

# UTILIZAÇÃO DE MODELAÇÃO FÍSICA E TÉCNICAS DE OPTIMIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE CORRESPONDÊNCIAS ENTRE NODOS DE OBJECTOS NO ESPAÇO MODAL

Bastos\*, L. F.; Tavares\*\*\*, J. M. R. S.

\*Laboratório de Óptica e Mecânica Experimental, Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 PORTO PORTUGAL, {[lbastos@fe.up.pt](mailto:lbastos@fe.up.pt), [tavares@fe.up.pt](mailto:tavares@fe.up.pt)}

\*\*Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, {<http://www.fe.up.pt/~tavares>}

## RESUMO

*Neste trabalho, é utilizada uma metodologia, previamente existente, baseada em modelação física, para o emparelhamento de dois objectos, constituídos por dados pontuais (nodos). Enquanto a referida metodologia utiliza uma abordagem local, neste artigo é apresentada uma aplicação de técnicas de optimização global, de forma a ser considerada a interacção entre todos os nodos. Foi também desenvolvida uma solução, aplicável a objectos do tipo contorno, após o emparelhamento habitual do tipo “um com um”, que permite emparelhar satisfatoriamente (caso existam) os nodos em excesso. Neste artigo é também descrito um método utilizado para a determinação da transformação rígida existente entre dois objectos.*

## 1. INTRODUÇÃO

A análise do movimento tem vindo a ser, nas duas últimas décadas, uma área importante de investigação no domínio da visão por computador. O problema da análise de movimento é tradicionalmente definido como a determinação do movimento de um objecto a partir de uma sequência de imagens, a duas ou três dimensões (2D ou 3D), capturadas em dois ou mais instantes de tempo. Seguir o movimento, numa sequência de imagens ou vídeo, é útil na determinação da posição e/ou outros parâmetros do movimento (ou deformação) de um objecto, perceptível nessa sequência. A determinação de

correspondências, entre imagens de objectos distintos ou de instantes diferentes de um mesmo objecto, é um processo útil em vários domínios da visão por computador, como por exemplo: o seguimento e análise do movimento/deformação de objectos, identificação e inspecção de peças industriais, etc.

Com a metodologia base (Sclaroff, 1995; Tavares, 2000, 2000a, 2000b, 2000c, 2002) utilizada neste trabalho para a determinação das correspondências, constrói-se uma matriz (de afinidade) que relaciona os dados pontuais que constituem os dois objectos a emparelhar. Essa matriz, construída a partir da utilização do método dos elementos finitos e da análise modal,

relaciona os dois objectos a emparelhar, pela análise dos deslocamentos de cada nodo no respectivo espaço modal. Desta forma, quanto menor é o valor de um elemento da matriz de afinidade, maior é a semelhança entre os deslocamentos dos nodos associados a esse elemento, e maior é a probabilidade dessa correspondência ser adequada.

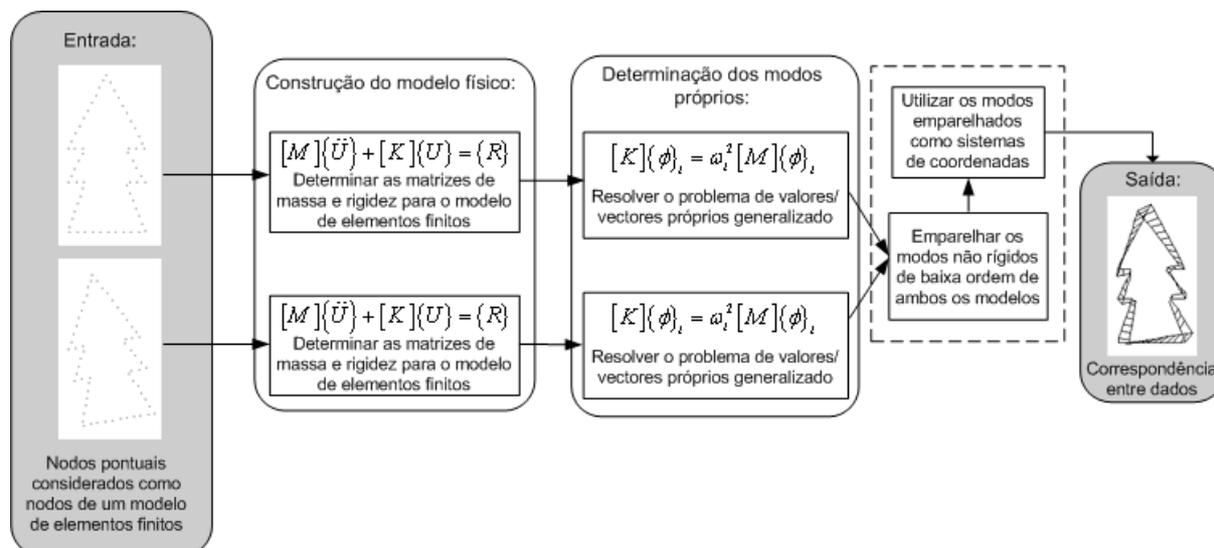


Figura 1 – Etapas da metodologia global utilizada para o emparelhamento de objectos, baseada na modelação física e análise modal. (A zona delimitada a traço descontínuo indica a etapa onde este trabalho se concentrou.)

Após a construção dessa matriz de afinidade, é utilizada, na metodologia base adoptada, uma filosofia baseada numa busca local de correspondências, o que em muitos casos pode ser uma desvantagem, pois considera cada *nodo* como um elemento independente e não como pertencente a um modelo global. Para tentar ultrapassar esta desvantagem, é considerada neste trabalho uma abordagem de cariz global, utilizando métodos de optimização.

No entanto, caso o número de nodos dos objectos a emparelhar seja diferente, existirão necessariamente nodos, do objecto com o maior número de elementos, que não estarão correspondidos, pois o emparelhamento considerado é o habitual “um com um”. Em muitas situações, este tipo de emparelhamento tem necessariamente desvantagens, pois tal acarreta uma perda de informação, que será mais relevante se as imagens em questão pertencerem a uma sequência. Para evitar que tal aconteça, é apresentada neste artigo uma solução aplicável a objectos do tipo contorno, que permite o emparelhamento

O diagrama apresentado na Figura 1 descreve sucintamente a metodologia global utilizada neste trabalho, para a determinação das correspondências entre dois objectos. A zona delimitada a traço descontínuo indica a área onde se insere o trabalho realizado (fase da determinação das correspondências).

dos nodos em excesso de forma satisfatória.

