U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 2, 2016

Jaime E. Villate

Porto, fevereiro de 2017

Conteúdo

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 2.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Primeiro semestre do segundo ano.

Ano académico 2016–2017, primeiro semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Espain de Oliveira e Jaime E. Villate.

Número de alunos 216.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

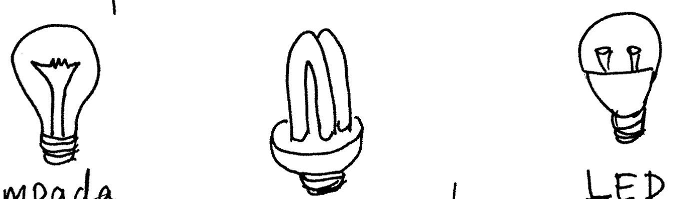
Aula 1. 21-9-2016

FÍSICA II. 2016/2017

Página Web: http://def.fe.up.pt/eic0014

1º teste : 4ª, 16/11/2016
2º teste : 4ª, 7/12/2016

PROGRAMA. Eletricidade, magnetismo e circuitos
A tecnologia baseada em circuitos elétricos está a mudar rapidamente



lâmpada incandescente — fluorescente — LED

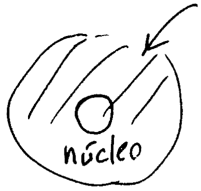
Memorias de computador:

aneis ferromagnéticos — disco ferromagnético — memoria flash

"Eletricidade" deriva-se da palavra "elektron", que em grego é âmbar, a primeira substância conhecida que produz forças elétricas sobre outros objetos.
Essas forças elétricas são as mesmas que mantém uma folha plástica colada a uma caneca

folha aderente

E são as mesmas forças que mantêm os átomos com a estrutura que têm: eletrões à volta de um núcleo. Os núcleos produzem forças atrativas, elétricas, sobre os eletrões.



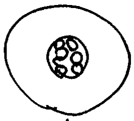
Átomo de H (carga nula)

um protão (p) e um eletrão

Ião H^+ (carga positiva)

um protão sem eletrão

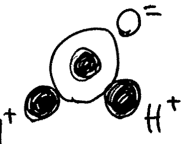
Ião de $O^=$



8 protões + 10 eletrões
(+ 8 neutrões, sem força elétrica)

produz forças atrativas nos iões positivos H^+.

Molécula de água (H_2O)



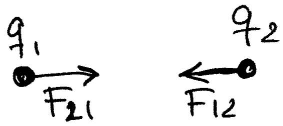
Friccionando um material, conseguem-se fazer passar eletrões de um material para outro, ficando um deles com excesso de eletrões (carga negativa) e o outro com falta de eletrões (carga positiva).

Carga elétrica. Um sistema com igual número de eletrões e de protões não tem carga elétrica. Se tiver mais protões, diz-se que tem carga q positiva e se tiver mais eletrões, tem carga q negativa.

FORÇA ELÉTRICA ENTRE DUAS CARGAS PONTUAIS

Os iões podem ser considerados <u>cargas pontuais</u> (concentradas num ponto). A força entre cargas do mesmo sinal é repulsiva e entre cargas de sinais opostos é atrativa

q_1 e q_2 ambas + ou ambas −



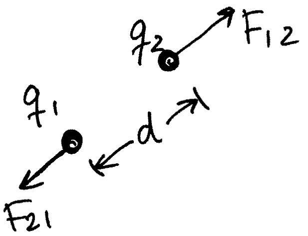
q_1 e q_2 com sinais diferentes

Carga elementar = e = valor absoluto da carga de um eletrão

No S.I. de unidades, q mede-se em coulombs (C) e:

$$\boxed{e = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$

LEI DE COULOMB

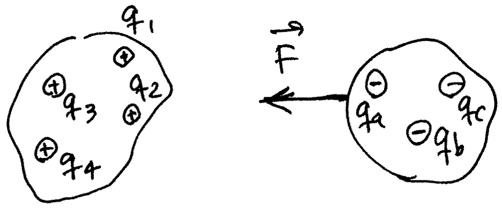


$$\boxed{F_{21} = F_{12} = k\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{d^2}}$$

q_1 = carga da partícula 1
q_2 = carga da partícula 2
d = distância entre as partículas

$$\boxed{k = 9 \times 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}} = \text{constante de Coulomb.}$$

Válida apenas para cargas pontuais. Em objetos mais complicados, há que somar vetorialmente as forças entre todas as partículas:



$$\vec{F} = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{1b} + \vec{F}_{1c} + \vec{F}_{2a} + \vec{F}_{2b} + \vec{F}_{2c} + \vec{F}_{3a} + \vec{F}_{3b} + \vec{F}_{3c}$$

Quantização da carga.

$$q_{\text{eletrão}} = -1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

$$q_{\text{protão}} = +1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

(exatamente a mesma grandeza)

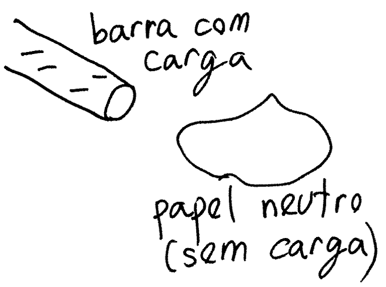
Qualquer outro objeto,

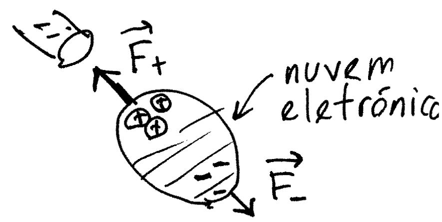
$$q_{\text{objeto}} = n\,e$$

n = inteiro, positivo, negativo ou zero

e = carga elementar

FORÇA SOBRE OBJETOS NEUTROS





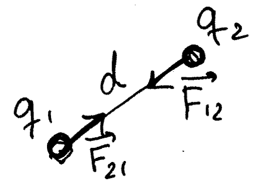
Cada molécula no papel polariza-se, ou seja, as cargas negativas da nuvem eletrónica afastam-se, ficando a uma distância d_- maior que a distância d_+ dos núcleos. Como o objeto é neutro, $|q_+| = |q_-|$ mas as diferentes distâncias fazem com que $F_+ > F_-$ e:

$\boxed{\text{A força de um objeto com carga, de qualquer sinal, sobre objetos neutros, é sempre atrativa}}$

Aula 2. 23-9-2016

CAMPO ELÉTRICO

Em vez de se pensar na força elétrica como interação à distância entre duas cargas, interpreta-se como a interação entre uma das cargas com o "campo" produzido pela outra



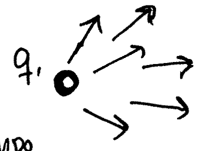
($q_1 > 0$, $q_2 < 0$)

$$F_{12} = k\frac{|q_1||q_2|}{d^2}$$

(Interpretação de força à distância)

interp. do campo

ⓐ

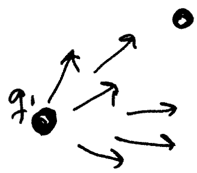


q_1 produz um campo de forças à sua volta com valor (vetorial)

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{k\,q_1}{d^2}\,\hat{e}}$$

← versor radial desde q_1 para fora.

ⓑ



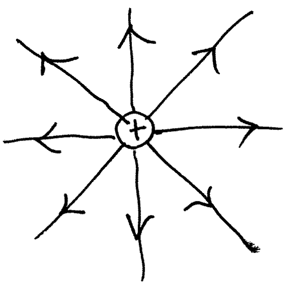
q_2 sente uma força igual à sua carga, vezes o campo → $\vec{E}_1$, na posição onde ela é colocada:

$$\vec{F}_{12} = q_2\vec{E}_1$$

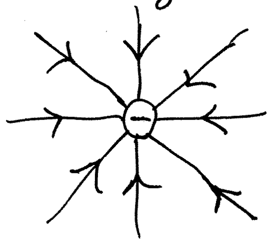
(neste caso, como $q_2 < 0$, $\vec{F}_{12}$ tem sentido oposto a $\vec{E}_1$)

LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO

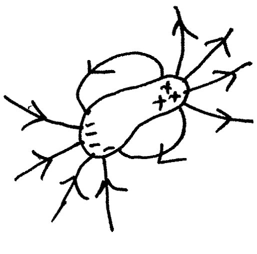
carga pontual positiva

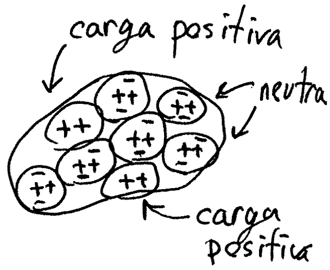


carga pontual negativa

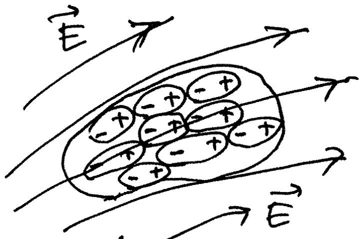


sistema de muitas cargas



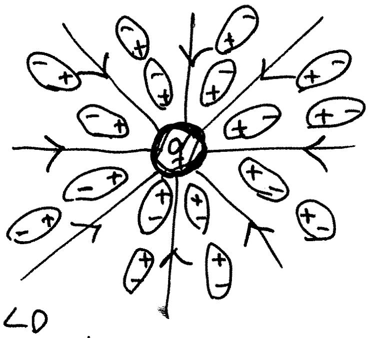


ISOLADORES (ou "dielétricos")
Cada molécula tem a sua própria nuvem eletrónica. Apenas é possível diminuir ou aumentar a nuvem eletrónica dos átomos próximos da superfície. Dentro de um campo elétrico, todas as moléculas são polarizadas.



A **constante dielétrica**, $K > 1$, depende da facilidade com que as moléculas são polarizadas. K é um número, sem unidades (não confundir com a constante de Coulomb, k).

CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PONTUAL DENTRO DE UM DIELÉTRICO



$q < 0$
neste exemplo

cria-se uma camada de cargas de sinal oposto a q, na superfície do dielétrico à volta da carga q, que faz diminuir o campo:

$$\vec{E} = \frac{k\,q}{K d^2}\,\hat{e}$$

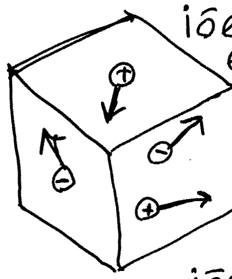
como tal, a força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2, dentro de um isolador, com constante K, tem módulo:
$$F_{12} = \frac{k}{K}\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{d^2}$$

exemplos de isoladores: ar seco ($K \approx 1$), papel ($K \approx 3{,}5$), vidro ($K \approx 6$)

CONDUTORES

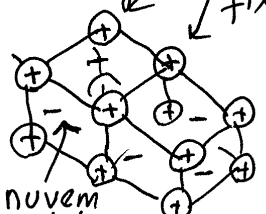
Têm uma nuvem de **cargas de condução**, que podem deslocar-se livremente dentro do material. Quando se carrega o material, com carga positiva ou negativa entram ou saem cargas de condução.

Exemplos. ① Plasmas (gases ionizados) soluções líquidas e soluções sólidas.

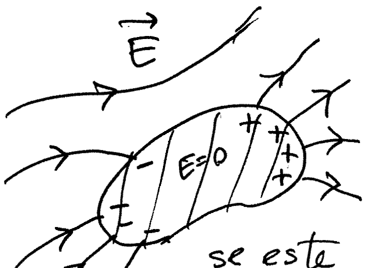


As cargas de condução são iões positivos e negativos

② Metais. Os átomos estão localizados uniformemente numa rede geométrica que se repete (cristal). Alguns átomos libertam eletrões que criam uma nuvem de eletrões livres de se deslocarem pelo metal. As cargas de condução são todas negativas



Quando se coloca um condutor dentro de um campo elétrico, as cargas de condução distribuem-se na superfície, anulando o campo no interior do condutor. Os átomos no interior não são polarizados.



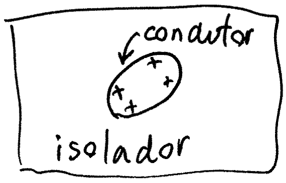
se este condutor é um metal, a nuvem eletrónica deslocou-se para a esquerda (sentido oposto a $\vec{E}$)

A própria Terra é uma esfera condutora gigante. O corpo humano é também condutor por conter muitos iões.

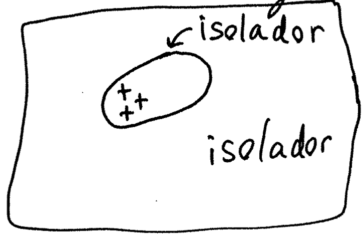
ELETRIZAÇÃO

1. Por fricção

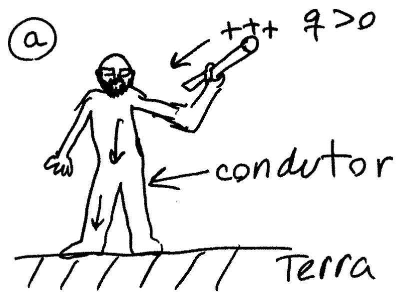
condutor isolado:



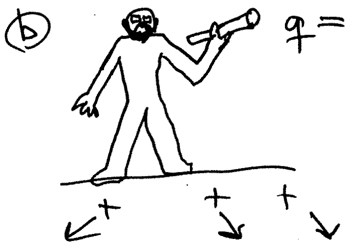
isolador carregado:



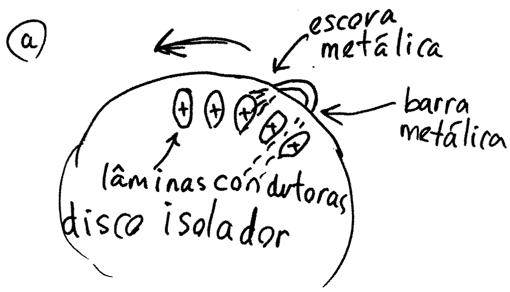
Se o objeto não estiver isolado, as cargas saem dele através do condutor, como no caso de um objeto "ligado à terra".



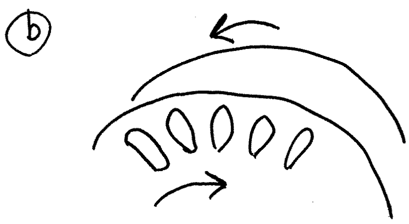
As cargas passam para a Terra e deslocam-se até ficarem muito afastadas entre si.



2. Por indução. Como no **gerador de Wimshurst**

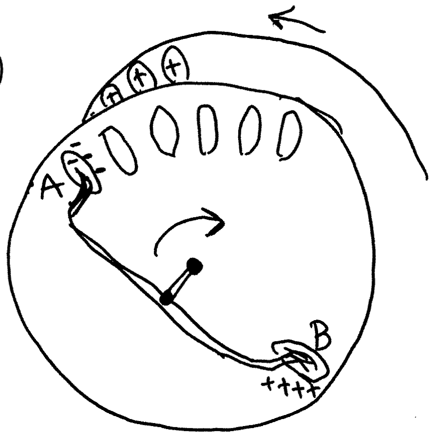


O disco roda, produzindo algumas cargas, por fricção com uma escova metálica;



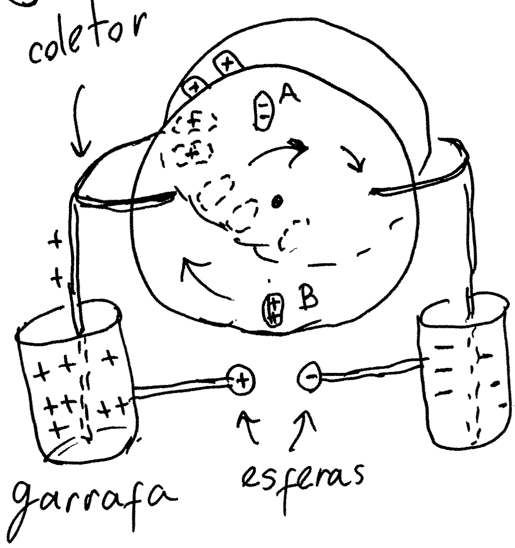
frente ao primeiro disco há outro disco idêntico que roda no sentido oposto

(c)



As lâminas A e B que estão indicadas na figura estão em contacto com uma barra metálica com duas escovas metálicas.
As cargas + do primeiro disco separam as cargas de A, B e a barra, ficando A com carga negativa e B com positiva

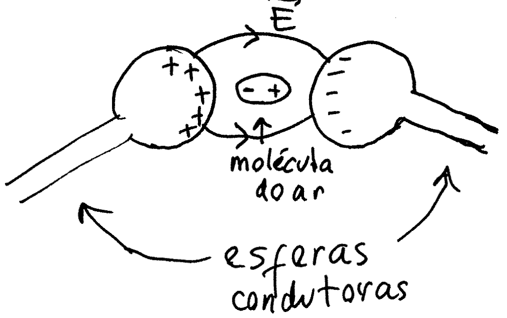
(d)



A rotação do disco faz com que A e B percam o contacto com a barra, ficando com cargas de sinais opostos (mesmo valor absoluto).
As cargas do primeiro disco passam perto de um condutor em forma de U, próximo dos dois discos, chamado coletor. As cargas positivas das lâminas do disco saltam pelo coletor para uma garrafa porque nessa garrafa metálica têm mais espaço para se afastarem. Existe outra garrafa que acava por acumular carga negativa. Quando as cargas nas garrafas é muito elevada, o campo $\vec{E}$ elevado entre as esferas "rompe" as moleculas do ar, produzindo uma faísca que descarrega as garrafas

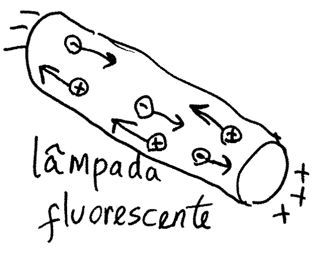
Aula 3. 28-9-2016

Gerador de Wimshurst



Quando a carga nas esferas aumenta, o campo elétrico $\vec{E}$ aumenta, até um ponto em que as moléculas do ar separam-se em iões positivos e negativos, que se deslocam para as esferas, descarregando-as. O número de iões que passam para cada esfera é o número de eletrões a mais, numa das esferas e em falta na outra, que é aproximadamente 10^{10}, já que a carga das esferas é da ordem dos nC. (ver problema 1).

Esse número de eletrões é suficiente apenas para produzir luz (pelas colisões com os átomos) durante um breve intervalo.



Numa lâmpada fluorescente também é produzida luz pelo movimento de iões positivos e negativos, chocando com as moléculas de um gás. Para produzir luz durante um minuto são necessários muitos mais iões, da ordem de 10^{18}. Mas neste caso cada ião tem muita menos energia do que no caso da faísca no garador de Wimshurst.

ENERGIA ELÉTRICA

Como a força elétrica entre cargas é uma força conservativa (porque a força de cada partícula é uma força central), pode definir-se uma energia potencial elétrica, função da posição, relacionada ao trabalho da força elétrica $\vec{F}_e$:

$$\underbrace{\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r}}_{\text{integral de linha, independente do percurso}} = U_A - U_B \qquad \left(U_P = \text{energia elétrica num ponto P}\right)$$

A força elétrica $\vec{F}_e$ sobre uma carga pontual pode obter-se a partir do campo: $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Como tal, a diferença de energia potencial elétrica entre dois pontos A e B é,

$$U_A - U_B = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(V_A - V_B)$$

onde a função, da posição, V, chamada POTENCIAL ELÉTRICO é definida pelo integral de linha do campo elétrico:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

e, assim sendo, é medida em unidades de $\frac{J}{C}$, no sistema internacional de unidades:

$$1\,\text{volt} = 1\,V = 1\,\frac{J}{C}$$

V (em volts) é uma propriedade do espaço, enquanto que U (em joules) é uma propriedade de uma partícula.

PILHAS QUÍMICAS

Nas experiências de eletrostática, as cargas produzidas, da ordem dos nC, são devidas unicamente às moléculas na superfície do material. Para conseguir transferir cargas muito maiores, da ordem dos coulomb, é necessário poder atuar nos iões ou cargas livres dentro de todo o material.

Isso foi feito pela primeira vez, e de forma acidental, pouco antes do ano 1800, por um biólogo italiano, Luigi Galvani:

Quando o espeto cai e toca a mesa metálica, os membros da rã mexem-se bruscamente.

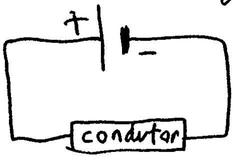
Alessandro de Volta explicou o fenómeno pelo facto de os iões positivos e negativos no corpo da rã serem atraídos para os metais. Como o espeto e a mesa são feitos de metais diferentes, um desses metais tem maior tendência a atrair eletrões do que o outro; esse metal atrai assim os iões negativos, inserindo cargas negativas no metal, que se deslocam até o outro metal que atrai os iões positivos do corpo da rã. O fluxo de iões positivos e negativos através do corpo da rã faz contrair os músculos. O mesmo efeito pode ser obtido com dois metais quaisquer e um objeto com iões.

Exemplo:

As barras, de magnésio e cobre neste caso, são os dois **elétrodos** da pilha e o limão (objeto com iões) é o **eletrólito**.

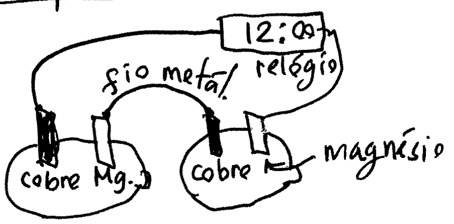
Quando se liga um condutor entre as duas barras, a barra de cobre atrai os iões positivos (catiões) e a barra de magnésio atrai os iões negativos (aniões). Como tal, o elétrodo de cobre chama-se **cátodo** e o de magnésio **ânodo**.

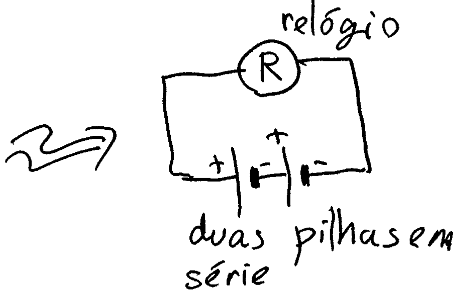
A forma simplificada de representar a pilha e o condutor é o seguinte diagrama:



A barra maior, positiva, é o cátodo e a barra menor e mais grossa é o ânodo. O espaço entre elas é o eletrólito.

Duas pilhas em série:





Os eletrões saem do ânodo com energia U_a, percorrem o circuito e regressam ao cátodo da mesma pilha com menor energia U_c $(U_c < U_a)$

$$U_a - U_c = qV_a - qV_c = q(V_a - V_c) > 0$$

como a carga q dos eletrões é negativa,

$$\Rightarrow \quad V_a - V_c < 0$$

Se as cargas (livres) que se deslocam pelo condutor (circuito), fossem positivas, sairiam do cátodo com energia U_c e chegariam ao ânodo com menor energia, U_a

$$U_a < U_c \Rightarrow U_c - U_a = qV_c - qV_a = q(V_c - V_a) > 0$$

$$\Rightarrow V_c - V_a > 0$$

Ou seja, independentemente do condutor (circuito) ligado aos elétrodos na pilha, o potencial do cátodo (+) é sempre maior do que o potencial do ânodo (−)

$$\boxed{V_c > V_a}$$

A diferença de potencial entre os dois elétrodos chama-se **força eletromotriz**, fem de forma abreviada:

$$\mathcal{E} = V_c - V_a$$

e depende apenas das reações químicas entre o eletrólito e os metais dos elétrodos. Diferentes pilhas têm diferentes valores de fem, segundo o tipo de eletrólito e condutores usados para os elétrodos. $\mathcal{E}$ costuma estar entre 1 e 2 volts.

Por exemplo, uma pilha pode ter $\mathcal{E} = 1.5V$, valor esse que permanece constante, independentemente do estado (mais ou menos carregada) da pilha.

Quando se ligam pilhas em série, as suas fem somam-se. Uma pilha de 9V tem no seu interior 6 pilhas de 1.5V ligadas em série.

Aula 4. 30-9-2016

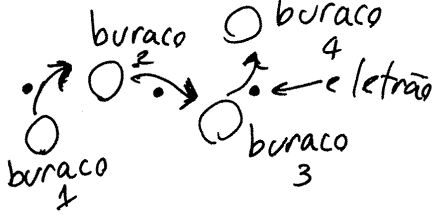
CONDUTORES SÓLIDOS

① Com cargas livres negativas:

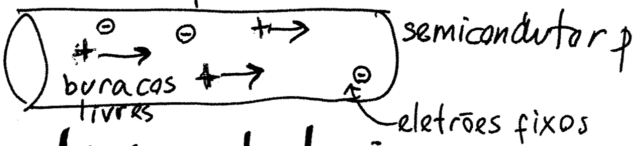
ⓐ metais
ⓑ outras substâncias como o grafite
ⓒ **semicondutores tipo n.**

Um semicondutor é um cristal de silício, ou germânio onde são introduzidas impurezas de outro elemento. O silício e o germânio, com 4 eletrões de valência, formam uma rede cristalina em que cada eletrão de valência está acoplado a um dos eletrões dos quatro átomos mais próximos. Introduzindo alguns átomos com 5 eletrões de valência, por exemplo, arsênio, cria-se uma nuvem de eletrões livres, tal como nos metais, mas o semicondutor n tem outras propriedades que não têm os metais.

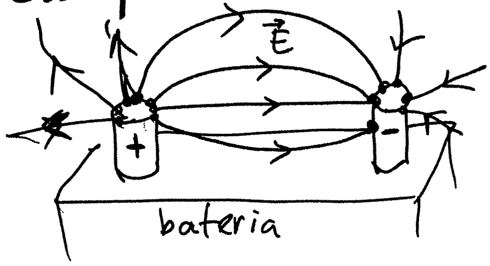
② Com cargas livres positivas: **semicondutores tipo p.** Cristal de silício, ou germânio, com impurezas de elementos com valência 3, por exemplo, gálio. Em cada átomo de gálio, os 3 eletrões de valência são ligados a 3 dos átomos vizinhos na rede e no quarto átomo vizinho fica um "buraco" que pode ser ocupado por um eletrão.



Um eletrão que entra no condutor preenche o buraco mais próximo e os eletrões podem saltar até o buraco mais próximo. Cada eletrão desloca-se apenas uma pequena distância, mas o buraco atravessa o condutor, sendo equivalente a uma carga elementar positiva que se desloca livremente no condutor.

