 – 1999
- [**Turk, 1991**] – *Matthew A. Turk, Alex P. Pentland*
FACE RECOGNITION USING EIGENFACES
JOURNAL OF COGNITIVE NEUROSCIENCE, 3(1), PP. 71/86 – 1991
- [**Vemuri, 1994**] – *B. C. Vemuri, A. Radisavljevic*
MULTIRESOLUTION STOCHASTIC HYBRID SHAPE MODELS WITH FRACTAL PRIORS
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1994)
- [**Vieira, 1999**] – *Paulo Sérgio Vieira*
RELATÓRIO DA BOLSA DE INVESTIGAÇÃO 1998/1999
INSTITUTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1999
- [**White, 1983**] – *J. M. White, G. D. Rohrer*
IMAGE THRESHOLDING FOR OPTICAL CHARACTER RECOGNITION AND OTHER APPLICATIONS REQUIRING CHARACTER IMAGE EXTRACTION
IBM JOURNAL OF RESEARCH AND DEVELOPMENT, VOL. 27, Nº 4, PP. 400/411 – JULY 1983
- [**Wilfong, 1996**] – *Gordon Wilfong, Frank Sinden, Laurence Ruedisueli*
ON-LINE RECOGNITION OF HANDWRITTEN SYMBOLS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, Nº 9 – SEPTEMBER 1996
- [**Xu, 1999**] – *L. Xu, M. Jackowski, A. Goshtasby, D. Roseman, S. Bines, C. Yu, A. Dhanwan, A. Huntley*
SEGMENTATION OF SKIN CANCER IMAGES
IMAGE AND VISION COMPUTING 17, PP. 65/74 – 1999
- [**Young, 1992**] – *Alistair A. Young, Leon Axel*
THREE-DIMENSIONAL MOTION AND DEFORMATION OF THE HEART WALL: ESTIMATION WITH SPATIAL MODULATION OF MAGNETIZATION – A MODEL-BASED APPROACH
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS, IEEE – 1998 (1992)
- [**Young, 1998**] – *Michael J. Young*
MASTERING MICROSOFT VISUAL C⁺⁺ 6
SYBEX – 1998
- [**Yuen, 1999**] – *P.C. Yuen, G.C. Feng, J.P. Zhou*
A CONTOUR DETECTION METHOD: INITIALIZATION AND CONTOUR MODEL
PATTERN RECOGNITION LETTERS 20, PP. 141/148 – 1999
- [**Yuille, 1989**] – *Alan L. Yuille, David S. Cohen, Peter W. Hallinan*
FEATURE EXTRACTION FROM FACES USING DEFORMABLE TEMPLATES
IEEE WORKSHOP ON VISUAL MOTION, CALIFORNIA, PP. 104/109 – 1989

[Yuille, 1992] – *Alan L. Yuille, Peter W. Hallinan, Davis S. Cohen*
FEATURE EXTRACTION FROM FACES USING DEFORMABLE TEMPLATES
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 8:2, pp. 99/111 – 1992

[Zhang, 1992] – *Zhengyou Zhang*
ITERATIVE POINT MATCHING FOR REGISTRATION OF FREE-FORM CURVES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION, RAPPORT DE RECHERCHE N° 1658 – MARS 1992

[Zhang, 1994] – *Zhengyou Zhang*
ITERATIVE POINT MATCHING FOR REGISTRATION OF FREE-FORM CURVES AND SURFACES
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 13:2, pp. 119/152 – 1994

[Zhu, 1996] – *Song Chun Zhu, Alan Yuille*
REGION COMPETITION: UNIFYING SNAKES, REGION GROWING, AND BAYES/MDL FOR MULTIBAND IMAGE SEGMENTATION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 18, N° 9 – SEPTEMBER 1996

ANEXO

IMAGENS A CORES

A1 – Capítulo III

Tabela 3.9 – Dados utilizados e resultados obtidos na sexta experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.
(sec. 3.3.2.2, pág. 65)

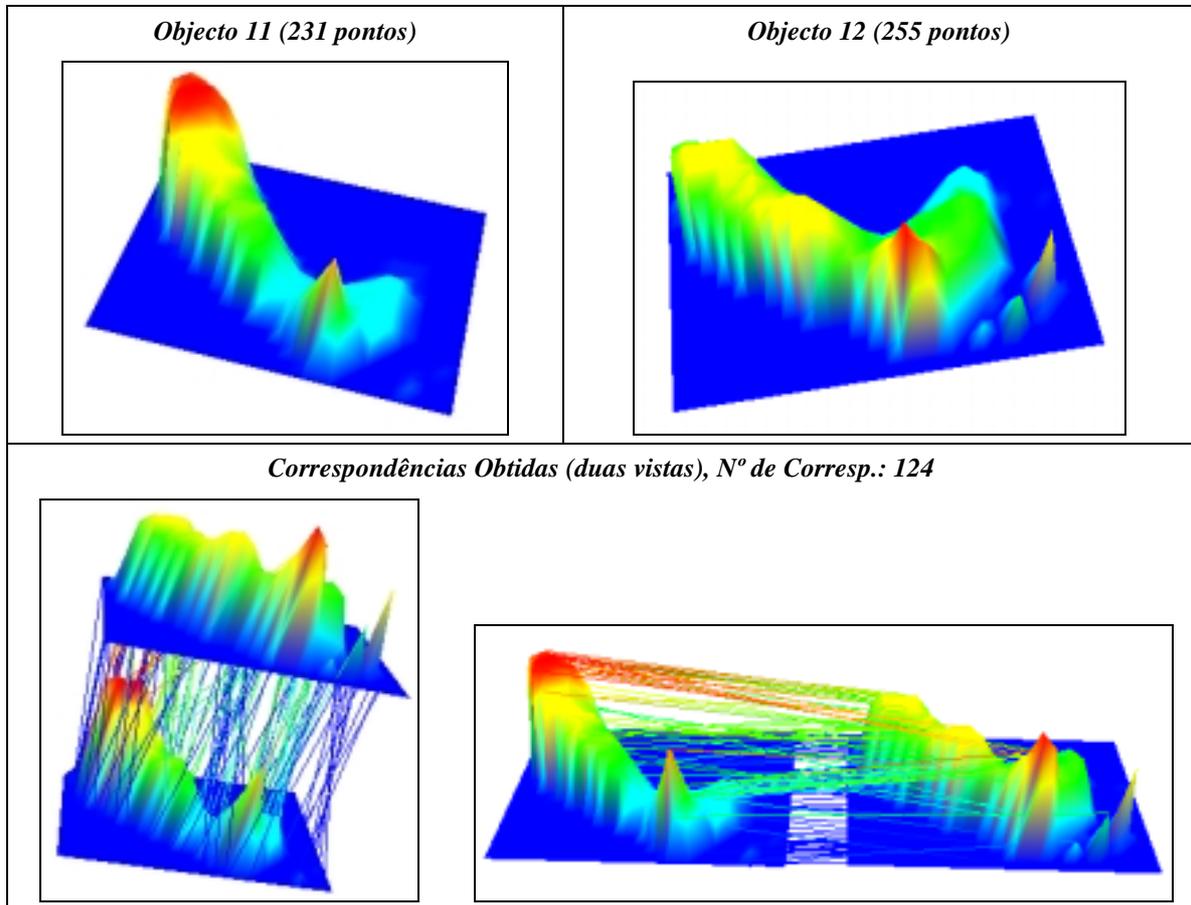


Tabela 3.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.
(sec. 3.3.2.2, pág. 66)

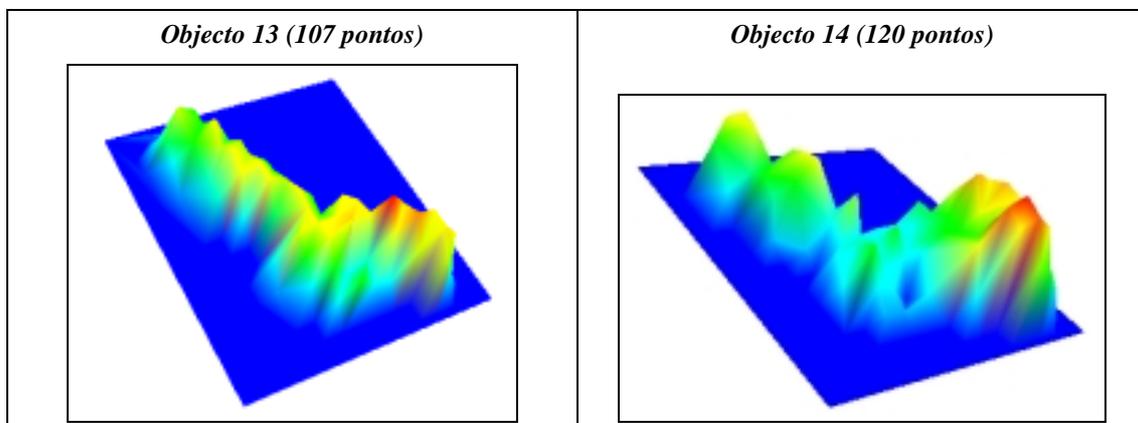


Tabela 3.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando o princípio do mapeamento segundo a distância mínima.
(Continuação)

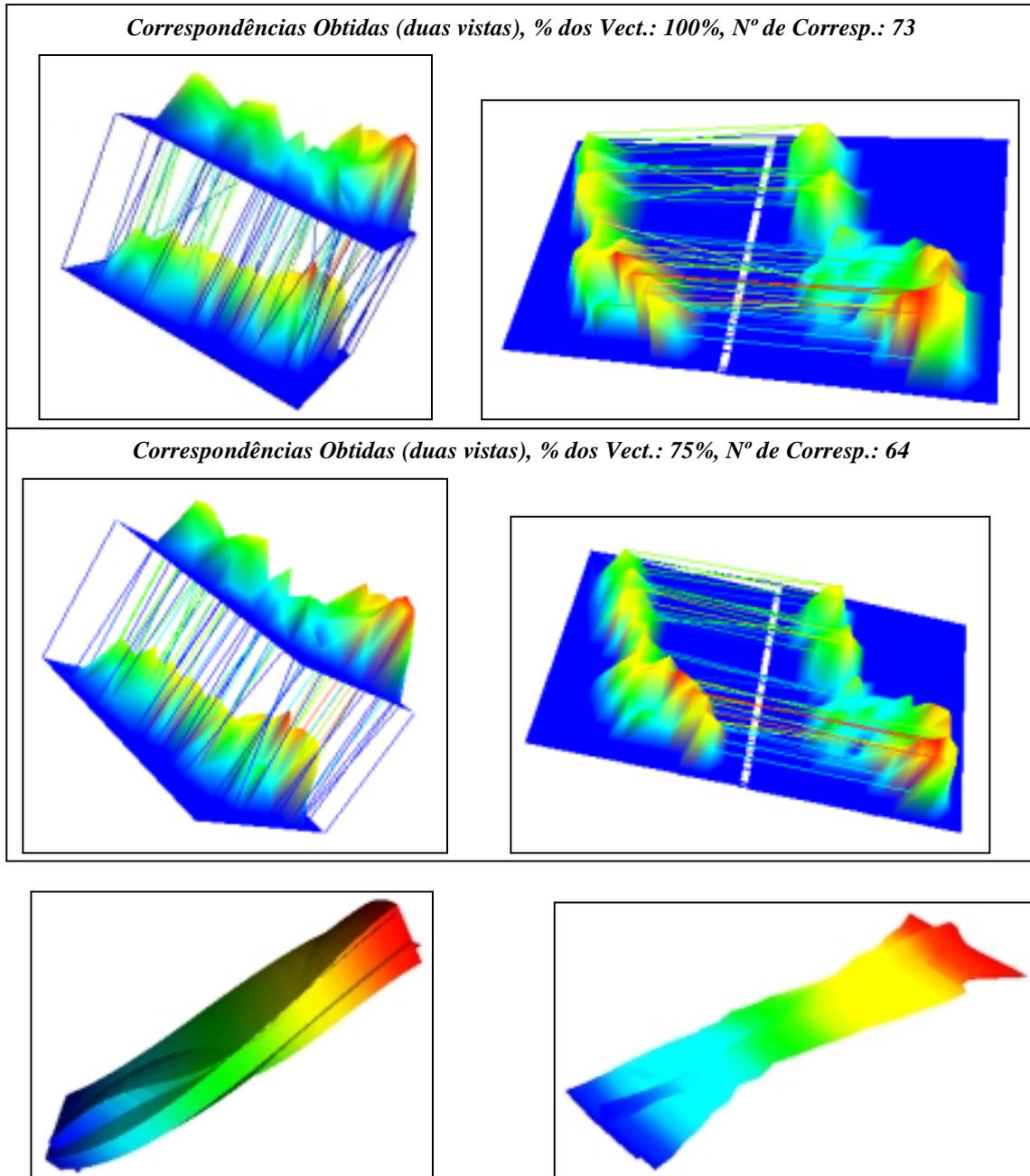
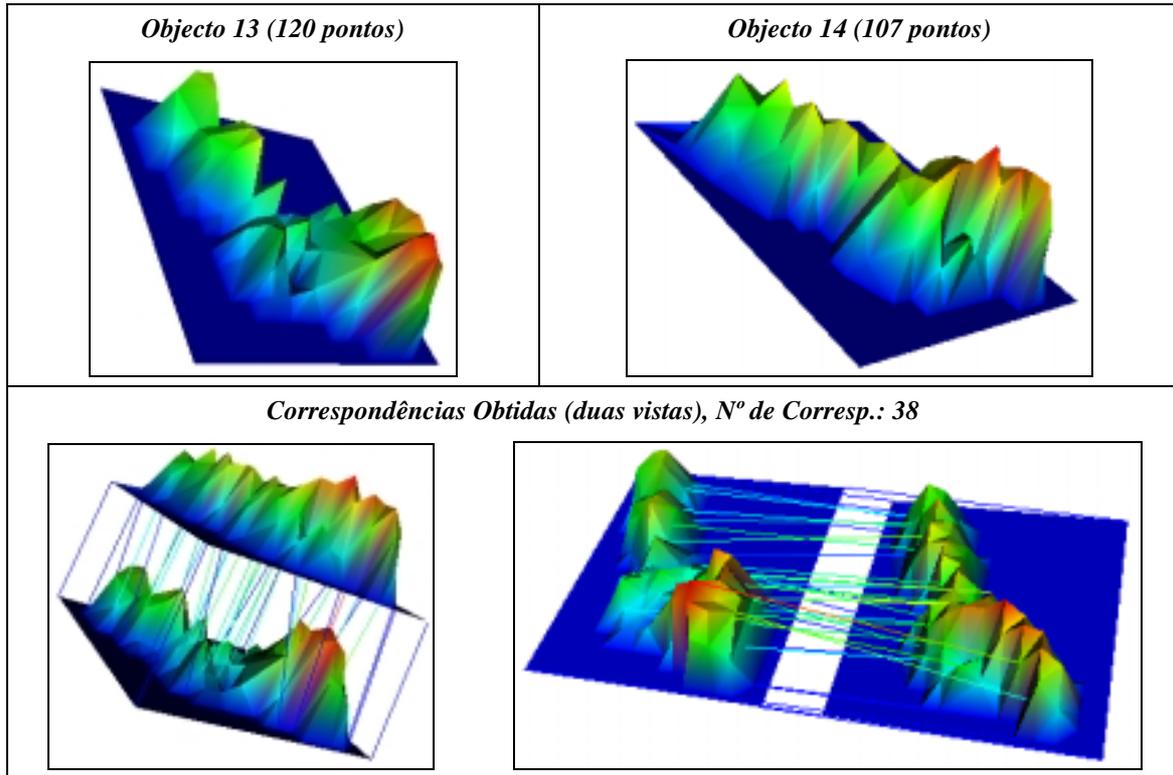