Ao longo deste trabalho, também se verificou que era de especial interesse a determinação da transformação geométrica rígida existente entre dois objectos, quando são conhecidas todas ou algumas das correspondências entre os seus dados. Assim, procedeu-se à utilização de um método, anteriormente implementado (Tavares, 2000, 2002), para a sua determinação. O referido método é baseado em *quaternions* unitários e obtém a transformação geométrica existente através de uma minimização, por mínimos quadrados, do erro da transformação determinada. Este método obtém bons resultados mesmo quando o número de correspondências utilizado não é muito elevado.

Na secção seguinte, é apresentado o método utilizado para a determinação da transformação rígida existente entre dois objectos devidamente emparelhados. Após a descrição deste método, é apresentada resumidamente a metodologia base para a determinação das correspondências. De

seguida, é descrito sumariamente o problema de optimização e indicados os métodos utilizados. Após a referida descrição, é apresentada a solução desenvolvida para solucionar o problema da existência de nodos em excesso, quando os objectos a emparelhar são do tipo contorno. Seguidamente, são apresentados alguns resultados experimentais, obtidos com a metodologia proposta neste artigo. Finalmente, são apresentadas algumas conclusões e enunciadas perspectivas de desenvolvimentos futuros.

## 2. DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO RÍGIDA ENTRE DOIS OBJECTOS UTILIZANDO QUATERNIONS UNITÁRIOS

A determinação da transformação rígida<sup>1</sup> (Foley, 1991; Hall, 1993) entre dois objectos é um problema frequente nos diversos domínios da visão por computador. Nesta secção é apresentado um método, com base no inicialmente proposto em (Horn, 1987), implementado em (Tavares, 2000, 2002) para a determinação da transformação rígida, constituída por uma rotação em torno de um eixo que passa pela origem, um escalamento relativamente à origem e uma translação. O método adoptado baseia-se na minimização por mínimos quadrados do erro da transformação determinada e necessita, no mínimo, da correspondência entre três pontos para estimar a transformação envolvida.

Para a representação da rotação são utilizados *quaternions* unitários; a translação é determinada pela diferença entre as coordenadas do centróide do objecto  $t$  e as coordenadas do centróide do objecto  $t+1$ , previamente rodado e escalado; o escalamento é determinado pelo quociente da raiz quadrada dos desvios quadráticos das coordenadas dos dois objectos relativamente aos centróides correspondentes. O *quaternion* unitário que representa a rotação é o vector próprio

associado ao valor próprio positivo mais elevado de uma matriz quadrada e simétrica de dimensões  $(4 \times 4)$ .

### 2.1. Introdução aos *quaternions* unitários

Um *quaternion*  $\hat{q}$  pode ser definido como um vector com quatro componentes, resultante da composição de um escalar e um vector 3D, ou como um número complexo com três partes imaginárias distintas (Tavares, 2000). Utilizando a notação dos números complexos, um *quaternion* pode ser representado como:

$$\hat{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k,$$

onde  $q_0$  é a parte real e  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  as partes imaginárias. Considerando o resultado da composição de um escalar  $q$  e um vector 3D  $\vec{q}$ , um *quaternion* pode ser representado como:

$$\hat{q} = q + \vec{q},$$

onde  $q = q_0$  e  $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$ .

Um *quaternion* unitário é um *quaternion* cuja amplitude é igual a um.

### 2.2. Relações com outras representações

Como é possível verificar em (Horn, 1987) as partes imaginárias do *quaternion* unitário representam a direcção do eixo de rotação  $\hat{w}$ , enquanto o ângulo de rotação  $\theta$  pode ser obtido a partir da parte real e da amplitude da parte imaginária:

$$\hat{w} = (w_x, w_y, w_z)^T = \vec{q} / \|\vec{q}\|,$$

$$\sin \theta = 2q \|\vec{q}\|,$$

$$\cos \theta = (q^2 - \|\vec{q}\|^2).$$

A matriz ortonormal  $[R]$  para a rotação, que transforma um ponto  $P$  num outro ponto  $P'$  com  $P' = [R]P$ , correspondente ao *quaternion* unitário  $\hat{q}$  é definida do seguinte modo (Horn, 1987):

<sup>1</sup> Sobre transformações rígidas ver, por exemplo, (Tavares, 1995, 1995a).

$$[R] = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix}.$$

### 2.3. Algoritmo

O algoritmo utilizado pode ser resumido da seguinte forma, (Tavares, 2000):

Em primeiro lugar, devem-se determinar os centróides  $G_t$  e  $G_{t+1}$  de cada objecto. As coordenadas dos centróides determinados são subtraídas às coordenadas de cada ponto  $i$  ( $X_{i,t}$  e  $X_{i,t+1}$ ) do respectivo objecto, de modo a obterem-se as coordenadas centrais de cada um ( $X'_i = [x'_i \ y'_i \ z'_i]^T$ ):

$$[N] = \begin{bmatrix} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{xx} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & (-S_{xx} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & (-S_{xx} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix},$$

com  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ , ...,  $S_{zz}$  determinados, calculando-se os nove produtos possíveis  $x'_i x'_{i+1}$ ,  $x'_i y'_{i+1}$ , ...,  $z'_i z'_{i+1}$  das coordenadas respectivas para cada par de pontos emparelhados:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x'_i x'_{i+1}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x'_i y'_{i+1}, \dots$$

O *quaternion* unitário  $\hat{q}$  que maximiza o produto  $\hat{q}^T [N] \hat{q}$  (Horn, 1987) é um vector unitário com a mesma direcção do vector próprio da matriz  $[N]$  (Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press 1992) associado ao valor próprio positivo mais elevado da mesma matriz.

O escalamento existente pode ser determinado pelo quociente da raiz quadrada dos desvios médios quadráticos, dos dois conjuntos de coordenadas relativamente aos seus centróides:

$$s = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \|X'_{i,t+1}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|X'_{i,t}\|^2} \right)^{1/2}.$$

Analisando esta equação verifica-se que

$$X'_{i,t} = X_{i,t} - G_t,$$

$$X'_{i,t+1} = X_{i,t+1} - G_{t+1}.$$

Utilizando um *quaternion* unitário  $\hat{q}$ , para representar a rotação, e o método dos mínimos quadrados, de maneira a diminuir os erros residuais associados à rotação, obtém-se o produto  $\hat{q}^T [N] \hat{q}$  (Horn, 1987), que deverá ser maximizado com a restrição de  $\hat{q}$  ser unitário e onde a matriz  $[N]$  é simétrica e construída a partir das coordenadas dos pontos dos dois objectos:

para a determinação do escalamento não é necessária a prévia determinação da rotação.

