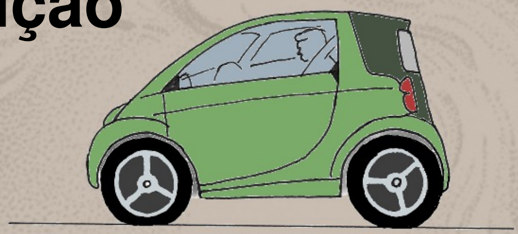
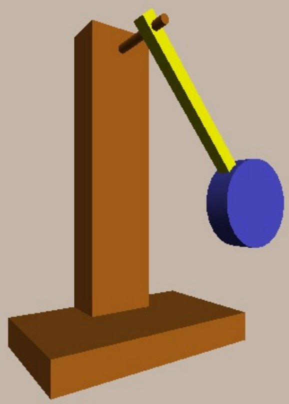
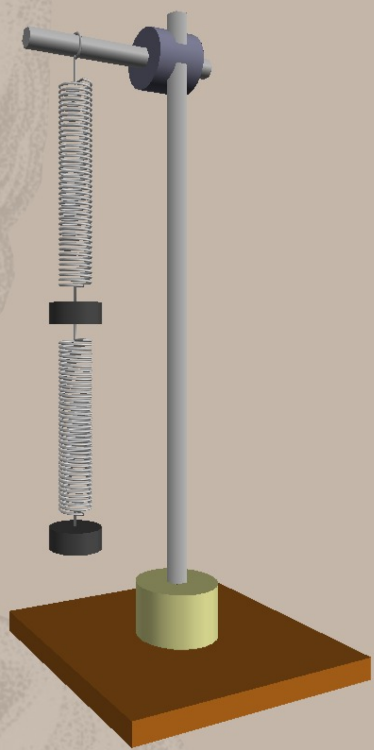
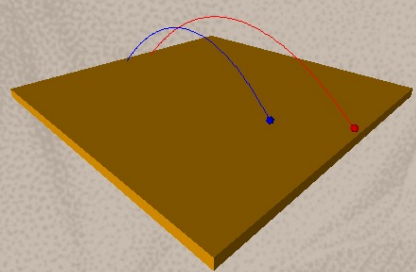
Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Segunda edição









Jaime E. Villate

Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

http://def.fe.up.pt

Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

E-mail: villate@fe.up.pt

Segunda edição
27 de fevereiro de 2014

Conteúdo

Prefácio

Este livro destina-se a alunos universitários do primeiro ano de ciências e engenharia. Espera-se que o aluno tenha alguns conhecimentos de álgebra linear e de cálculo infinitesimal e diferencial. Com o desenvolvimento dos computadores pessoais, o tipo de problemas que podem ser resolvidos numa disciplina introdutória de física aumentou significativamente. As técnicas de computação e simulação permitem ao aluno desenvolver uma visão geral de um problema de física, sem ter de aprender métodos analíticos complicados. As técnicas computacionais inicialmente desenvolvidas para resolver problemas de mecânica têm sido aplicadas com sucesso em domínios exteriores à física, dando origem à teoria geral dos sistemas dinâmicos.

O objetivo é transmitir ao leitor conhecimentos básicos de mecânica e dos métodos computacionais usados para resolver sistemas dinâmicos. É usado o Sistema de Computação Algébrica (CAS) *Maxima* (`http://maxima.sourceforge.net`) para facilitar a resolução dos problemas.

O tema central do livro é a mecânica, incluindo-se também alguns temas contemporâneos, como sistemas não lineares e sistemas caóticos. A abordagem adotada situa-se no âmbito da mecânica clássica, admitindo-se a existência de um espaço absoluto e de um tempo absoluto, independentes dos observadores.

O livro foi escrito como texto de apoio para a disciplina de Física 1 (EIC0010) do primeiro ano do Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação (MIEIC) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e é o primeiro de dois volumes. O segundo volume é sobre eletromagnetismo e circuitos. São feitas atualizações frequentes ao texto que podem ser obtidas neste sítio.

A primeira versão foi escrita em 2007, quando foi criada a disciplina EIC0010 no âmbito da reforma de Bolonha. A disciplina EIC0010 é semestral com treze semanas de aulas; na primeira semana são dadas duas aulas teóricas de uma hora e nas 12 semanas seguintes são dadas duas aulas teóricas de 1 hora e uma aula teórico-prática de duas horas. Cada um dos capítulos do livro é apresentado nas duas aulas teóricas de uma semana; na aula teórico-prática da semana seguinte os estudantes estudam livremente esse mesmo capítulo, respondem às perguntas de escolha múltipla e resolvem dois ou três dos problemas propostos no fim do capítulo. As aulas teóricas são dadas num auditório para 150 estudantes e as aulas teórico-práticas decorrem numa sala para 24 estudantes, com 12 computadores portáteis. Nas aulas teóricas da semana número 13 é feita uma revisão geral. Nas aulas teórico práticas os estudantes podem aceder à Web, consultar a versão digital do livro e usar o software Maxima.

Os seis primeiros capítulos seguem o programa tradicional das disciplinas de introdução à mecânica para estudantes de ciências e engenharia, sem incluir sistemas de vários corpos nem mecânica dos fluidos. O capítulo 7 é uma introdução aos sistemas dinâmicos. O capítulo 8 aborda a mecânica lagrangiana. Os capítulos 9, 10 11 e 12 são sobre sistemas dinâmicos. Nesta edição de 2014 foram introduzidas as equações de Lagrange, o número de Reynolds e a função hamiltoniana. A ordem de alguns tópicos foi alterada, incluiram-se mais problemas e exemplos resolvidos e houve algumas alterações nos símbolos usados; s e v já nã representam distância percorrida e módulo da velocidade, como na edição anterior, mas agora usam-se para a posição na trajetória e a componenente da velocidade ao longo da trajetória (pode ser positiva ou negativa).

Agradeço ao professor João Rui Guedes de Carvalho a revisão cuidadosa que fez do manuscrito e as suas sugestões e troca de opiniões sobre o tema. Agradeço também aos alunos o entusiasmo e interesse que têm sido fonte de inspiração para escrever este livro e a sua valiosa ajuda na correção de erros e gralhas. São muitos alunos para listar os seus nomes aqui. Finalmente devo agradecer também aos colegas que têm partilhado comigo a tarefa de lecionar as aulas teórico-práticas desta disciplina ao longo dos últimos anos, Maria Helena Braga, Francisco Salzedas, Helder Silva e João Carvalho, quem para além da sua formação em física partilhou comigo a sua experiência como atleta de competição, elucidando-me em alguns aspetos da física do desporto.

Jaime E. Villate
E-mail: `villate@fe.up.pt`
Porto, fevereiro de 2014

Lista de símbolos e notações

A, B ...	pontos no espaço, curvas, superfícies e sólidos
A, B ... a, b ...	unidades
$A, B \ldots a, b \ldots$	variáveis; a também é o valor (positivo ou negativo) do vetor $\vec{a}$
$\vec{A}, \vec{B} \ldots \vec{a}, \vec{b} \ldots$	vetores
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	produto escalar entre vetores
$\vec{a} \times \vec{b}$	produto vetorial entre vetores
$\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}$	derivada da variável a em ordem a x
$\dot{a}, \ddot{a} \ldots$	derivadas da variável a em ordem ao tempo
$\bar{a}$	valor médio da variável a
a	valor da aceleração
$\vec{a}$	vetor aceleração
a_n	aceleração normal (centrípeta)
a_t	aceleração segundo a trajetória (tangencial)
a_x, a_y, a_z	componentes cartesianas da aceleração
b	braço de uma força, em relação a um ponto
C_D	coeficiente aerodinâmico
cm	centímetro ou, como subíndice, centro de massa
e	número de Euler (base dos logaritmos naturais)
$\vec{e}_a$	versor (vetor unitário) na direção do vetor $\vec{a}$
E_c	energia cinética
E_m	energia mecânica
$\vec{e}_\text{n}, \vec{e}_\text{t}$	versores normal e tangencial
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	versores cartesianos segundo os eixos x, y e z
$\vec{F}$	força
$\vec{F}_\text{c}, \vec{F}_\text{e}$	forças de atrito cinético e estático
$\vec{F}_\text{e}$	força elástica
F_n, F_t	componentes normal e tangencial da força
$\vec{F}_\text{r}$	força de resistência num fluido
$\vec{g}$	aceleração da gravidade
H	função hamiltoniana
i	número imaginário $\sqrt{-1}$
$\vec{I}$	impulso

I_z, I_{cm}	momentos de inércia (eixo z ou eixo no centro de massa)
J	matriz jacobiana
J	joule (unidade SI de trabalho e energia)
k	constante elástica
kg	quilograma (unidade SI de massa)
L	momento angular
m	massa
m	metro (unidade SI de comprimento)
$\vec{M}$	momento de um binário
$\vec{M}_{\text{O}}$	momento de uma força em relação a um ponto O
N	newton (unidade SI de força)
N_{R}	número de Reynolds
$\vec{p}$	quantidade de movimento
$\vec{P}$	peso
$\vec{r}$	vetor posição
r_{g}	raio de giração
R	raio de curvatura de uma trajetória
R, θ, z	coordenadas cilíndricas
R_{n}	reação normal
s	posição na trajetória; elongação de uma mola
s	segundo (unidade SI de tempo)
T	período, no movimento circular uniforme ou no movimento oscilatório
$\vec{u}$	velocidade de fase
U	energia potencial
U_{e}	energia potencial elástica
U_{g}	energia potencial gravítica
V	energia potencial por unidade de massa
v	valor da velocidade
$\vec{v}$	vetor velocidade
v_x, v_y, v_z	componentes cartesianas da velocidade
W	trabalho
x, y, z	coordenadas cartesianas
$\vec{\alpha}$	aceleração angular
Δa	aumento da variável a durante um intervalo de tempo
$\Delta \vec{r}$	vetor deslocamento
Δs	deslocamento (ao longo da trajetória)
η	coeficiente de viscosidade
θ	ângulo de rotação dos versores normal e tangencial
λ	valor próprio de uma matriz ou multiplicador de Lagrange
$\mu_{\text{e}}, \mu_{\text{c}}$	coeficientes de atrito estático e cinético
π	valor em radianos de um ângulo de 180°
ρ	massa volúmica
$\vec{\omega}$	velocidade angular
Ω	frequência angular
$^\circ$	grau (unidade de ângulo)

1. Cinemática

A **cinemática** é a análise do movimento sem consideração das suas causas. No caso das corredoras na fotografia, o movimento dos braços e pernas é oscilante, enquanto que o movimento da cabeça é mais aproximadamente uniforme e, por isso, mais fácil de descrever; basta contabilizar o deslocamento horizontal da cabeça, em função do tempo. Para descrever o movimento das pernas, para além de considerar o deslocamento horizontal, é necessário considerar a variação de algum ângulo em função do tempo.

1.1. Movimento dos corpos rígidos

Um objeto encontra-se em movimento se a sua **posição** for diferente em diferentes instantes; se a posição permanece constante, o objeto está em repouso. Para medir a posição do objeto, é necessário usar um **referencial**; nomeadamente, outros objetos usados como referencia. Se a posição do corpo em estudo varia em relação ao referencial, o corpo está em movimento em relação a esse referencial. Assim, o movimento é um conceito relativo, já que um objeto pode estar em repouso em relação a um dado referencial, mas em movimento em relação a um outro referencial.

O movimento mais simples de um corpo rígido, de translação sem rotação, é quando todos os pontos do corpo seguem trajetórias idênticas (ver figura 1.1). Assim sendo, basta estudar o movimento de um único ponto para conhecer o movimento do corpo rígido.

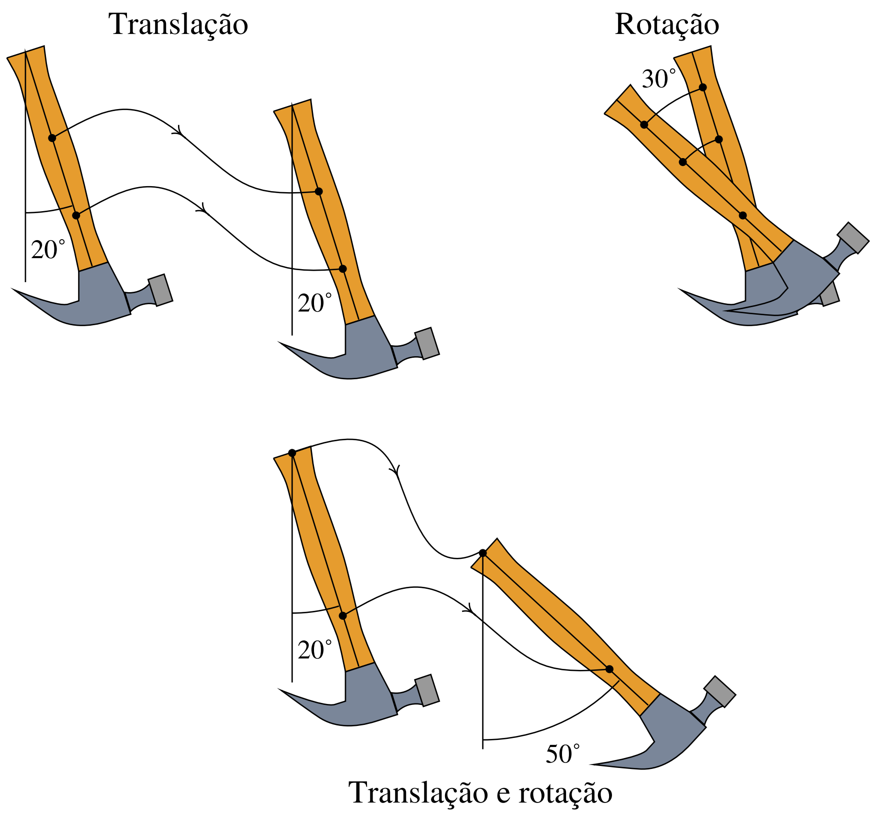


Figura 1.1.: Movimentos de translação, rotação em torno de um eixo e sobreposição dos dois.

No movimento de rotação em torno de um eixo, todos os pontos num eixo permanecem em repouso e os outros pontos deslocam-se. Na segunda parte na figura 1.1, o martelo rodou em torno de um eixo perpendicular à página. Nesse tipo de movimento as trajetórias de pontos diferentes já não são idênticas mas todas elas são arcos de círculo, com o mesmo ângulo, que só diferem no valor do raio. Basta saber como varia o ângulo de rotação para descrever o movimento de qualquer ponto no corpo.

Um movimento mais complicado é a sobreposição de translação e rotação em torno de um eixo (terceira parte na figura 1.1). Nesse caso, as trajetórias do diferentes pontos do corpo são curvas diferentes. No entanto, esse movimento mais complicado pode ser descrito apenas com a trajetória de um ponto qualquer do corpo e a variação do ângulo de rotação de uma reta qualquer no corpo; com efeito, o ângulo de rotação é o mesmo para qualquer segmento no corpo rígido e após fixar a posição do ponto num instante e o ângulo de rotação, consegue dizer onde estarão todos os outros pontos do corpo nesse instante.

Existe também outro tipo de rotação mais geral, rotação à volta de um ponto, em que um único ponto permanece em repouso. Nesse caso as trajetórias de cada ponto é uma curva na superfície de uma esfera com centro no ponto em repouso. A forma mais conveniente de descrever esse tipo de movimento consiste em determinar a variação de três ângulos. O caso mais geral do movimento de um corpo rígido consiste na sobreposição de translação e rotação à volta de um ponto. Nesse caso será necessário conhecer a trajetória de um ponto do corpo e a variação de três ângulos.

1.2. Movimento e graus de liberdade

Os **graus de liberdade** de um sistema são as variáveis necessárias para determinar a sua posição exata. Por exemplo, para determinar a posição de uma mosca numa sala "retangular", podem medir-se as suas distâncias até o chão e duas paredes perpendiculares da sala. Teremos um sistema de três coordenadas perpendiculares (coordenadas cartesianas ou retangulares), que se costumam designar pelas letras x, y e z (figura 1.2).

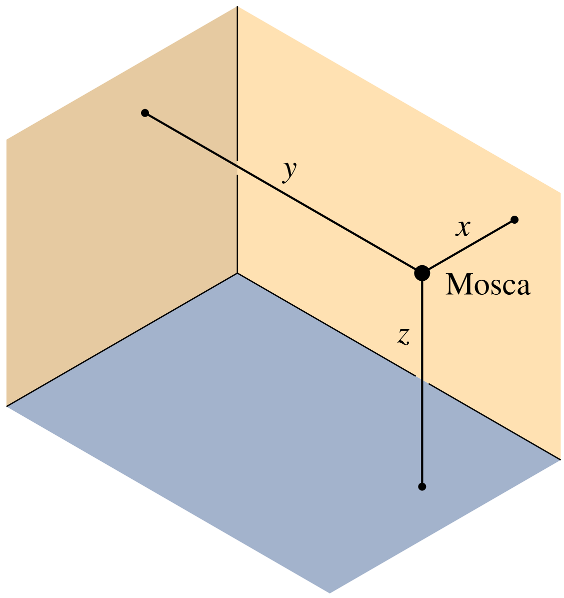


Figura 1.2.: Coordenadas cartesianas de uma mosca numa sala retangular.

Ou seja, o movimento de um ponto no espaço está associado a 3 graus de liberdade. A trajetória do ponto é uma curva no espaço, que pode ser descrita indicando as expressões para as 3 coordenadas cartesianas x, y e z em função do tempo. Como o movimento mais geral de um corpo rígido é a sobreposição do movimento de um ponto e variação de três ângulos, esse movimento tem 6 graus de liberdade: 3 coordenadas que descrevem o movimento do ponto, mais os 3 ângulos que descrevem a rotação. Outros movimentos mais simples possuem menos graus de liberdade; a rotação em torno de um eixo fixo tem apenas um grau de liberdade, a translação sem rotação 3 graus de liberdade e a translação com rotação em torno de um eixo fixo está associada a 4 graus de liberdade.

Neste capítulo estuda-se apenas o movimento de um ponto. Esse estudo será suficiente para descrever a translação dos corpos rígidos e servirá de base para estudar movimentos mais complexos.

Quando um ponto está limitado a seguir uma trajetória pré determinada, o movimento desse ponto têm um único grau de liberdade. Por exemplo, no movimento de cada uma das rodas de um carrinho nos carris de uma montanha russa, enquanto o carrinho siga os carris sem perder o contacto com eles, o movimento do centro da roda segue uma curva determinada. Se a posição do ponto num instante inicial é conhecida, para determinar a posição em qualquer outro instante basta saber o deslocamento ao longo dos carris, desde o instante inicial até esse instante.

No movimento de translação de um automóvel numa autoestrada poderá suficiente um único grau de liberdade (figura 1.3). Se o automóvel sofrer uma avaria e o condutor tiver que telefonar para pedir um reboque, basta dizer em que quilómetro da autoestrada se encontra para que o condutor do camião de reboque saiba para onde se dirigir. Assim, o movimento dos automóveis na autoestrada é caraterizado por um único grau de liberdade, o deslocamento ao longo da estrada.

Figura 1.3.: O movimento de translação de um automóvel numa autoestrada pode ser considerado um movimento com apenas um grau de liberdade.

De referir que o deslocamento na estrada não é medido em linha reta, mas ao longo de uma curva no espaço; no entanto, como a forma detalhada dessa curva já está estabelecida, basta uma variável para descrever a posição em cada instante. Em outros casos poderá ser necessário descrever a variação de outros graus de liberdade, por exemplo, a distância à berma da estrada. Se o automóvel fosse perfeitamente rígido e sempre em contacto com a estrada, a descrição completa do movimento seria feita incluindo também um ângulo. Na prática há sempre muitos mais graus de liberdade porque não existem corpos perfeitamente rígidos.

Se um ponto está limitado a deslocar-se sobre uma superfície, basta usar duas coordenadas para determinar a sua posição e o seu movimento tem dois graus de liberdade.

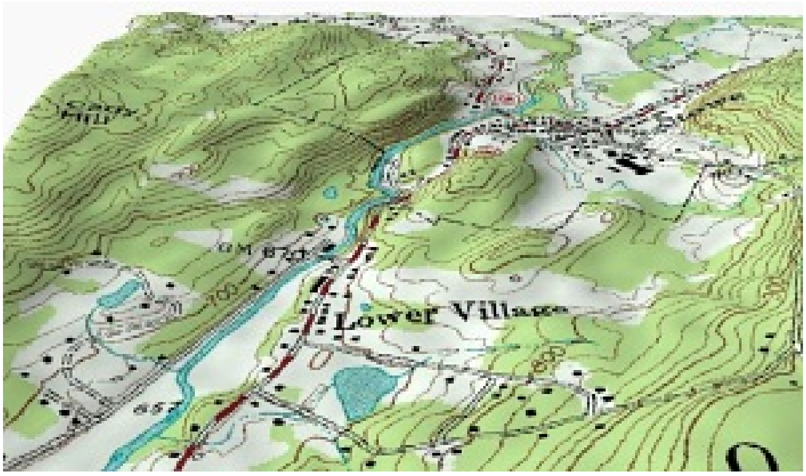


Figura 1.4.: A translação na superfície de um terreno é um movimento com dois graus de liberdade.