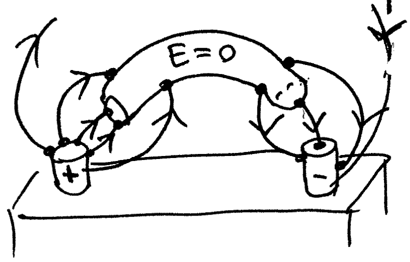


campo elétrico de uma bateria



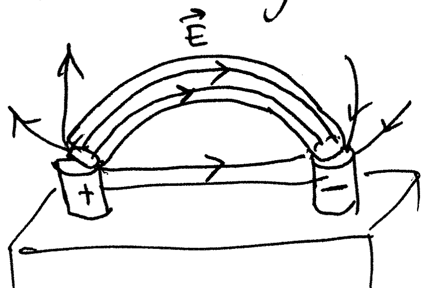
as linhas de campo saem do elétrodo positivo e entram no elétrodo negativo

Condutor isolado, próximo da bateria



As cargas de condução distribuem-se formando um campo que anula o campo da bateria no interior do condutor.

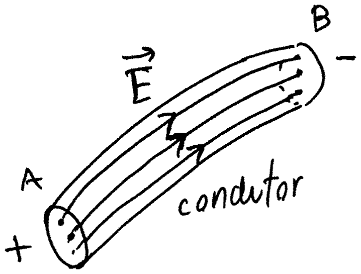
Condutor ligado a uma bateria



As cargas de condução distribuem-se criando um campo $\vec{E}$ que segue o percurso do condutor dentro dele e faz deslocar as cargas de condução no sentido do campo, se as cargas de condução são positivas, ou no sentido oposto, se são negativas.

O campo elétrico aponta sempre no sentido em que o potencial diminui: $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$

CORRENTE ELÉTRICA.



Se $V_A > V_B$, o campo $\vec{E}$ transporta carga positiva de A para B, ou negativa de B para A, dependendo do tipo de condutor.

Em ambos casos o efeito é o mesmo: transporte de energia elétrica de A para B.
Se num intervalo Δt o valor absoluto da carga transportada (carga que entra por um dos extremos e sae pelo extremo oposto) é ΔQ, define-se a corrente média:

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Unidade SI $= 1\,\text{A} = 1\,\frac{\text{C}}{\text{s}}$ (um ampere)

e a corrente instantânea:

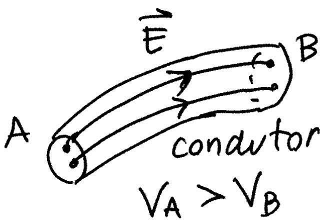
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

De forma inversa, a carga ΔQ transferida durante um intervalo Δt é:

$$\Delta Q = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} I\, dt \qquad (I = \text{função de } t)$$

$\vec{I}$ é o vetor corrente, com módulo igual a I e na direção e sentido do campo elétrico, ou seja, na direção e sentido em que é transportada energia. Como tal, se as cargas de condução são positivas, $\vec{I}$ tem o sentido do movimento das cargas, mas se fossem negativas $\vec{I}$ teria o sentido oposto ao movimento das cargas.

ENERGIA DISSIPADA NUM CONDUTOR



A velocidade média das cargas de condução é constante, devido a forças dissipativas (colissões com os átomos).

Se as cargas de condução são negativas, num intervalo Δt entra carga $-\Delta Q$ (negativa) em B, com energia elétrica

$$\Delta U_B = -\Delta Q\, V_B$$

e sae carga $-\Delta Q$ em A, com energia

$$\Delta U_A = -\Delta Q\, V_A$$

a energia elétrica dissipada em calor no condutor é:

$$\Delta U = \Delta U_B - \Delta U_A = -\Delta Q (V_B - V_A) = \Delta Q\, \Delta V$$

onde $\Delta V = V_A - V_B$ é a diferença de potencial no condutor (voltagem).

Se as cargas de condução são positivas, entra carga ΔQ em A com energia $\Delta Q V_A$, sai carga ΔQ em B com energia $\Delta Q V_B$ e obtém-se o mesmo resultado para a energia dissipada ($\Delta U = \Delta U_A - \Delta U_B$):

$$\boxed{\Delta U = \Delta Q\, \Delta V}$$

Potência dissipada

$$\bar{P} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \Delta V \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

(média)

$$\Longrightarrow \boxed{P = I\, \Delta V}$$

como tal, um watt é também igual a 1 volt-ampere:

$$1\ W = 1\ V{\cdot}A.$$

Aula 5. 7-10-2016

DIAGRAMAS DE CIRCUITO

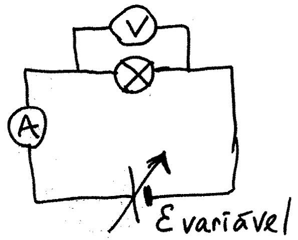
voltímetro (medidor de voltagem) — amperímetro (medidor de corrente) — lâmpada incandescente

Resistência (resistor)

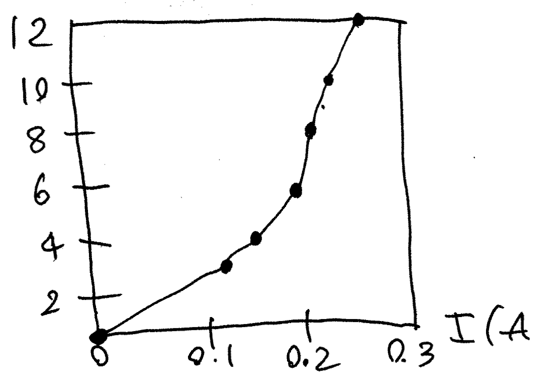
CARATERÍSTICAS TENSÃO-CORRENTE

Gráfico de ΔV vs. I num dispositivo

① Lâmpada incandescente.



I (A)	ΔV (V)
0	0
0.12	3.20
0.14	4.31
0.18	6.20
0.20	7.72
0.22	9.35
0.26	12.11



o gráfico pode ser obtido no Maxima:

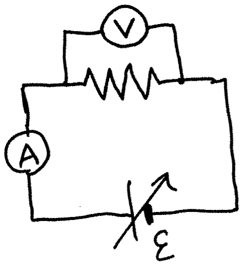
```
plot2d([discrete,[[0,0],
  [0.12,3.2],...]],
  [style, linespoints]);
```

O declive aumenta com o aumento de I.

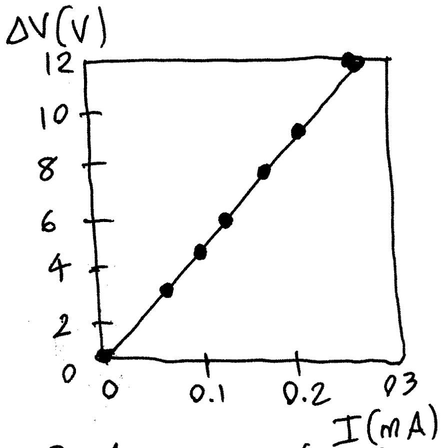
O filamento aquece até uma temperatura maior quanto maior for I, produzindo luz mais intensa e mais "branca".

O aumento da intensidade da luz e da sua cor implica maior energia fornecida pela fem e, como tal, maior ΔV.

② Resistências



I (mA)	ΔV (V)	$\Delta V/I$ (V/A)
0	0	?
0.070	3.22	46.0×10^3
0.097	4.45	45.9×10^3
0.135	6.20	45.9×10^3
0.168	7.72	46.0×10^3
0.203	9.35	46.1×10^3
0.264	12.09	45.8×10^3



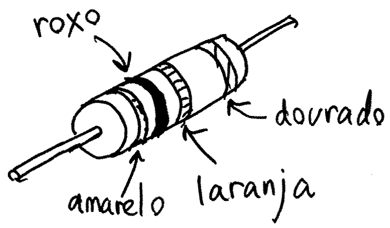
O declive é constante, como mostra a 3ª coluna na tabela. Ou seja, ΔV e uma função afim de I

$$\boxed{\Delta V = R\, I}$$ **lei de Ohm**

Onde a constante R chama-se o <u>valor da resistência</u> e tem unidades de Ohm (Ω), no sistema SI:

$$1\,\Omega = 1\,\frac{\text{V}}{\text{A}}$$

O valor da resistência costuma estar escrito na própria resistência, usando barras com um <u>código de cores</u>. Na resistência usada acima, as 4 barras de cores eram amarela, rouxa, laranja e dourada, correspondentes a: 4, 7, 3 e 5%. O valor de R é então:



$$R = 47\times10^3\,\Omega \text{ (5\% tolerância)}$$

$$\Rightarrow\ 44.65\,\text{k}\Omega \le R \le 49.35\,\text{k}\Omega$$

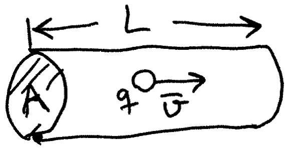
RESISTIVIDADE

A lei de Ohm explica-se pelo facto que as forças dissipativas num condutor sólido são diretamente proporcionais à velocidade: $F_d = k\,v$ (k = constante)

Se q for a carga de cada carga livre e $\bar{E}$ o campo elétrico médio, a velocidade média das cargas de condução, $\bar{v}$, verifica a relação:

$$q\bar{E} = k\bar{v} \implies \bar{v} = \frac{q\bar{E}}{k}$$

O volume de nuvem de condução que passa através de uma secção de área A, durante um intervalo Δt, é:



$$A\bar{v}\Delta t$$

e a carga ΔQ transferida nesse intervalo é: $\Delta Q = nqA\bar{v}\Delta t$, onde n é o número de cargas de condução por unidade de volume. Substituindo a expressão para $\bar{v}$ obtém-se:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nq^2A}{k}\bar{E}$$

O campo médio é igual à diferença de potencial no condutor, ΔV, dividido pelo seu comprimento L:

$$\implies I = \frac{nq^2A}{k\,L}\Delta V \qquad \left(\begin{array}{c}\text{lei de Ohm}\\ I = \frac{\Delta V}{R}\end{array}\right)$$

$$\implies \boxed{R = \frac{\rho L}{A}}$$

onde:

$$\rho = \text{resistividade} = \frac{k}{nq^2} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{letra "ro"}\\ \text{grega}\end{array}\right)$$

é uma constante própria de cada material

RESISTÊNCIA E TEMPERATURA

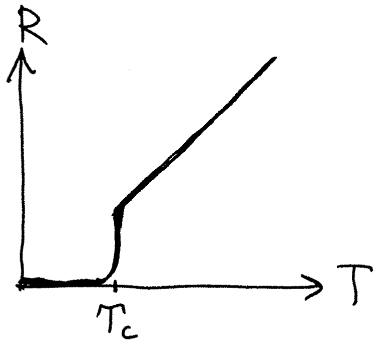
Quando a temperatura T aumenta, a constante dissipativa k também aumenta. Como tal, a resistência R aumenta com a temperatura. Empiricamente encontra-se uma relação quase linear para cada material:

$$\boxed{R = R_{20}\left(1 + \alpha_{20}(T - 20)\right)}$$

Onde R_{20} é a resistência do dispositivo a 20°C e α_{20} é uma constante própria de cada material, chamada **coeficiente de temperatura**.

SUPERCONDUTIVIDADE

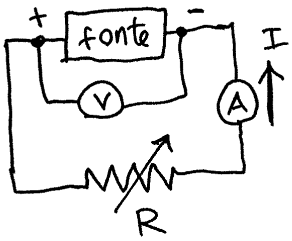
Em alguns materiais, chamados <u>supercondutores</u>, o valor da resistência diminui drasticamente, ficando quase nulo, por debaixo de uma temperatura T_c (temperatura crítica).



Por exemplo, o hélio é líquido a baixas temperaturas e torna-se supercondutor quando $T < 4.2$ K (temperatura crítica de 4.2 kelvin). Até 1986 os supercondutores conhecidos tinham T_c menores do que 30K. A partir desse ano têm sido construídas ligas metálicas supercondutoras com $T_c \approx 92$ K e atualmente (2016), até $T_c \approx 203$ K, já mais próxima de 0°C (ou seja, 273 K).

Aula 6. 12-10-2016

CARATERÍSTICA DE UMA FONTE

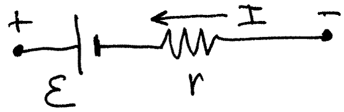


A diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo, em função da corrente, é:

$$\boxed{\Delta V = \varepsilon - r I}$$

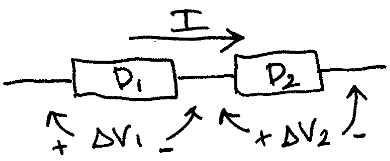
o valor absoluto do declive, r, chama-se **resistência interna** e é devida a que o eletrólito, tal como outros condutores, dissipa parte da energia fornecida pela fonte, na forma de calor. A equação de ΔV obtém-se também no circuito equivalente, com uma fem ε, em série com uma resistência r.

circuito equivalente



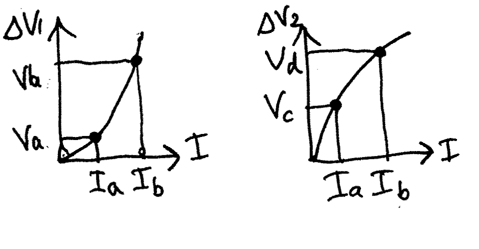
$$V_+ - V_- = \varepsilon - r I$$

DISPOSITIVOS EM SÉRIE

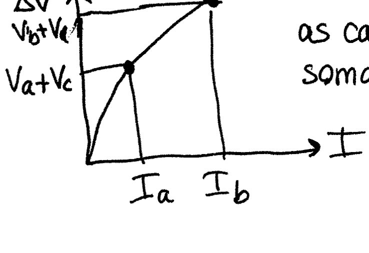


$$\begin{cases} \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \\ I_1 = I_2 = I \end{cases}$$

caraterísticas de D_1 e D_2:

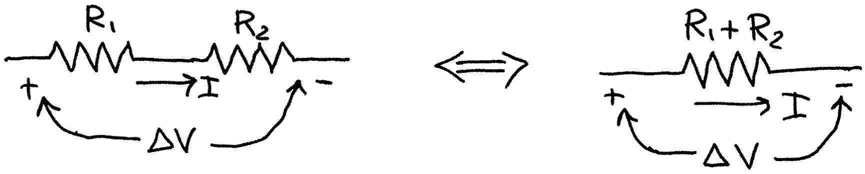


caraterística do sist. em série:



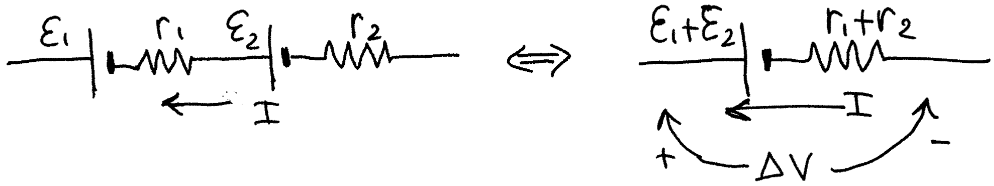
as caraterísticas somam-se

Resistências em série



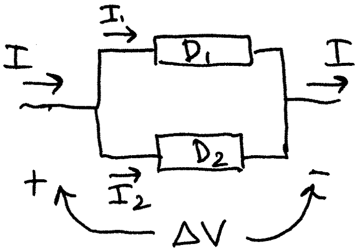
$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (R_1+R_2)I \implies \boxed{R_{série} = R_1 + R_2}$

Fontes em série



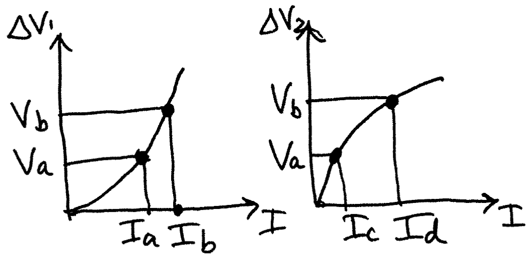
$\Delta V = \varepsilon_1 - r_1 I + \varepsilon_2 - r_2 I = (\varepsilon_1+\varepsilon_2) - (r_1+r_2)I$

DISPOSITIVOS EM PARALELO

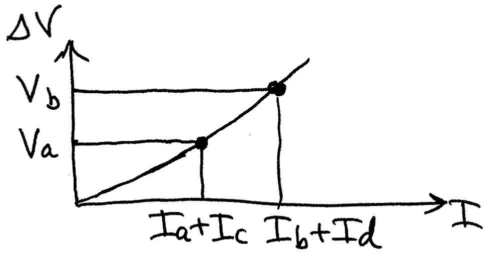


$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \end{cases}$$

Características de D_1 e D_2



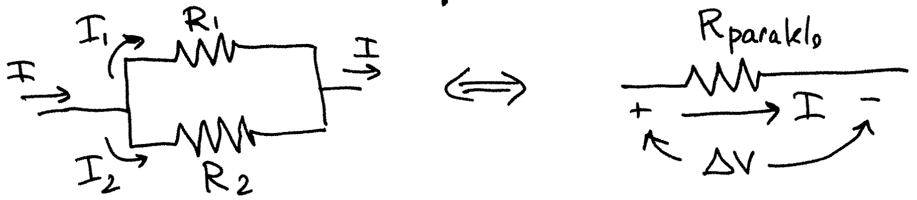
Caraterística do sistema



caraterísticas: $\Delta V_1 = f_1(I_1)$, $\Delta V_2 = f_2(I_2)$. Inversas:

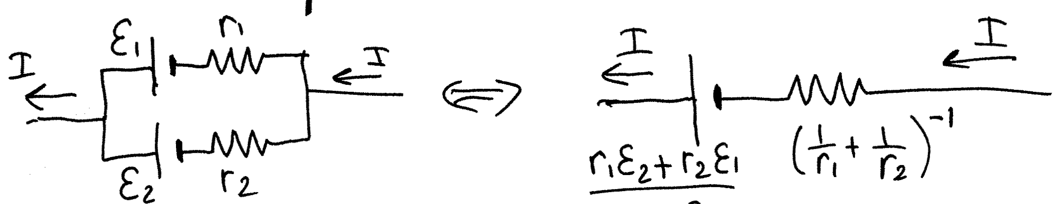
$I_1 = f_1^{-1}(\Delta V_1)$, $I_2 = f_2^{-1}(\Delta V_2)$. Inversa do sistema: $I = f_1^{-1}(\Delta V) + f_2^{-1}(\Delta$

Resistências em paralelo



$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \boxed{R_{paral.} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}}$$

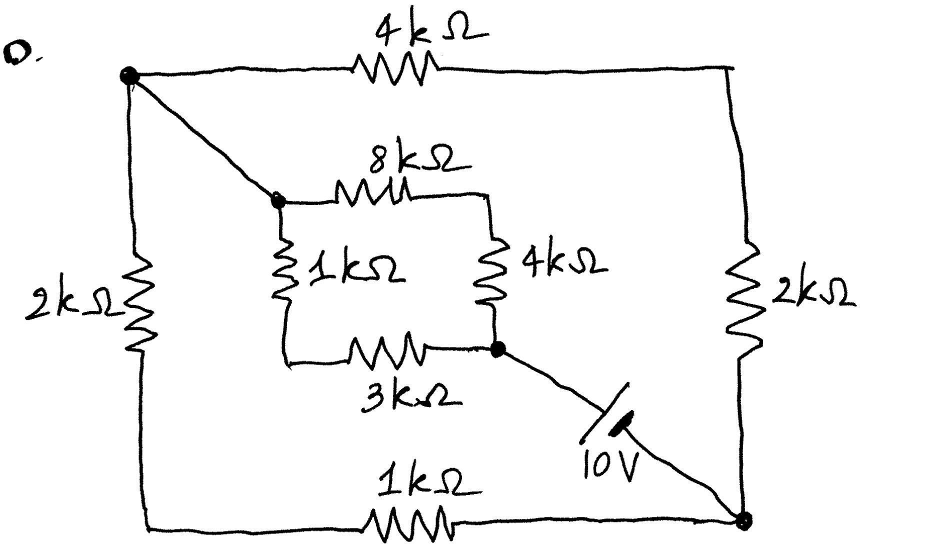
Fontes em paralelo



$$\underbrace{\frac{r_1\varepsilon_2 + r_2\varepsilon_1}{r_1 + r_2}} \rightarrow \text{igual a } \varepsilon\text{, se } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

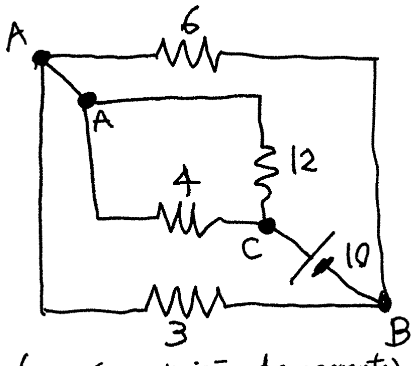
(Se $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, a corrente passa do cátodo para o ânodo na fonte com menor fem)

Exemplo.



Determine a voltagem e corrente em cada resistência

Resolução: Não há resistências em paralelo, mas há 4 grupos em série que podem ser combinados (omitem-se as unidades kΩ das resistências e V da fem):

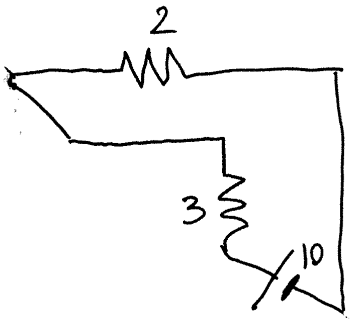


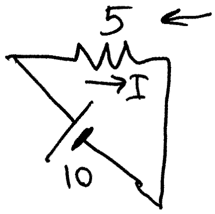
(• = nó → divisão da corrente)

6 e 3 estão em paralelo (pontos A e B), e R equivalente é $R_p = \frac{6\times 3}{6+3} = 2$

4 e 12 também estão em paralelo (pontos A e C) e:

$$R_p = \frac{4\times 12}{4+12} = 3$$

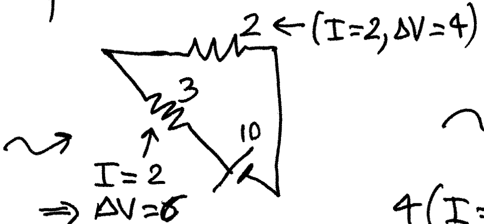


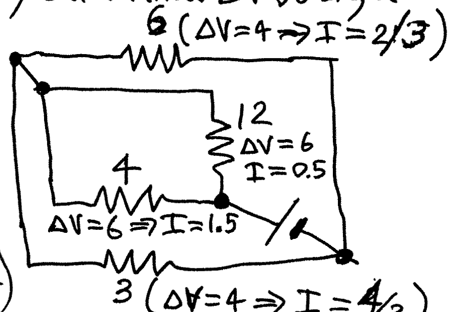


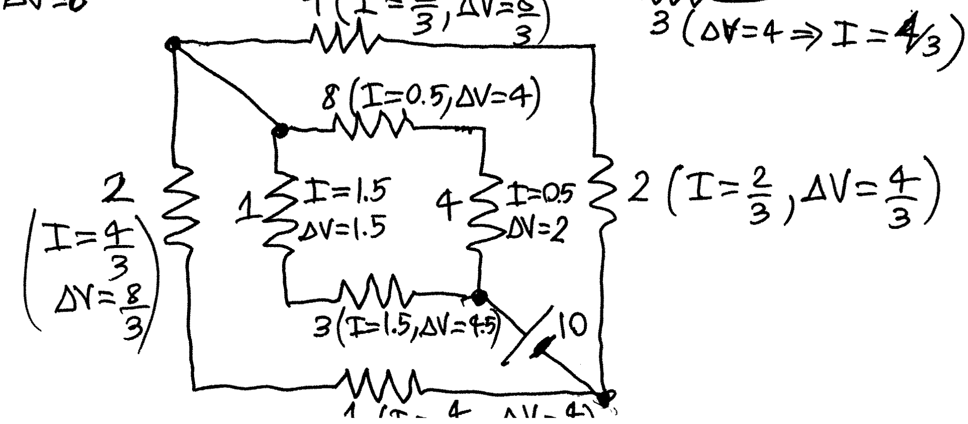
← $\Delta V = 10 \Rightarrow I = \frac{10}{5} = 2$

as unidades de I são $\frac{V}{k\Omega} = mA$

Regressa-se aos circuitos anteriores, calculando ΔV ou I, a partir de $\Delta V = RI$:







Aula 7. 14-10-2016

CONDUTORES ISOLADOS

Num condutor isolado não pode haver corrente (excepto durante um intervalo muito corto até atingir o equilíbrio) $I=0$ implica campo elétrico $\vec{E}$ nulo dentro do condutor. A diferença de potencial entre quaisquer dois pontos 1 e 2, dentro do condutor, é então nula.

$$V_2 - V_1 = \int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

Num condutor isolado, o potencial eletrostático tem o mesmo valor em todos os pontos.

CAMPO PRODUZIDO POR UMA ESFERA CONDUTORA COM CARGA Q.

A carga Q distribui-se na superfície e, devido à simetria da esfera, a carga por unidade de superfície será constante, igual a $\frac{Q}{4\pi R^2}$, onde R é o raio da esfera.

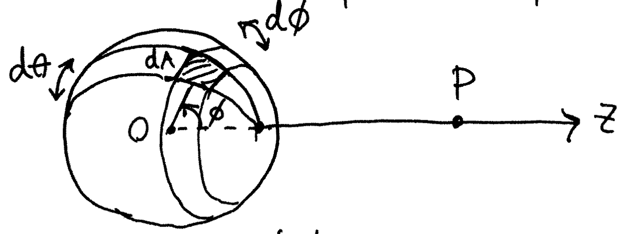
uma pequena região de área dA, na superfície da esfera, terá carga $dq = \frac{Q\,dA}{4\pi R^2}$

e produz num ponto P, a uma distância r do centro da esfera, campo com módulo: $dE = \frac{k|Q|dA}{4\pi K R^2 s^2}$

onde s = distância entre dA e P.

Interessa apenas a componente radial do campo, $dE\cos\alpha$, porque a componente $dE\sin\alpha$ anula-se com o campo produzido por outra região no outro lado da esfera.