Finalmente, a melhor solução para a translação  $\{T\}$  é obtida pela diferença entre as coordenadas do centróide do objecto  $t+1$  e as coordenadas do centróide do objecto  $t$ , previamente rodado e escalado:

$$\{T\} = G_{t+1} - s[R]G_t.$$

Deve-se notar que este é um método directo, e assim não existe a necessidade de correcção iterativa (Tavares, 2000).

### 2.4. Consideração da confiança associada às coordenadas dos pontos

Quando os erros esperados para as coordenadas dos pontos não são todos iguais, devem-se considerar os respectivos pesos, de forma a considerar tais medidas de incerteza (Tavares, 2000). Assim, os centróides tornam-se centróides ponderados:

$$G_t = \sum_{i=1}^n w_i X_{i,t} / \sum_{i=1}^n w_i,$$

$$G_{t+1} = \sum_{i=1}^n w_i X_{i,t+1} / \sum_{i=1}^n w_i,$$

onde  $w_i$  é a medida de confiança associada às coordenadas do ponto  $i$ .

A determinação do melhor escalamento é alterada pela utilização das medidas de confiança:

$$s = \left( \sum_{i=1}^n w_i \|X'_{i,t+1}\|^2 / \sum_{i=1}^n w_i \|X'_{i,t}\|^2 \right)^{1/2}.$$

A única mudança no método para a determinação da rotação envolvida está no facto de os produtos nos somatórios serem agora ponderados, isto é:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n w_i x'_{i,t} x'_{i,t+1}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n w_i x'_{i,t} y'_{i,t+1}, \dots$$

### 3. METODOLOGIA BASE

Na metodologia base adoptada, para a determinação das correspondências entre dois objectos, é construída uma matriz que relaciona os dois conjuntos de pontos, (Sclaroff, 1995; Tavares, 2000, 2000a, 2000b, 2000c). Essa matriz é construída a partir da utilização do método dos elementos finitos e da análise modal.

Resumidamente, as vantagens da utilização do método dos elementos finitos são: (a) a equação do movimento para o sistema global é obtida pelo agrupamento das equações de cada elemento finito utilizado na modelação; e (b) a generalização de problemas 2D e 3D, construídos com vários materiais e com fronteiras irregulares, pode ser obtida com facilidade.

No presente contexto, a vantagem da utilização do método dos elementos finitos prende-se com a atribuição de um comportamento físico aos objectos em questão, através da adopção de um dado material virtual na modelação. As propriedades do material virtual, adoptado na construção do modelo de elementos finitos, regem o comportamento do objecto respectivo.

Podemos expor o sistema de equações

do equilíbrio dinâmico do modelo de elementos finitos agrupados:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\},$$

onde  $\{\dot{U}\}$  e  $\{\ddot{U}\}$  são a primeira e segunda derivadas de  $\{U\}$  em ordem ao tempo;  $[M]$ ,  $[K]$  e  $[C]$  as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, e  $\{R\}$  o vector de cargas; numa base definida pelos vectores próprios de  $[M]^{-1}[K]$ , resolvendo o seguinte sistema:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

onde,  $[\Phi]$  é a matriz dos vectores próprios ordenados por coluna e em ordem crescente das frequências que lhes estão associadas; e  $[\Omega]$  é a matriz diagonal dos valores próprios, também ordenados por ordem crescente. Na equação anteriormente apresentada, para um objecto 2D constituído por  $m$  nodos, tem-se:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 | \dots | \{\phi\}_{2m}] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix},$$

e para um objecto 3D constituído por  $m$  nodos:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 | \dots | \{\phi\}_{3m}] = \begin{bmatrix} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \\ \{w\}_1^T \\ \vdots \\ \{w\}_m^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{3m}^2 \end{bmatrix}.$$

O vector coluna  $\{\phi\}_i$  descreve o deslocamento modal para cada *nodo* do modelo devido ao modo de vibração  $i$ , enquanto os vectores  $\{u\}_i$  e  $\{v\}_i$  (e  $\{w\}_i$  para objectos 3D) são os vectores característica e, em conjunto, descrevem a localização do *nodo*  $i$  no espaço modal.

Os primeiros modos da matriz  $[\Phi]$  são os modos de corpo rígido (três em 2D e seis em 3D). Os restantes modos associam-se a movimentos não rígidos, sendo os primeiros deste tipo associados a deformações mais globais e os últimos (de elevada frequência) a deformações essencialmente locais, (Tavares, 2000).

Após a construção das matrizes  $[\Phi]_t$  e  $[\Phi]_{t+1}$ , para dois modelos de elementos finitos,  $t$  e  $t+1$ , de dois objectos a emparelhar, define-se a matriz de afinidade,  $[Z]$ , determinada a partir da distância Euclidiana entre os vectores característica dos dois objectos considerados, da seguinte forma para objectos 2D e 3D, respectivamente:

$$Z_{ij} = \|\{u\}_{t,i} - \{u\}_{t+1,j}\|^2 + \|\{v\}_{t,i} - \{v\}_{t+1,j}\|^2,$$

$$Z_{ij} = \|\{u\}_{t,i} - \{u\}_{t+1,j}\|^2 + \|\{v\}_{t,i} - \{v\}_{t+1,j}\|^2 + \|\{w\}_{t,i} - \{w\}_{t+1,j}\|^2.$$

Na metodologia previamente desenvolvida (Tavares, 2000, 2002), a determinação das correspondências, de cariz local, consiste em encontrar sequencialmente, na matriz de afinidade, o menor elemento em cada linha e emparelha-lo com a coluna associada, se este for também o menor elemento da mesma e se o nível de confiança pré-estabelecido for respeitado.

#### 4. PROBLEMA DE OPTIMIZAÇÃO

Os problemas de optimização são problemas de maximização ou minimização de funções de variáveis num determinado domínio, normalmente definido por um conjunto de restrições nas variáveis. O problema da determinação de correspondências pode ser escrito como um problema de afectação, que é um caso particular dos problemas de optimização. O problema de afectação clássico pressupõe a existência de  $n$  nodos no objecto  $t$ , para emparelhar com  $n$  nodos no objecto  $t+1$ , e o conhecimento do custo da afectação de cada nodo  $i$  em  $t$  com cada nodo  $j$  em  $t+1$ :  $C_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Este custo de afectação é equivalente ao valor do elemento da

matriz de afinidade, correspondente a  $(i, j)$ . Neste tipo de problemas, pretende-se determinar o modo de distribuição dos emparelhamento, de forma a que:

- Cada *nodo* em  $t$  seja emparelhado apenas com um *nodo* em  $t+1$ ;
- Cada *nodo* em  $t+1$  seja emparelhado apenas com um *nodo* em  $t$ ;
- Sejam minimizados os custos totais de afectação/emparelhamento.

