
Filas de Espera

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 1

Versão 1

©1998

José Fernando Oliveira – FEUP

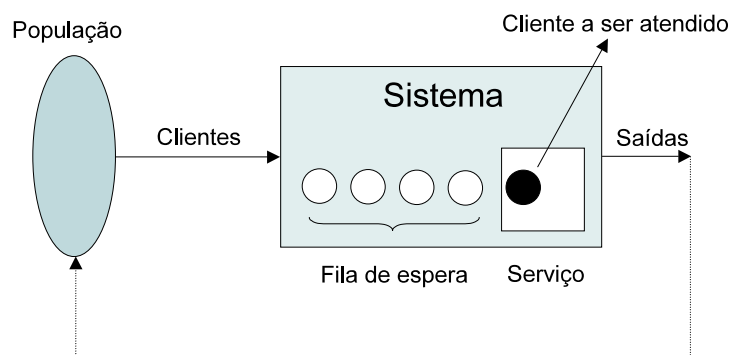
Introdução

Slide 2

- Fenómeno corrente no dia-a-dia
 - clientes – pessoas, veículos ou outras entidades físicas ou conceptuais
 - que necessitam de um
 - serviço, pelo qual podem ter que esperar numa fila física ou conceptual (a fila pode só existir conceptualmente, p.ex. senhas com número de atendimento).
- Trabalho pioneiro de A. K. Erlang (início do séc. XX), cientista dinamarquês, sobre chamadas telefónicas aguardando linha para serem encaminhadas.

Estrutura de um sistema de fila de espera

Slide 3



- **Fonte** ou **população**, que gera os clientes que vão chegar ao sistema.
- **Fila**, constituída pelos clientes à espera de ser atendidos (não inclui o(s) cliente(s) em atendimento).
- **Serviço** ou **atendimento**, que pode ser constituído por um ou mais postos de atendimento.

$$\text{Fila} + \text{Serviço} = \text{Sistema}$$

Número de clientes no sistema (em cada instante) = **estado do sistema**

Fonte

- Dimensão da população
 - infinita: quando a probabilidade de ocorrer uma nova chegada não é influenciada pelo número de clientes que já se encontram no sistema;
 - finita.

Slide 4

- Dimensão da chegada
 - clientes chegam um a um;
 - clientes chegam em grupo.
- Controlo das chegadas
 - chegadas controláveis (p.ex. inscrições em dias fixos);
 - chegadas incontroláveis (p.ex. urgência de um hospital).

Slide 5

- Distribuição das chegadas

O padrão das chegadas pode ser descrito pelo tempo entre duas chegadas consecutivas (**tempo entre chegadas**) ou pelo número de chegadas por unidade de tempo (**distribuição das chegadas**).

 - constante: intervalos de tempo entre chegadas sucessivas fixos (p.ex. filas de montagem industriais);
 - aleatório: os intervalos de tempo entre chegadas sucessivas não podem ser previstos com certeza $\Rightarrow$ distribuições de probabilidade.
- Taxa de chegada (λ)

Número médio de clientes que procuram o serviço por unidade de tempo.

 - independente do estado do sistema;
 - dependente do estado do sistema: λ_n , n – número de clientes no sistema.
- Atitude dos clientes
 - paciente: permanecem na fila até serem atendidos $\longrightarrow$ boa aproximação quando há poucas desistências;
 - impaciente: desistem de esperar ou simplesmente não se juntam à fila se esta for muito grande $\Rightarrow$ utilização de modelos de simulação.

Fila

Slide 6

- Número de filas
 - fila simples: uma única fila mesmo que o servidor tenha vários postos de atendimento;
 - fila múltipla: uma fila por posto de atendimento $\Rightarrow$ cada conjunto fila/posto de atendimento constitui um sistema separado de fila de espera. É usual repartir as chegadas igualmente pelas várias filas.
- Comprimento da fila
 - infinito: a capacidade máxima da fila é muito grande quando comparada com o número de elementos que habitualmente a constituem;
 - finito: a fila pode acolher apenas um número pequeno de clientes.
- Disciplina da fila
 - FIFO – “First In First Out”;
 - prioridades: p.ex. reservas, idade, emergência;
 - aleatória.

Serviço

Slide 7

- Configuração do serviço

Número de servidores em paralelo (postos de atendimento) e número de fases de atendimento:

 - um servidor, uma fase;
 - um servidor, múltiplas fases;
 - múltiplos servidores, uma fase;
 - múltiplos servidores, múltiplas fases;
 - redes de filas de espera.
- Dimensão do serviço
 - simples;
 - em grupo (p.ex. um elevador atende vários clientes em simultâneo).

Slide 8

- Distribuição do tempo de serviço:
 - constante;
 - aleatório: distribuição exponencial negativa, Erlang, outra.
- Taxa de serviço (μ)

Número médio de clientes que podem ser atendidos por cada servidor e por unidade de tempo. $\frac{1}{\mu}$ = duração média do serviço.

Número médio de clientes efectivamente atendidos $\leq \mu \rightarrow$ pode haver momentos de inactividade.

 - dependente do estado do sistema (μ_n , n – número de clientes no sistema), p.ex. serviço de reclamações que atendesse mais depressa as reclamações quando a fila é maior: maior produtividade ou degradação da qualidade do serviço?
 - independente do estado do sistema.

Modelização de sistemas de filas de espera – Objectivo

“Optimizar” o funcionamento das filas de espera, encontrando soluções equilibradas entre dois extremos:

Slide 9

Congestionamento – os clientes têm que esperar demasiado tempo na fila
 $\rightarrow$ taxa de ocupação dos servidores próxima dos 100%.

Só aceitável quando o custo do servidor é muito maior do que o custo de espera do cliente.

Rarefacção – os servidores permanecem inactivos durante uma percentagem de tempo elevada (situação por vezes desejável, p.ex. serviços de bombeiros).

Estabelecimento de *trade-offs* entre o custo do serviço e o “custo” do tempo perdido pelos clientes na fila de espera $\rightarrow$ crescimento acentuado para tempos de espera elevados.