Coordenadas esféricas. Com origem no centro da esfera e eixo z passando pelo ponto P.



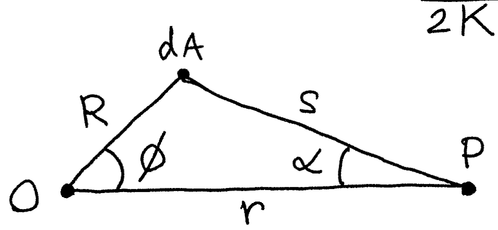
$$dA = (R\,d\phi)(R\sin\phi\,d\theta) = R^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi$$

$$\Rightarrow dE\cos\alpha = \frac{k|Q|}{4\pi K s^2}\cos\alpha\sin\phi\,d\theta\,d\phi$$

campo total no ponto P:

$$E = \int_{\text{esfera}} dE\cos\alpha = \frac{k|Q|}{4\pi K}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos\alpha\sin\phi}{s^2}\int_0^{2\pi}d\theta\right)d\phi$$

$$= \frac{k|Q|}{2K}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\sin\phi}{s^2}\,d\phi$$



teorema do cosseno:

$$\begin{cases} R^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\alpha \\ s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi \end{cases}$$

s e α dependem de ϕ, mas r e R não. Então, derivando a 2ª expressão obtém-se,

$$2s\,ds = 2Rr\sin\phi\,d\phi \qquad \Rightarrow \sin\phi\,d\phi = \frac{s}{Rr}\,ds$$

e $\cos\alpha$ pode ser obtido na primeira expressão:

$$\cos\alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}$$

Substituindo no integral:

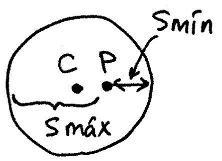
$$E = \frac{k|Q|}{2K}\int_{S_{mín}}^{S_{máx}} \frac{s^2+r^2-R^2}{2Rr^2s^2}\,ds = \frac{k|Q|}{4KRr^2}\int_{S_{mín}}^{S_{máx}}\left(1+\frac{r^2-R^2}{s^2}\right)ds$$

$$\Rightarrow E = \frac{k|Q|}{4KRr^2}\left(\left(S_{máx}-S_{mín}\right)+\left(r^2-R^2\right)\left(\frac{1}{S_{mín}}-\frac{1}{S_{máx}}\right)\right)$$

$$= \frac{k|Q|}{4KRr^2}\left(S_{máx}-S_{mín}\right)\left(1+\frac{r^2-R^2}{S_{máx}S_{mín}}\right)$$

onde $S_{mín}$ é a distância entre P e o ponto na superfície da esfera com $\phi=0$ e $S_{máx}$ a distância entre P e o ponto na superfície da esfera com $\phi=\pi$.

(a) Se P estiver dentro da esfera, $r<R$



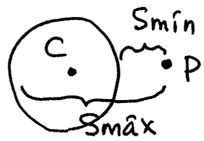
$$S_{mín} = R-r\ ,\quad S_{máx} = R+r$$

$$\left(S_{máx}-S_{mín}\right)\left(1+\frac{r^2-R^2}{S_{máx}S_{mín}}\right) = 2r\left(1+\frac{r^2-R^2}{R^2-r^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E=0}$$

(b) Se P estiver fora da esfera, $r>R$

$$S_{mín} = r-R\ ,\quad S_{máx} = r+R$$



$$\left(S_{máx}-S_{mín}\right)\left(1+\frac{r^2-R^2}{S_{máx}S_{mín}}\right) = 2R\left(1+\frac{r^2-R^2}{r^2-R^2}\right) = 4R$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{k|Q|}{Kr^2}}$$

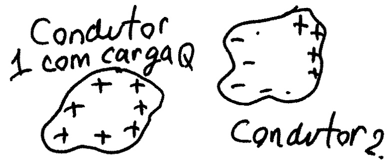
é como se toda a carga Q estivesse no centro da esfera!

O campo de uma esfera condutora de carga Q é idêntico ao campo de uma carga pontual Q, no centro da esfera, nos pontos fora da esfera, e nulo dentro da esfera.

Aula 8. 19-10-2016

CONDENSADORES

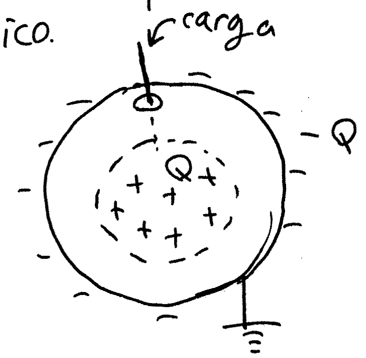
Dois condutores (armaduras) isolados entre si. Quando um dos condutores é carregado, com carga Q, as cargas na sua superfície induzem carga −Q, de sinal oposto, no outro condutor.



A presença do segundo condutor faz diminuir o potencial, aumentando assim a capacidade.

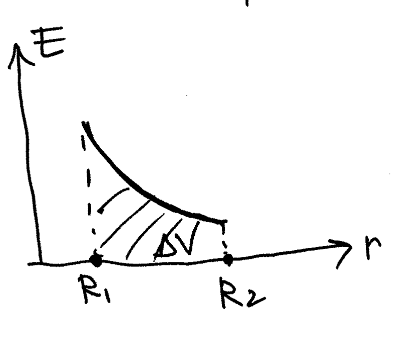
Exemplo: Condensador esférico.

Uma esfera com carga Q e raio R_1, rodeada por outra esfera de raio $R_2 > R_1$ (ambas com centro no mesmo ponto). Por simplicidade, admita-se que a esfera maior está ligada à Terra.



Em $r < R_1$ não há campo. Em $R_1 < r < R_2$. Unicamente a esfera menor produz campo: $E = \dfrac{k|Q|}{K r^2}$

em $r > R_2$ o campo é nulo porque os campos das duas esferas anulam-se.



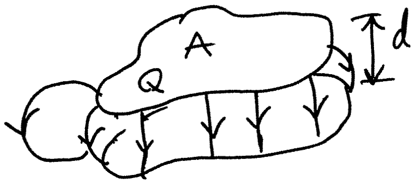
a área sob a função $E(r)$ é a diferença de potencial entre as armaduras (neste caso igual ao potencial da esfera menor)

$$\Rightarrow \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{K r^2}\, dr = \frac{kQ}{K}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

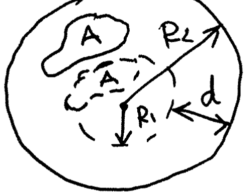
$$\Rightarrow C_{\text{cond. esférico}} = \left(\frac{k}{K}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right)^{-1} = \frac{K R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

dielétrico entre as duas armaduras

Condensador plano. Duas armaduras de áre A, planas e paralelas.



O campo elétrico é semelhante ao campo numa região de um condensador esférico, com $R_1 \to \infty$, $R_2 \to \infty$, mas $R_2 - R_1 = d$



$$Q = \frac{A}{4\pi R_1^2} Q_1 \quad (Q_1 = \text{carga na esfera interna})$$

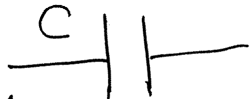
$$E = \frac{k|Q_1|}{Kr^2} \approx \frac{k|Q_1|}{KR_1^2} = \frac{k\left(\frac{4\pi R_1^2}{A}|Q|\right)}{KR_1^2}$$

$(R_1 \approx R_2 \approx r)$

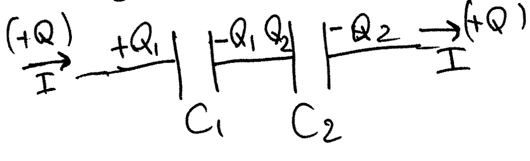
$$\Rightarrow E_{\text{cond. plano}} = \frac{4\pi k|Q|}{KA} \quad \Rightarrow \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{4\pi k|Q|}{KA} dr = \frac{4\pi k|Q| d}{KA}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{\text{cond. plano}} = \frac{KA}{4\pi k d}}$$

diagrama de circuito: de um condensador



Condensadores em série.



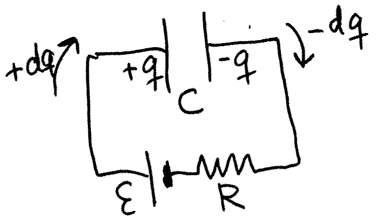
$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 \ (= Q)$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow C_{\text{série}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

o inverso da capacidade equivalente é igual à soma dos inversos das capacidades.

ENERGIA ARMAZENADA NUM CONDENSADOR



Num intervalo infinitesimal dt, entra carga dq na armadura com carga $+q$ e carga $-dq$ na armadura com carga $-q$.

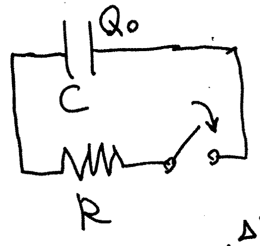
A energia fornecida pela fonte nesse intervalo é:

$$dU = \Delta V\, dq = \frac{q}{C}\, dq$$

A energia total, desde Q_0 até quando o condensador fica com carga Q, é então:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\ . \Rightarrow \boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q\Delta V}{2}}$$

Descarga de um condensador

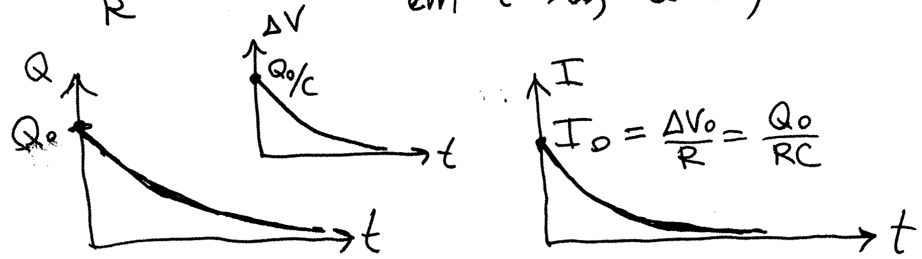


O interruptor fecha-se em $t=0$.

em $t<0$, $Q=Q_0$, $I=0$

em $t>0$, $Q<Q_0$, $I>0$

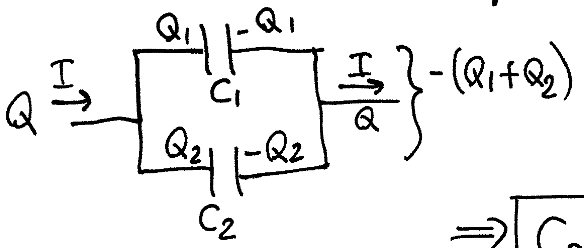
em $t\to\infty$, $Q=0$, $I=0$



A energia armazenada inicialmente, $U_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$, é usada para fornecer energia à resistência.

O condensador carregado é como uma fonte, mas com fem variável, $\Delta V = \frac{Q}{C}$.

Condensadores em paralelo



$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$

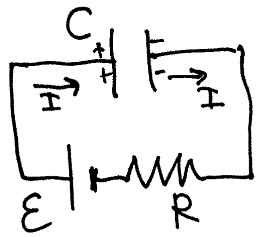
$Q = Q_1 + Q_2$

$\Longrightarrow C_{par.} \Delta V = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{paralelo} = C_1 + C_2}$$

Rigidez dielétrica. Campo máximo que o dielétrico pode ter sem se queimar, tornando-se condutor $\Longrightarrow$ Cada condensador tem uma $\Delta V_{máx}$ por cima da qual queima-se ficando descarregado.

Condensador ligado a uma fonte de fem.



R = resistência da fonte, mais as armaduras, mais os cabos de ligação.

$$\varepsilon = \underbrace{\Delta V_R}_{\text{em R}} + \underbrace{\Delta V_C}_{\text{no condensador}}$$

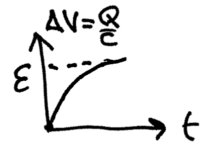
$$\Longrightarrow \varepsilon = RI + \frac{Q}{C}$$

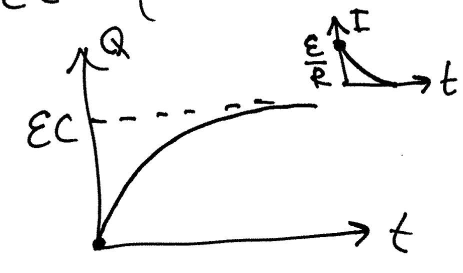
Em $t=0$, se $Q_0=0$, então $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ (estado inicial)

em $t>0$, $Q>0 \Longrightarrow I = \frac{\varepsilon C - Q}{RC}$ (estado transitório)

em $t \to \infty$, $I=0 \Longrightarrow Q_f = \varepsilon C$ (estado estacionário)

A carga aumenta desde $Q_0=0$ até $Q_f=\varepsilon C$, de forma exponencial.





Aula 9. 21-10-2016

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

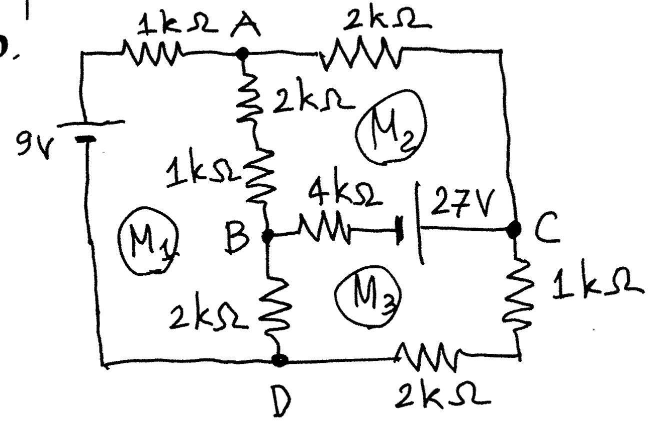
Neste capítulo estudam-se circuitos com resistências, condensadores e fontes com fem constante.

Definições:

MALHA: Qualquer percurso fechado num circuito

NÓ: Ponto onde uma corrente pode dividir-se em vários percursos alternativos.

Exemplo.



Este circuito tem 4 nós: A, B, C e D, e três malhas: M_1, M_2, M_3.

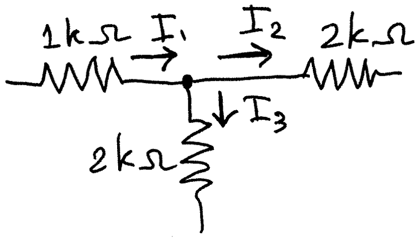
Realmente existem mais malhas, por exemplo, de A para B, para C, para D e através da fonte de 9V. No entanto essas outras malhas são a sobreposição de duas ou mais das malhas M_1, M_2, M_3

Observe-se que a única simplificação possível neste circuito é combinar as resistências de 1kΩ e 2kΩ em série. Após essa simplificação, não é possível substituir mais resistências. Por exemplo, a resistência de 4kΩ não está em paralelo com a de 2kΩ entre A e C, porque a de 4kΩ está ligada entre B e outro ponto com potencial $\neq V_C$

LEIS DE KIRCHHOFF

Lei das correntes. A soma algébrica das correntes (atribuindo sinais opostos às que entram ou saem) em qualquer nó é nula. (também chamada lei dos nós)

por exemplo, no nó A no exemplo anterior, podemos arbitrar 3 correntes I_1, I_2 e I_3:



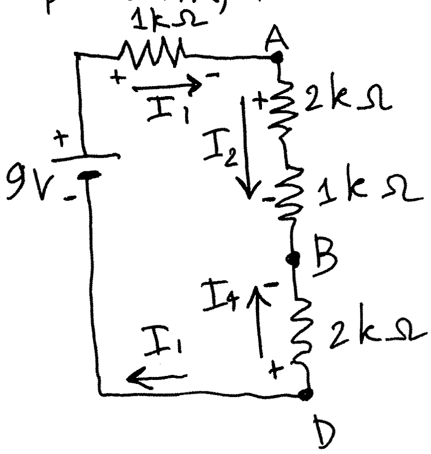
e a lei das correntes é:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

após resolver o sistema de equações, se alguma das 3, I_1, I_2 ou I_3, tiver um valor negativo, indicará que é no sentido oposto ao arbitrado.

Lei das voltagens. (ou das malhas). A soma algébrica das voltagens nos dispositivos numa malha (usando sinais opostos quando V aumenta ou diminui) é sempre nula.

por exemplo, na malha M_1 no exemplo, e arbitrando I_4, para cima, na resistência entre B e D, a lei da malha é:

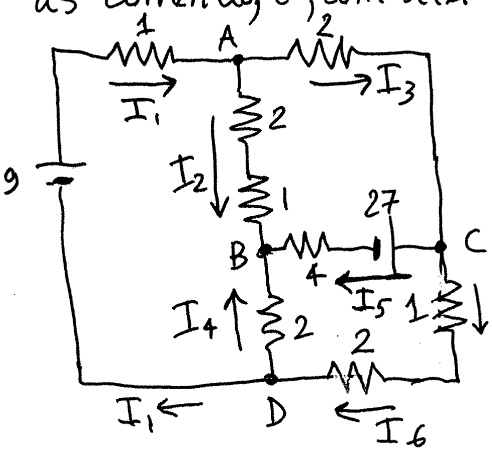


$$9 - 1000 I_1 - 2000 I_2 - 1000 I_2 + 2000 I_4 = 0$$

Observe-se que nas resistências, o sentido arbitrado para I é o sentido em que a voltagem diminui.

A lei dos nós é consequência da conservação da carga e a lei das malhas é consequência da conservação da energia.

No exemplo anterior, as quatro equações de nós e 3 equações de malha permitem determinar todas as correntes, e, com a lei de Ohm, todas as voltagens:



A: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

B: $I_2 + I_4 + I_5 = 0$

C: $I_3 - I_5 - I_6 = 0$

D: $I_6 - I_1 - I_4 = 0$

M_1: $9 - I_1 - 3I_2 + 2I_4 = 0$

M_2: $-2I_3 - 27 - 4I_5 + 3I_2 = 0$

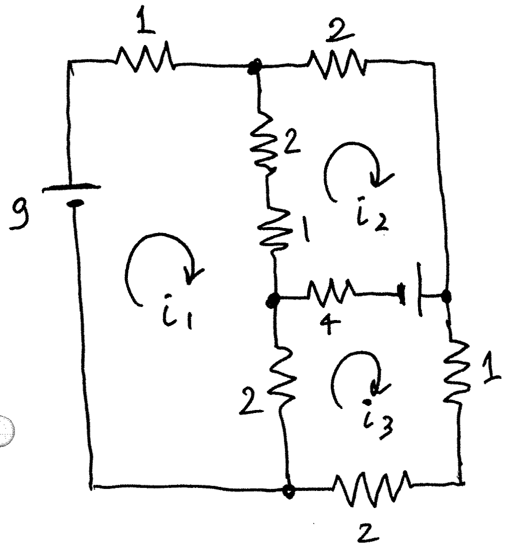
M_3: $-2I_4 + 4I_5 + 27 - 3I_6 = 0$

($\Delta V \to V$, $R \to k\Omega$, $I \to mA$)

$\Rightarrow I_1 = 2,\ I_2 = 3,\ I_3 = -1,\ I_4 = 1,\ I_5 = -4,\ I_6 = 3$

No entanto, existem métodos mais simples.

MÉTODO DAS MALHAS.



① Definem-se **correntes de malha**, neste caso i_1, i_2 e i_3, todas no mesmo sentido.

② Cria-se a matriz $\mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} \uparrow & \quad \uparrow & \quad \uparrow \\ M_1 & \quad M_2 & \quad M_3 \end{matrix} &
\end{array}
$$

onde: $R_{ii} = +$ soma de todas as resistências na malha i.

$R_{ij} = -$ soma de todas as resistências na fronteira entre as malhas i e j.

(3) Cria-se a matriz:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 9 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \end{matrix}$$

$\mathcal{E}_{i,1} =$ soma algébrica das fem na malha i.
+ se produzir corrente no sentido arbitrado para i_i

(4) Resolve-se o sistema:

$$\mathbb{R}\,\boldsymbol{i} = \mathcal{E} \qquad \text{onde} \quad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{i} = \mathbb{R}^{-1}\mathcal{E}$$

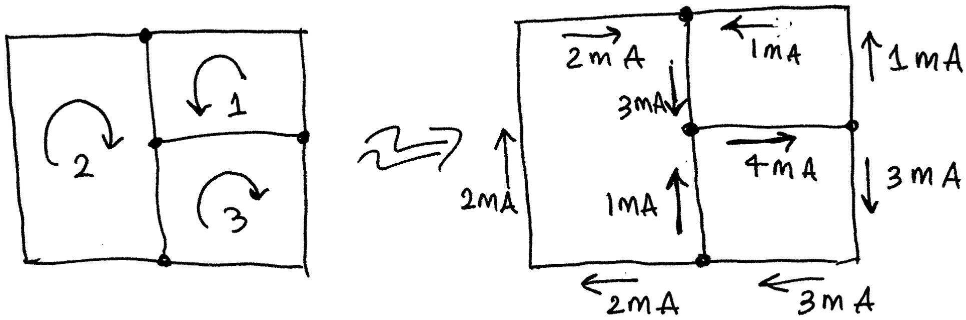
neste exemplo,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

<u>Maxima</u>: invert(matrix([6,-3,-2],[-3,9,-4],[-2,-4,9])).[9,-27,-27]

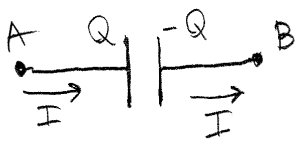
$$\Longrightarrow i_1 = 2, \quad i_2 = -1 \quad i_3 = 3$$

(5) Encontram-se as correntes reais I_1, I_2 e I_3.
na fronteira entre duas malhas há que somar as correntes das duas malhas.



Aula 10. 26-10-2016

CIRCUITOS COM CONDENSADORES



O condensador pode ser percorrido por uma corrente estacionária I, apesar de não passarem cargas através do seu dielétrico.

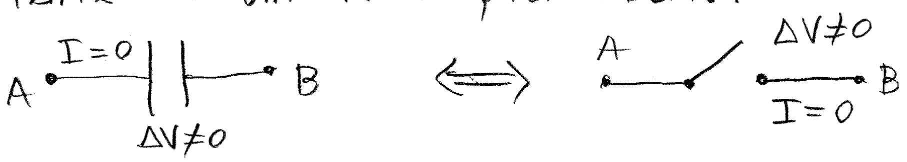
A taxa de aumento da carga Q, na armadura onde entra corrente, é igual à corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (\text{se } Q < 0,\ |Q| \text{ diminui})$$

Há 3 casos importantes:

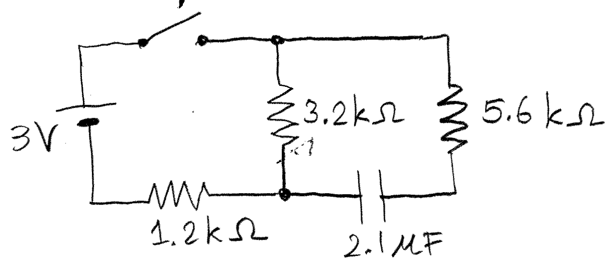
① Quando $Q = 0$, a diferença de potencial no condensador é nula, mas I pode ter qualquer valor. O condensador, nesse instante é equivalente a um curto-circuito:

② **Estado estacionário**. Enquanto há corrente, Q aumenta e, assim sendo, ΔV também aumenta. Nos circuitos de corrente contínua, ΔV não pode ultrapassar os valores das fem. Como tal, o condensador aproxima-se dum estado estacionário em que $\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow I = 0$, mas $\Delta V \neq 0$. Nesse estado, o condensador é equivalente a um interruptor aberto:



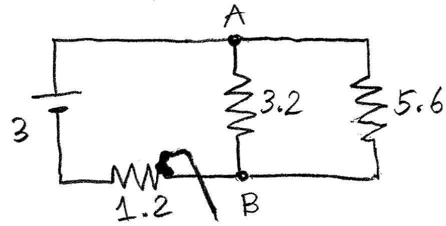
③ **Estado transitório.** No caso geral, num instante em que ΔV e I são diferentes de zero, o condensador é equivalente a uma fonte ideal, com fem $\mathcal{E} = \frac{Q}{C}$ e cátodo na armadura onde a carga é positiva:

Exemplo.



Fecha-se o interruptor num instante t_0, em que o condensador está descarregado, e volta a abrir-se num outro instante t_1, muito tempo depois de t_0. Determine a intensidade da corrente na resistência de 5.6 kΩ, nos instantes t_0 e t_1.