Para a formulação de um problema desta natureza, consideremos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se nodo } i \text{ de } t \text{ for afecto ao nodo } j \text{ de } t+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Então, a formulação do problema de afectação clássico é a seguinte:

$$\text{minimizar } f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij},$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n$$

[O *nodo*  $i$  de  $t$  é afecto apenas um *nodo* de  $t+1$ ],

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ com } j = 1, 2, \dots, n$$

[O *nodo*  $j$  de  $t+1$  é afecto apenas a um *nodo* de  $t$ ],

$$\text{e } x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

Na metodologia proposta neste artigo, para a determinação de correspondências de forma global, foram utilizados três métodos de optimização (Bastos, 2003): o método *Húngaro*, que é o método mais simples e conhecido para a resolução de problemas de afectação; o método *Simplex*, (Löbel, 2000), para problemas de fluxo, que são problemas de optimização mais gerais do que os problemas de afectação; e o método *LAPm*, (Volgenant, 1996), que é um método específico para a resolução de problemas de afectação, criado com o intuito de tornar essa resolução computacionalmente mais eficiente.

Na metodologia implementada, após a obtenção da solução óptima do problema de optimização, prossegue-se à rejeição dos

emparelhamentos, que fazem parte dessa solução, mas não respeitam o nível de confiança pré-estabelecido. Esta restrição, tal como era considerada na solução previamente desenvolvida de cariz local, previne a correspondência entre *nodos* que tenham uma fraca afinidade entre si.

## 5. SOLUÇÃO PARA OS NODOS EM EXCESSO

Caso o número de *nodos* nos dois objectos a emparelhar não seja o mesmo, com a restrição habitual de emparelhamento do tipo “um com um”, existem necessariamente *nodos* em excesso que não serão emparelhados. A solução encontrada foi inicialmente acrescentar *nodos* fictícios ao modelo com o menor número de dados, solucionando-se assim o requisito das matrizes a otimizar terem necessariamente de ser quadradas. Após a fase de optimização, os *nodos* em excesso são correspondidos de forma adequada utilizando-se um critério de vizinhança. Desta forma são permitidas correspondências do tipo “um com vários”

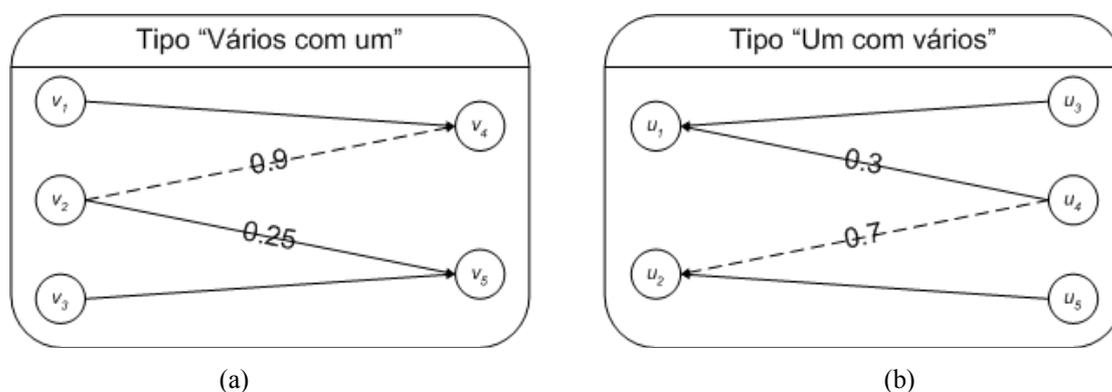


Figura 2 – Exemplificação dos procedimentos do algoritmo *ADCom*.

Na Figura 2(a), o número de *nodos* do primeiro objecto é superior ao número de *nodos* do segundo. Nessa figura os *nodos*  $v_1$  e  $v_3$  foram emparelhados, na fase de optimização, com os *nodos*  $v_4$  e  $v_5$ , respectivamente. Na mesma fase, o *nodo*  $v_2$  foi emparelhado com um *nodo* fictício. O algoritmo *ADCom* procura nos *nodos* entre  $v_4$  e  $v_5$ , o que apresenta a maior afinidade com o *nodo*  $v_2$ , emparelhando-os caso o nível de confiança pré-estabelecido seja respeitado. Para estes *nodos* tem-se um emparelhamento do tipo “vários com um”.

e vice-versa para os *nodos* em excesso.

Este emparelhamento, baseado no critério de vizinhança, pode ser descrito resumidamente do seguinte modo: Para cada um dos *nodos* não emparelhados, o algoritmo implementado enquadra-o entre os *nodos* vizinhos mais próximos já correspondidos. A partir das correspondências desses *nodos* vizinhos no outro objecto, determina-se a melhor correspondência, minimizando o custo, considerando que os *nodos* vizinhos devem permanecer vizinhos e não devem existir correspondências cruzadas. Tal como na fase de optimização, os emparelhamentos obtidos só serão considerados, se o nível de confiança pré-estabelecido for respeitado.

A Figura 2, esquematiza dois exemplos para facilitar a compreensão do algoritmo implementado com o objectivo de emparelhar *nodos* correspondidos com *nodos* fictícios. Este algoritmo, denominado por *ADCom*, na versão actual da implementação desenvolvida, só pode ser aplicado em objectos do tipo contornos, pois os critérios de vizinhança considerados só são aplicáveis a estes.

Na Figura 2(b), o número de *nodos* do primeiro objecto é inferior ao número de *nodos* do segundo. Neste caso, o procedimento é idêntico, sendo a análise efectuada do segundo objecto para o primeiro resultando para estes *nodos* um emparelhamento do tipo “um com vários”.

Note-se que, para todos os algoritmos implementados, não é considerada nenhuma informação sobre a sequência de imagens original nem qualquer relação entre os objectos a emparelhar.

## 6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta secção são apresentados alguns exemplos de resultados experimentais obtidos com a metodologia global, proposta neste artigo, utilizando na modelação de cada objecto em causa o elemento finito isoparamétrico de Sclaroff (Sclaroff, 1995; Tavares, 2000) e borracha como material virtual. Outros resultados podem ser consultados em (Bastos, 2003, 2003a)

O primeiro exemplo apresentado é composto por dois conjuntos de dados pontuais de contornos de uma “árvore”, com duas orientações distintas. Os dois objectos a emparelhar são apresentados na Figura 3. Alguns resultados numéricos, provenientes da determinação das correspondências, são apresentados no Quadro 1 e ilustrados na Figura 4.