Medidas de desempenho

- comprimento médio da fila (L_q)
- número médio de clientes no sistema (L)
- tempo médio de espera na fila (W_q)
- tempo médio de espera no sistema (W)
- taxa média de ocupação (e desocupação) do serviço
(percentagem de tempo durante o qual o serviço está ocupado)

Slide 10

Outras medidas (mais pormenorizadas) úteis:

- P_n = probabilidade de existirem n clientes no sistema
- $P(n \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} P_n$ = probabilidade de existirem no sistema k ou mais clientes
- $P(W_q = 0)$ = probabilidade de o tempo de espera na fila ser zero
- $P(W_q > t)$ = probabilidade de o tempo de espera na fila exceder t
- $P(W > t)$ = probabilidade de o tempo gasto no sistema exceder t

Nomenclatura

λ — taxa de chegada (número médio de clientes que chegam por unidade de tempo).

$\frac{1}{\lambda}$ — intervalo médio entre duas chegadas consecutivas.

λ_n — taxa de chegada dependente do estado, isto é, quando existem n clientes no sistema.

$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ — taxa média de entrada no sistema.

μ — taxa de serviço (número médio de clientes que cada servidor tem capacidade para atender por unidade de tempo).

$\frac{1}{\mu}$ — tempo médio de serviço.

μ_n — taxa de serviço dependente do estado, isto é, quando existem n clientes no sistema.

s — número de servidores.

ρ — parâmetro auxiliar, normalmente designado por taxa de ocupação.

Slide 11

Caracterização das distribuições das chegadas e do atendimento

1. Descrever a informação recolhida, sobre chegadas de clientes e seu atendimento, através de histogramas e parâmetros amostrais (média, variância,...).
2. Inferir dos parâmetros amostrais os parâmetros da população.
3. “Ajustar” uma distribuição teórica ao histograma experimental, i.e., escolher uma distribuição estatística que descreva “adequadamente” o fenómeno analisado.

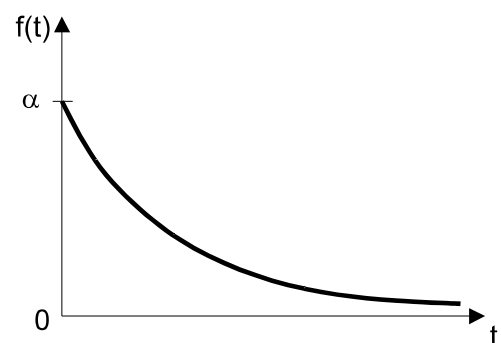
Slide 12

A maioria dos modelos analíticos de filas de espera supõe chegadas seguindo uma **distribuição de Poisson** e um tempo de atendimento caracterizado por uma **distribuição exponencial negativa** – distribuições que mais frequentemente caracterizam as filas de espera reais.

Distribuição exponencial negativa

Função densidade de probabilidade de T :

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



Slide 13

Distribuição acumulada:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

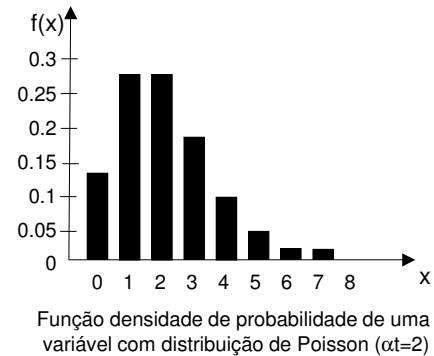
Média: $E(T) = \frac{1}{\alpha}$

Variância: $Var(T) = \frac{1}{\alpha^2}$

Distribuição de Poisson

Função distribuição de probabilidade de X :

$$f(x) = \frac{(\alpha t)^x e^{-\alpha t}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$



Slide 14

Parâmetro da distribuição: αt

α — número médio de acontecimentos por unidade de tempo;

t — comprimento do intervalo de tempo em análise;

x — número de acontecimentos durante o intervalo t .

Média: $E(X) = \alpha t$

Variância: $Var(X) = \alpha t$

Propriedades

- Se o tempo entre dois acontecimentos consecutivos segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro α , então o número de acontecimentos por unidade de tempo t segue uma distribuição de Poisson com parâmetro αt .
- A distribuição exponencial negativa não tem memória, i.e., a probabilidade de ocorrência de um acontecimento é independente do instante de tempo em que ocorreu o acontecimento imediatamente anterior.

Slide 15

Slide 16

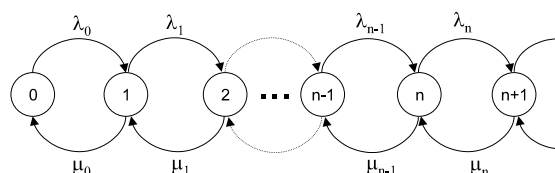
- Sejam $T_1, T_2, \dots, T_n$ variáveis aleatórias com distribuição exponencial negativa e parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. A variável $u = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, que representa o tempo até que o primeiro de entre n acontecimentos ocorra, segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Esta propriedade permite modelizar sistemas com k servidores idênticos (mesma distribuição) com parâmetro μ , operando em paralelo, como um único servidor com parâmetro $k\mu$ (o próximo cliente é atendido quando o primeiro servidor ficar livre).
- Desagregação — se a chegada de clientes seguir uma distribuição de Poisson com parâmetro λ , e esses clientes puderem ser divididos em diferentes tipos de tal forma que a probabilidade p_i de o cliente ser de um dado tipo i seja fixa e $\sum_i p_i = 1$, então a chegada de cada um dos clientes segue ainda uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_i = p_i \lambda$.

Processos de vida e morte

Processos estocásticos sem memória que, aplicados às filas de espera, associam **vida** a uma chegada à fila e **morte** à saída de um cliente depois de atendido, segundo as seguintes hipóteses:

Slide 17

- Dado que no instante t o sistema se encontra no estado n , o tempo que separa t :
 - do próximo nascimento (chegada) segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro λ_n ;
 - da próxima morte (serviço terminado) segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro μ_n .
- Nunca podem ocorrer simultaneamente mais do que um nascimento ou uma morte (transição apenas para estados adjacentes).



A modelização de filas de espera por processos de vida e morte supõe **estados estacionários ou de equilíbrio**, estando excluídos deste modelo estados transitórios, tais como:

- a fila tende para infinito porque a taxa de chegada excede a capacidade de atendimento;
- a taxa de chegada varia ao longo do tempo;
- inícios de funcionamento com números anormais de clientes.

Slide 18

Relações fundamentais das filas de espera

Relacionam o número de elementos no sistema (L), ou na fila (L_q), com os correspondentes tempos de espera W e W_q , para filas de espera em equilíbrio.