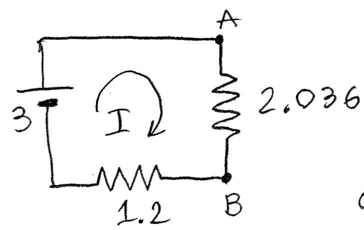
Resolução. Em t_0 o circuito equivalente é:



(resistências em kΩ, voltagens em V e correntes em mA)

$$3.2 \parallel 5.6 = \frac{3.2 \times 5.6}{3.2 + 5.6} = 2.036$$

$\Longleftrightarrow$



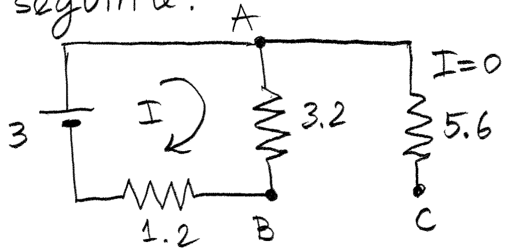
$$I = \frac{3}{1.2 + 2.036} = 0.9270$$

$$\Delta V = V_A - V_B = 2.036\, I = 1.888$$

a corrente em $R = 5.6$ é então:

$$\frac{V_A - V_B}{5.6} = 0.337 \text{ mA (de A para B)}$$

Quando t se aproxima de t_1 (antes de ser aberto o interruptor), o condensador está em estado estacionário e, assim sendo, o circuito equivalente é o seguinte:



Como não pode passar corrente de A para C

$\Rightarrow V_A = V_C$

$\Rightarrow V_C - V_B = V_A - V_B$

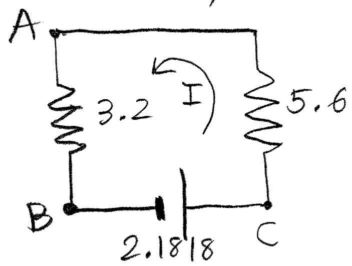
A corrente que passa de A para B é:

$$I = \frac{3}{1.2 + 3.2} = 0.6818$$

ou seja, a diferença de potencial no condensador é:

$$\Delta V = V_C - V_B = V_A - V_B = 3.2\, I = 2.1818 \text{ V}$$

Em $t = t_1$, o circuito equivalente é o seguinte:



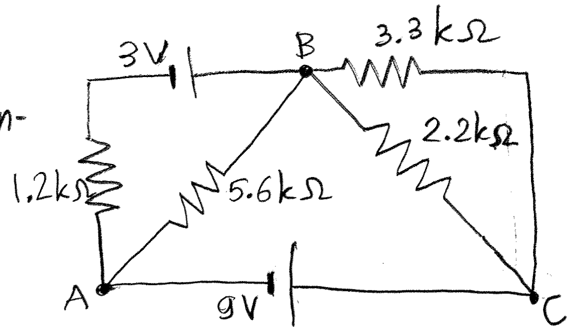
$$I = \frac{2.1818}{3.2 + 5.6} = 0.248 \text{ mA}$$

(de C para A)

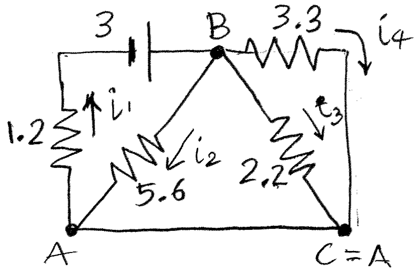
MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

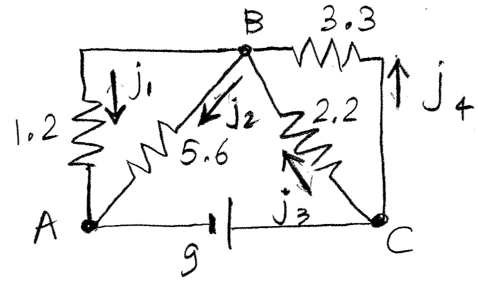
Um circuito com várias fontes de fem pode ser resolvido somando as correntes (e voltagens) obtidas em circuitos em que todas as fontes estão em curto-circuito, excepto uma. Com duas fontes é necessário então resolver dois circuitos, cada um com uma única fonte.

Exemplo. Determine as correntes nas 4 resistências no circuito do diagrama.



Resolução. Resolvem-se os 2 circuitos seguintes





$$R_{AB} = \left(\frac{1}{3.3} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{5.6}\right)^{-1} = 1.068$$

$$\Rightarrow \quad i_1 = \frac{3}{1.2+1.068} = 1.323 \text{ mA}$$

$$V_B - V_A = R_{AB}\, i_1 = 1.413 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{V_B-V_A}{5.6} = 0.252 \text{ mA}$$

$$i_3 = \frac{V_B-V_A}{2.2} = 0.642 \text{ mA}$$

$$i_4 = \frac{V_B-V_A}{3.3} = 0,428 \text{ mA}$$

$$R_{AB} = \frac{1.2\times 5.6}{1.2\times 5.6} = 0.9882$$

$$R_{BC} = \frac{2.2\times 3.3}{2.2+3.3} = 1.32$$

$$V_B - V_A = \frac{R_{AB}\times 9}{R_{AB}+R_{BC}} = 3.853$$

$$V_C - V_B = \frac{R_{BC}\times 9}{R_{AB}+R_{BC}} = 5.147$$

$$j_1 = \frac{V_B-V_A}{1.2} = 3.211 \text{ mA}$$

$$j_2 = \frac{V_B-V_A}{5.6} = 0.688 \text{ mA}$$

$$j_3 = \frac{V_C-V_B}{2.2} = 2.339 \text{ mA} \qquad j_4 = \frac{V_C-V_B}{3.3} = 1.560 \text{ mA}$$

$\Rightarrow I_1 = j_1 + i_1 = 1.89$ mA (de B para A)

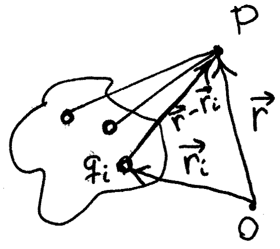
$I_2 = i_2 + j_2 = 0.94$ mA (de B para A)

$I_3 = j_3 - i_3 = 1.70$ mA (de C para B)

$I_4 = j_4 - i_4 = 1.13$ mA (de C para B)

Aula 11, 28-10-2016

CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO



Para calcular o campo no ponto P, na posição $\vec{r}$, somam-se os campos de todas as cargas:

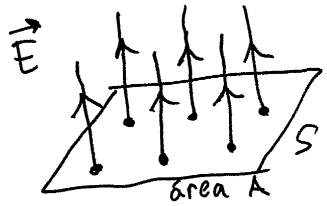
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

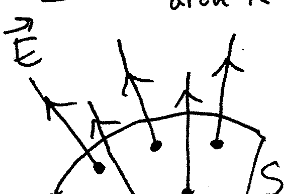
Ou, admitindo uma distribuição contínua de carga, calcula-se um integral, como foi feito no caso da esfera condutora:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dq'$$

Quando existe simetria (esférica, cilíndrica ou plana) esse integral pode ser calculado analiticamente. Mas nesses casos existe um método mais simples, usando o conceito de fluxo elétrico.

FLUXO ELÉTRICO





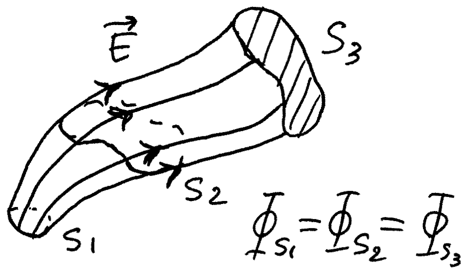
Define-se por analogia com um fluido, em que o campo vetorial é a velocidade do fluido, $\vec{v}$.

Numa superfície de área A, onde $\vec{v}$ é perpendicular e $|\vec{v}|$ constante, $\Phi = vA$ é o volume de fluido que passa pela superf., por unidade de tempo.

Nos casos em que $\vec{E}$ é perpendicular a uma superfície S e $|\vec{E}|$ é constante em S, define-se o <u>fluxo elétrico</u> através de S:

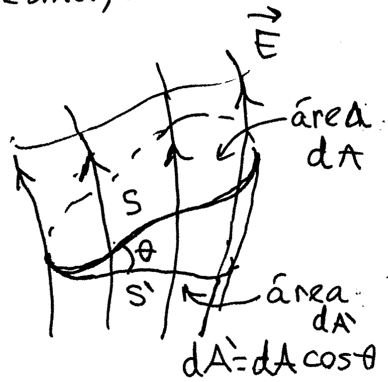
$$\Phi_S = E\,A \qquad \begin{pmatrix} E = \text{módulo de } \vec{E} \text{ em } S. \\ A = \text{área de } S. \end{pmatrix}$$

Tubos de fluxo. Volume delimitado pelas linhas de campo $\vec{E}$, numa região livre de cargas. Em qualquer secção transversal do tubo, S_i, o fluxo é o mesmo (a quantidade de "fluido" que passa por qualquer S_i é a mesma).

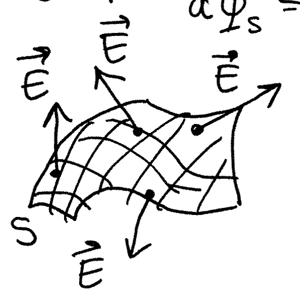


$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \Phi_{S_3}$$

Como tal, para definir o fluxo através de uma superfície S não perpendicular a $\vec{E}$, calcula-se $\Phi_{S'}$ numa outra superfície S', perpendicular a $\vec{E}$ e no mesmo tubo de fluxo que S. Se a superfície é infinitesimalmente pequena, com área dA, pode admitir-se que em S', com área dA', $|\vec{E}|$ é aproximadamente constante e o fluxo através de S é:



$$d\Phi_S = d\Phi_{S'} = E\,dA' = E\cos\theta\,dA \qquad \begin{pmatrix} \theta = \text{ângulo} \\ \text{entre S e S'} \end{pmatrix}$$



Uma superfície qualquer, S, pode ser dividida em várias partes com área dA. Assim sendo:

$$\Phi_S = \iint_S E\cos\theta\,dA \qquad \begin{pmatrix} \text{integral de} \\ \text{superfície} \end{pmatrix}$$

Observe-se que θ, ângulo entre S e a perpendicular a $\vec{E}$ é também o ângulo entre $\vec{E}$ e a direção perpendicular à superfície:

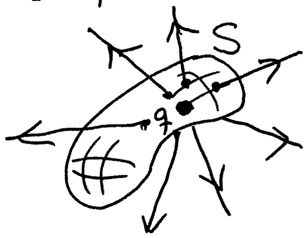
$$\Rightarrow \boxed{\Phi_s = \iint_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dA}$$

$\hat{n}$ = versor normal a S.
$\hat{n}$ e $\vec{E}$ podem ser diferentes em diferentes partes de S.

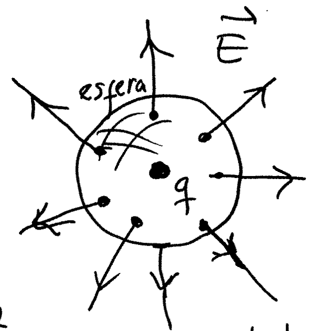
LEI DE GAUSS

Considera-se uma superfície fechada S e o campo $\vec{E}$ produzido por uma única carga pontual q. Há dois casos:

① q dentro de S.



O fluxo através de S é o mesmo que através duma esfera de raio R, com centro na carga q, porque S e a esfera estão no mesmo tubo



Na superfície da esfera, $\vec{E}$ é perpendicular e com módulo constante, $\frac{k|q|}{R^2}$, ou seja:

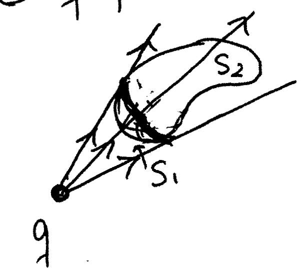
$$\Phi_s = \iint_{esfera} \frac{k|q|}{R^2}\cos 0^\circ\, dA = \frac{k|q|}{R^2}\iint dA = \frac{k|q|}{R^2}(4\pi R^2) = 4\pi k|q|$$

No caso de superfícies fechadas, admitiremos $\Phi_s > 0$ se há fluxo a sair de S, ou $\Phi_s < 0$, se o fluxo entrar. Como tal, o fluxo de uma carga q, através de uma superfície S, fechada, com q no interior é:

$$\boxed{\Phi_s = 4\pi k\, q}$$

(positivo se $q>0$
negativo se $q<0$)

(2) q fora de S.



A superfície S pode dividir-se em $S_1 + S_2$, com fronteira na curva em S tangente às linhas de campo $\vec{E}$. Os fluxos em S_1 e S_2 têm sinais opostos, mas o mesmo valor absoluto (fluxo através do plano que divide a S em S_1 e S_2)

$$\Rightarrow \Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

No caso dum campo $\vec{E}$ qualquer e uma superfície fechada S, $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$

$$\Rightarrow \Phi_S = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{l} 4\pi k q_i, \text{ se } q_i \text{ está dentro} \\ \text{de } S, \text{ ou zero, caso contrário} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{S_{\text{fechada}}} = 4\pi k\, q_{\text{interna}}}$$

Lei de Gauss

q_{interna} = soma das cargas dentro de S.

Cálculo de $\vec{E}$, usando a lei de Gauss.

Se existir uma superfície em que $\vec{E}\cdot\hat{n}$ seja constante,

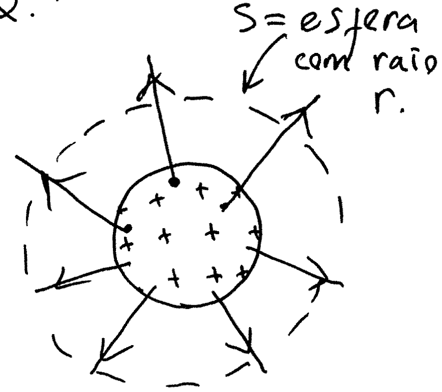
$$\Rightarrow \Phi_S = \iint_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\, dA = (\vec{E}\cdot\hat{n}) \iint_S dA = (\vec{E}\cdot\hat{n}) A_S$$

se S for fechada, Φ_S também é igual a:

$$\Phi_S = 4\pi k\, q_{int}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{4\pi k\, q_{int}}{A_S}$$

Exemplo 1. Campo de uma esfera condutora, de raio R e com carga total Q.



Como a carga distribui-se uniformemente na superfície, as linhas de campo $\vec{E}$ devem ser na direção radial (simetria esférica), e E deve depender unicamente da distância r até o centro da esfera.

Como tal, se S é uma esfera de raio r, com centro na esfera condutora, $\vec{E}\cdot\hat{n} = E = \text{constante}$ em S

$$\Longrightarrow \quad E = \frac{4\pi k q_{int}}{\underbrace{4\pi r^2}_{\text{área de } S}} = \frac{k q_{int}}{r^2}$$

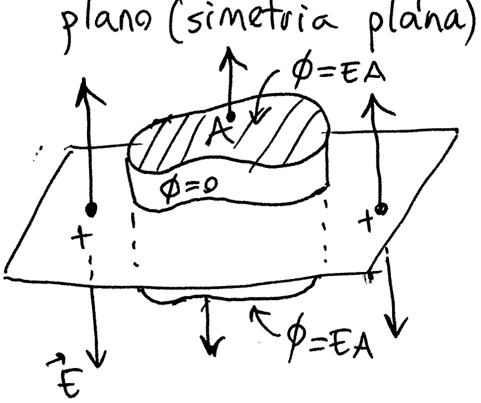
há dois casos:

ⓐ $r > R$, $q_{int} = Q \implies E = \dfrac{kQ}{r^2}$

ⓑ $r < R$, $q_{int} = 0 \implies E = 0$

Exemplo 2. Plano infinito com carga por unidade de superfície, σ, constante.

As linhas de campo devem ser perpendiculares ao plano (simetria plana)



S = cilindro com faces paralelas ao plano, nos dois lados do plano e à mesma distância:

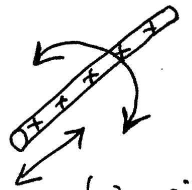
$\Phi_S = EA + 0 + EA = 2EA$

$q_{int} = \sigma A$

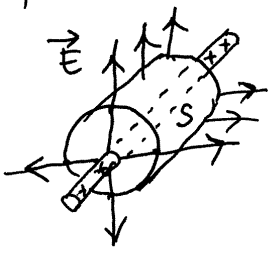
$\Longrightarrow \boxed{E = 2\pi k \sigma}$ constante!

Aula 12. 9-11-2016

Campo $\vec{E}$ dum fio retilíneo, muito comprido, com carga distribuída uniformemente



simetria cilíndrica



S = cilindro de raio r e altura L.
Há fluxo unicamente na parede lateral do cilindro:
$A_S = 2\pi r L$

$$\Rightarrow E = \frac{4\pi k\, q_{int}}{A_S} = \frac{2k q_{int}}{rL} \qquad \boxed{E = \frac{2k\lambda}{r}}$$

r = distância até o fio.

$\lambda = \frac{q}{L}$ = carga linear (por unidade de comprimento)

CAMPO E POTENCIAL

A diferença de potencial entre dois pontos (x,y,z) e $(x+\Delta x, y, z)$ é:

$$V(x,y,z) - V(x+\Delta x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Se o percurso de integração for a reta entre os pontos, então $d\vec{r} = \hat{\imath}\, dx$ e, como tal, valor médio

$$V(x,y,z) - V(x+\Delta x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x, y, z)} E_x\, dx = \bar{E}_x\, \Delta x$$

$$\Rightarrow E_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x,y,z) - V(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

(derivada parcial)

O mesmo pode ser feito para y e z:

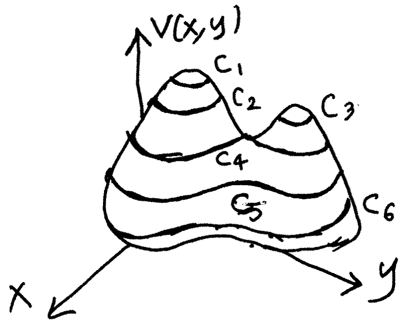
$$\Rightarrow E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

e combinando as 3 componentes,

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}} \quad \text{ou: } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

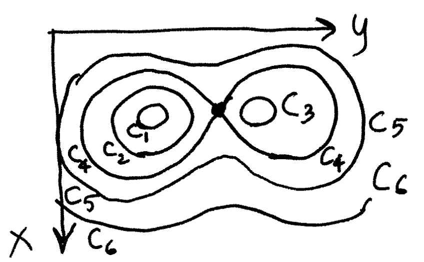
$-$ (gradiente da função V)

No caso de duas dimensões, (x,y), o potencial $V(x,y)$ pode ser representado como uma superfície em 3D.



Na figura, $C_1, C_2, \ldots, C_6$, são **curvas equipotenciais**, onde V tem um valor constante.

Essas curvas podem ser projetadas no plano xy, e podem ser consideradas como curvas de evolução de um sistema dinâmico com função Hamiltoniana $V(x,y)$.



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

(sistema hamiltoniano)

Como vimos em Física 1, este sistema pode ter centros (dentro de C_1 e C_3) ou pontos de sela (onde C_4 se cruza com si própria).

Não pode ter nem nós nem focos, porque o traço da matriz jacobiana é nulo!

O campo elétrico, $\vec{E}(x,y)$ pode também ser considerado como campo de direções de um sistema dinâmico com equações de evolução:

(sistema gradiente)

$$\begin{cases} \dot{x} = E_x \\ \dot{y} = E_y \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

jacobiana do gradiente de $V(x,y)$

matriz jacobiana:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix} = -H(x,y)$$

matriz hessiana da função $V(x,y)$.

Como a matriz hessiana é simétrica, um teorema de álgebra linear garante que os seus valores próprios são reais. Isso implica que o campo $\vec{E}$ só pode ter pontos de equilíbrio que sejam nós ou pontos de sela.

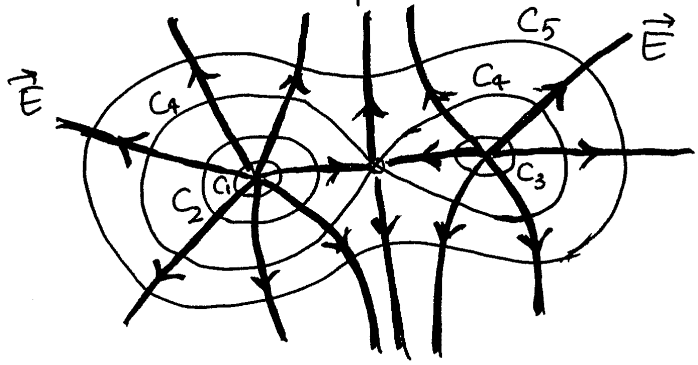
As velocidades de fase dos sistemas dinâmicos de V, $\vec{u}_V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}, -\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)$ e do campo $\vec{E}$, $\vec{u}_E = \left(-\dfrac{\partial V}{\partial x}, -\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)$ são perpendiculares: $\vec{u}_V \cdot \vec{u}_E$. Ou seja:

As linhas de campo elétrico são perpendiculares às curvas equipotenciais.

E os pontos de equilíbrio de V $(\vec{u}_V = \vec{0})$ são também pontos de equilíbrio de $\vec{E}$ $(\vec{u}_E = \vec{0})$ e são de 3 tipos:

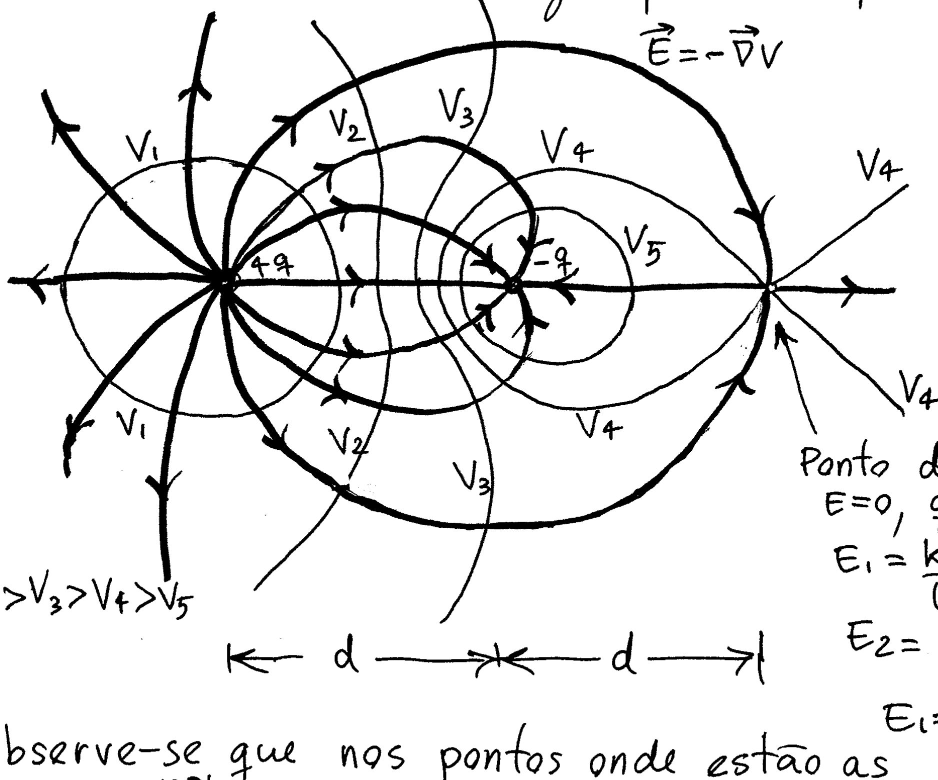
1. Mínimo local de $V(x,y)$: centro de $\vec{u}_V$ e nó atrativo de $\vec{u}_E$ (ponto onde há carga negativa)
2. Máximo local de $V(x,y)$: centro de $\vec{u}_V$ e nó repulsivo de $\vec{u}_E$ (ponto onde há carga positiva)
3. Ponto de sela de $\vec{u}_V$ e $\vec{u}_E$ (ponto onde o campo é nulo, mas não há carga).

- No exemplo do gráfico acima, há centros dentro de C_1 e C_2 e um ponto de sela em C_4:



máximos locais dentro de C_1 e C_3

- Outro exemplo é o campo $\vec{E}$ e equipotenciais de um sistema de duas cargas pontuais $+q$ e $-q$.



Ponto de sela
$E = 0$, $q = 0$
$E_1 = \dfrac{k(4q)}{(2d)^2}$
$E_2 = \dfrac{kq}{d^2}$
$E_1 = E_2$

$V_1 > V_2 > V_3 > V_4 > V_5$

- Observe-se que nos pontos onde estão as cargas, $|\vec{E}| \to \infty$, $|V| \to \infty$, mas $\vec{E} = \vec{0}$, porque $\vec{E}$ não aponta em nenhuma direção ($\hat{e}_{\vec{E}} = \vec{0}$)

Aula 13. 11-11-2016

Exemplo. Determine se os seguintes campos poderiam ser campos elétricos e, caso afirmativo, encontre a expressão do potencial: (a) $2x\hat{\imath} + xy\hat{\jmath}$ (b) $(2x+y)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$

Resolução (no Maxima).

(a) `E: [2*x, x*y]$`

`jacobian(E,[x,y]);` como a matriz jacobiana não é simétrica, o campo não é conservativo, logo não pode ser um campo elétrico

(b) `E: [2*x+y, x]$`

`jacobian (E, [x,y]);` $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

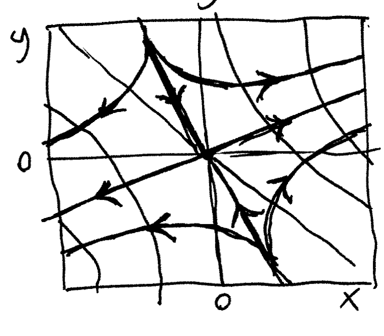
sim poderia ser um campo elétrico, com um único ponto de equilíbrio, em $(x=0, y=0)$.

`float (eigenvectors (%));` $\rightarrow$ $\lambda_1 = -0.4142$ $\lambda_2 = 2.4142$

$\vec{v}_1 = (1, -2.4142)$ $\vec{v}_2 = (1, 0.4142)$

$\Rightarrow$ ponto de sela na origem, repulsivo na reta $y = 0.4142x$ e atrativo na reta $y = -2.4142x$.

`plotdf(E,[x,y]);`
ativando/desativando as opções "fieldlines" e "curves", traçam-se as linhas de campo e curvas equipotenciais.



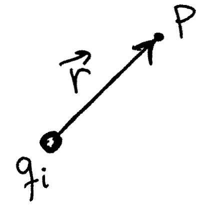
Cálculo do potencial:

`integrate(-E[1],x);` $\longrightarrow -xy - x^2$

`integrate(-E[2],y);` $\longrightarrow -xy$

$\Rightarrow \boxed{V(x,y) = -xy - x^2}$

POTENCIAL DE CARGAS PONTUAIS



Se q_i estiver na origem, o campo que produz em P é,

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i}{r^2}\hat{r}$$

arbitrando $V=0$ em $r \to \infty$, o potencial em P é:

$$V_i(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} \qquad \text{percurso radial} \Rightarrow d\vec{r} = \hat{r}\,dr$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \frac{k q_i}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_i(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \frac{k q_i}{r^2} dr = \frac{k q_i}{r} - 0$$

Se q_i não estiver na origem mas na posição $\vec{r}_i$,

$$\boxed{V_i(\vec{r}) = \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}$$

E o potencial de n cargas pontuais $q_1, q_2, \ldots, q_n$, nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ é igual a:

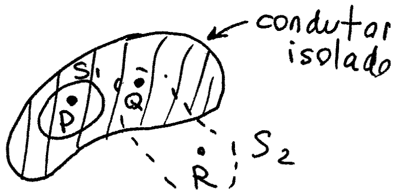
$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}$$

CAMPO E POTENCIAL NOS CONDUTORES

Em qualquer ponto no interior de um condutor isolado, $\vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow \Phi_{S_1} = 0$ em qualquer superfície fechada dentro do condutor

$\Rightarrow q_{int} = 0$ em qualquer região dentro do condutor



$E_P = E_Q = 0 \quad E_R \neq 0$

$\Phi_{S_1} = 0 \quad , \Phi_{S_2} \neq 0$

Numa região dentro duma curva S_2 com partes fora do condutor, Φ_{S_2} não tem de ser nulo e, como tal, pode existir carga dentro de S_2.