Figura 3 – Dados pontuais do primeiro exemplo 2D – *tree1* (62 nodos) e *tree2* (62 nodos), respectivamente.

Quadro 1: Resultados do exemplo 2D – *tree1* e *tree2*.

Algoritmo	% Emp.	Custo	Tempo de	Figura
			execução [s]	
Sem Optimização	87%	0,016	0,03	4(a)
Método <i>Húngaro</i>	100%	0,0020	69,56	4(b), (c) e (d)
Método <i>Simplex</i>	100%	0,0020	0,04	4(b), (c) e (d)
Método <i>LAPm</i>	100%	0,0020	0,06	4(b), (c) e (d)

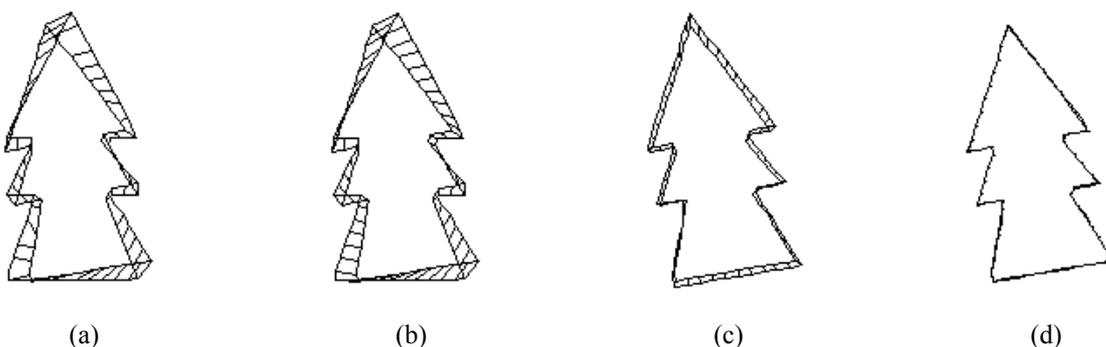


Figura 4 – Emparelhamentos obtidos entre os objectos *tree1* e *tree2*, utilizando o método (a) Sem Optimização; (b) Com Optimização (métodos *Húngaro*, *Simplex* e *LAPm*); (c) Com optimização e aplicação da transformação rígida estimada (sem o factor de escala); (d) Com optimização e aplicação da transformação rígida estimada, com o factor de escala considerado.

Através da análise dos resultados obtidos, é possível verificar que o custo total dos emparelhamentos é superior quando é utilizado um método de

optimização, no entanto com estes métodos é obtido o maior número de emparelhamentos possível. O tempo de execução da metodologia baseada nos

métodos de optimização é superior ao tempo de execução da metodologia base. Nesse aspecto, o método *Húngaro* pode ser considerado pouco eficiente, pois revelou-se o mais lento. Pela análise das figuras apresentadas, também é possível confirmar que o método utilizado para estimar a transformação rígida envolvida obtém bons resultados.

O segundo exemplo 2D é constituído por dois conjuntos de dados pontuais do contorno de um “avião”, com amostragens

e escalas diferentes (Figura 5). Nas figuras 6 (a), (b) e (c) são apresentados os resultados do emparelhamento, utilizando: a solução previamente existente de índole local; optimização; e o algoritmo *ADCom*. Na Figura 6 (c) está circundada uma das zonas em que são visíveis emparelhamentos do tipo “vários com um”, entre os dois objectos da Figura 5. No Quadro 2 são apresentados alguns resultados numéricos deste exemplo.



Figura 5 – Dados pontuais do segundo exemplo 2D – *airplaneA* (57 nodos) e *airplaneB* (43 nodos), respectivamente.

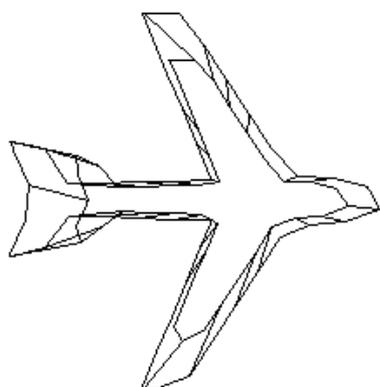


Figura 6 (a) – Exemplo do emparelhamento de dois objectos 2D, utilizando a solução anterior (local).

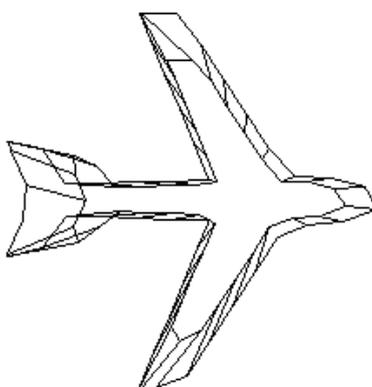


Figura 6 (b) – Exemplo do emparelhamento de dois objectos 2D, utilizando a solução proposta.

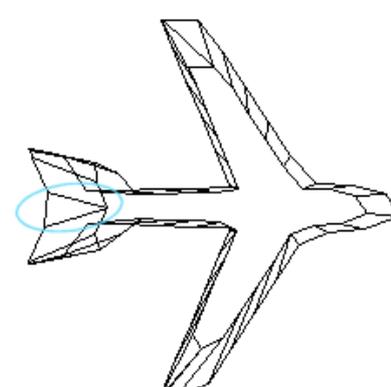


Figura 6 (c) – Exemplo da correspondência dos nodos em excesso (*ADCom*).

Quadro 2: Resultados do exemplo 2D – *airplaneA* e *airplaneB*.

Algoritmo	Nº Emp.	% Emp.	Custo×10 <sup>-3</sup>	Tempo de	Figura
				execução [s]	
Sem Optimização	31	72%	2,87	0,01	6(a)
Método <i>Húngaro</i>	43	100%	4,08	184,205	6(b)
Método <i>Simplex</i>	43	100%	4,08	0,04	6(b)
Método <i>LAPm</i>	43	100%	4,08	0,461	6(b)
Método <i>ADCom</i>	57	100%	5,5954	-	6(c)

O exemplo que se segue é constituído por dois objectos 3D, compostos por dados pontuais de uma semi-esfera, com diferentes escalas e posições (Figura 7). No Quadro 3 encontram-se os resultados da

determinação das correspondências, utilizando os algoritmos sem optimização (local), *Húngaro*, *Simplex* e *LAPm*. As ilustrações desses resultados encontram-se nas figuras 8 e 9.