Admitindo taxas de chegada λ e de serviço μ constantes e independentes do estado do sistema:

$$L = \lambda W \quad (6)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (7)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (9)$$

As equações (6) e (7) também são válidas se a taxa de chegada depender do estado do sistema, devendo nesse caso λ ser substituído por $\bar{\lambda}$.

A equação (8) é válida qualquer que seja o número de servidores, desde que o tempo médio de atendimento ($\frac{1}{\mu}$) seja igual para todos.

Slide 19

Classificação das filas de espera – $X/Y/Z/W$ ^a

X, Y — Distribuições do intervalo de tempo entre chegadas e do tempo de serviço, respectivamente:

- M — distribuição exponencial negativa;
- G — distribuição não especificada (qualquer distribuição);
- D — chegadas ou atendimentos determinísticos.

Slide 20 Z — número de servidores em paralelo.

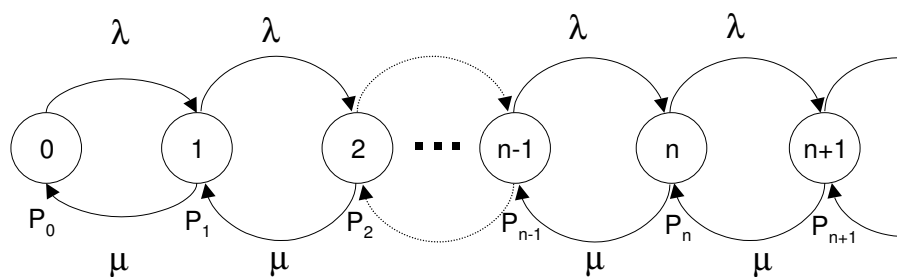
W — outras características do sistema, tais como comprimento da fila ilimitado ou população finita:

- em branco ou ∞ — modelo-base sem qualquer restrição adicional;
- K — comprimento da fila limitado, não podendo o número de elementos no sistema exceder K ;
- N — população finita;

Exemplo: $M/M/1$ — fila de espera com chegadas Poissonianas, atendimentos exponenciais negativos e um servidor $\rightarrow$ processo de vida e morte.

^aBaseada na classificação proposta por Kendal

Modelo básico com um servidor – $M/M/1$



P_n - Probabilidade de o sistema estar no estado n

Equilíbrio do sistema

$\Uparrow$

capacidade de atendimento $>$ número médio de clientes que procuram o serviço

$\Downarrow$

taxa de ocupação < 1 .

Slide 21

Determinação das equações de equilíbrio para filas $M/M/1$

P_i = fracção de tempo em que o sistema se encontra no estado i .

Estado 0

nº de entradas no estado 0 por unidade de tempo = μP_1

Slide 22 (passagem do estado 1 para o estado 0 por saída do sistema de um cliente atendido)

nº de saídas do estado 0 por unidade de tempo = λP_0

(passagem do estado 0 para o estado 1 por chegada de um cliente ao sistema)

$$\text{Equilíbrio} \quad \Leftarrow \quad \mu P_1 = \lambda P_0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \quad (10)$$

Estado 1

nº de entradas = $\lambda P_0 + \mu P_2$

(do estado 0 por chegada de um cliente ao sistema ou do estado 2 por saída do sistema de um cliente atendido)

nº de saídas = $\lambda P_1 + \mu P_1$

Slide 23 (para o estado 2 por chegada de um cliente ao cliente ou para o estado 0 por saída do sistema de um cliente atendido)

$$\text{Equilíbrio} \quad \Leftarrow \quad \lambda P_0 + \mu P_2 = \lambda P_1 + \mu P_1 \quad \Leftrightarrow \quad P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \frac{1}{\mu} \overbrace{(\mu P_1 - \lambda P_0)}^{=0 \text{ pela equação (10)}}$$

Usando novamente a equação (10) obtém-se:

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 \quad (11)$$

Estado 2

Equação de equilíbrio:

$$\lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu)P_2 \quad \Leftrightarrow \quad P_3 = \frac{\lambda}{\mu}P_2 + \frac{1}{\mu} \overbrace{(\mu P_2 - \lambda P_1)}^{=0 \text{ pela equação (11)}} \quad \Leftrightarrow$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

Slide 24

Estado n

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \Leftrightarrow \quad P_n = \rho^n P_0, \quad \text{com } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \text{ taxa de ocupação} \quad (12)$$

P_0 é obtido impondo a condição $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{P_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$$

Este último somatório representa uma progressão geométrica de razão ρ , que será convergente se $\rho < 1$, sendo nesse caso a soma dada por $\frac{1}{1-\rho}$:

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{1-\rho} \quad \Leftrightarrow \quad P_0 = 1 - \rho$$

Slide 25

Usando esta última expressão e substituindo na equação (12):

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \quad (13)$$

Sabendo que o número médio de clientes no sistema é, por definição, a média de todos os estados possíveis do sistema ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrência ($L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$), usando estes resultados e as relações fundamentais das filas de espera, chega-se ao seguinte conjunto de características para o modelo $M/M/1$.

Características do modelo $M/M/1$

Slide 26

Chegada: Poissoniana	Tempo atendimento: exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u. tempo	Taxa: μ clientes / u. tempo e servidor
População = ∞	Nº servidores: 1
Fila máxima = ∞	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, com $\rho < 1$
	Taxa de ocupação = ρ
	Taxa de desocupação = $1 - \rho$
$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
$P_0 = 1 - \rho$	$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, t \geq 0$
$P_n = \rho^n P_0$	$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, t \geq 0$
$P(n > k) = \rho^{k+1}$	$P(W_q = 0) = P_0$

Exemplo – Armazém

Um armazém recebe encomendas que são descarregadas usando empilhadores. Um levantamento de dados realizado no local permitiu concluir que:

- os camiões chegam segundo um processo de Poisson a uma taxa de 16 camiões/dia;
- os tempos de descarga são variáveis (seguindo uma distribuição exponencial negativa) com médias que dependem do número de empilhadores utilizados:

Slide 27

Nº de empilhadores	Tempo médio de descarga (minutos)
1	50
2	20
3	15
4	12
5	10

- a operação de empilhadores custa 1 500\$00/hora;
- a imobilização dos camiões acarreta um encargo de 3 000\$00/hora.

Pretende-se dimensionar a equipa de descarga de modo a minimizar os custos globais do sistema, que funciona 8 horas por dia.