Um biólogo a seguir o movimento de uma raposa num território terá apenas de medir a sua longitude e latitude, por exemplo, com um dispositivo de GPS, para indicar o ponto onde se encontra em cada instante. Não são necessárias 3 variáveis, mas apenas duas, se o mapa topográfico da região for conhecido, permitindo localizar um ponto apenas com a sua longitude e latitude; uma terceira variável, a altura, tem um valor pré determinado de acordo com a topografia do terreno, como no exemplo da figura 1.4. Realmente há um terceiro grau de liberdade, a altura sobre a superfície do terreno, mas como essa altura terá variações insignificantes comparada com as variações da latitude e longitude, poderá não ter relevância.

Consequentemente, o movimento da raposa é um movimento com dois graus de liberdade, porque bastam duas coordenadas para determinar a posição. A latitude e a longitude na superfície do terreno não são realmente distâncias mas sim ângulos com vértice no centro da Terra, mas continuam a ser dois graus de liberdade que podem ter diferentes valores em diferentes instantes.

Regressando ao exemplo inicial do voo da mosca, que foi considerada como um único ponto em movimento com 3 coordenadas x, y e z, a mosca também pode mudar a sua orientação. Para definir a orientação da reta segundo o corpo da mosca pode-se usar 2 ângulos e necessário um terceiro ângulo para indicar a rotação da mosca em relação a essa reta; ao todo são 6 graus de liberdade. Mas a mosca pode também esticar ou dobrar o corpo e abrir ou fechar as asas, por exemplo, pelo que, do ponto de vista físico, tem muitos mais graus de liberdade. Se a mosca for modelada com 3 corpos rígidos: as duas asas e o bloco constituído por cabeça, tórax e abdómen, para descrever o movimento do primeiro corpo rígido — cabeça, tórax e abdómen — são precisos os seis graus de liberdade já descritos. Cada asa acrescenta outros 3 graus de liberdade — os ângulos da rotação à volta de um ponto fixo onde a asa está ligada ao tórax — tendo no total 12 graus de liberdade.

1.3. Velocidade

Neste capítulo considera-se apenas o movimento com um grau de liberdade, no qual a trajetória é uma curva fixa. Para determinar a posição na trajetória escolhe-se uma origem (um ponto qualquer da trajetória) e arbitra-se sinal positivo para os pontos a um dos lados da origem e negativo para os pontos no outro lado. A posição de cada ponto na trajetória, representada pela variável s, é o comprimento de arco da trajetória, desde o ponto até à origem, com sinal positivo ou negativo segundo o lado onde estiver o ponto.

O **deslocamento** ao longo da trajetória, durante um intervalo de tempo, é a diferença entre as posições no instante final, s_f, e inicial, s_i. Define-se a **velocidade média**, num intervalo de tempo entre t_i e t_j, igual ao deslocamento dividido pelo intervalo de tempo:

$$\bar{v}_{ij} = \frac{s_j - s_i}{t_j - t_i} \tag{1.1}$$

onde $t_j > t_i$. A velocidade média pode ser positiva ou negativa; se o deslocamento é no mesmo sentido que vai do lado negativo para o positivo, a velocidade é positiva e se for no sentido inverso é negativa. O valor absoluto de v é a **rapidez** com que se desloca o ponto. As unidades da velocidade são distância sobre tempo: por exemplo, metros por segundo, m/s, quilómetros por hora, km/h, etc.

Exemplo 1.1

Um condutor que se desloca sempre no mesmo sentido de uma estrada registou a distância total por si percorrida durante vários instantes, obtendo os valores na seguinte tabela:

t (h)	0	0.5	1.0	1.5	2.0
distância (km)	0	60	90	100	140

Calcule a velocidade média em cada intervalo de meia hora e represente os gráficos da posição na trajetória e da velocidade média.

Resolução. Como não existe inversão do sentido do deslocamento, as distâncias na tabela correspondem também às posições em relação ao ponto inicial. Sendo t_1, t_2, ..., t_5 os 5 instantes indicados na tabela, as velocidades médias nos vários intervalos são:

$$\bar{v}_{12} = \frac{60-0}{0.5-0} = \frac{60}{0.5} = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$\bar{v}_{23} = \frac{90-60}{1-0.5} = \frac{30}{0.5} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$\bar{v}_{34} = \frac{10}{0.5} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$\bar{v}_{45} = \frac{40}{0.5} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Nos dois últimos intervalos escreveu-se diretamente $\bar{v} = \Delta s/\Delta t$, onde Δ representa o aumento da respetiva variável.

Para traçar o gráfico da posição em função do tempo pode utilizar-se o programa *Maxima* (consulte o apêndice A). Convém primeiro armazenar os valores de tempo e posição numa lista e a seguir utilizar o comando `plot2d`:

```
(%i1) s_t: [[0,0], [0.5,60], [1,90], [1.5,100], [2,140]]$
(%i2) plot2d([discrete,s_t],[style,linespoints],
          [xlabel,"t (h)"],[ylabel,"s (km)"])$
```

O gráfico é apresentado no lado esquerdo da figura 1.5.

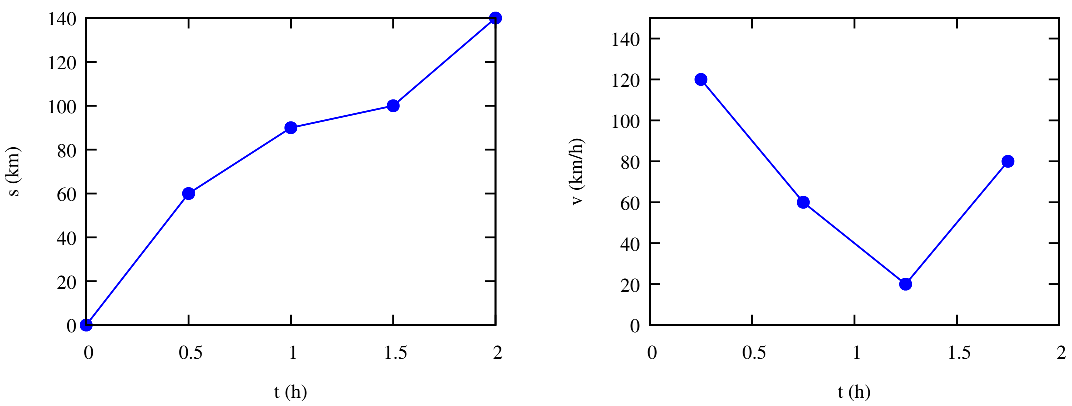


Figura 1.5.: Gráfico da posição na trajetória, s (esquerda) e da velocidade média, $\bar{v}$ (direita), em alguns intervalos de tempo.

Para traçar o gráfico da velocidade média em função do tempo há que decidir a que instante atribuir cada velocidade média. Deverá ser colocada no início ou no fim do intervalo? Pode representar-se cada velocidade média no ponto médio do intervalo correspondente, como mostra a figura 1.5.

```
(%i3) v_t: [[0.25,120], [0.75,60], [1.25,20], [1.75,80]]$
```

```
(%i4) plot2d([discrete,v_t],[x,0,2],[y,0,150],[xlabel,"t (h)"],
        [ylabel,"v (km/h)"],[style,linespoints])$
```

O valor da velocidade média num intervalo não dá informação precisa sobre o movimento nesse intervalo. Por exemplo, no caso anterior o menor valor da velocidade média, 20 km/h, foi no intervalo entre $t = 1$ e $t = 1.5$. Isso não implica que durante essa meia hora o condutor tenha andado sempre mais devagar. Poderá ter avançado rapidamente até um ponto onde parou por algum tempo, antes de continuar o percurso.

Para determinar com maior precisão o tipo de movimento, é necessário conhecer o deslocamento Δs em cada subintervalo de tempo Δt do intervalo maior. A informação mais precisa será obtida no limite quando Δt se aproximar de zero.

Para definir a **velocidade** num instante t, calcula-se a velocidade média no intervalo entre t e um instante posterior $t + \Delta t$, e considera-se o limite quando Δt se aproxima de zero:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Este limite define a **derivada** da posição na trajetória s em ordem a t, que se representa por

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \tag{1.3}$$

Uma notação alternativa para a derivada em ordem ao tempo é $v = \dot{s}$, em que o ponto indica derivação em ordem a t.

Num automóvel, o valor absoluto da velocidade instante é dado com boa aproximação pelo velocímetro. O valor dado pelo velocímetro tem algum erro associado com o facto de que o instrumento tem um tempo de resposta mínimo $t_{\text{mín}}$. Num velocímetro de boa qualidade, com tempo de resposta muito baixo, ou em situações em que a velocidade não tem mudanças muito bruscas, admite-se que o velocímetro indica a velocidade instantânea exata.

1.4. Aceleração

A aceleração define-se como o aumento da velocidade por unidade de tempo. Pode-se começar por definir um valor médio da aceleração num intervalo de tempo, como no caso da velocidade; a aceleração média $\bar{a}_{ij}$, num intervalo de tempo $\Delta t = t_j - t_i$, é definida por:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{v_j - v_i}{t_j - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.4}$$

A aceleração tem unidades de distância sobre tempo ao quadrado. Por exemplo, metros por segundo ao quadrado, m/s^2.

A **aceleração segundo a trajetória**, num instante t, é a aceleração média num intervalo de tempo infinitesimal a seguir a esse instante.

$$a_\text{t}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.5}$$

Usando a notação em que um ponto sobre a variável representa derivação em ordem ao tempo:

$$\boxed{a_\text{t} = \dot{v} = \ddot{s}} \tag{1.6}$$

em que os dois pontos sobre a variável indicam a segunda derivada dessa variável, em ordem ao tempo.

Se o valor da aceleração segundo a trajetória é negativo, a velocidade está a diminuir: está a abrandar se o deslocamento é no sentido positivo ou está a andar mais depressa se o deslocamento é no sentido negativo. Aceleração positiva segundo a trajetória indica que o ponto está a andar mais depressa, se o seu deslocamento for no sentido negativo, ou mas devagar no caso contrário. Aceleração nula segundo a trajetória implica velocidade constante.

O uso do termo "aceleração segundo a trajetória", e não apenas aceleração, é porque como se explica no capítulo 3, a aceleração tem outra componente perpendicular à trajetória, que não está relacionada com a variação da velocidade mas sim com a curvatura da trajetória. No caso da velocidade, também se mostra nesse capítulo que segue sempre a direção da trajetória e, por isso, não é necessário dizer que a velocidade é segundo a trajetória.

Exemplo 1.2

Um barco encontra-se inicialmente parado num canal; no instante $t = 0$ liga-se o motor durante 5 minutos e a seguir deliga-se, deixando que o barco abrande até travar pela resistência da água. Em unidades SI, a expressão da velocidade em função do tempo t é

$$v = \begin{cases} 12\left(1 - \text{e}^{-0.06t}\right), & 0 \le t \le 300 \\ 12\left(1 - \text{e}^{-18}\right)\text{e}^{-0.06(t-300)}, & t \ge 300 \end{cases}$$

Encontre as expressões da aceleração segundo a trajetória e da posição na trajetória, em função do tempo. Represente os gráficos da velocidade, aceleração e posição em função do tempo. Calcule as distâncias percorridas enquanto o motor esteve ligado e enquanto esteve desligado até o barco parar.

Resolução. Antes de começar, observe que a expressão dada para a velocidade é contínua, como deveria ser, já que a velocidade não pode mudar bruscamente em nenhum instante. A aceleração segundo a trajetória calcula-se derivando a expressão da velocidade. Para fazer os cálculos usando o Maxima, pode começar-se por introduzir as duas expressões para a velocidade em duas variáveis diferentes

```
(%i5)  v1: 12*(1-exp(-0.06*t))$
```

```
(%i6)  v2: 12*(1-exp(-18))*exp(-0.06*(t-300))$
```

A derivação é feita usando o comando `diff`

```
(%i7)  a1: diff (v1, t);
                                           - 0.06 t
(%o7)                           0.72 %e

(%i8)  a2: diff (v2, t);
                                     - 18     - 0.06 (t - 300)
(%o8)            - 0.72 (1 - %e     ) %e
```

Assim sendo, a expressão para a aceleração segundo a trajetória é

$$a_t = \begin{cases} 0.72\,e^{-0.06t}, & 0 \le t < 300 \\ -0.72\left(1 - e^{-18}\right) e^{-0.06(t-300)}, & t \ge 300 \end{cases}$$

Observe que a aceleração não tem de ser contínua; neste caso existe uma descontinuidade em $t = 300$ s, em que a aceleração passa de um valor positivo para o valor -0.72 m/s^2, devido a que o motor foi desligado subitamente nesse instante. Para obter a expressão da posição, integra-se a expressão para a velocidade desde o instante inicial

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_0^t 12\left(1 - e^{-0.06t}\right)\mathrm{d}t, & 0 \le t \le 300 \\ \int_0^{300} 12\left(1 - e^{-0.06t}\right)\mathrm{d}t + \int_{300}^t 12\left(1 - e^{-18}\right) e^{-0.06(t-300)}\,\mathrm{d}t, & t > 300 \end{cases}$$

No Maxima, esses dois integrais calculam-se assim

```
(%i9) s1: integrate (v1,t,0,t);

                            3 t         3 t
                          - ---         ---
                            50          50
                        %e        (3 t %e     + 50)    50
(%o9)               12 (------------------------- - --)
                                    3                3
(%i10) s2: float ((integrate (v1,t,0,300))) + integrate (v2,t,300,t);

                                                3 t
                                          18 - ---
                                                50
                        - 18    50    50 %e
(%o10) 12 (1 - %e     ) (-- - -------------) + 3400.000003045996
                                3          3
```

Ou seja, a expressão para a posição (arbitrando a origem no ponto inicial) é:

$$s = \begin{cases} 4\left(3t + 50\,\mathrm{e}^{-0.06t} - 50\right), & 0 \le t \le 300 \\ 3400 + 200\left(1 - \mathrm{e}^{-18}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{(18-0.06t)}\right), & t > 300 \end{cases}$$

Para traçar os gráficos, apresentados na figura 1.6, usam-se os seguintes comandos:

```
(%i11) plot2d(if t<300 then v1 else v2,[t,0,400],[ylabel,"v"],
         [y,0,14])$
(%i12) plot2d(if t<300 then a1 else a2,[t,0,400],[ylabel,"a"])$
(%i13) plot2d(if t<300 then s1 else s2,[t,0,400],[ylabel,"s"])$
```

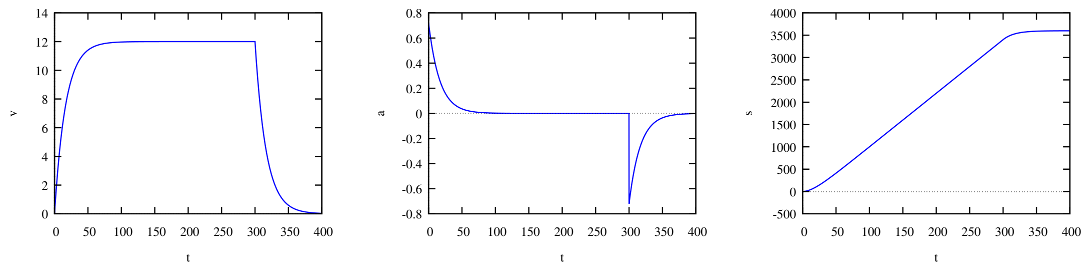


Figura 1.6.: Gráficos da velocidade, aceleração segundo a trajetória e distância percorrida no exemplo 1.2 (unidades SI).

Os gráficos 1.6 fornecem muita informação útil que é menos evidente nas expressões algébricas. O gráfico da velocidade mostra que o barco atinge rapidamente, no primeiro minuto, uma velocidade máxima de 12 m/s e permanece com velocidade quase constante até o instante em que é desligado o motor; a partir desse instante, a velocidade diminui rapidamente e em $t = 360$ s (6 minutos) já é praticamente nula. A expressão exponencial da velocidade implica que, em teoria, nunca chega a ser completamente nula. Na prática, essa expressão da velocidade não pode ser válida quando o valor obtido for muito pequeno; por exemplo, em $t = 400$ s a velocidade obtida com essa expressão é

```
(%i14) float (subst (t=400, v2));
(%o14)                    .02974502566698016
```

quase 3 centímetros por segundo. Existem outros fenómenos como correntes na água ventos e ondas na superfície da água, que produzem variações da velocidade maiores do que esse valor. A expressão dada para a velocidade é o resultado de um modelo matemático, que só pode ser válido quando os valores obtidos ultrapassem os efeitos de outras flutuações que não são tidas em conta no modelo.

No gráfico da aceleração, a descontinuidade em $t = 300$ s aparece como uma risca contínua, devido a que o comando `plot2d` do Maxima não deteta a descontinuidade nesse ponto, mas considera as duas partes do gráfico como uma única função contínua. O gráfico da distância percorrida mostra um aumento linear em quase todo o intervalo dos primeiros 5 minutos e a paragem rápida após esses primeiros minutos. A distância percorrida enquanto o motor esteve ligado é o deslocamento desde $t = 0$ até $t = 300$; como arbitrou-se $s(0) = 0$, essa distância é igual a $s(300)$, que já foi calculado em (`%i10`), e é aproximadamente 3.4 km

$$s(300) = 4\left(850 + 50\,\mathrm{e}^{-18}\right) \approx 3400$$

Segundo o modelo teórico, o barco demorava um tempo infinito até parar; na prática, demorará só um pouco mais de 6 minutos, como já foi dito. Como tal, a distância percorrida enquanto o motor esteve desligado é $s(\infty) - s(300)$. O valor $s(\infty)$ é o limite de $s(t)$ quando t é infinito. No Maxima, o limite calcula-se assim:

```
(%i15) float (limit (s2, t, inf));
(%o15)                         3600.0
```

Conclui-se então que o barco percorre 200 m desde o instante em que o motor é desligado até parar.

1.5. Equações cinemáticas

As equações diferenciais (1.3) e (1.6) obtidas nas duas secções anteriores são as **equações cinemáticas**, que relacionam as 3 variáveis cinemáticas s, v, a_t e o tempo t. Se for conhecida uma expressão matemática para uma das variáveis cinemáticas em função do tempo, as expressões para as outras duas variáveis podem ser obtidas a partir das equações cinemáticas, tal como no exemplo 1.2.

Nos casos em que é conhecida uma expressão para a velocidade em função da distância percorrida s, a derivada da velocidade em ordem ao tempo deve ser calculada usando a regra da cadeia para funções compostas:

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}\,\dot{s} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \tag{1.7}$$

Esta é outra equação cinemática. Resumindo, as equações cinemáticas são quatro:

$$\boxed{v = \dot{s} \qquad a_\mathrm{t} = \dot{v} \qquad a_\mathrm{t} = \ddot{s} \qquad a_\mathrm{t} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}} \tag{1.8}$$

e cada uma delas relaciona três das quatro variáveis: t, s, v e a_t. Para poder resolver alguma dessas equações diferenciais de primeira ordem usando os métodos analíticos tradicionais, é necessário ter uma relação entre essas 3 variáveis, para poder eliminar uma das 3 variáveis na equação diferencial, já que uma equação diferencial ordinária tem sempre duas variáveis.

Por exemplo, a equação $v = \dot{s}$ relaciona as três variáveis v, s e t (o ponto implica que t aparece na equação); para poder resolver essa equação analiticamente é necessário saber uma relação entre duas ou três das variáveis v, s e t, para poder eliminar uma das variáveis na equação $v = \dot{s}$. As secções seguintes mostram alguns exemplos.

1.5.1. Projeção do movimento num eixo

Em alguns casos é mais conveniente determinar a posição do ponto na trajetória indicando o valor da projeção desse ponto num eixo retilíneo, por exemplo o eixo dos x, em vez de usar o comprimento de arco.

A derivada da projeção x em ordem ao tempo é a velocidade, v_x, com que a projeção do ponto se desloca ao longo do eixo dos x e a derivada de v_x em ordem ao tempo é a aceleração, a_x, do movimento do ponto projetado no eixo dos x. Observe-se que $v_x = 0$ não implica que a velocidade v seja nula; pode acontecer que nesse ponto a trajetória seja perpendicular ao eixo x.

As equações cinemáticas da projeção do movimento no eixo dos x são semelhantes às equações (1.8)

$$\boxed{v_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{v}_x \qquad a_x = \ddot{x} \qquad a_x = v_x \frac{\mathrm{d}\, v_x}{\mathrm{d}\, x}} \tag{1.9}$$

No caso particular dos movimentos retilíneos, o eixo pode ser a própria trajetória e, nesse caso, $x = s$, $v_x = v$ e $a_x = a_\mathrm{t}$. A variável x pode ser também substituída por y, z ou qualquer outra letra usada para denominar o eixo onde é projetado o movimento.

1.5.2. Aceleração da gravidade

Perto da superfície da Terra, a aceleração de todos os objetos em queda livre tem o mesmo valor constante, chamado aceleração da gravidade e representado pela letra g. Em diferentes locais o valor de g sofre ligeiras alterações locais, mas é sempre aproximadamente 9.8 m/s^2. A resistência do ar produz outra aceleração que contraria o movimento, mas quando essa resistência for desprezável, admite-se que o valor da aceleração é constante e igual a g.