Figura 3.6 – Objectos obtidos utilizando-se os doze primeiros modos e com $\sigma = 3.8$ e $\sigma = 100$. (sec. 3.4.3.1.2, pág. 79)

Figura 3.7 – Objectos obtidos utilizando-se os vinte e cinco primeiros modos e com $\sigma = 3.8$ e $\sigma = 100$. (sec. 3.4.3.1.2, pág. 79)

Tabela 3.20 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando a análise modal da forma. (sec. 3.4.3.2.2, pág. 84)



A2 – Capítulo V

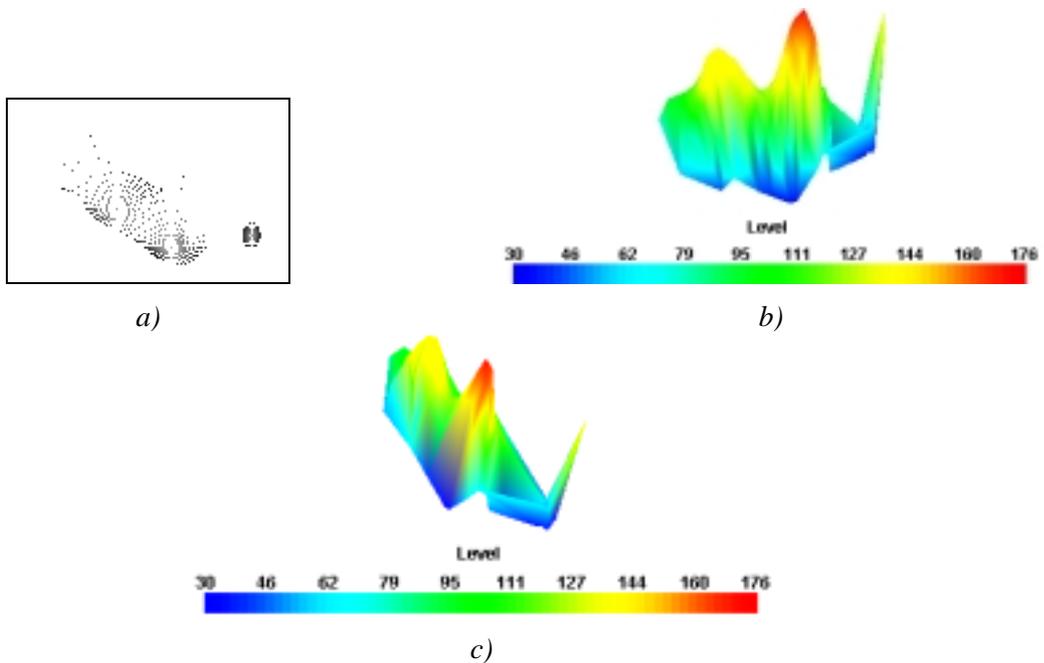


Figura 5.10 – Superfície resultante utilizando-se amostragem adaptativa: a) Objecto da Figura 5.9a) após amostragem adaptativa; b) Superfície resultante por triangulação (232 nodos); c) Superfície resultante após simplificação e suavização (115 nodos). (sec. 5.3.2.2, pág. 155)

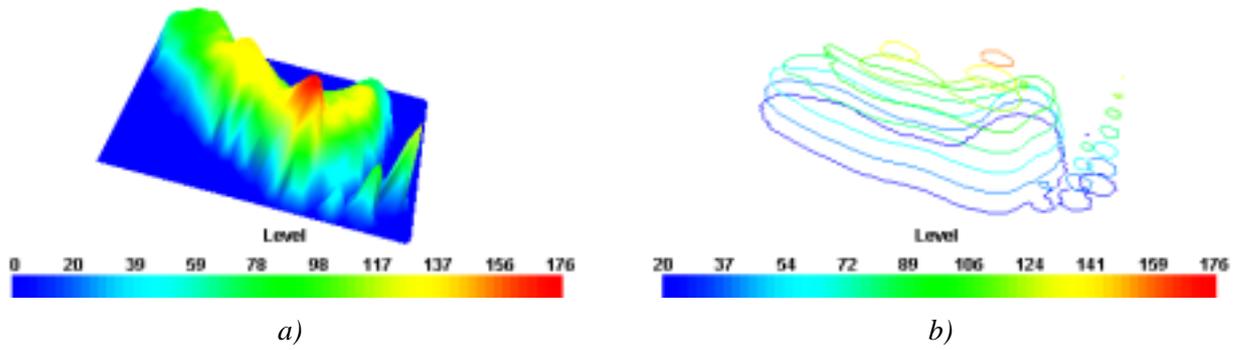


Figura 5.12 – Representação de uma superfície de intensidade utilizando um conjunto de contornos de isonível: a) Superfície de intensidade; b) Oito contornos de isonível. (sec. 5.3.3, pág. 156)

Tabela 5.8 – Dados utilizados e resultados obtidos na sexta experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (sec. 5.4.1.2.2, pág. 165)

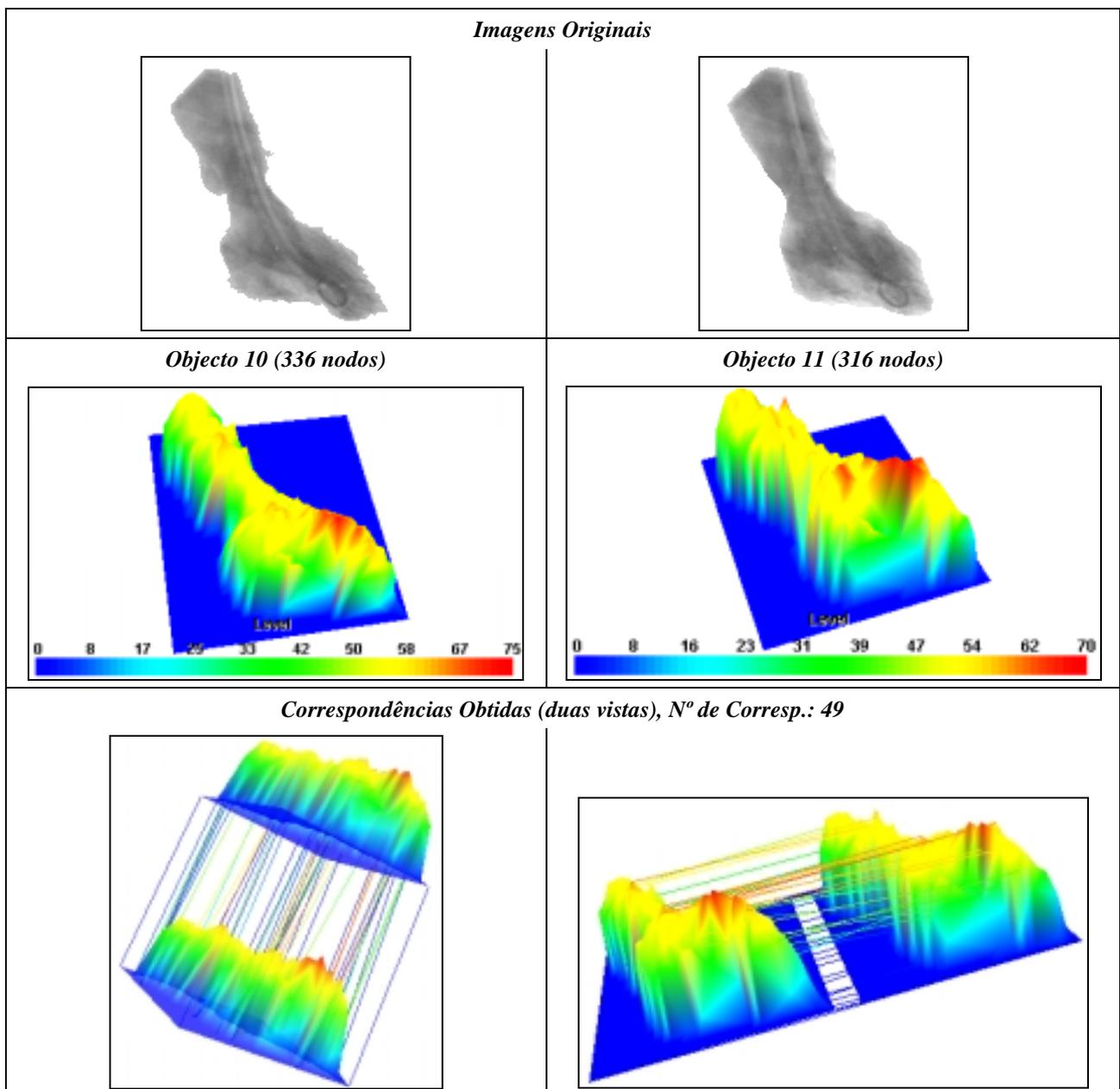


Tabela 5.9 – Dados utilizados e resultados obtidos na sétima experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (sec. 5.4.1.2.2, pág. 166)