Resolução – Armazém

Slide 28

- Embora usando vários empilhadores temos apenas 1 servidor uma vez que todos os empilhadores descarregam o mesmo camião, traduzindo-se um aumento do nº de empilhadores num aumento da taxa de serviço.
- A taxa de serviço (inverso do tempo médio de descarga) só é maior do que a taxa de chegada ($\lambda = 2$) para 2 ou mais empilhadores (tempo médio de descarga ≤ 20 minutos). Só para este caso se pode usar o modelo $M/M/1$ anteriormente deduzido. Para 1 empilhador a fila crescerá ilimitadamente, nunca atingindo o estado de equilíbrio.
- Para se saber qual o número de empilhadores que origina menor custo global terá que se resolver o problema para 2,3,4,5,... empilhadores, calcular o custo associado e escolher o melhor.

Utilizando o quadro construído para o modelo $M/M/1$, e os dados deste problema, obtém-se o seguinte quadro:

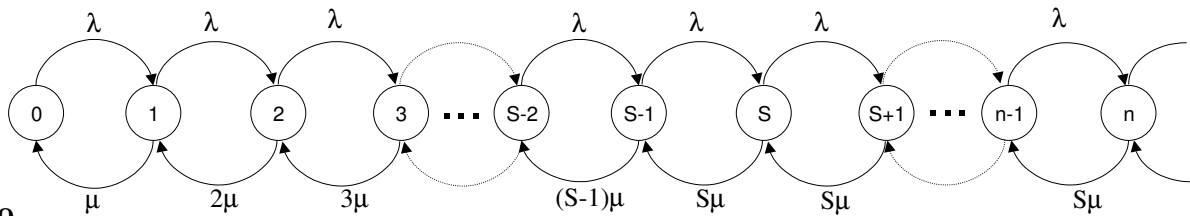
Slide 29

Nº de empilhadores	Tempo médio descarga	Taxa de serviço (camiões/h)	Taxa de ocupação	Tempo médio no sistema por camião (horas)	Tempo total dos camiões por hora (horas)	Custo de imobilização dos camiões (c./h)	Custo dos empilhadores (c./h)	Custos totais (c./h)
n	$1/\mu$	μ	λ/μ	W	λW	$3\lambda W$	$1.5n$	
1	50	1.20	1.67					
2	20	3.00	0.67	1.00	2.00	6.00	3.00	9.00
3	15	4.00	0.50	0.50	1.00	3.00	4.50	7.50
4	12	5.00	0.40	0.33	0.67	2.00	6.00	8.00
5	10	6.00	0.33	0.25	0.50	1.50	7.50	9.00

Custo mínimo — 3 empilhadores.

Para a solução óptima a taxa de ocupação é de apenas 0.50 e cada camião permanece no sistema durante 1/2 hora.

Modelo básico com S servidores – $M/M/S$



Slide 30

- Caso mais geral de uma fila de espera única, baseada num processo de vida e morte, em que existem S servidores em paralelo.
- A taxa de chegada λ é independente do estado do sistema.
- A taxa de serviço μ é igual para todos os servidores, sendo a taxa de atendimento (conjunto dos S servidores) dada por $S\mu$.
- A taxa de ocupação é igual a $\frac{\lambda}{S\mu}$, que terá que ser < 1 para que o sistema esteja em equilíbrio.

-
- A taxa de entrada em cada estado é sempre igual a λ .
 - A taxa de saída varia com o estado:
 - para estados onde os servidores não estejam todos ocupados, a distribuição exponencial negativa do intervalo de tempo entre saídas de clientes atendidos tem parâmetro $k\mu$ (com $k < S$), sendo k o número de servidores ocupados nesse estado — quanto mais servidores estiverem ocupados mais provável é sair um cliente atendido do sistema.
 - para os estados correspondentes a todos os servidores ocupados (estados com S ou mais clientes no sistema), o tempo entre saídas de clientes atendidos tem parâmetro $S\mu$ e não depende do número de clientes no sistema.

Slide 31

Características do modelo $M/M/S$

Chegada: Poissoniana

Taxa: λ clientes / u. tempo

População $= \infty$

Fila máxima $= \infty$

Tempo atendimento: exponencial negativo

Taxa: μ clientes / u. tempo e servidor

Nº servidores: S

$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, com $\rho < 1$

Taxa de ocupação $= \rho$

Taxa de desocupação $= 1 - \rho$

Slide 32

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S)P_n = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \frac{1}{1-\rho}}$$

$$P(W > t)_{t \geq 0} = e^{-\mu t} \left(1 + \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!(1-\rho)} \frac{1 - e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)}}{S-1-\frac{\lambda}{\mu}} \right)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{se } 0 \leq n \leq S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S!S^{n-S}} P_0, & \text{se } n \geq S \end{cases}$$

$$P(W_q > t)_{t \geq 0} = [1 - P(W_q = 0)]e^{-S\mu(1-\rho)t}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

Exemplo – Estação de correios

Uma moderna estação de correios pretende dimensionar e reorganizar o seu atendimento ao público, pretendendo, no entanto, manter o mesmo esquema de atendimento em que todos os funcionários atendem todo o tipo de clientes, pedidos de informação, reclamações, aquisição de selos, vales postais, etc.

Slide 33 Para isso recolheu informação sobre o número de chegadas de clientes, bem como sobre os tempos de atendimento tendo concluído que as chegadas seguiam bastante aproximadamente uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1.56$ chegadas por minuto, enquanto os tempos de serviço seguiam uma distribuição negativa com média igual a 66.24 segundos, a que corresponde uma taxa de atendimento $\mu = 1/66.24 \times 60 = 0.906$ atendimentos por minuto.

O custo horário de cada funcionário é de 1 500\$00. Quanto aos clientes arbitra-se um custo horário independente do tempo de espera e igual ao dos funcionários dos correios.

Resolução – Estação de correios

Comparando as taxas de chegada e de atendimento conclui-se de imediato que $\lambda > \mu$ pelo que será necessário um número de servidores superior a 1.

Fazendo cálculos para 2, 3 e 4 servidores, a partir das expressões do quadro relativo ao modelo $M/M/S$, obtém-se a seguinte tabela:

Nº servidores	ρ	P_0	W_q
$S = 2$	0.86	0.075	3.17 minutos
$S = 3$	0.57	0.162	0.28 minutos
$S = 4$	0.43	0.175	0.05 minutos

Slide 34

Note-se que nas filas $M/M/S$ P_0 não representa a taxa de desocupação mas apenas a probabilidade de todos os servidores estarem desocupados. No entanto, quando a taxa de ocupação (ρ) diminui, P_0 aumenta e, inversamente, W_q diminui.

