FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 1, 2019

Jaime E. Villate

Porto, julho de 2019

Conteúdo

1 Sumários **1**

1.1 Cinemática 2

1.2 Cinemática vetorial 10

1.3 Movimento curvilíneo 18

1.4 Mecânica vetorial 28

1.5 Dinâmica dos corpos rígidos 35

1.6 Trabalho e energia 49

1.7 Sistemas dinâmicos 58

1.8 Mecânica lagrangiana 65

1.9 Sistemas lineares 72

1.10 Sistemas não lineares 76

1.11 Ciclos limite e dinâmica populacional 84

1.12 Sistemas caóticos 92

2 Exames **101**

2.1 Exame de época normal 101

2.1.1 Enunciado 102

2.1.2 Resolução 104

2.1.3 Cotações 108

2.2 Exame de época de recurso 109

2.2.1 Enunciado 110

2.2.2 Resolução 112

2.2.3 Cotações 114

Bibliografia **115**

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 1.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

Ano académico 2018–2019, segundo semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Maria Helena Braga e Jaime E. Villate.

Número de alunos 210.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

FÍSICA 1 - MIEIC - 2018/2019

Aula 1. 2019-02-10

Docentes: Helena Braga (mbraga@fe.up.pt). Gabinete H314
Jaime Villate (villate@fe.up.pt). Gabinete H113

Página Web: https://def.fe.up.pt/eic0010

Bibliografia: Dinâmica e Sistemas Dinâmicos. Villate, 2019.

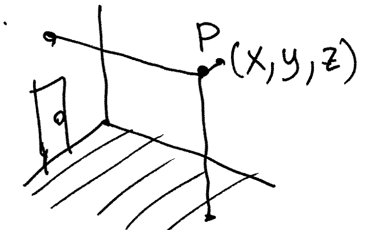
OBJETIVO

Dar competências de modelação de problemas de mecânica e a sua resolução usando método computacionais, úteis em outras áreas da engenharia informática: métodos numéricos, sistemas gráficos, motores de jogos...

Capítulo 1. CINEMÁTICA

A posição de um ponto num objeto determina-se com 1, 2 ou 3 variáveis (distâncias ou ângulos), em relação a um <u>referencial</u>. Exemplos:

1.



x, y, z são as distâncias até duas paredes e o chão
(referencial → quarto)

2.

FEUP → 41.179878, −8.596065
dois ângulos, latitude e longitude: α, δ
Referencial → Terra.

Movimento: variação da posição, em função do tempo t
no exemplo 1 → $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$
no exemplo 2 → $\alpha(t)$, $s(t)$
Todo movimento é sempre relativo (em relação ao referencial usado).

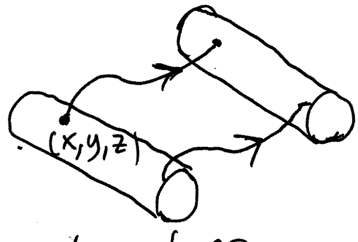
Graus de liberdade. Variáveis usadas para descrever a posição em função do tempo.
exemplo 1 → 3 graus de liberdade
exemplo 2 → 2 graus de liberdade
Cada grau de liberdade está associado a uma função de t (um único valor para cada t), que é sempre contínua (a posição não pode sofrer variações descontínuas). ⇒ posição em função de t ⇒ curva contínua **(trajetória)**

Movimento dos corpos rígidos.

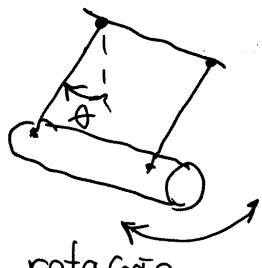
<u>translação</u>: todos os pontos no corpo seguem trajetórias idênticas.

<u>rotação</u>: Existe um ponto que permanece em repouso

<u>movimento geral</u>: rotação relativa a um ponto + translação desse ponto

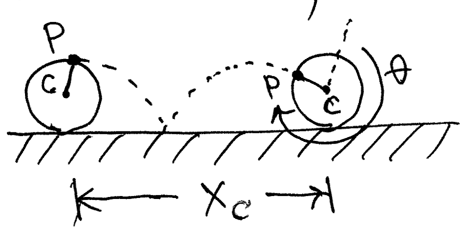


translação.
3 graus de liberdade
$(x(t), y(t), z(t))$



rotação
(movimento pendular)
1 grau de liberdade.
$(\theta(t))$

cilindro a rodar, sem derrapar



$X_p(t)$ e $\theta(t)$ dependem de t, mas como o cilindro não derrapa sobre a mesa,

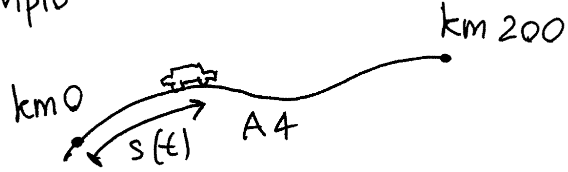
$X_c(t) = R\,\theta(t)$ ← raio do cilindro

a relação entre $X_c(t)$ e $\theta(t)$ implica que uma delas depende da outra → 1 grau de liberdade

SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

$s(t)$ = posição na trajetória. Quando a trajetória está estabelecida, basta medir s, a longo dela, desde um ponto onde $s=0$

Exemplo



Deslocamento. Num intervalo desde t_i (instante inicial) até $t = t_i + \Delta t$ (instante final)

deslocamento $= \Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$

Velocidade média. Deslocamento por unidade de tempo.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i+\Delta t) - s(t_i)}{\Delta t} \quad \text{no intervalo } [t_i, t]$$

unidades → metros por segundo (m/s, ou, $m \cdot s^{-1}$), radianos por seg., quilómetros por hora (km/h), etc.

Δt é, por definição, positivo, mas Δs pode ser positivo ou negativo.

$$\bar{v} = \begin{cases} > 0, & \text{movimento no sentido positivo de } s \\ 0, & \text{repouso} \\ < 0, & \text{movimento no sentido negativo de } s \end{cases}$$

$|\bar{v}|$ = rapidez

Velocidade instantânea.

$$v(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}$$

$v(t)$ = função de t, que deve ser contínua

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

derivada da função $s(t)$, em ordem ao tempo. (existe porque $s(t)$ é contínua)

Aceleração tangencial média.

$$\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}$$

(m/s², ou, km/h², radianos/s², etc.)

Aceleração tangencial instantânea.

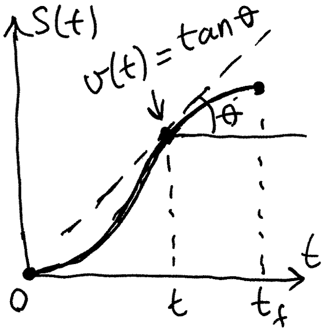
$$a_t(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}$$

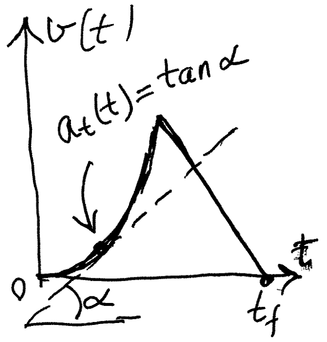
$a(t)$ = função de t, não necessariamente contínua

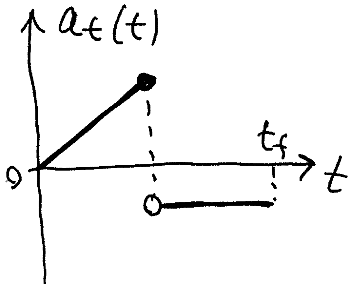
$$\boxed{a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}}$$

Aula 2. 2019-02-13

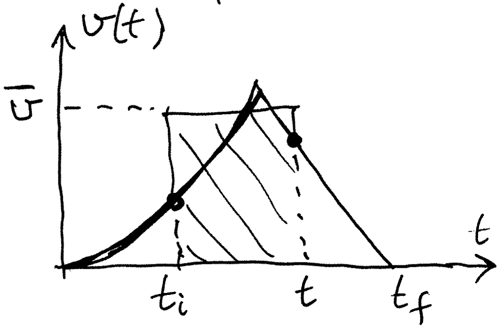
$\boxed{v(t) = \dot{s}(t)}$ $\boxed{a_t(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)}$







Se a expressão de $v(t)$ é conhecida, como obter $s(t)$?

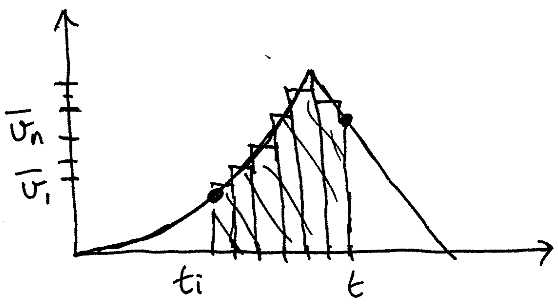


$\bar{v}$ = velocidade média no intervalo $[t_i, t]$

$$\bar{v} = \frac{s(t) - s_i}{t - t_i}$$

$$s(t) = s_i + \overbrace{\bar{v}\,(t - t_i)}^{\text{área na figura}}$$

O resultado é exato, mas como obter $\bar{v}$ a partir de $v(t)$?



n subintervalos:

$$\Delta t = \frac{t - t_i}{n}$$

n velocidades médias:

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$$

$$s(t) = s_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j \, \Delta t$$

No limite $n \to \infty$, $\bar{v}_j$ aproxima-se de $v(t_j)$, e o somatorio infinito chama-se **primitiva** de $v(t)$:

$$\boxed{s(t) = s_i + \int_{t_i}^{t} v(t_j)\, dt_j}$$

Primitivas da função $v(t)$:

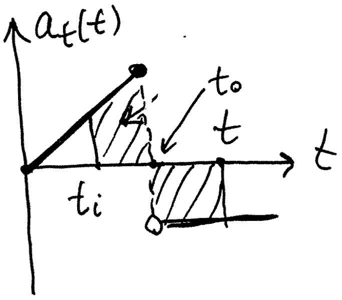
$$P_i(t) = \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt'$$ (tantas primitivas quantos possíveis valores de t_i)

$= $ área sob a curva $v(t')$ em $t_i \le t' \le t$

$$P_i(t) = s(t) - s_i \Rightarrow \frac{dP_i}{dt} = \dot{s}(t) = v(t)$$

A derivada de qualquer primitiva de uma função, é igual à função.

Obtenção de $v(t)$ a partir de $a_t(t)$:



$$v(t) = v_i + \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt'$$

observe-se que a partir de t_0 $a_t dt'$ é negativa porque $a_t(t') < 0$. Também, se $t < t_i$ $\Rightarrow dt' < 0$ e $a_t(t')dt' < 0$

A cada instante t, corresponde um único valor, $s(t)$, da posição, e uma única velocidade $v(t)$. Como tal, a cada posição s corresponde uma única velocidade v. Se a expressão $v(s)$ for conhecida,

$$\Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(s)\right) = \frac{dv(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

Temos então 4 equações diferenciais:

$$v = \dot{s} \qquad a_t = \dot{v} \qquad a_t = \ddot{s} \qquad a_t = v\frac{dv}{ds}$$ (equações da cinemática)

Que, em alguns casos, podem ser invertidas usando primitivas.

MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Cada uma das 3 equações de primeira ordem ($v = \dot{s}$, $a_t = \dot{v}$, $a_t = v \frac{dv}{ds}$) relaciona 3 das variáveis t, s, v, a_t

Quando conhecemos uma expressão para s, v ou a_t, em função de t, s ou v, pode substituir-se essa expressão em alguma das equações de primeira ordem, ficando apenas com 2 das variáveis.

Exemplo 1: temos uma expressão $a_t = f(v)$ (função de v)

a equação $a_t = v \frac{dv}{ds}$ fica: $f(v) = v \frac{dv}{ds}$ (variáveis s e v)

- Separam-se as variáveis, agrupando a cada lado da equação o que depende de cada uma delas:

$$ds = \frac{v}{f(v)} dv$$

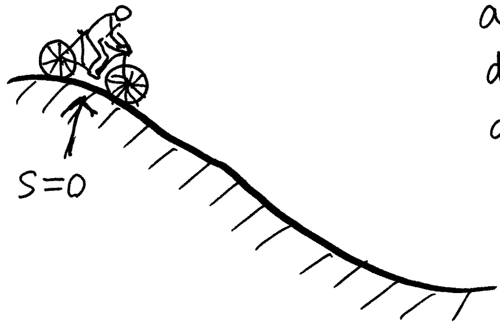
- Integram-se os dois lados, usando limites inferiores e superiores de integração que sejam consistentes no exemplo 1, as variáves de integração serão s e v. Se os limites de s fossem de s_1 para s_2, então os limites de v deveriam ser de v_1 (velocidade na posição 1) até v_2 (velocidade em s_2):

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{f(v)} dv$$

Um integral, com dois limites definidos é obtida a partir de qualquer primitiva:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t')\, dt' = P_i(t_2) - P_i(t_1) \qquad \left(P_i(t) = \int_{t_i}^{t} f(t')\, dt'\right)$$

Exemplo 2.



O ciclista trava, desde a posição s=0, fazendo diminuir a velocidade de acordo com a expressão:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{100 - s^2} \quad \text{(SI)}$$

até parar completamente. Determine quanto tempo demora até parar.

<u>Resolução</u>. A expressão dada substitui-se na equação $v = \dot{s}$, obtendo-se uma equação diferencial com as variáveis s e t:

$$\frac{1}{2}\sqrt{100 - s^2} = \frac{ds}{dt}$$

separam-se as variáveis:

$$dt = \frac{ds}{\frac{1}{2}\sqrt{100 - s^2}}$$

Seja t_i o instante em que começa a travar, em s=0, e t_f o instante em que para. Como tal, $s_i = 0$ e s_f encontra-se resolvendo a equação $v = 0$, com a expressão dada:

Maxima →

```
(%i1) v: sqrt(100-s^2)/2;
(%i2) solve(v=0, s);
(%i3) float(%);  →  [s=-10, s=10]
```

Para em $s_f = 10$. Integrando: $\int_{t_i}^{t_f} dt = \int_0^{10} \frac{ds}{\frac{1}{2}\sqrt{100 - s^2}}$

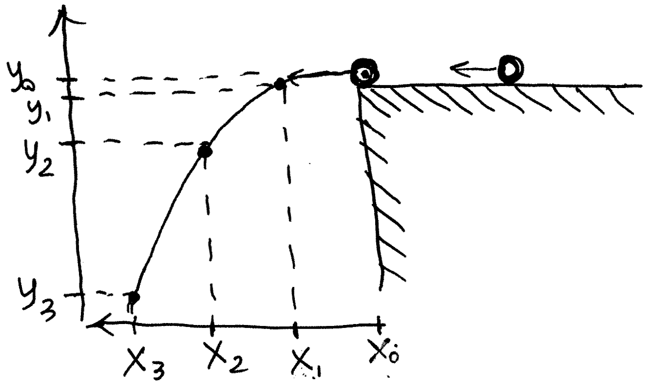
```
(%i4) integrate(1/v, s, 0, 10);  →  %pi
```

$\Rightarrow t_f - t_i = \pi \simeq 3.1416$. demora aproximadamente 3.14 segundos até parar.

Aula 3. 2019-02-18

LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Quando um objeto não segue uma trajetória predeterminada, é mais conveniente estudar o movimento das projeções dum ponto no objeto, ao longo dos eixos coordenados.



Um exemplo é o movimento dum objeto, lançado horizontalmente; a cada instante t_j, as projeções da posição do objeto, num eixo horizontal x e num eixo vertical y, são $x(t_j)$ e $y(t_j)$.

$x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas do tempo t.

As suas derivadas em ordem ao tempo são as velocidades e acelerações nos dois eixos:

$$v_x = \dot{x} \;,\quad a_x = \dot{v}_x \;,\quad a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$v_y = \dot{y} \;,\quad a_y = \dot{v}_y \;,\quad a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$$

No caso do lançamento do projétil desde uma plataforma horizontal, Galileu Galilei descobriu, no século $\boxed{\text{XVII}}$, que em intervalos de tempo iguais, Δt, as posições na horizontal, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ estão igualmente distanciadas ($x_{j+1} - x_j = \Delta x = \text{constante}$), enquanto as posições na vertical aumentam na proporção de números ímpares:

$$y_1 - y_0 = \Delta y \,,\quad y_2 - y_1 = 3\Delta y \,,\quad y_3 - y_2 = 5\Delta y \,,\ \ldots$$

Como tal,

$$\begin{cases} x_j = x_0 + j\Delta x = x_0 + v_x t_j & \left(t_j = j\Delta t,\ v_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right) \\ y_j = y_0 - \Delta y - 3\Delta y - \cdots - (2j-1)\Delta y = y_0 - j^2 \Delta y \end{cases}$$

$$j = \frac{t_j}{\Delta t} \Rightarrow y_j = y_0 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta t^2}\right) t_j^2$$

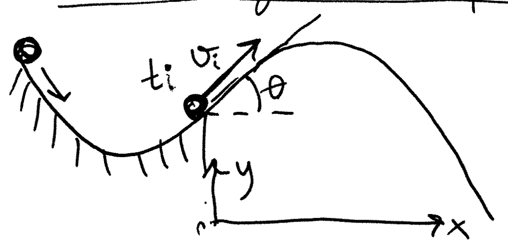
$\Rightarrow$ A projeção na horizontal é um <u>movimento uniforme</u> (aceleração nula): $\ddot{x} = a_x = 0$, $\dot{x} = v_x$ = constante

E a projeção na vertical é um <u>movimento uniformemente acelerado</u> (aceleração constante):

$a_y = \ddot{y} = -\dfrac{2\Delta y}{\Delta t^2} = -g$ $\quad g$ = constante = aceleração da gravidade

O valor de g varia, em diferentes localidades, mas é aproximadamente: $\boxed{g = 9.8 \frac{m}{s^2}}$

<u>Movimento geral dos projéteis</u>:



em t_i, quando abandona a plataforma, a velocidade é v_i e faz um ângulo θ com a horizontal.

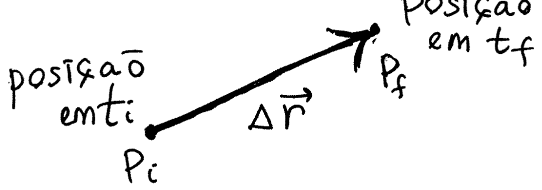
$$v_x = v_i \cos\theta = \text{constante} \Rightarrow x = x_i + v_x(t - t_i)$$

$$v_{iy} = v_i \sin\theta, \quad a_y = -g = \text{constante}$$

$$-g = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y(t) = v_{iy} - g(t - t_i)$$

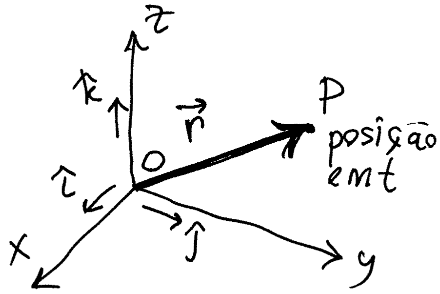
$$v_{iy} - g(t-t_i) = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = y_i + v_{iy}(t - t_i) - \frac{g}{2}(t - t_i)^2$$

DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO VETORIAIS



$\Delta\vec{r}$ = deslocamento vetorial no intervalo $[t_i, t_f]$

Num sistema de coordenadas com origem no ponto O, o vetor $\vec{r}$ que vai da origem até o ponto P, onde se encontra o objeto no instante t, chama-se <u>vetor posição</u>:

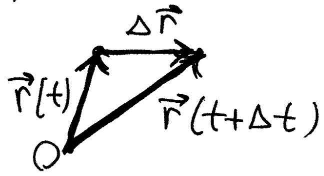


$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

($\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ = versores nas direções dos eixos x, y e z)

Deslocamento no intervalo $[t, t+\Delta t]$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$
$$= \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$



Vetor velocidade:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k}}$$

Vetor aceleração:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k} = \dot{v}_x\,\hat{\imath} + \dot{v}_y\,\hat{\jmath} + \dot{v}_z\,\hat{k}}$$

Exemplo 2.2 (do livro). A velocidade de uma partícula em função do tempo t, é

$$\vec{v} = \left(5 - t^2 e^{-\frac{t}{5}}\right)\hat{\imath} + \left(3 - e^{-\frac{t}{12}}\right)\hat{\jmath} \quad (\text{SI})$$

em $t=0$, a sua posição é $(2\hat{\imath}+5\hat{\jmath})$. Determine $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{r}(t=15)$, $\vec{v}(t=15)$, $\vec{a}(t=15)$ e os limites de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em $t\to\infty$.

<u>Resolução</u>: No Maxima, os vetores podem ser representados por listas

```
(%i1) v: [5-t^2 exp(-t/5), 3-exp(-t/12)];
(%i2) a: diff(v,t);
```

(derivada de cada elemento na lista v)

$$\longrightarrow \quad \vec{a} = \left(\frac{t^2 e^{-\frac{t}{5}}}{5} - 2te^{-\frac{t}{5}}\right)\hat{\imath} + \frac{e^{-\frac{t}{12}}}{12}\hat{\jmath}$$

```
(%i3) assume(t>0);
(%i4) r: [2,5] + integrate(v,t,0,t);
(%i5) expand(%);
```

$$\longrightarrow \quad \vec{r} = \left((5t^2+50t+250)e^{-\frac{t}{5}} + 5t - 248\right)\hat{\imath} + \left(12e^{-\frac{t}{12}} + 3t - 7\right)\hat{\jmath}$$

```
(%i6) float(subst(t=15, [r,v,a]));
```

lista de 3 listas

$$\rightarrow \vec{r}(15) = -67.2\,\hat{\imath} + 41.44\,\hat{\jmath} \quad \vec{v}(15) = -6.20\,\hat{\imath} + 2.71\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{a}(15) = 0.75\,\hat{\imath} + 0.024\,\hat{\jmath}$$

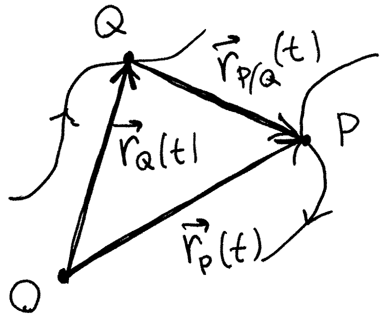
No limite $t\to\infty$:

```
(%i7) limit([r,v,a], t, inf);
```

$$\longrightarrow \vec{r}(\infty) = \infty\hat{\imath} + \infty\hat{\jmath}, \quad \vec{v}(\infty) = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}, \quad \vec{a}(\infty) = \vec{0}$$

Aula 4. 2019-02-20

MOVIMENTO RELATIVO



$\vec{r}_P(t)$, $\vec{r}_Q(t)$: posições dos pontos P e Q, medidas desde a origem O.

$\vec{r}_{P/Q}(t)$ = posição do ponto P, relativa ao ponto Q.

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_{P/Q}(t) + \vec{r}_Q(t)$$

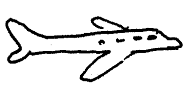
$\vec{v}_P = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt}$ = velocidade "absoluta" de P.

$\vec{v}_Q = \dfrac{d\vec{r}_Q}{dt}$ = velocidade "absoluta" de Q

$\vec{v}_{P/Q} = \dfrac{d\vec{r}_{P/Q}}{dt}$ = velocidade de P, relativa a Q (velocidade do ponto P, visto desde Q)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{P/Q} + \vec{v}_Q}$$

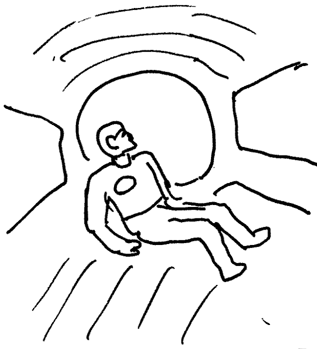
Derivando novamente obtém-se a relação para as acelerações: $\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{P/Q} + \vec{a}_Q}$



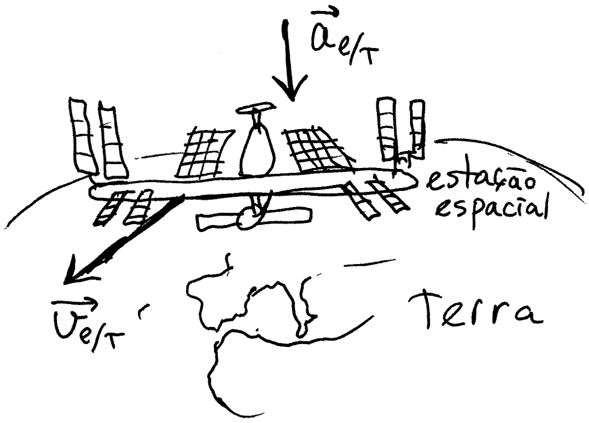
velocidade absoluta dum passageiro no avião:

$$\vec{v}_{\text{pass}} = \vec{v}_{\text{Pass./avião}} + \vec{v}_{\text{avião/Terra}} + \vec{v}_{\text{Terra/Sol}} + \vec{v}_{\text{Sol/Via láctea}} + \dots$$

astronauta na estação espacial



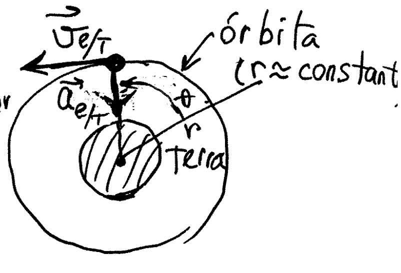
$\vec{v}_{a/e} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{a/e} = \vec{0}$



A velocidade da estação, em relação à Terra é:

$$\vec{v}_{e/T} = 7657\,\hat{e}_\theta \left(\frac{m}{s}\right)$$ direção perpendicular a r

$$\vec{a}_{e/T} = -8.66\,\hat{e}_r \left(\frac{m}{s^2}\right)$$ direção de r

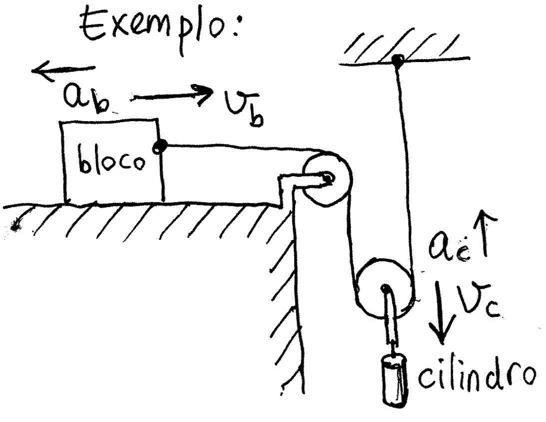


velocidade e aceleração do astronauta, em relação à Terra: $\vec{v}_{a/T} = \vec{v}_{e/T} \quad \vec{a}_{a/T} = \vec{a}_{e/T}$

A cada segundo, a estação e o astronauta caem 4.33 metros para a Terra, enquanto se deslocam 7657 metros na direção perpendicular.

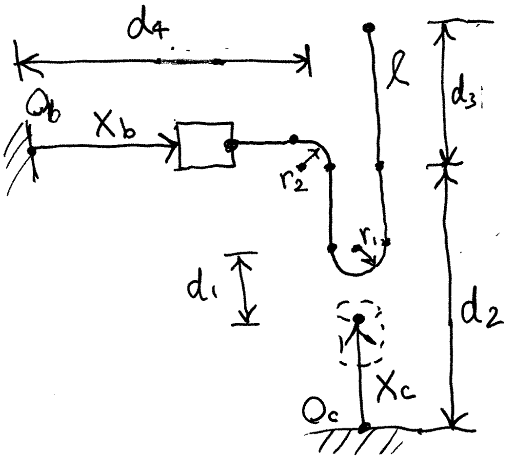
MOVIMENTOS DEPENDENTES

Exemplo:



Basta saber uma das velocidades, v_b ou v_c, para encontrar a outra. E o mesmo para as acelerações a_b e a_c. Os movimentos do bloco e do cilindro dependem um do outro.