A aceleração segundo a trajetória produzida pela gravidade poderá ser positiva, negativa ou nula, já que pode fazer aumentar ou diminuir a velocidade do objeto, e poderá ter um valor diferente de g se a trajetória não for vertical. Mas se o eixo dos y for definido na vertical e apontando para cima, a aceleração a_y da projeção do movimento no eixo dos y tem sempre o valor constante $a_y = -9.8$ m/s^2 (ou +9.8 se o sentido positivo do eixo y for definido para baixo).

Exemplo 1.3
Atira-se uma pedra para cima, desde uma ponte que está 5 m acima de um rio; a componente vertical da velocidade com que é lançada a pedra é igual a 9 m/s. A pedra acaba por afundar-se no rio. Calcule a velocidade com que a pedra bate na superfície do rio e a altura máxima por ela atingida, medida desde a superfície do rio (admita que a resistência do ar pode ser desprezada).

Resolução. Escolhendo o eixo y na vertical, apontando para cima e com origem na superfície do rio, a posição inicial é $y_0 = 5$ e o valor da componente y da aceleração é $a_y = -9.8$ (unidades SI). Como tal, a_y pode ser eliminada nas equações cinemáticas (1.9) (usando y em vez de x); ou seja, duas das equações cinemáticas são $-9.8 = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ e $-9.8 = v_y\,\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}y$, que são equações diferenciais ordinárias porque cada um tem apenas duas variáveis; v_y e t na primeira equação e v_y e y na segunda.

Este exemplo pode ser resolvido integrando a equação $-9.8 = \dot{v}_y$ para encontrar a expressão da velocidade em função do tempo e integrando essa expressão para encontrar a altura y em função do tempo; a seguir determina-se o valor que tem t quando $y = 0$ (instante do impacto na superfície do rio) e substitui-se na expressão da velocidade para obter o valor da velocidade nesse instante. No entanto, a velocidade de impacto pode ser calculada de forma mais direta usando o método de **separação de variáveis** que é útil em outros casos mais complicados quando não é possível integrar diretamente a expressão da aceleração.

Escolhe-se uma das equações que ficou com apenas duas variáveis. Como o problema pede para calcular v_y a partir da altura inicial y_0 dada, deverá usar-se a equação:

$$-9.8 = v_y\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}$$

A seguir, considera-se a derivada na equação anterior como se fosse um quociente entre $\mathrm{d}v_y$ e $\mathrm{d}y$ e agrupa-se num lado da equação todo o que depende de y e no outro lado todo o que depende de v_y

$$-9.8\,\mathrm{d}y = v_y\,\mathrm{d}v_y$$

Diz-se que foram separadas as variáveis nos dois lados da equação. Uma vez separadas as variáveis, integram-se os dois lados da equação e podem dar-se já valores aos limites dos dois integrais. No integral do lado esquerdo, a altura varia desde $y_0 = 5$ até $y = 0$ (limites de integração para $\mathrm{d}y$). No integral do lado direito, a velocidade varia desde 9 até um valor final v_f que se pretende calcular e que, portanto, é colocado no limite do integral como variável desconhecida a ser calculada:

$$-\int_5^0 9.8\,\mathrm{d}y = \int_9^{v_\mathrm{f}} v_y\,\mathrm{d}v_y$$

Calculam-se os dois integrais manualmente ou usando o Maxima (`integrate(9.8,y,5,0)`, `integrate(vy,vy,9,vf)`). O resultado obtido é:

$$9.8\times 5 = \frac{v_\mathrm{f}^2}{2} - \frac{81}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad v_\mathrm{f} = -\sqrt{98+81}$$

(a segunda solução da equação, $+\sqrt{98+81}$, corresponde à velocidade com que a pedra deveria ter partido da superfície da água, para passar pela ponte com componente da velocidade de 9 m/s para cima).

Assim sendo, a componente vertical da velocidade com que a pedra entra no rio é $v_\mathrm{f} = -13.38$ m/s; como a pedra foi lançada verticalmente, a trajetória é vertical e esta é também a velocidade v. Para determinar a altura máxima, tem-se em conta que no ponto onde a pedra termina a sua subida e começa a descer, a componente vertical da sua velocidade deve ser nula. Repete-se o mesmo cálculo dos integrais acima, mas deixando a altura máxima y_{m} como variável a ser calculada, enquanto que a velocidade final é substituída por 0:

$$-\int_{5}^{y_{\mathrm{m}}} 9.8\,\mathrm{d}\,y = \int_{9}^{0} v_y\,\mathrm{d}\,v_y$$

o resultado obtido para a altura máxima (em metros) é:

$$9.8(5-y_{\mathrm{m}}) = -\frac{81}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad y_{\mathrm{m}} = 9.13$$

O exemplo anterior pode resolver-se também usando equações que são válidas apenas para movimentos com aceleração constante, em particular a equação $v_y^2 = v_0^2 - 2\,g\,(y-y_0)$, mas não vale a pena memorizar e usar essa equação, que é válida apenas no caso da aceleração ser constante e que pode ser obtida facilmente integrando $-g\,\mathrm{d}\,y = v_y\,\mathrm{d}\,v_y$. É recomendável partir sempre das equações cinemáticas, com os valores numéricos conhecidos e usar o método de separação de variáveis.

Em algumas equações diferenciais é impossível separar as variáveis; para esses casos existem outras técnicas de resolução. A abordagem usada nos capítulos seguintes deste livro é utilizar métodos numéricos de resolução quando o método de separação de variáveis não pode ser usado.

Exemplo 1.4

Num tiro com arco (ver figura), a aceleração da flecha diminui linearmente em função da sua posição no arco, s, desde um valor máximo inicial de 4500 m/s^2, na posição A, até zero, na posição B que se encontra 600 mm à direita de A. Calcule a velocidade com que sai disparada a flecha em B.

Resolução: No intervalo $0 \le s \le 0.6$ m, a aceleração segundo a trajetória (unidades SI) é:

$$a_{\mathrm{t}} = 4500 - \frac{4500}{0.6}s = 4500\left(1-\frac{s}{0.6}\right)$$

que pode ser substituída na equação que relaciona a_{t}, v e s para se obter uma equação diferencial de variáveis separáveis:

$$a_{\mathrm{t}} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \qquad \Longrightarrow \qquad 4500\left(1-\frac{s}{0.6}\right) = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$$

Separando as variáveis s e v e integrando obtém-se:

$$4500 \int_0^{0.6} \left(1 - \frac{s}{0.6}\right) \mathrm{d}s = \int_0^{v} v \, \mathrm{d}v$$

A resolução dos dois integrais permite determinar o valor da velocidade final

$$\frac{v^2}{2} = 4500 \left(0.6 - \frac{0.6^2}{2 \times 0.6}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{4500 \times 0.6} = 52.0 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Perguntas

1. A aceleração segundo a trajetória de um objeto é $a_\text{t} = 4t$ (unidades SI). Se num instante inicial a velocidade for igual a 4 m/s, qual será a velocidade 3 segundos mais tarde?

A. 22 m/s C. 40 m/s E. 4 m/s

B. 18 m/s D. 36 m/s

2. Em qual dos seguintes casos é possível afirmar, sem lugar a dúvida, que a rapidez do objeto está a diminuir?

A. $v = 3$ m/s, $a_\text{t} = 5$ m/s^2

B. $v = -3$ m/s, $a_\text{t} = 5$ m/s^2

C. $v_y = 3$ m/s, $a_y = 5$ m/s^2

D. $v_y = -3$ m/s, $a_y = 5$ m/s^2

E. $v_y = -3$ m/s, $a_y = -5$ m/s^2

3. A projeção x da velocidade de uma partícula que se desloca no eixo dos x é dada pela expressão:

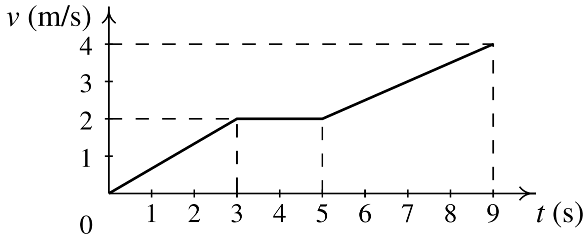
$v_x = 2x^2$

Qual é a expressão correta para a projeção x da aceleração?

A. $8x^3$ C. $2x^2/t$ E. $2x^3$

B. $4x$ D. $2x$

4. O gráfico mostra a velocidade de um corpo, em função do tempo. Calcule a distância percorrida desde $t = 0$ até $t = 5$ s.



A. 1 m C. 7 m E. 19 m

B. 12 m D. 5 m

5. Num gráfico que mostra a velocidade em função da posição na trajetória, o declive em cada ponto representa:

A. A aceleração segundo a trajetória.

B. A velocidade.

C. A aceleração segundo a trajetória dividida pela velocidade.

D. A velocidade vezes a aceleração segundo a trajetória.

E. A velocidade dividida pela aceleração segundo a trajetória.

Problemas

1. A posição de um objeto na sua trajetória é dada pela expressão $s = 2t^3 - 6t^2 + 10$ (unidades SI). Determine o tempo, posição e aceleração segundo a trajetória nos instantes em que a velocidade do objeto é nula ($v = 0$).

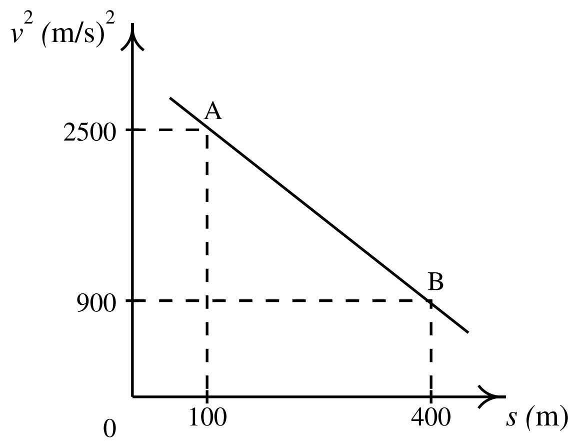
2. A aceleração de um objeto que se desloca no eixo dos x é $a_x = -4$ m/s^2. Se em $t = 0$, $v_x = +24$ m/s e $x = 0$, determine a velocidade e a posição em $t = 8$ s e a distância total percorrida entre $t = 0$ e $t = 8$ s.

3. Em $t_0 = 0$, um objeto encontra-se em repouso na posição $s_0 = 5$ cm num percurso. A partir desse instante o objeto começa a deslocar-se no sentido positivo de s, parando novamente num instante t_1. A expressão da aceleração segundo a trajetória, entre t_0 e t_1, é: $a_\text{t} = 9 - 3t^2$, onde o tempo mede-se em segundos e a aceleração em cm/s^2. Calcule: (*a*) O instante t_1 em que o objeto volta a parar. (*b*) A posição no percurso nesse instante.

4. A aceleração segundo a trajetória de uma partícula é dada pela expressão $a_\text{t} = -k/s^2$, onde k é uma constante positiva. A partícula parte do repouso em $s = 800$ mm, e em $s = 500$ mm a sua velocidade é -6 m/s. Calcule: (*a*) O valor de k. (*b*) A velocidade da partícula em $s = 250$ mm.

5. A aceleração de um objeto que oscila no eixo dos x é $a_x = -kx$, onde k é uma constante positiva. Calcule: (*a*) O valor de k para que a velocidade seja $v_x = 15$ m/s quando $x = 0$ e a posição seja $x = 3$ m quando $v_x = 0$. (*b*) A velocidade do objeto quando $x = 2$ m.

6. O quadrado da velocidade v de um objeto diminui linearmente em função da posição na sua trajetória, s, tal como se mostra no gráfico. Calcule a distância percorrida durante os dois últimos segundos antes do objeto chegar ao ponto B.



7. A aceleração de um objeto segundo a trajetória é $a_\text{t} = -4s(1 + ks^2)$ (unidades SI), onde s é a posição ao longo da trajetória e k uma constante positiva. Sabendo que num instante o objeto passa pela origem $s = 0$ com velocidade $v = 17$ m/s, determine a velocidade em $s = 4$ m, para os seguintes valores da constante k: (*a*) $k = 0$, (*b*) $k = 0.015$, (*c*) $k = -0.015$.

8. A aceleração de um objeto segundo a trajetória é $a_\text{t} = -0.4\,v$, onde a_t é medida em mm/s^2 e v em mm/s. Sabendo que em $t = 0$ a velocidade é 30 mm/s, calcule: (*a*) A distância que o objeto percorre antes de parar. (*b*) O tempo necessário para o objeto parar. (*c*) O tempo necessário para que a velocidade diminua ate 1 por cento do seu valor inicial.

9. A aceleração segundo a trajetória de um objeto em queda livre no ar, incluindo a resistência do ar, é dada pela expressão $a_{\text{t}} = g - \dfrac{C}{m}v^2$, onde C e m são constantes. Se o objeto parte do repouso em $t = 0$: (*a*) Demonstre que a velocidade num instante posterior t é $v = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{C\,g}{m}}\,t\right)$. (*b*) Determine a expressão da velocidade do objeto após ter caído uma distância s. (*c*) Porquê será que a velocidade $v_{\text{t}} = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}$ chama-se **velocidade terminal**?

10. Uma pedra é lançada verticalmente para cima desde uma ponte que está 40 m por cima da superfície de um rio. Sabendo que a pedra cai na água 4 segundos após ter sido lançada, calcule: (*a*) A velocidade com que a pedra foi lançada. (*b*) A velocidade com que a pedra entra na água.

11. A posição de uma partícula que se desloca no eixo dos x é aproximada pela relação $x = 2.5t^3 - 62t^2 + 10.3t$ (unidades SI). (*a*) Encontre as expressões para a velocidade e a aceleração em função do tempo. (*b*) Determine os valores do tempo, a posição e a aceleração nos instantes em que a partícula está em repouso ($v_x = 0$). (*c*) Trace os gráficos da posição, da velocidade e da aceleração, em $0 \le t \le 20$.

Respostas

Perguntas: 1. A. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** C.

Problemas

1. $t = 0$, $s = 10$ m, $a_{\text{t}} = -12$ m/s^2 e $t = 2$ s, $s = 2$ m, $a_{\text{t}} = 12$ m/s^2.

2. Velocidade -8 m/s, posição $x = 64$ m e distância percorrida 80 m.

3. (*a*) 3 s (*b*) 25.25 cm.

4. (*a*) 24 m^3/s^2 (*b*) 11.49 m/s.

5. (*a*) 25 s^{-2} (*b*) ± 11.18 m/s (a partícula oscila).

6. 65.33 m

7. (*a*) ± 15 m/s, porque o objeto oscila (*b*) ± 14.74 m/s, porque o objeto oscila. (*c*) 15.25 m/s, unicamente positiva porque o objeto desloca-se sempre no sentido positivo. (para saber se o objeto oscila ou anda sempre no mesmo sentido, calcule a expressão de v para qualquer valor final s e trace o gráfico v vs s).

8. (*a*) 75 mm (*b*) infinito (*c*) 11.51 s.

9. (*b*) $v = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}\sqrt{1 - e^{-2Cs/m}}$

(*c*) Porque v aproxima-se assimptoticamente de $\sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}$: $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} v = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}$

10. (*a*) 9.6 m/s. (*b*) -29.6 m/s.

11. (*b*) Em $t = 0.0835$ s, $\quad x = 0.429$ m, $\quad a_x = -123$ m/s^2
Em $t = 16.4$ s, $\quad x = -5480$ m, $\quad a_x = 123$ m/s^2

2. Cinemática vetorial

Quando um objeto se desloca no espaço sem seguir uma trajetória determinada, a sua posição já não pode ser definida com uma única variável como nos exemplos estudados no capítulo anterior. No século XVII, o matemático Gottfried Leibniz escreveu que seria desejável criar uma área da matemática que descrevesse a posição diretamente, assim como as variáveis são usadas na álgebra para representar valores numéricos. Na mesma época, Isaac Newton enunciou a lei do paralelogramo para somar forças. No entanto, o conceito de vetor usado hoje em dia só foi inventado muitos anos depois, no século XIX.

2.1. Vetores

Uma grandeza que tenha o mesmo valor independentemente do observador que as medir, chama-se **escalar**. Algumas das grandezas usadas no capítulo anterior são escalares; por exemplo, o deslocamento Δs e o intervalo de tempo Δt entre dois eventos. Alguns exemplos de grandezas físicas que não são escalares são as componentes da posição, velocidade e aceleração ao longo de um eixo. Se a direção, o sentido ou a origem desse eixo fossem alteradas, os valores dessas grandezas seriam diferentes. É útil escrever as equações da física de forma a que sejam iguais em qualquer referencial; o conceito de vetor permite alcançar esse objetivo.

2.1.1. Propriedades dos vetores

Um vetor é um segmento de reta entre dois pontos P_1 e P_2 no espaço, em que um dos pontos é considerado a origem e o outro ponto o fim do segmento.

Por exemplo, na figura 2.1, está representado o vector com origem num ponto P_1 e fim num ponto P_2; a seta indica qual é o ponto final e por cima da letra usada para representar o vetor coloca-se também uma seta, $\vec{a}$, para que fique claro que se trata de um vetor e não de uma variável algébrica comum.

Um vetor representa um deslocamento desde um ponto do espaço até outro ponto. A distância entre os dois pontos chama-se **módulo**, ou norma do vetor. No caso de um vetor $\vec{a}$, o seu módulo representa-se com a mesma letra a, mas sem seta. Como a distância entre dois pontos é um escalar, o módulo de um vetor é uma grandeza escalar. Um vetor tem também uma **direção**, definida pela reta que passa pelos dois pontos, e um **sentido**, que vai desde o ponto inicial para o ponto final.

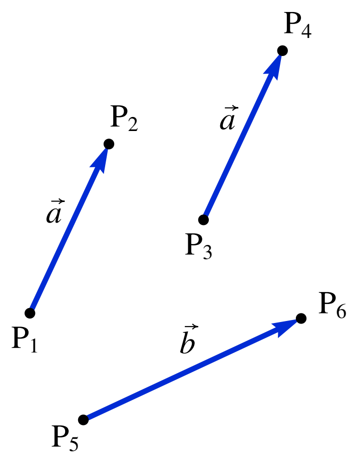


Figura 2.1.: Vetores livres.

Dois vetores são iguais se, e só se, a suas direções, sentidos e módulos forem iguais. Por exemplo, na figura 2.1 o vetor entre os pontos P_1 e P_2 e o vetor entre os pontos P_3 e P_4 são iguais e, por isso, foram identificados com a mesma letra $\vec{a}$; a distância entre P_3 e P_4 é igual à distância entre P_1 e P_2 e as retas que passam por esses dois pares de pontos são paralelas. O vetor $\vec{b}$, entre os pontos P_5 e P_6, não é igual a $\vec{a}$ porque tem módulo e direção diferentes. Esse tipo de vetores são chamados vetores livres porque não interessam os pontos específicos onde forem colocados, sempre que a distância entre eles for igual ao módulo e definam corretamente a direção e sentido do vetor.

Na figura 2.2, partindo do ponto P o vetor $\vec{a}$ produz um deslocamento até o ponto Q; a seguir, o vetor $\vec{b}$ provocará um deslocamento até o ponto R; assim sendo, o deslocamento combinado de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é equivalente ao deslocamento desde P até R, representado na figura pelo vetor $\vec{c}$. Diz-se que $\vec{c}$ é igual à soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \tag{2.1}$$

Ou seja, a adição de dois vetores consiste em deslocar um deles de forma que o seu ponto inicial coincida com o ponto final do primeiro, obtendo-se como resultado o vetor que vai desde o ponto inicial do primeiro vetor até o ponto final do segundo.
A equação $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ implica que $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$ e a figura 2.2 também mostra que o vetor $\vec{b}$ vai desde o ponto final de $\vec{a}$ até o ponto final de $\vec{c}$, quando os dois vetores estão no mesmo ponto inicial. Portanto, para subtrair dois vetores podem ser deslocados para um ponto inicial comum e o resultado da subtração será o vetor que vai desde o ponto final do segundo vetor, até o ponto final do primeiro vetor.

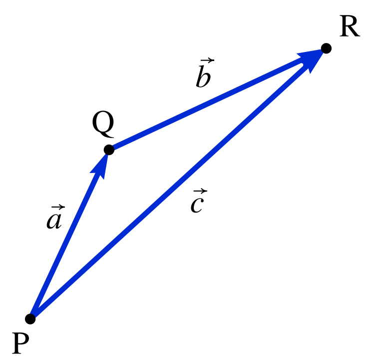


Figura 2.2.: Soma de vetores.

A adição de vetores é comutativa; deslocar o vetor $\vec{b}$ a continuação do vetor $\vec{a}$ produz o mesmo resultado do que deslocar o vetor $\vec{a}$ a continuação do vetor $\vec{b}$ (figura 2.3). A soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é a diagonal do paralelogramo em que dois dos lados são iguais a $\vec{a}$ e os outros dois lados são iguais a $\vec{b}$. A soma de vários vetores também verifica a propriedade associativa.