Uma vez que os clientes terão sempre que ser servidos e o tempo de serviço é constante (não depende do número de servidores), o custo depende do tempo gasto na fila de espera W_q .

Número de clientes chegados num período de 8 horas:

$$\lambda \times 8 \times 60 = 1.56 \times 8 \times 60 = 749 \text{ clientes}$$

Tempo perdido na fila de espera por dia:

$$S = 2 \rightarrow 3.17 \times 749 = 2374 \text{ min} = 39.57 \text{ horas}$$

$$S = 3 \rightarrow 0.28 \times 749 = 210 \text{ min} = 3.50 \text{ horas}$$

$$S = 4 \rightarrow 0.05 \times 749 = 37 \text{ min} = 0.62 \text{ horas}$$

Slide 35

Custos por dia:

(custo total = custo de espera dos utentes + custo de serviço dos empregados)

$$S = 2 \rightarrow 39.57 \times 1500\$ + 2 \times 8 \times 1500\$ = 59355\$ + 24000\$ = 83355\$$$

$$S = 3 \rightarrow 3.50 \times 1500\$ + 3 \times 8 \times 1500\$ = 5250\$ + 36000\$ = 41250\$$$

$$S = 4 \rightarrow 0.62 \times 1500\$ + 4 \times 8 \times 1500\$ = 930\$ + 48000\$ = 48930\$$$

Opção que minimiza os custos globais: 3 servidores.

Informação adicional, potencialmente útil neste processo de tomada de decisão, são os:

Tempos de actividade/inactividade dos empregados:

$$\text{Actividade total} = 749 \times \frac{1}{0.906} = 826\text{min} = 13.78\text{h/dia}$$

Slide 36

Inactividade:

$$S = 2 \rightarrow 2 \times 8 - 13.78 = 2.22\text{h} \quad (\text{taxa de inactividade} = 14\%)$$

$$S = 3 \rightarrow 3 \times 8 - 13.78 = 10.22\text{h} \quad (\text{taxa de inactividade} = 43\%)$$

$$S = 4 \rightarrow 4 \times 8 - 13.78 = 18.22\text{h} \quad (\text{taxa de inactividade} = 57\%)$$

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/S$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de servidores (S)			
	2	3	4	5
0.15	0.8605	0.8607	0.8607	0.8607
0.20	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187
0.25	0.7778	0.7788	0.7788	0.7788
0.30	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408
0.35	0.7021	0.7046	0.7047	0.7047
0.40	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703
0.45	0.6327	0.6373	0.6376	0.6376
0.50	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065
0.55	0.5686	0.5763	0.5769	0.5769
0.60	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488
0.65	0.5094	0.5209	0.5219	0.5220
0.70	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966
0.75	0.4545	0.4706	0.4722	0.4724
0.80	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493
0.85	0.4035	0.4248	0.4271	0.4274
0.90	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065
0.95	0.3559	0.3831	0.3863	0.3867

Slide 37

Slide 38

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de servidores (S)			
	2	3	4	5
1.00	0.3333	0.3636	0.3673	0.3678
1.20	0.2500	0.2941	0.3002	0.3011
1.40	0.1765	0.2360	0.2449	0.2463
1.60	0.1111	0.1872	0.1993	0.2014
1.80	0.0526	0.1460	0.1616	0.1646
2.00		0.1111	0.1304	0.1343
2.20		0.0815	0.1046	0.1094
2.40		0.0562	0.0831	0.0889
2.60		0.0345	0.0651	0.0721
2.80		0.0160	0.0521	0.0581
3.00			0.0377	0.0466
3.20			0.0273	0.0372
3.40			0.0186	0.0293
3.60			0.0113	0.0228
3.80			0.0051	0.0174
4.00				0.0130
4.20				0.0093
4.40				0.0063
4.60				0.0038
4.80				0.0017

Exemplo – Serviço de Veterinária da Cooperativa Agrícola de Belos Ares

Slide 39

Edmundo Terra é um dos críticos do funcionamento do serviço de veterinária da Cooperativa Agrícola de Belos Ares – afirma que sempre que chama um veterinário ele nunca vem no mesmo dia. Actualmente há dois veterinários, cada um atendendo em média 5 chamadas por dia – o serviço pode ser considerado M/M/2. Quanto aos pedidos de apoio a animais doentes verifica-se que chegam aleatoriamente, seguindo um processo de Poisson, à razão de 9 por dia. Sensível às críticas dos membros da Cooperativa, a direcção decidiu discutir o caso, admitindo mesmo contratar um novo veterinário.

Avalie a situação, contribuindo com informação que possa ser útil para uma tomada de decisão sobre a referida contratação.

Exemplo – Serviço de fotocópias

A secção de fotocópias duma empresa, aberta 40 horas por semana, dispõe de 2 fotocopadoras arrendadas pelo valor total de 12.0 contos cada por semana. Os utilizadores chegam à razão de 33/hora e o tempo médio de serviço é de 3 minutos. Suponha verificadas as condições indicadas no estudo das filas de espera.

Slide 40

1. Determine:
 - o n^o médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopadora;
 - o tempo médio duma pessoa na fila;
 - o tempo médio duma pessoa no sistema.
2. O custo horário médio, para a empresa, do pessoal que recorre ao serviço de fotocópias é de 1.8 contos/hora, incluindo overheads. Será conveniente aumentar ao número de fotocopadoras arrendadas? E para que número?

Exemplo – Manutenção

O supervisor operacional duma empresa de máquinas eléctricas reparou que o serviço de manutenção corrente de equipamento é normalmente atrasado, devido à espera na secção de ferramentas. Como qualquer atraso na produção obriga a uma alteração das ordens de fabrico ou mesmo a trabalho em horas extraordinárias, o supervisor requereu um estudo sobre a viabilidade de acrescentar mais funcionários à secção em questão, para melhorar a resposta às necessidades do serviço de manutenção. O assunto foi estudado, concluindo-se que o tempo médio entre-chegadas é de 80 segundos e que o tempo médio de atendimento, por parte dum funcionário, é de 60 segundos. O custo total dum funcionário na secção de ferramentas é de \$8.50 por hora, enquanto que o custo relativo à espera (máquina parada) é de \$15.00 por hora. Considera-se o dia de 8 horas. A tabela seguinte, parcialmente completa, informa sobre o efeito na fila de espera de acrescentar mais funcionários (fila tipo M/M/s, $s = 2, 3$), à secção, incluindo a análise dos custos diários totais envolvidos nas várias opções. Complete a tabela. Na perspectiva dos custos totais tabelados, qual é a melhor opção ?