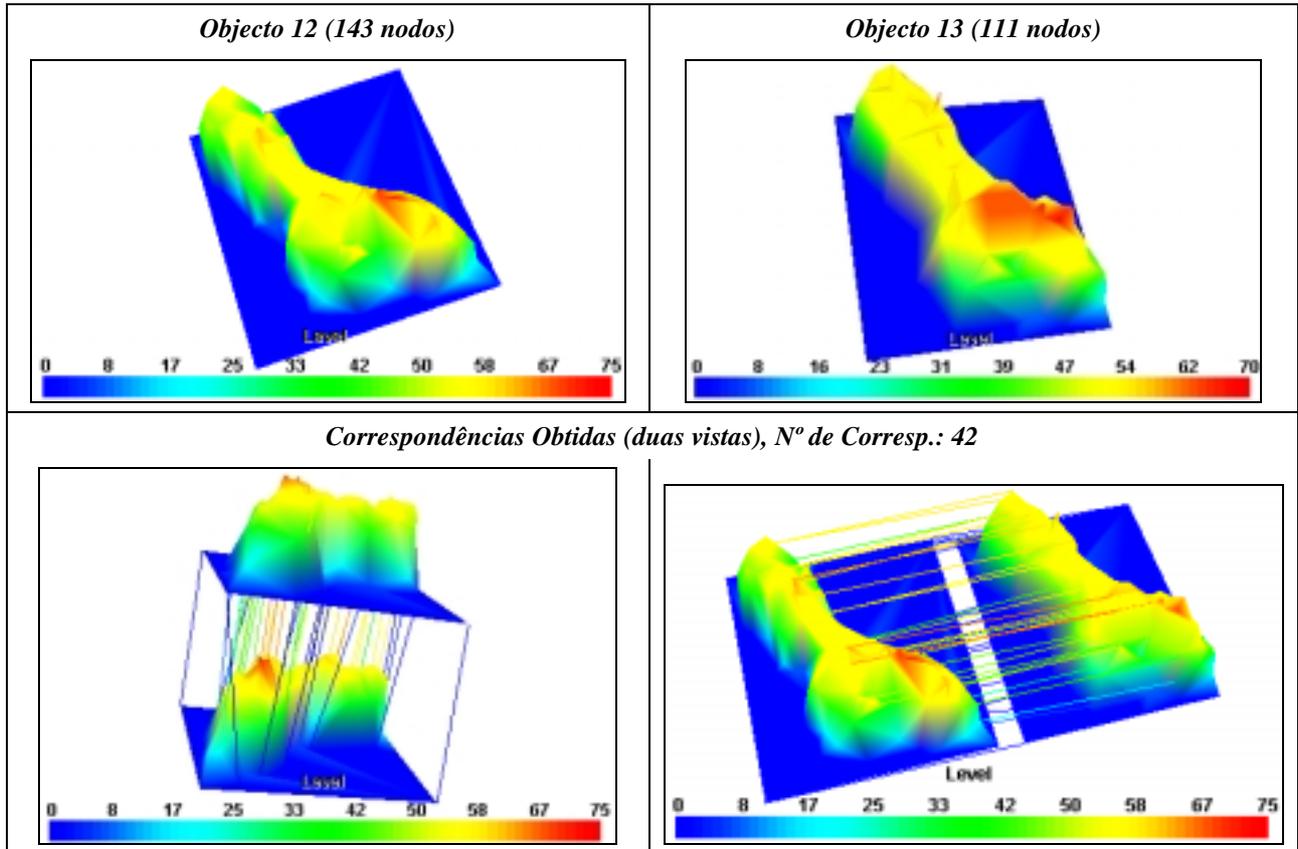


Tabela 5.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (sec. 5.4.1.2.2, pág. 166)

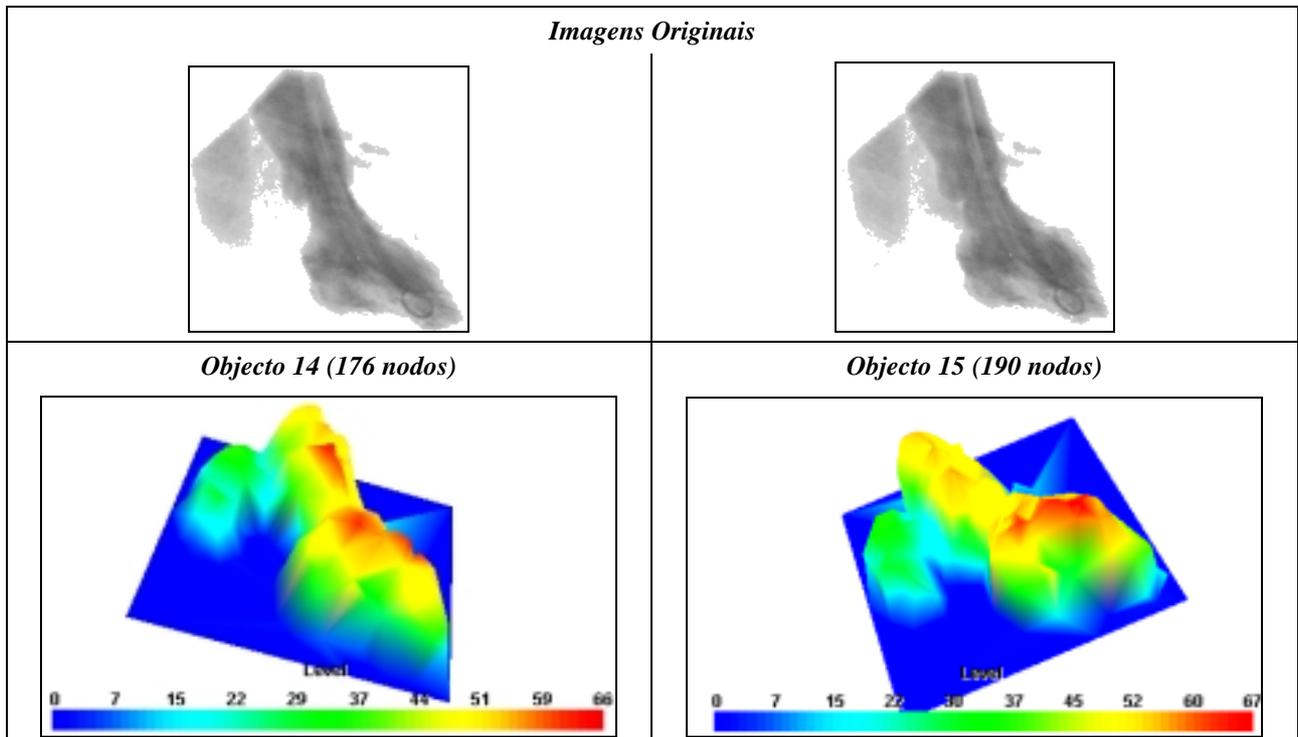


Tabela 5.10 – Dados utilizados e resultados obtidos na oitava experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (Continuação.)

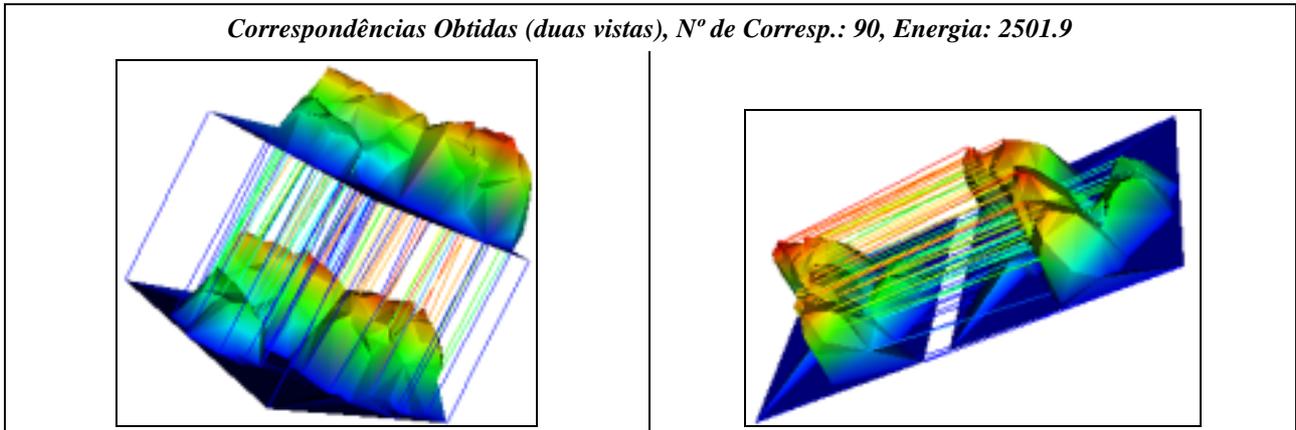


Tabela 5.11 – Dados utilizados e resultados obtidos na nona experiência para a determinação das correspondências utilizando o elemento finito de Sclaroff. (sec. 5.4.1.2.2, pág. 167)

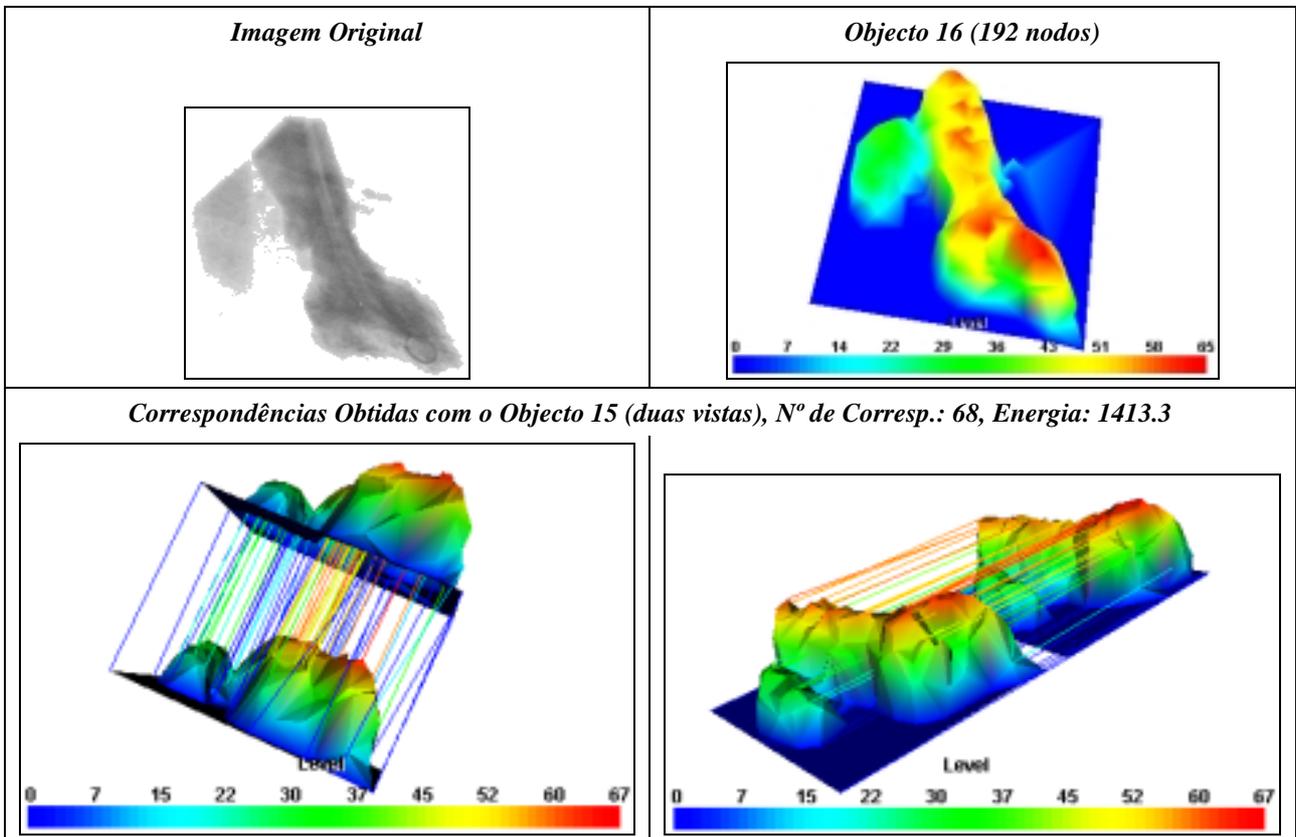


Tabela 5.22 – Dados utilizados e resultados obtidos na nona experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados. (sec. 5.4.2.2.2, pág. 182)