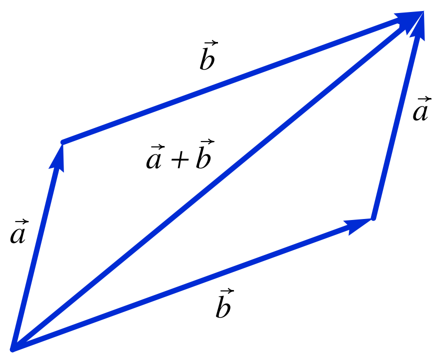


Figura 2.3.: Regra do paralelogramo para somar vetores.

A soma de um vetor com si próprio $\vec{a}+\vec{a}=\vec{a}$ produz um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido, mas com módulo duas vezes maior. Generalizando esse resultado, o produto de um escalar k e um vetor $\vec{a}$ será um vetor com a mesma direção de $\vec{a}$ mas com módulo igual a $|k|\,a$. O sentido de $k\vec{a}$ será o mesmo de $\vec{a}$, se k for positivo, ou oposto se k for negativo. Costuma escrever-se primeiro o escalar e a seguir o vetor, mas o produto de escalar e vetor é comutativo. Se k for igual a zero, $k\vec{a}$ será o vetor nulo $\vec{0}$, ou seja, um vetor com o mesmo ponto inicial e final.

Usando o produto de escalar por vetor, qualquer vetor $\vec{a}$ pode ser obtido pelo produto $a\,\vec{e}_a$, em $\vec{e}_a$ é um vetor de módulo unitário, com a mesma direção e sentido de $\vec{a}$ (figura 2.4).

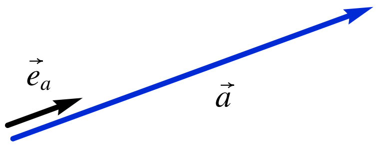


Figura 2.4.: Versor $\vec{e}_a$ associado ao vetor $\vec{a}$.

Esse vetor unitário, com a mesma direção e sentido de $\vec{a}$, chama-se o **versor** de $\vec{a}$. Neste livro será usado sempre um e minúsculo para representar versores.

No capítulo anterior foi dito que a posição de um ponto P no espaço é dada por três coordenadas definidas em algum sistema de coordenadas e foram introduzidas as **coordenadas cartesianas**. A figura 2.5 mostra as coordenadas cartesianas (x_P, y_P, z_P) de um ponto P.

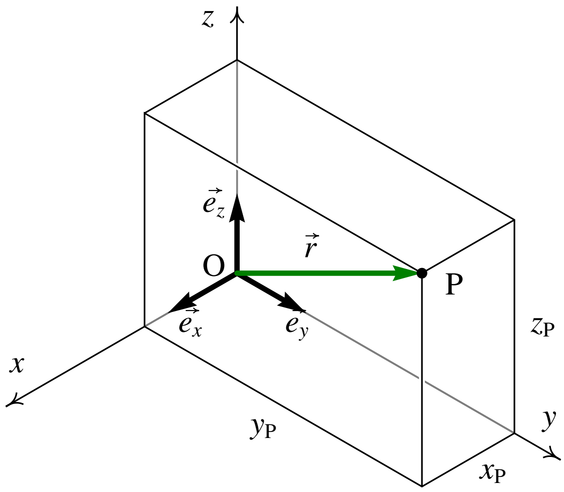


Figura 2.5.: Coordenadas cartesianas de um ponto P e versores cartesianos.

Existem duas formas de definir os sentidos positivos dos três eixos x, y e z; é habitual definir esses sentidos positivos seguindo a **regra da mão direita**: fechando o punho direito, esticam-se os dedos maior, indicador e polegar, de forma a formar ângulos retos entre si; o indicador apontará no sentido do eixo dos x, o dedo maior no sentido do eixo dos y e o polegar no sentido do eixo dos z. Um referencial cartesiano pode ser definido indicando o ponto O que define a origem e 3 versores perpendiculares, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ e $\vec{e}_z$, que definem as direções dos 3 eixos.

Qualquer vetor pode ser obtido somando 3 deslocamentos ao longo dos 3 eixos; por exemplo,

$$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z \tag{2.2}$$

$$\vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z \tag{2.3}$$

em que (a_x, a_y, a_z) e (b_x, b_y, b_z) são as componentes cartesianas dos vetores. Usando as propriedades da soma vetorial e do produto de escalar por vetor, a soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser escrita, em função das componentes, como,

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\,\vec{e}_x + (a_y+b_y)\,\vec{e}_y + (a_z+b_z)\,\vec{e}_z \tag{2.4}$$

Ou seja, a soma de dois vetores é outro vetor com componentes iguais à soma das componentes dos vetores originais. Observe que a direção, o sentido e o módulo de um vetor $\vec{a}$ são independentes do sistema de eixos usado e da escolha da origem O; no entanto, as suas componentes (a_x, a_y, a_z) serão diferentes em diferentes sistemas de eixos. Se dois vetores são iguais, as suas componentes, no mesmo sistema de eixos, também deverão ser iguais.

O **vetor posição** dum ponto P define-se como o vetor $\vec{r}_\text{P}$ que vai desde a origem O até o ponto P, que pode ser obtido somando 3 deslocamentos ao longo dos 3 eixos,

$$\vec{r}_\text{P} = x_\text{P}\,\vec{e}_x + y_\text{P}\,\vec{e}_y + z_\text{P}\,\vec{e}_z \tag{2.5}$$

Observe que as componentes desse vetor posição são iguais as coordenadas cartesianas do ponto P, (x_P, y_P, z_P). O vetor posição do ponto P depende do sistema de eixos e da origem escolhidos; em diferentes sistemas de eixos os vetores posição do mesmo ponto terão diferentes módulos e direções.

2.1.2. Velocidade e aceleração vetoriais

A trajetória de um ponto em movimento pode ser definida em cada instante t através do vetor de posição do ponto,

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z} \tag{2.6}$$

Cada uma das três componentes, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, é uma função do tempo. Num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ o deslocamento do ponto (ver figura 2.6) é igual a

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{2.7}$$

em que $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores posição nos instantes t_1 e t_2.

O vetor obtido dividindo o deslocamento $\Delta\vec{r}$ por Δt é o vetor velocidade média, com a mesma direção e sentido do deslocamento $\Delta\vec{r}$. Define-se o **vetor velocidade** em cada

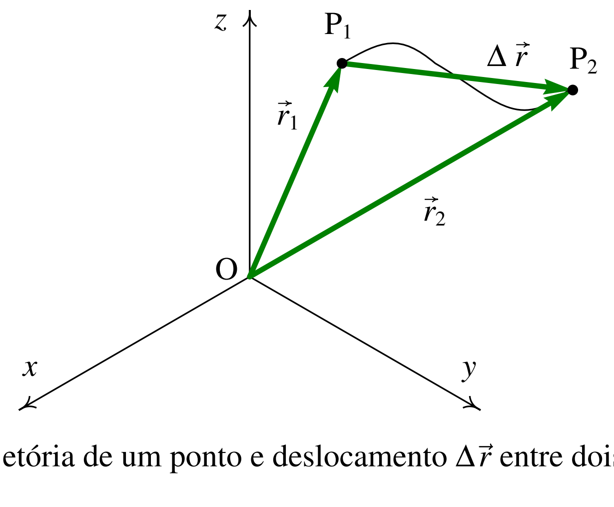


Figura 2.6.: Trajetória de um ponto e deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre dois instantes t_1 e t_2.

instante, igual ao deslocamento dividido por Δt, no limite em que Δt se aproxima de zero,

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{2.8}$$

Como as componentes cartesianas do deslocamento são $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$ e $z_2 - z_1 = \Delta z$, o vetor velocidade é

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z \tag{2.9}$$

O aumento de $\vec{v}$ desde t_1 até t_2 é $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Define-se o **vetor aceleração**,

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}} \tag{2.10}$$

e as suas componentes serão as derivadas das componentes da velocidade:

$$\vec{a} = \dot{v}_x\,\vec{e}_x + \dot{v}_y\,\vec{e}_y + \dot{v}_z\,\vec{e}_z = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z \tag{2.11}$$

As equações (2.9) e (2.11) são as equações cinemáticas em 3 dimensões, escritas de forma vetorial. Como a igualdade de dois vetores implica a igualdade das suas componentes, verifica-se $v_x = \dot{x}$, $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ e equações semelhantes para as componentes y e z. Portanto, o movimento em 3 dimensões é a sobreposição de 3 movimentos em uma dimensão, ao longo dos eixos x, y e z, e cada um desses movimentos obedece as equações cinemáticas ao longo de um eixo, estudadas no capítulo anterior.

Para cada uma das componentes cartesianas há uma quarta equação cinemática que relaciona a aceleração com a velocidade e a posição,

$$a_x = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \qquad a_y = v_y \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y} \qquad a_z = v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} \tag{2.12}$$

que não serão combinadas numa equação vetorial. A velocidade v referida no capítulo anterior é o módulo do vetor $\vec{v}$; para simplificar a linguagem costuma chamar-se velocidade ao vetor $\vec{v}$ e "valor da velocidade" ao seu módulo v; em forma análoga, o vetor $\vec{a}$ costuma chamar-se aceleração e o seu módulo, a, chama-se valor da aceleração.

Exemplo 2.1
A velocidade de uma partícula em função do tempo t verifica a expressão (unidades SI):

$$\vec{v} = \left(5 - t^2 \mathrm{e}^{-t/5}\right)\vec{e}_x + \left(3 - \mathrm{e}^{-t/12}\right)\vec{e}_y$$

A partícula parte da posição $(2\,\vec{e}_x + 5\,\vec{e}_y)$ no instante $t = 0$. Encontre o vetor posição, a velocidade e a aceleração no instante $t = 15$ s e quando t tende para infinito. Trace o gráfico da trajetória da partícula durante os primeiros 60 segundos do movimento.

Resolução. As componentes da velocidade podem ser representadas por uma lista no Maxima:

```
(%i1) v: [5-t^2*exp(-t/5), 3-exp(-t/12)];
                              2    - t/5         - t/12
(%o1)                   [5 - t   %e      , 3 - %e      ]
```

As funções `diff` e `integrate` aceitam também uma lista com expressões, derivando (ou integrando) cada um dos elementos da lista. Assim sendo, a aceleração (derivada da velocidade em ordem ao tempo) é,

```
(%i2) a: diff (v, t);
                    2    - t/5                        - t/12
                   t   %e                   - t/5   %e
(%o2)             [---------- - 2 t %e      , --------]
                       5                          12
```

O vetor posição em qualquer instante $t > 0$ é igual ao vetor posição no instante $t = 0$, $2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$, mais o integral da velocidade desde 0 até t. Quando se integram listas, `integrate` não aceita que a mesma variável de integração apareça num dos limites do integral; para evitar esse erro, t pode ser substituído por outra variável u no integral

```
(%i3) assume(t>0)$
(%i4) r: [2, 5] + integrate (subst (t=u, v), u, 0, t);
         - t/5                   t/5      2
(%o4) [%e      ((5 t - 250) %e    + 5 t  + 50 t + 250) + 2,
                                      - t/12         t/12
                                    %e        (3 t %e     + 12) - 7]
```

foi preciso responder que t é positiva, já que o Maxima poderá produzir respostas diferentes segundo o sinal.

O vetor posição, a velocidade e a aceleração aos 15 segundos são,

```
(%i5) float (subst (t=15, r));
(%o5)          [- 67.20247971828913, 41.43805756232229]
(%i6) float (subst (t=15, v));
(%o6)           [- 6.202090382769388, 2.71349520313981]
(%i7) float (subst (t=15, a));
(%o7)           [.7468060255179592, .02387539973834917]
```

Para obter os vetores no limite do tempo infinito, usa-se a função `limit` e o símbolo `inf` que representa infinito:

```
(%i8) limit (r, t, inf);
(%o8)                        [inf, inf]
(%i9) limit (v, t, inf);
(%o9)                          [5, 3]
(%i10) limit (a, t, inf);
(%o10)                         [0, 0]
```

Ou seja, a partícula atingirá uma velocidade constante $5\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, afastando-se até o infinito.

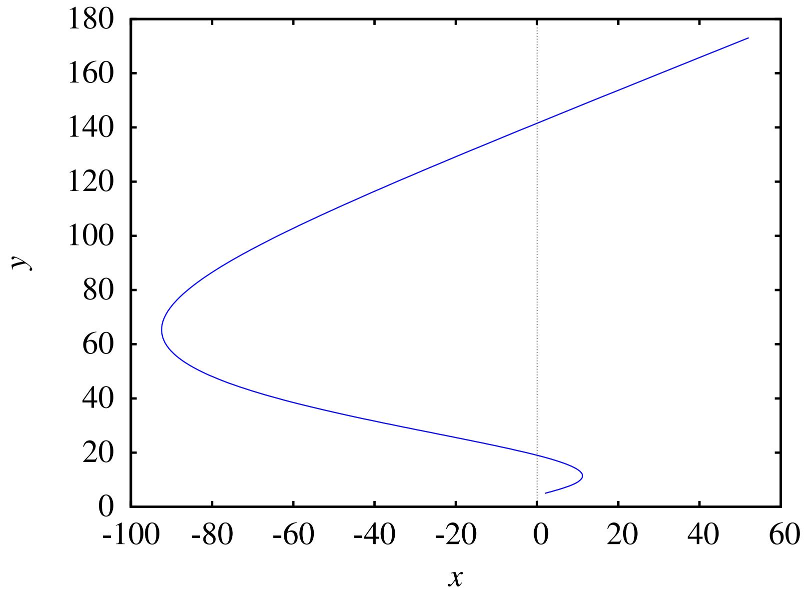


Figura 2.7.: Trajetória da partícula durante os primeiros 60 segundos, desde o instante em que a partícula se encontrava no ponto (5, 2).

Para traçar o gráfico da trajetória será necessário usar a opção `parametric` da função `plot2d`. As componentes x e y do vetor posição deverão ser dadas por separado, porque a função `plot2d` não admite que sejam dadas como uma lista. O primeiro elemento da lista `r` (componente x) identifica-se com `r[1]` e o segundo elemento (componente y) com `r[2]`

```
(%i11) plot2d ([parametric, r[1], r[2], [t,0,60], [nticks,100]],
          [xlabel, "x"], [ylabel, "y"])$
```

O domínio do tempo, desde 0 até 60, foi indicado usando a notação `[t,0,60]`. A opção `nticks` foi usada para aumentar o número de intervalos de t utilizados para fazer o gráfico, pois o seu valor predefinido (29) não produz um gráfico suficientemente contínuo. O gráfico obtido é apresentado na figura 2.7.

2.1.3. Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, indicado por meio de um ponto entre os vetores, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, define-se como o produto entre os módulos dos dois vetores e o cosseno do ângulo θ entre as suas direções:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\,\cos\theta} \tag{2.13}$$

A figura 2.8 mostra dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o ângulo θ formado pelas duas direções. O produto $a\cos\theta$ é igual à componente do vetor $\vec{a}$ na direção paralela ao vetor $\vec{b}$ e o produto $b\cos\theta$ é igual à componente do vetor $\vec{b}$ na direção paralela ao vetor $\vec{a}$. Assim sendo, o produto escalar é igual ao produto do módulo de um dos vetores vezes a componente do segundo vetor na direção paralela ao primeiro.

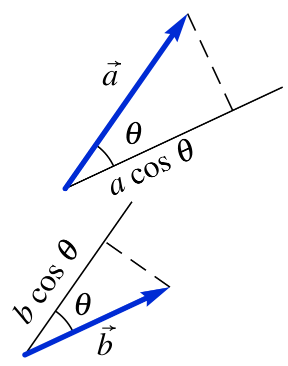


Figura 2.8.: Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o ângulo θ entre as suas direções.

Este produto denomina-se escalar porque os módulos dos dois vetores e o ângulo entre as direções são grandezas escalares, que não dependem do referencial usado para os medir; consequentemente, o produto $a b \cos\theta$ é também um escalar, independente do sistema de eixos usado.

Duas retas que se cruzam num ponto definem dois ângulos θ e $180° - \theta$. No caso de vetores, não existe ambiguidade na definição do ângulo, porque se deslocarmos os vetores para um vértice comum, o ângulo será a região dos pontos que estão deslocados nos sentidos dos dois vetores em relação ao vértice (ver figura 2.9).

O produto escalar entre dois vetores com módulos a e b estará sempre dentro do intervalo $[-ab, ab]$. Se o ângulo entre os vetores for agudo, $\cos\theta > 0$, o produto será positivo. Se o ângulo for obtuso, $\cos\theta < 0$, o produto será negativo e se os vetores forem perpendiculares, o produto será nulo (figura 2.9). O valor mínimo do produto, $-ab$, obtém-se no caso em que os vetores tenham a mesma direção, mas com sentidos opostos. O valor máximo, ab, é obtido no caso em que os vetores tenham a mesma direção e sentido.

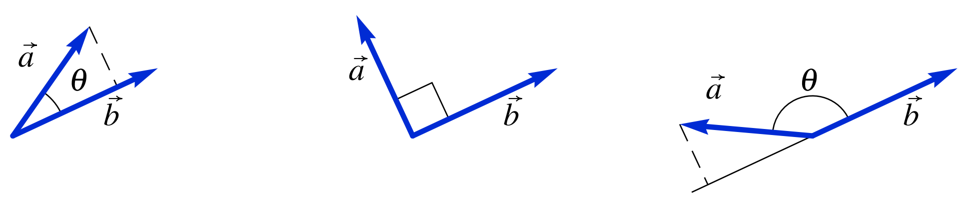


Figura 2.9.: Vetores que formam ângulo agudo, reto ou obtuso.

Como o módulo dos versores é igual a 1, o produto entre dois versores é sempre igual ao cosseno do ângulo entre as suas direções. Portanto, o ângulo entre duas direções no espaço pode ser determinado calculando o arco cosseno do produto escalar entre dois versores nessas direções

$$\theta_{ab} = \arccos\left(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b\right) \tag{2.14}$$

Em função das componentes cartesianas dos vetores, o produto escalar é,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z)\cdot(b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z) \tag{2.15}$$

Usando a propriedade distributiva do produto escalar e o facto de que o produto escalar entre dois dos versores cartesianos $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ e $\vec{e}_z$, é zero, por serem perpendiculares, e o produto de um desses versores consigo próprio é 1, obtém-se uma expressão simples para o produto escalar a partir das componentes cartesianas,

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z} \tag{2.16}$$

As componentes dos dois vetores são diferentes em diferentes referenciais, mas o produto $(a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z)$ deverá dar o mesmo resultado em qualquer referencial, já que $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ é um escalar.

Usando as duas expressões (2.13) e (2.16) para calcular o produto escalar de um vetor consigo próprio, vemos que

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{2.17}$$

Conclui-se que o módulo de um vetor $\vec{a}$ com componentes $(a_x,\, a_y,\, a_z)$ é dado pela expressão,

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{2.18}$$

2.2. Velocidade e aceleração relativas

A figura 2.10 mostra os vetores posição de um mesmo ponto P em dois referenciais diferentes, O*xyz* e O'*x*'*y*'*z*'

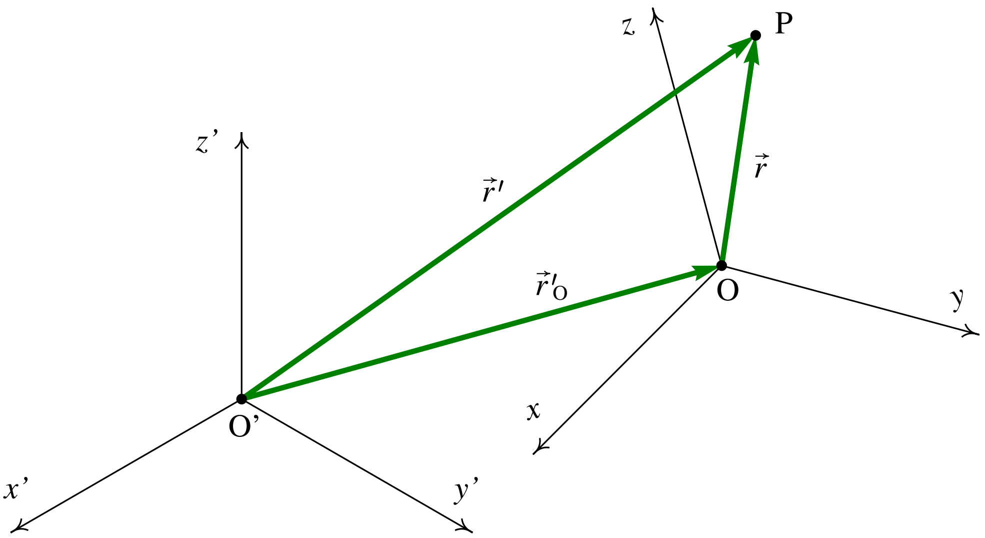


Figura 2.10.: Vetores posiçao de um ponto em dois referenciais diferentes.

Nesta secção as derivadas serão calculadas no referencial O'x'y'z' que será considerado estático. O referencial Oxyz e o ponto P encontram-se em movimento em relação ao referencial fixo O'x'y'z'. Os vetores posição do ponto P, em relação aos dois referenciais, são $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, que verificam a seguinte relação:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_{\text{O}} \tag{2.19}$$

em que $\vec{r}\,'_{\text{O}}$ é o vetor posição da origem O do referencial em movimento, em relação ao referencial fixo.