Slide 41

Slide 42

	Nº de funcionários		
	1	2	3
Nº médio equipamentos no sistema (L)	3.00		
Tempo médio no sistema, em min. (W)	4.00		
Nº médio na fila de espera (L_q)	2.25		
Tempo médio na fila de espera, em min. (W_q)	3.00		
Porcentagem de tempo de desocupação	0.25		
Custo (\$)/dia dos funcionários	68.00		
Custo (\$)/dia de esperas	360.00		
Custo total diário	428.00		

Fila de espera com comprimento limitado – $M/M/1/K$ e $M/M/S/K$

Fila de espera com comprimento limitado — caso em que, por limitações diversas, o número máximo de elementos no sistema (atendimento + fila de espera) é K .

↓

Slide 43

Taxa de chegada (λ_n) depende do estado (n) do sistema:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$$

~~Taxa de chegada~~ $\longrightarrow$ Taxa média de entrada no sistema $\bar{\lambda}$ (média ponderada das taxas λ e zero pelas suas probabilidades de ocorrência):

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda \times P_n = \lambda \times \sum_{n=0}^{K-1} P_n = \lambda(1 - P_K)$$

Note-se que a probabilidade de o sistema estar em estados $n \geq K+1$ é nula (não se aceita ninguém acima de K).

Consequências

- As relações fundamentais entre L_q , L , W_q e W mantêm-se verdadeiras, substituindo λ por $\bar{\lambda}$.
- $\frac{\bar{\lambda}}{\mu}$ representa a taxa de ocupação.
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ representa a taxa de pressão.

Slide 44

- O sistema pode estar em equilíbrio para valores de ρ superiores a 1. No entanto, nesse caso, haverá um número potencialmente elevado de utentes do sistema que chegam e não são servidos.
- P_k representa a probabilidade de desistência por falta de capacidade do sistema para atender clientes que chegam quando o sistema está cheio.
- Para $S > 1$ servidores a taxa de saída do sistema continua a depender do estado do sistema.

Características do modelo $M/M/1/K$

Chegada: Poissoniana	Tempo atendimento: exponencial negativo
Taxa: λ clientes / u.tempo	Taxa: μ clientes / u.tempo e servidor
$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$	Nº servidores: 1
$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
População $= \infty$	Taxa de ocupação $= \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$
Nº máximo de elementos no sistema $= K$	Taxa de desocupação $= 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$
Fila máxima $K - 1$	
$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$
$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$
$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$ (Taxa de desocupação)	
$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0, & \text{se } n = 1, \dots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$	$P(W_q = 0) = P_0$

Slide 45

Características do modelo $M/M/S/K$

Chegada: Poissoniana

Taxa: λ clientes / u.tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$$

População = ∞

Nº máximo de elementos no sistema = K

Fila máxima $K - S$

Tempo atendimento: exponencial negativo

Taxa: μ clientes / u.tempo e servidor

Nº servidores: S

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

Slide 46

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=S}^{\infty} (n-S)P_n = \\ &= \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} \times [1 - \rho^{K-S} - (K-S)\rho^{K-S}(1-\rho)] \\ L &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \end{aligned}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \sum_{n=S}^K \rho^{n-S}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & \text{se } n = 1, \dots, S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S!S^{n-S}} P_0, & \text{se } n = S, \dots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

Exemplo – Porto de mar

Um porto que recebe navios graneleiros tem uma única estação de descarga (móvel) que permite descarregar, em média, 5 navios por dia. O porto tem um cais que permite a acostagem de apenas 2 navios, pelo que, quando o cais está ocupado, navios adicionais que pretendam acostar são desviados para outro porto, acarretando um custo de 20000 contos por navio desviado. A imobilização de navios no porto tem um custo de 12000 contos por dia e por navio.

Slide 47

As chegadas dos navios podem ser consideradas Poissionianas, com uma taxa de 3 navios por dia, sendo os tempos de descarga exponenciais negativos.

Pretende-se avaliar a viabilidade económica de ampliar o cais de modo a poder receber 3 navios, ampliação essa a que corresponderia um encargo adicional de 1000 contos por dia.

Resolução – Porto de mar

A ampliação do cais justifica-se se a redução de custos (imobilização + desvio) de navios for maior que 1000 contos/dia.

- Custo de imobilização (CI): $CI = 12000W\bar{\lambda} = 12000L$ contos/dia
- Custo de desvio (CD): $CD = 20000(3 - \bar{\lambda})$ contos/dia, em que $3 - \bar{\lambda}$ representa o número de navios desviados por dia.

Slide 48

Tomando então:

$$\lambda = 3 \text{ navios/dia} \quad \mu = 5 \text{ navios/dia} \quad S = 1 \quad \rho = \frac{3}{5} = 0.6$$

e recorrendo à tabela com as características do modelo anteriormente apresentada podemos calcular os custos associados a $K = 2$ e a $K = 3$.

Custo com $K = 2$

$$P_0 = 0.510$$

$$P_1 = 0.306$$

$$P_2 = 0.184$$

$$1 - P_2 = 0.816$$

(Probabilidade de o navio
não ser desviado)

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_2) = 2.448$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = 0.49$$

$$L = \frac{0.6}{1-0.6} - \frac{3 \times 0.6^3}{1-0.6^3} = 0.673 \text{ navios}$$

$$L_q = 0.673 - 0.49 = 0.183 \text{ navios}$$

Slide 49

$$\begin{aligned} CI + CD &= 12000 \times 0.673 + 20000 \times (3 - 2.448) \\ &= 8076 + 11040 = 19116 \text{ contos/dia} \end{aligned}$$

Custo com $K = 3$

$$P_0 = 0.460$$

$$P_1 = 0.276$$

$$P_2 = 0.165$$

$$P_3 = 0.099$$

$$1 - P_3 = 0.901$$

(Probabilidade de o navio
não ser desviado)

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_3) = 3 \times 0.901 = 2.703$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = 0.54$$

$$L = \frac{0.6}{1-0.6} - \frac{4 \times 0.6^4}{1-0.6^4} = 0.904 \text{ navios}$$

$$L_q = 0.363 \text{ navios}$$

Slide 50

$$CI + CD = 12000 \times 0.904 + 20000(3 - 2.703) = 10848 + 5940 = 16788 \text{ contos/dia}$$

A redução de custos (entre as duas situações) é de
 $19166 - 16788 = 2378$ contos/dia > 1000 contos/dia.