O que faz com que sejam dependentes é que o comprimento do fio (ℓ) permanece constante. Para descrever o movimento horizontal do bloco, é necessária uma variável, $x_b(t)$, e para o movimento vertical do cilindro, uma segunda variável $x_c(t)$.



A condição do comprimento ℓ ser constante reduz uma das variáveis: o sistema tem apenas um grau de liberdade.

Comprimento do fio, em relação a $x_b(t)$ e $x_c(t)$:

$$\ell = d_3 + (d_2 - d_1 - x_c(t)) + \pi r_1 + (d_2 - d_1 - x_c(t)) + \frac{\pi}{2} r_2 + (d_4 - x_b(t))$$

$r_1, r_2, d_1, \ldots, d_4$ são constantes. Derivando a expressão,

$$0 = -\dot{x}_c - \dot{x}_c - \dot{x}_b$$

$\dot{x}_c = v_c$ = velocidade do cilindro

$\dot{x}_b = v_b$ = velocidade do bloco

$$\Longrightarrow \boxed{v_b = -2 v_c}$$

Se o cilindro desce, ($v_c < 0$), o bloco desloca-se para a direita, ($v_b > 0$) com o dobro da velocidade.

Derivando novamente, encontra-se uma relação semelhante para as acelerações:

$$\boxed{a_b = -2 a_c}$$

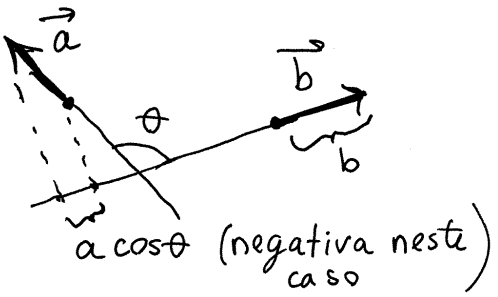
PRODUTO ESCALAR ENTRE VETORES

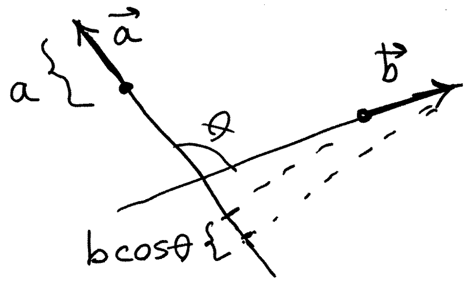
θ = ângulo entre as direções dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (entre 0 e π)

$|\vec{a}|, |\vec{b}|$: módulos dos vetores

Define-se o produto escalar:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta} = \text{número real}$$





$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = produto do módulo dum dos vetores, vezes a projeção do outro na direção do primeiro.

É facil ver que é um produto comutativo e distributivo em relação à soma vetorial. Também:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \quad , \quad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$$

($\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ se $\vec{a}$ é perpendicular a $\vec{b}$)

$$\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Em particular:

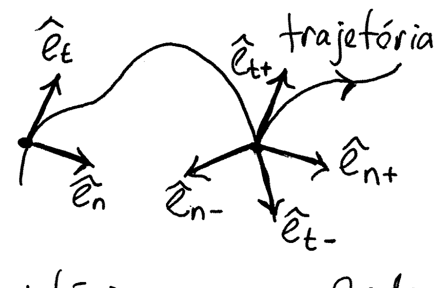
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2\cos 0 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

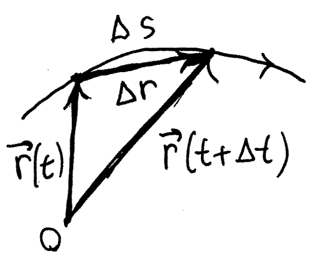
$$\Longrightarrow \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

Aula 5. 2019-02-25

COORDENADAS TANGENCIAL E NORMAL

Em cada ponto da trajetória há um versor tangencial, $\hat{e}_t$, tangente à trajetória e no sentido de $s>0$, e um versor normal, $\hat{e}_n$, perpendicular a $\hat{e}_t$ e no sentido em que a trajetória se curva. Onde a trajetória for reta, não existe $\hat{e}_n$; e em alguns pontos existem dos versores $\hat{e}_t$ e dois versores $\hat{e}_n$





Para um movimento dado, $\vec{r}(t)$, os dois versores são funções de t: $\hat{e}_t(t)$ e $\hat{e}_n(t)$ são os versores no ponto na posição $\vec{r}(t)$. Num intervalo $[t, t+\Delta t]$, o deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

tem módulo menor ou igual ao deslocamento na trajetória, Δs ($|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s$). Mas no limite $\Delta t \to 0$, $|\Delta\vec{r}|$ aproxima-se de Δs é $\Delta\vec{r}$ é tangente à trajetória. Como tal, a velocidade é:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,\hat{e}_t(t) \qquad \boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}\,\hat{e}_t}$$

O módulo de $\vec{v}$ é a rapidez, $|v| = |\dot{s}|$, e a direção de $\vec{v}(t)$ é $\hat{e}_t(t)$, no mesmo sentido, se $v>0$, ou no sentido oposto, se $v<0$.

Nos pontos onde $\hat{e}_t$ é descontínua, $\lim\limits_{t\to t_d^-} \hat{e}_t \neq \lim\limits_{t\to t_d^+} \hat{e}_t$, a velocidade $\vec{v}$ é, necessariamente, nula ($\vec{v}$ deve ser contínua):

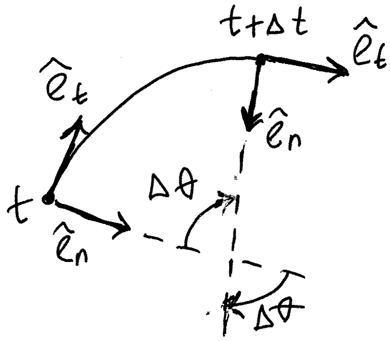
$$\vec{v}(t_d) = \underbrace{v(t_d^-)}_{0}\,\hat{e}_{t^-} = \underbrace{v(t_d^+)}_{0}\,\hat{e}_{t^+} = \vec{0}$$

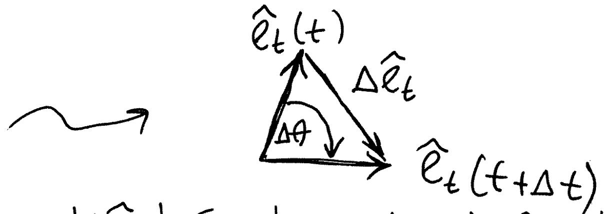
Derivada de $\hat{e}_t(t)$

$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1$ (módulo ao quadrado)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t + \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 2\,\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

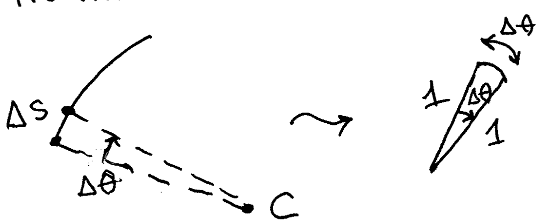
Isso implica que a derivada, $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$, é perpendicular a $\hat{e}_t$.





$|\Delta\hat{e}_t|$ é a base dum triângulo com dois lados iguais a 1, que fazem um ângulo $\Delta\theta$ (ângulo que $\hat{e}_n$ roda)

No limite $\Delta t \to 0$:



$|\Delta\hat{e}_t|$ aproxima-se do arco com raio 1 e ângulo $\Delta\theta$: $\quad |\Delta\hat{e}_t| \to |\Delta\theta|$

E o ângulo que $\hat{e}_n$ roda, $\Delta\theta$, é o ângulo de um arco com centro num ponto C (centro de curvatura), raio R (raio da trajetória em t) e arco de comprimento Δs (deslocamento na trajetória). A direção de $\hat{e}_t$ aproxima-se da direção (e sentido, $\underset{\text{se}}{}\ \Delta\theta > 0$) de $\hat{e}_n$. Como tal:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{e}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta s}{R}\right)}{\Delta t}\hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{\dot{s}}{R}\hat{e}_n = \frac{v}{R}\hat{e}_n}$$

R = raio de curvatura da trajetória, na posição $\vec{r}(t)$

COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DE $\vec{a}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} = a_t\hat{e}_t + v\left(\frac{v}{R}\right)\hat{e}_n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = a_t\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n}$$

$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$ = componente tangencial

$a_n = \frac{v^2}{R}$ = componente normal

como as duas componentes são em direções perpendiculares: $\Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Exemplo 3.1. O movimento de um ponto é definido por: $\vec{r} = 5t\,\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\hat{\jmath} + 2(1-t^2)\hat{k}$ (SI. t=tempo)

Determine: (a) O valor da velocidade, $v(t)$ em função do tempo; (b) o raio de curvatura da trajetória, em função de t; (c) o deslocamento ao longo da trajetória, entre $t=0$ e $t=1$.

(a) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4t\hat{k}$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 25 + 9t^2 + 16t^2 = 25(1+t^2)$$

Arbitrando $s>0$ no sentido do movimento ($v>0$):

$$\boxed{v = +5\sqrt{1+t^2}}$$

(b) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k} \implies |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = 9 + 16 = 25$

(aceleração constante)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5\sqrt{1+t^2}\right) = \frac{5\,t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n^2 = |\vec{a}|^2 - a_t^2 = 25 - \frac{25t^2}{1+t^2} = \frac{25}{1+t^2}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\left(\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}\right)} = 5(1+t^2)^{3/2}$$ (R>0. Não pode nunca ser negativo)

Outra forma de obter $R(t)$:

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{3\,t}{5\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\jmath} - \frac{4t}{5\sqrt{1+t^2}}\,\hat{k}$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{e}_t = \frac{9t}{5\sqrt{1+t^2}} + \frac{16\,t}{5\sqrt{1+t^2}} = \frac{5\,t}{\sqrt{1+t^2}}$$

e calcula-se a_n e R igual que foi feito acima.

(c) $v = \dfrac{ds}{dt} \implies 5\sqrt{1+t^2} = \dfrac{ds}{dt}$ (EDO de var. separav.)

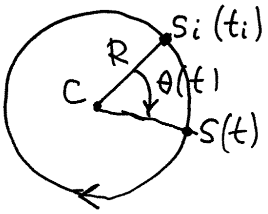
$$\int_{s_0}^{s_0+\Delta s_{01}} ds = 5\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\implies \Delta s_{01} = \frac{5}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) \approx 5.739 \text{ m}$$

(integral calculado no Maxima)

Aula 6. 2019-02-27

MOVIMENTO CIRCULAR



Trajetória plana, com centro de curvatura num ponto C, fixo, e com raio R constante. $s(t) = s_i + R\,\theta(t)$ (θ em radianos)

$\omega = \dot\theta$ = velocidade angular

$\alpha = \dot\omega$ = aceleração angular

$$\boxed{\omega = \dot\theta \qquad \alpha = \dot\omega \qquad \alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}}$$

Resolvem-se tal como as equações do Capítulo 1.

Relação entre variáveis angulares e circulares:

$$v = R\omega \qquad a_t = R\alpha \qquad a_n = R\omega^2$$

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

$$\alpha = 0\,, \qquad \omega = \omega_i = \text{constante}, \qquad \theta = \theta_i + \omega(t - t_i)$$

Período. tempo que demora uma volta ($\Delta\theta = 2\pi$)

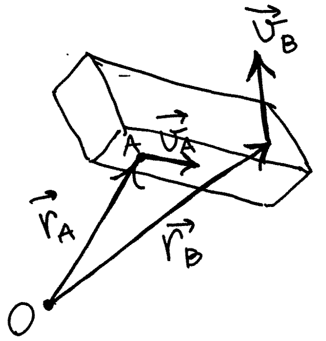
$$\Delta\theta = \omega T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequência. Número de voltas por unidade de tempo.
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

f tem unidades de inverso do tempo. No sistema SI, $1\,\text{H} = 1\,\text{s}^{-1}$ (hertz)

$$\text{rpm} = \text{min}^{-1} = \frac{1}{60}\,\text{Hz} \quad \text{(rotações por minuto)}$$

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS



Posição relativa a um ponto (A) do corpo:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

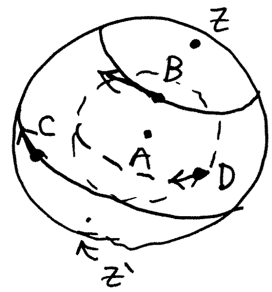
$\vec{r}_{B/A}$ pode mudar de direção, mas o seu módulo permanece constante

$$|\vec{r}_{B/A}|^2 = \vec{r}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A} = \overline{AB}^2 = \text{constante}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{r}_{B/A} \cdot \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{v}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A} = 0$$

A velocidade relativa entre dois pontos no corpo é sempre perpendicular à posição relativa entre eles.

Como tal, o movimento de B, e de qualquer outro ponto, relativo a A, é numa esfera de raio $\overline{AB}$. Como as distâncias entre todos os pontos do corpo devem ser constantes, $\vec{v}_{B/A}$, $\vec{v}_{C/A}$, ...

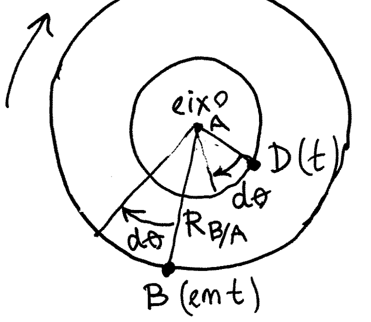


serão tangentes a arcos de circunferências paralelas entre sim. Deverão existir então dois pontos, z e z', que estão em repouso, em relação a A ($\vec{v}_z = \vec{v}_{z'} = \vec{v}_A$)

Eixo de rotação: linha reta que passa por A e por todos os pontos com a mesma velocidade de A.

Plano de rotação: Plano perpendicular ao eixo de rotação

Projeção dos movimentos, relativos, no plano de rotação:



No intervalo $[t, t+dt]$, todos os pontos rodam o mesmo ângulo $d\theta$.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = velocidade angular do corpo, no instante t

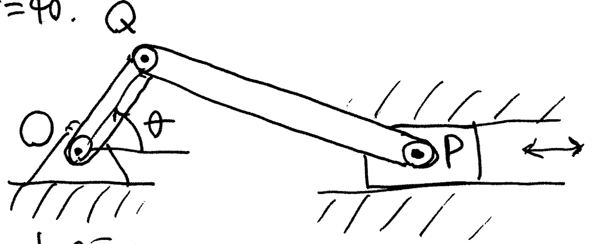
(a cada instante, $\omega(t)$ pode ser diferente e a direção do eixo também)

$\alpha = \dot{\omega}$ = acel. angular

$$\boxed{v_{B/A} = R_{B/A}\,\omega}$$

$R_{B/A}$ = projeção da distância $\overline{AB}$, no plano de rotação

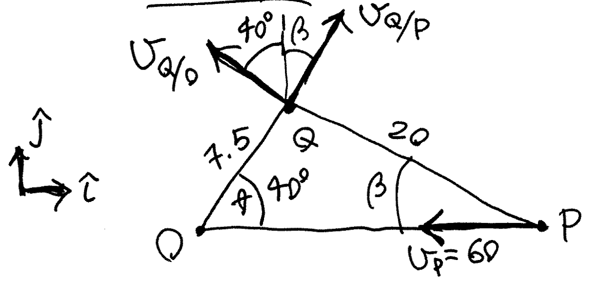
Exemplo 3.2. Sistema biela-manivela. Determine ω da biela e da manivela, no instante em que o pistão desloca-se para a esquerda, com velocidade $v_P = 60\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ e $\theta = 40°$.



$\overline{OQ} = 7.5$ cm

$\overline{PQ} = 20$ cm

Resolução:



$\vec{v}_{Q/O} \perp \overline{OQ}$

$\vec{v}_{Q/P} \perp \overline{PQ}$

(distâncias em cm, tempo em s)

$$\sin\beta = \frac{7.5\sin 40°}{20} = 0.2410$$

$$\Rightarrow \beta = 13.95°$$

$$\vec{v}_{Q/O} = \vec{v}_Q - \vec{v}_O = \vec{v}_Q \quad \Rightarrow \quad v_Q = 7.5\,\omega_m$$

$$v_{Q/P} = 20\,\omega_m$$

$$\vec{v}_Q = 7.5\,\omega_m(-\sin 40°\,\hat{\imath} + \cos 40°\,\hat{\jmath}) = \omega_m(-4.82\,\hat{\imath} + 5.75\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Q/P} + \vec{v}_P = 20\,\omega_b(\sin\beta\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath}) - 60\,\hat{\imath}$$

$$= (4.82\,\omega_b - 60)\,\hat{\imath} + 19.4\,\omega_b\,\hat{\jmath}$$ (corrigir equação 3.25 no livro)

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4.82\,\omega_m = 4.82\,\omega_b - 60 \\ 5.75\,\omega_m = 19.4\,\omega_b \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \omega_b &= 2.843 \text{ Hz} \\ \omega_m &= 9.603 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Observe-se que a direção do eixo de rotação e a velocidade angular de um corpo rígido são independentes do ponto escolhido como referência.

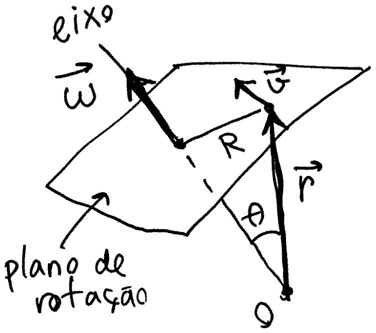
No exemplo da manivela e a biela, a velocidade angular, ω_m, da manivela, é a derivada do ângulo θ ($\omega_m = \dot{\theta}$) e a velocidade angular da biela é a derivada de β: $\omega_b = \dot{\beta}$

Os resultados positivos, indicam que θ e β estão a aumentar, nesse instante.

Nos dois casos, o eixo de rotação é perpendicular à figura.

Aula 7. 2019-03-06

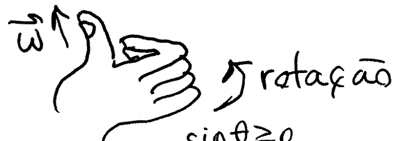
VETOR VELOCIDADE ANGULAR



$\vec{\omega}$: módulo $= |\omega| = |\dot{\theta}|$

direção = eixo de rotação

sentido: da mão direita



Note-se que $|v| = |R||\omega| = (|r|\sin\theta)|\omega|$ $\quad \sin\theta \geq 0$

Definese o produto vetorial.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

módulo igual ao produto dos módulos dos vetores, vezes o seno do ângulo entre eles. Direção perpendicular aos dois vetores; sentido da regra da mão direita, do primeiro para o segundo vetor.

Propriedades do produto vetorial

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\quad (\theta_1 = 180^\circ - \theta_2)$
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ $\quad (\theta = 0^\circ)$
3. $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ $\quad (\theta = 90^\circ$ nos 3 casos$)$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
5. $\vec{a} \times (k\vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

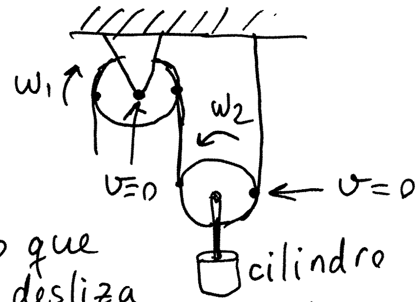
Se o eixo dos z for escolhido na direção de $\vec{\omega}$.

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ x & y \end{vmatrix} = \omega(x\hat{\jmath} - y\hat{\imath})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

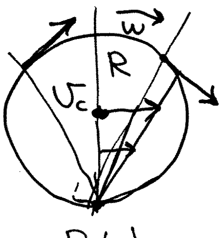
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\text{aceleração tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{aceleração normal}}} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{aceleração angular}$$

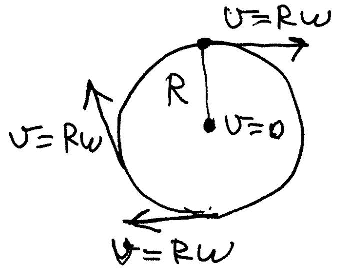
MOVIMENTOS DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DEPENDENTES



fio que não desliza nas roldanas (~~faz~~ faz rodar as roldanas)

Em relação ao ponto com velocidade nula:





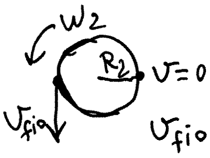
$v_c = R\omega$

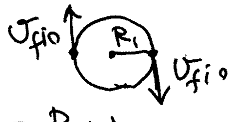
velocidade de translação do centro igual a R vezes a velocidade angular.

A velocidade do fio é R vezes a velocidade angular.

$\Rightarrow a_c = R\alpha$

$a_{fio} = R\alpha$





$v_{fio} = 2R_2\omega_2 = R_1\omega_1$

MECÂNICA VETORIAL

Definições (Newton, 1687).

m = massa = quantidade de matéria

$\vec{p} = m\vec{v}$ = quantidade de movimento (também chamado momento linear).

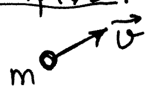
LEIS DE NEWTON

1ª (lei da inércia). Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas.

2ª. A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada.

3ª A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas

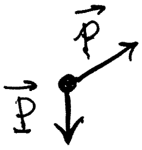
Exemplos:



Bola lançada com velocidade $\vec{v}$. Se não houvessem forças a atuar na bola, o seu movimento seria retilíneo e uniforme.

A força gravítica (peso) produz uma mudança na quantidade de movimento:

$$\underbrace{d\vec{p}}_{m\vec{v}} = \underbrace{\vec{P}}_{\text{peso}}\, dt$$



A quantidade de movimento $\vec{p}(t+dt)$ após o intervalo dt será: $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) + d\vec{p} = \vec{p}(t) + \vec{P}\,dt$

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) \quad , \quad \vec{p}(t+dt) = m\vec{v}(t+dt)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}\,dt = m\left(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)\right)$$

$$\vec{P} = m\left(\frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}\right) = m\,\vec{a}(t)$$

Como $\vec{a}$ é a aceleração da gravidade, $\vec{g}$, constante, conclui-se que o peso é:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

Unidades SI: $1\,\text{N} = 1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (um newton)

Como tal, uma pessoa com massa de 50 kg pesa:

$$P = 50\,\text{kg}\cdot 9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490\ \text{N}$$

(Na Terra. Noutro planeta, onde a gravidade é diferente, o seu peso seria diferente.)

Aula 8. 2019-03-11

Forma geral da 2ª lei de Newton:

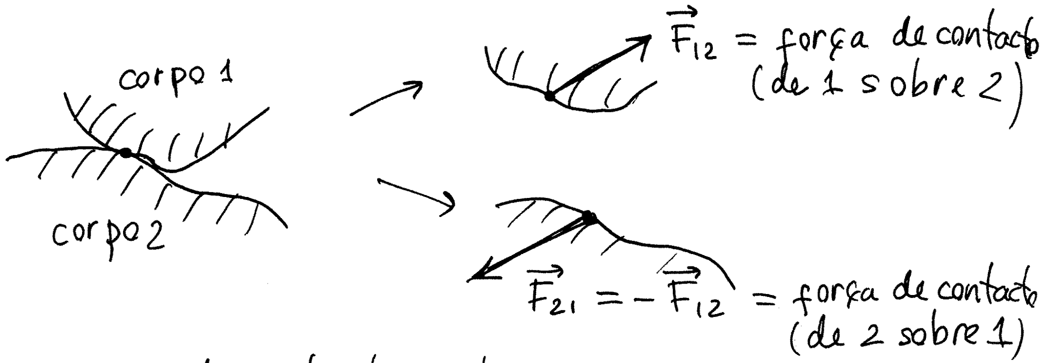
$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$\vec{F}$ = soma resultante = soma vetorial de todas as forças <u>externas</u>

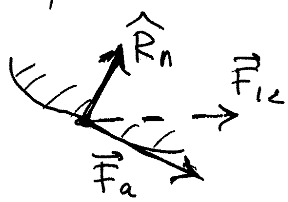
No caso em que m permanece constante,

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{F} = m\vec{a}$$

REAÇÃO NORMAL E FORÇAS DE ATRITO



A força de contacto entre duas superfícies costuma separar-se em duas:



① <u>Reação normal</u>, $\vec{R}_n$. Componente perpendicular às superfícies em contacto

② <u>Força de atrito</u>, $\vec{F}_a$. Componente tangente as superfícies.

A força de atrito pode ser de dois tipos:

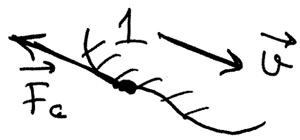
Atrito estático. Os corpos não deslizam. Ou seja, a velocidade relativa entre as duas superfícies em contacto é nula.

Nesse caso, a força de atrito estático, $\vec{F}_e$, pode apontar em qualquer direção, tangente às superfícies, e o seu módulo, F_e, pode ter qualquer valor no intervalo:

$$0 \leq F_e \leq \mu_e R_n$$

onde R_n é o módulo da reação normal e μ_e é um número, próprio do tipo de superfícies em contacto, chamado **coeficiente de atrito estático**.

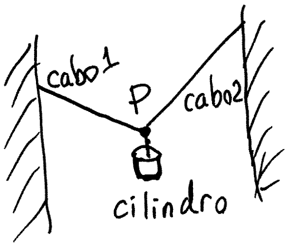
Atrito cinético. Se o corpo 1 desliza, com velocidade $\vec{v}$ relativa ao corpo 2, a força de atrito cinético, $\vec{F}_c$, é na mesma direção de $\vec{v}$, mas no sentido oposto, e com módulo exatamente igual a:



$$\boxed{F_c = \mu_c R_n}$$

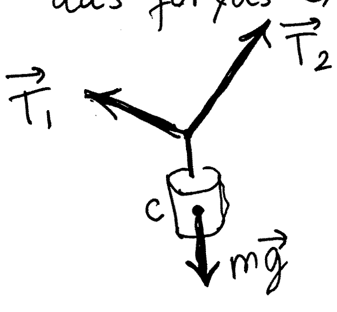
μ_c = coeficiente de atrito cinético

TENSÃO NAS CORDAS/CABOS



Num ponto dum objeto, ligado a um cabo, atua uma força de tensão, $\vec{T}$, na direção do cabo e no sentido que se opõe a que o cabo seja esticado.

Diagrama de corpo livre do cilindro: representação das forças externas.

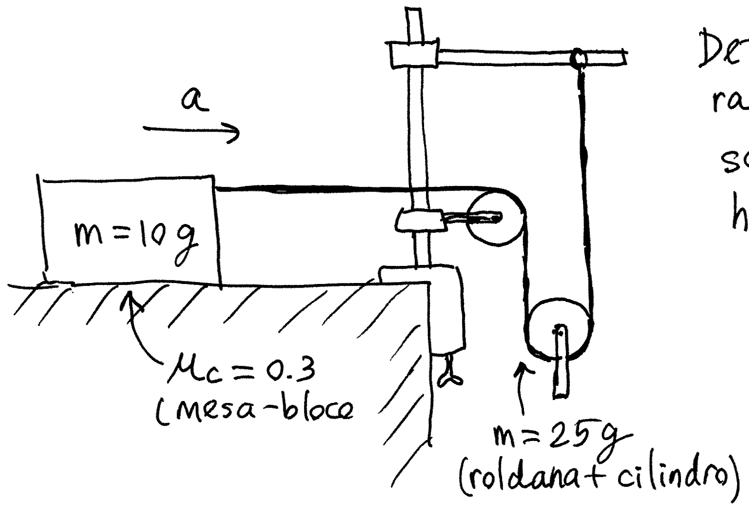


O peso, $m\vec{g}$, atua no centro de gravidade, C.