As derivadas de $\vec{r}\,'$ e $\vec{r}\,'_{\text{O}}$, em ordem ao tempo, são as velocidades dos pontos P e O, em relação ao referencial fixo. O vetor $\vec{r}$, tem componentes (x, y, z) no referencial em movimento:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \tag{2.20}$$

Se o movimento do referencial Oxyz for unicamente um movimento de translação, sem rotação, os versores $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ e $\vec{e}_z$ serão os mesmos em qualquer instante e, portanto, a derivada do vetor posição no referencial em movimento será,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z = \vec{v} \tag{2.21}$$

em que $\vec{v}$ é a velocidade do ponto P, em relação ao referencial em movimento. Observe que se o referencial tivesse movimento de rotação, seria necessário também calcular as derivadas dos versores e a equação anterior teria um termo adicional devido a essas derivadas.

Assim sendo, a derivação da equação (2.19) em ordem ao tempo conduz à relação entre as velocidades,

$$\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'_{\text{O}}} \tag{2.22}$$

Isto é, a velocidade do ponto P, relativa ao referencial fixo, é igual à sua velocidade relativa ao referencial em movimento, mais a velocidade do referencial em movimento, relativa ao referencial fixo.

A relação entre as velocidades pode ser derivada novamente, em ordem ao tempo, e, tendo em conta novamente que os versores do referencial em movimento permanecem constantes, obtém-se uma equação análoga à relação entre as velocidades:

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}\,'_{\text{O}}} \tag{2.23}$$

em que $\vec{a}\,'$ e $\vec{a}\,'_{\text{O}}$ são as acelerações dos pontos P e O, relativas ao referencial fixo, e $\vec{a}$ é a aceleração do ponto P, relativa ao referencial em movimento.

Assim, por exemplo, se viajarmos num comboio que se desloca com velocidade $\vec{v}_c$ e observarmos um objeto com velocidade $\vec{v}$, dentro do comboio, a velocidade desse objeto em relação à Terra será igual a $\vec{v} + \vec{v}_c$. Mas como a Terra se desloca em relação ao Sol, a velocidade do objeto em relação ao Sol seria $\vec{v} + \vec{v}_c + \vec{v}_t$, em que $\vec{v}_t$ é a velocidade da Terra relativa ao Sol. Em relação à Galaxia teríamos de somar também a velocidade do Sol na galaxia e assim sucessivamente.

O princípio de adição de acelerações relativas é aproveitado para treinar os candidatos a astronautas. Se o astronauta, a bordo de um avião, tropeça e cai para o chão, a sua aceleração durante a queda, em relação à Terra, é o vetor $\vec{g}$, que aponta para o centro da Terra e com valor igual à aceleração da gravidade. Se o avião também estiver em queda livre, a sua aceleração em relação à Terra será o mesmo vetor $\vec{g}$ (figura 2.11). Portanto, a aceleração do astronauta em relação ao avião será a diferença entre essas duas acelerações em relação à Terra, que é zero. Ou seja, em relação ao avião, o astronauta não acelera em nenhuma direção, mas flutua no meio do avião durante os segundos que o piloto conseguir manter o avião em queda livre.

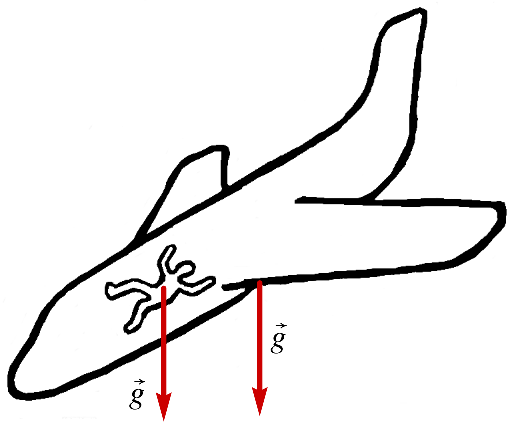


Figura 2.11.: A aceleração de um corpo em queda livre, em relação a um referencial que também está em queda livre, é nula.

2.3. Lançamento de projéteis

No capítulo 1 foi estudado o movimento de um objeto em queda livre, sob a ação da gravidade, quando a resistência do ar pode ser ignorada, considerando unicamente a componente vertical do movimento. Nesta secção será abordado o mesmo problema, considerando agora todas as componentes do movimento.

Escolhendo o eixo dos z na direção vertical, com sentido positivo para cima, a forma vetorial da aceleração da gravidade é

$$\vec{a} = -g\,\vec{e}_z \tag{2.24}$$

onde g é, aproximadamente, 9.8 m/s^2.

Se um projétil for lançado com velocidade inicial $\vec{v}_0$, a aceleração da gravidade alterará essa velocidade, na direção de $\vec{e}_z$, produzindo uma nova velocidade que estará no mesmo plano formado pelos vetores $\vec{v}_0$ e $\vec{e}_z$. Conclui-se assim que a trajetória do projétil estará sempre no plano vertical formado por $\vec{v}_0$ e $\vec{e}_z$. A única excepção a essa regra é quando $\vec{v}_0$ for vertical; nesse caso, $\vec{v}_0$ e $\vec{e}_z$ não formam um plano e a trajetória é uma reta vertical.

Exemplo 2.2
Um canhão dispara uma bala, desde o terraço de um edifício, na posição (unidades SI):

$$\vec{r}_0 = 9\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y + 15\,\vec{e}_z$$

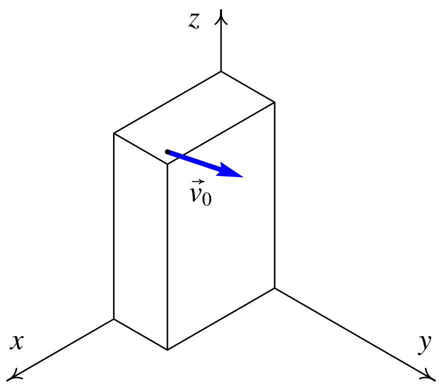
com velocidade inicial (unidades SI):

$$\vec{v}_0 = 13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y + 15\,\vec{e}_z$$

em que o eixo dos z aponta na direção vertical, para cima, e com origem no chão. Admitindo que a resistência do ar pode ser desprezada, calcule a altura máxima atingida pela bala e a posição em que a bala bate no chão.

Resolução: Substituindo a expressão (2.24) da aceleração da gravidade na equação (2.10), obtém-se uma equação diferencial de variáveis separáveis

$$-9.8\,\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$



Separando as variáveis, e arbitrando $t = 0$ para o instante inicial, obtém-se

$$-9.8\,\vec{e}_z \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v}$$

Resolvendo os integrais obtém-se a expressão para a velocidade em função do tempo,

$$\vec{v} = 13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y + (15 - 9.8\,t)\,\vec{e}_z$$

Substituindo essa expressão na equação (2.8),

$$13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y + (15 - 9.8\,t)\,\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

e separando variáveis e integrando, obtém-se a expressão do vetor posição em função do tempo,

$$\int_0^t (13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y + (15 - 9.8\,t)\,\vec{e}_z)\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r} = (9 + 13\,t)\vec{e}_x + (4 + 22.5\,t)\vec{e}_y + (15 + 15\,t - 4.9\,t^2)\,\vec{e}_z$$

A altura máxima será atingida no instante em que a velocidade seja na horizontal, ou seja, quando a componente v_z da velocidade for nula

$$15 - 9.8\,t = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{15}{9.8} = 1.53 \text{ s}$$

nesse instante, a componente z do vetor posição determina a altura máxima:

$$h_{\text{max}} = 15 + 15\,t - 4.9\,t^2 = 15 + 15\times 1.53 - 4.9\times 1.53^2 = 26.48 \text{ m}$$

Para calcular o instante em que a bala bate no chão, calcula-se o tempo t em que a componente z da posição é igual a zero,

$$15 + 15\,t - 4.9\,t^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{15 + \sqrt{15^2 + 4\times 4.9\times 15}}{9.8} = 3.86 \text{ s}$$

nesse instante, a posição da bala será,

$$\vec{r} = (9 + 13\times 3.86)\vec{e}_x + (4 + 22.5\times 3.86)\vec{e}_y = (59.18\,\vec{e}_x + 90.85\,\vec{e}_y) \text{ m}$$

2.4. Movimentos dependentes

Em alguns sistemas em que aparentemente são necessárias várias variáveis para descrever o movimento das diferentes componentes do sistema, o número de graus de liberdade pode ser menor devido à existência de restrições no movimento. A figura 2.12 mostra um exemplo; enquanto o cilindro desce, o carrinho se desloca sobre a mesa.

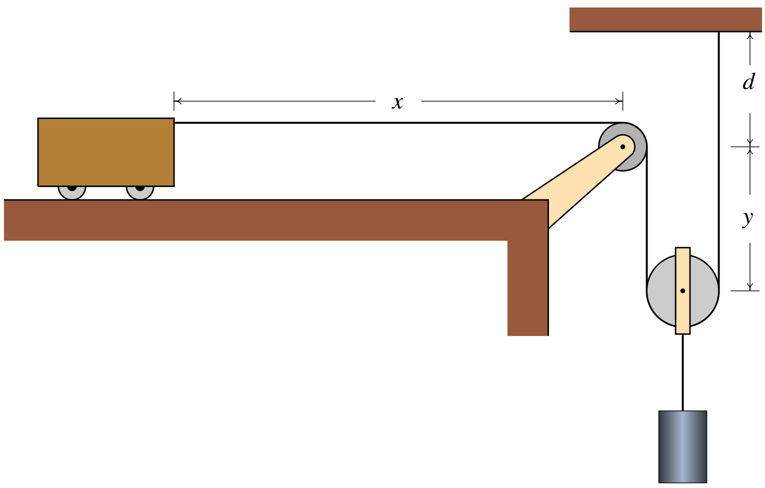


Figura 2.12.: Sistema com dois movimentos dependentes e um único grau de liberdade.

O movimento do carrinho pode ser descrito pela variação da distância horizontal x até o eixo da roldana fixa. O movimento do cilindro será igual ao movimento da roldana móvel e, portanto, pose ser descrito pela expressão para a distância vertical y entre os centros das roldanas, em função do tempo.

Mas, enquanto o fio permanecer esticado e sem se quebrar, existirá uma relação entre as velocidades e as acelerações do carrinho e do cilindro. Para encontrar essa relação, escreve-se a o comprimento do fio, L, em função das distâncias x e y:

$$L = x + 2y + d + \frac{\pi r_1}{2} + \pi r_2 \tag{2.25}$$

em que r_1 e r_2 são os raios das duas roldanas. O fio toca um quarto do perímetro da roldana fixa ($\pi r_1/2$) e metade do perímetro da roldana móvel (πr_2). Tendo em conta que L, d, r_1 e r_2 são constantes, e derivando a equação anterior em ordem ao tempo, obtém-se,

$$\dot{x} = -2\dot{y} \tag{2.26}$$

Ou seja, o valor da velocidade do carrinho será sempre o dobro do valor da velocidade do cilindro. O sinal negativo na equação acima indica que se o cilindro desce o carrinho desloca-se para a direita e vice-versa.

Derivando novamente essa última equação em ordem ao tempo, conclui-se que a aceleração do carrinho segundo a trajetória também é o dobro do que a aceleração do cilindro segundo a sua trajetória:

$$\ddot{x} = -2\ddot{y} \tag{2.27}$$

Essas relações entre as posições, velocidades e acelerações implicam que o sistema tem apenas um grau de liberdade. Uma vez conhecidas as expressões para a posição, velocidade e aceleração de um dos objetos, as expressões da posição, velocidade e aceleração do outro objeto serão obtidas multiplicando (ou dividindo) por 2.

Um segundo exemplo, com dois graus de liberdade, é o sistema de três roldanas e três cilindros na figura 2.13. As alturas dos três cilindros são determinadas pelos valores das 3 distâncias y_A, y_B e y_C; como existe um único fio em movimento, existe apenas uma restrição (comprimento do fio constante), que permitirá expressar uma das três distâncias em função das outras duas.

O comprimento do fio é,

$$L = y_\text{A} + 2y_\text{B} + y_\text{C} + \text{constante} \tag{2.28}$$

em que a constante é a soma de metade dos perímetros das roldanas, que não é importante conhecer, já que vai desaparecer quando a equação for derivada e só altera as posições num valor constante.

A derivada da equação anterior em ordem ao tempo é,

$$\dot{y}_\text{A} + 2\dot{y}_\text{B} + \dot{y}_\text{C} = 0 \tag{2.29}$$

Neste caso existem vários possíveis movimentos; por exemplo, se o cilindro A estiver a subir e o cilindro C estiver a descer com a mesma velocidade, o cilindro B permanecerá estático; ou um dos cilindros poderá estar a descer e os outros dois a subir. O que sim não é possível é que os 3 cilindros estejam simultaneamente a descer ou a subir.

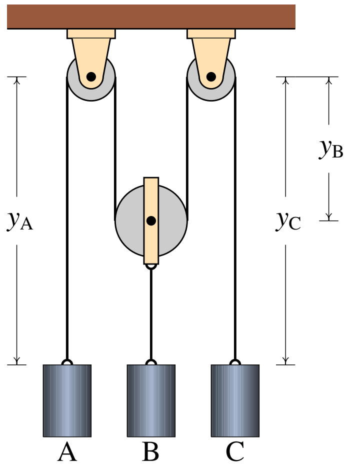
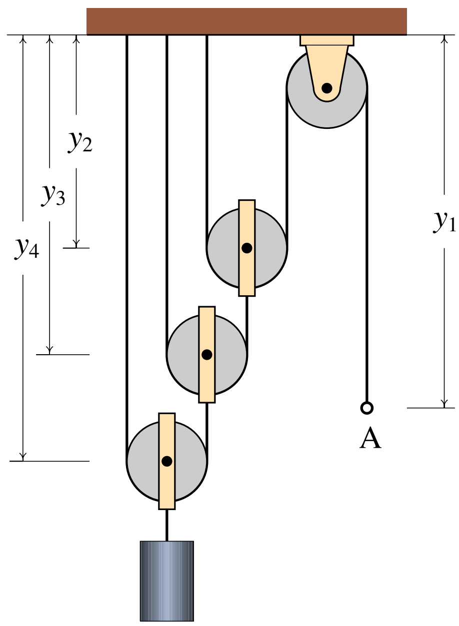


Figura 2.13.: Sistema com três movimentos dependentes e dois graus de liberdade.

A derivada da equação (2.29) conduz à relação entre as acelerações,

$$\ddot{y}_A + 2\,\ddot{y}_B + \ddot{y}_C = 0 \tag{2.30}$$

Exemplo 2.3
No sistema da figura, calcule o valor da velocidade com que sobe o cilindro, quando o anel A for puxado para baixo com velocidade de valor 2 m/s.



Resolução: Neste caso há 4 sistemas em movimento, as três roldanas móveis e o anel A (o movimento do cilindro é igual ao da roldana móvel da qual está pendurado) e 3 fios inextensíveis; portanto, este sistema tem apenas um grau de liberdade. Com o valor da velocidade de A dada no enunciado será possível calcular as velocidades de todas as roldanas móveis.
Sendo y_1 a distância desde o teto até o anel e y_2, y_3 e y_4 as distâncias desde o teto até cada uma das roldanas móveis, os comprimentos dos 3 fios são:

$$L_1 = y_1 + 2\,y_2 + \text{constante}$$
$$L_2 = y_3 + (y_3 - y_2) + \text{constante}$$
$$L_3 = y_4 + (y_4 - y_3) + \text{constante}$$

Derivando essas três equações, obtém-se:

$$v_{y1} = -2\,v_{y2} \qquad v_{y2} = 2\,v_{y3} \qquad v_{y3} = 2\,v_{y4}$$

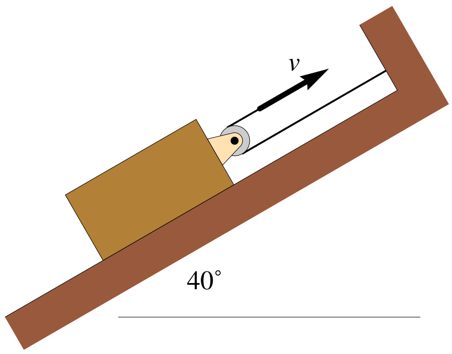
e substituindo, encontra-se a relação entre v_{y1} e v_{y4},

$$v_{y1} = -8\,v_{y4}$$

isto é, o valor da velocidade com que desce o anel é 8 vezes o da velocidade com que o cilindro sobe. Assim sendo, o cilindro sobe com velocidade de valor 0.25 m/s.

Perguntas

1. O bloco na figura encontra-se sobre um plano inclinado a 40°. Um extremo do fio está preso na parede e o outro extremo está a ser deslocado com velocidade de valor v no sentido indicado na figura. Qual será o valor da velocidade do bloco em função de v?



A. v D. $2\,v$
B. $v/2$ E. $v\sin 40°$
C. $v\cos 40°$

2. Um automóvel entra numa curva com velocidade de valor 10 m/s em direção sul e 6 segundos mais tarde continua com o mesmo valor da velocidade, mas em direção oeste. Calcule o módulo da aceleração média durante esse intervalo.

A. 1.67 m/s^2 D. 3.33 m/s^2
B. 2.36 m/s^2 E. 0
C. 2.89 m/s^2

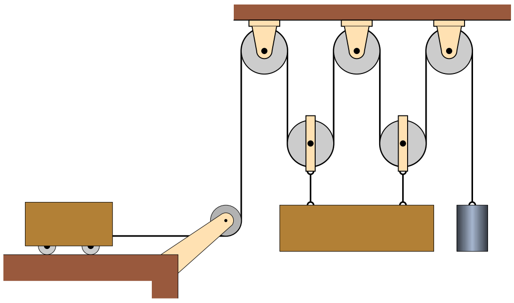
3. Um projétil é disparado formando um ângulo de 40° com a horizontal. Se no ponto mais alto da sua trajetória o valor da sua velocidade é 80 m/s e se a resistência do ar pode ser ignorada, qual foi aproximadamente o valor da velocidade com que foi lançado?

A. 104.4 m/s D. 51.3 m/s
B. 124.5 m/s E. 80 m/s
C. 61.3 m/s

4. Uma partícula que se desloca a 4 m/s na direção do eixo dos y sofre uma aceleração com valor constante 3 m/s^2, na direção do eixo dos x, durante dois segundos. Qual será o valor final da velocidade?

A. 5.0 m/s C. 7.2 m/s E. 10.0 m/s
B. 6.3 m/s D. 8.4 m/s

5. No sistema da figura, com um carrinho, uma barra, um cilindro, 2 roldanas móveis e 4 roldanas fixas, a barra permanece sempre horizontal. Quantos graus de liberdade tem o sistema?



A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

Problemas

1. (a) Demonstre a **Lei dos cossenos**: Em qualquer triângulo com lados de comprimento a, b e c, verifica-se a relação,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$

em que α é o ângulo oposto ao lado de comprimentos a; o teorema de Pitágoras é um caso particular, em que α é um ângulo reto. **Sugestão**: desenhe o triângulo formado por dois vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e a sua soma $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ e calcule o produto $\vec{a}\cdot\vec{a}$.
(b) Dois vetores com módulos de 5 e 8 unidades apontam em duas direções que fazem um ângulo de 42°; usando a lei dos cossenos, calcule o módulo da soma dois vetores.

2. Dados dois vetores $\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 5\,\vec{e}_z$ e $\vec{b} = -\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + 6\,\vec{e}_z$, calcule:

(a) O módulo de cada vetor.

(b) O produto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(c) O ângulo entre os vetores.

(d) A soma $\vec{a} + \vec{b}$.

(e) A diferença $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Uma partícula desloca-se no plano xy. A velocidade, em função do tempo, é dada pela expressão: $\vec{v} = 3\,\mathrm{e}^{-2t}\,\vec{e}_x - 5\,\mathrm{e}^{-t}\,\vec{e}_y$ (SI). No instante $t = 0$ a partícula encontra-se no eixo dos y, na posição $2\,\vec{e}_y$.

(a) Determine em que instante passará pelo eixo dos x e a que distância da origem estará nesse instante.

(b) Calcule a aceleração em $t = 0$ e no instante em que passa pelo eixo dos x.

4. Um corpo encontra-se inicialmente na posição $\vec{r}_0 = 3\,\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$ (unidades SI) com velocidade $\vec{v}_0 = 5\,\vec{e}_y + 4\,\vec{e}_z$. Em qualquer instante, a aceleração é dada pela expressão $\vec{a} = 2\,t^2\,\vec{e}_x + 3\,t\,\vec{e}_z$. Encontre as expressões para a velocidade e a posição em função do tempo.

5. Um projétil é lançado desde o chão, com uma inclinação de 30° com a horizontal. Que valor deverá ter a velocidade inicial para que bata no chão a 30 m do ponto de lançamento? (admita que a resistência do ar pode ser desprezada.)

6. Uma pedra roda pelo telhado de uma casa, que faz um ângulo de 20° com a horizontal. No instante em que a pedra abandona o telhado e cai livremente, o valor da sua velocidade é 4 m/s e encontra-se a uma altura de 6 m. Admitindo que a resistência do ar é desprezável,

(a) Calcule o tempo que demora a cair ao chão, desde o instante em que abandona o telhado.