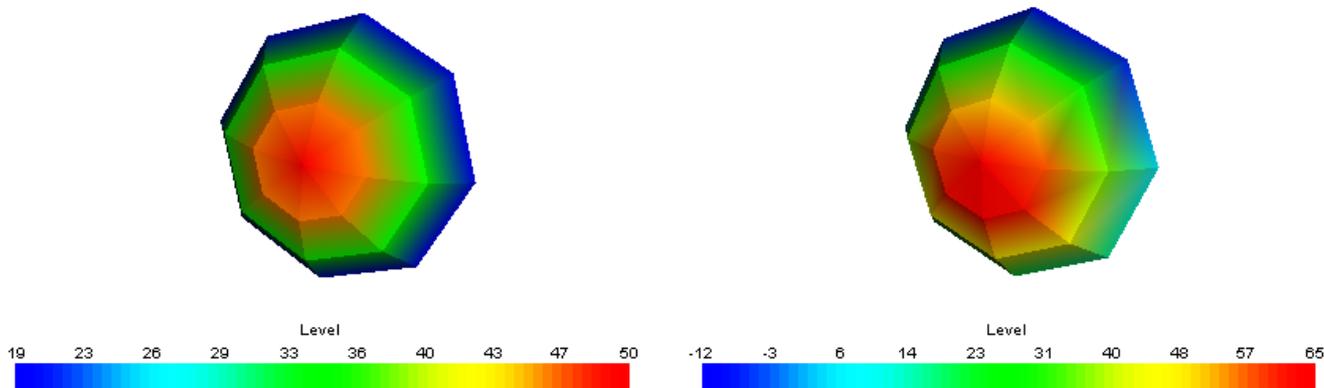


Figura 7 – Dados pontuais do primeiro exemplo 3D – *semiesfera1* (25 nodos) e *semiesfera2* (25 nodos), respectivamente.

Quadro 3: Resultados do primeiro exemplo 3D – *semiesfera1* e *semiesfera2*.

Algoritmo	% Emp.	Custo $\times 10^{-2}$	Tempo de execução [s]	Figura
Sem Optimização	60%	3,13938	0,000	8
Método <i>Húngaro</i>	100%	5,95533	3,555	9
Método <i>Simplex</i>	100%	5,95533	0,01	9
Método <i>LAPm</i>	100%	5,95533	0,05	9

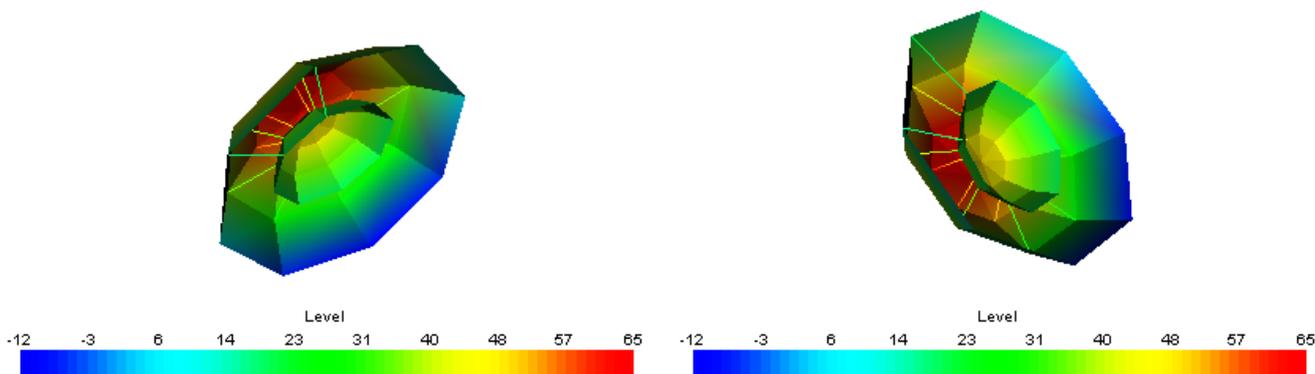


Figura 8 – Emparelhamentos entre os objectos *semiesfera1* e *semiesfera2*, utilizando o método “Sem Optimização” (duas vistas distintas).

Os resultados do Quadro 3, indicam que a metodologia baseada nos métodos de optimização é mais eficiente do que a metodologia de cariz local previamente existente, visto que consegue o número máximo possível de emparelhamentos (do tipo “um com um”) entre os dois objectos, independentemente do método de optimização utilizado. Como consequência

desse maior número de emparelhamentos, o custo total associado às correspondências determinadas, com a metodologia de cariz global, é superior, mas a percentagem de emparelhamentos atinge os 100%. Neste exemplo, o método “Sem Optimização” distingue-se pelo menor tempo de execução.

No último exemplo apresentado são

emparelhados dois objectos (Figura 10), extraídos de duas imagens obtidas num exame de pedobarografia dinâmica, (Tavares, 2000, 2000a). Alguns resultados numéricos, obtidos na realização deste ensaio, são apresentados no Quadro 4. Nas

figuras 11 e 12 são apresentadas as imagens resultantes do emparelhamento dos dois objectos referidos. O método *Húngaro* não foi aplicado a este exemplo, devido ao longo tempo de execução.

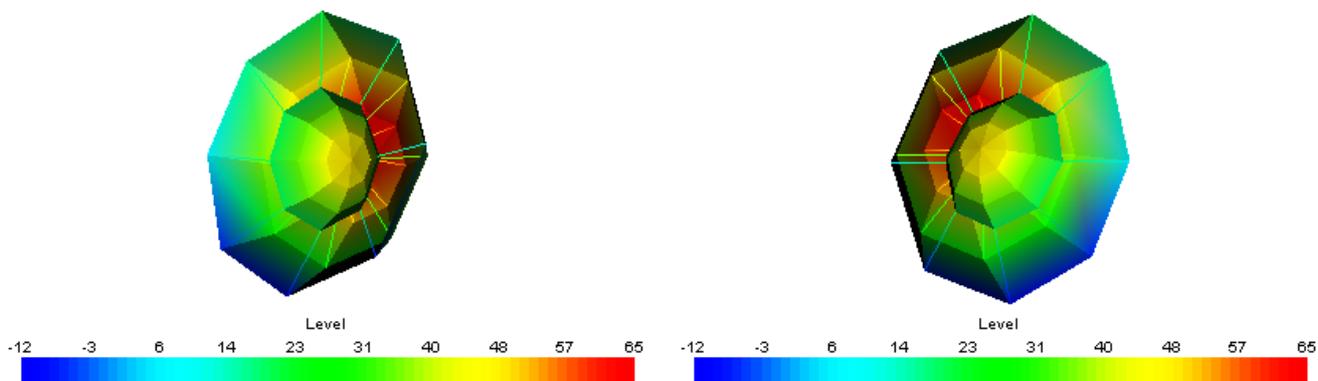


Figura 9 – Emparelhamentos entre os objectos *semiesfera1* e *semiesfera2*, utilizando um método “Com Optimização” (*Húngaro*, *Simplex* e *LAPm*) (duas vistas distintas).