Se o cilindro está em repouso,

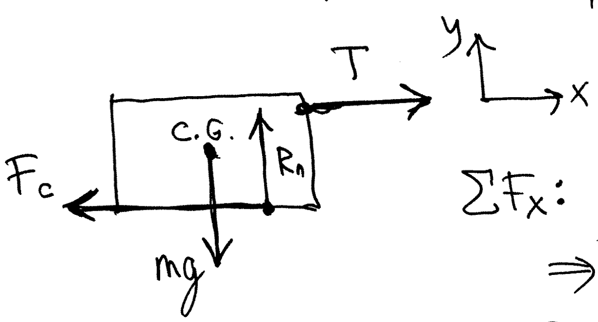
$$\vec{p} = 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \underbrace{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2}_{=0}$$

Exemplo 1.



Determine a aceleração, a, do bloco sobre a mesa horizontal.

Resolução. Diagrama de corpo livre do bloco:



$a_x = a$
$a_y = 0$

$\sum F_x$: $T - F_c = m\,a_x$

$\Rightarrow \boxed{T - 0.3\,R_n = 0.01\,a}$

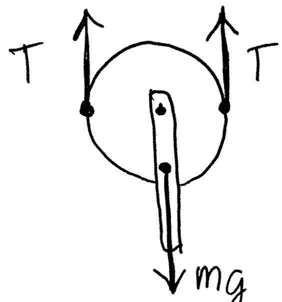
$\sum F_y$: $R_n - mg = 0 \Rightarrow R_n = 0.01 \cdot 9.8$

$\Rightarrow \boxed{T = 0.3 \cdot 0.01 \cdot 9.8 + 0.01\,a}$

Falta outra equação que será a equação de movimento do cilindro.

Desprezando as massas das rodas das roldanas, a tensão será igual em qualquer parte da corda (a demonstração será feita no capítulo seguinte). E, como foi explicado no capítulo 2, a aceleração do cilindro será igual a metade da aceleração do bloco.

Diagrama de corpo livre do cilindro+roldana:

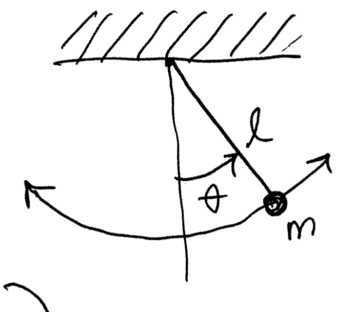


$$-T-T+mg = m\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2T = 0.025\cdot 9.8 - \left(\frac{0.025}{2}\right)a}$$

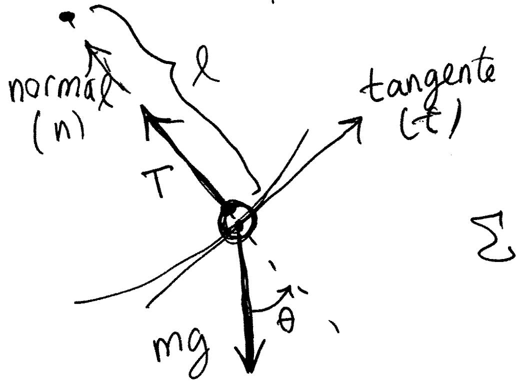
Resolvem-se as equações do cilindro e do bloco, para encontrar as duas variáveis T e a. O resultado é: $a = 5.729 \frac{m}{s^2}$

Exemplo 2. Pêndulo simples. Pequeno objeto de massa m, pendurado dum fio de comprimento ℓ.



Sistema com um único grau de liberdade, $\theta(t)$. A equação de movimento, $\ddot{\theta}$ = expressão, permitirá obter $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$.

Para encontrar a eq. de movimento, usa-se a 2ª lei de Newton.



$$\sum F_t = m a_t = m\ell\ddot{\theta}$$

$$\sum F_n = m a_n = m\ell\dot{\theta}^2$$

$$\sum F_t:\ -mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$ equação de movimento

$$\sum F_n:\ T - mg\cos\theta = m\ell\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = m\left(g\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\right)$$

Aula 9. 2019-03-13

FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS

Os fluidos produzem, nos corpos em movimento, forças opostas ao movimento. A força resultante depende da forma e tamanho dos objetos assim como das propriedades do fluido (massa volúmica, ρ, e coeficiente de viscosidade, η). Os objetos com formas geométricas simples, sofrem uma força de resistência na direção da sua velocidade $\vec{v}$, no sentido oposto, e com módulo proporcional a v, se $v \approx 0$, ou proporcional a v^2, para velocidades maiores. O tipo de força (v ou v^2) depende do valor do **número de Reynolds:**

$$N_R = \frac{\ell v \rho}{\eta}$$

ⓐ $N_R < 1$, F_R proporcional a v

ⓑ $100 < N_R < 2000$, F_R proporc. a v^2

ⓒ $N_R > 4000$. Turbulência.

ℓ = "tamanho" do objeto

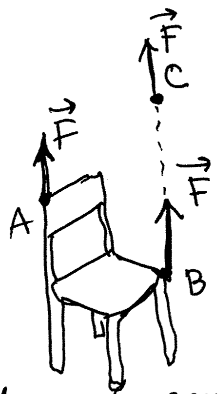
ρ = massa volúmica do fluido ⟵ massa/volume

η = coef. de viscosidade do fluido ⟵ massa/(dist. × tempo)

No caso de uma esfera de raio R,

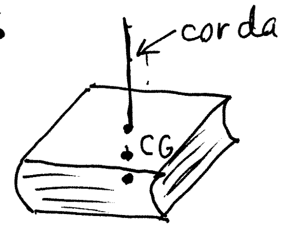
$$F_r = \begin{cases} 6\pi\eta R v, & \text{se } N_R < 1 \\ \frac{\pi}{4}\rho R^2 v^2, & \text{se } 100 < N_R < 2000 \end{cases}$$

VETORES DESLIZANTES

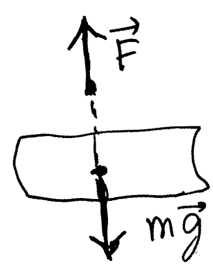


As forças aplicadas num corpo rígido não são <u>vetores livres</u> (como $\vec{v}$ ou $\vec{a}$), mas sim <u>vetores deslizantes</u>. Isto é, para além de serem definidos pelo seu módulo, direção e sentido, é necessário também saber a sua **linha de ação**. Por exemplo, na figura acima, a mesma força $\vec{F}$ aplicada em A ou B produz efeitos diferentes. Nos dois casos o módulo direção e sentido de $\vec{F}$ é o mesmo, mas a linha na direção de $\vec{F}$, passando pelo ponto de aplicação da força, é diferente. Se $\vec{F}$ for aplicada no ponto C, que está na mesma linha de ação que passa por B, usando uma corda, o efeito seria o mesmo que em B. Ou seja, a força pode ser deslocada ao longo da sua linha de ação.

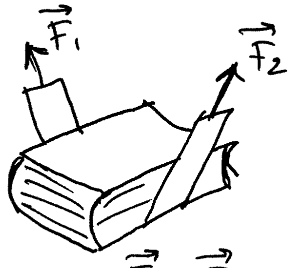
SOBREPOSIÇÃO DE FORÇAS



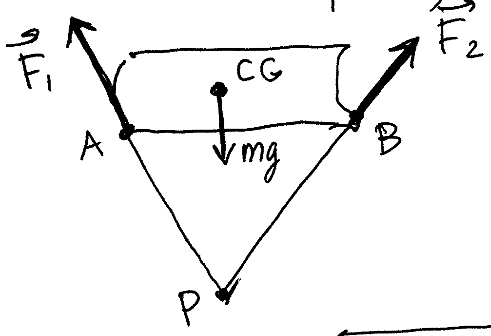
Caso 1. Forças colineares (com a mesma linha de ação).
Exemplo: fura-se um livro, passando pelo seu centro de gravidade (CG) e passa-se uma corda. Na corda aplica-se uma força vertical para levantar o livro:



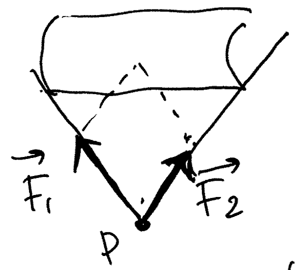
A força resultante é $\vec{F}+m\vec{g}$, aplicada em qualquer ponto na linha de ação.



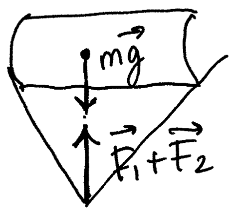
Caso 2. Forças concorrentes.
(linhas de ação diferentes, que se cruzam num ponto)



deslocam-se $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ para P.

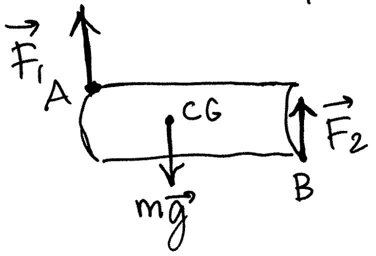


Forças no mesmo ponto $\Leftrightarrow$ $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ nesse ponto

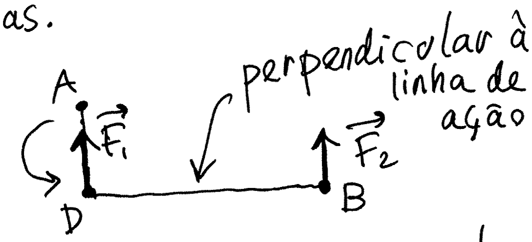


Se o corpo está em equilíbrio $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ e $m\vec{g}$ são colineares, e: $|\vec{F}_1+\vec{F}_2| = mg$

Caso 3. Forças paralelas.



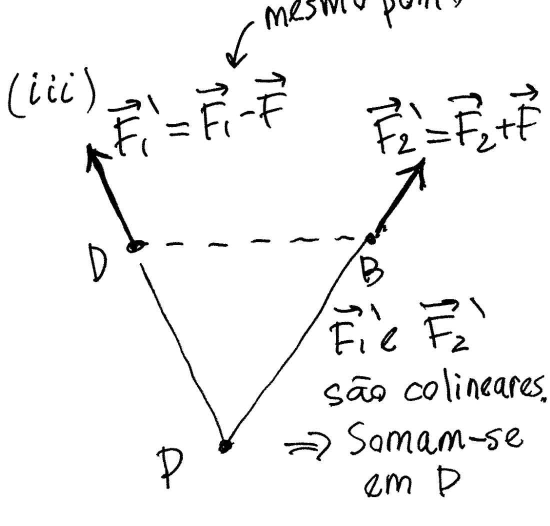
(i)



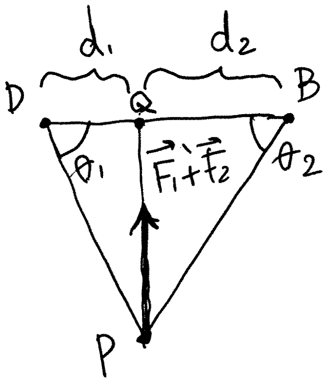
(ii)

$\vec{F}$ e $-\vec{F}$ colineares, com resultante nula

(iii)



$\vec{F}_1'$ e $\vec{F}_2'$ são colineares. $\Rightarrow$ Somam-se em P

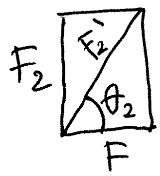


Repare-se: $\vec{F}_1' + \vec{F}_2' = (\vec{F}_1 - \vec{F}) + (\vec{F}_2 + \vec{F})$

$$\Rightarrow \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Os vetores podem ser somados como vetores livres, mas o procedimento é importante para encontrar a posição da linha de ação da resultante: $\overline{PQ} = d_1 \tan\theta_1 = d_2 \tan\theta_2$

$\tan\theta_1 = \frac{F_1}{F}$



$\tan\theta_2 = \frac{F_2}{F}$

$$\Rightarrow \boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2} \quad \text{lei das alavancas}$$

d_i = distância entre a linha de ação de $\vec{F}_i$ e a linha de ação da resultante.

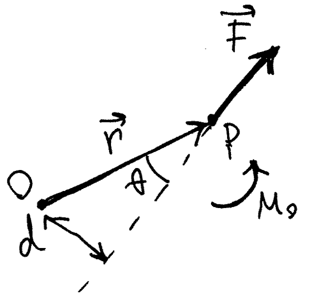
Momento de uma força

$F_i d_i$ chama-se momento da força $\vec{F}_i$, em relação ao ponto Q (ou P, ou qualquer outro ponto na linha paralela a $\vec{F}_i$, que passa por Q)

$$M_{i,Q} = F_i d_i$$

Aula 10. 2019-03-18

MOMENTO DE UMA FORÇA



Momento de $\vec{F}$, aplicada em P, em relação a O: $M_o = |\vec{F}|\, d = |\vec{F}||\vec{r}| \sin\theta$

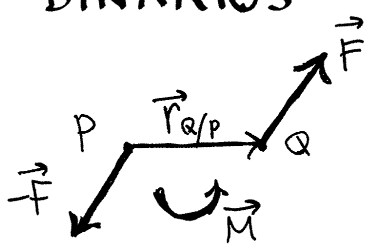
Indica uma tendência a rodar, no plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$, neste caso no sentido oposto aos ponteiros do relógio.

Define-se o vetor momento da força:

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$\vec{r}$ = posição do ponto onde $\vec{F}$ atua.

BINÁRIOS



Duas forças iguais e opostas, $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ com linhas de ação diferentes (obviamente paralelas). A força resultante é nula. Como tal, não produzem nenhuma translação mas unicamente rotação:

momento resultante $= \vec{r}_P \times (-\vec{F}) + \vec{r}_Q \times \vec{F} = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F}$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{r}_{Q/P} \times \vec{F}}$$

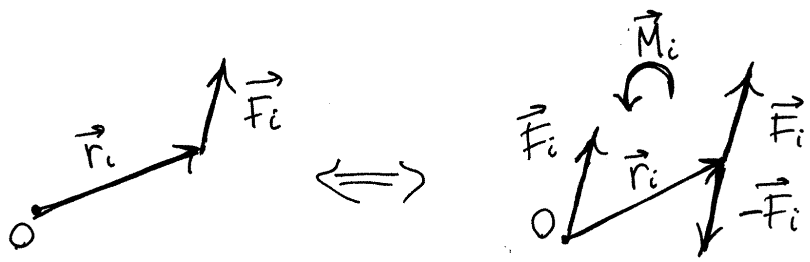
independente do ponto de referência O

$|\vec{M}| = |\vec{F}| \times$ distância entre as linhas de ação

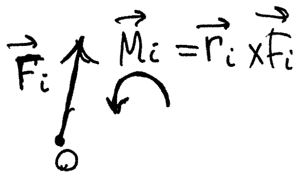
SOBREPOSIÇÃO DE FORÇAS

Qualquer sistema de forças podem ser sobrepostas em qualquer ponto, que designaremos de origem O, usando o seguinte procedimento:

A cada força $\vec{F}_i$, aplicada na posição $\vec{r}_i$, somam-se



um binário $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ e duas forças, $\vec{F}_i$ na origem, e $-\vec{F}_i$ na posição $\vec{r}_i$. Essas duas forças constituem um binário, com momento: $\vec{r}_i \times (-\vec{F}_i) = -\vec{M}_i$. Como tal, as duas forças introduzidas e o binário $\vec{M}_i$ é um sistema nulo, que não altera nada. As duas forças na posição $\vec{r}_i$ anulam-se, ficando unicamente a força $\vec{F}_i$ na origem, e o binário $\vec{M}_i$.

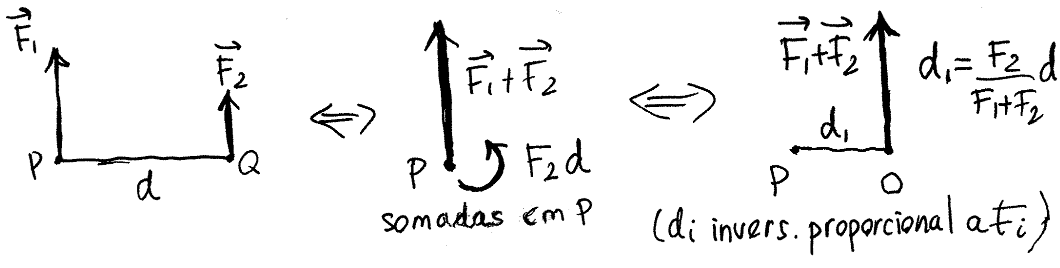


Após deslocar todas as forças para a origem, somam-se nesse ponto e somam-se os binários $\vec{M}_i$

$$\boxed{\text{força resultante} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \qquad \boxed{\text{binário resultante} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i}$$

(na origem)

Se o binário resultante, $\vec{M}$, for perpendicular à força resultante, $\vec{F}$, a força resultante pode ser sempre deslocada para outro ponto, na posição $\vec{r}$, onde $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$. Nesse ponto fica então unicamente força resultante, sem binário resultante. Exemplo: soma de forças paralelas.



EQUILÍBRIO DOS CORPOS RÍGIDOS.

Equilíbrio = estado de repouso ou de movimento retilíneo, uniforme, sem rotação (num referencial inercial)

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Observe-se que se a força resultante é zero, pode ser aplicada em qualquer ponto sem acrescentar nenhum binário adicional ⇒ a soma dos momentos das forças externas é zero em relação a qualquer ponto

Exemplo. Automóvel em repouso, numa estrada com declive de 5%. Determine as reações normais nos pneus e as forças de atrito.

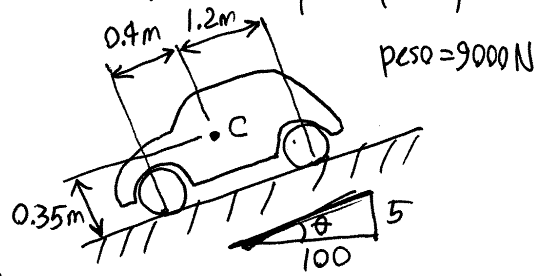
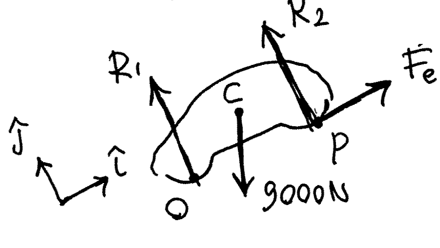


Diagrama de corpo livre



$O = (0,0)$, $P = (1.6, 0)$, $C = (0.4, 0.35)$

$$m\vec{g} = 9000(-\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) = -449.4\,\hat{\imath} - 8988.8\,\hat{\jmath} \quad \text{(SI)}$$

$$\sum F_x = F_e - 449.4 = 0 \qquad \boxed{F_e = 449.4\text{N}}$$

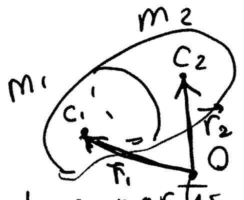
$$\sum F_y = R_1 + R_2 - 8988.8 = 0$$

$$\sum M_O = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -449.4 & -8988.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.6 & 0 \\ F_e & R_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{R_2 = 2148.6\text{N}}$$

$$\sum M_P = \begin{vmatrix} -1.2 & 0.35 \\ -449.4 & -8988.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1.6 & 0 \\ 0 & R_1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{R_1 = 6839.9\text{N}}$$

CENTRO DE MASSA

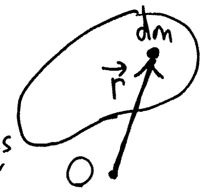
Determina-se dividindo o corpo em partes mais pequenas



$M = m_1 + m_2$

duas partes, com massas m_1 e m_2 e centros de massa C_1 e C_2: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$

infinitas partes "pontuais"



$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\iiint \vec{r}\, dm}$$

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz$$

massa volúmica

Aula 11. 2019-03-20

MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\iiint \frac{d\vec{r}}{dt}\, dm = \frac{1}{M}\iiint \vec{v}\, dm$$

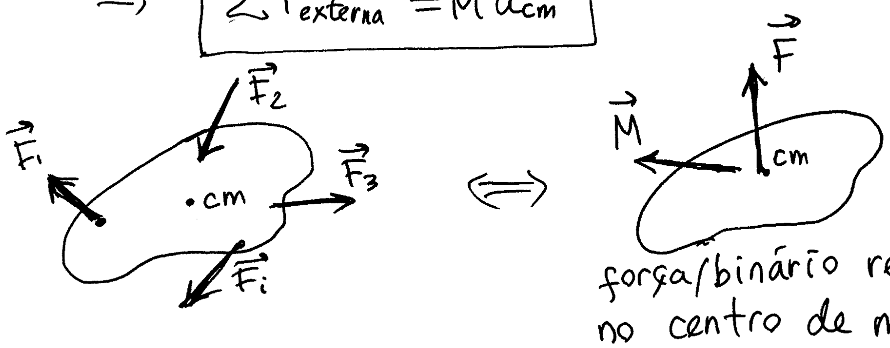
$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\iiint \vec{a}\, dm \quad \Longrightarrow \quad M\vec{a}_{cm} = \iiint \vec{a}\, dm$$

$\vec{a}\, dm = d\vec{F}$ = força resultante sobre a massa dm, no volume infinitessimal $dx\,dy\,dz$, na posição $\vec{r}$

$$\Longrightarrow \iiint d\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

$d\vec{F}$ inclui forças internas e externas. No integral, as forças internas anulam-se, ficando unicamente forças externas

$$\Longrightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{externa} = M\vec{a}_{cm}}$$



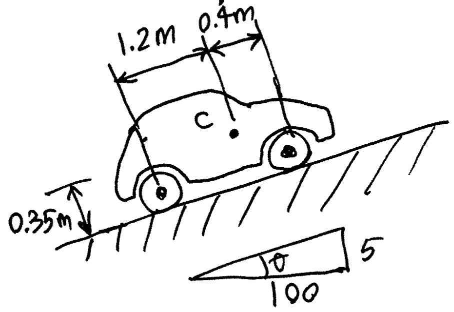
força/binário resultantes no centro de massa

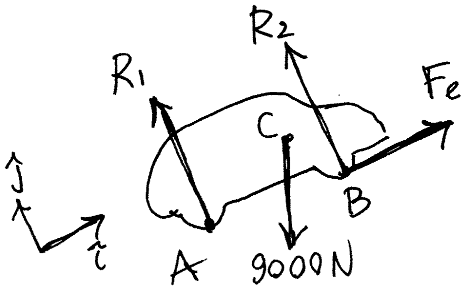
$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

Se $\vec{M} = \vec{0}$, então não há aceleração angular ($\vec{\alpha} = \vec{0}$)

Se $\vec{M} = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = 0$, o corpo tem movimento de translação, sem rotação, e a aceleração de todos os pontos no corpo é a mesma $\vec{a}_{cm}$.

Exemplo.





Determine a aceleração máxima que poderá ter o automóvel, com peso de 9000N, a subir a estrada com declive de 5%, se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for $\mu_e = 0.3$, e a tração do automóvel for nas rodas da frente

<u>Resolução</u>. A máxima aceleração obtém se:

(i) $F_e = F_{e\,máx} = \mu_e R_2$

(ii) as rodas de atrás são perfeitamente livres ($F_{atrito} = 0$)

(iii) O automóvel está a começar a acelerar, com $v_i = 0$, ou seja, a resistência do ar é nula. .

O movimento do automóvel é translação, sem rotação; com $a_y = 0$.

$$\begin{cases} \sum F_x = m a \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{cm} = 0 \end{cases}$$

Com origem no c.m., $A = (-1.2, -0.35)$, $B = (0.4, -0.35)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{-9000 \cdot 5}{\sqrt{10025}} + 0.3 R_2 = \dfrac{9000\, a}{9.8} \\ R_1 + R_2 - 9000 \cdot 100/\sqrt{10\,025} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1.2 & -0.35 \\ 0 & R_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.4 & -0.35 \\ 0.3R_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

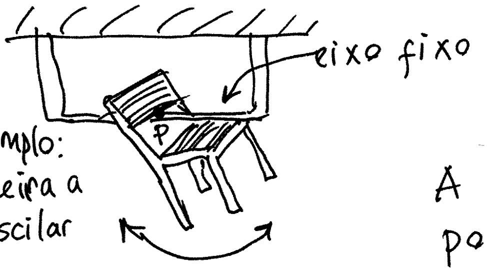
No Maxima:

```
e1: -9000*5/sqrt(10025) +0.3*R2 = 9000*a/9.8;
e2: R1+R2-9000*100/sqrt(10025) =0;
e3: determinant(matrix([-1.2,-0.35], [0, R1]))
    +determinant(matrix([0.4,-0.35],[0.3*R2, R2])) =0;
float(solve([e1,e2,e3]));
```

$$\Longrightarrow \boxed{a_{máx} = 1{,}577\ \frac{m}{s^2}}$$

Se se conseguisse manter essa aceleração, demorava 17.6 s até atingir 100 $\frac{km}{h}$

ROTAÇÃO COM EIXO FIXO



Exemplo: cadeira a oscilar

O ponto P, em contacto com o eixo, está em repouso.

A aceleração de qualquer outro ponto, fora do eixo, é

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad \left(\begin{array}{c}\vec{r} = \text{posição}\\ \text{com origem}\\ \text{em P}\end{array}\right)$$

Escolhe-se o eixo do z no eixo de rotação:

$$\Longrightarrow\ \vec{\omega} = \omega\hat{k}\,,\quad \vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix} = \omega(x\hat{\jmath} - y\hat{\imath})$$

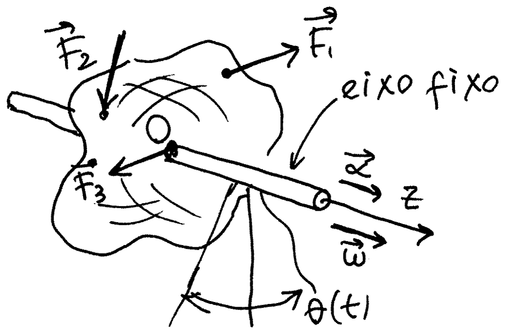
$$\vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha(x\hat{\jmath} - y\hat{\imath}) \Longrightarrow a_t = \alpha R \qquad \left(R = \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix} = -\omega^2(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}) \Longrightarrow a_n = \omega^2 R$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

R = distância até o eixo.