(b) A que distância horizontal bate a pedra no chão, em relação ao ponto onde abandonou o telhado?

(c) Calcule o ângulo que a velocidade da pedra faz com a vertical no instante em que bate no chão.

7. Quando o motor de um barco funciona na potência máxima, o barco demora 20 minutos a atravessar um canal com 1.5 km de largura, num dia em que o valor da velocidade da corrente no rio é 1.2 m/s; calcule o valor da velocidade do barco, (a) em relação à Terra e (b) em relação à água. (c) Determine o tempo mínimo que o barco demorava a atravessar o mesmo canal, num dia em que o valor da velocidade da corrente fosse 0.8 m/s.

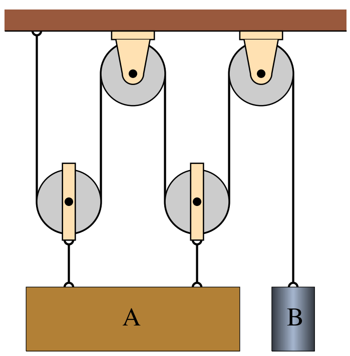
8. Dentro de um comboio que se desloca horizontalmente, com velocidade de valor constante 35 km/h, um passageiro em pê numa cadeira lança horizontalmente um objeto, no sentido oposto ao deslocamento do comboio. Em relação ao chão da carruagem, o objeto foi lançado desde uma altura de 3 m e desloca-se horizontalmente 3 m antes de bater no chão. Em relação ao referencial da Terra, qual foi a distância horizontal percorrida pelo objeto antes de bater no chão?

9. Um objeto parte da origem em $t = 0$ e em $t > 0$ a sua posição é dada pelo vetor $\vec{r} = 3\,(1 - \mathrm{e}^{-t})\,\vec{e}_x + 4\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)\vec{e}_y$ (unidades SI).

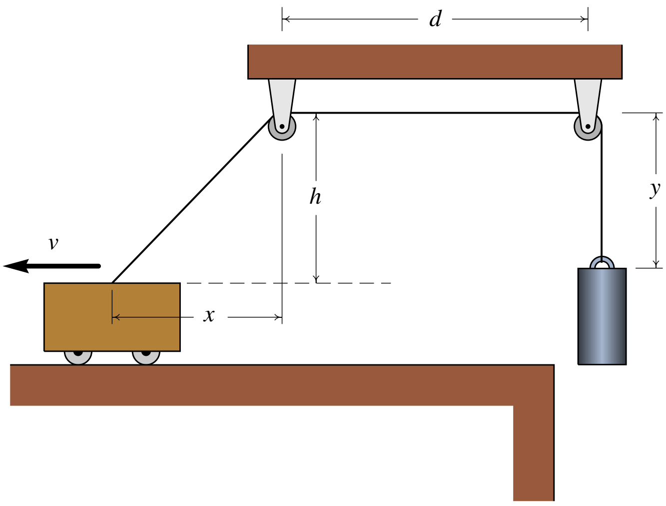
(a) A que distância da origem estará o objeto quando $t \to \infty$?

(b) Calcule a distância total percorrida desde $t = 0$ até $t \to \infty$ (encontrará um integral que não pode ser calculado por métodos analíticos; poderá ser resolvido numericamente, no Maxima, usando a função `romberg`, que precisa os mesmos argumentos do que a função `integrate`; em vez de usar $t = \infty$, comece por usar $t = 10$ e aumente esse valor gradualmente até obter o valor assimptótico).

10. No sistema da figura, encontre a relação entre os valores das velocidades e das acelerações da barra A e do cilindro B, admitindo que a barra A permanece sempre horizontal.



11. O carrinho na figura desloca-se para a esquerda, com velocidade de valor constante 4 m/s. Sabendo que a altura h é igual a 25 cm e arbitrando $t = 0$ no instante em que a distância x é nula, encontre expressões para os valores da velocidade e da aceleração do cilindro (admita que os raios das roldanas podem ser desprezados).



Respostas

Perguntas: **1.** B. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** B.

Problemas

1. (*a*) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}$. Como o ângulo entre os dois vetores é $\theta = 180° - \alpha$, segue que $\vec{b}\cdot\vec{c} = b\,c\,\cos(180° - \alpha) = -a\,b\,\cos\alpha$
(*b*) 12.18 unidades.

2. (*a*) $a = 5\sqrt{2}$, $b = \sqrt{41}$. (*b*) -25. (*c*) 123.5°. (*d*) $2\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + \vec{e}_z$. (*e*) $4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 11\vec{e}_z$.

3. (*a*) $t = 0.5108$ s, $x = 0.96$ m.
(*b*) Em $t = 0$, $\vec{a} = (-6\vec{e}_x + 5\vec{e}_y)$ m/s^2. Quando passa pelo eixo dos x, $\vec{a} = (-2.16\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$ m/s^2.

4. $\vec{v} = \frac{2}{3}t^3\,\vec{e}_x + 5\,\vec{e}_y + \left(4 + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{e}_z$

$$\vec{r} = \left(3 + \frac{t^4}{6}\right)\vec{e}_x + (1 + 5\,t)\,\vec{e}_y + \left(-1 + 4\,t + \frac{t^3}{2}\right)\vec{e}_z$$

5. $v = 18.43$ m/s.

6. (*a*) 0.976 s. (*b*) 3.67 m. (*c*) 19.0°.

7. (*a*) 1.25 m/s. (*b*) 1.73 m/s. (*c*) 16 minutos e 20 segundos.

8. 4.6 m.

9. (*a*) 5 m. (*b*) 5.23 m.

10. $v_B = 4\,v_A$, $a_B = 4\,a_A$

11. $v = \dfrac{64\,t}{\sqrt{256\,t^2 + 1}} \qquad a_t = \dfrac{64\sqrt{256\,t^2 + 1}}{65536\,t^4 + 512\,t^2 + 1} \qquad$ (SI)

3. Movimento curvilíneo

As fortes acelerações sentidas numa montanha russa não são devidas apenas aos aumentos e diminuições de velocidade, mas são causadas também pelo movimento curvilíneo. A taxa de aumento da velocidade é apenas uma das componentes da aceleração, a aceleração segundo a trajetória. A outra componente da aceleração depende da velocidade e do raio de curvatura da trajetória como se demonstra neste capítulo.

3.1. Versor tangencial

Em cada ponto de uma trajetória pode definir-se um **versor tangencial** $\vec{e}_t$, na direção tangente à trajetória e no sentido em que a posição s aumenta. A figura 3.1 mostra o versor tangencial em três pontos A, B e P de uma trajetória.

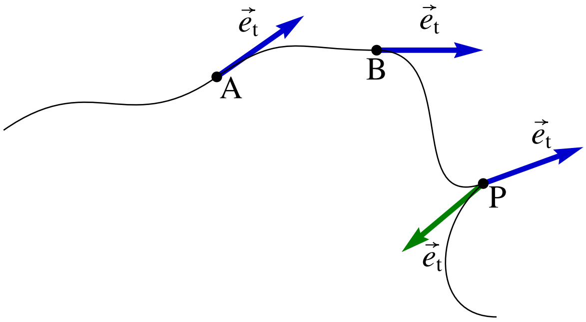


Figura 3.1.: Versor tangencial $\vec{e}_t$ em três pontos da trajetória.

Observe-se que no ponto P existem dois versores tangenciais. Um deles é tangente à curva entre B e P e o outro é tangente à curva entre P e os pontos seguintes. O vetor velocidade de um corpo que segue essa trajetória será sempre na mesma direção do versor tangencial (o sentido pode ser o mesmo ou oposto). Nos pontos como P, onde existem dois vetores tangenciais, a velocidade é necessariamente nula; o corpo fica momentaneamente em repouso nesse ponto, começando logo a deslocar-se em outra direção diferente à que seguia antes de parar.

Nos pontos onde a velocidade não é nula, existe sempre um único versor tangencial $\vec{e}_t$, que define a direção do vetor velocidade. Ou seja, a velocidade vetorial pode ser escrita,

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t \tag{3.1}$$

Conforme referido no capítulo 2, a velocidade vetorial $\vec{v}$ é igual à derivada do vetor posição $\vec{r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.2}$$

O vetor posição $\vec{r}$ não tem de ter nenhuma relação com o versor tangencial, já que $\vec{r}$ depende do ponto que esteja a ser usado como origem do referencial (ver figura 3.2). No entanto, a equação (3.2) garante que, independentemente da escolha do referencial, o vetor deslocamento, $d\vec{r}$ será sempre o mesmo.

Se $\Delta\vec{r}$ for o vetor deslocamento durante um intervalo de tempo Δt (figura 3.2), a distância percorrida durante esse intervalo, $|\Delta s|$, é sempre maior ou igual que o módulo de $\Delta\vec{r}$. A distância percorrida é medida sobre a trajetória, enquanto que o módulo do deslocamento é medido no segmento de reta entre os pontos inicial e final.

O módulo de $\Delta\vec{r}$ só seria igual a Δs se a trajetória fosse reta, com versor tangencial constante. No limite quando Δt for muito pequeno, os dois pontos estarão muito próximos na trajetória e, assim sendo, a direção de $\Delta\vec{r}$ será aproximadamente a mesma direção do

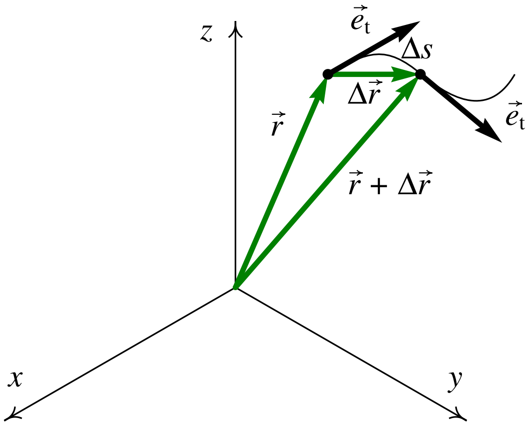


Figura 3.2.: Deslocamento vetorial entre dois pontos nas posições $\vec{r}$ e $\vec{r}+\Delta\vec{r}$.

versor tangencial e o módulo de $\Delta\vec{r}$ será aproximadamente igual a $|\Delta s|$; isto é, o vetor deslocamento é aproximadamente igual a $\Delta s\,\vec{e}_t$. A derivada do vetor posição é então,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\,\vec{e}_t \tag{3.3}$$

E, substituindo na equação (3.2), obtém-se,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s}\,\vec{e}_t} \tag{3.4}$$

O valor da velocidade, em qualquer movimento, é sempre igual à derivada da posição na trajetória, s, em ordem ao tempo. Este resultado explica porquê no capítulo 1 denominou-se "velocidade" à derivada $\dot{s}$, já que $\dot{s}$ não é apenas uma componente da velocidade mas sim o valor da velocidade.

3.2. Versor normal

A aceleração vetorial $\vec{a}$ é igual à derivada da velocidade em ordem ao tempo e, como tal, obtém-se derivando o lado direito da equação (3.4):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \dot{s}\,\frac{d\vec{e}_t}{dt} \tag{3.5}$$

Observe-se que a derivada do vetor tangencial não é nula, porque esse vetor não é necessariamente igual em diferentes instantes. A figura 3.3 mostra como calcular a derivada de $\vec{e}_t$. Deslocando os dois versores tangenciais dos pontos A e B da figura 3.1 para um ponto comum, o aumento de $\vec{e}_t$ no intervalo desde A até B é o vetor $\Delta\vec{e}_t$ que une os dois vetores.

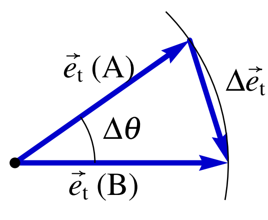


Figura 3.3.: Variação do versor tangencial.

Sendo o módulo de $\vec{e}_t$ igual a 1, os dois versores $\vec{e}_t$ na figura 3.3 descrevem um arco de círculo com raio 1 e ângulo $\Delta\theta$. Se o ângulo for medido em radianos, o comprimento desse arco será igual a $\Delta\theta$. Se o intervalo de tempo Δt for aproximadamente zero, os dois pontos considerados, A e B, estarão muito próximos na trajetória, o vetor $\Delta\vec{e}_t$ será perpendicular à trajetória e o seu módulo será aproximadamente igual ao arco de círculo $\Delta\theta$; conclui-se que a derivada de $\vec{e}_t$ é,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\vec{e}_n = \dot{\theta}\,\vec{e}_n \tag{3.6}$$

em que $\vec{e}_n$ é o **versor normal**, perpendicular à trajetória, e $\dot{\theta}$ representa o valor da **velocidade angular**. Substituindo essa derivada na equação (3.5), obtém-se a expressão para a aceleração:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \dot{s}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_n} \tag{3.7}$$

Concluindo, a aceleração tem uma componente tangencial à trajetória e uma componente normal (perpendicular) à trajetória. A componente tangencial da aceleração, $a_t = \ddot{s}$, é a aceleração segundo a trajetória já introduzida no capítulo 1. A componente normal da aceleração é igual ao produto do valor da velocidade $\dot{s}$ pelo valor da velocidade angular $\dot{\theta}$,

$$a_n = \dot{s}\,\dot{\theta} \tag{3.8}$$

($\ddot{s}$ pode ser positiva ou negativa, mas o produto $\dot{s}\,\dot{\theta}$ é sempre positivo).

Tendo em conta que os versores $\vec{e}_t$ e $\vec{e}_n$ são perpendiculares em todos os pontos da trajetória, a equação (3.7) implica que o módulo da aceleração, $|\vec{a}|$, é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos são as componentes tangencial e normal da aceleração; o teorema de Pitágoras para esse triângulo é então,

$$\boxed{a^2 = a_t^2 + a_n^2} \tag{3.9}$$

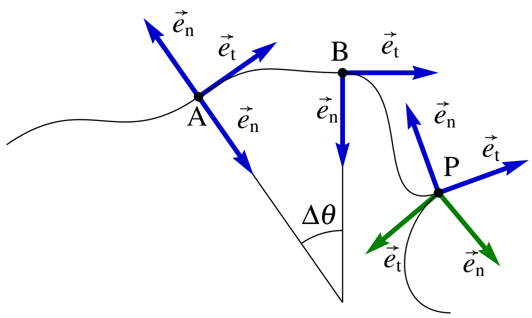


Figura 3.4.: Versores tangencial e normal em alguns pontos da trajetória.

O ângulo de rotação do versor tangencial, $\Delta\theta$, é também igual ao ângulo de rotação do versor normal $\vec{e}_n$. A figura 3.4 mostra os versores normais nos mesmos pontos A e B da trajetória na figura 3.1. Repare-se que no ponto A existem dois versores normais, com a mesma direção mas sentidos opostos, porque a trajetória curva-se para cima antes do ponto A, mas a partir do ponto A começa a curvar-se para baixo. Esse tipo de ponto, onde o sentido da curvatura muda, denomina-se **ponto de inflexão**.

No ponto P (figura 3.4) existem duas direções normais, porque, conforme referido na secção anterior, existem dois versores tangenciais. Em qualquer ponto o versor normal aponta no sentido em que a trajetória se curva, excepto no caso de uma trajetória retilínea, em que existem infinitos versores perpendiculares ao versor tangencial $\vec{e}_\text{t}$.

A figura 3.5 mostra o versor normal no início e no fim do percurso entre os pontos A (instante t_0) e B (instante $t_0 + \Delta t$) correspondente ao movimento da figura 3.4. As direções dos dois versores normais cruzam-se num ponto comum C. As distâncias desde C até os pontos A e B são diferentes (R_A e R_B), mas serão iguais no limite $\Delta t \to 0$, em que o ponto C aproxima-se do centro de curvatura da curva. A distância desde o centro de curvatura num instante e o ponto da trajetória, nesse mesmo instante, é o raio de curvatura, R, da trajetória.

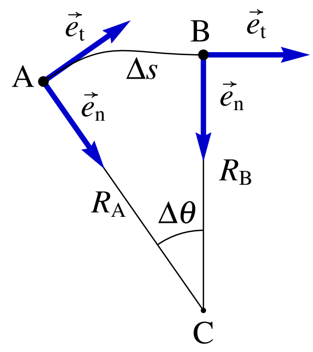


Figura 3.5.: Raio de curvatura.

Em cada ponto da trajetória existe um centro e um raio de curvatura. Cada percurso infinitesimal de comprimento $\mathrm{d}\,s$ pode ser aproximado por um arco de circunferência de raio R e ângulo $\mathrm{d}\,\theta$; a distância percorrida é o comprimento desse arco, $\mathrm{d}\,s = R\,\mathrm{d}\,\theta$. Assim sendo, conclui-se que o valor da velocidade angular é,

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{R\,\Delta t} = \frac{\dot{s}}{R} \tag{3.10}$$

Ou seja, em cada ponto da trajetória o valor da velocidade angular $\dot{\theta}$ é igual ao valor da velocidade, $\dot{s}$, dividida pelo raio de curvatura R nesse ponto. Usando este resultado, a componente normal da aceleração, a_n, pode ser escrita do modo seguinte

$$\boxed{a_\text{n} = \frac{v^2}{R}} \tag{3.11}$$

O versor normal e a componente normal da aceleração, apontam sempre no sentido do centro de curvatura. Como tal, a componente normal da aceleração, a_n, é chamada habitualmente **aceleração centrípeta**.

Exemplo 3.1

A posição de uma partícula, em função do tempo t, é dada pela expressão (SI):

$$\vec{r} = 5\,t\,\vec{e}_x + \frac{3}{2} t^2\,\vec{e}_y + 2(1 - t^2)\,\vec{e}_z$$

Determine a expressão para o raio de curvatura da trajetória em função do tempo e calcule o raio de curvatura em $t = 0$ e $t = 1$.

Resolução: Para determinar a expressão do raio de curvatura é necessário saber as expressões do valor da velocidade e da componente normal da aceleração, em função do tempo. Essas expressões podem ser obtidas a partir da velocidade e da aceleração. Usando o Maxima calculam-se esses vetores do modo seguinte

```
(%i1) vetor_r: [5*t, 3*t^2/2, 2*(1-t^2)]$
(%i2) vetor_v: diff (vetor_r, t);
(%o2)                    [5, 3 t, - 4 t]
(%i3) vetor_a: diff (vetor_v, t);
(%o3)                      [0, 3, - 4]
```

Os valores da velocidade, v, e da aceleração, a, são os módulos desses vetores (o produto escalar no Maxima representa-se por um ponto entre os vetores):

```
(%i4) v: sqrt (vetor_v.vetor_v);
                                   2
(%o4)                    sqrt(25 t  + 25)
(%i5) a: sqrt (vetor_a.vetor_a);
(%o5)                            5
```

repare-se que o valor da aceleração é constante, o que implica uma trajetória parabólica ou linear. Para calcular a componente normal da aceleração, calcula-se primeiro a componente tangencial da aceleração, $\dot{v}$,

```
(%i6) at: diff (v, t);
                              25 t
(%o6)                   ----------------
                                  2
                        sqrt(25 t  + 25)
```

e, usando a equação (3.9), obtém-se a componente normal da aceleração:

```
(%i7) an: ratsimp (sqrt (a^2 - at^2));
                                5
(%o7)                     ------------
                                 2
                          sqrt(t  + 1)
```

As componentes tangencial e normal da aceleração dependem do tempo, embora o valor da aceleração seja constante; isso já aponta para o facto de que a curvatura da trajetória não será constante e, como tal, a trajetória será parabólica. Usando a equação (3.11) determina-se o raio de curvatura,

```
(%i8) R: ratsimp (v^2/an);
```

Que produz o resultado $R = (5t^2+5)\sqrt{1+t^2}$.

Nos instantes $t = 0$ e $t = 1$ os raios de curvatura são,

```
(%i9) subst (t=0, R);
(%o9)                           5
(%i10) float (subst (t=1, R));
(%o10)                  14.14213562373095
```

3.3. Movimento circular

No caso em que o raio de curvatura R é constante e o centro de curvatura permanece fixo, a trajetória é uma circunferência e o movimento é circular, como no caso ilustrado na figura 3.6. Para determinar a posição em cada instante, bastará um único grau de liberdade, que pode ser posição na circunferência, s, ou o ângulo θ.

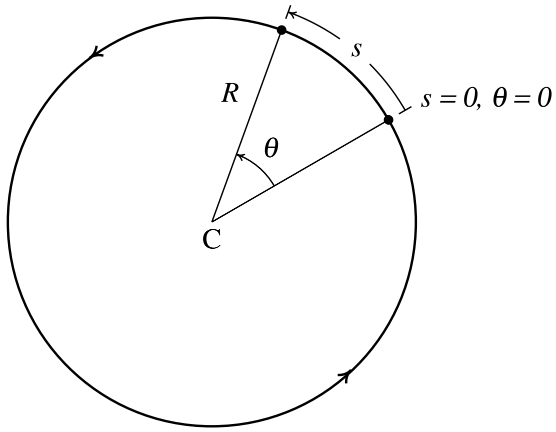


Figura 3.6.: Duas posições numa trajetória de um movimento circular.