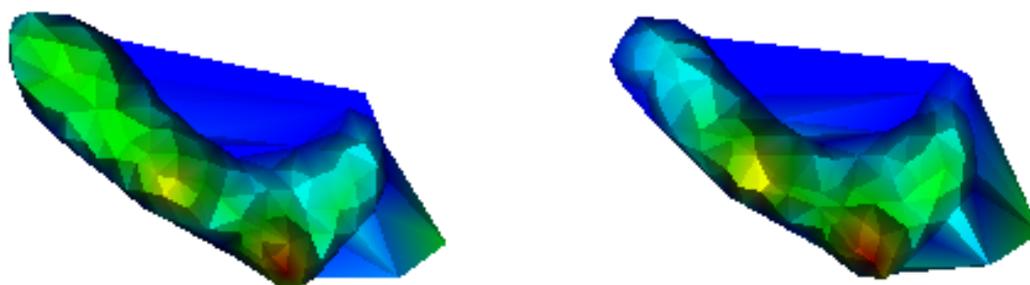


Figura 10 – Dados pontuais do segundo exemplo 3D – *pe1* (117 nodos) e *pe2* (112 nodos), respectivamente.

Quadro 4: Resultados do segundo exemplo 3D – *pe1* e *pe2*.

Algoritmo	% Emp.	Custo $\times 10^{-2}$	Tempo de	
			execução [s]	Figura
Sem Optimização	29%	5,38808	0,13	11
Método <i>Simplex</i>	100%	21,9715	0,141	12
Método <i>LAPm</i>	100%	21,9715	12,588	12

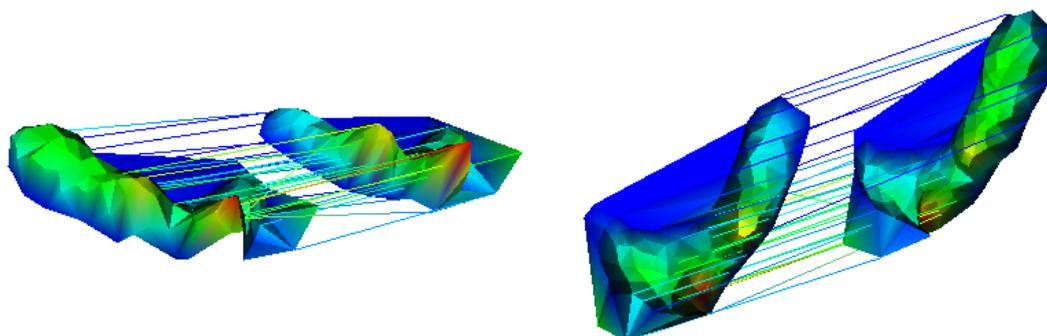


Figura 11 – Emparelhamentos entre os objectos *pe1* e *pe2*, utilizando o método “Sem Optimização” (vista de frente e vista de trás, respectivamente).

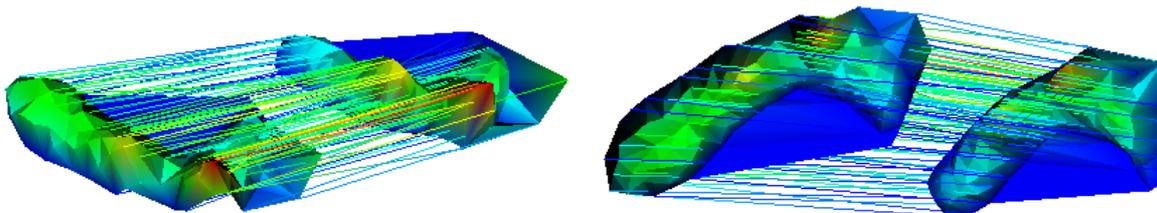


Figura 12 – Emparelhamentos entre os objectos *pe1* e *pe2*, utilizando um método “Com Optimização” (*Simplex* e *LAPm*) (vista de frente e vista de trás, respectivamente).

Os emparelhamentos encontrados não são completamente satisfatórios, em nenhum dos métodos utilizados (sem ou com optimização). No entanto, o método “Com Optimização” determina 100% correspondências, sendo a maior parte destas satisfórias, enquanto o método “Sem Optimização” só determina 29%.

## 7. CONCLUSÕES E PRESPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os vários ensaios experimentais realizados, alguns reportados neste artigo, permitem a apresentação de algumas observações e conclusões.

Relativamente à estimação da transformação rígida envolvida entre os objectos a emparelhar, pelos resultados experimentais obtidos<sup>2</sup>, pode-se concluir que o método adoptado e apresentado neste artigo determina soluções bastante aceitáveis. Para uma aplicação satisfória do referido método, não é necessário utilizar um número muito elevado de correspondências, pelo que se podem considerar apenas as correspondências obtidas com elevado grau de confiança.

A metodologia proposta neste artigo, para a determinação de correspondências entre dois objectos, baseada em técnicas de optimização, quando comparada com a metodologia base previamente existente (de cariz local), obteve sempre um número superior de emparelhamentos satisfatórios, nos resultados experimentais considerados. Também se verificou, que o número de emparelhamentos é independente do método de optimização considerado.

Em alguns ensaios experimentais

efectuados notou-se que, para se obter resultados de emparelhamento satisfatórios, a escolha dos parâmetros para a construção da matriz de afinidade teve que ser “mais cuidada”, quando foi utilizado o método de emparelhamento previamente existente (de índole local). Nesses mesmos exemplos, a aplicação do método de emparelhamento proposto neste artigo, baseado em técnicas de optimização, além de produzir bons resultados de emparelhamento, revelou-se menos sensível aos valores dos vários parâmetros considerados na metodologia global. Tal sugere que com o método de emparelhamento proposto é possível tornar a metodologia global, baseada no método dos elementos finitos e na análise modal, mais fácil de usar e adaptável a diferentes aplicações.