> Num condutor isolado só pode existir carga na sua superfície.

A diferença de potencial entre dois pontos P e Q dentro do condutor é nula:

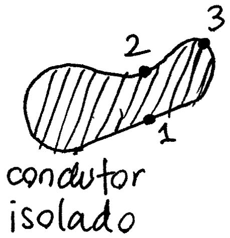
$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{seguindo um percurso}\\ \text{sempre dentro do condutor}\end{pmatrix}$$

> O potencial elétrico num condutor isolado é constante

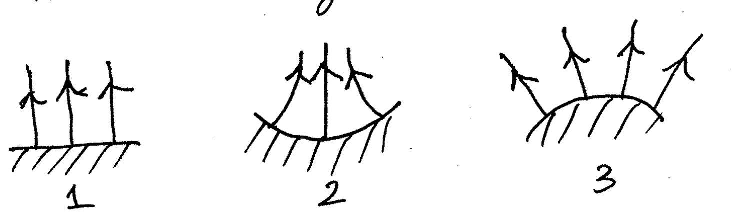
A própria superfície do condutor isolado é então superfície equipotencial, o que implica:

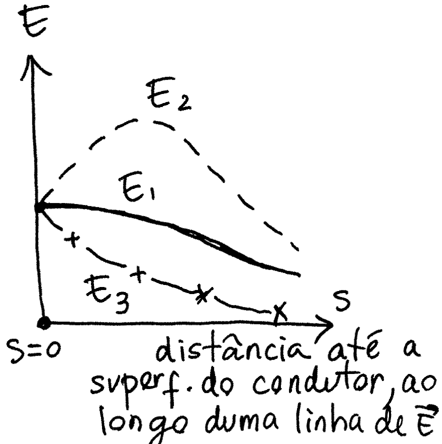
> O campo elétrico fora dum condutor isolado é perpendicular à sua superfície

DISTRIBUIÇÃO DE CARGA NUM CONDUTOR



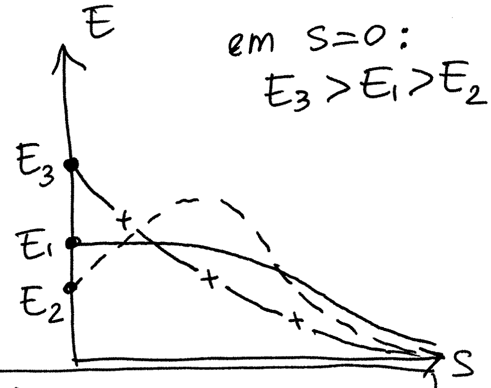
No ponto 1 o condutor é plano, no ponto 2 é côncavo e no ponto 3 é convexo. As linhas de campo nessas 3 regiões são:



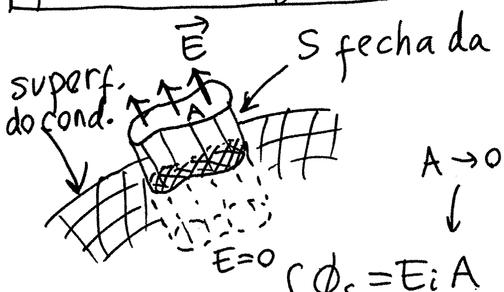


Em 1, o campo E_1 é aproximadamente constante. Em 2, E_2 aumenta, enquanto as linhas de campo se aproximam, mas logo diminui, quando estas se afastam. Em 3, E_3 diminui em função de S.

O integral $\int_0^\infty E_i\, ds$ deve dar o mesmo valor nos 3 casos, pois é o valor do potencial no condutor. Como tal, os gráficos corretos deverão ser como na figura à direita.



$\boxed{\text{O campo é mais forte nas regiões convexas e mais fraco nas regiões côncavas.}}$



$A \to 0$

$$\downarrow$$

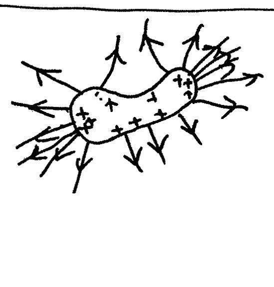
$$\begin{cases} \phi_s = E_i A \\ \phi_s = 4\pi k q_i \end{cases}$$

Em cada região da superfície do condutor, o módulo do campo, E_i, está relacionado com a carga superficial, σ_i, nessa região:

$$\Rightarrow \boxed{E_i = 4\pi k \sigma_i}$$

Assim sendo, conclui-se que:

$\boxed{\text{A carga superficial é maior nas regiões convexas e menor nas regiões côncavas}}$



Aula 14. 16-11-2016

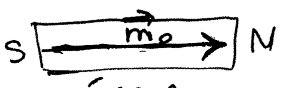
FORÇA MAGNÉTICA

Existem ímanes naturais; os primeiros foram encontrados nos mineiros da Magnésia, na Grécia antiga. Magnésia deu origem à palavra Magnético. A força magnética entre dois ímanes pode ser atrativa ou repulsiva.

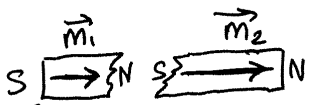
se os "polos" opostos estão próximos, a força é atrativa

se os polos semelhantes estão próximos, a força é repulsiva.

Os polos norte e sul não podem ser isolados. Todo íman tem sempre um polo norte e um polo sul. Uma forma conveniente de representar o íman é por um vetor **momento magnético**, $\vec{m}$, que aponta do polo sul para o polo norte:



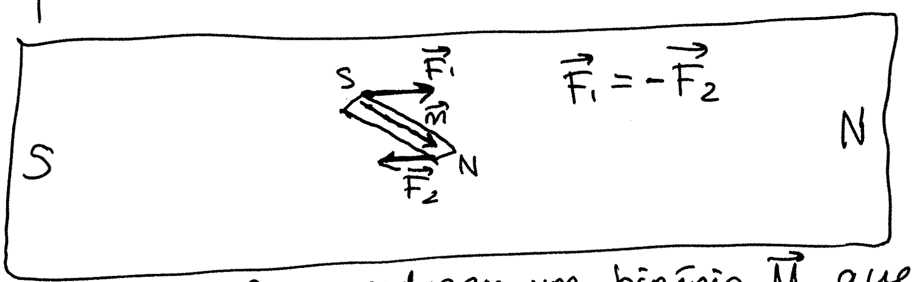
íman



$\vec{m}_1 + \vec{m}_2 = \vec{m}_0$

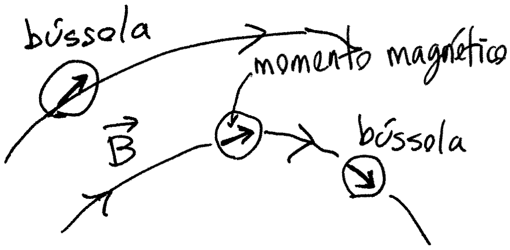
íman partido em dois pedaços

Quando o íman está longe dos dois polos de outro íman, as forças que esse segundo íman produz nos dois polos do primeiro íman, são iguais e opostas



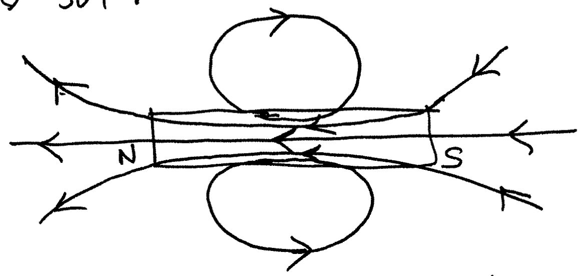
essas duas forças produzem um binário $\vec{M}$ que faz rodar o primeiro íman até o seu momento magnético $\vec{m}$ ficar na direção e sentido oposto do momento do segundo íman. Assim funciona a bússola.

CAMPO MAGNÉTICO



Campo vetorial $\vec{B}$ com linhas de campo que seguem as direções de uma bússola.

Por exemplo, as linhas de campo magnético de um íman retangular saem do polo norte e entram pelo polo sul:



Não existe nunca nenhum ponto onde comecem ou terminem linhas de campo $\vec{B}$ (consequência de não existirem monopolos). Mas sim existem pontos de sela, onde algumas linhas começam e outras terminam. Como tal, a matriz jacobiana de $\vec{B}$,

$$J_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

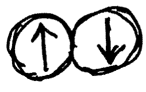
tem traço nulo, e o campo $\vec{B}$ não é conservativo. Condições essas que são equivalentes às seguintes equações vetoriais:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} \neq \vec{0} \quad \text{(em geral. Pode ser } \vec{0} \text{ em alguns pontos isolados)} \end{cases}$$

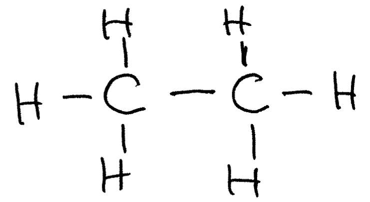
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{k}$$

FONTES DO CAMPO MAGNÉTICO

① **Spin** das partículas elementares. Cada eletrão é um pequeno íman com momento magnético chamado spin. Dois eletrões podem ficar colados mutuamente, devido à força magnética, ficando com os seus spins em sentidos opostos. Como tal, dois átomos podem ficar ligados quando um dos eletrões de valência de um dos átomos é atraído por um eletrão de valência do segundo átomo: <u>enlace covalente</u>.



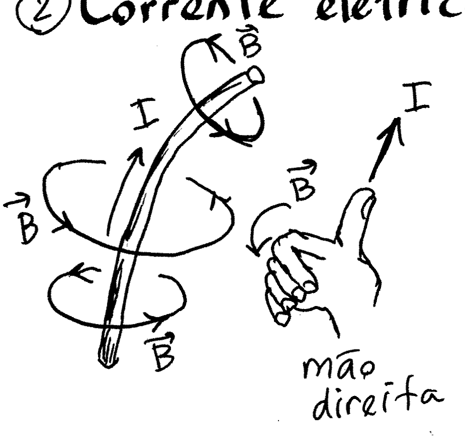
Por exemplo, na molécula de etano, há sete pares de eletrões de valencia colados; cada um desses 7 enlaces covalentes repressenta-se por uma barra.



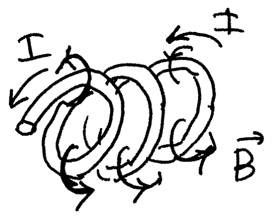
C → átomo de carbono com 4 eletrões de valência

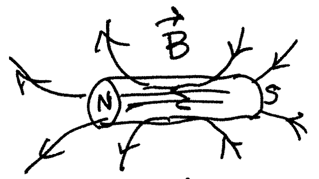
H → átomo de hidrogênio com 1 eletrão de valência.

② **Corrente elétrica**. Em 1820 Hans Christian Ørsted descobriu que um condutor com corrente I produz campo magnético, com linhas de campo que são circumferências perpendiculares ao condutor, e seguindo a regra da mão direita para I.

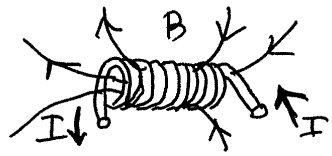


O campo $\vec{B}$ de um fio com corrente é fraco, mas se o fio for enrolado, formando uma bobina, consegue-se obter um campo muito mais elevado. O campo fica mais concentrado dentro da bobina, tal como num íman cilíndrico.



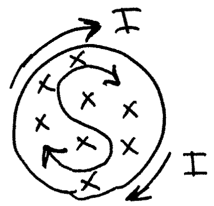


íman cilíndrico

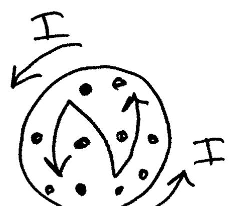


bobina cilíndrica (eletroíman)

O polegar da mão direita indica o sentido do momento magnético $\vec{m}$ da bobina, quando os outros 4 dedos seguem o sentido da corrente. As linhas de campo $\vec{B}$ que entram para lá da folha representam-se por X e as linhas que saem para cá da folha por meio de pontos •

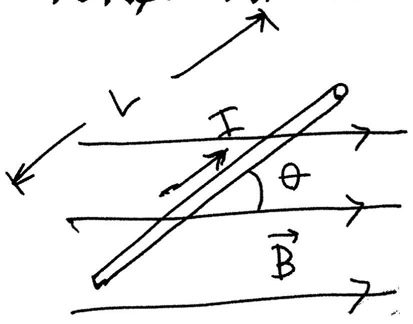


bobina vista do lado onde I é no sentido dos ponteiros do relógio (polo Sul)



bobina vista do lado onde I é no sentido contrário aos ponteiros do relógio (polo Norte)

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE FIOS COM CORRENTE



Se o fio é retilíneo, de comprimento L e o campo $\vec{B}$ é uniforme, formando um ângulo θ com a corrente $\vec{I}$, observa-se força sobre o fio, diretamente proporcional a:

- $\sin\theta$ (nula se $\theta = 0$ ou $\theta = 180°$, máxima se $\theta = 90°$)
- I
- L

$$\Rightarrow \quad F = I B L \sin\theta \qquad (\vec{F} \text{ perpendicular a } \vec{B} \text{ e a } \vec{I})$$

onde a constante de proporcionalidade, B, define o módulo do campo $\vec{B}$. O sentido de $\vec{F}$ segue a regra da mão direita, de $\vec{I}$ para $\vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B})\, L}$$

No caso de um fio qualquer e um campo qualquer, cada segmento infinitesimal do fio, de comprimento ds, pode considerar-se retilíneo e com campo $\vec{B}$ uniforme. Como tal, a força sobre um fio desde P até Q é:

$$\boxed{\vec{F} = \int_P^Q (\vec{I} \times \vec{B})\, ds}$$

se $\vec{I} \times \vec{B}$ for constante, $\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B})\, L$

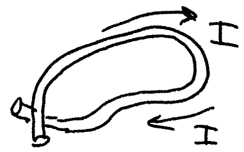
UNIDADE SI DE CAMPO MAGNÉTICO

$$1\,\text{T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}} = 1\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{campo } \vec{E} \\ \text{sobre} \\ \text{velocidade}\end{array}\right) \qquad 1\,\text{G} = 10^{-4}\,\text{T}$$

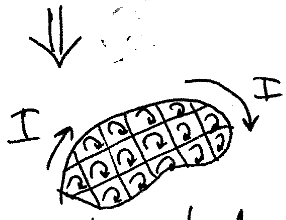
(tesla) (um gauss)

Aula 15. 18-11-2016

ESPIRAS

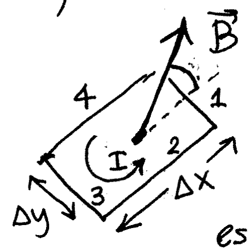


Um fio condutor que segue uma curva fechada chama-se espira. Uma espira com corrente I pode substituir-se por muitas espiras infinitesimais (malhas) com a mesma corrente I, com forma retangular.



n malhas, todas com corrente +I

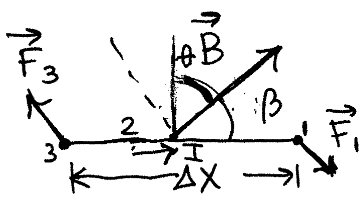
Quando há um campo externo $\vec{B}$, escolhendo um dos lados paralelo à projeção de $\vec{B}$ sobre a espira, as quatro forças magnéticas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$, sobre as quatro arestas são:



espira de área $\Delta x \Delta y$

lados 1, 2, 3 e 4.

Vista lateral



$F_1 = F_3 = I B \Delta y$

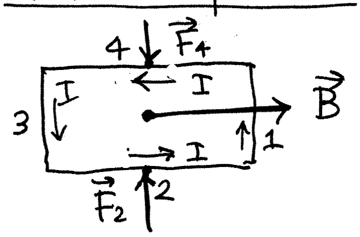
binário com braço

binário: $b = \Delta x \cos\beta = \Delta x \sin\theta$

$$|\Delta \vec{M}| = I B \sin\theta \, \Delta x \Delta y$$

Vista frontal

Vista superior



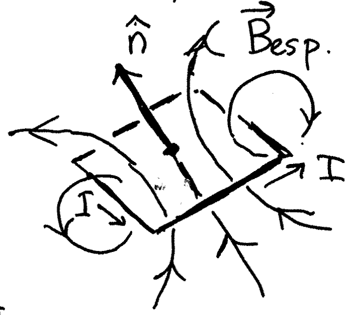
$F_2 = F_4 = I B \Delta x$

$\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{0}$

$\Delta x \Delta y = \Delta A =$ área da espira

$\theta =$ ângulo entre $\vec{B}$ e $\hat{n}$ (versor normal à espira, no sentido da mão direita para I)

$\hat{n}$ tem a mesma direção e sentido do campo $\vec{B}_{esp.}$, da própria espira, no seu centro.



De forma vetorial:

$$\Delta\vec{M} = I(\hat{n}\times\vec{B})\Delta A$$

faz rodar $\hat{n}$ para $\vec{B}$

o produto: $\boxed{\Delta\vec{m} = I\Delta A\,\hat{n}}$ define o <u>momento magnético</u> da espira e o momento do binário produzido pelo campo externo $\vec{B}$ é: $\Delta\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$

Numa espira qualquer, de área total A:

$$\vec{m} = I\iint_{sup.}\hat{n}\,dA \qquad \boxed{\vec{m} = AI\hat{n}} \text{ se } \hat{n} \text{ for constante}$$

$$\vec{M} = I\iint(\hat{n}\times\vec{B})\,dA$$

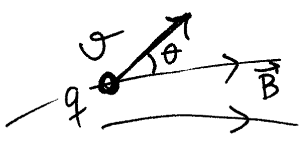
$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}, \text{ se } \vec{B} \text{ for uniforme}$$

BOBINAS

Uma bobina são N espiras, paralelas, todas com a mesma área A e a mesma corrente I

$$\Rightarrow \vec{m}_{bobina} = \sum_{i=1}^{N} AI\hat{n} \Rightarrow \boxed{\vec{m}_{bob.} = NAI\,\hat{n}}$$

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PONTUAIS

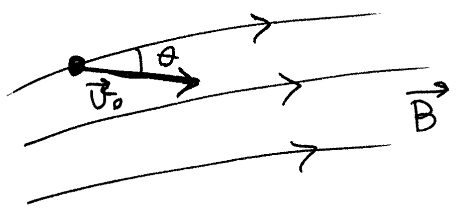


Uma partícula com carga q e velocidade $\vec{v}$, num ponto onde há campo magnético $\vec{B}$, sofre uma força magnética $\boxed{\vec{F}_m = q(\vec{v}\times\vec{B})}$

A força é perpendicular à velocidade e ao campo.

$$|\vec{F}_m| = v B q \sin\theta$$

Exemplo. Uma partícula dos raios cósmicos, com carga q, penetra no campo magnético da atmosfera com velocidade $\vec{v}_0$ que faz um ângulo θ com as linhas de campo magnético.

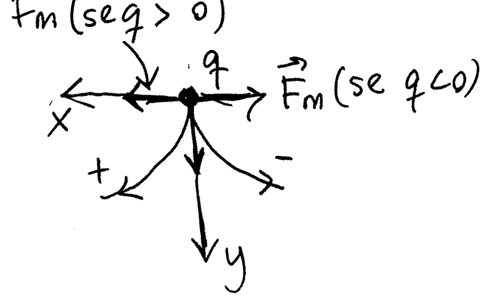


Escolhendo o eixo z na direção de $\vec{B}$ e o eixo x perpendicular ao plano de $\vec{v}_0$ e $\vec{B}$,

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin\theta\, \hat{j} + v_0 \cos\theta\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_m = q(\vec{v}_0 \times \vec{B}) = q v_0 (\sin\theta\, \hat{j} + \cos\theta\, \hat{k}) \times \hat{k}$$
$$= q v_0 \sin\theta\, \hat{\imath}$$

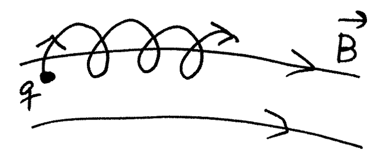
Como é perpendicular a $\vec{v}_0$, não há aceleração tangencial. O módulo da velocidade permanece constante. No plano xy:



Como $\vec{F}_m$ permanece sempre perpendicular a $\vec{B}$, será sempre no plano xy. A componente z da velocidade, $v_0 \cos\theta$, permanece constante.

v_x e v_y mudam, mas $v_x^2 + v_y^2 = v_0 \sin\theta$ (constante)

A partícula desloca-se ao longo das linhas de campo, com velocidade constante, enquanto descreve movimento circular no plano perpendicular a $\vec{B}$. O resultado é uma trajetória helicoidal.



As partículas com carga positiva rodam num sentido e as partículas com carga negativa no sentido oposto.

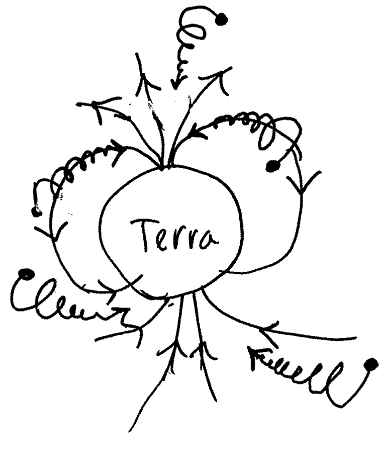
A força centrípeta, na projeção do plano no plano xy é:

$$F_m = B|q|v_0 \sin\theta = \frac{(v_x^2+v_y^2)m}{r}$$

$$B|q|v_0 \sin\theta = \frac{(v_0 \sin\theta)^2 m}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{m v_0 \sin\theta}{|q|B}}$$

raio de curvatura da projeção xy da hélice.

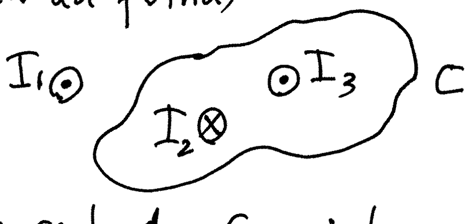
Nas regiões onde B é mais forte, próximo dos polos, o raio é menor. As partículas concentram-se assim nos dois polos, dando origem às auroras Boreais ou australis.



Aula 16. 23-11-2016

LEI DE AMPÉRE

exemplo: 3 fios retilíneos, com correntes I_1, I_2, I_3 (I_2 para cá e I_1, I_3 para lá da folha)

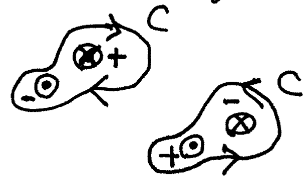


Em qualquer curva fechada, C, o integral de linha do campo $\vec{B}$ produzido pelas correntes é proporcional à corrente no interior de C:

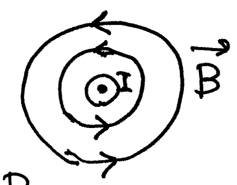
$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{int}} \qquad k_m = 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}$$

(constante magnética)

Se C for percorrida no sentido horário, $I_{int} = I_2 - I_3$ e se C for percorrida em sentido anti-horário, $I_{int} = I_3 - I_2$ (regra da mão direita)



Campo dum fio retilínco:



se C for uma das linhas de campo,

$$\Longrightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\oint_C ds = 2\pi r B$$

e, pela lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I$$

comparando os dois resultados, obtém-se a expressão do módulo do campo do fio:

$$\boxed{B_{fio} = \frac{2\,k_m I}{r}}$$

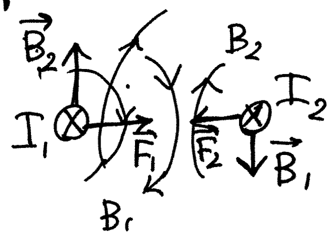
Força magnética entre dois fios retilíneos, paralelos, com corrente

① correntes no mesmo sentido

$\vec{F}_1 = (\vec{I}_1 \times \vec{B}_2) L$

$\vec{F}_2 = (\vec{I}_2 \times \vec{B}_1) L$

forças atrativas

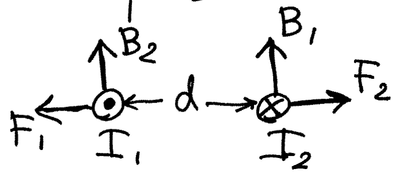


$$F_1 = F_2 = \frac{2 k_m I_1 I_2 L}{d}$$

d = distância entre os fios

② correntes em sentidos opostos

→ forças repulsivas

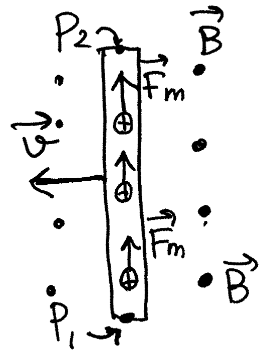


$$F_1 = F_2 = \frac{2 k_m I_1 I_2 L}{d}$$

INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

As correntes elétricas produzem campos magnéticos. De forma inversa, o campo magnético pode produzir força eletromotriz, que pode ser usada para gerar corrente num circuito.

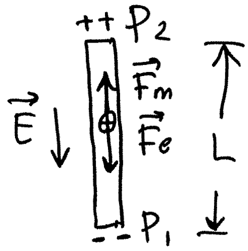
Um exemplo é uma barra condutora, recta, que se desloca com velocidade $\vec{v}$ dentro dum campo magnético $\vec{B}$, perpendicular a $\vec{v}$ e uniforme.