Justifica-se a ampliação.

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/1/K$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,15	0,8529	0,8504	0,8501	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
0,2	0,8065	0,8013	0,8003	0,8001	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
0,25	0,7619	0,7529	0,7507	0,7502	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
0,3	0,7194	0,7057	0,7017	0,7005	0,7002	0,7	0,7	0,7	0,7
0,35	0,6791	0,6599	0,6534	0,6512	0,6504	0,6501	0,6501	0,65	0,65
0,4	0,641	0,6158	0,6062	0,6025	0,601	0,6004	0,6002	0,6001	0,6
0,45	0,6051	0,5735	0,5603	0,5546	0,5521	0,5509	0,5504	0,5502	0,5501
0,5	0,5714	0,5333	0,5161	0,5079	0,5039	0,502	0,501	0,5005	0,5002
0,55	0,5398	0,4953	0,4738	0,4628	0,457	0,4538	0,4521	0,4511	0,4506
0,6	0,5102	0,4596	0,4337	0,4196	0,4115	0,4068	0,4041	0,4024	0,4015
0,65	0,4825	0,4261	0,3959	0,3785	0,368	0,3615	0,3574	0,3548	0,3531
0,7	0,4566	0,3948	0,3606	0,34	0,3269	0,3184	0,3126	0,3087	0,3061
0,75	0,4324	0,3657	0,3278	0,3041	0,2885	0,2778	0,2703	0,2649	0,261
0,8	0,4098	0,3388	0,2975	0,2711	0,2531	0,2403	0,231	0,2241	0,2188
0,85	0,3887	0,3138	0,2696	0,2408	0,2208	0,2062	0,1952	0,1868	0,1801
0,9	0,369	0,2908	0,2442	0,2134	0,1917	0,1756	0,1632	0,1535	0,1457
0,95	0,3506	0,2696	0,221	0,1887	0,1657	0,1486	0,1352	0,1246	0,116

Slide 51

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/2/K$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)							
	3	4	5	6	7	8	9	10
0,15	0,8599	0,8597	0,8597	0,8597	0,8597	0,8597	0,8597	0,8597
0,2	0,817	0,8165	0,8164	0,8163	0,8163	0,8163	0,8163	0,8163
0,25	0,7758	0,7746	0,7743	0,7742	0,7742	0,7742	0,7742	0,7742
0,3	0,7361	0,7339	0,7333	0,7331	0,733	0,733	0,733	0,733
0,35	0,698	0,6944	0,6931	0,6926	0,6925	0,6924	0,6924	0,6924
0,4	0,6614	0,6558	0,6536	0,6528	0,6524	0,6523	0,6522	0,6522
0,45	0,6262	0,6183	0,6148	0,6132	0,6125	0,6122	0,6121	0,6119
0,5	0,5926	0,5818	0,5766	0,574	0,5727	0,5721	0,5717	0,5714
0,55	0,5604	0,5464	0,539	0,535	0,5328	0,5316	0,531	0,5303
0,6	0,5297	0,5121	0,5021	0,4963	0,4929	0,4908	0,4896	0,4882
0,65	0,5004	0,479	0,466	0,458	0,4529	0,4496	0,4476	0,4449
0,7	0,4725	0,4471	0,4309	0,4203	0,4131	0,4083	0,4049	0,4003
0,75	0,446	0,4166	0,397	0,3834	0,3739	0,367	0,362	0,3548
0,8	0,4209	0,3875	0,3643	0,3477	0,3355	0,3263	0,3193	0,3087
0,85	0,3971	0,3598	0,3332	0,3135	0,2985	0,2868	0,2776	0,2632
0,9	0,3746	0,3336	0,3037	0,281	0,2633	0,2492	0,2377	0,2195
0,95	0,3534	0,3089	0,2759	0,2505	0,2304	0,214	0,2005	0,179

Slide 52

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3333	0,2857	0,25	0,2222	0,2	0,1818	0,1667	0,1429
1,2	0,2643	0,2074	0,1649	0,1323	0,107	0,087	0,071	0,0493
1,4	0,2104	0,1499	0,1068	0,0762	0,0544	0,0388	0,0277	0,0154
1,6	0,1687	0,1086	0,0692	0,0438	0,0276	0,0173	0,0109	0,0049
1,8	0,1363	0,0795	0,0454	0,0256	0,0144	0,008	0,0045	0,0017

Slide 53

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/3/K$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)						
	4	5	6	7	8	9	10
0,15	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607
0,2	0,8186	0,8186	0,8186	0,8186	0,8186	0,8186	0,8186
0,25	0,7785	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784
0,3	0,7403	0,7401	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74
0,35	0,7038	0,7033	0,7032	0,7031	0,7031	0,7031	0,7031
0,4	0,6689	0,6682	0,6679	0,6677	0,6677	0,6677	0,6677
0,45	0,6356	0,6344	0,6338	0,6336	0,6335	0,6334	0,6334
0,5	0,6038	0,6019	0,6009	0,6005	0,6002	0,6001	0,6001
0,55	0,5733	0,5706	0,5691	0,5683	0,5678	0,5676	0,5674
0,6	0,5442	0,5404	0,5381	0,5368	0,536	0,5355	0,5352
0,65	0,5163	0,5112	0,508	0,5059	0,5045	0,5036	0,5031
0,7	0,4897	0,483	0,4785	0,4754	0,4732	0,4717	0,4707
0,75	0,4642	0,4558	0,4497	0,4453	0,442	0,4396	0,4378
0,8	0,4398	0,4295	0,4216	0,4155	0,4107	0,407	0,404
0,85	0,4166	0,4041	0,3941	0,386	0,3793	0,3739	0,3693
0,9	0,3943	0,3796	0,3673	0,3568	0,3479	0,3403	0,3337
0,95	0,3731	0,356	0,3411	0,3281	0,3166	0,3064	0,2973