Aula 12. 2019-03-25



Este sistema tem um único grau de liberdade, $\theta(t)$. Em função da velocidade angular, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{k}$ e a aceleração angular, $\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\,\hat{k}$, a velocidade e aceleração de um ponto na posição $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ são:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\alpha(-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath})}_{a_t,\ \text{na direção de } \vec{v}} \underbrace{-\,\omega^2(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath})}_{a_n,\ \text{perpendicular ao eixo de rotac.}}$$

Como tal, a força resultante na massa dm nesse ponto é:

$$d\vec{F} = \left((-\alpha y - \omega^2 x)\,\hat{\imath} + (\alpha x - \omega^2 y)\,\hat{\jmath}\right) dm$$

e o momento $d\vec{M}$, em relação à origem é:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = dm \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -\alpha y - \omega^2 x & \alpha x - \omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega^2 y z - \alpha x z)\,\hat{\imath} \\ -(\omega^2 x z + \alpha y z)\,\hat{\jmath} \\ +\alpha(x^2 + y^2)\,\hat{k} \end{pmatrix} dm$$

O momento resultante, $\iiint d\vec{M}$, deverá ter unicamente componente $\hat{k}$, porque o corpo só pode rodar em torno do eixo dos z. As forças de contacto, no eixo, produzem binários em $\hat{\imath}$ e em $\hat{\jmath}$, mas não podem produzir binários em $\hat{k}$. Conclui-se que

$$\iiint d\vec{M} = \left(\iiint \alpha R^2\, dm\right)\hat{k} \quad \left(\begin{array}{l} R^2 = x^2 + y^2 = \text{distância} \\ \text{até o eixo, ao quadrado} \end{array}\right)$$

Nesse integral, as forças internas anulam-se, ficando unicamente a soma dos momentos das forças externas:

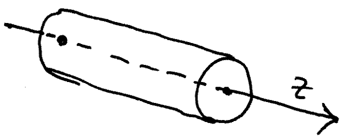
$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right| = I_z \alpha}$$

(excluindo as forças de contacto, no eixo.)

onde I_z é o **momento de inércia**, em relação ao eixo dos x:

$$I_z = \iiint R^2 \, dm = \iiint (x^2+y^2) \, dm$$

Exemplo: determine o momento de inércia de um cilindro homogéneo (massa volúmica ρ constante), de raio R, altura L e massa m, em torno ao seu eixo.



coordenadas cilíndricas: (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

$$\Longrightarrow dm = \rho \, dx\,dy\,dz = \left(\frac{m}{\pi R^2 L}\right) r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$I_z = \iiint r^2 \, dm = \left(\frac{m}{\pi R^2 L}\right) \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \frac{m R^4 \pi L}{2 \pi R^2 L}$$

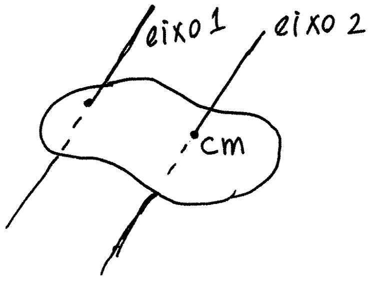
$$\Longrightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{2} m R^2}$$

As unidades de I_z são massa vezes distância ao quadrado. Define-se o **raio de giração**:

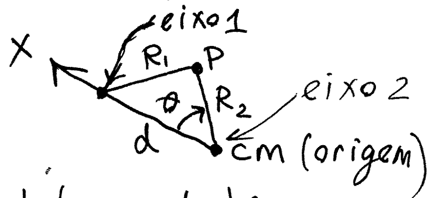
$$r_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

O raio de giração de um cilindro homogéneo de raio R, em torno ao seu eixo é então $r_g = \frac{R}{\sqrt{2}}$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS



O momento de inércia em torno do eixo 1, afastado do centro de massa, pode ser calculado a partir do momento de inércia em torno do eixo 2, paralelo ao eixo 1, mas passando pelo centro de massa.



Escolhe-se o eixo dos x perpendicular aos eixos, com origem no centro de massa e passando pelo eixo 1. Como tal, as distâncias R_1 e R_2, desde um ponto qualquer P até os eixos, estão relacionadas pela lei dos cossenos:

$$R_1^2 = R_2^2 + d^2 - 2dR_2\cos\theta$$
$$= R_2^2 + d^2 - 2dx$$

d = distância entre os eixos

θ = ângulo com o eixo dos x.

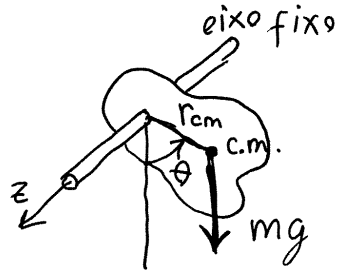
x = coordenada x de P.

$$\Rightarrow I_{z_1} = \iiint R_1^2\, dm = \iiint R_2^2\, dm + d^2 \iiint dm - 2d \iiint x\, dm$$

O primeiro integral é o momento em torno do eixo que passa pelo c.m, $I_{z\text{cm}}$. O segundo integral é a massa total, m. O terceiro integral é m vezes a componente x da posição do c.m., que é zero, porque o c.m. está na origem. Conclui-se que o momento de inércia, I_z, em torno de um eixo afastado da origem é:

$$\boxed{I_z = I_{z\text{cm}} + md^2}$$

$md^2 > 0 \Rightarrow I_z$ será maior quanto mais se afastar o eixo do c.m.



PÊNDULO FÍSICO

Corpo rígido, com um eixo fixo, em que as únicas forças extenas são o peso e as forças de contacto no eixo.

A lei do movimento do pêndulo é:

$$\vec{r}_{cm} \times (m\vec{g}) = I_z \ddot{\theta}\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow (-r_{cm}\, m g \sin\theta)\hat{k} = m r_g^2 \ddot{\theta}\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g\, r_{cm}}{r_g^2} \sin\theta}$$

$l = \dfrac{r_g^2}{r_{cm}}$ tem unidades de distância e a equação de movimento pode escrever-se: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ igual à equação de um pêndulo simples de comprimento l.

Se eixo passa pelo centro de massa, então $r_{cm}=0$, $l \to +\infty$ e $\ddot{\theta} \to 0$, ou seja, a velocidade angular, ω, permanece constante. O pêndulo roda uniformemente.

Aula 13. 2019-03-27

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Consideremos primeiro o caso dum corpo rígido em translação, sem rotação. Todos os pontos no corpo têm a mesma aceleração $\vec{a}$ e seguem a mesma trajetória.

força resultante $\rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow F_t = m a_t = m v \dfrac{dv}{ds}$

$$\Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv \qquad \left(\begin{array}{l} s = \text{posição ao longo} \\ \text{da trajetória} \end{array}\right)$$

O primeiro integral chama-se <u>trabalho</u> da força resultante, W_{12}, entre os pontos s_1 e s_2. O segundo integral é igual a $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$.

Teorema do trabalho e a energia cinética:

$$\boxed{W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}} \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2 \;\text{(energia cinética)}$$

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = \text{trabalho da força resultante, ao longo da trajetória do corpo.}$$

Unidade SI de trabalho e energia

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad \text{(um joule)}$$

Para poder calcular W_{12} é necessário conhecer a trajetória e a expressão de $F_t(s)$ ao longo dessa curva. Nos casos em que $\vec{F}$ é uma função da posição, $\vec{r}$, pode definir-se o trabalho entre dois pontos quaisquer, sem ter de estar na trajetória:

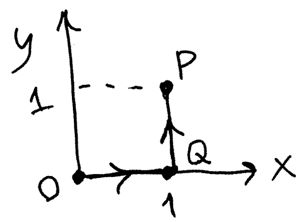
$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad \left(\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_t \, ds\right)$$

Este é um <u>integral de linha</u>, em que é necessário indicar o percurso de integração; ds é o deslocamento ao longo do percurso de integração.

Em geral, o resultado é diferente para diferentes percursos entre os pontos $\vec r_1$ e $\vec r_2$. E o integral só será igual ao aumenta da energia cinética, se o percurso for a trajetória do corpo

Exemplo 6.2. $\vec F = (3x+y)\hat\imath$ (no plano xy). $\vec r_1$ = origem e $\vec r_2 = \hat\imath + \hat\jmath$. Percurso 1: segmento desde (0,0) até (1,0), seguido do segmento desde (1,0) até (1,1). Percurso 2: segmento reto desde (0,0) até (1,1).

<u>Resolução</u>: <u>No percurso 1</u>, $\int_O^P \vec F\cdot d\vec r = \int_O^Q \vec F\cdot d\vec r + \int_Q^P \vec F\cdot d\vec r$



no segmento reto $\overline{OQ}$, $d\vec r = dx\,\hat\imath$

e $y=0 \Rightarrow \vec F = 3x\hat\imath$, $\vec F\cdot d\vec r = 3x\,dx$

$$\Rightarrow \underset{(\text{segmento } \overline{OQ})}{\int_O^Q \vec F\cdot d\vec r} = \int_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}$$

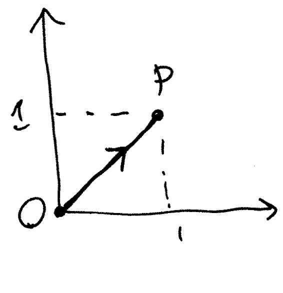
No segmento $\overline{QP}$, $d\vec r = dy\,\hat\jmath$, $x=1. \Rightarrow \vec F\cdot d\vec r = 0$

$$\Rightarrow \underset{(\overline{QP})}{\int_Q^P \vec F\cdot d\vec r} = 0 \quad \Rightarrow \underset{(\text{percurso } 1)}{\int_O^P \vec F\cdot d\vec r} = \frac{3}{2}$$

<u>Percurso 2</u>. $y = x$, $d\vec r = dx\,\hat\imath + dy\,\hat\jmath = (\hat\imath+\hat\jmath)\,dx$

$\vec F = (3x+y)\hat\imath = 4x\hat\imath$

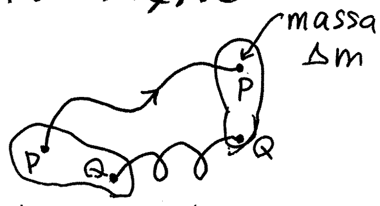
$\vec F\cdot d\vec r = 4x\,dx$



$$\Rightarrow \underset{(\text{percurso } 2)}{\int_O^P \vec F\cdot d\vec r} = \int_0^1 4x\,dx = 2$$

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

No movimento mais geral do corpo rígido, cada ponto segue uma trajetória diferente, com velocidade $\vec{v}$ e $\vec{a}$ própria desse ponto.



força resultante na massa Δm no ponto P:

$$\Delta\vec{F} = \vec{a}\,\Delta m \implies \Delta F_t = a_t\,\Delta m = v\frac{dv}{ds}\,\Delta m$$

ΔW_{12} = trabalho de $\Delta\vec{F}$ ao longo da trajetória de P, entre s_1 e s_2.

$$\Delta W_{12} = \int_1^2 \Delta F_t\, ds = \Delta m \int_1^2 v\, dv = \frac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\, v_1^2$$

W_{12} = trabalho da força resultante no corpo rígido

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{n} W_{12i} = \iiint_{\text{corpo}} dW_{12} = \frac{1}{2}\iiint v_2^2\, dm - \frac{1}{2}\iiint v_1^2\, dm$$

forças externas

$$= E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint v^2\, dm$$

$\vec{v}$ de qualquer ponto P, relativa a Q, é $\vec{\omega}\times\vec{r}_{P/Q}$. Em relação ao centro de massa,

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \left(\vec{r} = \text{posição de P, com origem no centro de massa}\right)$$

$$\implies v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_{cm}^2 + |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 + 2\,\vec{v}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Se o eixo de rotação for escolhido como eixo z,

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}) \implies |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 = \omega^2(x^2+y^2)$$

$$\vec{v}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (-y\, v_{cm_x} + x\, v_{cm_y})\,\omega$$

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint \left(v_{cm}^2 + \omega^2(x^2+y^2) - 2\omega y\, v_{cm_x} + 2\omega x\, v_{cm_y}\right) dm$$

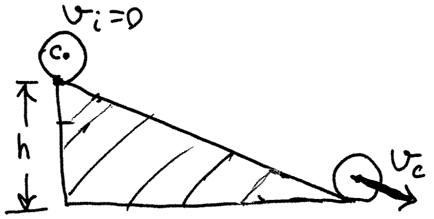
$$= \frac{v_m^2}{2}\underbrace{\iiint dm}_{m} + \frac{\omega^2}{2}\underbrace{\iiint (x^2+y^2)\,dm}_{I_{cm}} - \omega v_{cm_x}\underbrace{\iiint y\,dm}_{y_{cm}} + \omega v_{cm_y}\underbrace{\iiint x\,dm}_{x_{cm}}$$

Como o c.m. está na origem, $x_{cm} = y_{cm} = 0$

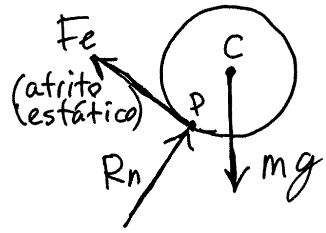
$$\Longrightarrow \boxed{E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{cm}^2}_{\text{energia de translação}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2}_{\text{energia de rotação}}}$$

Aula 14. 2019-04-01

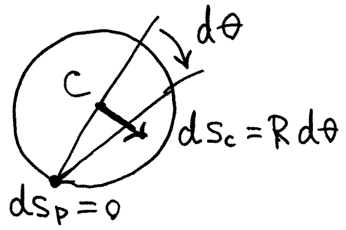
Exemplo. Uma esfera homogénea, de raio R e massa m, parte do repouso, a uma altura h, num plano inclinado, e roda sem deslizar, descendo o plano. Determine a velocidade do centro da esfera no fim do plano inclinado.



Forças externas

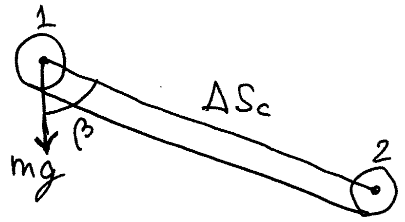


deslocamentos



$$v_c = \frac{ds_c}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$\Longrightarrow$ As forças que atuam em P (R_n e F_e) não realizam trabalho.



trabalho total = trabalho do peso

$$= \int_1^2 mg\cos\beta\, ds = m g\,\underbrace{\Delta s_c \cos\beta}_{h}$$

$\Longrightarrow W_{12} = mgh$

(não depende do declive do plano)

$$E_{c_i} = 0 \qquad E_{c_f} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2$$

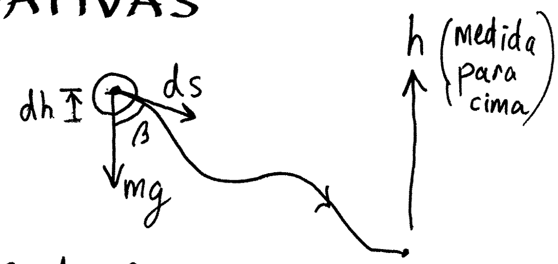
$I_{cm} = \frac{2}{5} m R^2$ (tabela 5.1) $\Longrightarrow E_{c_f} = \frac{m}{2} v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m R^2\right)\left(\frac{v_c}{R}\right)^2$

usando o teorema do trabalho e a energia cinética

$$mgh = \frac{7}{10} m v_c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{\frac{10\,gh}{7}}}$$

FORÇAS CONSERVATIVAS

No exemplo anterior, qualquer que fosse a trajetória do ponto C, o trabalho do peso seria sempre $mg \times$ altura que C desce.



$$W_{12} = \int_1^2 mg\cos\beta \, ds = -\int_1^2 mg \, dh = mg(h_1 - h_2)$$

a pesar de β ser variável.

Diz-se que o peso é uma **força conservativa**, porque o trabalho que realiza entre dois pontos não depende da trajetória, apenas das posições dos pontos 1 e 2.

Energia potencial. Define-se a energia potencial gravítica, U_g, na posição $\vec{r}$:

$$U_g = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg\int_0^h dh = mgh = \text{peso} \times \text{altura}$$

onde $\vec{r}_0$ é um ponto onde arbitra-se $h_0 = 0$

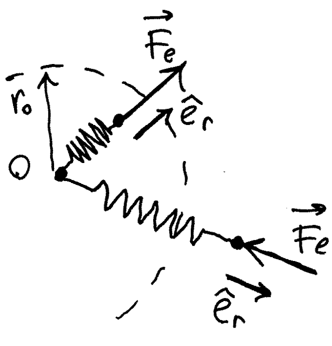
Entre dois pontos 1 e 2, com alturas h_1 e h_2, o trabalho do peso é:

$$W_{12} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -\int_{h_1}^{h_2} mg \, dh = mg(h_1 - h_2)$$

$$\boxed{W_{12} = U_{g_1} - U_{g_2}}$$

FORÇA ELÁSTICA

Uma mola, de comprimento r_0, com um extremo fixo na origem, produz força elástica $\vec{F_e}$, na direção radial.



elongação $= z = r - r_0$

Lei de Hooke. O módulo da força elástica é diretamente proporcional a $|z|$.

$$z = \begin{cases} >0 \rightarrow \text{força no sentido oposto ao versor } \hat{e}_r \\ <0 \rightarrow \text{força no sentido do versor } \hat{e}_r \\ =0 \rightarrow \text{força nula} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{F}_e = -k\,z\,\hat{e}_r$ $\qquad$ k = constante elástica da mola (unidades de força sobre distância)

Em coordenadas polares, (r,θ): $d\vec{r} = \hat{e}_r\,dr + \hat{e}_\theta\,r\,d\theta$

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -kz(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r)dr - kz(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta)\,r\,d\theta = -kz\,dr$$

$$dz = d(r - r_0) = dr$$

. trabalho da força elástica, desde $\vec{r}_1$ até $\vec{r}_2$:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k\int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{1}{2}kz_1^2 - \frac{1}{2}kz_2^2$$
$$= U_{e1} - U_{e2}$$

$$\boxed{\text{A força elástica é conservativa, com energia potencial elástica: } U_e = \frac{1}{2}kz^2}$$

ENERGIA MECÂNICA

$$E_m = E_c + U_g + U_e + \cdots = E_c + U$$

U: soma das energias potenciais de todas as forças conservativas

$$W_{12} = W_{12}^{\text{cons.}} + W_{12}^{\text{n.c.}} = E_{c2} - E_{c1}$$

$W_{12}^{\text{cons.}}$ = trabalho das forças conservativas

$W_{12}^{\text{n.c}}$ = trab. das forças não conservativas

$$U_1 - U_2 + W_{12}^{\text{n.c.}} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$\Rightarrow W_{12}^{\text{n.c.}} = (E_{c2} + U_2) - (E_{c1} + U_1)$$

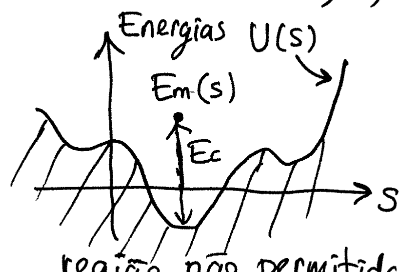
$$\boxed{W_{12}^{n.c.} = E_{m_2} - E_{m_1}}$$

O aumento da energia mecânica é igual ao trabalho de todas as forças não conservativas.

Sistemas conservativos: sistemas em que as forças não conservativas não realizam trabalho. A energia mecânica permanece constante.

ANÁLISE GRÁFICA DO MOVIMENTO

Num sistema com um único grau de liberdade, s, no gráfico da energia potencial total, U(s), a energia mecânica deverá estar sempre por cima de U(s), porque:

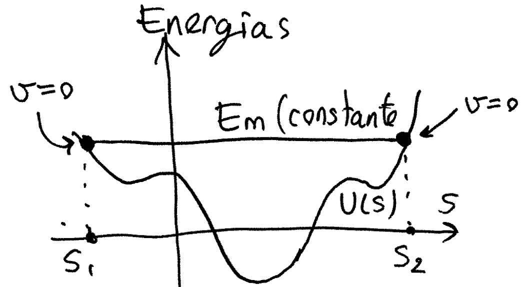


região não permitida para Em.

$$E_m - U = E_c \geq 0$$

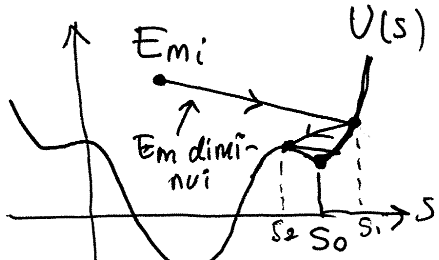
A distância entre $E_m(s)$ e $U(s)$ é a energia cinética. O gráfico de $U(s)$ e $E_m(s)$ permite analisar o movimento. Exemplos:

Sistema conservativo



O sistema oscila indefinidamente entre S_1 e S_2

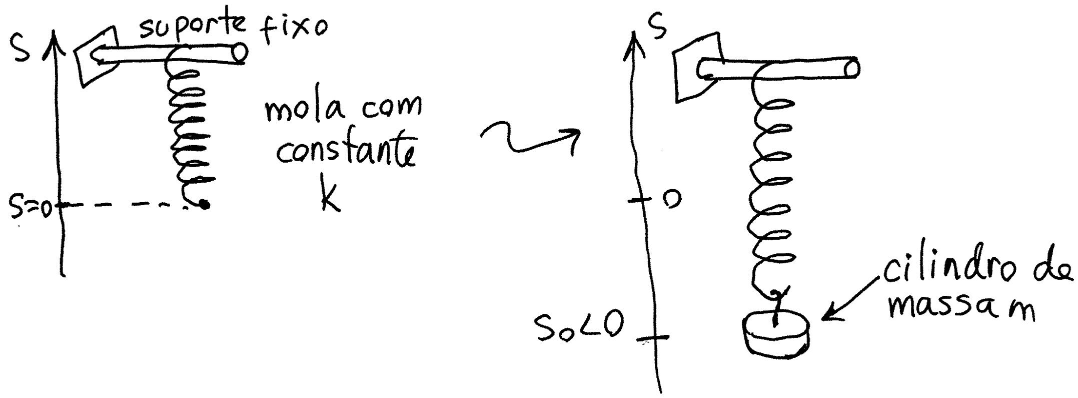
Sistema dissipativo



O sistema para em S_1, S_2, S_3, ... e fica em repouso em S_0.

Aula 15. 2019-04-03

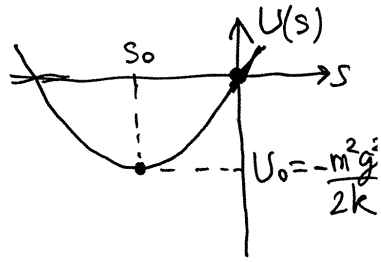
OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



Energia potencial: $U = \frac{k}{2}s^2 + mgs$

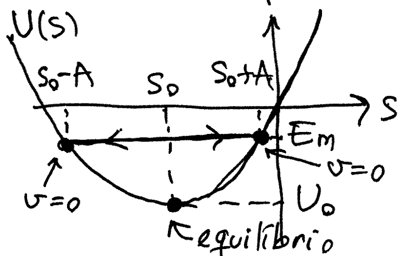
Força tangencial: $F_t = -\frac{dU}{ds} = -kz - mg$ (porque U é menos a primitiva de F_t)

O gráfico de U(s) é uma parábola, crescente, com valor mínimo em s_0, onde $\frac{dU}{ds} = 0$, ou seja,

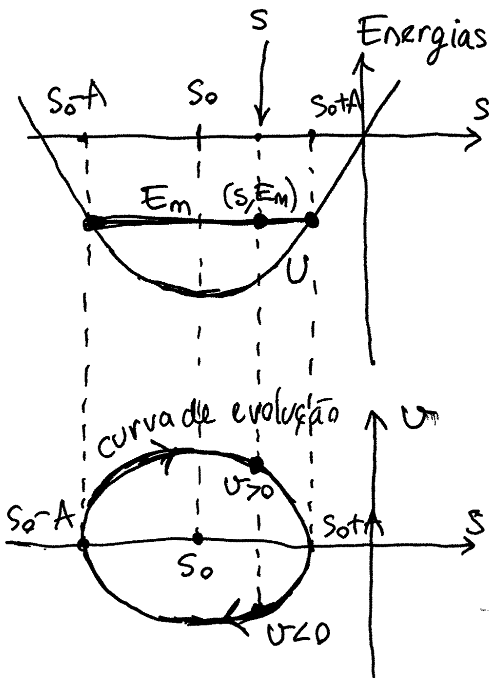


$F_t = -ks_0 - mg = 0 \Rightarrow \boxed{s_0 = -\frac{mg}{k}}$
(ponto de equilíbrio)

A energia mecânica, E_m, não pode ser menor que U_0. Se $E_m = U_0$, o sistema estará em repouso em $s = s_0$. Se $E_m > U_0$, desprezando a resistência do ar, E_m é uma reta horizontal que corta U em s_0+A e s_0-A



O movimento do sistema é oscilatório, entre s_0-A e s_0+A. Se a mola for deslocada até s_0-A e largada do repouso, então $E_m = U(s_0-A)$ permanece constante e o cilindro oscila com amplitude A.



ESPAÇO DE FASE

Cada ponto (s, E_m) no gráfico das energias corresponde a dois instantes diferentes, quando o cilindro passa por s, com velocidade positiva ou negativa: $E_m = \frac{m}{2}v^2 + U(s)$

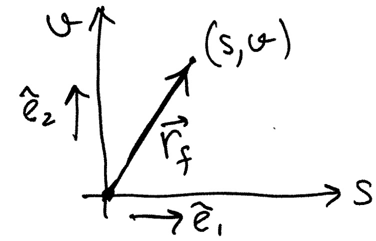
$$\Longrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2(E_m - U(s))}{m}}$$

Representando v no eixo das ordenadas, esses dois instantes ficam em pontos diferentes numa elipse. Cada ponto da elipse (curva de evolução) corresponde a um instante t, entre 0 e o período de oscilação T.

Após $t = T$, a elipse volta a ser percorrida de T até $2T$,...

A cada instante t corresponde um único ponto no espaço de fase (s, v) na posição $\vec{r}_f$

$$\vec{r}_f = s\,\hat{e}_1 + v\,\hat{e}_2$$

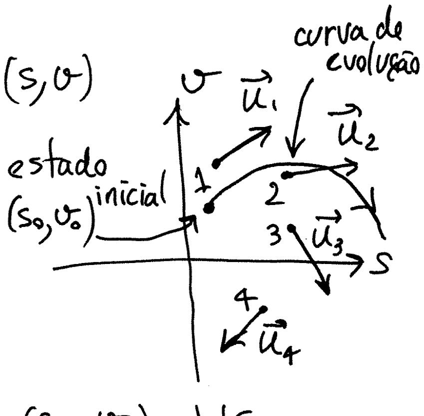


Velocidade de fase

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}_f}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_1 + \dot{v}\,\hat{e}_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{u} = v\,\hat{e}_1 + a_t\,\hat{e}_2}$$

Equação de movimento: $a_t = f(s, v)$ permite determinar a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase e traçar um **campo de direções**, que mostra os vetores $\vec{u}$ em vários pontos.



A partir de um estado inicial, (s_0, v_0), obtém-se uma **curva de evolução**, que segue o campo de direções e que representa o movimento do sistema a partir de (s_0, v_0).

No Maxima, o campo de direções e as curvas de evolução podem ser obtidos com o programa plotdf:

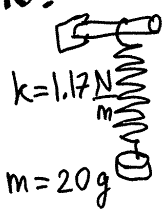
```
plotdf([u1,u2],[x1,x2],[x1,a,b],[x2,c,d]);
```

duas expressões que dependem de x_1 e x_2 (componentes da velocidade de fase)

duas variáveis que definem o espaço de fase

intervalos para as variáveis de estado.

Exemplo.



$$U = \frac{k}{2} s^2 + m g s$$

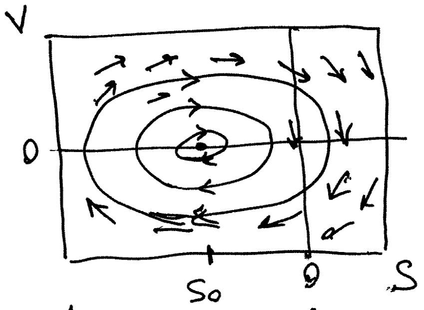
$$F_t = -\frac{dU}{ds} = -ks - mg \qquad a_t = \frac{F_t}{m}$$

$$a_t = -\frac{k}{m} s - g = -\frac{1.17}{0.02} s - 9.8$$

O campo de direções obtém-se com o comando:

```
plotdf([v,-1.17*s/0.02-9.8],[s,v],[s,-0.4,0.1],[v,-3,3]);
```

valores escolhidos após algumas tentativas



Clicando com o rato num ponto do espaço de fase, obtém-se a curva de evolução que passa por esse ponto.

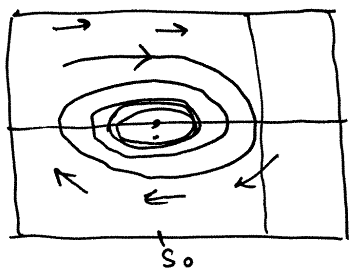
Se incluirmos a resistência do ar, a aceleração terá um termo adicional, proporcional a v^2, mas com sinal oposto a v:

$$a_t = -\frac{k}{m} s - g - c\, v|v|$$

constante aerodinâmica.