A relação entre o ângulo e a posição na trajetória, se a origem usada para medir as duas e o sentido positivo são os mesmos (ver figura 3.6), é

$$\boxed{s = R\,\theta} \tag{3.12}$$

Sendo R constante, derivando os dois lados da equação anterior obtém-se,

$$\boxed{v = R\,\omega} \tag{3.13}$$

em que ω representa o valor da velocidade angular, $\dot{\theta}$. A equação (3.13) é a mesma equação (3.10), mas aqui está a ser aplicada no caso particular em que R é constante. A equação anterior é geral, independentemente de que v e ω sejam constante ou não. Caso os valores das velocidades angular e linear sejam constantes, o movimento será circular uniforme.

Derivando os dois lados da equação (3.13) em ordem ao tempo obtém-se,

$$\boxed{a_\mathrm{t} = R\,\alpha} \tag{3.14}$$

onde $\alpha = \dot{\omega}$ é o valor da **aceleração angular**. A aceleração centrípeta é dada pela equação (3.11), que pode ser escrita também em função do valor da velocidade angular,

$$\boxed{a_\mathrm{n} = R\,\omega^2 = v\,\omega} \tag{3.15}$$

No caso particular do **movimento circular uniforme**, a aceleração angular é nula e a velocidade angular tem valor constante,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{3.16}$$

Nesse caso, define-se o **período** T, igual o tempo que demora o ponto em dar uma volta completa ($\Delta\theta = 2\pi$ radianos),

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{3.17}$$

A **frequência** de rotação, f, igual ao inverso do período, é o número do voltas que o ponto dá por unidade de tempo.

A relação entre o ângulo de rotação θ e os valores da velocidade angular ω e da aceleração angular α, é análoga à relação entre a posição na trajetória, s, o valor da velocidade, v, e a aceleração segundo a trajetória, a_t,

$$\omega = \dot{\theta} \qquad \alpha = \dot{\omega} \qquad \alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\theta} \tag{3.18}$$

Estas são as equações cinemáticas para o movimento de rotação, que podem ser resolvidas usando o mesmo método usado no capítulo 1. As equações (3.12), (3.13) e (3.14) mostram que as variáveis cinemáticas de translação (s, v, a_t) sou todas iguais ao produto da respetiva variável cinemática de rotação, (θ, ω, α), pelo raio de curvatura R.

3.4. Cinemática dos corpos rígidos

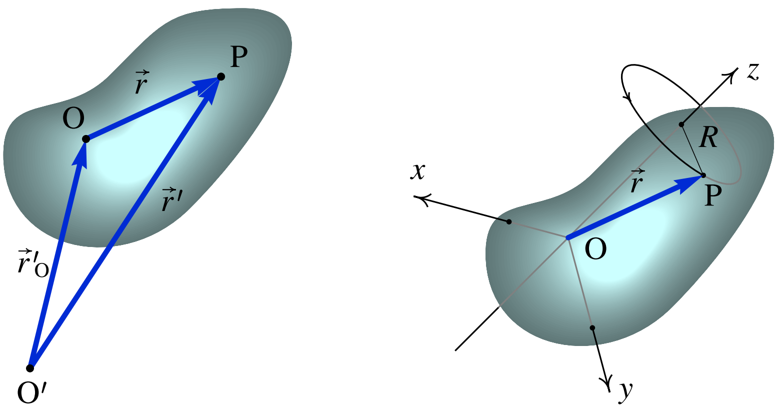


Figura 3.7.: Corpo rígido em movimento e referencial Oxyz que se desloca com ele.

A figura 3.7 mostra um corpo rígido em movimento. O ponto O' é a origem de um referencial externo fixo e o ponto O é um ponto do corpo, usado como origem de um referencial Oxyz que se desloca com o corpo. Um ponto P do corpo rígido tem vetor posição $\vec{r}\,'$, no referencial fixo, e $\vec{r}$ no referencial que se desloca com o corpo rígido. A relação entre esses dois vetores é a seguinte

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_{\mathrm{O}} \tag{3.19}$$

No referencial Oxyz, em que o ponto O está estático, qualquer possível movimento do corpo rígido deixará sempre estáticos os pontos numa reta que passa por O. Seria impossível conseguir que todos os pontos, excepto O, mudassem de posição. A reta que passa por O e que permanece estática é o eixo de rotação do sólido, e na figura 3.7 foi escolhido como eixo dos z. Em diferentes instantes o eixo de rotação pode ser diferente, mas admite-se que os eixos x, y e z permanecem sempre nas mesmas direções.

Conforme referido na secção 2.2, como o referencial Oxyz tem apenas movimento de translação e as direções dos 3 eixos permanecem constantes, a velocidade e a aceleração do ponto P, em relação ao referencial fixo, são iguais à velocidade e aceleração em relação ao referencial do corpo rígido, mais a velocidade e aceleração do ponto O, relativas ao referencial fixo

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'_{\mathrm{O}} \qquad \vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}\,'_{\mathrm{O}} \tag{3.20}$$

O módulo do vetor $\vec{r}$ e o ângulo que esse vetor faz com eixo dos z permanecem constantes (figura 3.7). O ponto P descreve um movimento circular, num plano paralelo ao plano xy, com centro no eixo dos z e com raio R, como mostra a figura 3.8. A velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$, relativas ao referencial que se desloca com o corpo rígido, são a velocidade e a aceleração do movimento circular do ponto P. De acordo com os resultados da secção anterior, o valor da velocidade v é,

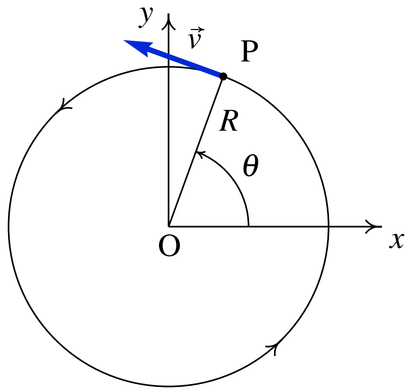


Figura 3.8.: Trajetória no referencial do corpo rígido.

$$v = R\,\omega \tag{3.21}$$

e as componentes normal e tangencial da aceleração $\vec{a}$ são,

$$a_{\mathrm{n}} = R\,\omega^2 \qquad a_{\mathrm{t}} = R\,\alpha \tag{3.22}$$

Para poder escrever a velocidade e aceleração em forma vetorial, é conveniente introduzir coordenadas cilíndricas. A figura 3.9 mostra as três coordenadas cilíndricas (R, θ, z) do Ponto P. O plano que passa por P, paralelo ao plano xy, corta o eixo dos z num ponto Q; z é a distância desde esse ponto até à origem O e R é a distância desde o ponto P até o ponto Q. O ângulo θ é o ângulo que a projeção do segmento PQ, no plano xy, faz com o semi eixo positivo dos x.

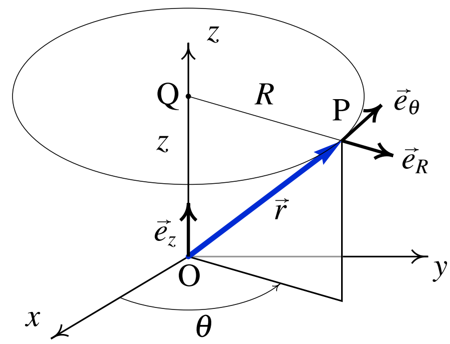


Figura 3.9.: Coordenadas cilíndricas.

Os três versores perpendiculares associados às coordenadas cilíndricas são os versores $\vec{e}_R$, $\vec{e}_\theta$ e $\vec{e}_z$. O versor $\vec{e}_z$ é fixo; os outros dois versores apontam em diferentes direções nos diferentes pontos do espaço, mas estão sempre num plano paralelo ao plano xy. O versor $\vec{e}_R$ tem a direção do segmento PQ, no sentido que se afasta do eixo dos z. O versor $\vec{e}_\theta$ tem direção tangente à circunferência com centro em Q e que passa pelo ponto P, no sentido em que θ aumenta.

A direção da velocidade $\vec{v}$ é a mesma do versor $\vec{e}_\theta$. Como o valor da velocidade angular ω é a derivada do ângulo θ em ordem ao tempo, ω positiva corresponde a rotação no sentido em que θ aumenta e ω negativa implica rotação no sentido oposto. Assim sendo, a expressão para a velocidade é,

$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{e}_\theta \tag{3.23}$$

A componente tangencial da aceleração $\vec{a}$ é na direção do versor $\vec{e}_\theta$ e a direção da componente normal é a direção do versor $\vec{e}_R$, mas no sentido oposto; assim sendo conclui-se que,

$$\vec{a} = R\,\alpha\,\vec{e}_\theta - R\,\omega^2\,\vec{e}_R \tag{3.24}$$

3.5. Produto vetorial

É conveniente definir a velocidade angular em forma vetorial, $\vec{\omega}$, representada na figura 3.10. O vetor $\vec{\omega}$ tem módulo igual ao valor da velocidade angular, ω, direção paralela ao eixo de rotação e sentido segundo a regra da mão direita para a rotação, ou seja, se imaginarmos um sistema de eixos cartesianos em que o eixo dos z aponta na direção e sentido de $\vec{\omega}$, a rotação do corpo rígido será de forma a rodar o eixo dos x aproximando-se do eixo dos y.

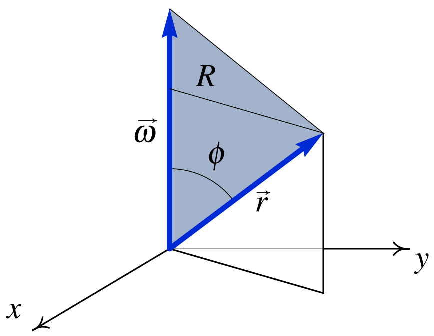


Figura 3.10.: Vetores velocidade angular e posição.

A vantagem de usar um vetor para representar a velocidade angular é que o vetor $\vec{\omega}$ define no espaço o plano do movimento circular, o seu sentido e a velocidade angular. A equação (3.23) pode ser escrita de forma vetorial, independente do sistema de coordenadas utilizado, através do produto vetorial,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{3.25}$$

Por definição, o produto entre dois vetores é outro vetor, com módulo igual ao produto dos módulos dos vetores pelo seno do ângulo entre eles. No caso do produto vetorial $\vec{\omega} \times \vec{r}$, o módulo é $\omega\,r\,\sin\phi$. A figura 3.10 mostra o ângulo ϕ entre os vetores. O produto $r\sin\phi$ é igual a R, já que é o segmento de reta com comprimento R na figura 3.10 é perpendicular a $\vec{\omega}$. Assim sendo, o módulo de $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é igual a $R\,\omega$, que é igual ao módulo de $\vec{v}$.

O sentido do vetor obtido pelo produto vetorial de dois vetores é definido por uma reta perpendicular ao plano formado pelos dois vetores. Na figura 3.10 vê-se que no caso de $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$ esse plano é perpendicular ao plano xy, de modo que a direção de $\vec{\omega}\times\vec{r}$ será uma reta paralela ao plano xy e perpendicular ao segmento de comprimento R. O sentido do vetor obtido pelo produto vetorial define-se usando a regra da mão direita, desde o primeiro vetor até o segundo; no caso do produto $\vec{\omega}\times\vec{r}$, a regra da mão direita implica que, estendendo os dedos polegar, indicador e médio da mão direita de forma a que fiquem perpendiculares entre si, se o indicador apontar no sentido de ω e o médio no sentido de $\vec{r}$ o polegar apontará no sentido do produto $\vec{\omega}\times\vec{r}$, obtendo-se assim a direção e sentido do versor $\vec{e}_\theta$ no plano dos dois vetores.

O produto vetorial não é comutativo; $(\vec{a}\times\vec{b})$ e $(\vec{b}\times\vec{a})$ são vetores com o mesmo módulo e direção, mas com sentidos opostos. Sendo o ângulo de um vetor consigo próprio zero, o produto $\vec{a}\times\vec{a}$ é nulo. Em particular, $\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{e}_z\times\vec{e}_z=0$. O produto de dois versores perpendiculares é outro versor perpendicular a eles e, é fácil conferir que $(\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z)$, $(\vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x)$ e $(\vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y)$. Usando estas propriedades e a propriedade distributiva, o produto $\vec{a}\times\vec{b}$, em função das componentes cartesianas dos vetores, é igual a

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z)\\ &= (a_y b_z-a_z b_y)\vec{e}_x+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{e}_y+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{e}_z \end{aligned} \tag{3.26}$$

resultado esse que pode ser escrito de forma mais compacta através de um determinante:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{3.27}$$

Observe-se que na figura 3.10 o triângulo sombrejado tem base igual a ω e altura igual a R; assim sendo, a sua área é igual a metade do módulo do produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição: $|\vec{\omega}\times\vec{r}|/2=R\,\omega/2$. Em geral,

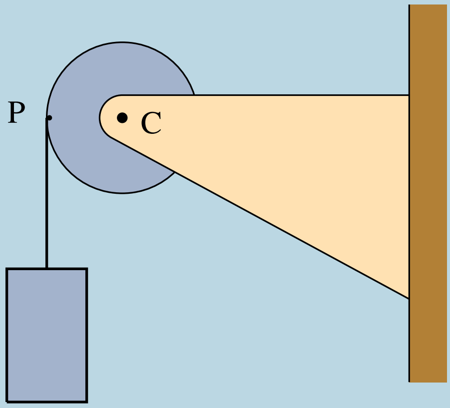
> *A área do triângulo formado por dois vetores com origem comum é igual a metade do módulo do produto vetorial dos vetores.*

As componentes da aceleração dum ponto do corpo rígido, em relação ao referencial que se desloca com o corpo rígido, dadas pela equação (3.24), podem ser escritas também usando produtos vetoriais:

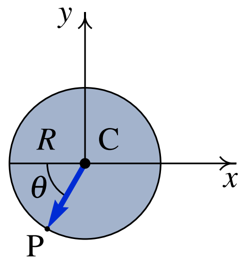
$$\boxed{\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})} \tag{3.28}$$

em que $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular, definida em forma vetorial, igual à derivada do vetor velocidade angular. Lembre-se que este resultado é válido unicamente se os eixos do referencial em movimento permanecem sempre nas mesmas direções; o cálculo da derivada de $\vec{\omega}$ deverá ser feito nesse sistema de eixos.

Exemplo 3.2
Cola-se um extremo de um fio numa roldana com raio de 5 cm, enrolando-o e pendurando um bloco do outro extremo (ver figura). No instante inicial o bloco e a roldana estão em repouso e o ponto P da roldana encontra-se à mesma altura do seu centro C. O bloco começa a descer, com aceleração constante de valor igual a $g/4$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P, dois segundos após o instante inicial.



Resolução. Escolhe-se um sistema de coordenadas, que pode ser o que se mostra na figura, com origem no centro da roldana. A figura mostra também a posição do ponto P quando a roldana já rodou um ângulo θ desde a posição inicial. O vetor posição do ponto P é,



$$\vec{r}_P = -R\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Para calcular a velocidade do ponto P, é necessária também a velocidade angular, que pode ser obtida a partir do valor da velocidade do bloco. Para encontrar uma expressão para o valor da velocidade do bloco, integra-se a equação cinemática $\dot{v}_b = a_t$

$$\dot{v}_b = \frac{g}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad v_b = \frac{g\,t}{4}$$

Como todos os pontos do fio têm esse mesmo valor da velocidade e os pontos da superfície acompanham o movimento do fio, esse será também o valor da velocidade dos pontos na superfície da roldana e o valor da velocidade angular da roldana será $v_b/R = g\,t/(4R)$. A velocidade angular é perpendicular ao plano xy e, como a rotação é no sentido anti-horário, será,

$$\vec{\omega} = \frac{g\,t}{4R}\,\vec{e}_z$$

A velocidade do ponto P é igual ao produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição do ponto P:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_P = -\frac{g\,t}{4}\,(\cos\theta\,(\vec{e}_z\times\vec{e}_x) + \sin\theta\,(\vec{e}_z\times\vec{e}_y)) = \frac{g\,t}{4}(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

Se o centro da roldana estivesse em movimento, era necessário adicionar a velocidade do centro. Observe-se que o mesmo resultado podia ter sido obtido derivando $\vec{r}_P$ em ordem ao tempo, mas seria necessário obter primeiro a expressão para θ em função do tempo e os cálculos seriam mais complicados.

A aceleração angular é a derivada da velocidade angular em ordem ao tempo,

$$\vec{\alpha} = \frac{g}{4R}\vec{e}_z$$

e a aceleração do ponto P é,

$$\vec{a}_\text{P} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_\text{P} + \vec{\omega}\times\vec{v}_\text{P} = \frac{g}{4}(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y) + \frac{g^2t^2}{16R}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Para encontrar a expressão para θ em função do tempo, integra-se a equação $\dot{\theta} = \omega$

$$\dot{\theta} = \frac{g\,t}{4R} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{g\,t^2}{8R}$$

substituindo os valores de $t = 2$, $R = 0.05$ e $g = 9.8$, em unidades SI, obtêm-se a velocidade e a aceleração nesse instante,

$$\vec{v}_\text{P} = -2.81\,\vec{e}_x + 4.01\,\vec{e}_y \qquad \vec{a}_\text{P} = -394.8\,\vec{e}_x - 273.3\,\vec{e}_y$$

3.6. Movimentos de translação e de rotação dependentes

Numa roda em movimento sobre uma superfície, sem derrapar, o ângulo de rotação e o deslocamento da roda estão relacionados. Na figura 3.11, uma roda de raio R desloca-se para a direita, sobre uma superfície, sem derrapar.

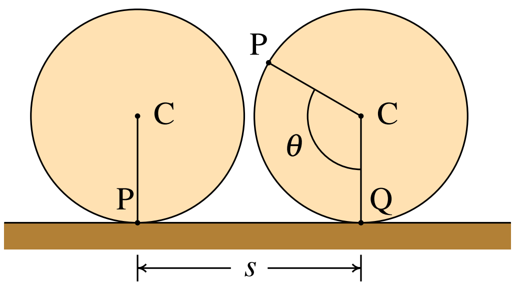


Figura 3.11.: Roda que se desloca sem derrapar.

Num instante inicial um ponto P da roda está em contacto com a superfície; após alguns instantes, a roda rodou um ângulo θ e o centro da roda percorreu uma distância s. O arco de circunferência $R\,\theta$ deverá ser igual à distância percorrida s, já que todos os pontos nesse arco estiveram em contacto com pontos da superfície.

$$s = R\,\theta \tag{3.29}$$

derivando os dois lados da equação, obtém-se a relação entre a velocidade do centro C e a velocidade angular,

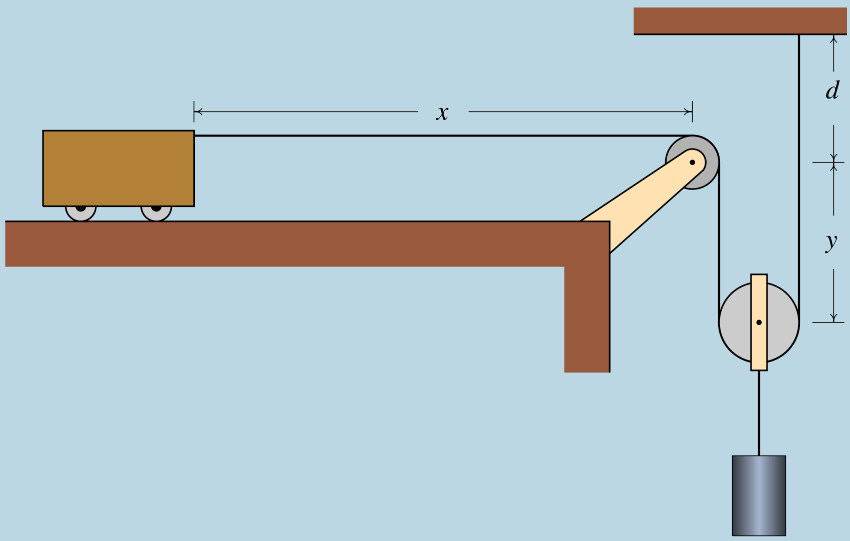
$$v = R\,\omega \tag{3.30}$$

e derivando novamente, observa-se que a aceleração de C segundo a trajetória é igual ao produto do raio pela aceleração angular:

$$a_\text{t} = R\,\alpha \tag{3.31}$$

No caso das roldanas, se a roldana roda sem o fio derrapar sobre a sua superfície, os pontos na superfície da roldana terão a mesma velocidade do fio e subtraindo a velocidade do centro da roldana obtém-se a velocidade do ponto na superfície da roldana, relativa à roldana; o valor dessa velocidade relativa, dividido pelo raio da roldana, deverá ser igual à velocidade angular da roldana.

Exemplo 3.3
A roldana fixa no sistema da figura tem raio de 3 cm e a roldana móvel tem raio de 5 cm. Calcule o valor da velocidade do carrinho e das velocidades angulares das roldanas, no instante em que o cilindro desce com velocidade de valor 1.5 m/s, admitindo que o fio não derrapa nas roldanas.