Sobre cada carga de condução atua a força magnética

$$\vec{F}_m = (\vec{v} \times \vec{B}) q$$

para cima, no caso $q > 0$



A nuvem de condução desloca-se, acumulando-se carga positiva em P_2 e negativa em P_1, dando origem a um campo elétrico $\vec{E}$, para baixo, que produz força elétrica $\vec{F}_e$ nas cargas de condução. Atinge-se o equilíbrio quando a força total, $\vec{F}_m + \vec{F}_e$, for nula:

$$\vec{F}_{total} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

$V_{P_2} > V_{P_1}$. A diferença de potencial entre P_1 e P_2 chama-se **fem induzida** (devida ao movimento direto do campo magnético)

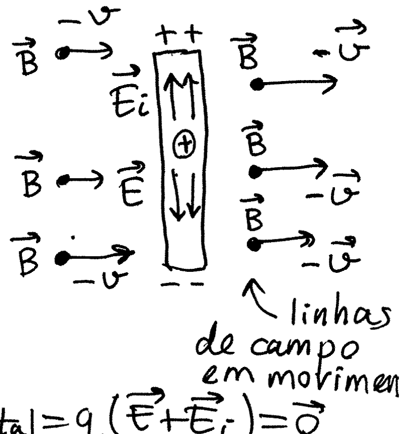
$$\mathcal{E}_i = -\int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{r}}_{-|\vec{E}| = -vB} = -\int_{P_1}^{P_2} (-vB)\, ds = vBL$$

$\leftarrow$ comprimento da barra

No caso geral, em que $\vec{B}$ não é uniforme e a barra não é reta,

$$\mathcal{E}_i = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_i = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}}$$

No referencial que se desloca com a barra, a velocidade da barra é nula. Não há então força magnética $\vec{F}_m$. O equilíbrio explica-se pela aparição de um <u>campo elétrico induzido</u>, devido ao movimento das linhas de campo $\vec{B}$:



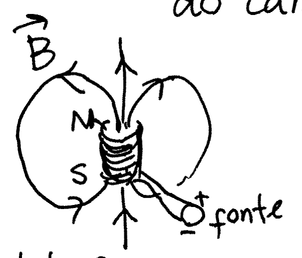
$$\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \vec{F}_{total} = q(\vec{E} + \vec{E}_i) = \vec{0}$$

menos a velocidade das linhas de campo

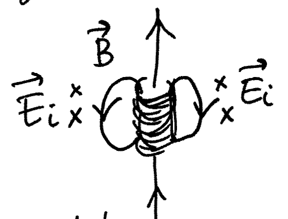
A expressão $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ é valida se $\vec{B}$ for um campo estático e $\vec{v}$ for medida em relação a esse campo estático.
Quando $\vec{B}$ não é estático, há que acrescentar o campo $\vec{E}_i$ induzido e a força $q\vec{E}_i$

$\vec{E}$: campo elétrico produzido por cargas. Conservativo.

$\vec{E}_i$: campo elétrico induzido pela variação do campo magnético. Não conservativo.



eletroíman com corrente I_1

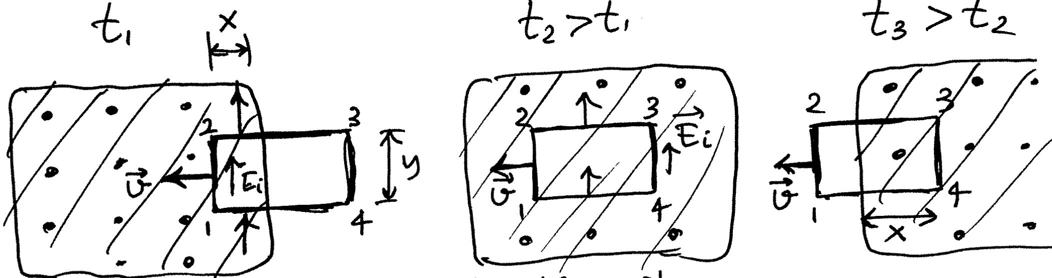


eletroíman com corrente $I_2 < I_1$

se I diminui, as linhas de $\vec{B}$ aproximam-se do íman e aparece campo induzido $\vec{E}_i$

A fem induzida, tal como uma pilha, pode produzir corrente num circuito.

Exemplo. Espira retangular a atravessar uma região onde há campo magnético uniforme, $\vec{B}$:

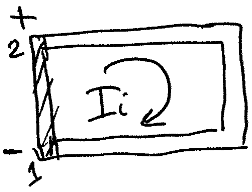


região com campo $\vec{B}$

x = parte da espira dentro do campo $\vec{B}$.

• em t_1, $\int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = +vBy$ $\int_2^3 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_3^4 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_4^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = vBy$ (maior potencial em 2 do que em 1)



corrente induzida:

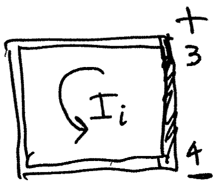
$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{vBy}{R}$ no sentido horário

• em t_2, $\int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = +vBy$, $\int_3^4 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -vBy$

(zero entre 2 e 3, e entre 4 e 1)

$\Rightarrow \mathcal{E}_i = 0$ $\boxed{I_i = 0}$

• em t_3, $\int_3^4 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -vBy$ (zero nos outros 3 lados da espira)



$\mathcal{E}_i = -vBy$ (maior potencial em 3 do que em 4)

$I_i = \frac{vBy}{R}$ no sentido anti-horário

Observe-se que: $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} +v, & \text{em } t_1 \\ 0, & \text{em } t_2 \\ -v, & \text{em } t_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_i = By\frac{dx}{dt} = \frac{d(Bxy)}{dt} = \frac{d(AB)}{dt}$ $A = xy =$ área dentro do campo

LEI DE FARADAY

$$\boxed{\mathcal{E}_i = \frac{d\Psi}{dt}}$$

Ψ = fluxo magnético através da espira

$\Psi = BA = Bxy$, quando $\vec{B}$ é uniforme e perpendicular à espira.

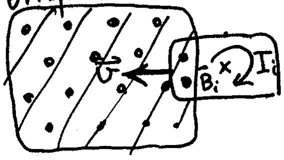
Aula 17. 25-11-2016

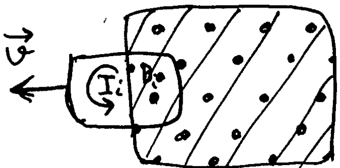
Lei de Lenz

A corrente induzida é no sentido que produz campo magnético induzido, $\vec{B}_i$, que contraria a variação do fluxo magnético Ψ.

Exemplo 1.

$\vec{B}$ uniforme e constante

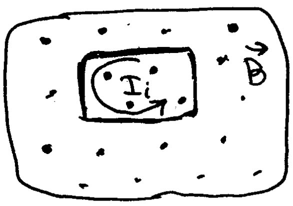




Ψ para cá, a aumentar $\Rightarrow$ corrente no sentido dos ponteiros do relógio; $\vec{B}_i$ para lá (contraria Ψ)

Ψ para cá, a diminuir $\Rightarrow$ corrente no sentido oposto aos ponteiros do relógio. $\vec{B}_i$ para cá (aumentando Ψ).

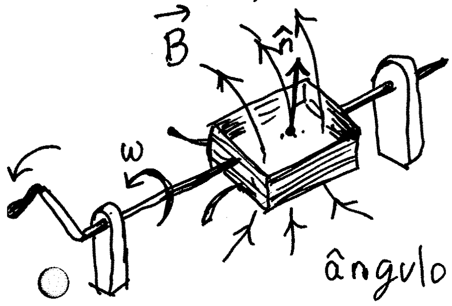
Exemplo 2.



Espira estática, dentro dum campo $\vec{B}$ uniforme mas a diminuir em função do tempo.

$\Rightarrow \Psi = AB$ diminui $\Rightarrow$ corrente induzida no sentido anti-horário e campo $\vec{B}_i$ induzido para cá.

Exemplo 3.



Bobina com N espiras de área A, a rodar com velocidade angular, dentro dum campo magnético $\vec{B}$ constante.

$$\Psi = (\vec{B}\cdot\hat{n})AN = NAB\cos\theta$$

ângulo entre $\hat{n}$ e $\vec{B} = \theta = \omega t + \theta_0$

$$\Rightarrow \Psi = NAB\cos(\omega t + \theta_0)$$

fem induzida na bobina:

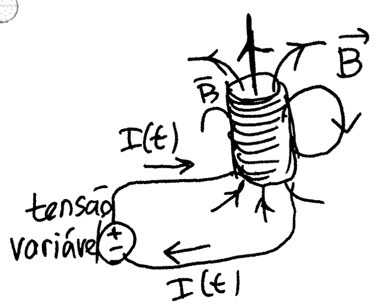
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = NAB\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

essa fem variável de forma sinusoidal chama-se **tensão alternada**. O valor máximo da tensão é $V_{max} = NAB\omega$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = V_{max} \sin(\omega t + \theta_0)}$$

e o dispositivo usado é um alternador.

AUTO INDUÇÃO



A corrente I numa bobina produz campo $\vec{B}$ e fluxo magnético através dela própria. Se a corrente varia, I(t), a variação do fluxo magnético produz uma fem induzida que contraria a variação na corrente.

Como tal, a corrente numa bobina não pode mudar instantaneamente de 0 para $I \neq 0$, ou de $I \neq 0$ para 0.

O campo médio $\bar{B}_n$, na direção normal às espiras, é diretamente proporcional à corrente na bobina e ao número de espiras:

$$\bar{B}_n = \underset{\text{constante}}{C} I N \implies \Psi = NA\bar{B}_n = N^2 A C I$$

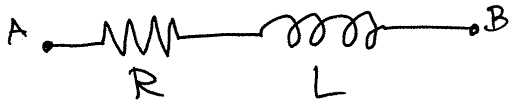
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N^2 A C \frac{dI}{dt}$$

para além da voltagem $\Delta V = RI$ na bobina, existe então outra voltagem:

$$\boxed{\Delta V = -L\frac{dI}{dt}}$$

onde L é uma constante chamada **indutância**

O diagrama de circuito da bobina é o seguinte

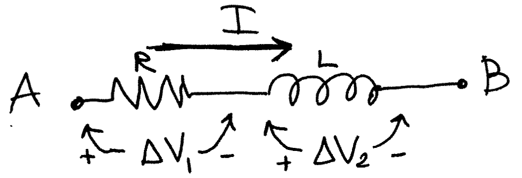


resistência R e indutância L.

<u>unidade SI de indutância</u> : henry (H)

$$1\,\text{H} = 1\,\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}$$

Se houver corrente a circular de A para B:

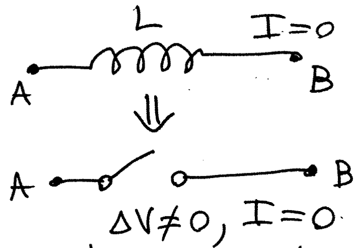


$$\Delta V = V_A - V_B$$
$$= \Delta V_1 + \Delta V_2$$
$$\Delta V = RI - L\frac{dI}{dt}$$

Se a corrente estiver a aumentar, a indutância controla esse aumento, reduzindo a voltagem. Se I diminuir, a indutância contraria a diminuição aumentando a voltagem.

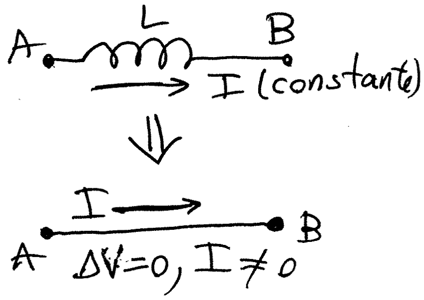
CIRCUITOS COM INDUTORES

① Quando a corrente é nula no indutor, $\Delta V = -L\frac{dI}{dt}$ não tem de ser nula; pode ter qualquer valor.

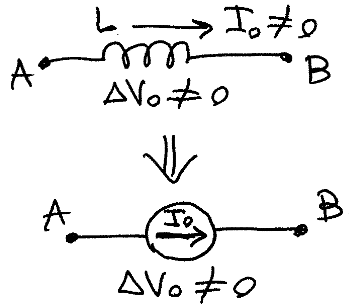


O indutor é equivalente a um interruptor aberto

② No estado estacionário, quando I tem valor constante, ΔV é nula.
O indutor é equivalente a um curto-circuito.

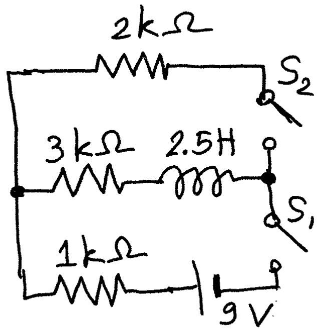


(3) No estado transitório, num instante t_0 em que ΔV_0 e I_0 são ambos diferentes de zero, o indutor é equivalente a uma fonte de corrente I_0, sem resistência interna.

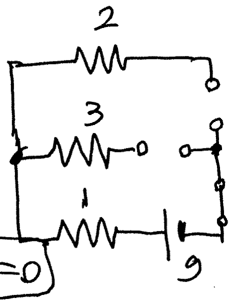


Exemplo.

O interruptor S_1 fecha-se num instante t_1 e, muito tempo depois, fecha-se o interruptor S_2 no instante t_2. Determine as correntes nas três resistências em t_1, em t_2, e quando $t \to \infty$.

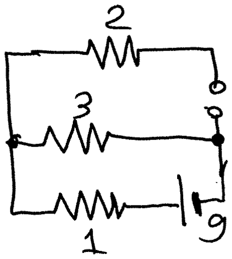


Resolução (a) Em t_1, como não há corrente no indutor, funciona como interruptor aberto. Como tal, as 3 correntes são nulas: $\boxed{I_1 = I_2 = I_3 = 0}$



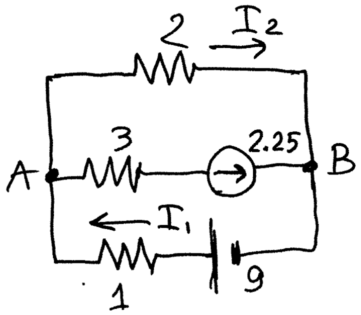
$R \to k\Omega$
$\Delta V \to V$
$\Rightarrow I \to mA$

(b) Quando t se aproxima de t_2, mas $t < t_2$, admite-se que as correntes já aumentaram até os valores de equilíbrio; o indutor é então equivalente a um curto-circuito e as duas resistências de 1 e 3 estão em série:



$$I_1 = I_3 = \frac{9}{1+3} = 2.25 \text{ mA}$$

$$I_2 = 0$$



(c) Em t_2, quando se fecha S_2, o indutor deixa de estar em estado estacionário ($\Delta V \neq 0$) e passa a ser equivalente a uma fonte de corrente $I = 2.25$ mA.

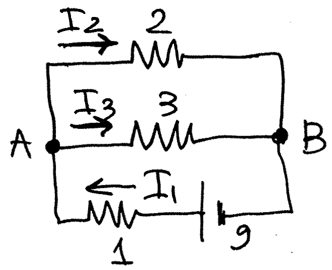
$$\Rightarrow \boxed{I_3 = 2.25\ \text{mA}}$$

Na resistência de 2kΩ: $V_A - V_B = 2 I_2$

Na resistência de 1kΩ: $V_A - V_B = 9 - I_1$

lei dos nós (em A ou B) : $I_2 + I_3 = I_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 I_2 = 9 - I_1 \\ I_2 + 2.25 = I_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I_1 = 4.5\ \text{mA}} \quad \boxed{I_2 = 2.25\ \text{mA}}$$



(d) No limite $t \to \infty$, o circuito estará novamente no estado estacionário e o indutor será equivalente a um curto-circuito.

$$I_1 = \frac{9}{1 + \frac{2 \times 3}{2+3}} = \frac{45}{11} = \boxed{4.09\ \text{mA}}$$

$$V_A - V_B = \frac{45}{11}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{54}{11}$$

$$I_2 = \frac{54}{11}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{11} = \boxed{2.45\ \text{mA}}$$

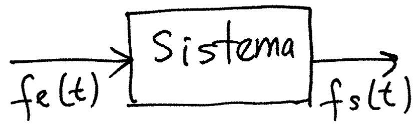
$$I_3 = \frac{54}{11}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{18}{11} = \boxed{1.64\ \text{mA}}$$

Observe-se que I_1 e I_3 diminuim em $t \geq t_2$.

Aula 18. 30-11-2016

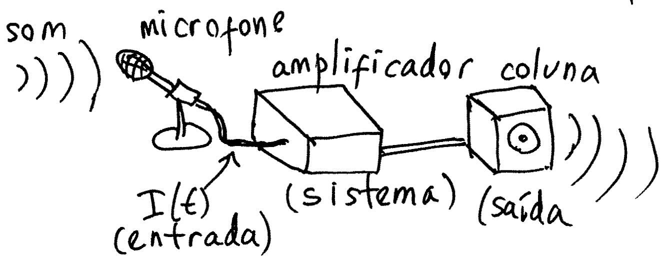
SINAIS E SISTEMAS

Um sinal é uma função do tempo, $f(t)$. Um sistema é um dispositivo que transforma um **sinal de entrada** $f_e(t)$, num outro **sinal de saída**, $f_s(t)$

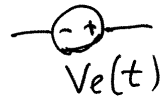
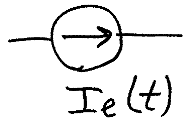


a cada possível entrada f_e corresponde uma saída f_s.

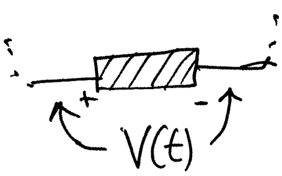
No caso dos circuitos elétricos, os sinais são voltagens ou correntes variáveis. Por exemplo:

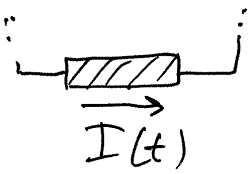


a onda eletromagnética produz fem induzida na antena (entrada) e a saída e uma corrente que produz som no altifalante

O sistema é um circuito elétrico.
O sinal de entrada representa-se por uma fonte variável,  , ou, 

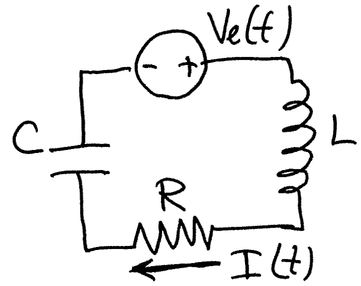
E o sinal de saída é a voltagem, ou corrente medida em algum elemento no circuito:





(não vamos escrever o índice "s" de saída)

Exemplo. Circuito RLC com fonte de tensão variável (entrada) e saída igual à corrente na resistência.



Para determinar a relação entre a saída, $I(t)$ e a entrada, $V_e(t)$, usa-se a regra da malha:

$$V_e - L\frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0$$ (I e V_e são funções de t)

se em $t=0$ o condensador estava descarregado,

$$\Longrightarrow \quad Q = \int_0^t I\,dt$$

$$\Longrightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt = V_e$$

derivam-se os dois lados da equação, em ordem ao tempo t,

$$\boxed{L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}_e}$$

equação diferencial ordinária, linear, não-homogénea, de coeficientes constantes.

Este tipo de EDO pode ser resolvida aplicando a transformada de Laplace nos dois lados:

transformada de $I(t) \rightarrow \tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$

transformada de $V_e(t) \rightarrow \tilde{V}_e(s) = \mathcal{L}\{V_e(t)\}$

onde $\tilde{I}(s)$ e $\tilde{V}_e(s)$ são funções que dependem duma variável real s, com unidades de frequência.

usando propriedades da transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{\dot{I}\} = s\tilde{I} - I(0) \ , \ \mathcal{L}\{\ddot{I}\} = s^2\tilde{I} - s\dot{I}(0) - I_0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{V}_e\} = s\tilde{V}_e - V_e(0)$$

E, como tal, a equação diferencial, no domínio da frequência s, é:

$$L^2\left(s^2\tilde{I} - s\dot{I}(0) - I(0)\right) + R\left(s\tilde{I} - I(0)\right) + \frac{\tilde{I}}{C} = s\tilde{V}_e - V_e(0)$$

$$\Longrightarrow \tilde{I} = \frac{s\tilde{V}_e - V_e(0) + sL^2\dot{I}(0) + L^2 I(0) + R I(0)}{s^2L^2 + sR + \frac{1}{C}}$$

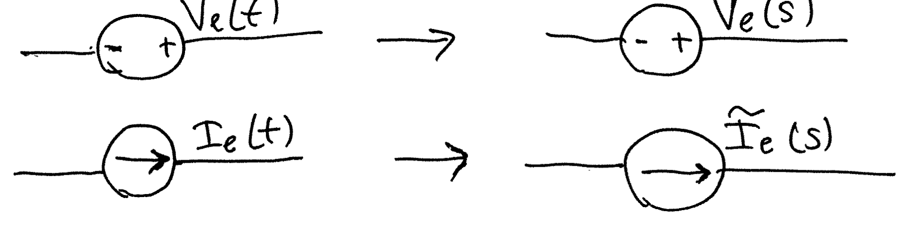
e $I(t)$ é a transformada inversa dessa expressão.

IMPEDÂNCIA

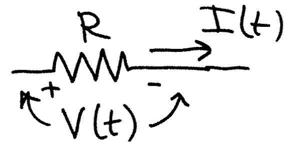
Uma forma mais simples de obter a equação do circuito, no domínio da frequência, consiste em transformar a relação entre $\Delta V(t)$ e $I(t)$, para cada tipo de dispositivo, numa expressão equivalente, no domínio da frequência, e a seguir simplificar o circuito no domínio da frequência. Considerem-se os 4 tipos de dispositivos seguintes:

① Fontes de tensão ou corrente

Domínio do tempo t — Domínio da frequência s

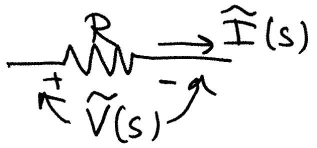


② Resistências.

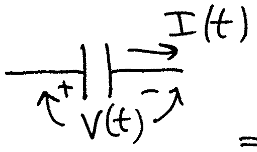


$$V(t) = R\,I(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{V}(s) = R\,\tilde{I}(s)}$$



③ Condensadores

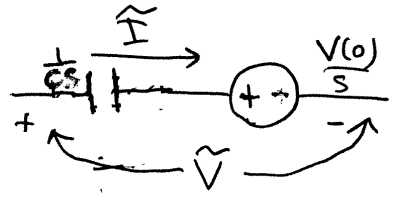


$$I(t) = \dot{Q}(t)$$

$$\Rightarrow I(t) = C\,\dot{V}(t)$$

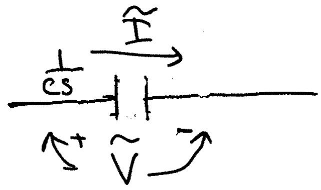
$$\Rightarrow \tilde{I}(s) = Cs\tilde{V}(s) - CV(0)$$

$$\Rightarrow \tilde{V}(s) = \frac{\tilde{I}(s)}{Cs} + \frac{V(0)}{s}$$

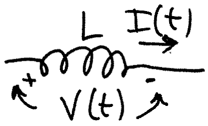


No caso em que o condensador está descarregado em $t=0$, então $V(0)=0$ e o equivalente no domínio s é:

$$\boxed{\tilde{V}(s) = \left(\frac{1}{Cs}\right)\tilde{I}(s)}$$

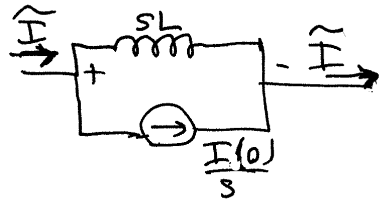


④ Indutores



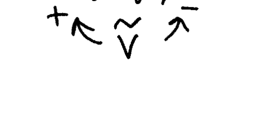
$$V(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \tilde{V} = L\left(s\tilde{I} - I(0)\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{sL} + \frac{I(0)}{s}$$



Se $I(0)=0$,

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{V}(s) = sL\,\tilde{I}(s)}$$

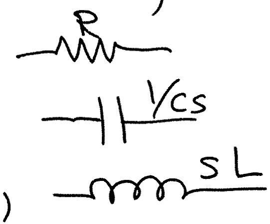


Em todos os elementos passivos (resistência, condensadores e indutores), é válida a **lei de Ohm no domínio da frequência**:

$$\boxed{\tilde{V} = Z\,\tilde{I}}$$ (se em $t=0$ a corrente e a voltagem são nulas)

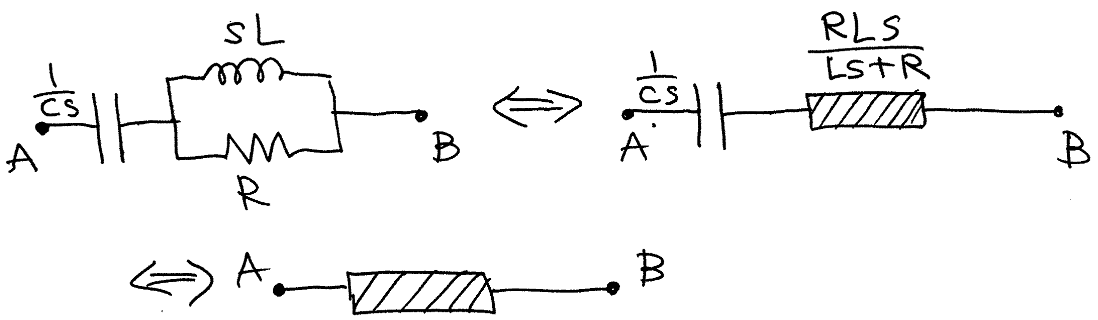
onde Z é uma função de s, chamada **impedância**

$$Z(s) = \begin{cases} R\,, \\ \dfrac{1}{Cs}\,, \\ sL\,, \end{cases}$$



Observe-se que $\frac{1}{Cs}$ tem unidades de segundo sobre farad, que é igual a ohm, e sL tem unidades de henry sobre segundo, que também é igual a ohm. (Z tem unidades de resistência).

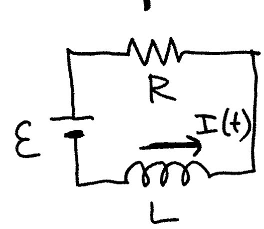
Várias impedâncias combinam-se usando as mesmas regras usadas para resistências, já que a relação é semelhante à lei de Ohm, $\Delta V = RI$. Por exemplo,

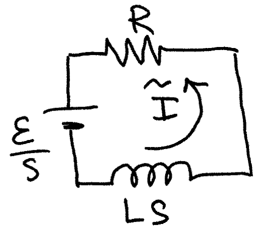


$$Z_{eq} = \frac{1}{Cs} + \frac{RLs}{Ls+R} = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{LCs^2 + RCs}$$

Aula 19. 2-12-2016

Exemplo 1. Circuito RL com fonte de tensão contínua.