Admitindo $c=0.3$, o campo de direções obtém-se com:

```
plotdf([v,-1.17*s/0.02-9.8-0.3*v*abs(v)],
    [s,v], [s,-0.4,0.1], [v,-3,3]);
```



As curvas de evolução são espirais aproximando-se para $(s_0, 0)$.

SISTEMAS DINÂMICOS

Espaço de fase (estado do sistema) com n variáveis:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

velocidade de fase com n componentes:

$$\vec{u} = (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n)$$

em que cada componente, $\dot{s}_i$, é uma função conhecida, que depende do estado:

$$\dot{s}_i = f(s_1, \ldots, s_n, t)$$

Dado um estado inicial, encontra-se a curva de evolução do sistema, seguindo o campo de direções em n dimensões.

Aula 16. 2019-04-08

Exemplos de sistemas dinâmicos

① Modelo SIR das doenças contagiosas.

S → susceptíveis à doença.
I → infetados
R → recuperados (imunes)

Número de indivíduos = $N = S + I + R$

Duas equações de evolução:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -aI + bSI \\[2mm] \dfrac{dS}{dt} = -bSI \end{cases}$$

estado → (I, S)

velocidade de fase:

$$\vec{u} = (\dot{I}, \dot{S}) = (-aI + bSI, -bSI)$$

② Equações diferenciais. Exemplo:

$$x^2 y''' + 3xy' - e^x y = 2x$$

definem-se: derivadas em x

$$z = y', \quad v = y'' = z'$$

$$\Rightarrow \quad x^2 v' + 3xz - e^x y = 2x$$

3 equações de evolução:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = v \\ v' = \dfrac{2x + e^x y - 3xz}{x^2} \end{cases}$$

estado → (y, z, v) $\quad \vec{u} = (y', z', v')$

$\vec{u} = (z, v, (2x + e^x y - 3xz)/x^2)$ $\quad$ variável independente → x

③ Pêndulo. $\quad \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$ (eq. de movimento)

2 equações de evolução

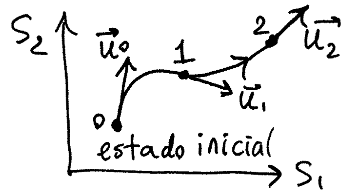
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

estado → (θ, ω) $\quad \vec{u} = (\dot{\theta}, \dot{\omega}) = (\omega, -\frac{g}{l}\sin\theta)$

Os exemplos 1 e 3 são sistemas **autónomos**, porque $\vec{u}$ não depende da variável independente (t).
Num sistema autónomo, a evolução a partir dum estado incial, em t_0, não depende do valor de t_0.

SISTEMAS AUTÓNOMOS COM 2 VARIÁVEIS.

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt} = f_1(s_1, s_2) \\ \dfrac{ds_2}{dt} = f_2(s_1, s_2) \end{cases} \qquad \vec{u} = (\dot{s}_1, \dot{s}_2) = (f_1, f_2)$$



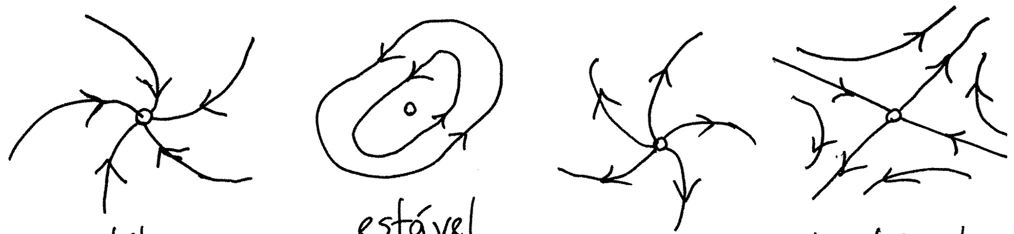
PONTOS DE EQUILÍBRIO

Pontos do espaço de fase onde $\vec{u} = \vec{0}$ ($f_1 = 0$ e $f_2 = 0$)
Se num instante t_0 o estado do sistema for ponto de equilíbrio, esse estado permanecerá constante em $t > t_0$.
Há dois tipos:

Ponto de equilíbrio estável. Se em t_0 o estado estiver próximo desse ponto P, em $t > t_0$ o estado continuará próximo de P.

Ponto de equilíbrio instável. Se em t_0 o estado estiver próximo de P, em $t > t_0$ estará cada vez mais afastado de P.

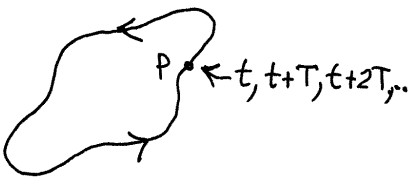
<u>Exemplos</u>. O círculo representa um ponto de equilíbrio e as curvas são curvas de evolução.



equilíbrio estável — estável — instável — instável

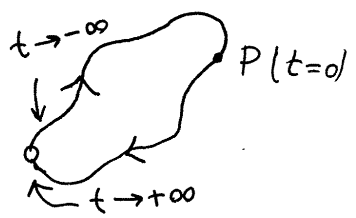
CICLOS. Curvas de evolução fechadas $\Rightarrow$ oscilação do sistema

Cada estado P no ciclo repete-se indefinidamente em $t,\ t+T,\ t+2T, \ldots$



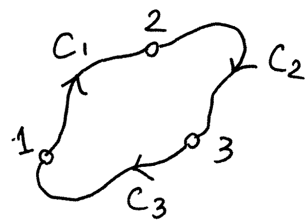
ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS

Curvas fechadas, mas com um ponto de equilíbrio $\Rightarrow$ Oscilação que só ocorre uma vez (quando o estado chega ao ponto de equilíbrio já não muda).



ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS

n curvas de evolução, C_i, entre n pontos de equilíbrio, formando uma curva fechada. $(n \geq 2)$



SISTEMAS CONSERVATIVOS

$\dot{s}_1 = f_1(s_1, s_2)\ ,\ \dot{s}_2 = f_2(s_1, s_2)$ é conservativo, se a divergência da velocidade de fase for sempre nula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} = 0 \quad (\text{para quaisquer } s_1 \text{ e } s_2)$$

$\Rightarrow$ existe uma função $H(s_1, s_2)$ (hamiltoniana), tal que:

$$\boxed{\dot{s}_1 = \frac{\partial H}{\partial s_2}\ ,\quad \dot{s}_2 = -\frac{\partial H}{\partial s_1}} \quad \text{equações de Hamilton}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial s_2}\frac{ds_2}{dt} = -\frac{ds_2}{dt}\frac{ds_1}{dt} + \frac{ds_1}{dt}\frac{ds_2}{dt} = 0 \quad \left(\begin{matrix} H \\ \text{constante} \end{matrix}\right)$$

Como tal, as curvas de evolução são as curvas de nível da função $H(s_1, s_2)$ (curvas onde H permanece constante)

Aula 17. 2019-04-10

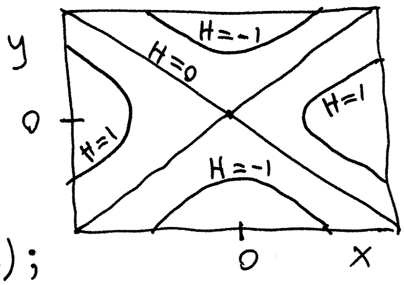
Exemplo 1. $\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ $\quad \vec{u} = (-2y, -2x)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial(-2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0$$

$$H = \int -2y\,dy + f(x) = \int 2x\,dx + g(y) \Rightarrow \boxed{H = x^2 - y^2}$$

Há um ponto de equilíbrio em $(x,y)=(0,0)$. As curvas de evolução são as curvas $H = x^2 - y^2 =$ constante

Maxima $\longrightarrow$ ploteq(x^2-y^2);



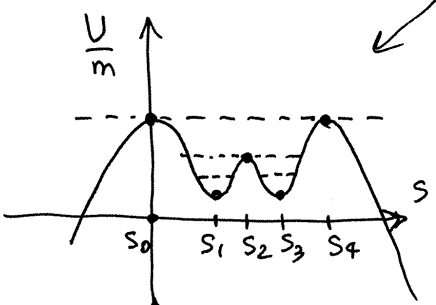
Exemplo 2. Sistema mecânico conservativo, com um grau de liberdade s, e energia potencial $U(s)$

$$a_t = \dot{v} = \frac{F_t}{m} = -\frac{1}{m}\frac{dU}{ds} \quad \Rightarrow \vec{u} = \left(v, -\frac{1}{m}\frac{dU}{ds}\right)$$

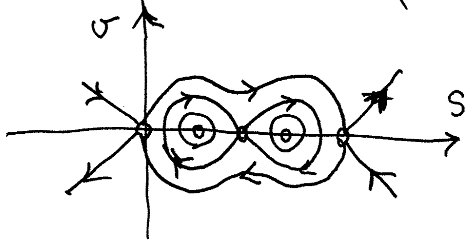
não depende de v

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{m}\frac{\partial F_t}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow H = \frac{v^2}{2} + \frac{U}{m} = \frac{E_m}{m} \ \text{(constante)}$$

Se o gráfico de $\frac{U}{m}$ for:



Há 5 pontos de equilíbrio $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$. Dois deles s_1 e s_3 (mínimos) estáveis. Nas vizinhanças de s_1 e s_3 há ciclos. Em s_2 há duas órbitas homoclínicas e entre s_0 e s_4 uma órbita heteroclínica.



$\longleftarrow$ Retrato de fase

MECÂNICA LAGRANGIANA

Permite encontrar as equações de movimento a partir da expressão da energia mecânica.

Coordenadas generalizadas: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (n graus de liberdade)
n funções de t, cada uma associada a um grau de liberdade

Velocidades generalizadas: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$
derivadas das coordenadas generalizadas.
Espaço de fase com 2n dimensoes: $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$

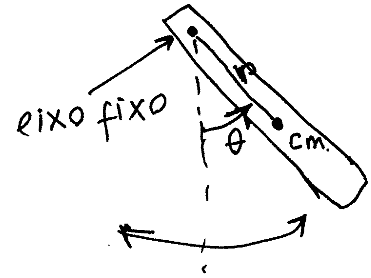
Forças generalizadas: Cada força não conservativa que realize trabalho define n forças generalizadas
$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ $\qquad Q_j = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ $\quad$ ($\vec{r}$ = ponto onde é aplicada $\vec{F}$)

Se as energias cinética, E_c, e potencial, U forem expressas em função das variáveis de estado $(q_j, \dot{q}_j)$, as n acelerações $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ podem ser obtidas a partir das n **equações de Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Estas equações são equivalentes as equações $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{cm}$, $\sum M_c = I_{cm}\alpha$, mas têm a vantagem de serem validas em qualquer referencial (inercial ou não inercial) e não incluem forças que não realizem trabalho.

Exemplo 1.



Pêndulo físico de massa m e momento de inércia, em relação ao centro de massa, igual a I_{cm}.
Este sistema tem um grau de liberdade, θ, e o estado é: $(\theta, \dot{\theta})$

Energia cinética:

$$E_c = \frac{m}{2} v_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2} \dot{\theta}^2$$

como o centro de massa tem movimento circular com raio r, então $v_{cm} = r\dot{\theta}$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}(mr^2 + I_{cm})\dot{\theta}^2 = \frac{I_{eixo}}{2}\dot{\theta}^2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{pelo teorema}\\ \text{dos eixos}\\ \text{paralelos}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot{\theta}^2}$$

r_g = raio de giração em relação ao eixo fixo

Energia potencial (gravítica):

$$\boxed{U = -mgr\cos\theta}$$

Admitindo a resistência do ar desprezável, $Q = 0$.
Há uma equação de Laplace:

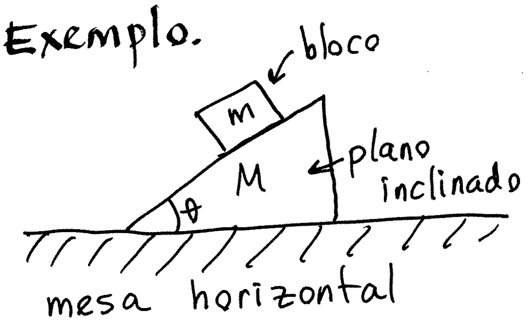
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m r_g^2 \dot{\theta}) - 0 + mgr\sin\theta =$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{gr}{r_g^2}\sin\theta}$$

Equação de movimento do pêndulo.

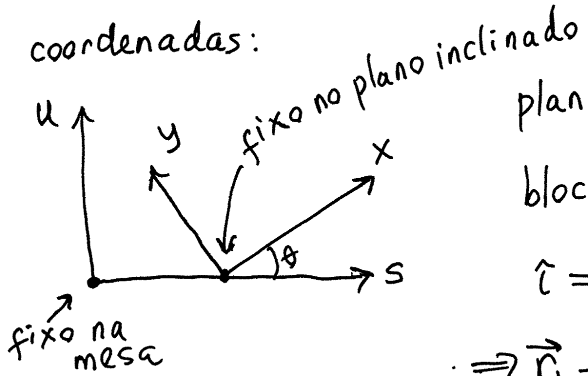
Aula 18. 2019-04-24

Exemplo.



desprezando a resistência do ar e o atrito entre o bloco e o plano, e a mesa e o plano.

coordenadas:



plano inclinado: $\vec{r}_p = s\hat{e}_s$

bloco: $\vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath}$

$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{e}_s + \sin\theta\,\hat{e}_u$

$$\Rightarrow \vec{r}_b = \vec{r}_{b/p} + \vec{r}_p$$
$$= (s + x\cos\theta)\hat{e}_s + x\sin\theta\,\hat{e}_u$$

velocidades:

$\vec{v}_p = \dot{s}\,\hat{e}_s \quad , \quad v_p^2 = \dot{s}^2$

$\vec{v}_b = (\dot{s} + \dot{x}\cos\theta)\hat{e}_s + \dot{x}\sin\theta\,\hat{e}_u \quad , \quad v_b^2 = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta$

Há duas coordenadas generalizadas: (s, x)

$$E_c = \frac{M}{2}v_p^2 + \frac{m}{2}v_b^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$U = m g x \sin\theta$$

<u>2 equações de Lagrange</u>:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M+m)\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}\cos\theta + \ddot{x} = -g\sin\theta$$

↑ sistema linear para as variáveis $\ddot{s}$, $\ddot{x}$

$$\ddot{s} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & m\cos\theta \\ -g\sin\theta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M+m & m\cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

($\ddot{s}$ e $\ddot{x}$ constantes)

$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} M+m & 0 \\ \cos\theta & -g\sin\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M+m & m\cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

As forças de ligação (tensão numa corda, reação normal, atrito estático) não entram nas equações de Lagrange. A cada ligação está asociada uma função: $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{constante}$ que permite reduzir o número de graus de liberdade.

Quando for necessário calcular a força de ligação $\vec{F}_i$ associada à condição $f_i = \text{constante}$, usa-se o método dos multiplicadores de Lagrange:

(i) não se usa $f_i = \text{constante}$ para reduzir o número de graus de liberdade (admitem-se $q_1, q_2, \ldots, q_n$ independentes).

(ii) em cada equação de Lagrange, acrescenta-se um termo $\lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j}$ = componente j da força (momento) de ligação i.

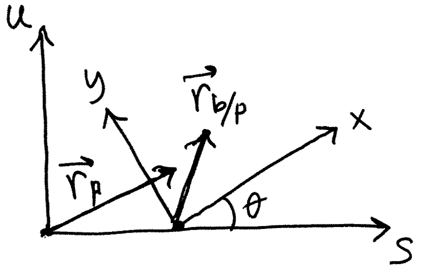
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

λ_i = multiplicador de Lagrange.

(iii) Resolvem-se as equações de Lagrange, junto com $f_i = \text{const}$, pare encontrar λ_i e q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Exemplo. Resolver o exemplo anterior, do plano inclinado e o bloco, admitindo coeficientes de atrito cinético μ_1, entre o bloco e o plano, e μ_2, entre o plano e a mesa.

Resolução. Haverá duas forças generalizadas: atrito entre o bloco e o plano e entre o plano e a mesa. Mas essas forças dependem de duas forças de ligação: reação normal no bloco (com plano) (R_1) e no plano (com a mesa) (R_2). Sem essas duas ligações, o bloco poderia andar na direção y e o plano na direção u:



$$\vec{r}_p = s\hat{e}_s + u\hat{e}_u$$

$$\vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_b = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + s\hat{e}_s + u\hat{e}_u$$

$$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{e}_s + \sin\theta\,\hat{e}_u \quad , \quad \hat{\jmath} = -\sin\theta\,\hat{e}_s + \cos\theta\,\hat{e}_u$$

$$\Rightarrow \vec{r}_b = (s + x\cos\theta - y\sin\theta)\,\hat{e}_s + (u + x\sin\theta + y\cos\theta)\,\hat{e}_u$$

Consideram-se 4 coordenadas: (x, y, s, u)

e 4 velocidades: $(v_x, v_y, v_s, v_u) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{s}, \dot{u})$

Há duas condições de ligação:

$$f_1 = y = \text{constante} \quad , \quad f_2 = u = \text{constante}$$

com dois multiplicadores de Lagrange, R_1 e R_2

As componentes das forças de ligação são:

$$\begin{cases} R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = R_1 \ , \quad R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial s} = R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad (\Rightarrow R_1 = \text{reação normal}) \\[2ex] R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial u} = R_2 \ , \quad R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial s} = 0 \quad (\Rightarrow R_2 = \text{reação normal}) \end{cases}$$

As duas forças não conservativas são:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \mu_1 R_1 \hat{\imath}\ , \text{ atuando na posição: } \vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \\ \vec{F}_2 = -\mu_2 R_2 \hat{e}_s\ , \text{ aplicada em: } \vec{r}_p = s\hat{e}_s + u\hat{e}_u \end{cases}$$

As quatro componentes dessas forças são:

$$\begin{cases} Q_{1x} = \vec{F}_1 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial x} = \mu_1 R_1 \quad Q_{1y} = \vec{F}_1 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial y} = 0 \quad Q_{1s} = Q_{1u} = 0 \\ Q_{2s} = \vec{F}_2 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial s} = -\mu_2 R_2 \quad Q_{2u} = \vec{F}_2 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial u} = 0 \quad Q_{2x} = Q_{2y} = 0 \end{cases}$$

Resolução das equações de Lagrange no Maxima:

```
gradef(x,t,vx)$
gradef(y,t,vy)$
gradef(s,t,vs)$
gradef(u,t,vu)$
```
} definição das velocidades generalizadas

```
gradef(vx,t,ax)$
gradef(vy,t,ay)$
gradef(vs,t,as)$
gradef(vu,t,au)$
```
} definição das acelerações generalizadas

vetores posição do plano e o bloco, no referencial $(\hat{e}_s, \hat{e}_u)$

```
rp: [s,u]$
rb: [s+x*cos(q)-y*sin(q), u+x*sin(q)+y*cos(q)]$
vp: diff(rp,t);
```
$\hookrightarrow$ [vs,vu] $\quad (\vec{v}_p)$

```
vb: diff(rb,t);
```
$\hookrightarrow$ [-sin(q) vy + cos(q) vx + vs, cos(q) vy + sin(q) vx + vu] $\quad \vec{v}_b$

```
Ec: M*(vp.vp)/2 + m*trigsimp(vb.vb)/2;
```

A energia potencial gravítica depende das coordenadas $\hat{e}_u$ do plano e do bloco:

```
U: M*g*rp[2] + m*g*rb[2];
```

Equações de Lagrange:

```
eq1: diff(diff(Ec,vx),t)-diff(Ec,x)+diff(U,x)=mu1*R1;
eq2: diff(diff(Ec,vy),t)-diff(Ec,y)+diff(U,y)-R1=0;
eq3: diff(diff(Ec,vs),t)-diff(Ec,s)+diff(U,s)=-mu2*R2
eq4: diff(diff(Ec,vu),t)-diff(Ec,u)+diff(U,u)-R2=0;
```

Substituem-se y, u, vy, vu, ay, au, usando as condições de ligação:

```
subst([ay=0,au=0],[eq1,eq2,eq3,eq4]);
```

E resolve-se para encontrar R_1, R_2, a_x e a_s:

```
trigsimp(solve(%,[R1,R2,ax,as]));
```

Solução:

$$R_1 = \frac{(\mu_2 \sin\theta + \cos\theta) M}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, m g$$

$$R_2 = \frac{M}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\,(M+m) g$$

$$a_x = -\frac{((1-\mu_1\mu_2)\sin\theta - (\mu_1+\mu_2)\cos\theta)(M+m)}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, g$$

$$a_s = \frac{((1-\mu_1\mu_2)\sin\theta\cos\theta + (\mu_1+\mu_2)\sin^2\theta - \mu_1) m - (M+m)\mu_2}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, g$$

Observe-se que, com $\mu_1=\mu_2=0$, a_x e a_s são as mesmas expressões obtidas no exemplo anterior.

Aula 19. 2019-04-29

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} $\longrightarrow$ 4 números reais

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbb{A}\vec{r}}$$

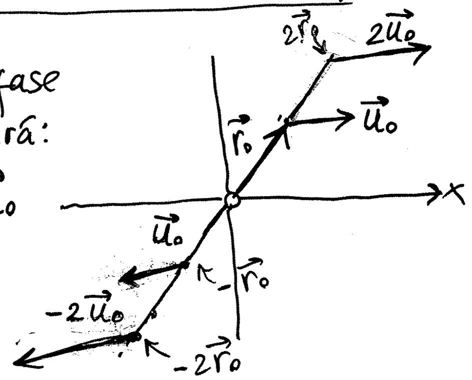
$$\underbrace{\underset{\text{vetor posição}}{\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{operador linear}}{\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}}_{\text{no espaço de fase } (x,y)\ (\mathbb{R}^2)}$$

velocidade de fase: $\vec{u} = \mathbb{A}\vec{r}$

Pontos de equilíbrio: $\mathbb{A}\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

admite-se que $\det\mathbb{A} \neq 0$ (senão, o sistema teria apenas uma variável de estado). Como tal, o sistema $\mathbb{A}\vec{r} = \vec{0}$ tem uma única solução, $x = 0$, $y = 0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Um único ponto de equilíbrio na origem}}$



Se em $\vec{r}_0$ a velocidade de fase for $\vec{u}_0$, então em $k\vec{r}_0$, $\vec{u}$ será:

$$\vec{u} = \mathbb{A}(k\vec{r}_0) = k(\mathbb{A}\vec{r}_0) = k\vec{u}_0$$

$\Rightarrow$ Em cada reta que passa pela origem, a direção de $\vec{u}$ é a mesma. Sentidos opostos nos dois lados da origem.

Vetores próprios: posições $\vec{r}_0$ onde a velocidade de fase $\vec{u}_0$ tem a mesma direção de $\vec{r}_0$:

$$\Rightarrow \mathbb{A}\vec{r}_0 = \lambda\vec{r}_0 \qquad \lambda = \text{número real} = \text{VALOR PRÓPRIO (da matriz } \mathbb{A})$$

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

determinante nulo, para que existam soluções diferentes de $x=0, y=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{12})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}A\,\lambda + \det A = 0}$$

$\mathrm{tr}A$ = traço de A

$\det A$ = determinante de A

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}$$

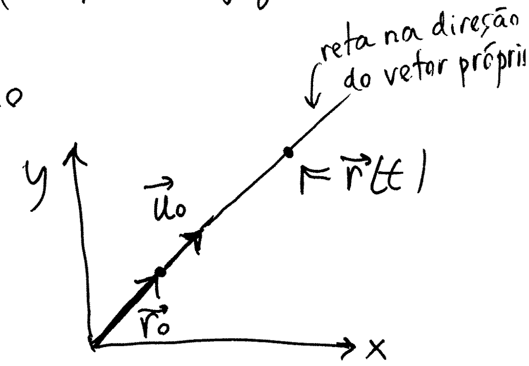
Podem existir um ou dois valores próprios reais, ou dois valores próprios complexos (complexo conjugado um do outro).

Se $\vec{r}_0$ for vetor próprio, do valor próprio λ_i:

$$\vec{u}_0 = A\vec{r}_0 = \lambda_i \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \lambda_i \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda_i \vec{r}$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0\, e^{\lambda_i t}}$$

(i) λ_i real positivo: curva de evolução reta, que se afasta exponencialmente da origem.

(ii) λ_i real negativo: curva de evolução reta, que se aproxima exponencialmente da origem.

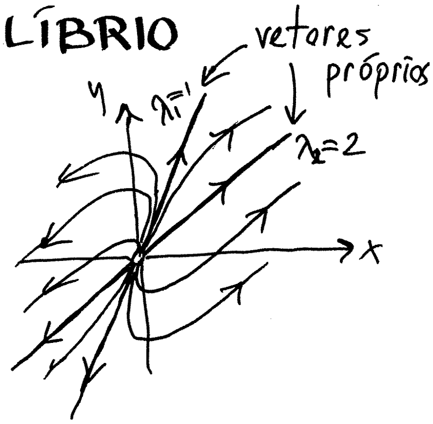
TIPOS DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

① Nós repulsivos.

$\mathrm{tr}A > 0$, $\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 > \det A$

$\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 são reais, positivos e diferentes.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

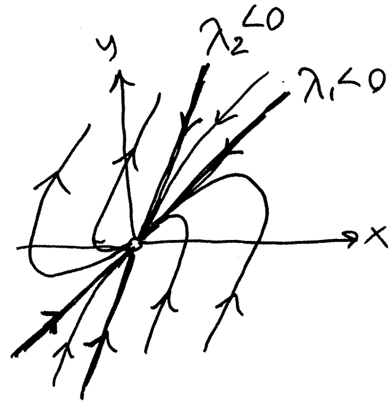


② Nós atrativos.

$\mathrm{tr}A < 0$, $\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 > \det A$

$\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 reais, negativos, diferentes.

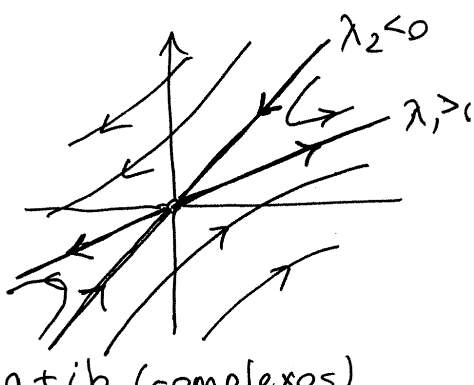
Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$



③ Pontos de sela.

$\det A < 0 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 reais, com sinais opostos

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$



Nos outros casos, quando $\lambda = a \pm ib$ (complexos), não existem vetores próprios no plano $\mathbb{R}^2$. Todas as curvas de evolução são curvas.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{\lambda t} = \vec{r}_0 e^{(a+ib)t} = \vec{r}_0 e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$$
(solução complexa)

as partes real e imaginária de $\vec{r}$:

$\vec{r}_0 e^{at}\cos(bt)$, $\vec{r}_0 e^{+at}\sin(bt)$,

são soluções (reais) particulares do sistema dinâmico.