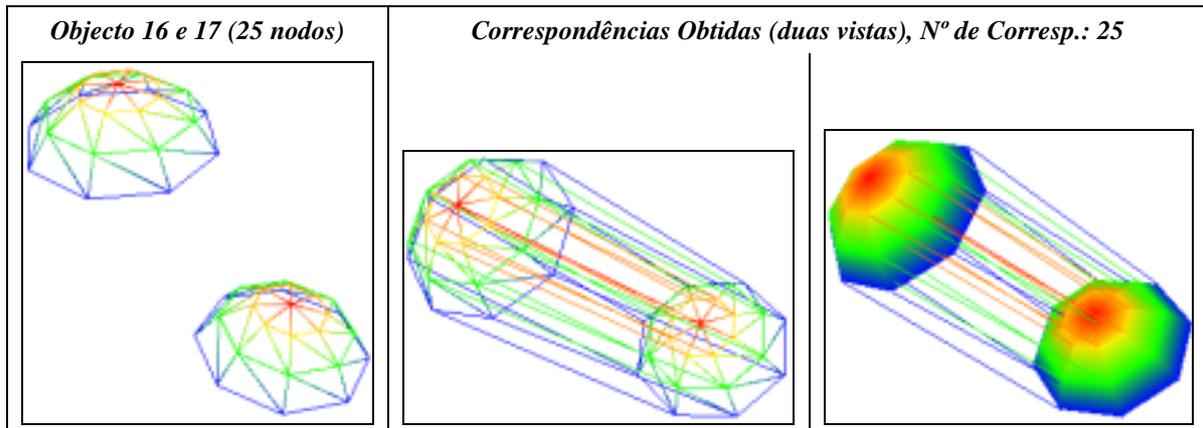
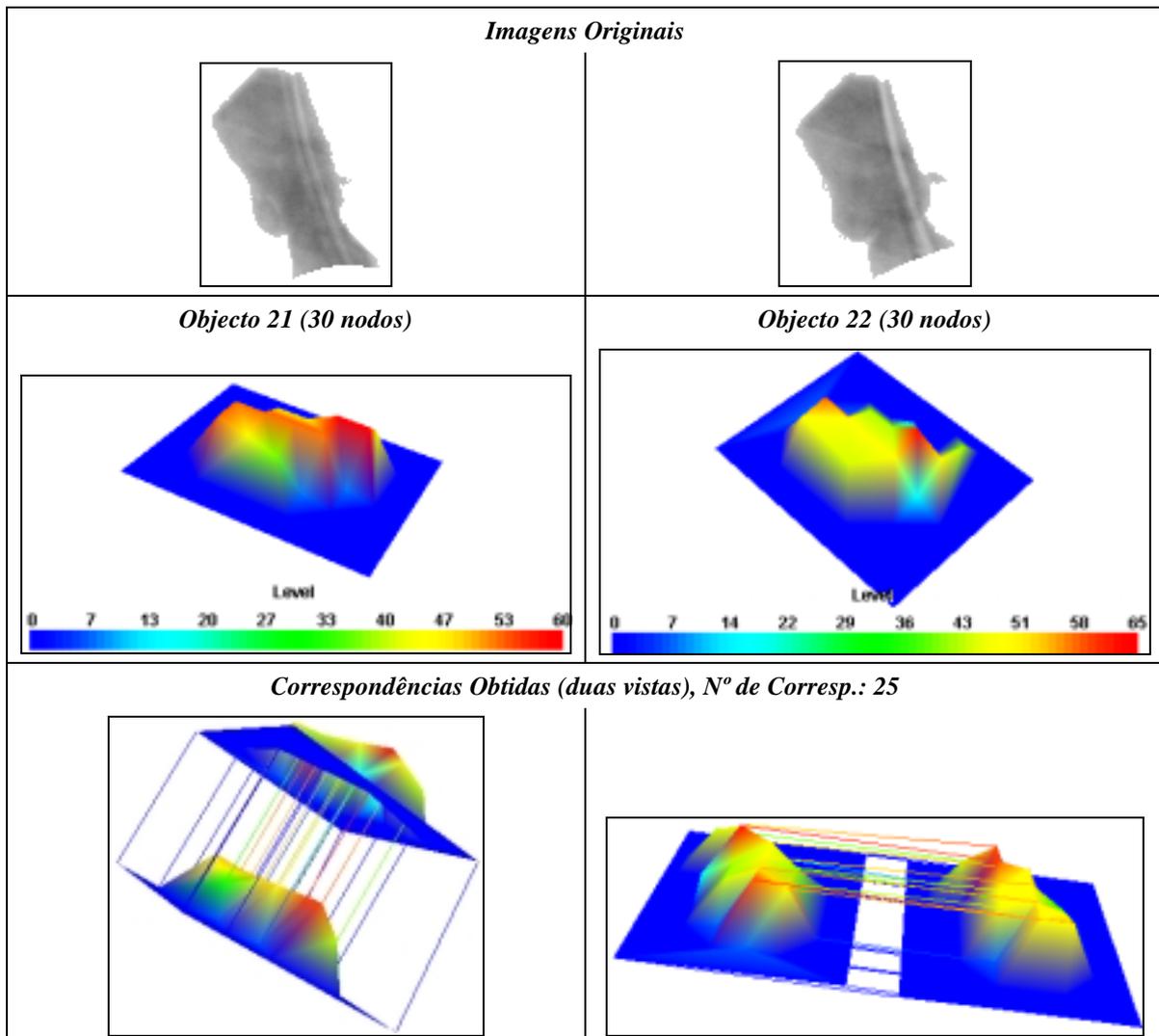


Tabela 5.24 – Dados utilizados e resultados obtidos na décima segunda experiência para a determinação das correspondências utilizando elementos axiais lineares agrupados. (sec. 5.4.2.2.2, pág. 183)



A3 – Capítulo VI

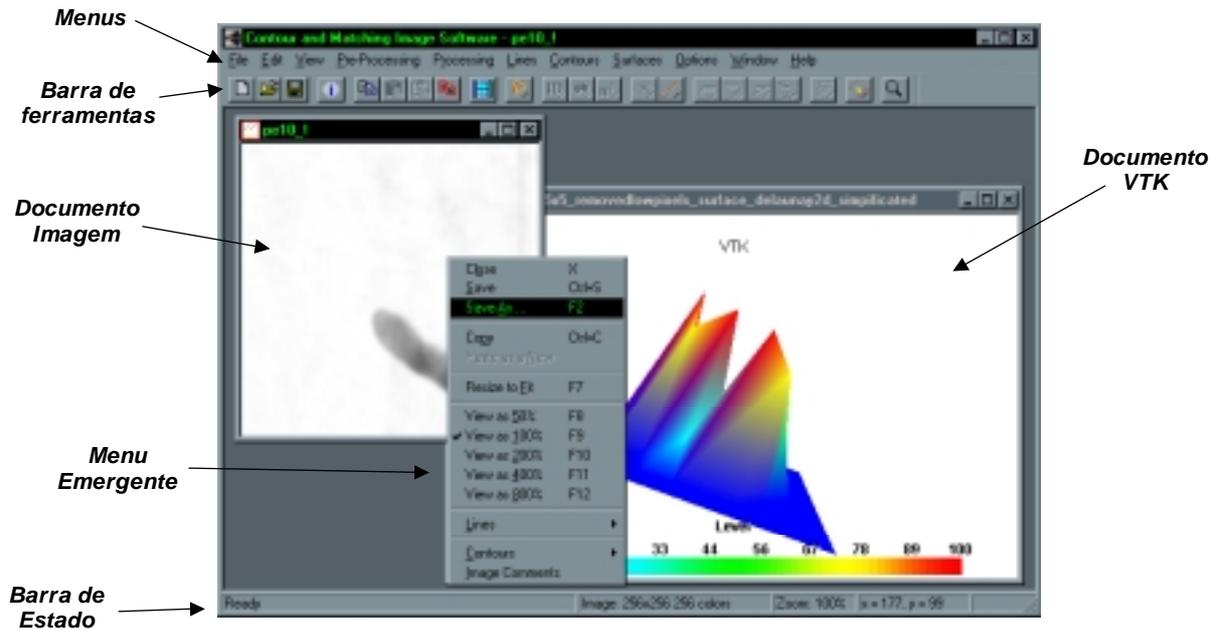


Figura 6.3 – A interface da plataforma de desenvolvimento e ensaio. (O documento activo é do tipo imagem; assim as funções disponíveis são as existentes para este tipo de documento.) (sec. 6.4, pág. 196)

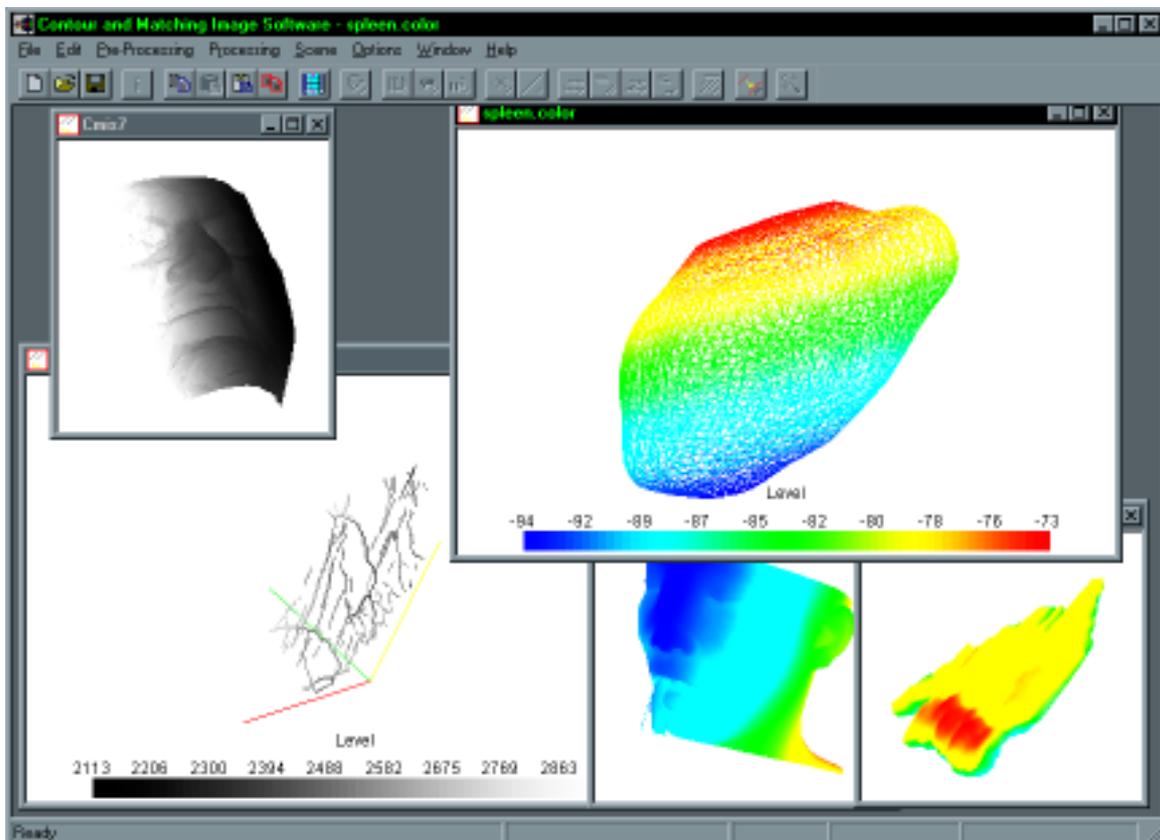
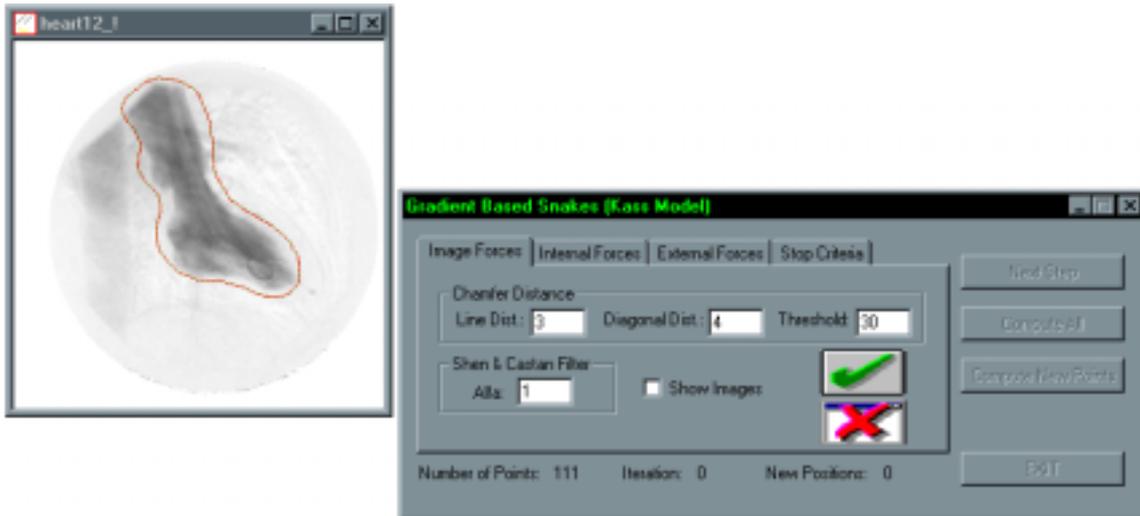
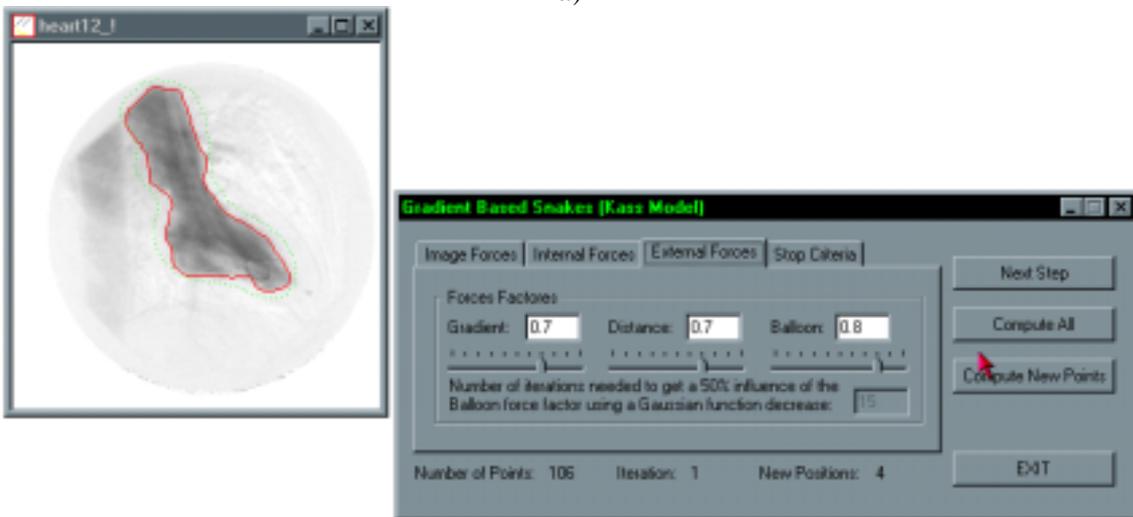


Figura 6.5 – Interface da plataforma de desenvolvimento e ensaio quando está activo um documento VTK. (sec. 6.4, pág. 198)