Em alguns dos exemplos considerados, o número de modos de vibração necessários para a obtenção de correspondências satisfórias utilizando o método de emparelhamento proposto, baseado em técnicas de optimização, foi inferior ao número de modos necessários com o método de emparelhamento previamente existente. Por exemplo, nas imagens das duas semi-esferas (primeiro exemplo 3D apresentado) foram apenas necessários 50% dos modos, para obter 100% dos emparelhamentos, utilizando o método de emparelhamento proposto. No entanto, para obter 96% dos emparelhamentos utilizando o método de emparelhamento local, foi necessário considerar 75% dos modos. Tal sugere que com o método de emparelhamento proposto o esforço computacional total exigido pela metodologia global é menor.

O algoritmo de emparelhamento que utiliza o método *Húngaro*, mostrou-se

<sup>2</sup> Outros resultados podem ser analisados em (Tavares, 2000, 2000b, 2000c).

pouco eficiente em termos do tempo de execução. Note-se que este método é o único que utiliza um algoritmo de optimização, que não guarda informação sobre emparelhamentos encontrados em iterações anteriores. Tal acarreta um custo computacional adicional. Já o algoritmo *Simplex* para problemas de fluxo mostrou-se o mais eficiente, nos vários exemplos experimentais efectuados. O algoritmo *LAPm* obteve um tempo de execução superior ao segundo (*Simplex*), mesmo sendo um algoritmo mais específico para o tipo de problemas em questão. Pensa-se que tal facto se deve ao intervalo em que se encontram os elementos da matriz de afinidade,  $[0; 2]$ , pois quando este algoritmo foi testado em (dell' Amico, 2000) revelou-se o mais eficiente quando considerado o intervalo  $[1; 100]$ .

Nos vários ensaios experimentais realizados, o algoritmo proposto para a determinação de correspondências dos *nodos* em excesso, obtém emparelhamentos satisfatórios, quando utilizado em objectos do tipo contorno. Tal permite-nos concluir que o referido algoritmo poderá constituir uma base interessante, para o desenvolvimento de novas soluções para a determinação de correspondências do tipo “um com vários” e vice-versa, e que a sua aplicabilidade deverá ser estendida a objectos mais complexos.

O emparelhamento do tipo “um com vários” ou vice-versa poderá ser apenas aplicado a parte de um objecto. Tal aplicação poderá ser interessante em zonas em que ocorra dilatação/contractão e/ou em zonas com amostragens diferentes.

Na optimização das correspondências deverão ser consideradas nos trabalhos futuros as restrições de vizinhança e ordem, para além do nível de confiança já considerado. Para tal sugere-se a utilização do nível de confiança de cada emparelhamento, para a escolha dos *nodos* que deverão “guiar” o decurso de tal processo.

O desenvolvimento de uma aplicação que determine as correspondências ao longo de sequências de imagens, é também uma tarefa a realizar. Nessa aplicação, deverão

ser incluídas restrições a considerar ao longo de toda a sequência de imagens em estudo; como por exemplo, ao longo da mesma a ordem dos *nodos* não deverá ser alterada em demasia. Também nesta aplicação deverá ser utilizada/integrada a informação que vai sendo obtida ao longo da sequência; a título de exemplo, se o ponto A do objecto  $t$  está emparelhado com o ponto B do objecto  $t+1$ , então no objecto  $t+2$ , o ponto a emparelhar com B, deverá estar na vizinhança desse.

## 8. REFERÊNCIAS

Bastos, L.F., Dissertação de Mestrado (submetida em Janeiro de 2003): *Optimização da Determinação das Correspondências entre Objectos Deformáveis no Espaço Modal*, Faculdades de Engenharia e Ciências, Universidade do Porto, 2003.

Bastos, L. F., Tavares, J., *Técnicas de Optimização na Determinação de Correspondências entre Objectos Deformáveis*, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, Abril de 2003a.

([http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/Luisa%20Bastos\\_VIIC\\_MAC.pdf](http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/Luisa%20Bastos_VIIC_MAC.pdf))

Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc. 1996.

Chapra, S. C., Canale, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, Mcgraw-Hill, 1988.

dell' Amico, M. and Tooth, P., *Algorithms and Codes for Dense Assignment Problems: The State Of The Art*, Discrete Applied Mathematics, N° 100, pp. 274-278, 2000.

Foley, van Dam, Feiner, Highes, *H.Computer Graphics*, Addison-Wesley, 1991.

Hall, E. L., *Fundamental Principles Of Robot Vision*, Spie Vol. 2056 Intelligent Robots and Computer Vision Xii, pp. 321/333, 1993.

Horn B. K. P., *Closed-Form Solution Of Absolute Orientation Using Unit Quaternions*, Journal of the Optical Society of America A, Vol. 4, 629/642, April 1987.

Löbel, A., *MFC - A Network Simplex Implementation*, 2000.  
(<http://www.zib.de/Optimization/Software/Mcf>)

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.

Sciaroff, S.E., *PhD Thesis: Modal Matching - A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals*, Massachusetts Institute of Technology, University of Massachusetts. 1995.

Tavares, J., *Algumas Ferramentas para Visão Tridimensional por Computador*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/relatorios/ferramentas%203d.zip>)

Tavares, J., *Dissertação de Mestrado: Obtenção de Estrutura Tridimensional a Partir de Movimento de Câmara*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995a.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/teses/tese%20msc.zip>)

Tavares, J., *Tese de Doutoramento: Análise de Movimento de Corpos Deformáveis Usando Visão Computacional*, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 2000.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/p>

[ublications/teses/tese%20phd.zip](http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/teses/tese%20phd.zip))

Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Matching Image Objects in Dynamic Pedobarography*, RecPad'2000 - 11th Portuguese Conference on Pattern Recognition, Porto, 2000a.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/artigo%20recpad2000.pdf>)

Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Determinação da Correspondência entre Objectos Utilizando Modelação Física*, 9º Encontro Português de Computação Gráfica, Marinha Grande, Portugal, Fevereiro de 2000b.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/artigo%209epcg.pdf>)

Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Determinação da Correspondência entre Modelos de Contorno e de Superfície, Utilizando Modelização por Elementos Finitos e Análise Modal, em Visão por Computador*, VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, Portugal, Abril de 2000c.  
(<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/artigo%20vicnmac.pdf>)

Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Apresentação de um Banco de Desenvolvimento e Ensaio para Objectos Deformáveis*, RESI – Revista Electrónica de Sistemas de Informação – ISSN: 1677 – 3071  
(<http://www.presidentekennedy.br/resi/>), Volume 01, Nº 01, 2002.  
([http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/banco\\_resi.pdf](http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/banco_resi.pdf))

Volgenant, A., *Linear and Semi-Assignment Problems: A Core Oriented Approach*, Computers and Operations Research, Vol. 23, Nº 10, 1996.