④ **Centros.**

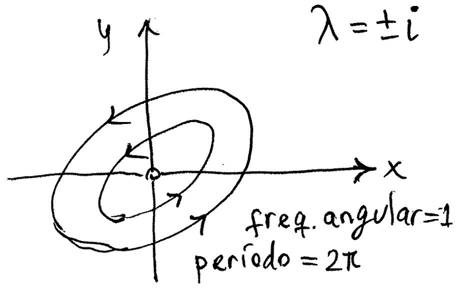
$\operatorname{tr}\mathbb{A} = 0$, $\det\mathbb{A} > 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det\mathbb{A}}$

todas as curvas de evolução são ciclos, com frequência angular $\sqrt{\det\mathbb{A}}$

Exemplo: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = \pm i$



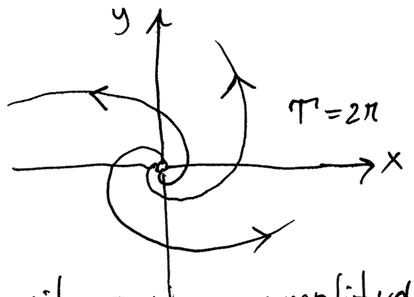
⑤ **Focos repulsivos.**

$\operatorname{tr}\mathbb{A} > 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}\mathbb{A}}{2}\right)^2 < \det\mathbb{A}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (a>0)$

Exemplo: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$



oscilações com amplitude crescente e freq. angular = 1

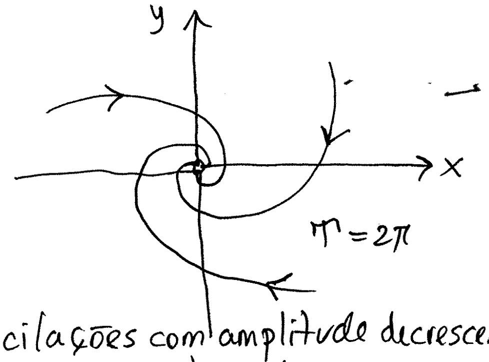
⑥ **Focos atrativos**

$\operatorname{tr}\mathbb{A} < 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}\mathbb{A}}{2}\right)^2 < \det\mathbb{A}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (a<0)$

Exemplo: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

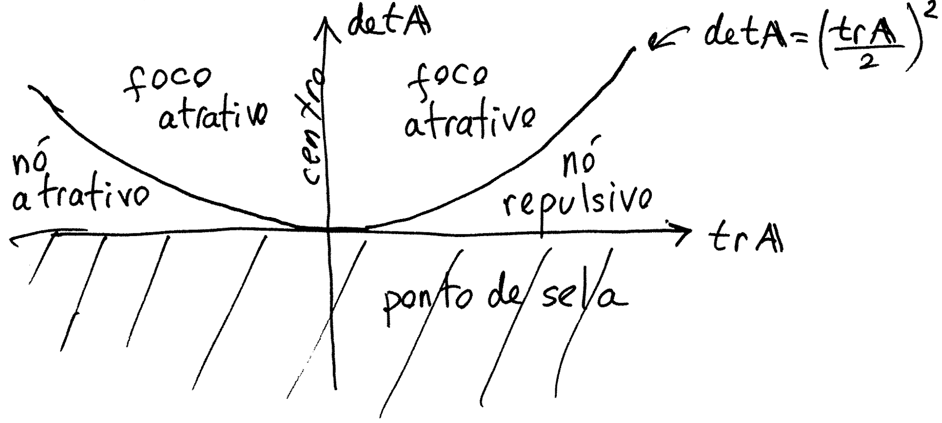
$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$



oscilações com amplitude decrescente e freq. angular = 1

Aula 20. 2019-05-13

Tipos de equilíbrio nos sistemas lineares



Nos pontos da parábola $\det A = \left(\frac{\mathrm{tr} A}{2}\right)^2$, a matriz tem um único valor próprio, real. Existe apenas uma reta com duas curvas de evolução que se aproximam, ou afastam da origem. → NÓ IMPRÓPRIO

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

f_1 e f_2 são funções contínuas de x_1 e x_2 e não são simples combinações lineares de x_1 e x_2

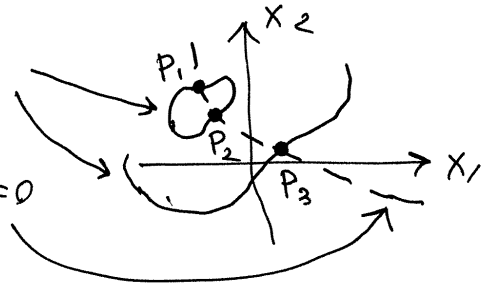
Podem existir vários pontos de equilíbrio.

<u>Nulclinas de x_1</u>: $f_1(x_1, x_2) = 0$

curvas onde $\dot{x}_1 = 0$

<u>Nulclinas de x_2</u>: $f_2(x_1, x_2) = 0$

curvas onde $\dot{x}_2 = 0$



Os pontos de equilíbrio são a interseção entre as curvas de nível $f_1(x_1, x_2) = 0$ e $f_2(x_1, x_2) = 0$

APROXIMAÇÃO LINEAR

Série de Taylor de f_1, na vizinhança dum ponto (a,b):

$$f_1(x_1,x_2) = f_1(a,b) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) + \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right|_{(a,b)}(x_1-a)^2 + \ldots$$

e de forma análoga para f_2. Se (a,b) for ponto de equilíbrio, $f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0$, e mantendo unicamente os termos que dependem de (x_1-a) e (x_2-b):

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) \approx \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) \\ f_2(x_1,x_2) \approx \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) \end{cases}$$

Matriz jacobiana do sistema

$$\mathbb{J}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

A aproximação das funções f_1 e f_2 conduz a um sistema linear:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x = x_1 - a \\ y = x_2 - b \end{matrix} \qquad \mathbb{A} = \mathbb{J}(a,b)$$

Em cada ponto de equilíbrio existe uma matriz $\mathbb{A}$, correspondente à aproximação linear nessa região. Se a matriz $\mathbb{A}$ estiver na parábola ou no semieixo positivo das ordenadas, no gráfico $\det\mathbb{A}$ vs. $\mathrm{tr}\mathbb{A}$ (nós impróprios e centros), os termos não lineares podem fazer com que o ponto de equil. seja foco ou nó.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2(x_2^2+x_1^2-1)^2 - 3x_1^2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2^3 - 6x_1(x_2^2+x_1^2-1)^2 \end{cases}$$

Resolução no Maxima: demo("~/.maxima/aula20");

← ficheiro aula20.dem

```
"Definição das duas funções"$
f1: 6*x2*(x2^2+x1^2-1)^2 - 3*x1^2*x2^2;
f2: 2*x1*x2^3 - 6*x1*(x2^2+x1^2-1)^2;

"Determinação dos pontos de equilíbrio"$
p: solve([f1,f2]);

"Há 13 pontos mas apenas 9 estão no plano real."$

"Para extrair os primeiros 7 elementos e os últimos 2, da lista de 13,
usa-se o comando:"$
p: append(rest(p,-6), rest(p,11));

"4 dos pontos estão nos eixos."$

"Cálculo da matriz jacobiana"$
J: jacobian([f1,f2],[x1,x2]);

"Cálculo das 9 matrizes das aproximações lineares"$
A: makelist(subst(q,J), q, p);

"Traços das 9 matrices"$
map(mat_trace, A);

"Todas têm traço nulo. De facto, o sistema é conservativo: a matriz
jacobiana têm traço nulo e, como tal, os pontos de equilíbrio
poderão ser ou centros ou pontos de sela."$

"Cálculo dos determinantes das 9 matrizes"$
map(determinant, A);

"O primeiro, oitavo e nono pontos são centros.
O sexto e sétimo são pontos de sela.
Nos 4 pontos nos eixos não há aproximação linear: esses pontos
não são dos tipos encontrados nos sistemas lineares."$

"Retrato de fase:"$
plotdf([f1,f2],[x1,x2],[x1,-2,2],[x2,-2,2]);
```

Os 4 pontos de equilíbrio nos eixos, (0,1), (0,-1), (1,0) e (-1,0), onde não há aproximação linear, estão ligados por 4 curvas, formando uma órbita heteroclínica.

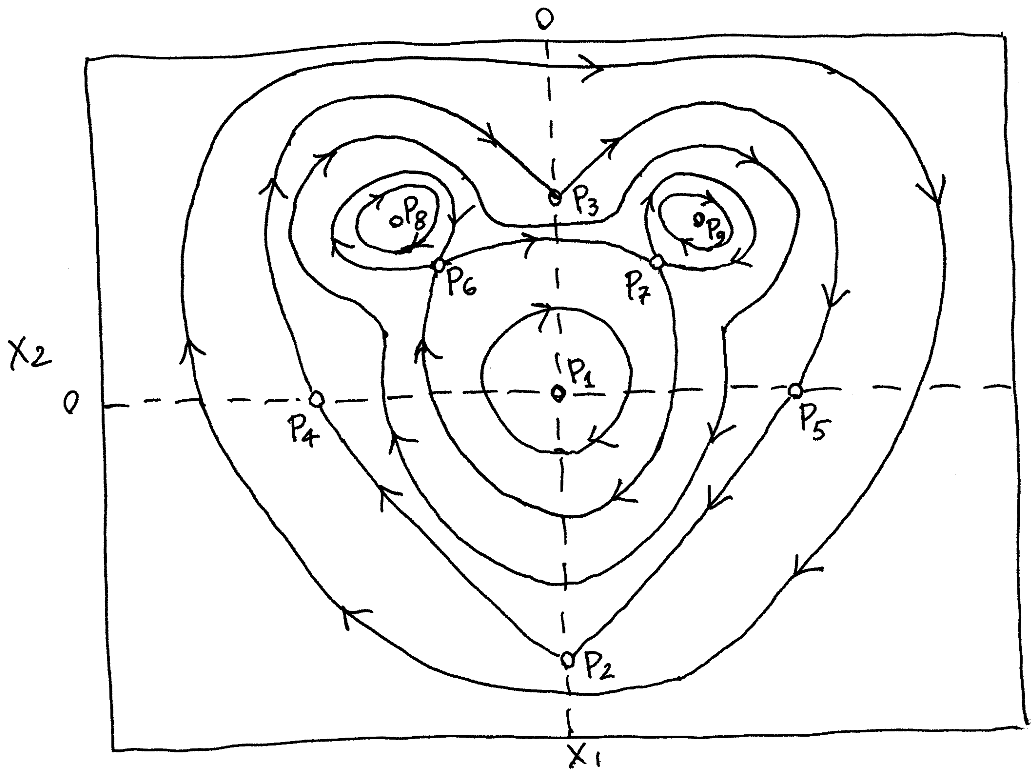
Pode ser traçada, de forma aproximada, usando
nsteps=70 e trajectory_at = 0.005 -1.005 (menu config.)
nsteps=110 e trajectory_at = 0.005 1.005

Há 5 tipos de ciclos: 3 à volta de cada um dos 3 centros, um à volta dos 3 centros, dentro da órbita heteroclínica e outro à volta dos 3 centros, fora da órbita. Podem ser visualizados usando nsteps=300, e trajectory_at nos seguintes 5 pontos

0 0.8 ; 0 0.5 ; 0.9 1 ; -0.9 1 ; 0 1.4

Existem duas órbitas homoclínicas, uma em cada ponto de sela (nsteps=300, trajectory_at: 0.5773 0.6502
-0.5773 0.6502)

E há uma segunda órbita heteroclínica, com 2 curvas a ligar os dois pontos de sela.
(nsteps=300, trajectory_at: 0.5179 0.625)



Aula 21. 2019-05-15

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO AUTÓNOMOS

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Considerando t como mais uma variável de estado, e acrescentando a equação $\dot{t} = 1$ $\left(\frac{dt}{dt} = 1\right)$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

sistema autónomo com espaço de fase (x_1, x_2, t)

como t passa a ser variável de estado, para determinar a curva de evolução é necessário saber o valor de t_0 (para além de x_0 e v_0).

ESPAÇO DE FASE COM 3 OU MAIS VARIÁVEIS

O programa rk (método de Runge-Kutta) produz uma lista de pontos que aproximam a curva de evolução a partir dum ponto inicial no espaço de fase, num intervalo de valores de t.

Exemplo. $\dot{x} = f_x$, $\dot{y} = f_y$, $\dot{z} = f_z$

f_x, f_y e f_z são expressões que podem depender de x, y, z e t. Estado inicial: (x_1, y_1, z_1)

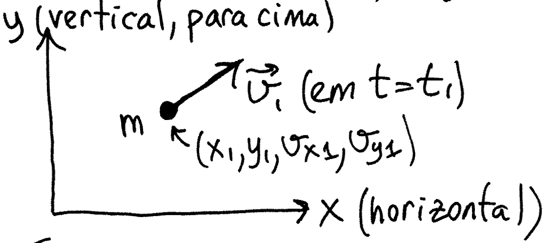
Variável independente $\rightarrow t$, desde t_1 até t_n, com incrementos $\Delta t = \frac{t_n - t_1}{n-1}$

$$\text{rk}([fx, fy, fz], [x, y, z], \underbrace{[x1, y1, z1]}_{\text{números}}, [t, \underbrace{t1, tn, \Delta t}_{\text{números}}])$$

produz a lista:

$$[[t1, x1, y1, z1], [t2, x2, y2, z2], \ldots, [tn, xn, yn, zn]]$$

Lançamento de projéteis

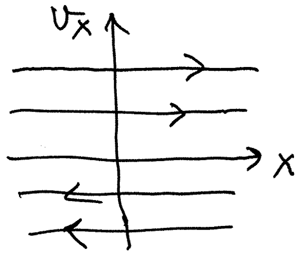


Equações de movimento (ignorando a resistência do ar):

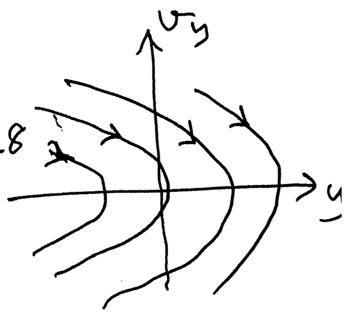
$\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_y = -g$

É um sistema com 4 variáveis de estado (x, y, v_x, v_y), mas separa-se em dois sistemas independentes, cada um com 2 variáveis

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -9.8 \end{cases}$$



<u>Com resistência do ar</u>: para uma esfera de raio R,

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4}\rho R^2 |\vec{v}|\,\vec{v} = -\frac{\pi\rho R^2}{4}\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,(v_x\hat{\imath}+v_y\hat{\jmath})$$

ρ = massa volúmica do ar $\approx 1.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Equações de movimento (SI)

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\dfrac{1.2\pi}{4}\left(\dfrac{R^2}{m}\right)\sqrt{v_x^2+v_y^2}\ v_x \\[2ex] \dot{v}_y = -9.8 - \dfrac{1.2\pi}{4}\left(\dfrac{R^2}{m}\right)\sqrt{v_x^2+v_y^2}\ v_y \end{cases}$$

(sistema autónomo. Valor de t_0 arbitrário)

Solução numérica, para R = 3.25 cm e m = 62 g (bola de tenis), com velocidade inicial de 12 $\frac{m}{s}$, inclinada 45° sobre a horizontal.

```
k: float(1.2*%pi*0.0325^2/4/0.062);
v: sqrt(vx^2+vy^2);
c1: rk([vx, vy, -k*v*vx, -9.8*v*vy],
       [x, y, vx, vy],
       [0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)],
       [t,0,2,0.01])$
```

origem na posição inicial → [0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)],

[t,0,2,0.01])$ ← importante não usar ;

last(c1); → [2.0, 14.7, -3.2, 6.3, -10.5]

↖ y em t=2, negativo

Descobrir em que instante a bola regressou a y=0:

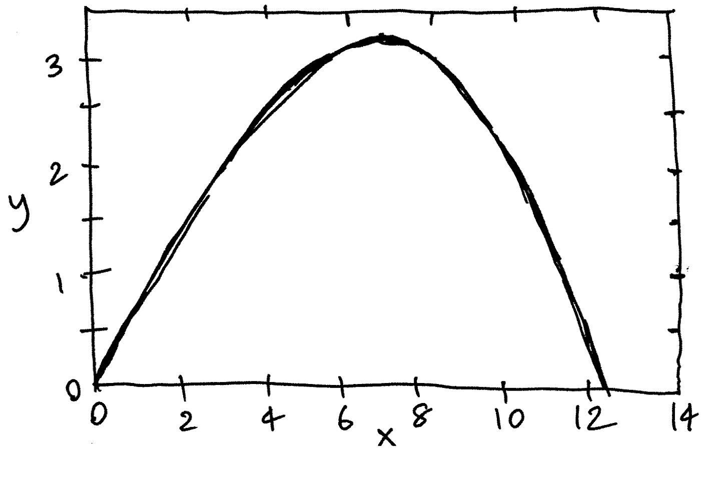
```
first(sublist_indices(c1, lambda([p], p[3]<0)));
```

→ 167 (ou seja, y<0 a partir do elemento 167 da lista c1)

Gráfico da trajetória, em y≥0:

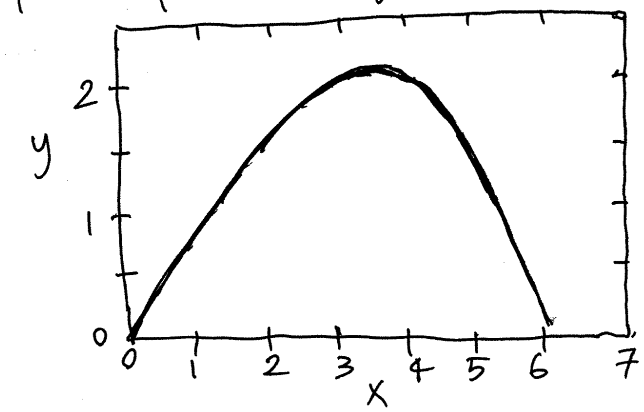
$$\texttt{g1: makelist(}[\underbrace{\texttt{c1[i][2]}}_{x_i},\ \underbrace{\texttt{c1[i][3]}}_{y_i}]\texttt{, i, 1, 166)\$}$$

```
plot2d([discrete, g1]);
```



Se a bola for de ping-pong, $R \approx 1.9\,\mathrm{cm}$, $m \approx 2.4\,\mathrm{g}$

```
k: float(1.2*%pi*0.019^2/4/0.0024);
c2: rk([vx,vy,-k*v*vx,-9.8-k*v*vy],
       [x,y,vx,vy],[0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)],
       [t,0,2,0.01])$
last(c2); → [2, 7.6, -4.6, 1.4, -7.55]
first(sublist_indices(c2, lambda([p], p[3]<0))); → 133
g2: makelist([c2[i][2], c2[i][3]], i, 1, 132)$
plot2d([discrete, g2])$
```



Resolução de equações diferenciais.

Exemplo: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$, (com $y=0$, $y'=1$, em $x=0$)

sistema dinâmico com 3 variáveis:

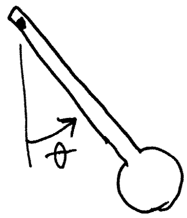
$y' = u$, $u' = \left(\frac{1}{9x^2} - 1\right)y - \frac{u}{x}$, $x' = 1$

solução numérica:

```
rk([u, y*(1/9/x^2-1)-u/x],[y,u],[0,1],[x,0,30,0.01])
```

Aula 22. 2019-05-20

Pêndulo



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \Rightarrow \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

pontos de equilíbrio:

$\dot{\theta} = 0,\ \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\theta$

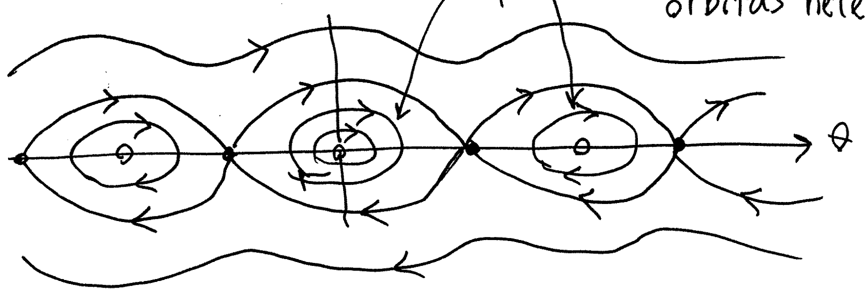
$\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ 

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \Omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ (centros)}$$

$\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$  (pêndulo invertido)

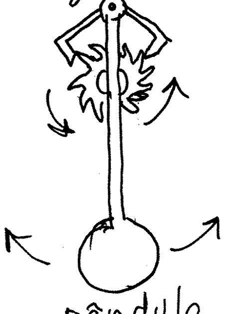
$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \text{ (pontos de sela)}$$

infinitos ciclos dentro das órbitas heteroclínicas

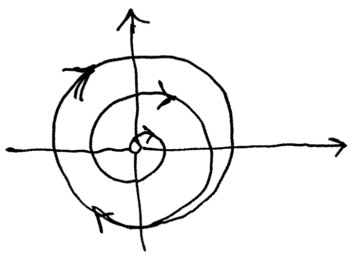


CICLOS LIMITE

Relógio de pêndulo. A rotação da roda dentada faz oscilar o pêndulo até uma amplitude determinada



pêndulo



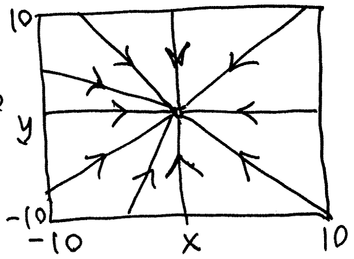
Existe <u>um único ciclo</u> no retrato de fase (ciclo limite)

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = x(1-18x^2-36y^2)-y \\ \dot{y} = y(1-18x^2-36y^2)+x \end{cases}$

```
u: [x*(1-18*x^2-36*y^2)-y, y*(1-18*x^2-36*y^2)+x]$
solve(u);
```
→ um único ponto de equilíbrio na origem
```
J: jacobian(u,[x,y])$
eigenvalues(subst([x=0,y=0], J));
```
→ $\lambda = 1 \pm i$

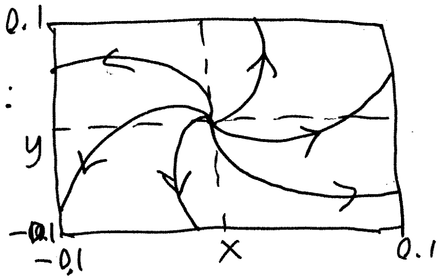
A origem é foco repulsivo. Retrato de fase:

```
plotdf(u,[x,y]);
```



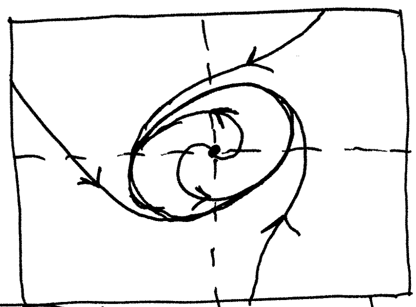
A origem parece ser ponto atrativo, porque o domínio, por omissão é muito grande!

Com um domínio menor consegue-se ver o foco repulsivo:
```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.1,0.1],
       [y,-0.1,0.1]);
```



Como as curvas de evolução que se aproximam da origem, no primeiro gráfico, não podem cruzar-se com as curvas a sair da origem, no segundo gráfico, deverá existir um ciclo limite atrativo.

Consegue mostrar-se o ciclo com:
```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.5,0.5],
       [y,-0.5,0.5]);
```



No interior de qualquer ciclo limite há sempre um ponto de equilíbrio, atrativo, ou repulsivo

COORDENADAS POLARES

Em alguns casos, expressando as equações de evolução em coordenadas polares conseguem-se descobrir ciclos limite.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d(r\cos\theta)}{dt} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{d(r\sin\theta)}{dt} = g(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = F(r,\theta) \\ \dot{r} = G(r,\theta) \end{cases}$$

existirão ciclos limite se $F(r,\theta)$ for sempre positiva ou sempre negativa (curvas a rodar no mesmo sentido) e $G(r,\theta)$ tiver raízes $r_i \neq 0$, onde $G(r_i,\theta) = 0$.

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)+2y \\ \dot{y} = y\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)-2x \end{cases}$

Definem-se x e y em coordenadas polares e as derivadas de r e θ:

```
[x,y]: r*[cos(q),sin(q)];        q → θ
gradef(r,t,rp)$                  rp → ṙ
gradef(q,t,qp)$                  qp → θ̇
```

E as equações de evolução:

```
eq1: diff(x,t)=x*(x^2+y^2-3*sqrt(x^2+y^2)+2)+2*y
eq2: diff(y,t)=y*(x^2+y^2-3*sqrt(x^2+y^2)+2)-2*x
```

que neste momento estarão em função de r, θ, $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Resolvem-se para encontrar as expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$.

solve([eq1,eq2],[rp,qp]); → $\boxed{\dot{\theta} = -2}$

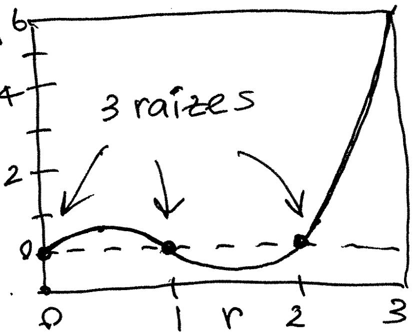
simplifica-se a expressão de $\dot{r}$:

trigsimp(%[1][1]);

↳ $\dot{r} = -3r|r| + r^3 + 2r$

gráfico:

plot2d(subst(%,rp),[r,0,3]);



→ $\dot{\theta} = -2$ indica que todas as curvas de evolução rodam no sentido oposto dos ponteiros do relógio.

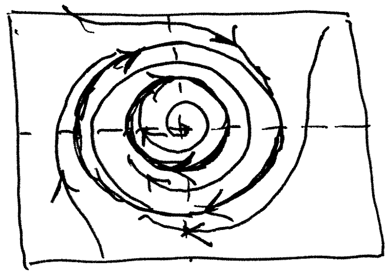
→ $\dot{r} = 0$ em $r = 0$, indica que se $r = 0$ (origem) o estado permanece sempre nesse ponto (equilíbrio).

→ $\dot{r} = 0$ em $r = 1$ e $r = 2$, indica que se num instante o estado estiver a uma distância de 1 ou 2 unidades da origem, esse estado rodará mantendo sempre a mesma distância (dois ciclos limite circulares)

→ $\dot{r} > 0$, em $0 < r < 1$: o estado roda afastando-se da origem (a origem é foco repulsivo)

→ $\dot{r} < 0$, em $1 < r < 2$: o estado roda afastando-se do ciclo $r = 2$ e aproximando-se do ciclo $r = 1$ (atrativo).