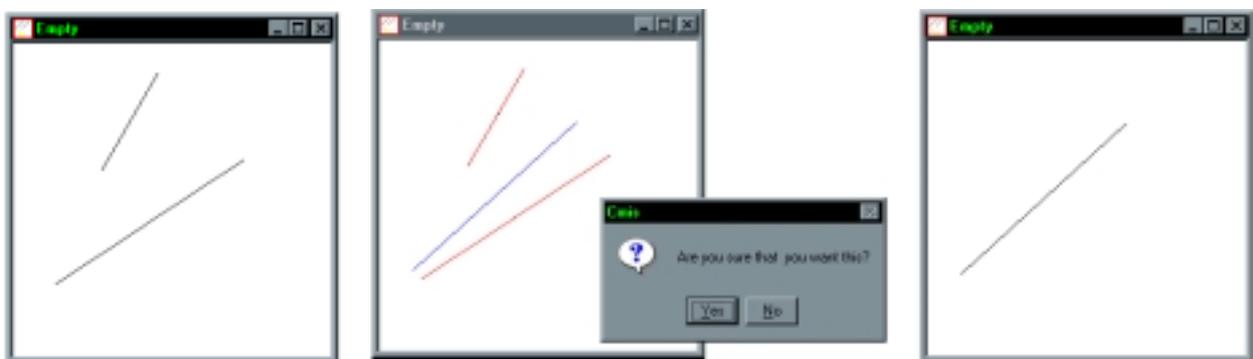


a)



b)

Figura 6.17 – Segmentação de um objecto utilizando o modelo de snake de Kass: a) Definição da snake inicial, utilizando o rato, e aplicação do método; b) Snake final obtida. (sec. 6.6.3.1, pág. 209)



a)

b)

c)

Figura 6.20 – Fusão de dois segmentos: a) Segmentos originais; b) Confirmação da fusão; c) Segmento resultante. (sec. 6.6.3.2, pág. 211)

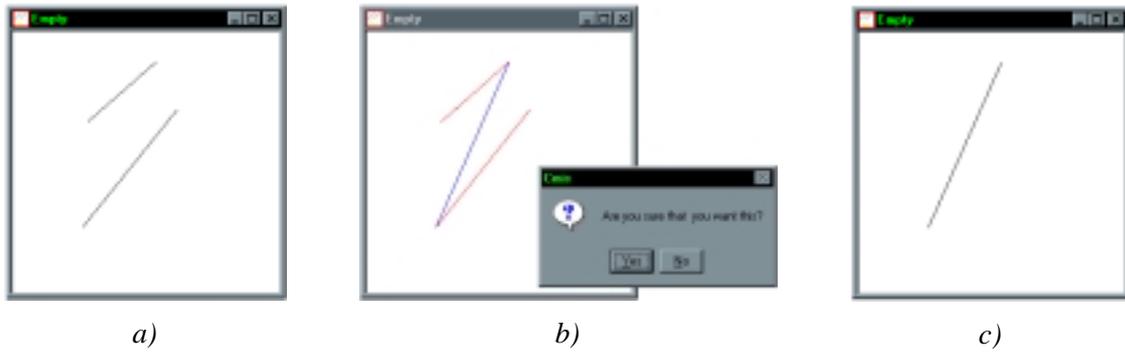


Figura 6.21 – Simplificação de dois segmentos: a) Segmentos originais; b) Confirmação da simplificação; c) Segmento resultante. (sec. 6.6.3.2, pág. 211)

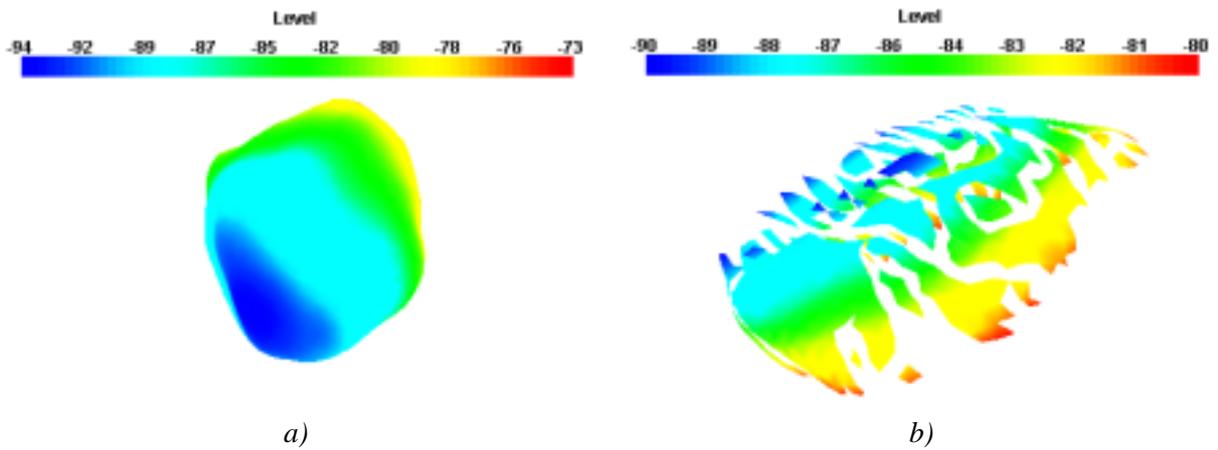


Figura 6.27 – Binarização das células de um objecto: a) Objecto original; b) Objecto resultante da binarização das células com valores entre -90.0 e -80.0 . (sec. 6.6.4, pág. 215)

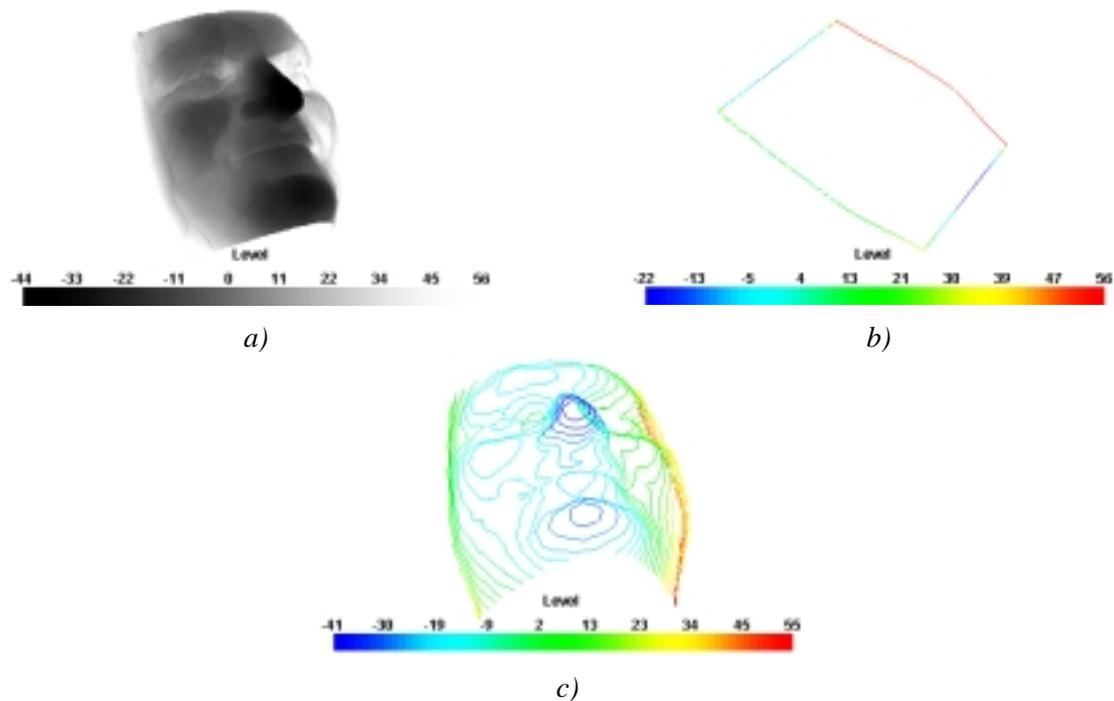


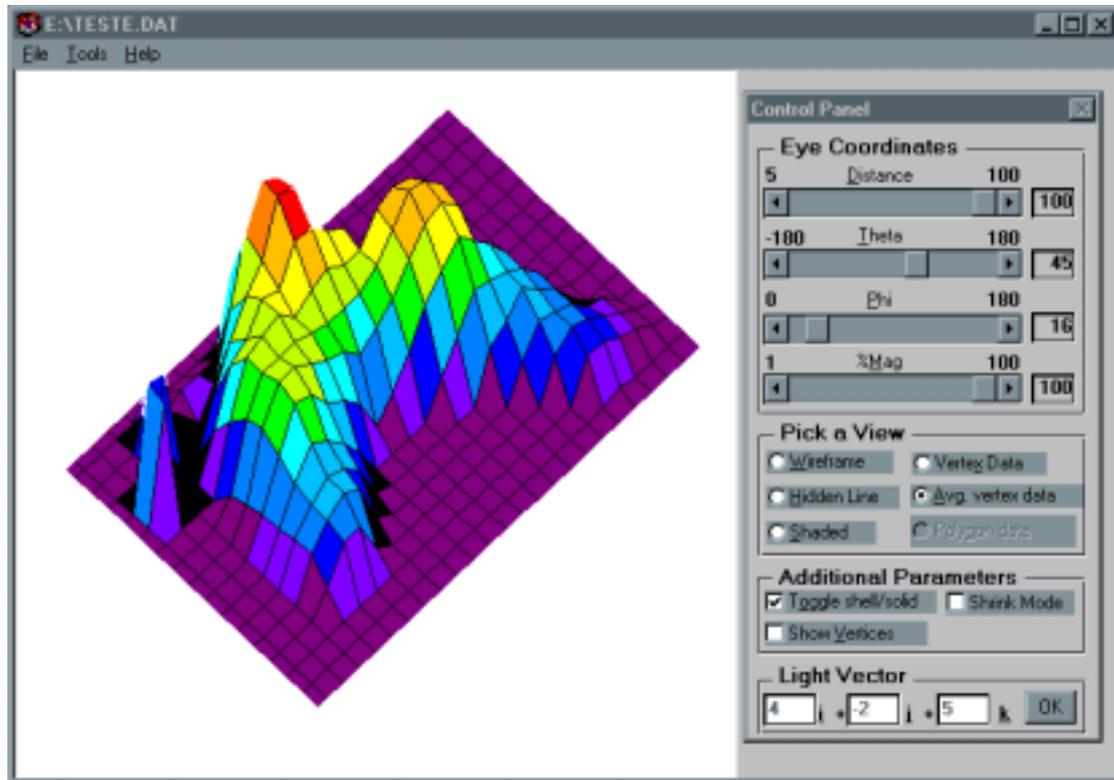
Figura 6.30 – Determinação dos contornos de um objecto: a) Objecto original; b) Contorno exterior; c) Alguns contornos de isonível. (sec. 6.6.4, pág. 216)



a)



b)



c)

Figura 6.44 – Visualização 3D de uma superfície: a) Imagem original (negada); b) Amostragem resultante; c) Superfície visualizada na aplicação Win4Dv. (sec. 6.6.5.1.2, pág. 225)

A4 – Capítulo VII



Figura 7.3 – Contornos a considerar ao longo da sequência. (sec. 7.2.1, pág. 240)

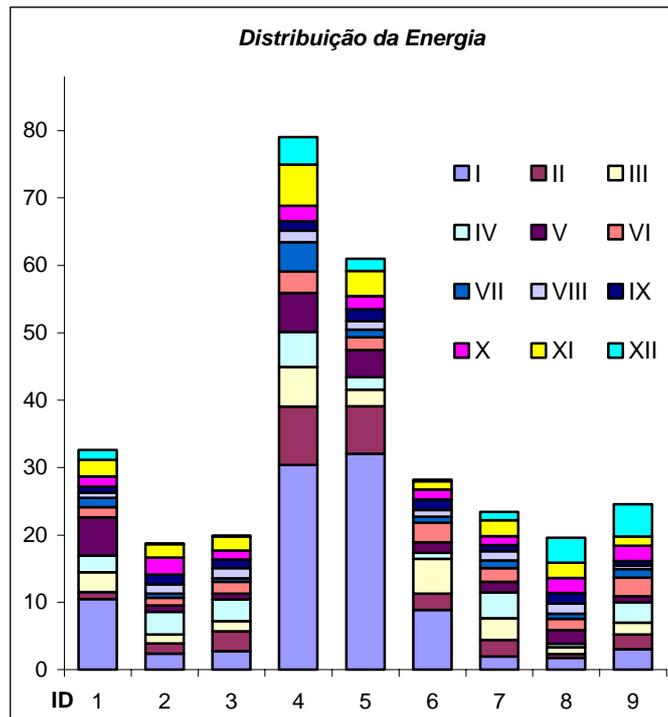


Figura 7.8 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da seqüência de contornos. (sec. 7.2.1, pág. 244)

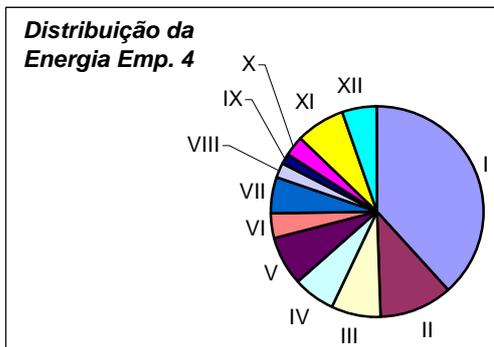


Figura 7.9 – Distribuição da energia para o emparelhamento 4 entre contornos. (sec. 7.2.1, pág. 244)