Slide 54

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)						
	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3529	0,3333	0,3158	0,3	0,2857	0,2727	0,2609
1,2	0,2814	0,252	0,2239	0,1975	0,173	0,1506	0,1303
1,4	0,2233	0,1861	0,1509	0,1192	0,0922	0,07	0,0523
1,6	0,1768	0,1351	0,0981	0,0682	0,0458	0,03	0,0194
1,8	0,14	0,0972	0,0627	0,0382	0,0225	0,0129	0,0073
2	0,1111	0,0698	0,04	0,0216	0,0112	0,0057	0,0029
2,2	0,0885	0,0503	0,0258	0,0124	0,0058	0,0027	0,0012
2,4	0,0709	0,0365	0,0169	0,0074	0,0031	0,0013	0,0006
2,6	0,0571	0,0268	0,0113	0,0045	0,0018	0,0007	0,0003
2,8	0,0462	0,0199	0,0077	0,0028	0,001	0,0004	0,0001

Slide 55

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/4/K$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)					
	5	6	7	8	9	10
0,15	0,8607	0,8607	1	0,8607	0,8607	0,8607
0,2	0,8187	0,8187	1	0,8187	0,8187	0,8187
0,25	0,7788	0,7788	1	0,7788	0,7788	0,7788
0,3	0,7408	0,7408	1	0,7408	0,7408	0,7408
0,35	0,7046	0,7046	1	0,7045	0,7045	0,7045
0,4	0,6702	0,6701	1	0,67	0,67	0,67
0,45	0,6374	0,6372	1	0,6372	0,6371	0,6371
0,5	0,6062	0,6059	1	0,6057	0,6057	0,6057
0,55	0,5764	0,576	1	0,5757	0,5756	0,5756
0,6	0,5481	0,5475	1	0,5469	0,5468	0,5467
0,65	0,521	0,5202	1	0,5193	0,519	0,5189
0,7	0,4953	0,4941	0	0,4926	0,4922	0,4919
0,75	0,4707	0,469	0	0,4669	0,4662	0,4657
0,8	0,4472	0,445	0	0,4419	0,4409	0,44
0,85	0,4248	0,422	0	0,4177	0,416	0,4146
0,9	0,4035	0,3999	0	0,3939	0,3915	0,3892
0,95	0,3831	0,3787	0	0,3707	0,3671	0,3638

Slide 56

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)					
	5	6	7	8	9	10
1	0,3636	0,3582	0	0,3478	0,3429	0,338
1,2	0,2943	0,2839	0	0,2597	0,2459	0,2313
1,4	0,2369	0,2205	0	0,1789	0,155	0,1306
1,6	0,1897	0,1675	0	0,1126	0,0852	0,0613
1,8	0,1511	0,1245	0	0,0659	0,0427	0,0261
2	0,12	0,0909	0	0,037	0,0207	0,011
2,2	0,0951	0,0656	0	0,0206	0,0101	0,0048
2,4	0,0753	0,0471	0	0,0116	0,0051	0,0022
2,6	0,0597	0,0337	0	0,0067	0,0027	0,001
2,8	0,0474	0,0243	0	0,0039	0,0014	0,0005
3	0,0377	0,0176	0	0,0024	0,0008	0,0003
3,2	0,0302	0,0128	0	0,0015	0,0005	0,0001
3,4	0,0243	0,0095	0	0,0009	0,0003	0,0001
3,6	0,0196	0,0071	0	0,0006	0,0002	0
3,8	0,0159	0,0053	0	0,0004	0,0001	0

Slide 57

Tabela prática para o cálculo de P_0 em filas $M/M/5/K$

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)				
	6	7	8	9	10
0,15	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607	0,8607
0,2	0,8187	0,8187	0,8187	0,8187	0,8187
0,25	0,7788	0,7788	0,7788	0,7788	0,7788
0,3	0,7408	0,7408	0,7408	0,7408	0,7408
0,35	0,7047	0,7047	0,7047	0,7047	0,7047
0,4	0,6703	0,6703	0,6703	0,6703	0,6703
0,45	0,6376	0,6376	0,6376	0,6376	0,6376
0,5	0,6065	0,6065	0,6065	0,6064	0,6064
0,55	0,5769	0,5768	0,5768	0,5768	0,5768
0,6	0,5487	0,5486	0,5486	0,5486	0,5486
0,65	0,5219	0,5218	0,5217	0,5217	0,5216
0,7	0,4964	0,4962	0,4961	0,496	0,496
0,75	0,4721	0,4718	0,4717	0,4715	0,4714
0,8	0,449	0,4486	0,4483	0,4481	0,4479
0,85	0,4269	0,4265	0,4261	0,4257	0,4254
0,9	0,406	0,4053	0,4047	0,4042	0,4037
0,95	0,386	0,3851	0,3843	0,3835	0,3828

Slide 58

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)				
	6	7	8	9	10
1	0,367	0,3659	0,3647	0,3636	0,3625
1,2	0,2994	0,2967	0,2936	0,29	0,2857
1,4	0,2436	0,2385	0,2317	0,2228	0,2115
1,6	0,1975	0,1892	0,1772	0,1608	0,1402
1,8	0,1595	0,1475	0,1299	0,1069	0,0811
2	0,1282	0,1128	0,0909	0,0655	0,042
2,2	0,1026	0,0846	0,061	0,0378	0,0206
2,4	0,0818	0,0623	0,0397	0,0212	0,01
2,6	0,065	0,0453	0,0253	0,0118	0,0049
2,8	0,0516	0,0326	0,0161	0,0067	0,0025
3	0,0409	0,0234	0,0103	0,0038	0,0013
3,2	0,0324	0,0168	0,0066	0,0023	0,0007
3,4	0,0257	0,0121	0,0043	0,0014	0,0004
3,6	0,0204	0,0087	0,0029	0,0008	0,0002
3,8	0,0162	0,0064	0,0019	0,0005	0,0001

Slide 59

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de elementos no sistema (K)				
	6	7	8	9	10
4	0,013	0,0047	0,0013	0,0003	0,0001
4,2	0,0104	0,0035	0,0009	0,0002	0,0001
4,4	0,0084	0,0026	0,0006	0,0001	0
4,6	0,0068	0,002	0,0005	0,0001	0
4,8	0,0055	0,0015	0,0003	0,0001	0

Slide 60

Bibliografia

- Hillier, Frederick S. e Lieberman, Gerald (1995). *Introduction to Operations Research*, Mc Graw-Hill.
- Tavares, L. V., Oliveira, R. C., Themido, I. H., Correia, F. N. (1997). *Investigação Operacional*. Mc Graw-Hill.

Slide 61