→ $\dot{r} > 0$, em $r > 2$: o estado roda, afastando-se até ∞ (ciclo com $r = 2$ repulsivo)



kill(all);

f1: y*(x^2+y^2-3*sqrt...

f2: x*(x^2+y^2-3*sqrt...

plotdf([f1,f2],[x,y],[x,-3,3], [y,-3,3]);

Aula 23. 2019-05-22

DINÂMICA POPULACIONAL

$x(t)$ = população no instante $t \geq 0$

$\dot{x} = f(x,t)$ = aumento/diminuição da população

f deverá ter a propriedade: $f(0,t) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$, é sempre ponto de equilíbrio

Modelo de Malthus

$\dot{x} = a x \quad (a > 0)$ $\quad a$ = taxa de natalidade = constante

$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{at}$ cresce exponencialmente até ∞

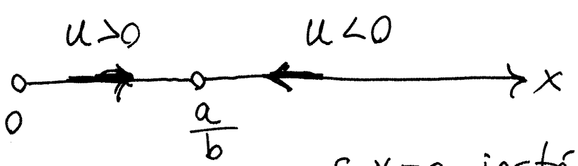
Modelo Logístico (Verhulst)

$\dot{x} = x(a - b x) \quad (a > 0, b > 0)$

a = taxa de natalidade, constante

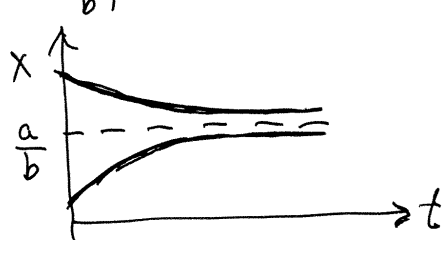
bx = taxa de mortalidade; maior quanto maior for a população

o espaço de fase é a semi reta real $\mathbb{R}^+$ e a velocidade de fase é $u = x(a-bx)$. Retrato de fase:



2 Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} x = 0, \text{ instável} \\ x = \frac{a}{b}, \text{ estável} \end{cases}$

A população aproxima-se do valor limite $x = \frac{a}{b}$



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x_1(t)$ = população da espécie 1 ≥ 0

$x_2(t)$ = população da espécie 2 ≥ 0

Equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \lim_{x_1 \to 0^+} f_1(x_1, x_2) = 0 \qquad \lim_{x_2 \to 0^+} f_2(x_1, x_2) = 0$$

Matriz jacobiana

$$\mathbb{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

crecimento próprio da espécie 1

influência da espécie 2 na espécie 1

crecimento próprio da espécie 2

influência da espécie 1 na espécie 2

Tipos de sistemas

① Sistema com cooperação: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$

② Sistema com competição: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$

③ Sistema predador-presa: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$

$x_i \to$ predadores

$x_j \to$ presas

Exemplo. Sistema de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(a - cy), \quad \dot{y} = y(bx - d) \quad (a>0, b>0, c>0, d>0)$$

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ by & bx - d \end{bmatrix}$$

$x \to$ presas

$y \to$ predadores

Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(bx - d) = 0 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} x=0,\ \text{v},\ y=\frac{a}{c} \\ y=0,\ \text{v},\ x=\frac{d}{b} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{2 pontos de equilíbrio:} \\ (x,y)=(0,0) \quad (x,y)=\left(\frac{d}{b},\frac{a}{c}\right) \end{array}$$

$$A_1 = J(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = a > 0 \ , \ \lambda_2 = -d < 0$$

PONTO DE SELA

$$A_2 = J\left(\frac{d}{b},\frac{a}{c}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{tr}\,A_2 = 0 \quad \det A_2 = ad > 0$$

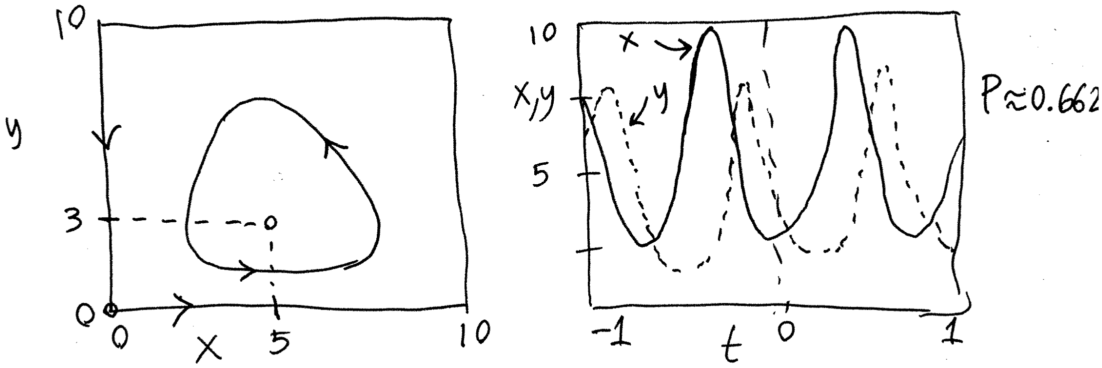
$$\lambda = \pm i\sqrt{ad}$$

$\Rightarrow$ $x(t)$ e $y(t)$ oscilam com frequência angular

$$\Omega \approx \sqrt{ad}$$

Exemplo de retrato de fase com $a=6$, $b=3$, $c=2$, $d=15$

plotdf([x*(6-2*y), y*(3*x-15)], [x,y], [x,0,10], [y,0,10]



Esse tipo de oscilações observam-se na natureza nos sistemas predador-presa (exemplo, rapozas e coelhos). Um problema deste modelo é que se inicialmente uma das populações for quase nula, o ciclo varia até valores muito elevados das populações, com a outra a ficar quase extinta. Seria mais realista um ciclo limite.

Exemplo. Modelo de Holling-Tanner:

$$\dot{x} = x\left(1-\frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1-\frac{y}{2x}\right)$$

No Maxima:

```
u: [x*(1-x/7)-6*x*y/(7+7*x), y*(1-y/2/x)/5];
solve(u); → [[y=0, x=0], [y=0, x=-1], [y=0, x=7],
             [y=-14, x=-7], [y=2, x=1]];
```

3 pontos de equilíbrio. Um em que as duas populações estão extintas (0,0), outro em que y está extinta e a população x fica em 7 e outro em que as duas populações coexistem, estabilizando-se em $(x,y)=(1,2)$.

Matriz jacobiana:

```
J: jacobian(u,[x,y]);
```

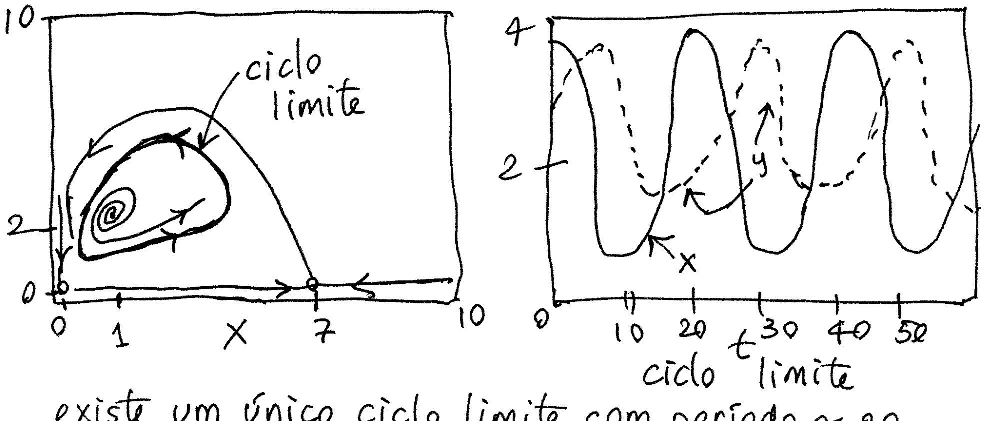
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & -\dfrac{6x}{7x+7} < 0 \\ \dfrac{y^2}{10x^2} > 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

⇒ sistema predador-presa

x → presas, y → predadores.

Retrato de fase:

```
plotdf(u, [x,y], [x,-0.1,10], [y,-0.1,10]);
```



existe um único ciclo limite com período ≈ 20.

(0,0) e (7,0) são pontos de sela e (1,2) é foco repulsivo.

Aula 24. 2019-05-27

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

As variáveis de estado x_i são sequências, em vez de funções contínuas:

$$x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \qquad x_n = \text{valor da variável no período } n.$$

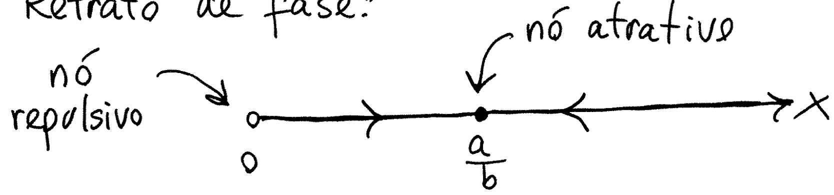
As equações de evolução são relações de recorrência, em vez de equações diferenciais.

Exemplo: Modelo logístico.

No caso contínuo:

$$\dot{x} = x(a - bx) \qquad (a>0,\ b>0,\ x \geq 0)$$

Retrato de fase:



No caso discreto, o aumento da população entre o período n e o período $n+1$ é:

$$x_{n+1} - x_n = x_n(a - b x_n)$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = c\,x_n - b x_n^2 \qquad (c = a+1 > 1)$$

Pode escrever-se em função dum único parâmetro:

$$x_n = \frac{c}{b} y_n \implies \frac{c}{b} y_{n+1} = \frac{c^2}{b} y_n - \frac{c^2}{b} y_n^2$$

$$\boxed{y_{n+1} = c\,y_n(1 - y_n)} \qquad (c > 1) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

Pontos de equilíbrio: quando $y_{n+1} = y_n$

$$\Rightarrow y_n\left((c-1)y_n - c\right) = 0 \qquad \begin{cases} y_n = 0 \\ y_n = \dfrac{c-1}{c} \end{cases}$$

Dado um valor inicial, a sequência $\{y_0, y_1, \ldots\}$ encontra-se iterando a equação de recorrência:

$$\{y_0,\ y_1 = c y_0(1-y_0),\ y_2 = c y_1(1-y_1), \ldots\}$$

No Maxima, podemos definir uma função que crie a sequência:

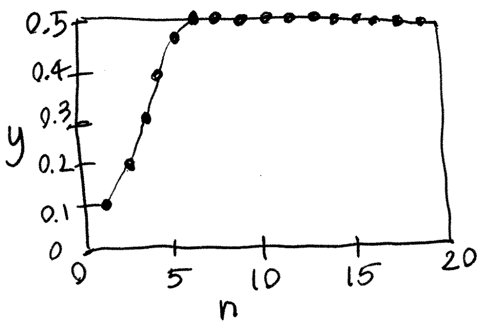
y_0

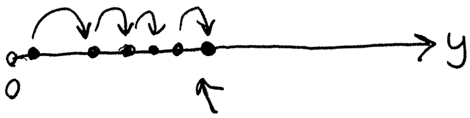
```
f(c,n):=block([y:[0.1]],for i:2 thru n do
                  y: endcons(c*last(y)*(1-last(y)),y),
mostra a               y );
sequência y
```

Resultado para diferentes valores do parâmetro c:

① c = 2. `plot2d([discrete,f(2,20),[style,linespoints]]);`

[xlabel,"n"]





$\frac{c}{c-1} = 0.5$
nó atrativo

② c = 3.2 . f(3.2, 60) mostra que após alguns períodos, a sequência oscila entre dois valores:

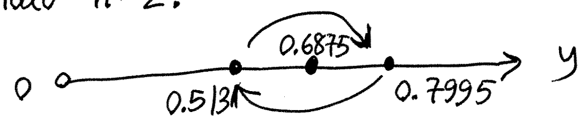
0.513 e 0.7995

O ponto de equilíbrio, $\frac{c-1}{c} = 0.6875$ está entre os dois.

O ponto de equilíbrio é agora FOCO REPULSIVO e apareceu um ciclo limite atrativo:

$$\{0.513, 0.7995, 0.513, 0.7995, \ldots\}$$

com período $n=2$.



No caso contínuo, não podiam existir ciclos, porque o estado X não pode passar de um lado para o outro do ponto de equilíbrio. No caso discreto o estado sim pode passar dum ponto para outro, sem ter de passar pelos pontos intermédios.

Os valores do ciclo limite podem encontrar-se a partir da condição: $y_{n+2} = y_n \Rightarrow c\,y_{n+1}(1-y_{n+1}) = y_n$

$$\Rightarrow c\left(c\,y_n(1-y_n)\right)\left(1-c\,y_n(1-y_n)\right) = y_n \quad \text{(equação cúbica)}$$

$$y_n = \frac{c+1 \pm \sqrt{c^2-2c-3}}{2c} \quad \left(\text{ou } y_n = \frac{c-1}{c} \text{ que é o ponto de equilíbrio}\right)$$

$$\Rightarrow y_n = 0.513 \quad \text{ou} \quad y_n = 0.7995$$

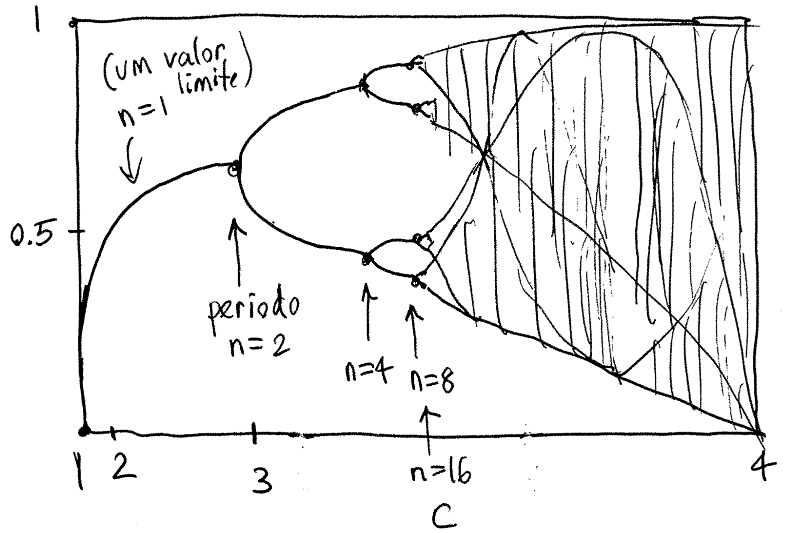
(3) $c=3.5$. $f(3.5, 60)$ mostra um ciclo limite atrativo com período $n=4$:

$$\{0.5009, 0.875, 0.3828, 0.8269, 0.5009, \ldots\}$$

dois valores maiores do que o ponto de equilíbrio (0.7143) e os outros dois menores.

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

Gráfico com valores de c no eixo das abcissas, e os valores limite da sequência $\{y_n\}$ no eixo das ordenadas:



Nos valores de c em que o período do ciclo limite duplica, diz-se que há uma bifurcação.
A primeira bifurcação é em c=3, e as seguintes cada vez mais próximas:

i	n	c	$(c_{i-1}-c_{i-2})/(c_i-c_{i-1})$
1	2	3	—
2	4	3.44949	—
3	8	3.54409	4.7514
4	16	3.56440	4.6562

a distância entre duas bifurcações é aproximadamente 4.67 vezes menor do que entre as duas anteriores

Como tal, o período torna-se infinito para alguns valores de c.
Um ciclo de período ∞ é uma sequência que nunca se repete → SOLUÇÃO CAÓTICA.

Um sistema caótico é muito sensível ao valor inicial dado. Por exemplo, modifiquemos a função f que produz a sequência logística, indicando um valor inicial:

```
f(c,y1,n):= block([y:[y1]], for i:2 thru n do
                    y:endcons(c*last(y)*(1-last(y)),y),
               y);
```

Em c=4, que é um sistema caótico, o valor de y_{60}, com $y_1=0.1$ será:

last(f(4,0.1,60)); → 0.3214

Mas se o valor inicial fosse 0.101,

last(f(4,0.101,60)); → 0.574

e com outros valores iniciais próximos de 0.1,

last(f(4,0.1001,60); → 0.9642

last(f(4,0.10001,60); → 0.01407

O sistema é determinístico (a sequência está definida de forma exata); mas como nunca teremos o valor inicial exato (erro de medição), ficaremos com uma grande incerteza no valor de y_{60}.

Aula 25. 2019-05-29

SISTEMAS CONTÍNUOS CAÓTICOS

Um sistema dinâmico contínuo com 3 ou mais variáveis de estado pode ter atratores estranhos (soluções caóticas). Alguns exemplos:

(1) Sistema de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + c\,y \\ \dot{z} = a + (x-b)\,z \end{cases}$$

(3 parâmetros reais, a, b, c)

Fixando dois dos parâmetros, e variando o terceiro, observam-se bifurcações, onde o período de oscilação duplica, de forma análoga ao sistema logístico discreto. Por exemplo, com $a=2$, $b=4$ e variando c entre 0.3 e 0.4:

```
u(c):=[-y-z, x+c*y, 2+(x-4)*z];
```

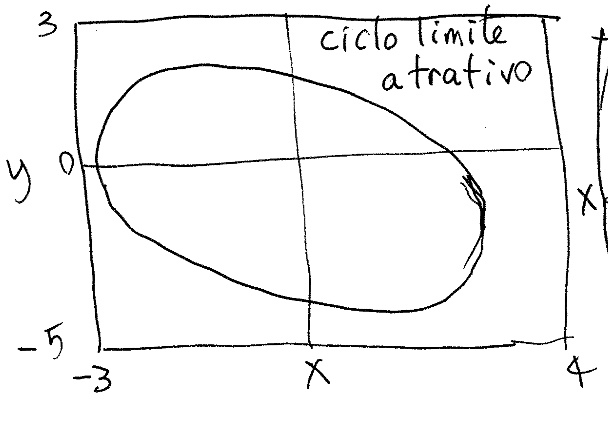
(a) $c = 0.3$

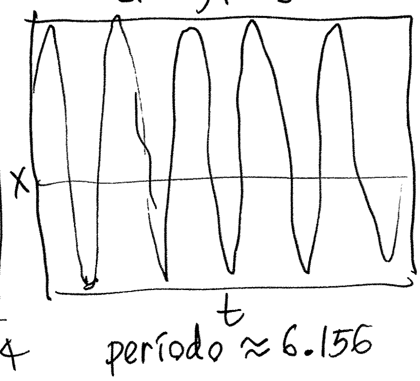
```
s: rk(u(0.3),[x,y,z],[2,2,2],[t,0,60,0.01])$
s: rk(u(0.3),[x,y,z],rest(last(s)),[t,0.60,0.01])$
```

← começa onde terminou a lista anterior

```
plot2d([discrete,makelist([p[2],p[3]],p,s)]);
```

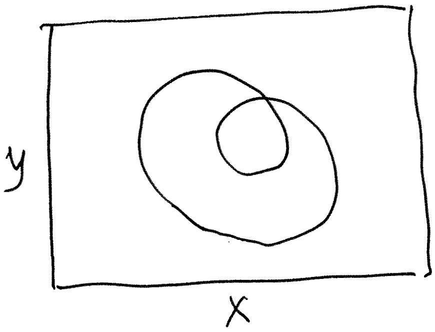
← e: [p[1], p[2]]

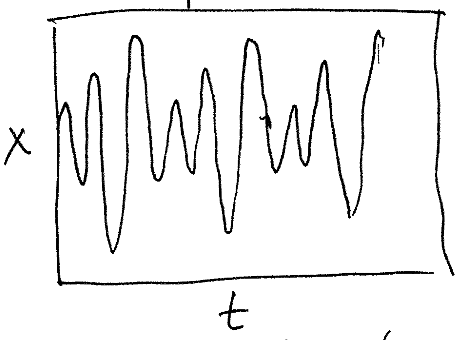




período ≈ 6.156

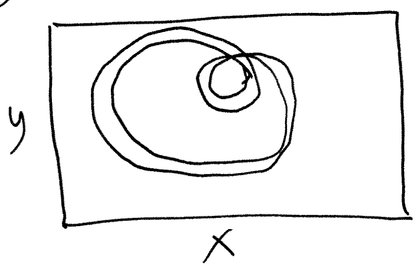
(b) $c=0.35$. Repetindo o mesmo procedimento obtém-se:





ciclo limite com período aproximadamente o dobro do que tem o ciclo da alínea (a)

(c) $c=0.375$



Ciclo limite que dá 4 voltas ao ponto de equilíbrio instável, antes de fechar:
$\Longrightarrow$ período 4 vezes maior.

(d) $c=0.398$. Atrator estranho. Ciclo que não fecha e continuando a partir do ponto final produz outro ciclo diferente em cada execução de rk(...).

O sistema torna-se caótico em $c \to 0.398$

O mecanismo pelo qual se torna caótico é por duplicação do período das oscilações em torno dum ponto de equilíbrio repulsivo.

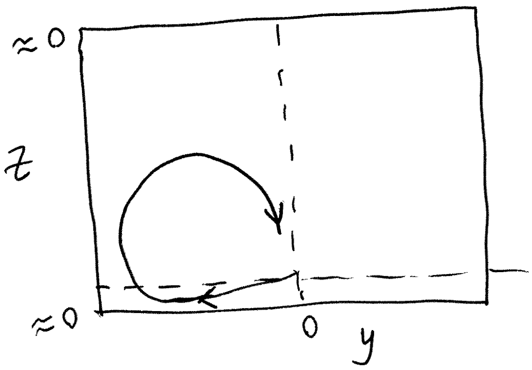
② Sistema de Chen-Ueta

$$\begin{cases} \dot{x} = c(y-x) \\ \dot{y} = (28-c)x + 28y - xy \\ \dot{z} = xy - 3z \end{cases} \qquad (a=28,\ b=3)$$

ⓐ $c = 60$

```
u(x):=[c*(y-x),(28-c)*x+28*y-x*y, x*y-3*z];
s:rk(u(60),[x,y,z],[0.1,0,0],[t,0,6,0.001])$
```

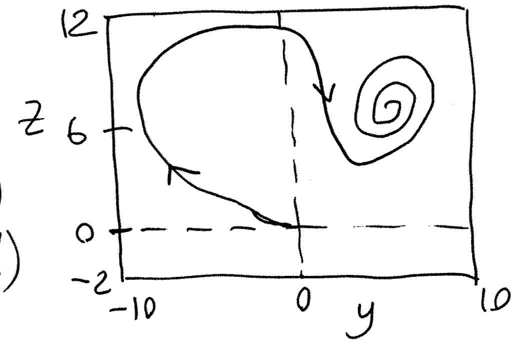
← próximo da origem, que é ponto de equilíbrio atrativo.



O estado regressa à origem.

ⓑ $c=50$

O sistema aproxima-se dum foco atrativo dos dois em $(x,y,z) \approx (4.24, 4.24, 6)$ (a origem é agora instável)



ⓒ $c=35$

→ Atrator estranho que oscila entre dois focos atrativos. O mecanismo que conduz à solução caótica chama-se <u>intermitência</u>: o ponto de equilíbrio na origem (sela; atrativo, atrativo, repulsivo) afasta o sistema da vizinhança dum dos focos para o outro.

repulsivos num plano e atrativos noutra direção.

Capítulo 2

Exames

2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 18 de junho de 2019. Compareceram 152 estudantes e a nota média foi 12 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

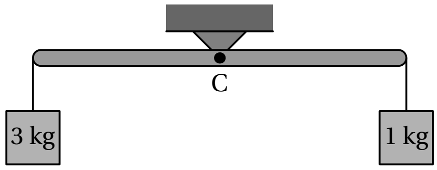
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2018/2019

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 18 de junho de 2019

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) A barra na figura, com massa $m = 1.9$ kg e comprimento $L = 0.85$ m, pode rodar à volta dum eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro de massa C, no ponto meio da barra. Dois blocos de 3 kg e 1 kg foram pendurados nos dois extremos da barra, por meio de fios de massa desprezável em comparação com as massas dos blocos. Sabendo que o momento de inércia da barra, em relação ao eixo no centro de massa C, é dado pela expressão $\frac{1}{12}\, m L^2$, e desprezando a resistência do ar e o atrito no eixo, determine as acelerações dos dois blocos, no instante em que a barra está na posição horizontal.



2. (4 valores) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = x\left(1 - y^2\right) \qquad \dot{y} = x + y$$

Encontre a matriz da aproximação linear na vizinhança de cada um desses pontos, e os seus valores próprios e vetores próprios (caso existam no plano real xy). Com base nos valores próprios, indique que tipo de ponto é cada um dos pontos de equilíbrio. Mostre os pontos de equilíbrio no plano real xy e com base nos vetores próprios obtidos, trace algumas curvas de evolução na vizinhança de cada um desses pontos.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um avião está a voar com velocidade de valor 900 km/h, em relação ao ar. Nesse instante, o valor da velocidade do vento é de 50 km/h. Qual dos valores na lista poderá ser o valor da velocidade do avião em relação à terra?

(A) 825.0 km/h **(C)** 925 km/h **(E)** 1000 km/h
(B) 975.0 km/h **(D)** 800 km/h

Resposta: ☐

4. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado $(x,\ y)$ foram transformadas para coordenadas polares (r,θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = r^2 - 3\,r$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 2$ **(D)** repulsivo com $r = 3$
(B) atrativo com $r = 0$ **(E)** atrativo com $r = 3$
(C) repulsivo com $r = 2$

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é $-s^2 + s + 6$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto $(a, 0)$, determine o valor de a.

(A) 3 **(C)** 2 **(E)** 1
(B) -1 **(D)** -2

Resposta: ☐

6. Para subir uma caixa com massa de 65 kg, desde o chão até um camião com altura 120 cm, um homem empurra a caixa sobre cilindros (para reduzir o atrito) ao longo duma rampa inclinada 30° em relação à horizontal. Determine o trabalho mínimo (quando o atrito e a resistência do ar são desprezáveis) que deverá realizar o homem para subir a caixa ao camião.

(A) 331 J **(C)** 382 J **(E)** 191 J
(B) 764 J **(D)** 662 J

Resposta: ☐

7. As equações de evolução de dois sistemas dinâmicos são:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2\,x\,y - y\\ \dot{y} = 3\,x - y^2\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = 2\,x - y\\ \dot{y} = 3\,x - 2\,y\end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O 1º é conservativo e o 2º não é conservativo.
(B) Nenhum dos dois é linear.
(C) Ambos são conservativos.
(D) O 1º não é conservativo e o 2º é conservativo.
(E) Nenhum dos dois é conservativo.

Resposta: ☐

8. Determine o módulo da aceleração da Terra à volta do Sol, sabendo que a distância média entre o Sol e a Terra é 1.50×10^{11} m e que a Terra demora 365.25 dias a completar uma volta em torno do Sol (admita uma órbita circular).

(A) 3.43 m/s^2 **(D)** 4.44×10^7 m/s^2
(B) 2.99×10^4 m/s^2 **(E)** 2.64×10^{-25} m/s^2
(C) 5.95×10^{-3} m/s^2

Resposta: ☐

9. A equação diferencial:
$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$
é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase $(x, \dot{x})$. Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

(A) (0, 0) **(C)** (3, 0) **(E)** (−3, 0)
(B) (1, 0) **(D)** (−1, 0)

Resposta: ☐

10. Um ciclista demora 22 s a percorrer 200 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.8 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(**A**) 49.1 rad/s (**C**) 65.4 rad/s (**E**) 40.9 rad/s
(**B**) 32.7 rad/s (**D**) 57.2 rad/s

Resposta: ☐

11. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1-2\,t)\,\hat{\imath} + 8\,t\,\hat{\jmath}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 5\,t\,\hat{\imath} + (1-9\,t)\,\hat{\jmath}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(**A**) $7\,\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath}$
(**B**) $-7\,\hat{\imath} + 17\,\hat{\jmath}$
(**C**) $3\,\hat{\imath} + 17\,\hat{\jmath}$
(**D**) $-3\,\hat{\imath} - 1\,\hat{\jmath}$
(**E**) $7\,\hat{\imath} - 1\,\hat{\jmath}$

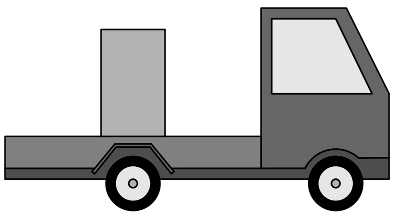
Resposta: ☐

12. Qual das seguintes afirmações, acerca da origem no espaço de fase num sistema dinâmico de duas espécies, é correta?

(**A**) É sempre ponto de equilíbrio instável.
(**B**) É sempre ponto de equilíbrio estável.
(**C**) É sempre ponto de equilíbrio, de qualquer tipo.
(**D**) Pode não ser ponto de equilíbrio.
(**E**) É sempre ponto de equilíbrio, do tipo sela.

Resposta: ☐

13. Um camião transporta uma caixa retangular homogénea, com 60 cm de largura na base e 90 cm de altura. Quando o camião acelera, numa estrada horizontal, existe suficiente atrito entre a superfície do camião e a caixa evitando que a caixa derrape sobre a superfície, mas a aceleração não pode ser maior do que um valor máximo, para evitar que a caixa rode. Determine esse valor máximo da aceleração do camião.