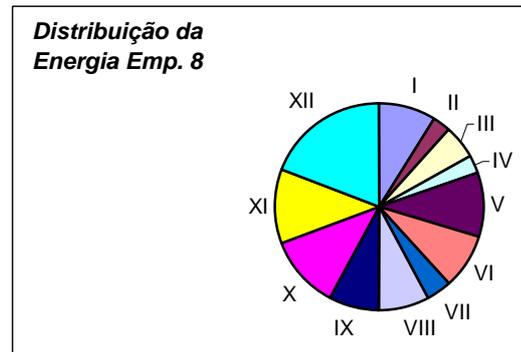


Figura 7.10 – Distribuição da energia para o emparelhamento 8 entre contornos. (sec. 7.2.1, pág. 244)

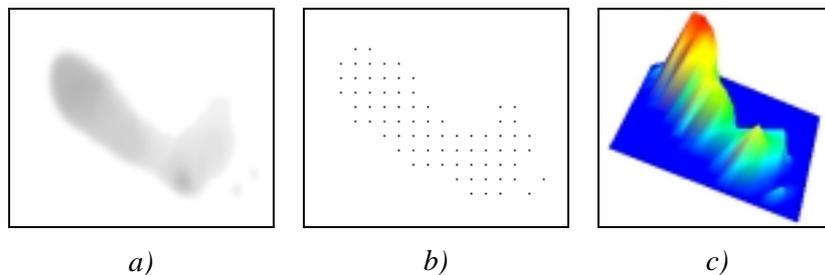


Figura 7.11 – Criação de uma superfície de intensidade a partir de uma imagem Bitmap por amostragem regular: a) Imagem (negada) após remoção dos pixels considerados como ruído e aplicação do filtro Gaussiano; b) Amostragem regular do objecto (pixels a preto); c) Superfície resultante após triangulação, simplificação e suavização. (sec. 7.2.2.1, pág. 245)

Tabela 7.9 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. (sec. 7.2.2.1, pág. 247)

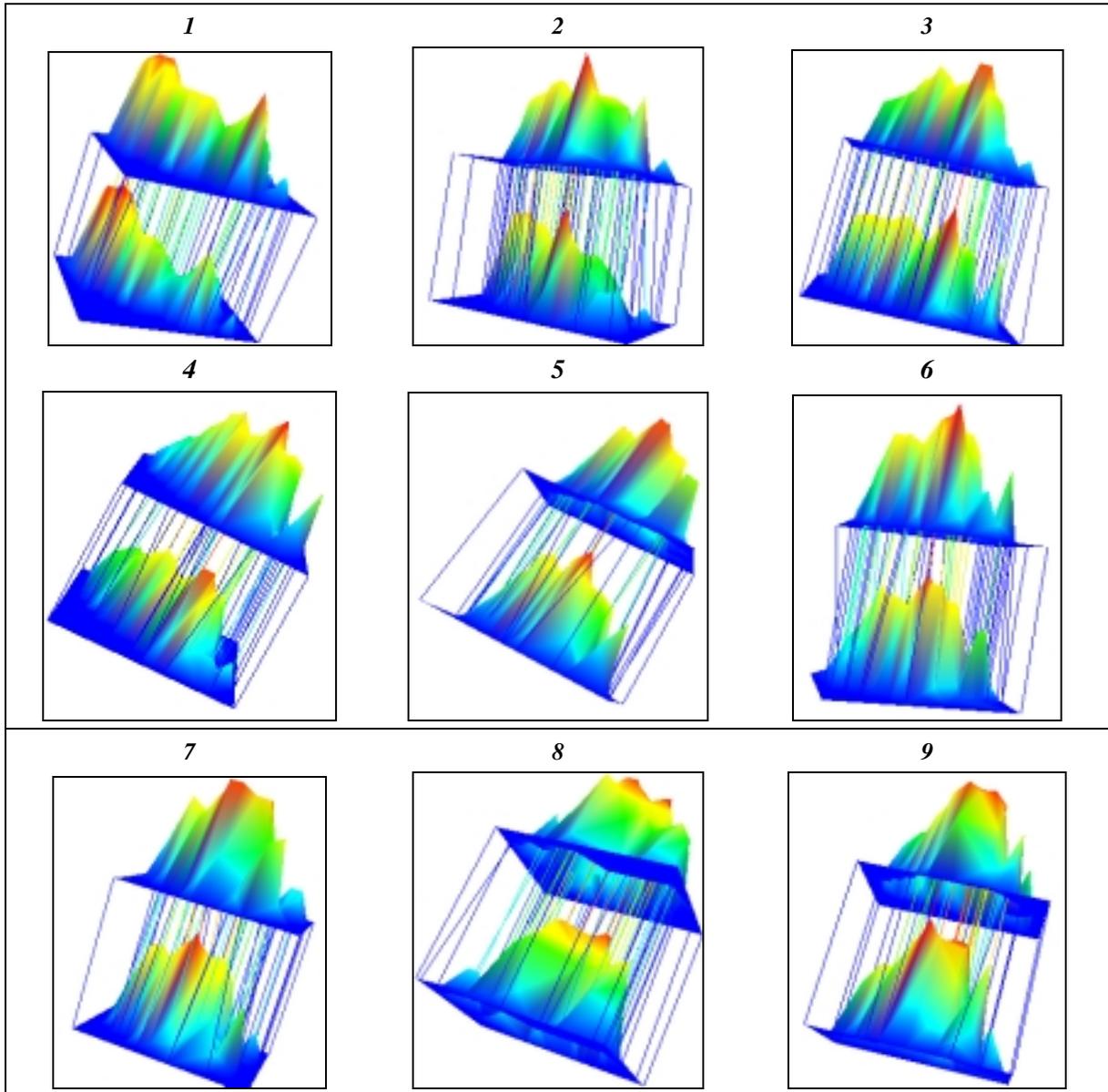


Tabela 7.10 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. (sec. 7.2.2.1, pág. 248)

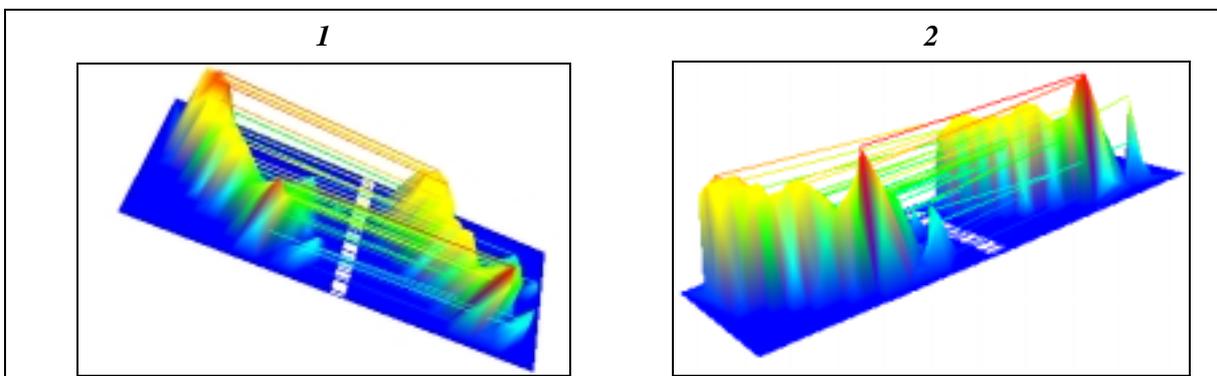
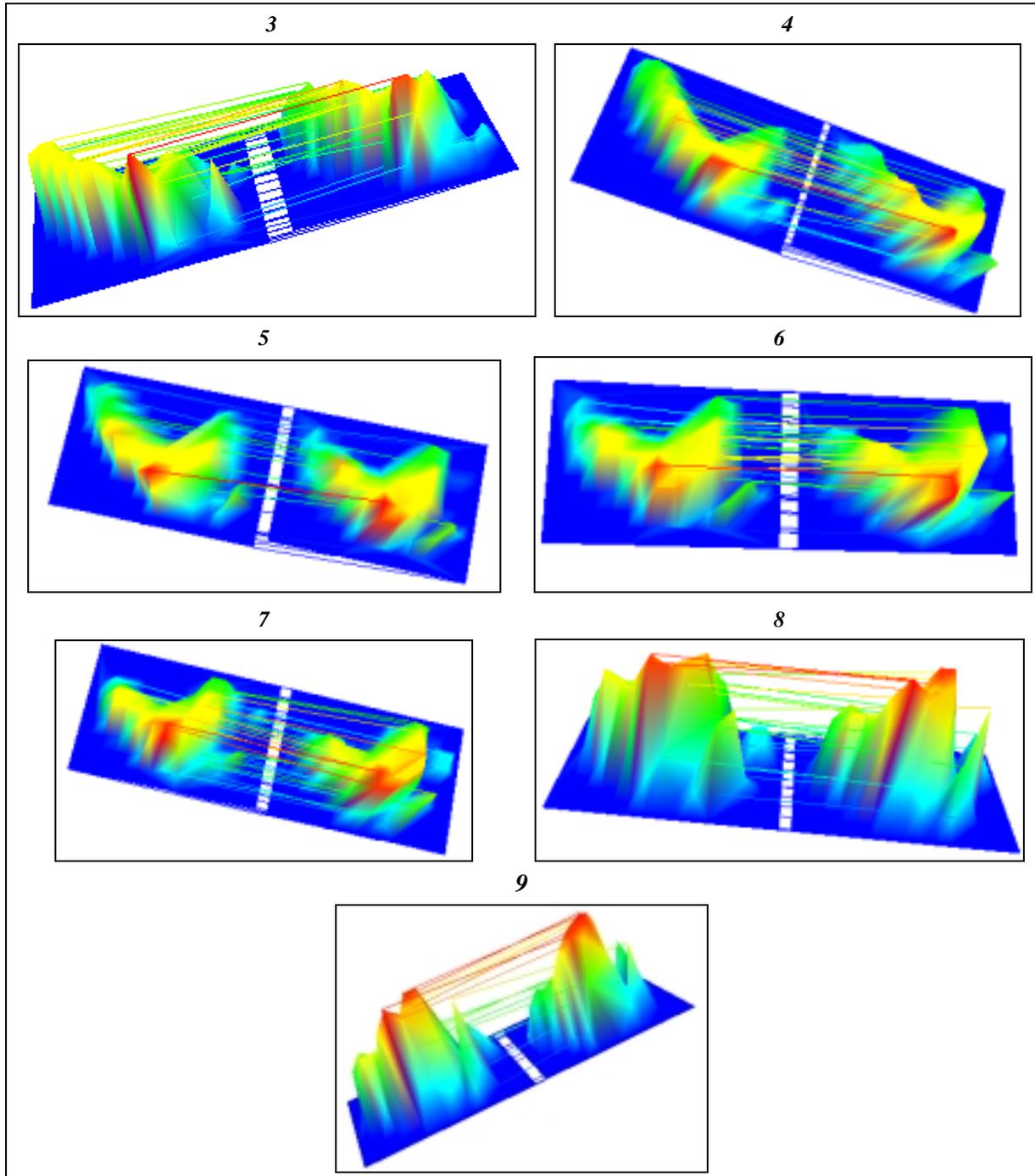


Tabela 7.10 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem regular, ao longo da sequência. (Continuação.)