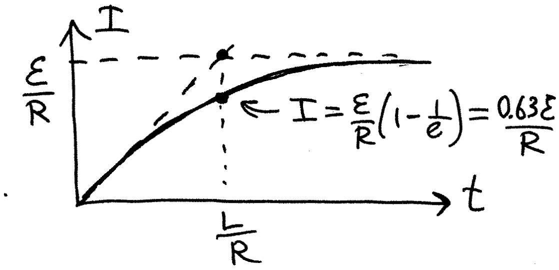


laplace($\mathcal{E}$, t, s); $\rightarrow$ $\frac{\mathcal{E}}{s}$

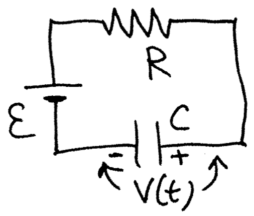
$$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}/s}{R + Ls}$$

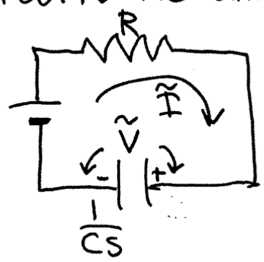
ilt($\mathcal{E}$/s/(R+L*s), s, t); $\rightarrow$ $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

constante de tempo $= \frac{L}{R}$
= tempo que demora até
I aumentar até 63% de $I_{máx}$.



Exemplo 2. Circuito RC com fonte de tensão contínua



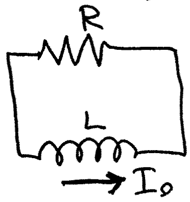


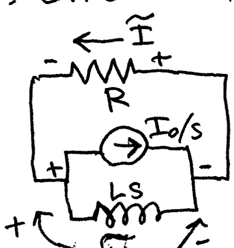
$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{\mathcal{E}/s}{1 + RCs}$$

$$\Rightarrow V(t) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

constante de tempo = RC = tempo até $V = 0.63\,\mathcal{E}$

Exemplo 3. Circuito RL com corrente inicial I_0.





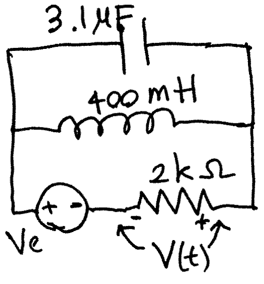
$$\tilde{I} = \frac{I_0}{s} + \frac{\tilde{V}}{Ls} = \frac{I_0}{s} - \frac{R\tilde{I}}{Ls}$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{I_0}{s + \frac{R}{L}}$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0\, e^{-\frac{Rt}{L}}$$

em $t = \frac{L}{R}$, $I = 0.37\, I_0$

Exemplo 4. Determine a voltagem na resistência, quando a voltagem da fonte é: $V_e = 5(1 - e^{-600t})$ (unidades SI)



Unidades. Escolhe-se $\boxed{\Delta V \to V,\ R \to k\Omega}$

$\Rightarrow \boxed{I \to mA}$

Como, $Z = \dfrac{1}{Cs}$, então se $\boxed{C \to \mu F}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu F \cdot k\Omega} = 10^3\,Hz \quad \Rightarrow \quad \boxed{s \to kHz} \Rightarrow \boxed{t \to ms}$$

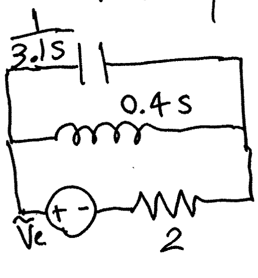
as unidades de L já não podem ser arbitrárias, porque:

$$Z = Ls \quad \Rightarrow \quad \frac{k\Omega}{kHz} = H \quad \Rightarrow \quad \boxed{L \to H}$$

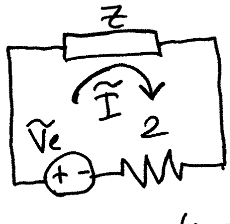
Para expressar $V_e(t)$ nessas unidades, observe-se que $600t$, com t em segundos, é igual a $0.6t$, com t em ms.

```
Ve: 5*(1-exp(-0.6*t))$
ve: laplace(Ve, t, s);
```

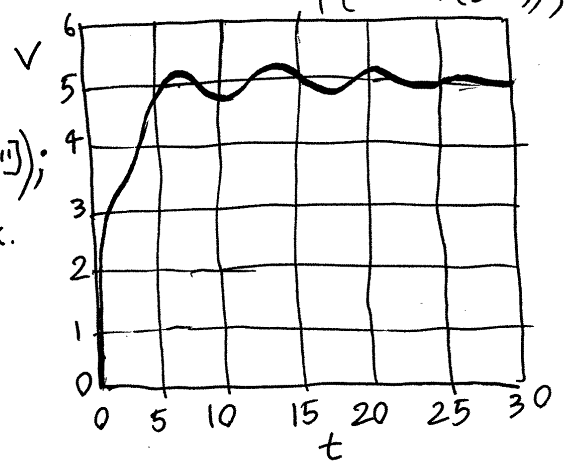
$\longrightarrow \quad \tilde{V}_e = 5\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+0.6}\right)$



$\Longleftrightarrow$




```
Z: 0.4*s/(3.1*s)/
   (0.4*s + 1/(3.1*s))$
v: ratsimp(2*ve/(Z+2));
V: ilt(v, s, t);
plot2d(V, [t, 0, 30], [ylabel, "V"]);
```



V aumenta por cima de $V_{e\,máx}$. e tem oscilações próprias do circuito (não dependem de V_e).

Seja um sinal de entrada Ve(t) qualquer, então:

```
remvalue(ve)$
v: ratsimp(2*ve/(z+2));
```

$\rightarrow \boxed{\tilde{V} = \dfrac{(31s^2+25)}{(31s^2+5s+25)}\tilde{V}_e}$

que pode ser escrito também assim:

$$(31s^2+5s+25)\tilde{V} = (31s^2+25)\tilde{V}_e$$

e é fácil de ser identificado como a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial.

$$\boxed{31\ddot{V}+5\dot{V}+25V = 31\ddot{V}_e+25V_e}$$ equação diferencial do sistema.

A equação homogénea correspondente,

$31\ddot{V}+5\dot{V}+25V=0$ é um sistema dinâmico linear: $\begin{cases}\dot{V}=U\\ \dot{U}=-\dfrac{5U+25V}{31}\end{cases}$

Matriz jacobiana:

$J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{25}{31} & -\frac{5}{31}\end{bmatrix}$ valores próprios λ_1 e λ_2 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{5}{31}\\ \lambda_1\lambda_2=\dfrac{25}{31}\end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\dfrac{5}{62} \pm i\,\dfrac{5\sqrt{123}}{62}$ (raízes do polinómio característico $31\lambda^2+5\lambda+25=0$)

```
solve(denom(v));
```

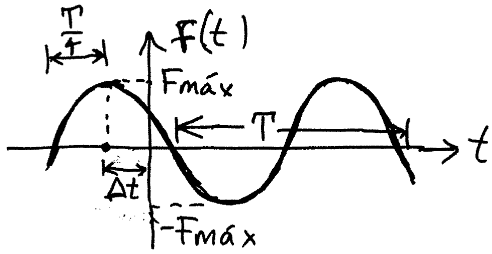
$\longrightarrow \lambda_{1,2} = -\dfrac{5}{62} \pm i\,\dfrac{5\sqrt{123}}{62}$

Como tal, este sistema tem um **foco atrativo** e oscila com frequência angular:

$\omega = \text{parte imaginária}(\lambda) = \dfrac{5\sqrt{125}}{62}$ (período = 7.025)

Aula 20. 7-12-2016

FASORES



Função sinusoidal: função com período T, amplitude $F_{máx}$ e desfasamento Δt, que pode ser escrita na forma

$$F = F_{máx} \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t+\Delta t)\right)$$

ou, ainda,

$$F = F_{máx} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t+\Delta t+\frac{T}{4}\right)\right)$$

frequência angular $= \frac{2\pi}{T} = \omega$

fase inicial $= \frac{2\pi\Delta t}{T} = \varphi$ $\Rightarrow \boxed{F(t) = F_{máx} \cos(\omega t + \varphi)}$

F pode ser escrita também nas formas seguintes:

$$F(t) = F_R \cos(\omega t) - F_I \sin(\omega t) \qquad \begin{cases} F_R = F_{máx} \cos\varphi \\ F_I = F_{máx} \sin\varphi \end{cases}$$

$$F(t) = \text{Re}\big((F_R + i F_I)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\big)$$

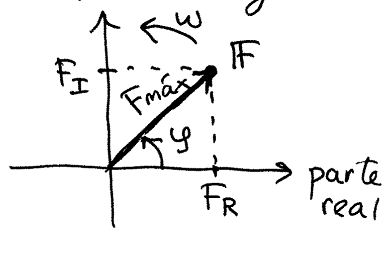
função "parte real"

$$F(t) = \text{Re}\left((F_R + i F_I)\, e^{i\omega t}\right)$$

Ou seja, cada função sinusoidal com frequência ω é caraterizada por um número complexo

$$\mathbb{F} = F_R + i F_I$$

chamado **FASOR** da função.



O produto $\mathbb{F} e^{i\omega t}$ faz rodar $\mathbb{F}$ no plano complexo, um ângulo ωt, no sentido positivo.

Como tal, todas as funções sinusoidais com frequência angular ω podem ser visualizadas como a projeção no eixo real, de vetores que rodam, no plano complexo, com velocidade angular ω, no sentido positivo.
No instante $t=0$, o vetor é o fasor $\mathbb{F}$ da função, com módulo F_{max} e ângulo φ com semi-eixo real positivo:

$$\boxed{\mathbb{F} = F_{máx}\cos\varphi + i\,F_{máx}\sin\varphi}$$

Outra notação comumente usada é: $\boxed{\mathbb{F} = F_{máx}\angle\varphi}$

$$\mathbb{F} = F_{máx}\,e^{i\varphi}$$

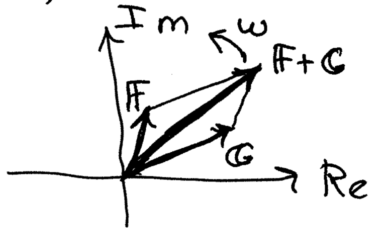
Soma de funções sinusoidais.

A soma de duas funções com fasores $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$, e com a mesma frequência angular, ω é:

$$F_{máx}\cos(\omega t+\varphi) + G_{máx}\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}(\mathbb{F}e^{i\omega t}) + \mathrm{Re}(\mathbb{G}e^{i\omega t})$$
$$= \mathrm{Re}\left((\mathbb{F}+\mathbb{G})e^{i\omega t}\right)$$

Ou seja, a soma é tambem outra função sinusoidal, com a mesma frequência, com fasor igual à soma dos dois fasores,

$$\mathbb{F}+\mathbb{G}$$



que, no plano complexo, é a soma vetorial dos dois fasores e o vetor resultante roda com velocidade angular ω.

E o produto de uma função sinusoidal por um número real conduz a outra função sinusoidal, com a mesma frequência e fasor igual ao inicial, vezes a constante!

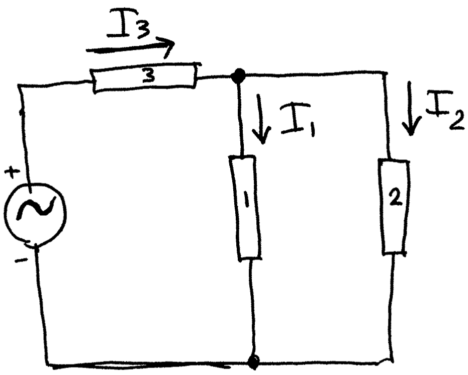
Exemplo. No circuito, a fonte de tensão alternada,

$$V(t) = V_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$$

produz correntes:

$$\begin{cases} I_1(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ I_2(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

determine a expressão de $I_3(t)$.

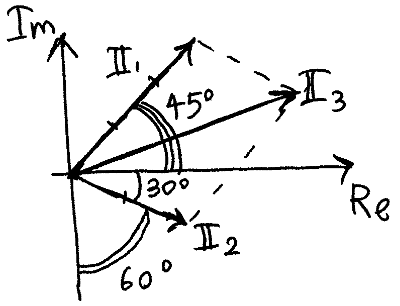


Resolução. Pela lei dos nós: $I_3(t) = I_1(t) + I_2(t)$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2$$

$$I_1(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \mathbb{I}_1 = 3\angle\frac{\pi}{4}$$

$$I_2(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \mathbb{I}_2 = 2\angle -\frac{\pi}{6}$$



$$\mathbb{I}_1 = 3\cos\frac{\pi}{4} + i\,3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\mathbb{I}_2 = 2\cos\frac{\pi}{6} - i\,2\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - i$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3} + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)$$

$$I_{3\,máx} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)^2} = 4.013$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1}{\frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right) = 0.283$$

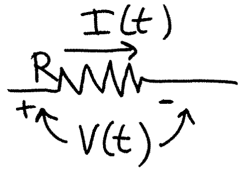
$$\mathbb{I}_3 = 4.013\angle 0.283 \Rightarrow \boxed{I_3(t) = 4.013\cos(\omega t + 0.283)}$$

Observe-se que o fasor de uma função $F(t) = F_{max}\sin(\omega t + \varphi)$, é, $\mathbb{F} = F_{max}\angle\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -i\,F_{máx}\angle\varphi$

(multiplicar por, $-i = 1\angle -\frac{\pi}{2}$, corresponde a rodar 90° no sentido negativo.)

IMPEDÂNCIA COMPLEXA

1. Resistências



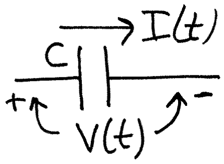
Se $V(t) = V_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow\quad I(t) = \left(\frac{V_{máx}}{R}\right)\cos(\omega t + \varphi)$$

$V(t)$ e $I(t)$ são ambas funções sinusoidais, com a mesma ω, e com fasores $\mathbb{V} = V_{max}\angle\varphi$, $\mathbb{I} = \frac{V_{máx}}{R}\angle\varphi$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathbb{V} = R\,\mathbb{I}}$$

2. Condensadores

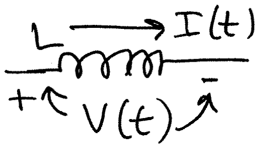


$$V(t) = V_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = C\frac{dV(t)}{dt} = -C\omega V_{máx}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow\quad \mathbb{I} = i\,C\omega\,\mathbb{V} \qquad \boxed{\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{i\,C\omega}}$$

3. Indutores



$$I(t) = I_{máx}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$V(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = -L\omega I_{máx}\sin(\omega t + \varphi)$$

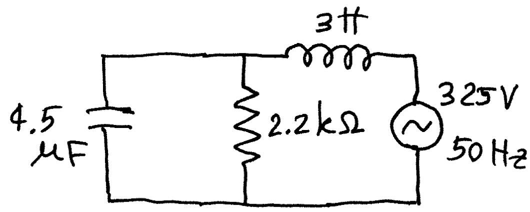
$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathbb{V} = i\,L\omega\,\mathbb{I}}$$

Em geral, $\boxed{\mathbb{V} = z(i\omega)\,\mathbb{I}}$ lei de Ohm para fasores

$z(i\omega)$ = número complexo.

Aula 21. 12-12-2016

Exemplo. Determine a expressão da voltagem e da corrente no indutor.



Resolução. Escolhendo unidades de kΩ para as resistências/impedâncias e H para a indutância, então:

$\omega = \frac{Z}{iL}$ ⇒ ω em unidades de kHz, t em ms

$C = \frac{1}{i\omega Z}$ ⇒ C em μF

$\omega = 2\pi f = 100\pi$ (Hz) ⇒ $\omega = \frac{\pi}{10}$ (em kHz)

No Maxima:

```
w: %pi/10$
[z1, z2, z3]: [%i*3*w, 1/4.5/%i/w, 2.2]$
z: z1 + z2*z3/(z2+z3);
I: float(rectform(325/z));
```

escreve um complexo na forma a+ib

⇒ $I = 502.45 - i\,734.69$

```
Imax: cabs(I);   → 890.1
fi: carg(I);     → -0.97096
```

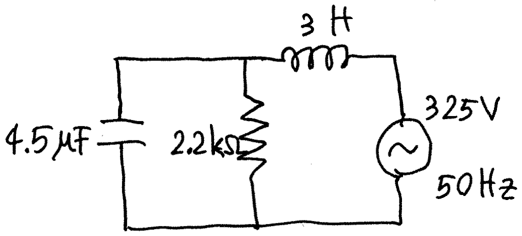
⇒ $\boxed{I(t) = 890.1\cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.97096\right)}$ em mA, com t em ms

```
V: float(rectform(z1*I));
[cabs(V), carg(V)];
```

⇒ $\boxed{V(t) = 838.9\cos\left(\frac{\pi}{10}t + 0.59984\right)}$ t → ms, V → V

Ultrapassa Vmáx da fonte!!

Exemplo. Determine a voltagem, a corrente e a potência média no indutor



<u>Resolução</u>. Unidades

$Z \to k\Omega$

$L \to H$

$\Rightarrow s \to kHz \quad (t \to ms)$

$\Rightarrow C \to \mu F$

$V \to V \Rightarrow I \to mA$

$\omega = 2\pi f = 100\pi$ Hz

mas como deve ser dada em kHz, então: $\boxed{\omega = \frac{\pi}{10}}$

No Maxima, as impedâncias do indutor, condensador e resistência são:

```
[z1, z2, z3]: [3, 1/4.5/s, 2.2]$
```

e a impedância total à saída da fonte:

```
zt: z1 + z2*z3/(z2+z3)$
```

corrente no indutor:

```
I: ratsimp(325/subst(s=%i*%pi/10, zt));
float(cabs(I));   → 890.1
float(carg(I));   → -0.971
```

$\Rightarrow \boxed{I(t) = 890.1 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.971\right)}$

voltagem no indutor:

```
V: I*3*%i*%pi/10, float[cabs(V), carg(V)];
```

$\boxed{V(t) = 838.9 \cos\left(\frac{\pi}{10}t + 0.5998\right)}$

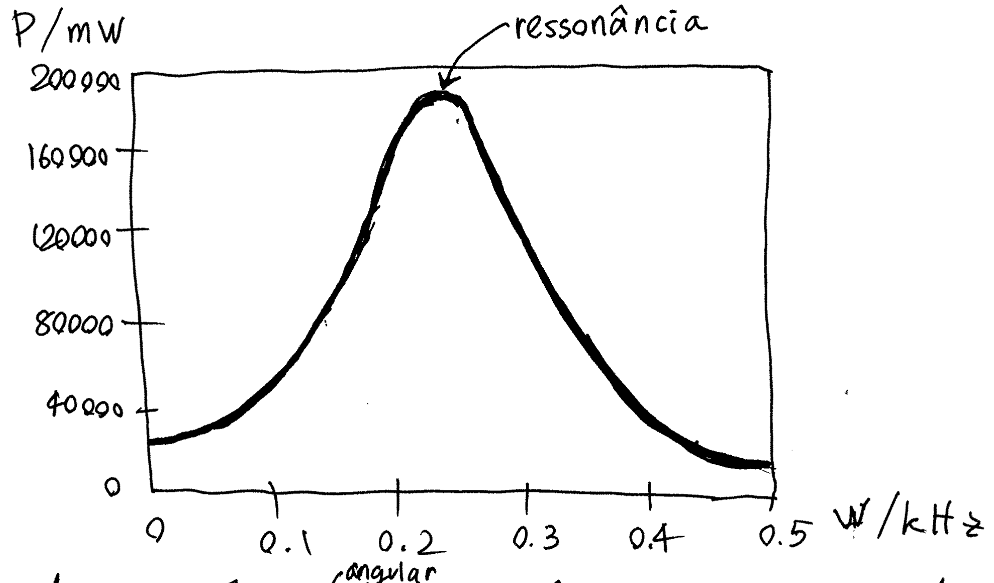
A potência média é 0, porque a fase da impedância do indutor é $\frac{\pi}{2}$!!!...

Observe-se que Vmáx é maior que os 325V da fonte, porque este é um circuito oscilador. A frequência f que conduz à potência máxima fornecida pela fonte chama-se **FREQUÊNCIA de RESSONÂNCIA**.

```
I : ratsimp(325/subst(s=%i*w, zt))$
```
(com qualquer freq. angular w)

```
P : ratsimp(0.5*325*cabs(I)*cos(carg(I)));

plot2d(P,[f,0,0.5],[xlabel,"w/kHz"],
                 [ylabel,"P/mw"]);
```



A frequência angular de ressonância é aproximadamente 0.26 kHz = 260 Hz, e a potência máxima 180 W.

$$f = \frac{w}{2\pi} \Rightarrow f_{ressonância} \approx \frac{260}{2\pi} = 41.4\ Hz$$

No caso da fonte com f=50Hz, como essa frequência está próxima da freq. de ressonância, Vmáx no indutor é elevada.

RESPOSTA TRANSITÓRIA

Para relacionar com o capítulo 10,

$$V(t) = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi_V) \Rightarrow \tilde{V} = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbb{V}}{s - i\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbb{V}}{(s - i\omega) Z}\right)$$

Admitindo que $Z(i\omega) \neq 0$, a expansão em frações parciais é:

$$\tilde{I} = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbb{I}}{s - i\omega}\right) + \frac{\text{polinómio em } s}{Z}$$

onde: $\mathbb{I} = \lim\limits_{s \to i\omega} \frac{\mathbb{V}}{Z} = \frac{\mathbb{V}}{Z(i\omega)}$

a transformada inversa de $\mathrm{Re}\left(\frac{\mathbb{I}}{s - i\omega}\right)$ é a corrente alternada:

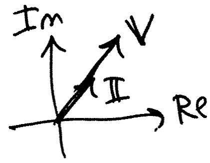
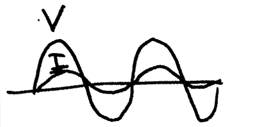
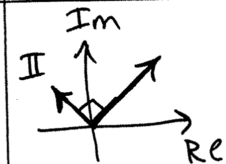
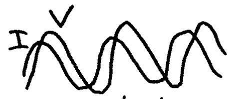
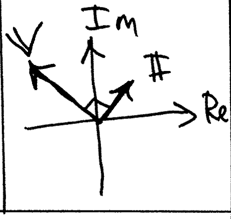
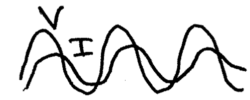
$$I(t) = I_{máx} \cos(\omega t + \varphi_I)$$

a transformada inversa do outro termo, é uma função $I(t)$ que se aproxima de zero, chamada <u>corrente transitória</u>.

Os fasores representam a resposta estacionária

$$\mathbb{V} = Z(i\omega)\, \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{max} = |Z|\, I_{máx} \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \end{cases}$$

Dispositivo	Impedância	Fasores	Gráficos
Resistência R	$Z = R$ (reatância nula)		 V e I em fase
Condensador C	$Z = \frac{1}{i\omega C}$ reatância $\frac{1}{\omega C}$ negativa		 I adiantada em relação a V
Indutor L	$Z = i\omega L$ reatância ωL, positiva		 V adiantada em relação a I

POTÊNCIA

potência instantânea: $P(t) = V(t)\, I(t)$

$$\Rightarrow P(t) = \left(V_{máx} \cos(\omega t + \varphi_V)\right)\left(I_{máx} \cos(\omega t + \varphi_I)\right)$$

$$= \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \left(\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)\right)$$

Note-se que: ~~$V_{máx} = |Z| I_{máx}$~~ $\mathbb{V} = Z(i\omega)\, \mathbb{I}$

implica:

$$\begin{cases} V_{máx} = |Z|\, I_{máx} \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \left(\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos \varphi_Z\right)$$

É a soma de uma função sinusoidal, com frequência angular 2ω, mais um termo constante.

Potência média:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} V_{máx} I_{max} \cos \varphi_z}$$

$\cos \varphi_z$ = fator de potência

$$0 \leq \cos \varphi_z \leq 1$$

tensão e corrente eficaz:

$$\begin{cases} V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{máx} \\ I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{máx} \end{cases}$$

raiz quadrada do valor médio, no tempo, do quadrado da função

$$\Longrightarrow \quad \overline{P} = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi_z$$

FILTROS DE FREQUÊNCIA

$$\mathbb{V}_e \longrightarrow \boxed{R(\omega)} \longrightarrow \mathbb{V} = R\mathbb{V}_e \qquad (\text{ou } \mathbb{I} = R\mathbb{V}_e)$$

$R(\omega) = H(i\omega)$ = função de resposta de frequência

Capítulo 2

Exames

2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 13 de janeiro de 2017. Compareceram 170 estudantes e a nota média foi 10.7 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

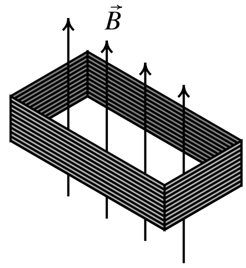
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2016/2017

EIC0014 — FÍSICA II — 2º ANO, 1º SEMESTRE Sexta-feira 13 de janeiro de 2017

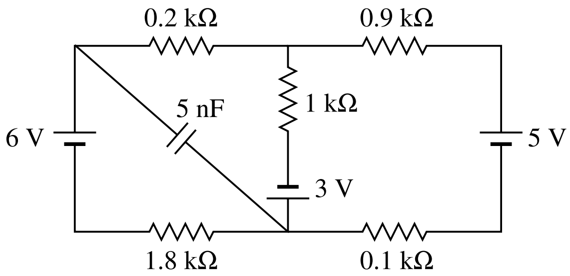
Nome:______________________________

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) Uma bobina retangular com 400 espiras, todas com arestas de 1.5 cm e 3 cm, é atravessada por um campo magnético externo $\vec{B}$ de módulo 0.2 T, perpendicular aos planos das espiras. A resistência total da bobina é 42 Ω. Ligam-se entre si os dois extremos, inicial e final, da bobina e o campo externo é reduzido até 0, durante um intervalo de 4 segundos. Determine a carga total transferida através da bobina durante esse intervalo.

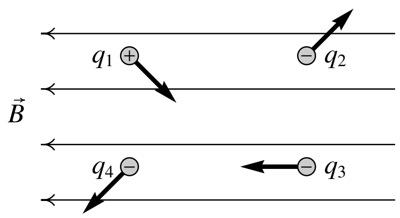


2. (4 valores) No circuito representado no diagrama, determine a carga no condensador, no estado estacionário ($t \longrightarrow \infty$).



PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de "Resposta". **Cotação**: certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco ou ilegível, 0.

3. A figura mostra as linhas de um campo magnético uniforme, no plano da folha, e quatro cargas pontuais com velocidades no mesmo plano, nos sentidos indicados na figura. Sobre quais das cargas atua uma força magnética no sentido para lá da folha?



(A) Unicamente q_4 **(D)** Unicamente q_1
(B) q_1 e q_2 **(E)** q_2, q_3 e q_4
(C) q_1 e q_4

Resposta: ☐

4. Um indutor de 0.4 H e uma resistência de 4.7 kΩ ligam-se em série a uma fonte ideal com f.e.m. de 3 V. Em unidades SI, a expressão da corrente no circuito, em função do tempo, é: $0.64 \times 10^{-3} \left(1 - \mathrm{e}^{-11765\,t}\right)$. Calcule a diferença de potencial no indutor no instante $t = 0.085$ ms.

(A) 4.75 V **(C)** 1.9 V **(E)** 1.1 V
(B) 8.15 V **(D)** 0.67 V

Resposta: ☐

5. Se o tempo for dado em ms e a indutância em µH, em que unidades deverão ser dadas as resistências para manter as unidades consistentes?

(A) Ω **(C)** kΩ **(E)** MΩ
(B) mΩ **(D)** µΩ

Resposta: ☐

6. Determine a corrente eficaz num indutor de 16 mH ligado a uma fonte ideal de tensão alternada, com tensão máxima 70 V e frequência de 30 Hz.

(A) 65.6 A **(C)** 5.5 A **(E)** 147.7 A
(B) 82.1 A **(D)** 16.4 A

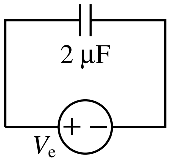
Resposta: ☐

7. Uma esfera condutora isolada, com raio de 1 cm e carga total de 2 nC, tem centro no ponto $(x, y, z) = (20$ cm, 0, 0) e uma segunda esfera condutora isolada, com raio de 2 cm e carga total de 3 nC, tem centro no ponto $(x, y, z) = (0, 12$ cm, 0). Determine o valor do potencial na origem, arbitrando potencial nulo no infinito.

(A) 315 V **(C)** 405 V **(E)** 297 V
(B) 585 V **(D)** 345 V

Resposta: ☐

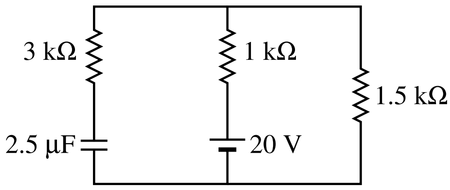
8. A expressão da voltagem da fonte no circuito do diagrama é $V_e = 400\,t^2$ (unidades SI) em $t > 0$ e 0 em $t \leq 0$. O condensador encontrava-se descarregado em $t = 0$. Determine a expressão da corrente no circuito em $t > 0$ (unidades SI).



(A) $0.0032\,t^2$ **(C)** $0.004\,t$ **(E)** $0.0016\,t^2$
(B) $0.0032\,t$ **(D)** $0.0016\,t$

Resposta: ☐

9. Uma fonte de tensão constante foi ligada a um condensador e 3 resistências, como mostra o diagrama. Calcule a intensidade da corrente fornecida pela fonte no instante inicial em que é ligada.



(A) 5 mA **(C)** 0 mA **(E)** 2.5 mA
(B) 10 mA **(D)** 4 mA

Resposta: ☐

10. Quando o sinal de entrada num circuito é $2\,e^{-2\,t}$, o sinal de saída é igual a $2\,e^{t} + 4\,e^{-2\,t}$. Encontre a função de transferência do circuito.

(A) $\dfrac{3\,s}{s-1}$ **(C)** $\dfrac{5\,s}{2\,s-1}$ **(E)** $\dfrac{3}{s-1}$
(B) $\dfrac{s}{2\,s-1}$ **(D)** $\dfrac{5}{2\,s-1}$

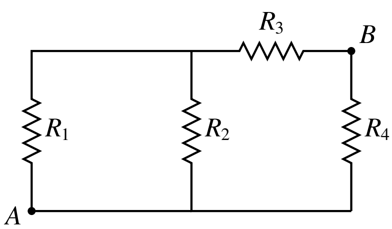
Resposta: ☐

11. Uma bobina tem indutância de 37 mH e resistência de 80 Ω. Calcule o módulo da impedância da bobina, para uma tensão alternada com frequência de 150 Hz.

(A) 87.3 Ω **(C)** 114.9 Ω **(E)** 229.7 Ω
(B) 43.6 Ω **(D)** 101.1 Ω

Resposta: ☐

12. Determine o valor da resistência equivalente entre os pontos A e B no diagrama, sabendo que $R_1 = 7$ kΩ, $R_2 = 5$ kΩ, $R_3 = 3$ kΩ e $R_4 = 2$ kΩ.



(A) 4.48 kΩ **(C)** 0.9 kΩ **(E)** 1.49 kΩ
(B) 2.09 kΩ **(D)** 3.29 kΩ

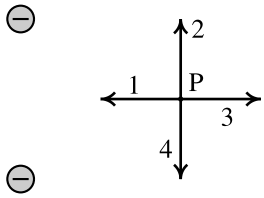
Resposta: ☐

13. Duas pequenas esferas condutoras penduradas de dois fios verticais, isoladores, encontram-se inicialmente descarregadas e em contacto. A seguir aproxima-se da esfera 1 um objeto com carga positiva e observa-se que os fios deixam de estar na vertical e as duas esferas separam-se. O que é que se pode concluir sobre os valores das cargas q_1 e q_2 induzidas nas esferas 1 e 2?

(A) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ **(D)** $q_1 > 0$, $q_2 > 0$
(B) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ **(E)** $q_1 < 0$, $q_2 < 0$
(C) $q_1 > 0$, $q_2 = 0$

Resposta: ☐

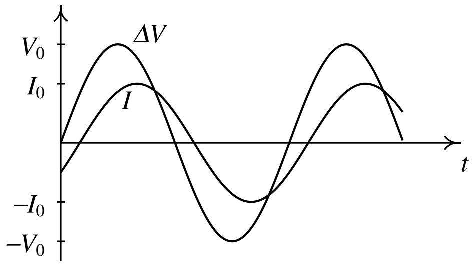
14. Qual das setas representa a direção e sentido do campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P, produzido pelas duas cargas pontuais na figura, com o mesmo valor absoluto e com os sinais indicados na figura?



(A) 4 **(D)** Nenhuma, porque $\vec{E} = 0$
(B) 3 **(E)** 1
(C) 2

Resposta: ☐

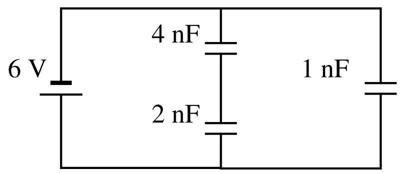
15. Uma resistência de 433 Ω, um condensador de 8 µF e um indutor de indutância L são ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência angular $\omega = 250$ Hz. O gráfico mostra a tensão da fonte, ΔV, e a corrente I no circuito, em função do tempo. Qual dos valores na lista poderá ser o valor da indutância L?



(A) 0 **(C)** ∞ **(E)** 1 H
(B) 2 H **(D)** 3 H

Resposta: ☐

16. No circuito da figura, determine o valor da carga armazenada no condensador de 4 nF.



(A) 12.0 nC **(D)** 2 nC
(B) 24 nC **(E)** 4 nC
(C) 8 nC

Resposta: ☐

17. Um dispositivo ligado a uma fonte de tensão contínua de 50 V tem potência elétrica de 75 W. Determine a carga total que passa através do dispositivo quando permanece ligado à fonte durante 1 minuto.

(A) 96 C **(C)** 90 C **(E)** 108 C
(B) 144 C **(D)** 30 C

Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. O fluxo magnético inicial, através da bobina, é igual a

$$\Psi_0 = N B A$$

onde N é o número de espiras, B o módulo do campo magnético e A a área de cada espira. O fluxo final Ψ_f é nulo e a f.e.m. induzida média é:

$$\bar{\varepsilon}_i = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{N B A}{\Delta t}$$

A corrente média é:

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}_i}{R} = \frac{N B A}{R \Delta t}$$

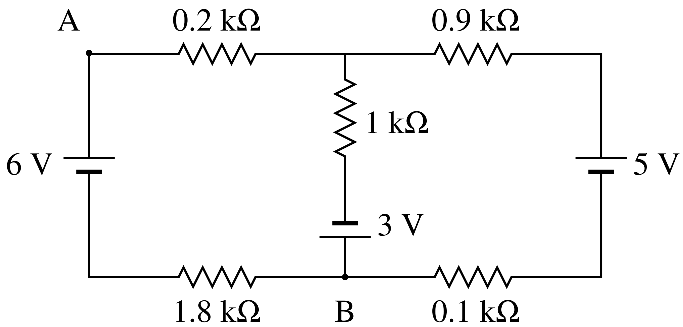
E a carga transferida é igual a:

$$\Delta Q = \int_0^{\Delta t} I \, \mathrm{d}t = \bar{I} \Delta t = \frac{N B A}{R}$$

Substituindo os valores dados obtém-se

$$\Delta Q == \frac{400 \times 0.2 \times 0.015 \times 0.03}{42} = 8.57 \times 10^{-4}\ \text{C} = 0.857\ \text{mC}$$

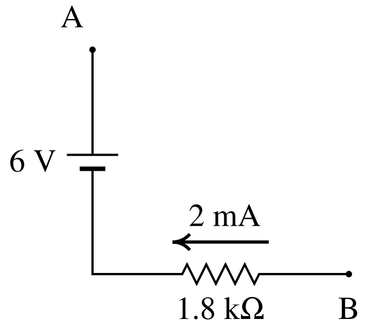
Problema 2. No estado estacionário, o circuito equivalente é:



Se i_1 e i_2 são as duas correntes de malha, no sentido dos ponteiros do relógio, em mA, o sistema de equações do circuito é então,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema é $i_1 = 2$ e $i_2 = -3$. A voltagem no condensador é a diferença de potencial entre os pontos A e B, que pode ser calculada no ramo seguinte:



Passando do ponto B para A, observa-se uma diminuição do potencial 1.8×2 volts na resistência e um aumento de 6 V na fonte. Como tal, a voltagem no condensador é:

$$\Delta V = 6 - 1.8 \times 2 = 2.4\,\text{V}$$

E a carga armazenada no condensador é

$$Q = C\,\Delta V = 5 \times 10^{-9} \times 2.4 = 12\,\text{nC}$$

Perguntas

3. B

4. E

5. B

6. D

7. A

8. D

9. B

10. A

11. A

12. E

13. B

14. E

15. D

16. C

17. C

2.1.3 Cotações

Problema 1

- Cálculo do fluxo magnético inicial e final 1
- Cálculo da f.e.m. induzida 1
- Cálculo da corrente média 1
- Cálculo da carga transferida 1

Problema 2

- Descrição do circuito equivalente no estado estacionário ____ 0.4
- Método das malhas para o circuito com 2 malhas ____ 1.2
- Obtenção das correntes de malha ____ 0.4
- Cálculo da diferença de potencial no condensador ____ 1.2
- Cálculo da carga no condensador ____ 0.8

2.2 Exame de época de recurso

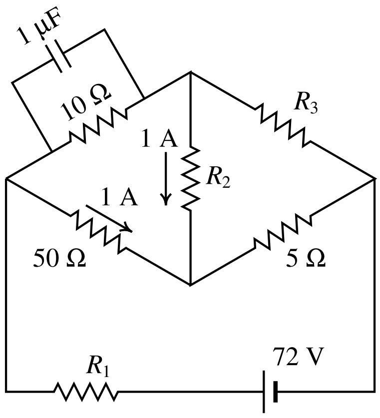
O exame realizou-se no dia 27 de janeiro de 2017. Compareceram 89 estudantes e a nota média foi 9.4 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

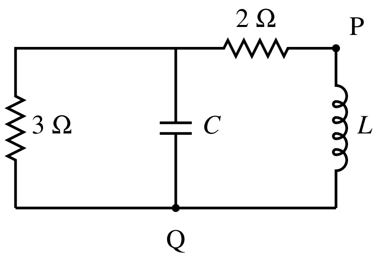
1. (4 valores) Dois condensadores de 1.2 μF e 3.4 μF ligam-se em série a uma fonte de 45 V. (*a*) Calcule a carga em cada condensador. (*b*) A fonte é logo desligada, ligando-se entre si os dois condensadores (armadura positiva com positiva e negativa com negativa). Calcule a diferença de potencial e carga final em cada condensador.

2. (4 valores) No circuito representado no diagrama, sabendo que no estado estacionário (após muito tempo) a carga no condensador é igual a 40 µC e as correntes na resistência de 50 Ω e em R_2 são ambas 1 A, no sentido indicado, determine os valores de R_1, R_2 e R_3.



PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de "Resposta". **Cotação**: certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco ou ilegível, 0.

3. Determine a expressão da impedância equivalente entre os pontos P e Q no diagrama, em unidades SI, sabendo que $C = 2$ F e $L = 3$ H.



(A) $\dfrac{90\,s^2 + 15\,s}{45\,s^2 + 33\,s + 5}$

(B) $\dfrac{54\,s^2 + 15\,s}{27\,s^2 + 21\,s + 5}$

(C) $\dfrac{18\,s^2 + 15\,s}{9\,s^2 + 9\,s + 5}$

(D) $\dfrac{36\,s^2 + 15\,s}{18\,s^2 + 15\,s + 5}$

(E) $\dfrac{72\,s^2 + 15\,s}{36\,s^2 + 27\,s + 5}$

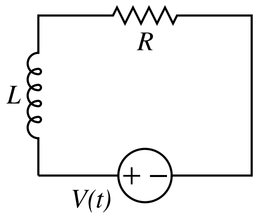
Resposta: ☐

4. Determine o valor da resistência duma lâmpada incandescente de 6 W e 9 V, nas condições normais de operação.

(A) 10.1 Ω **(C)** 13.5 Ω **(E)** 40.5 Ω
(B) 8.1 Ω **(D)** 20.3 Ω

Resposta: ☐

5. A expressão da voltagem da fonte no circuito do diagrama é $V(t) = \mathrm{e}^{-t}$ (unidades SI e $t \geq 0$) e a expressão da corrente é $I(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-6\,t}}{5}$. Sabendo que o valor da resistência é $R = 6$ Ω, encontre o valor da indutância L.



(A) 4 H **(C)** 3 H **(E)** 1 H
(B) 5 H **(D)** 2 H

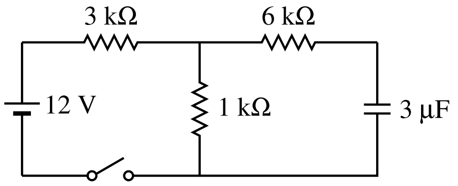
Resposta: ☐

6. Uma bobina com 300 espiras quadradas, com arestas de 4 cm, encontra-se numa região onde existe campo magnético uniforme, com módulo de 0.1 T, perpendicular ao plano das espiras. Calcule o fluxo magnético através da bobina.

(A) 12.0 mT·m^2 **(C)** 16.0 mT·m^2 **(E)** 48.0 mT·m^2
(B) 0.16 mT·m^2 **(D)** 4.8 mT·m^2

Resposta: ☐

7. No circuito da figura, o condensador está inicialmente descarregado. Calcule a diferença de potencial na resistência de 3 kΩ, muito tempo depois do interruptor ter sido fechado.



(**A**) 4 V (**C**) 8 V (**E**) 3 V
(**B**) 12 V (**D**) 9 V

Resposta: ☐

8. Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam 5×10^{16} eletrões de condução durante 8 segundos. Calcule a potência média fornecida pela pilha nesse intervalo.

(**A**) 3.75 mW (**C**) 1.2 mW (**E**) 0.75 mW
(**B**) 1.5 mW (**D**) 0.15 mW

Resposta: ☐

9. Para determinar o valor da resistência duma bobina de 0.276 H, foi ligada a uma fonte de tensão alternada, com tensão máxima 6 V e frequência $f = 40$ Hz, e mediu-se o valor máximo da corrente alternada, obtendo-se 2.17 mA. Calcule o valor da resistência.

(**A**) 4.61 kΩ (**C**) 688 Ω (**E**) 3.59 kΩ
(**B**) 1.99 kΩ (**D**) 2.76 kΩ

Resposta: ☐

10. Se a distância entre duas pequenas esferas com carga for reduzida a metade e a carga de cada esfera for reduzida a metade, a força elétrica entre elas será:

(**A**) Igual.
(**B**) 16 vezes maior.
(**C**) 4 vezes maior.
(**D**) 4 vezes menor.
(**E**) 16 vezes menor.

Resposta: ☐

11. Se a esfera E_1 com equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ é superfície equipotencial com potencial V_1 e a esfera E_2 com equação $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ é superfície equipotencial com potencial V_2 (onde $V_1 < V_2$), e entre as duas esferas não existe carga, qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

(**A**) A carga total dentro da esfera E_1 é negativa.
(**B**) A esfera E_1 é uma esfera condutora.
(**C**) Existe uma carga pontual na origem.
(**D**) A carga total dentro da esfera E_1 é nula.
(**E**) A carga total dentro da esfera E_1 é positiva.

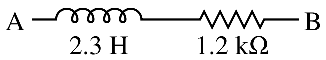
Resposta: ☐

12. Quando a tensão num dispositivo, em função do tempo, é $V(t) = 3\cos(80\,t + 0.5)$, a expressão da corrente é $I(t) = 1.5\cos(80\,t + 0.9)$ (unidades SI). Determine o valor da impedância desse dispositivo.

(**A**) $0.779 + \mathrm{i}\,1.842$ (**D**) $0.461 - \mathrm{i}\,0.195$
(**B**) $0.461 + \mathrm{i}\,0.195$ (**E**) $1.842 + \mathrm{i}\,0.779$
(**C**) $1.842 - \mathrm{i}\,0.779$

Resposta: ☐

13. Calcule o módulo da impedância complexa entre os pontos A e B para uma tensão alternada com frequência $f = 80$ Hz.



(**A**) 1.67 kΩ (**C**) 1.2 kΩ (**E**) 1.48 kΩ
(**B**) 2.36 kΩ (**D**) 1.58 kΩ

Resposta: ☐

14. Se R, L e C representam a resistência, a indutância e a capacidade num circuito, qual das seguintes expressões tem unidades de resistência ao quadrado?

(**A**) L/C (**C**) $L\,C$ (**E**) C/R
(**B**) R/L (**D**) L/R

Resposta: ☐

15. O campo magnético numa região do espaço é $2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}$ (unidades SI). Determine o módulo do binário magnético numa espira triangular, com vértices na origem e nos pontos (3.2, 0, 0) e (0, 6.1, 0) (unidades SI), percorrida por uma corrente de 1 A.

(**A**) 43.6 N·m (**C**) 48.8 N·m (**E**) 52.6 N·m
(**B**) 35.2 N·m (**D**) 62.5 N·m

Resposta: ☐

16. Num condensador, sem dielétrico, de placas paralelas quadradas, com 40.0 cm de lado, a distância entre as placas é 0.3 mm. Se o condensador é carregado até a diferença de potencial de 15 V, determine a carga armazenada.

(**A**) 1.06 nC (**C**) 70.7 nC (**E**) 1.70 nC
(**B**) 14.9 nC (**D**) 6.37 nC

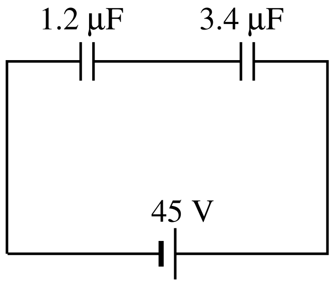
Resposta: ☐

17. O campo elétrico numa região do espaço é $2\,\hat{\imath}+5\,\hat{\jmath}+4\,\hat{k}$ (unidades SI). Determine o valor do fluxo elétrico através do triângulo com vértices na origem e nos pontos (3.2, 0, 0) e (0, 6.1, 0), em unidades SI.

(**A**) 15.62 (**C**) 39.04 (**E**) 195.2
(**B**) 28.11 (**D**) 78.08

Resposta: ☐

2.2.2 Resolução

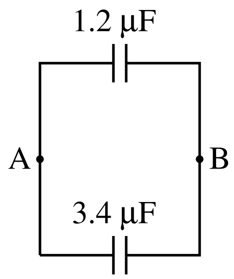


Problema 1. (*a*) A figura à direita mostra o diagrama do circuito. Os dois condensadores estão em série e como tal, a carga em cada um deles é a mesma e igual à carga no condensador equivalente:

$$C = \frac{1.2 \times 3.4}{1.2 + 3.4} = 0.88696\ \mu\text{F}$$

Como a diferença de potencial no condensador equivalente é 45 V, a carga armazenada em cada um dos condensadores é então

$$Q = 0.88696 \times 10^{-6} \times 45 = 39.91 \times 10^{-6} = 39.91\ \mu\text{C}$$



(*b*) A figura à direita mostra o diagrama do circuito. Os dois condensadores estão agora em paralelo e como tal, diferença de potencial em cada um deles será a mesma e igual à diferença de potencial no condensador equivalente, entre os pontos A e B. A carga no condensador é a soma das cargas nos dois condensadores, ou seja, será o dobro da carga calculada na alínea *a*: $Q = 79.82\ \mu\text{C}$. E a capacidade equivalente é a soma das capacidades dos condensadores: $C = 1.2 + 3.4 = 4.6\ \mu\text{F}$. A diferença de potencial entre A e B é:

$$\Delta V = \frac{79.82 \times 10^{-6}}{4.6 \times 10^{-6}} = 17.35\ \text{V}$$

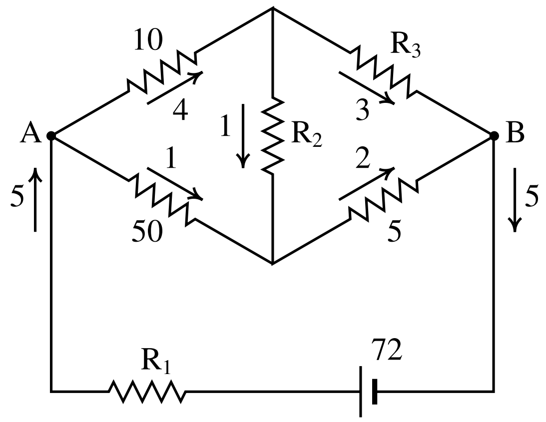
As cargas em cada um dos dois condensadores são:

$$Q_1 = 1.2 \times 10^{-6} \times 17.35 = 20.8\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 3.4 \times 10^{-6} \times 17.35 = 59.0\ \mu\text{C}$$

Problema 2. A voltagem no condensador é:

$$\Delta V_{10} = \frac{40 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}} = 40\ \text{V}$$

que é a mesma diferença de potencial na resistência de 10 Ω. Como tal, a corrente nessa resistência é $I = 40/10 = 4$ A. Com essa corrente, e as outras duas correntes dadas no enunciado, determinam-se as outras correntes em todas as partes do circuito, tal como mostra a seguinte figura (todos os valores em unidades SI).



As voltagens nas resistências de 50 Ω e 5 Ω são então:

$$\Delta V_{50} = 1 \times 50 = 50\,\text{V} \qquad \Delta V_5 = 2 \times 5 = 10\,\text{V}$$

e a diferença de potencial entre A e B é a soma das duas, 60 V. A voltagem em R_1 é $\Delta V_1 = 72 - 60 = 12$ V e o valor de R_1 é:

$$R_1 = \frac{12}{5} = 2.4\,\Omega$$

A diferença de potencial em R_3 é $\Delta V_3 = 60 - \Delta V_{10} = 20$ V e, como tal,

$$R_3 = \frac{20}{3} = 6.67\,\Omega$$

Finalmente, a voltagem na resistência R_2 é $\Delta V_3 = \Delta V_{50} - \Delta V_{10} = 10$ V e:

$$R_2 = \frac{10}{1} = 10\,\Omega$$

Perguntas

3. D

4. C

5. E

6. E

7. D

8. B

9. D

10. A

11. A

12. C

13. A

14. A

15. B

16. C

17. C

2.2.3 Cotações

Problema 1

- Cálculo da carga inicial nos condensadores (*a*) 1.2
- Determinação da carga final total nos dois condensadores 1
- Cálculo da diferença de potencial final nos condensadores 1
- Cálculo das cargas finais nos condensadores 0.8

Problema 2

- Cálculo da diferença de potencial no condensador 0.4
- Determinação das correntes em todo o circuito 1.2
- Cálculo da diferença de potencial em R_1 e do valor de R_1 0.8
- Cálculo da diferença de potencial em R_2 e do valor de R_2 0.8
- Cálculo da diferença de potencial em R_3 e do valor de R_3 0.8

Resolução usando o método das malhas:

- Cálculo da diferença de potencial no condensador e a corrente na resistência de 10 Ω 0.8
- Obtenção dos valores das 3 correntes de malha 1.2
- Equações das malhas 1.6
- Resolução das equações das malhas 0.4

Bibliografia

Adams, S., & Allday, J. (2000). *Advanced physics.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros.* Lopes da Silva Editora: Porto, Portugal.

Blinchikoff, H. J., & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains.* Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.

Brito, L., Fiolhais, M., & C, P. (1999). *Campo Electromagnético.* Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Feynman, P. R., Leighton, R. B., & M, S. (1964). *The feynman lectures on physics.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Hecht, E. (1991). *Óptica.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Hecht, E. (1994). *Physics.* Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.

Henriques, A. B., & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo.* Lisboa, Portugal: IST Press.

Lévy-Leblond, J. M., & A, B. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas.* Lisboa, Portugal: Gradiva.

Maxima Development Team. (2015). *Maxima Manual* (5.37.0 ed.).

Mendiratta, S. K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo.* Lisboa, Portugal: Lisboa, Portugal.

Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2.* McGraw-Hill: New York, NY, USA.

Scherz, P., & Monk, S. (2013). *Practical electronics for inventors* (3a ed.). McGraw-Hill:

New York, NY, USA.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2004). *Physics* (5a ed.). New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.

Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Villate, J. E. (2015). *Eletricidade, magnetismo e circuitos* (2a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.

Walker, J. (1975). *O grande circo da Física*. Gradiva: Lisboa, Portugal.