(**A**) 4.20 m/s^2 (**C**) 3.92 m/s^2 (**E**) 6.53 m/s^2
(**B**) 7.35 m/s^2 (**D**) 5.88 m/s^2

Resposta: ☐

14. Um projetil lançado verticalmente para cima atinge uma altura h máxima, que depende da velocidade inicial com que foi lançado, antes de voltar a cair. Se a velocidade for muito elevada, a altura pode atingir valores elevados, onde a aceleração da gravidade já não é a constante g mas é dada pela expressão:

$$\frac{g\,R^2}{(R+h)^2}$$

onde $R = 6.4\times 10^6$ m é o raio da Terra. Desprezando a resistência do ar, determine o valor mínimo que deverá ter a velocidade inicial, para o objeto atingir uma altura máxima infinita; ou seja, fugir ao campo gravítico da Terra.

(**A**) 2.2×10^3 m/s (**C**) 3.7×10^3 m/s (**E**) 100.8×10^3 m/s
(**B**) 11.2×10^3 m/s (**D**) 56.0×10^3 m/s

Resposta: ☐

15. Um bloco de massa 1 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 5$ m e altura $y = 3$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(**A**) 9.8 N (**C**) 10.08 N (**E**) 4.2 N
(**B**) 8.4 N (**D**) 8.17 N

Resposta: ☐

16. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ. As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \qquad U = k\,r^4$$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para $\ddot{r}$

(**A**) $r\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(**B**) $r\,\dot{\theta} + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(**C**) $r\,\ddot{\theta} + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(**D**) $r^2\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$
(**E**) $r^2\,\dot{\theta}^2 + \dfrac{4\,k\,r^3}{m}$

Resposta: ☐

17. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(**A**) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(**B**) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$
(**C**) $\dot{y} = -5\,x\,y + 2\,y$
(**D**) $\dot{y} = 6\,y - y^2$
(**E**) $\dot{y} = x + x\,y^2$

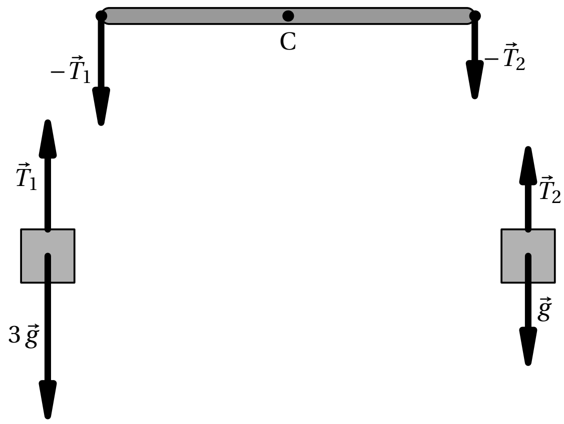
Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. Mostra-se a a resolução por dois métodos diferentes: mecânica vetorial e mecânica lagrangiana.

(a) *Mecânica vetorial.* É necessário separar o sistema em 3 corpos rígidos (blocos e barra), porque o movimento de cada um deles é diferente: a barra roda, sem se deslocar e os blocos deslocam-se sem rodar.

A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre de cada um dos três corpos. No caso da barra, por ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo, não há necessidade de indicar as forças que atuam no eixo.



A barra terá aceleração angular α no sentido contrário aos ponteiros do relógio. A aceleração do bloco do lado esquerdo será $a = \alpha(L/2)$, para baixo, e o bloco do lado direito terá a mesma aceleração a, mas para cima. Como tal, as equações de movimento dos 3 corpos são as seguintes:

$$\begin{aligned} 3\,g - T_1 &= 3\,a \\ T_2 - g &= a \\ T_1\left(\frac{L}{2}\right) - T_2\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{1}{12}\,m\,L^2\,\alpha \end{aligned}$$

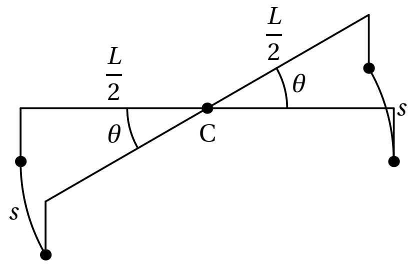
As duas primeiras equações permitem encontrar as tensões nos cabos, em função da aceleração:

$$T_1 = 3\,(g - a) \qquad T_2 = g + a$$

Na terceira equação, substitui-se $\alpha = 2\,a/L$ e, a seguir, as expressões encontradas para as tensões:

$$T_1 - T_2 = \frac{m\,a}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}} = 4.23\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(*b*) *Mecânica lagrangiana.* Considera-se o movimento do sistema completo. A barra rodará um ângulo θ, enquanto os blocos descreverão dois arcos de círculo, ambos com o mesmo comprimento $s = \theta\, L/2$, tal como mostra a figura seguinte.



Como tal, o sistema tem um único grau de liberdade: basta usar $\theta(t)$ ou $s(t)$ para descrever o movimento de todo o sistema. Escolhendo s, as duas variáveis de estado serão s e $v = \dot{s}$, e existirá uma única equação de Lagrange.

O movimento de cada um dos blocos é de translação, num círculo com raio $L/2$, com velocidade $v = \dot{s}$. O movimento da barra é rotação com velocidade angular $\omega = v/(L/2)$. Como tal, a energia cinética do sistema, em função da variável de estado v, é:

$$E_\text{c} = \frac{3\,v^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\,m\,L^2\right)\left(\frac{2\,v}{L}\right)^2 = \left(2 + \frac{m}{6}\right) v^2$$

A energia potencial, usando como posição de energia nula a posição horizontal da barra, é o peso do bloco da direita, vezes a altura que sobe quando a barra roda o ângulo $\theta = s/(L/2)$, menos o peso do bloco da esquerda, vezes a altura que desce quando a barra roda. Em função da variável de estado s, a energia potencial é:

$$U = g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) - 3\,g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) = -g\,L\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

A aceleração tangencial dos blocos, $a = \dot{v}$, obtém-se aplicando a equação de Lagrange para sistemas conservativos com um único grau de liberdade s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \left(4 + \frac{m}{3}\right) a - 2\,g\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}}\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

Substituindo a massa da barra e $s = 0$ (posição horizontal), obtém-se $a = 4.23\ \text{m/s}^2$.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} x\left(1 - y^2\right) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} x = 0, \vee, y = 1, \vee, y = -1 \\ y = -x \end{cases}$$

que conduzem a três pontos de equilíbrio no plano $x\,y$:

$$\text{P}_1 = (0,0) \qquad \text{P}_2 = (-1,1) \qquad \text{P}_3 = (1,-1)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, em ordem a x e a y, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1-y^2 & -2\,x\,y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a soma dos valores próprios é 2 e o seu produto 1, ou seja, os dois valores próprios são iguais a 1. Como tal, P_1 é nó impróprio repulsivo. Os vetores próprios obtêm-se resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Qualquer vetor no eixo dos y é vetor próprio.

Nos pontos P_2 e P_3, a matriz da aproximação linear é a mesma:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Há dois valores próprios, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Como tal, os pontos P_2 e P_3 são pontos de sela.

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 2$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

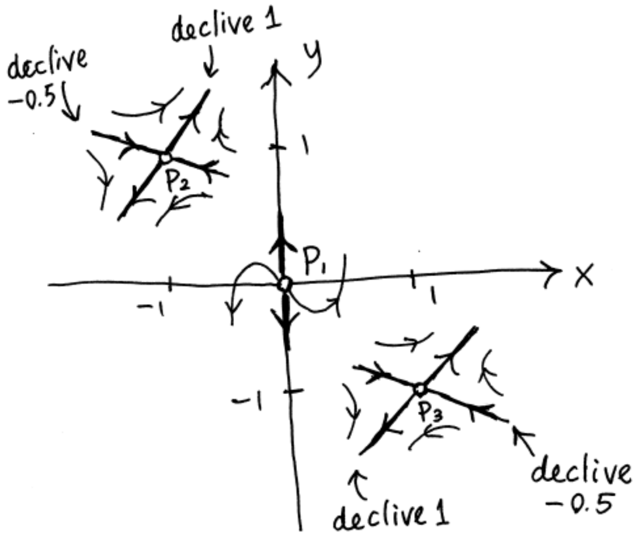
os vetores próprios estão na reta com declive +1, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{2}$$

os vetores próprios estão na reta com declive −0.5, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

A partir dos valores e vetores próprios obtidos, conclui-se que na vizinhança de P_1 há duas curvas de evolução retas que se saem do ponto, na direção do eixo dos y; as restantes curvas de evolução que saem do ponto são todas curvas. Nos pontos P_2 e P_3, há duas curvas de evolução que saem do ponto de equilíbrio, com declive igual a 1, e outras duas curvas de evolução retas, que terminam no ponto de equilíbrio, com declive -0.5. A figura seguinte mostra esses resultados:



Perguntas

3. C

4. D

5. D

6. B

7. C

8. C

9. C

10. B

11. B

12. C

13. E

14. B

15. B

16. A

17. C

2.1.3 Cotações

Problema 1

(*a*) Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 1 ____ 0.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 2 ____ 0.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento da barra ____ 0.8
- Indicar que as acelerações dos blocos têm o mesmo valor absoluto ____ 0.6
- Relação entre a aceleração dos blocos e a aceleração angular da barra ____ 0.6
- Resolução das 3 equações de movimento ____ 0.4

(*b*) Mecânica lagrangiana.

- Indicar que as velocidades dos blocos têm o mesmo valor absoluto ____ 0.4
- Relação entre a velocidade dos blocos e a velocidade angular da barra ____ 0.4
- Energia cinética do sistema, em função das variáveis de estado ____ 1.2
- Energia potencial do sistema, em função das variáveis de estado ____ 1.2
- Aplicação da equação de Lagrange ____ 0.4
- Resolução para obter o valor da aceleração ____ 0.4

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio ____ 0.4
- Matriz jacobiana ____ 0.4
- Matrizes das aproximações lineares ____ 0.4
- Valores / vetores próprios do ponto na origem ____ 0.6
- Valores / vetores próprios dos outros dois pontos ____ 0.6
- Classificação correta dos 3 pontos ____ 0.8
- Gráfico ____ 0.8

2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 1 de julho de 2019. Compareceram 65 estudantes e a nota média foi 8.9 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

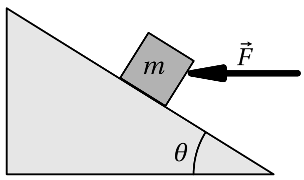
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2018/2019

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 1 de julho de 2019

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

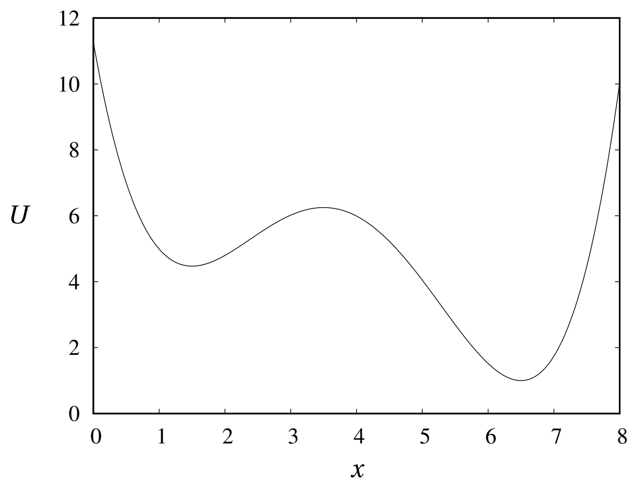
1. (4 valores) Um bloco de massa $m = 1.5$ kg encontra-se na superfície de um plano inclinado, que faz um ângulo $\theta = 28°$ com a horizontal. Entre o bloco e o plano inclinado o coeficiente de atrito estático é 0.3 e o coeficiente de atrito cinético é 0.2. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal, tal como mostra a figura. (*a*) Quando o módulo da força for $F = 10$ N, o bloco permanece em repouso; determine o valor da força de atrito entre o bloco e o plano. (*b*) Se a força aumenta para $F = 15$ N, o bloco acelera para cima do plano; determine o valor da aceleração.



2. (4 valores) A função hamiltoniana de um sistema conservativo é:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

onde $U(x)$ é a função representada no gráfico à direita. (*a*) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano xy. (*b*) Trace o retrato de fase aproximado, no plano xy, mostrando os pontos de equilíbrio e as curvas de evolução que considere mais importantes. (*c*) Se no instante $t = 0$ o estado do sistema for $(x, y) = (5, -1)$, explique como será a evolução do sistema em $t > 0$.



PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. O vetor posição dum ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $2\,t^4\,\hat{\imath} + (t^2 + 2)\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

(A) 88.8° **(B)** 42.3° **(C)** 16.9° **(D)** 55.0° **(E)** 67.6°

Resposta:

4. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}\left(\dot{s}^2 + 3\,s^2\right)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $9\,s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** 3 **(E)** 1

Resposta:

5. As equações de evolução dum sistema linear são:
$\dot{x} = x - 2\,y \qquad \dot{y} = 2\,x + y$
Como variam x e y em função do tempo?

(A) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

(B) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude constante.

(C) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.

(D) Oscilam com período π e amplitude crescente.

(E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.

Resposta:

6. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 2\,\hat{\imath} + 7\,t\,\hat{\jmath}$ (SI). Se a velocidade do objeto em $t = 0$ for $5\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ m/s, calcule a velocidade em $t = 7$ s.

(A) $12.0\,\hat{\imath} + 30.5\,\hat{\jmath}$ **(B)** $7.0\,\hat{\imath} + 85.8\,\hat{\jmath}$ **(C)** $12.0\,\hat{\imath} + 91.8\,\hat{\jmath}$ **(D)** $12.0\,\hat{\imath} + 85.8\,\hat{\jmath}$ **(E)** $19.0\,\hat{\imath} + 177.5\,\hat{\jmath}$

Resposta:

7. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 3\,r^2 + 2\,r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 0

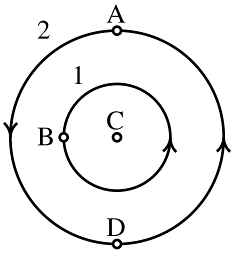
Resposta:

8. A matriz jacobiana dum sistema não linear, num ponto de equilíbrio P no plano de fase (x, y), encontra-se na variável J do Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz:
`[[[-1,-2], [1,1]], [[[1,-1]], [[1,1/3]]]]`
que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

(A) ponto de sela. **(B)** centro. **(C)** foco repulsivo. **(D)** nó atrativo. **(E)** foco atrativo.

Resposta:

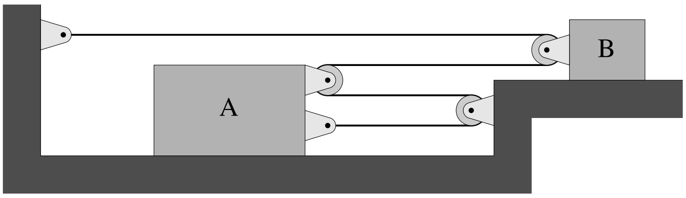
10. A figura mostra o retrato de fase dum sistema dinâmico com duas variáveis de estado e 4 pontos de equilíbrio: A, B, C e D. Que tipo de curva de evolução é a circunferência número 2?



(A) Isoclina.
(B) Nulclina.
(C) Órbita homoclínica.
(D) Ciclo.
(E) Órbita heteroclínica.

Resposta: ☐

11. O bloco B move-se para a direita com velocidade de valor constante 210 mm/s. Calcule o valor absoluto da velocidade do bloco A.



(A) 105 mm/s
(B) 70 mm/s
(C) 210 mm/s
(D) 140 mm/s
(E) 315 mm/s

Resposta: ☐

12. Quando um avião acelera desde o repouso, na pista de descolagem, a expressão da sua aceleração tangencial é $2.5 - 2.5 \times 10^{-5} v^2$ (em unidades SI), onde v é o valor da velocidade do avião. Para conseguir levantar voo, a velocidade mínima do avião no fim da pista deve ser de 250 km/h. Determine o comprimento mínimo, em metros, que deverá ter a pista de descolagem.

(A) 612
(B) 989
(C) 701
(D) 1251
(E) 820

Resposta: ☐

13. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema de duas espécies?

(A) $\dot{y} = y^3 - 3\,x \sin x$
(B) $\dot{y} = y^3 + 3\,x\,y \sin x$
(C) $\dot{y} = x\sqrt{y+1} - 5\,y\,x^2$
(D) $\dot{y} = x\sqrt{y-x} + x\,y^2$
(E) $\dot{y} = 2\,x\,y^2 - x \cos y$

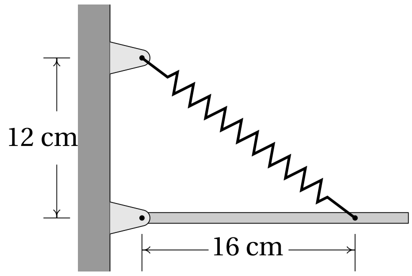
Resposta: ☐

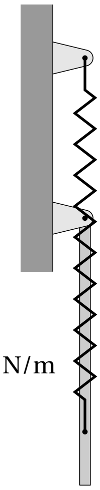
14. As equações de evolução dum sistema linear, são:
$\dot{x} = a\,x + y \qquad \dot{y} = x + a\,(x+y)$
onde a está no intervalo $a < -1$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

(A) nó atrativo
(B) foco atrativo
(C) nó repulsivo
(D) ponto de sela
(E) foco repulsivo

Resposta: ☐

15. A barra na figura é homogénea, com 20 cm de comprimento e massa igual a 50 gramas. Se na posição inicial, no lado esquerdo da figura, a barra for largada do repouso na posição horizontal, rodará descendo até a posição vertical, no lado direito da figura. Uso-se uma mola de 15 cm (quando não está nem comprida nem esticada) e com constante elástica que faz com que quando a barra desca fique novamente em repouso na posição vertical. Determine a constante elástica da mola.





(A) 2.72 N/m
(B) 6.81 N/m
(C) 4.08 N/m
(D) 5.44 N/m
(E) 8.17 N/m

Resposta: ☐

16. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogénea com 2 centímetros de raio e massa igual a 101 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia de uma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2\,m\,R^2/5$.

(A) 3.23×10^{-5} kg·m^2
(B) 8.08×10^{-6} kg·m^2
(C) 1.62×10^{-5} kg·m^2
(D) 2.89×10^{-5} kg·m^2
(E) 5.66×10^{-5} kg·m^2

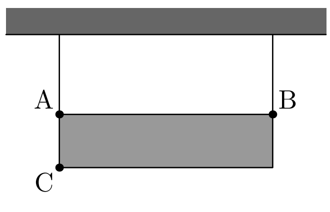
Resposta: ☐

17. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de 53 m/s, fazendo um ângulo de 25° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

(A) 183.0 m
(B) 219.6 m
(C) 316.3 m
(D) 152.5 m
(E) 263.6 m

Resposta: ☐

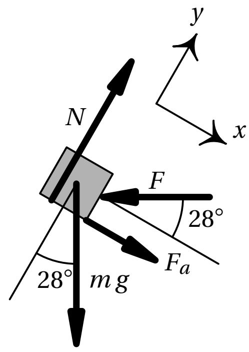
18. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 2.2 N, a tensão no fio ligado em B é 3.1 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.



(A) 8.4 cm
(B) 17.5 cm
(C) 12.2 cm
(D) 10.1 cm
(E) 14.6 cm

Resposta: ☐

2.2.2 Resolução



Problema 1. O gráfico à direita mostra o diagrama de corpo livre do bloco e uma forma possível de definir os eixos x e y. O sentido indicado na figura para a força de atrito, F_a, é o que terá na alínea *b*, quando for atrito cinético, oposto ao sentido do movimento do bloco. Na alínea *a*, em que o atrito é estático, poderá ter esse sentido ou o sentido oposto (nesse segundo caso, o valor obtido para F_a será negativo).
(a) Uma das condições de equilíbrio é que a componente x da força resultante seja nula, que traduz-se na seguinte equação:

$$F_a + m\,g \sin 28^\circ - F \cos 28^\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_a = 10 \cos 28^\circ - 14.7 \sin 28^\circ = 1.928\,\text{N}$$

O sinal positivo indica que a força de atrito sim é no sentido indicado na figura.
(b) A força de atrito, F_a, corresponde a atrito cinético e, como tal,

$$F_a = \mu_c\, N = 0.2\, N$$

A componente y da força resultante deverá ser nula, e a componente x deverá ser igual a menos a massa vezes a aceleração:

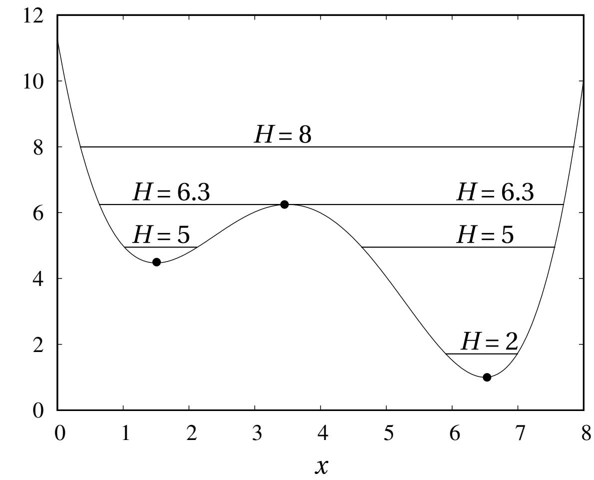
$$\begin{cases} N - 15 \sin 28^\circ - 14.7 \cos 28^\circ = 0 \\ 0.2\,N + 14.7 \sin 28^\circ - 15 \cos 28^\circ = -1.5\,a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} N = 20.02\,\text{N} \\ a = 1.559\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

Problema 2. As equações de evolução do sistema são obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

Ou, em vez de usarmos as equações de Hamilton, podemos considerar que o sistema é uma partícula de massa igual a 1, que se desloca no eixo dos x, sob a ação da energia potencial $U(x)$, com velocidade $y = \dot{x}$. A função hamiltoniana é a energia mecânica dessa partícula.

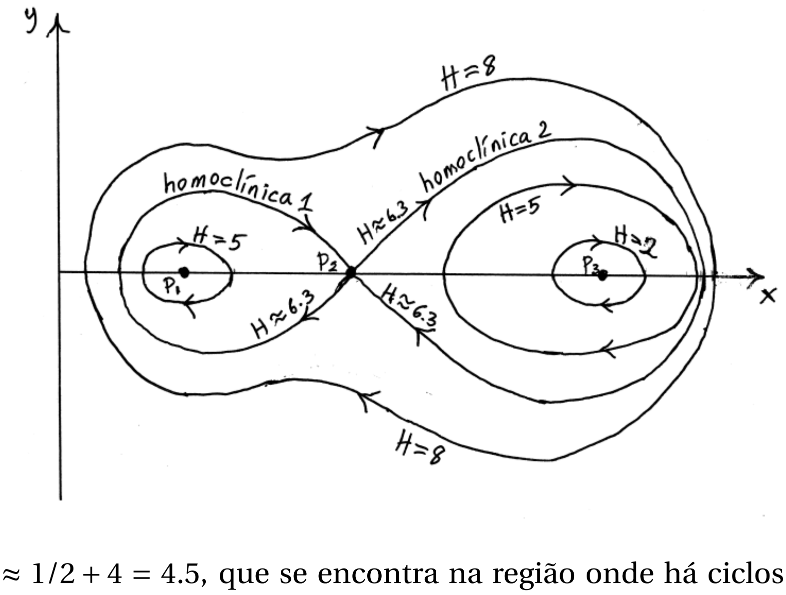
(a) Há três pontos de equilíbrio, onde a derivada de U é nula: dois mínimos locais em $x \approx 1.5$ e $x \approx 6.5$, e um máximo local em $x \approx 3.5$, indicados na figura ao lado com três círculos. A primeira equação de evolução implica que nos pontos de equilíbrio $y = 0$. As coordenadas (x,y) dos 3 pontos de equilíbrio são então:



$$\mathrm{P}_1 = (1.5, 0) \qquad \mathrm{P}_2 = (3.5, 0) \qquad \mathrm{P}_3 = (6.5, 0)$$

(b) As barras horizontais na figura mostram onde poderá estar o sistema para diferentes valores de H. Há 4 casos diferentes:
(i) H maior que o valor de H no ponto P_3 (igual a $U(6.5) \approx 1$, porque $y = 0$) e menor que o valor de H no ponto P_1 ($U(1.5) \approx 4.3$); optamos por usar $H = 2$ que, como mostra o gráfico, corresponde a um ciclo à volta de P_3. (ii) H maior que 4.3 e menor que o valor de H no ponto P_2 ($U(3.5) \approx 6.3$); optamos por usar $H = 5$, que conduz a dois ciclos diferentes, um à volta de P_1 e outro à volta de P_3. (iii) $H \approx 6.3$, que conduz a duas órbitas homoclínicas, uma à volta de P_1 e outra à volta de P_3. (iv) $H > 6.3$, que conduz a ciclos que contornam os 3 pontos de equilíbrio (mostra-se o caso $H = 8$).

O retrato de fase é o sumário desses resultados:



(c) $H(5, -1) \approx 1/2 + 4 = 4.5$, que se encontra na região onde há ciclos em torno do ponto P_3. O sistema oscila em torno desse ponto. O valor inicial negativo de y implica que x diminui e y aumenta, até um instante em que $x \approx 4.5$ e $y = 0$. A partir desse instante, x e y aumentam, até um instante em que $x = 6.5$ e y atinge o valor máximo $y = \sqrt{2(4.5-1)} \approx 2.6$; a seguir, x continua a aumentar mas y diminui, até um instante em que $x \approx 7.5$ e $y = 0$. Depois, x e y diminuem até $x = 6.5$, $y = -2.6$ (valor mínimo de y). A seguir, x continua a diminuir mas y aumenta, até voltar ao estado inicial do sistema: $x = 5$, $y = -1$. O mesmo ciclo repete-se indefinidamente.

Perguntas

3. B

4. D

5. D

6. C

7. E

8. D

9. E

10. D

11. B

12. B

13. B

14. B

15. E

16. C

17. B

2.2.3 Cotações

Problema 1

- Diagrama de corpo livre incluindo ângulos e eixos ________ 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (a) ________ 0.8
- Obtenção da força de atrito, indicando as unidades ________ 0.2
- Relação entre força de atrito cinético e reação normal (b) ________ 0.4
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (b) ________ 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças perpendiculares ao plano (b) 0.8
- Obtenção da aceleração, indicando as unidades ________ 0.2

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.8
- Retrato de fase mostrando os eixos x e y, os 3 pontos de equilíbrio e as curvas importantes (órbitas homoclínicas/heteroclínicas, ciclos, curvas abertas) com setas que indiquem o sentido em que o sistema evolui ________ 2.4
- Explicação da evolução do sistema para $t > 0$ na alínea c ________ 0.8

Bibliografia

Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. uma Abordagem Prática.* Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.

Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica.* Editora Mir: Moscovo, Rússia.

Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods.* Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.

Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México, DF, México: International Thomson Editores.

Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective.* México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* USA: Westview Press.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução.* São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.

French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics.* New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.

Galilei, G. (1638). *Dialogue Concernig Two New Sciences.* Itália: Publicado em: http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/. (Tradução de 1914, por H. Crew e A. de Salvio)

Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics.* Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.

Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.

Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach.* Cambridge University Press: Cambridge, UK.

Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology.* The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.

Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.

Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1.* New York, NY, USA: McGraw-Hill.

Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE.* Boston, MA, USA: Birkhaüser.

Maxima Development Team. (2019). *Maxima Manual* (5.43.0 ed.). Disponível em: http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.pdf

Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos.* São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics.* Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlad GmbH & Co.

Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)

Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macsyma ODE lab book.* Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.

Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA:

Addison-Wesley.

Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics.* Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis.* New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.

Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* Cambridge, MA, USA: Perseus Books.

Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics.* Sausalito, CA, USA: University Science Books.

Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.

Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima.* Porto, Portugal: Edição do autor.

Villate, J. E. (2019). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (5a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.