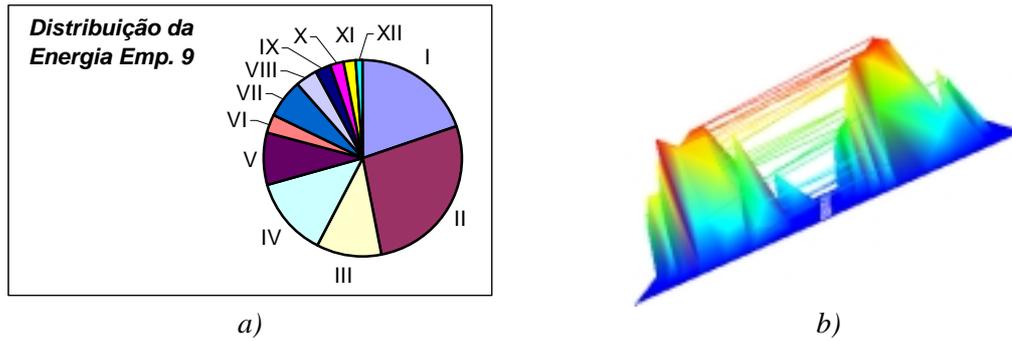


Figura 7.14 – Emparelhamento 9 entre superfícies baseadas em amostragem regular: a) Distribuição da energia de deformação ao longo dos modos de vibração; b) Correspondências obtidas utilizando-se os 9 primeiros modos de vibração. (sec. 7.2.2.1, pág. 250)

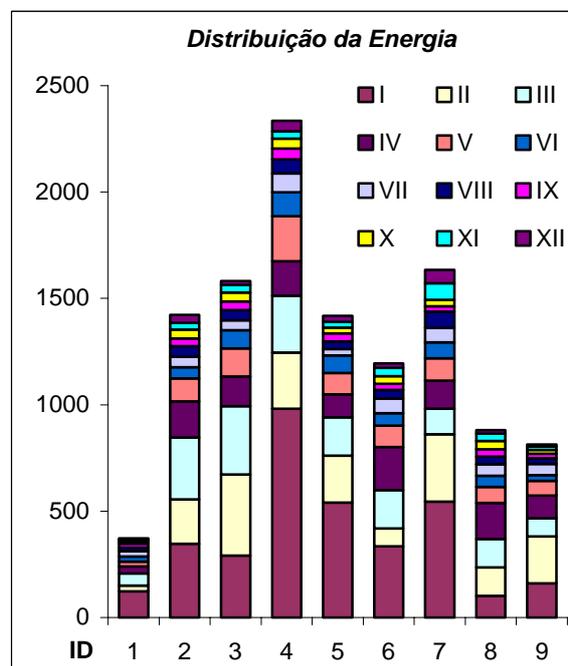


Figura 7.15 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de superfícies baseadas em amostragem regular. (sec. 7.2.2.1, pág. 250)

Tabela 7.14 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. (sec. 7.2.2.2, pág. 253)

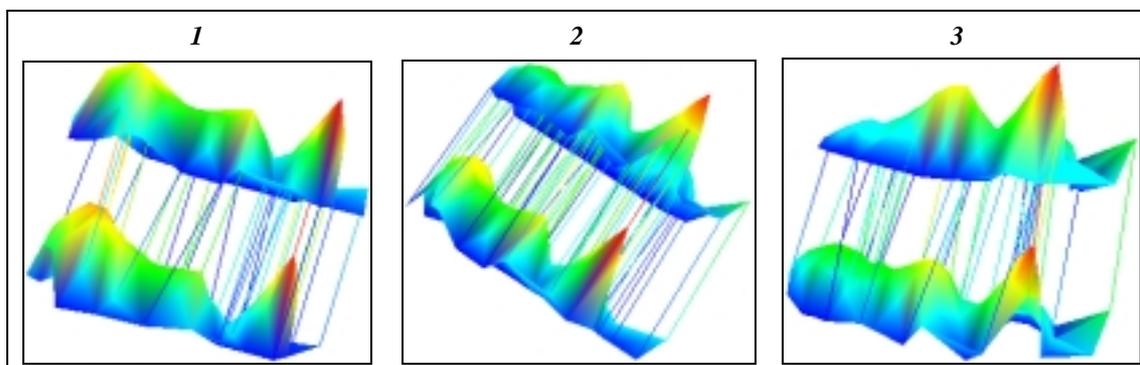


Tabela 7.14 – Emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. (Continuação.)

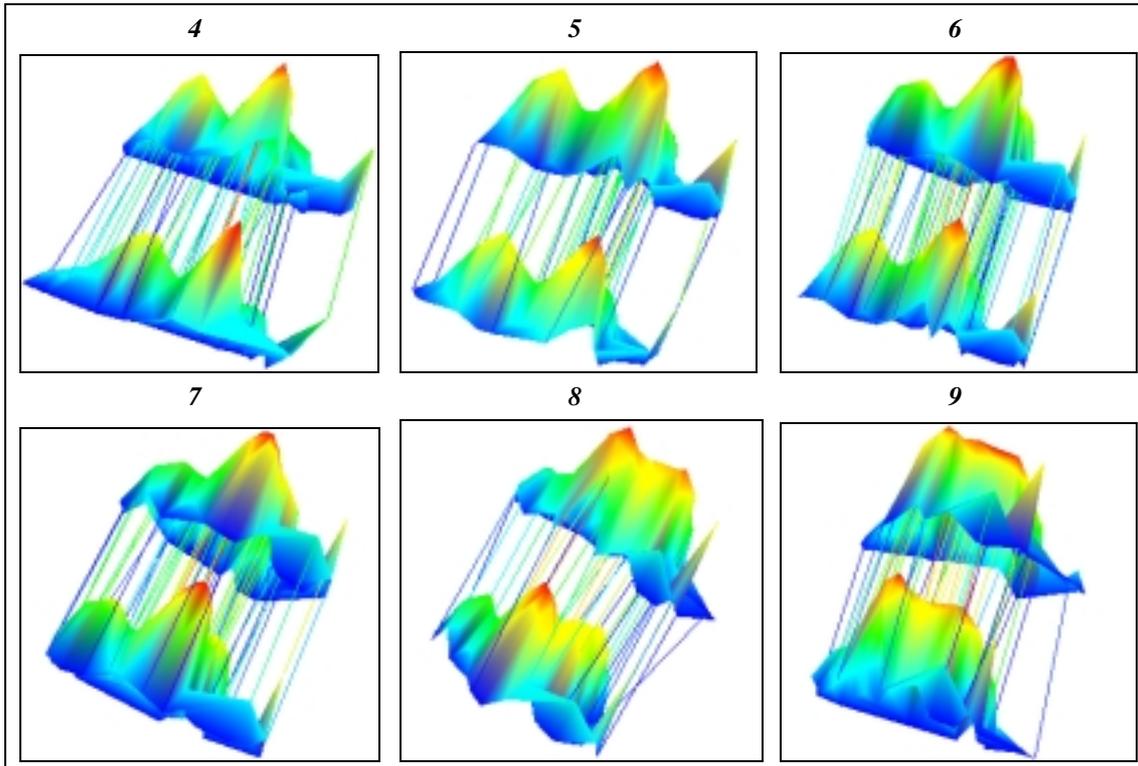


Tabela 7.15 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. (sec. 7.2.2.2, pág. 254)

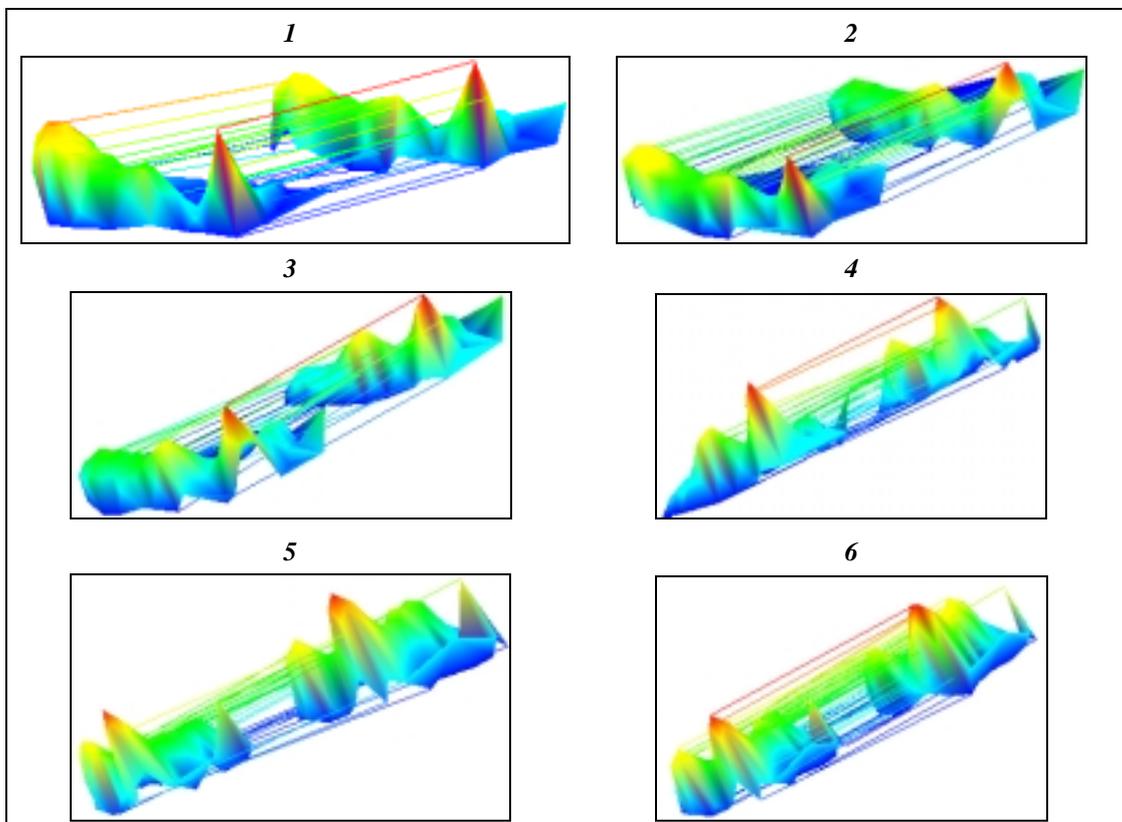


Tabela 7.15 – Outra vista dos emparelhamentos obtidos entre as superfícies, resultantes de amostragem adaptativa, ao longo da sequência. (Continuação.)

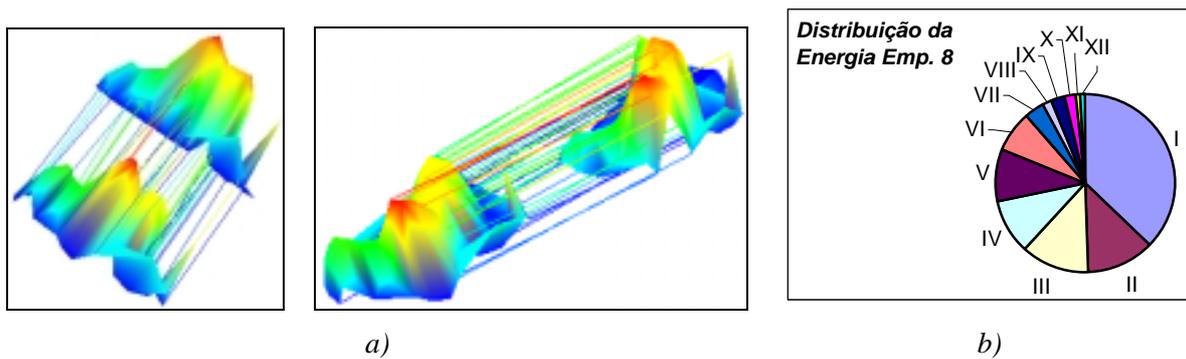
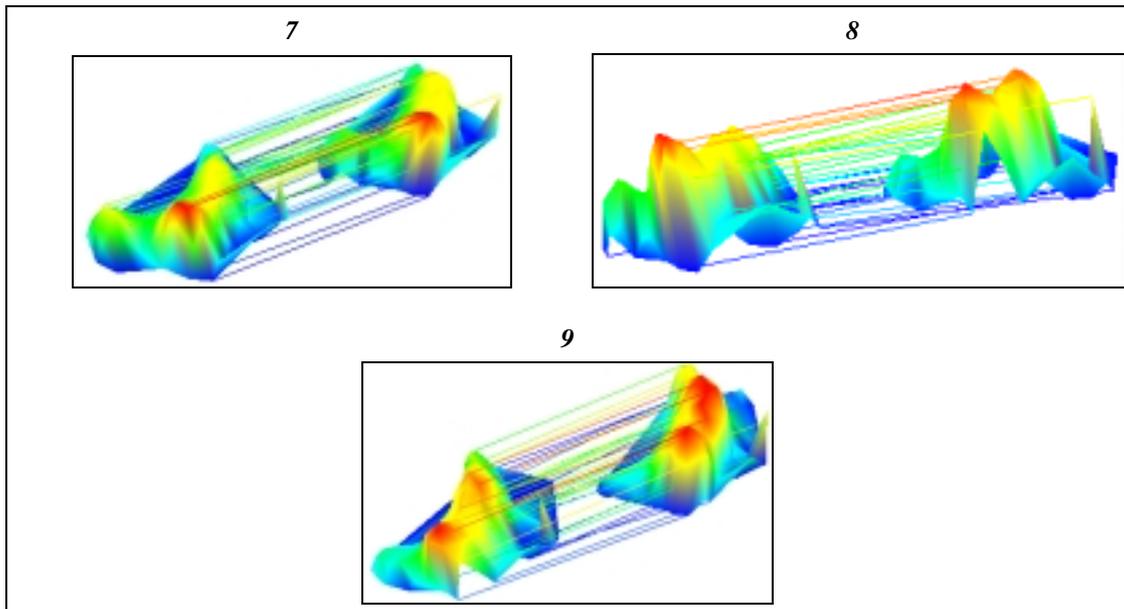


Figura 7.18 – Emparelhamento 8 entre superfícies baseadas em amostragem adaptativa: a) Duas vistas das correspondências obtidas utilizando-se os primeiros 25 modos de vibração; b) Distribuição da energia de deformação ao longo dos modos de vibração. (sec. 7.2.2.2, pág. 255)

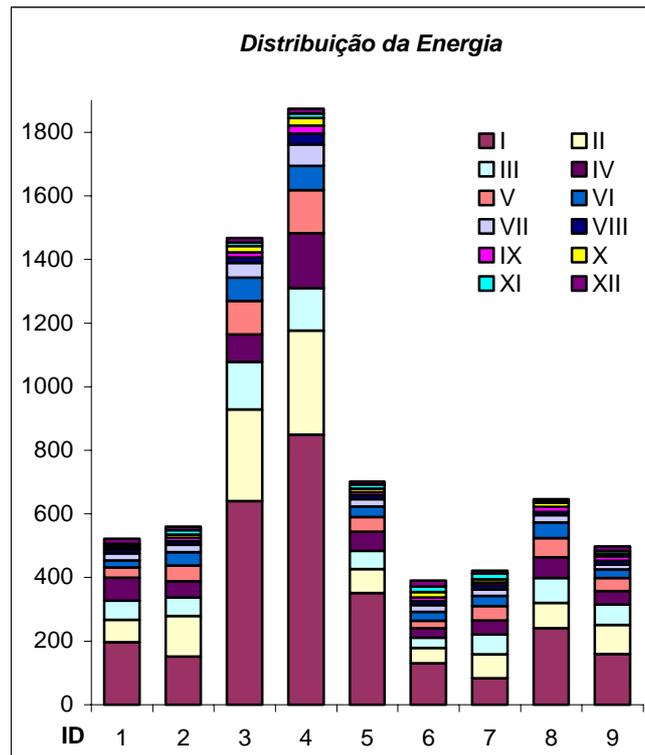


Figura 7.19 – Comparticipação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de superfícies baseadas em amostragem adaptativa. (sec. 7.2.2.2, pág. 256)

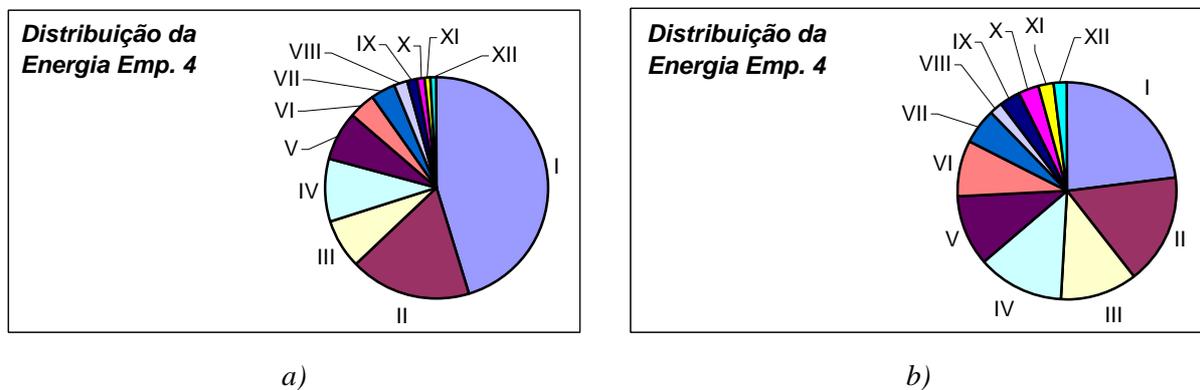


Figura 7.20 – Distribuição da energia de deformação por 12 classes de modos, sem (a) e com (b) a prévia aplicação da transformação rígida obtida, para o emparelhamento 4 entre superfícies baseadas em amostragem adaptativa. (sec. 7.2.2.2, pág. 256)

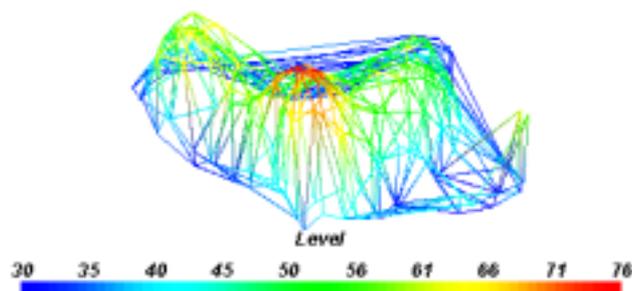


Figura 7.21 – Emparelhamento 5 após aplicação dos deslocamentos nodais estimados à superfície 5. (sec. 7.2.2.2, pág. 256)

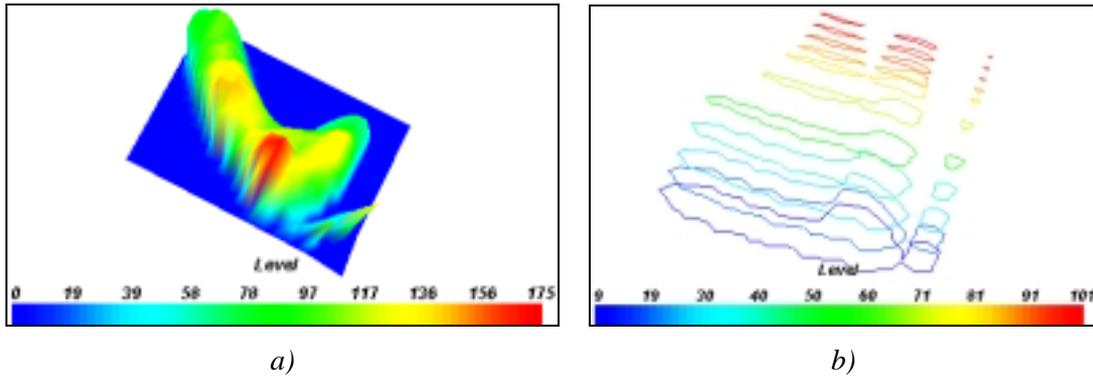


Figura 7.22 – Determinação dos isocontornos a considerar: a) Superfície de intensidade construída a partir da imagem 4 da sequência; b) Onze contornos isobáricos extraídos a partir da superfície. (sec. 7.2.3.1, pág. 257)

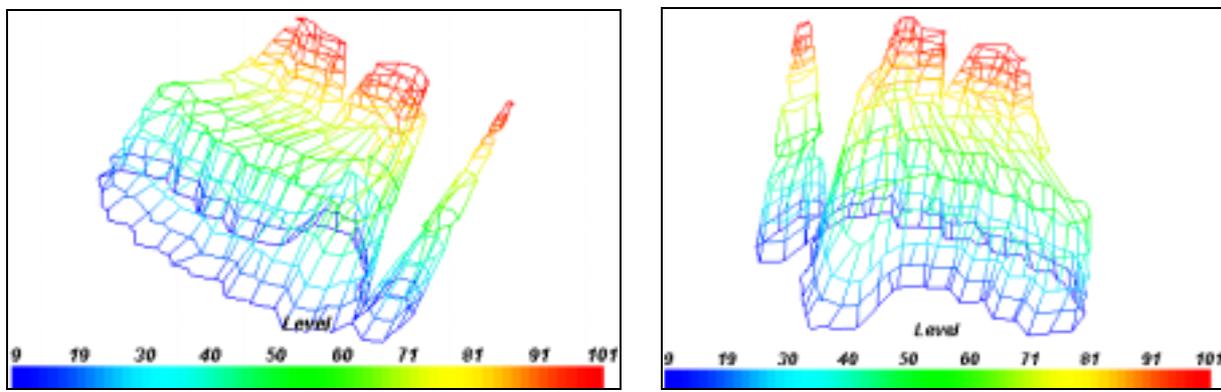


Figura 7.23 – Duas vistas dos emparelhamentos determinados entre contornos de isonível de uma mesma imagem. (sec. 7.2.3.1, pág. 258)

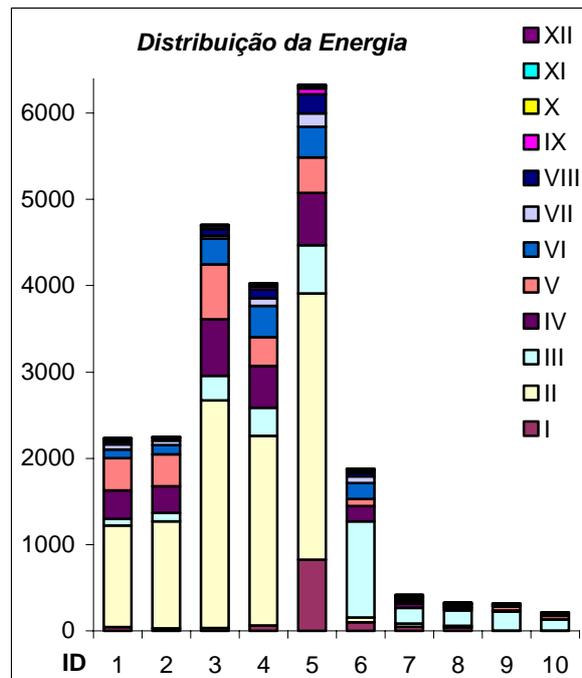


Figura 7.26 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo do emparelhamento dos isocontornos de uma mesma imagem. (sec. 7.2.3.1, pág. 260)

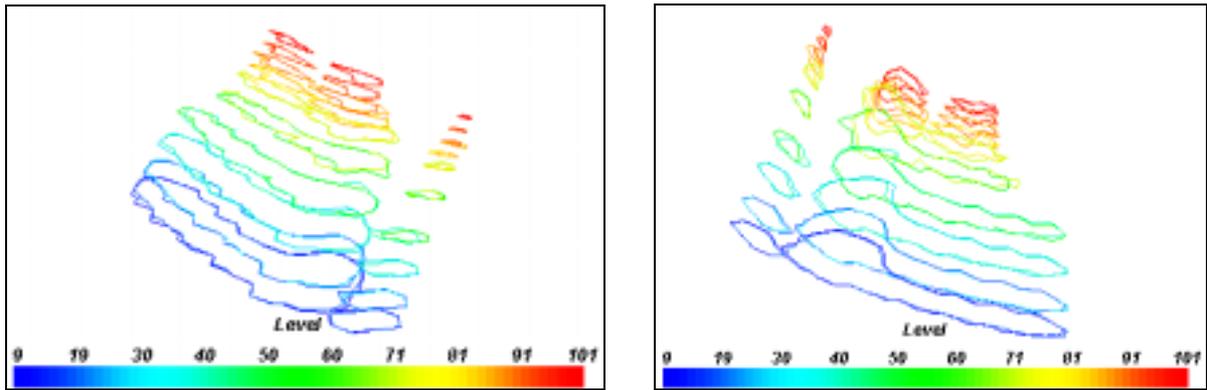


Figura 7.27 – Duas vistas dos deslocamentos estimados para os contornos de isonível de uma mesma imagem. (sec. 7.2.3.1, pág. 260)

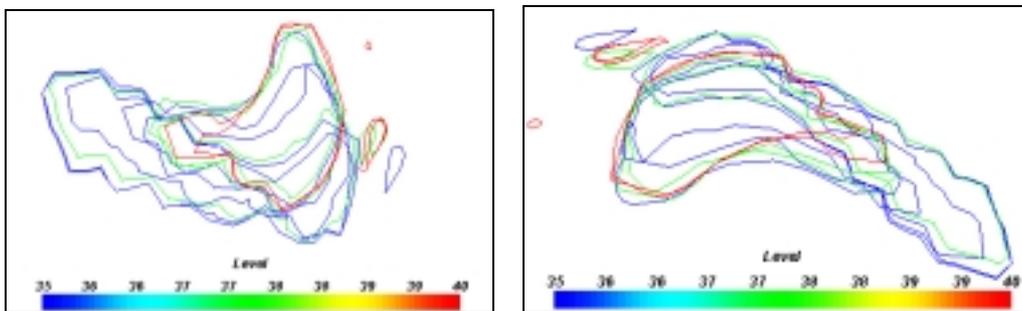


Figura 7.28 – Duas vistas dos dez isocontornos a considerar ao longo da sequência exemplo. (sec. 7.2.3.2, pág. 261)

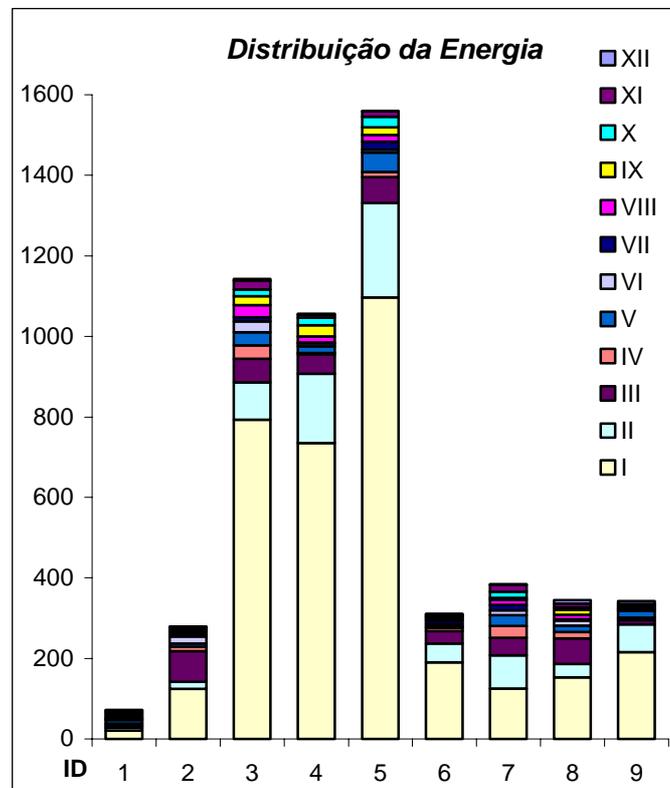


Figura 7.31 – Participação dos modos de vibração na energia de deformação ao longo da sequência de isocontornos de nível de brilho médio. (sec. 7.2.3.2, pág. 263)

A1 – Capítulo III	3
A2 – Capítulo V	5
A3 – Capítulo VI	10
A4 – Capítulo VII	13