Resolução. Este sistema já foi estudado na secção 2.4 onde mostrou-se que o valor da velocidade do carrinho é o dobro da velocidade do cilindro. Assim sendo, o valor da velocidade do carrinho é 3 m/s.

Na roldana fixa, o valor da velocidade dos pontos na superfície será o mesmo que no carrinho, 3 m/s e, como tal, o valor da velocidade angular da roldana fixa é,

$$\omega_1 = \frac{3}{0.03} = 100\ \text{s}^{-1}$$

O centro da roldana móvel também desce a 1.5 m/s. No ponto da sua superfície, no lado direito, o fio está estático e, assim sendo, esse ponto desloca-se para cima, em relação ao centro, com velocidade de valor 1.5 m/s. O ponto na superfície da roldana, no lado esquerdo, desloca-se para baixo, com a velocidade do carrinho, 3 m/s, de modo que em relação ao centro da roldana desloca-se para baixo, com velocidade de valor 1.5 m/s. O valor da velocidade angular da roldana móvel é,

$$\omega_2 = \frac{1.5}{0.05} = 30\ \text{s}^{-1}$$

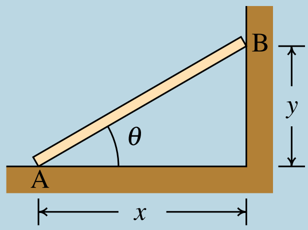
A parte do fio no lado direito da roldana móvel, que permanece estático, pode ser considerado como uma superfície vertical em que a roldana roda como uma roda sobre uma superfície. O valor da velocidade do centro da roda, que é igual ao valor da velocidade do cilindro, é igual ao produto do valor da velocidade angular da roda pelo raio da roda. O valor da velocidade do ponto mais à esquerda na roda, que é o valor da velocidade do carrinho, é o produto do valor da velocidade angular da roda pelo diâmetro da roda. Essa é outra forma de explicar porque o valor da velocidade do carrinho é o dobro do valor da velocidade do cilindro, porque o diâmetro da roda é o dobro do seu raio.

Exemplo 3.4

A barra na figura tem 2 metros de comprimento e está apoiada no chão no ponto A e numa parede no ponto B. No instante inicial $t = 0$ a distância x é igual a 0.5 m e o ponto A começa a deslocar-se para a esquerda com valor da velocidade que dependente de x de acordo com a expressão (SI),

$$v_A = \frac{1}{3} - \frac{x}{6} \qquad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right)$$

em quanto o ponto B desliza pela parede. Determine os valores da velocidade angular da barra e da velocidade do ponto B, em função de x.



Resolução. Este sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser a variável x. Sendo o comprimento da barra igual a 2, as relações entre x e y com o ângulo θ são,

$$x = 2\cos\theta \qquad\qquad y = 2\sin\theta$$

Os valores das velocidades dos pontos A e B são os valores absolutos das derivadas de x e y em ordem ao tempo e derivando as equações acima obtém-se

$$v_\text{A} = 2\,\omega\sin\theta = \omega\,y \qquad\qquad v_\text{B} = 2\,\omega\cos\theta = \omega\,x$$

em que $\omega = \dot{\theta}$ é o valor da velocidade angular da barra.

Pelo teorema de Pitágoras, $y = \sqrt{4 - x^2}$. Substituindo esta expressão e a expressão dada para v_A na primeira equação acima, obtém-se a expressão para o valor da velocidade angular da barra,

$$\omega = \frac{2-x}{6\sqrt{4-x^2}} \qquad (\frac{1}{2} \leq x \leq 2)$$

e substituindo na equação para v_B, obtém-se,

$$v_B = \frac{2x-x^2}{6\sqrt{4-x^2}} \qquad (\frac{1}{2} \leq x \leq 2)$$

A figura 3.12 mostra o gráfico do valor da velocidade de B, desde o instante inicial, em que $x = 0.5$, até o instante em que a barra para, em $x = 2$. A velocidade tem um valor máximo de aproximadamente 9.7 cm/s, quando o ângulo θ é aproximadamente 57°.

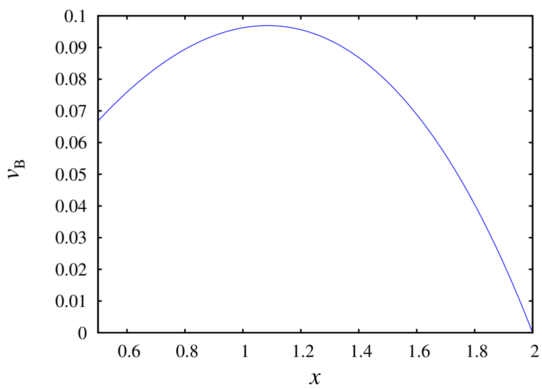


Figura 3.12.: Valor da velocidade do ponto B em função de x(unidades SI).

Perguntas

1. No intervalo de tempo $0 < t < 1$, o valor da velocidade de um objeto em função do tempo verifica a expressão $v = 5 + 3t^2 + 2t^3$. Se a trajetória do objeto for uma reta, qual das cinco funções na lista poderá ser a expressão correta para o valor da aceleração?

A. $a = 5 + 6t + 6t^2$

B. $a = 5$

C. $a = 6t$

D. $a = 5 + 6t$

E. $a = 6t + 6t^2$

2. Um objeto com movimento circular tem aceleração angular com valor constante $\alpha = 3/\pi$ radiano/s^2. Se o objeto parte do repouso, quanto tempo, em segundos, demorará a completar as primeiras 3 voltas?

A. π C. 3π E. 5π

B. 2π D. 4π

3. Um ponto num objeto descreve numa trajetória curva, com velocidade de valor constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. A aceleração é perpendicular à trajetória.

B. O valor da aceleração é constante.

C. A aceleração é tangente à trajetória.

D. A aceleração é constante.

E. A aceleração é nula.

4. Um projétil é lançado com velocidade inicial com valor v_0 e direção inclinada que faz um ângulo θ com o plano horizontal. Determine o raio de curvatura da trajetória parabólica no instante inicial.

A. $\dfrac{v_0^2 \tan\theta}{g}$

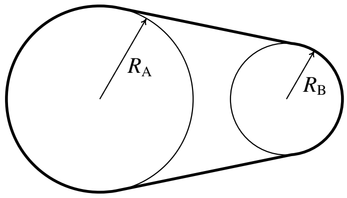
B. $\dfrac{v_0^2 \sin\theta}{g}$

C. $\dfrac{v_0^2 \cos\theta}{g}$

D. $\dfrac{v_0^2}{g \sin\theta}$

E. $\dfrac{v_0^2}{g \cos\theta}$

5. O movimento circular de uma roda de raio R_A é transmitido para outra roda de raio R_B, através de uma correia que se desloca com as rodas, sem derrapar. Qual é a relação entre os valores das velocidades angulares ω_A e ω_B de ambas rodas?



A. $R_A\omega_A = R_B\omega_B$

B. $\omega_A = \omega_B$

C. $R_A^2\omega_A = R_B^2\omega_B$

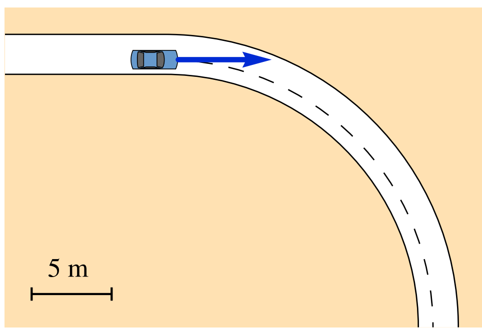
D. $R_B\omega_A = R_A\omega_B$

E. $R_B^2\omega_A = R_A^2\omega_B$

Problemas

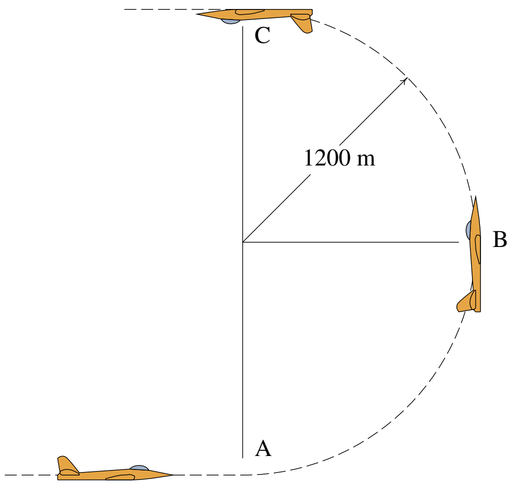
1. No intervalo de tempo $0 \le t \le 10$, os valores da velocidade e da aceleração de uma partícula com movimento em 3 dimensões são dadas pelas funções: $v = t\sqrt{4t^2+9}$ e $a = \sqrt{16t^2+9}$ (unidades SI). Encontre, no mesmo intervalo de tempo, as expressões para: (a) A componente tangencial da aceleração. (b) A componente normal da aceleração. (c) O raio de curvatura.

2. Um motorista entra numa curva a 72 km/h, e trava, fazendo com que o valor da velocidade diminua a uma taxa constante de 4.5 km/h cada segundo. Observando o desenho, faça uma estimativa do raio de curvatura da curva no desenho e calcule o valor da aceleração do automóvel 4 segundos após ter iniciado a travagem.

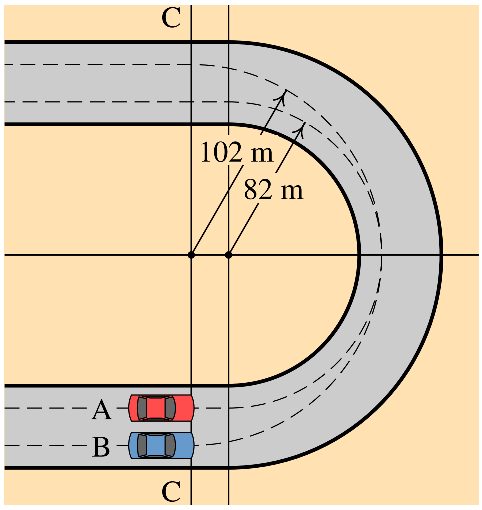


3. A equação da trajetória de um objeto é: $\vec{r} = 8\,cos^2(2t)\,\vec{e}_x + 4\,\sin(4t)\,\vec{e}_y$ (unidades SI e ângulos em radianos). (a) Demonstre que o movimento do objeto é circular uniforme. (b) Calcule o valor da velocidade angular do objeto e o seu período. (c) Encontre a posição do centro da trajetória circular.

4. Um piloto de corridas de aviões executa um loop vertical com 1200 m de raio. O valor da velocidade no ponto A, no início do loop, é 160 m/s e no ponto C, no fim do loop, é 140 m/s. Admitindo que a componente da aceleração tangencial é constante (negativa) durante todo o percurso, calcule o valor da aceleração no ponto B.



5. Dois carros A e B passam por uma curva usando trajetórias diferentes. A figura mostra a curva delimitada pela reta C. O carro B faz um percurso semicircular com raio de 102 m; o carro A avança uma distância em linha reta, a seguir segue um semicírculo com raio 82 m e termina com outro trajeto em linha reta. Os dois carros deslocam-se à velocidade máxima que podem ter para conseguir fazer a curva, que para o tipo de pneus usados corresponde à velocidade que produz uma aceleração normal de $0.8\,g$, onde g é a aceleração da gravidade. Calcule o tempo que demora cada um dos carros a fazer a curva.

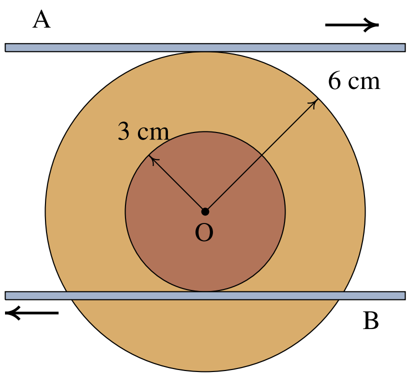


6. (a) Calcule a área do triângulo com vértices nos pontos A, B e C, com coordenadas cartesianas A=(3, 5, 4), B=(-1,2,1) e C=(2,-2,2).
(b) Demonstre a **Lei dos senos**, para um triângulo com lados de comprimentos a, b e c,

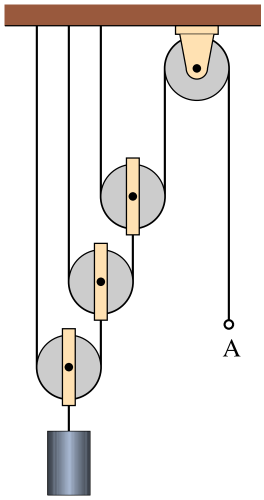
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

em que α, β e γ são os ângulos opostos aos lados a, b e c.

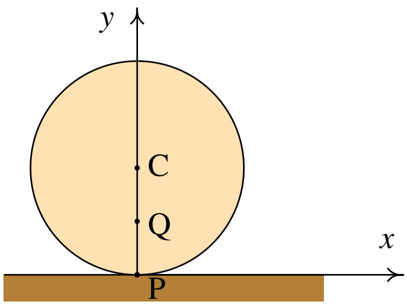
7. A roda na figura tem duas partes com raios de 3 cm e 6 cm, que estão em contacto com duas barras horizontais A e B. A barra A desloca-se para a direita, com valor da velocidade de 10 m/s e a barra B desloca-se para a esquerda com valor da velocidade de 35 m/s, enquanto a roda mantém o contacto com as duas barras, sem derrapar. Determine para que lado se desloca o centro O da roda e calcule os valores da velocidade do ponto O e da velocidade angular da roda.



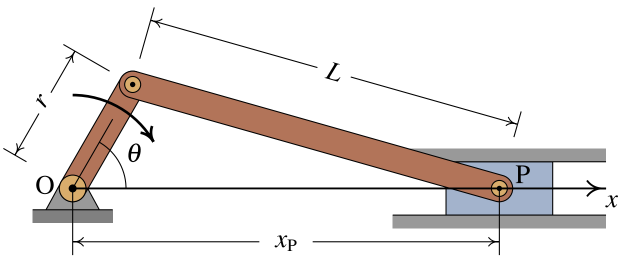
8. Na máquina representada na figura, todas as roldanas têm raio igual a 5 cm. Determine os valores das velocidades angulares das quatro roldanas, quando o anel A for puxado para baixo com velocidade de valor constante 2 m/s.



9. Uma roda com 20 cm de raio desloca-se, sem derrapar, sobre uma superfície plana, ao longo do eixo dos x. No instante $t = 0$ o centro da roda encontra-se em $x = 0$ e $y = 20$ cm e os pontos P e Q da roda são os pontos que estão em $x = 0$ com $y = 0$ e $y = 10$ cm. O valor da velocidade do centro da roda é 2 m/s, constante. (a) Calcule quanto tempo demora a roda a dar duas voltas completas. (b) Represente os gráficos das trajetórias dos pontos P e Q durante o tempo que a roda demora a dar duas voltas.



10. A figura mostra um mecanismo **biela-manivela** usado para transformar movimento circular em movimento retilíneo ou vice-versa. A manivela é a barra de comprimento r que roda à volta de um eixo fixo no ponto O, e a biela é a barra de comprimento L que liga a manivela a um pistão P que só pode deslocar-se ao longo de uma reta. Se o eixo x for escolhido na reta que passa pelo eixo O e o centro P do pistão e θ for o ângulo entre a manivela e o eixo x, (a) demonstre que em qualquer instante a posição x_P do ponto P verifica a seguinte expressão:



$$x_P = r\cos\theta + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\theta}$$

(b) Encontre a relação entre o valor da velocidade angular da manivela e o valor da velocidade do pistão. (c) O comprimento L deverá ser maior que $2\,r$; represente o gráfico de v_P em função do ângulo θ, no caso em que $r = 1$, $L = 4$ e $\omega = 1$ (SI), no sentido indicado na figura, e mostre que a velocidade do pistão é nula quando θ for igual a 0 ou 180°.

Respostas

Perguntas: **1.** E. **2.** B. **3.** A. **4.** E. **5.** A.

Problemas

1. (a) $\dfrac{8t^2+9}{\sqrt{4t^2+9}}$ (*b*) $\dfrac{6t}{\sqrt{4t^2+9}}$ (*c*) $\dfrac{t}{6}\left(4t^2+9\right)^{3/2}$

2. Aproximadamente 14 m/s^2

3. (*a*) A aceleração tangencial é constante, $a_t = 0$, e a velocidade e a aceleração normal são constantes, $v = 16$, $a_n = 64$; num movimento num plano, isso implica movimento circular uniforme. (*b*) $\omega = 4$ rad/s, $T = \pi/2$ (segundos). (*c*) coordenadas (4, 0).

4. 18.85 m/s^2

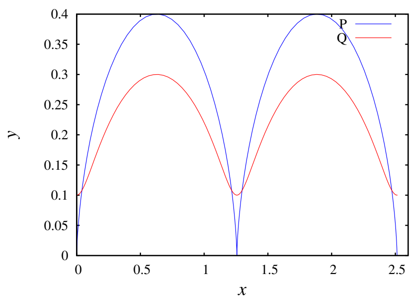
5. 11.74 s para o carro A e 11.33 s para o carro B.

6. (*a*) 14.79 (*b*) Os três produtos ($a\,b\sin\gamma$), ($a\,c\sin\beta$) e ($b\,c\sin\alpha$) são todos iguais ao dobro da área do triângulo; igualando cada par de produtos demonstra-se cada uma das igualdades.

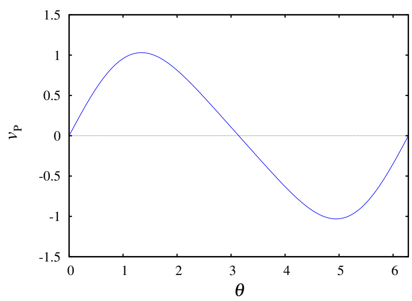
7. Para a esquerda, com $v_O = 20$ m/s e $\omega = 500$ s^{-1}.

8. De esquerda para direita, 5 s^{-1}, 10 s^{-1}, 20 s^{-1} e 40 s^{-1}.

9. (*a*) 1.26 s (*b*)



10. (*b*) $v_P = -\omega\, r\left(\sin\theta + \dfrac{r\sin(2\,\theta)}{2\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\theta}}\right)$



(*c*) Em θ igual a 0 ou a 180°, $\sin\theta$ e $\sin(2\,\theta)$ são ambas nulas, e a expressão da velocidade do ponto P dá o valor 0.

4. Mecânica vetorial

Aos 23 anos Isaac Newton teve uma ideia inovadora que foi a inspiração para a sua teoria da gravitação e da mecânica em geral. Newton pensou que assim como uma maçã cai, devido à atração gravitacional da Terra, a Lua também se encontra em queda livre sob a ação gravitacional da Terra. A razão pela qual a queda livre da Lua não faz diminuir a sua distância à Terra, como no caso da queda da maçã, é porque a Lua tem uma velocidade horizontal muito elevada, de forma que em cada instante a distância horizontal percorrida e a distância vertical da queda descrevem um arco de círculo com raio constante. Com os dados conhecidos na época para a distância entre a Terra e a Lua e o período orbital da Lua, Newton calculou a distância vertical que a Lua cai por unidade de tempo; comparando com a distância da queda de uma maçã, descobriu que a força de atração gravitacional decresce inversamente proporcional à distância ao quadrado.

4.1. Leis de Newton

As três leis de Newton são a base da mecânica clássica, que permite estudar desde o movimento dos objetos à nossa volta, até o movimento dos planetas, estrelas e outros objetos distantes. As 3 leis foram enunciadas de forma clara numa única página do livro escrito por Newton em 1687 (*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*).

4.1.1. Lei da inércia

A primeira lei de Newton, denominada lei da inércia, foi enunciada por Newton no seu livro assim:

LEI I.
Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas.

Os projéteis continuam no seu movimento, a menos que sejam retardados pela resistência do ar ou impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes, pela sua coesão, são continuamente desviadas dos seus movimentos retilíneos, não cessa de rodar se não for retardado pelo ar. Os corpos maiores — planetas e cometas — encontrando menos resistência nos espaços livres, continuam os seus movimentos, retilíneos ou circulares, por tempo muito maior.

Um sistema de referência em que se verifique a lei da inércia, é designado por **referencial inercial**. Consideremos um exemplo: uma esfera colocada em repouso sobre uma mesa horizontal, num comboio, observada por duas pessoas, o passageiro que colocou a esfera na mesa e uma pessoa que está sentada na estação por onde está a passar o comboio.

Em relação à pessoa que está na estação, a esfera poderá estar em repouso, se o combóio estiver parado, ou em movimento se o comboio estiver a andar. Nos dois casos a esfera manterá o seu estado, de repouso ou de movimento uniforme; se o comboio estiver em movimento, com velocidade uniforme e em linha reta, a esfera acompanhará o movimento da mesa no comboio, estando assim em repouso em relação ao passageiro no comboio. Se a velocidade do comboio não for uniforme, a esfera, que mantém a sua velocidade uniforme, rodará para trás, se o comboio estiver a acelerar, ou para a frente, se o comboio estiver a abrandar.

Assim, do ponto de vista do passageiro, a bola apenas manterá o seu estado inicial de repouso se o comboio estiver parado ou com movimento retilíneo e uniforme. Nomeadamente, o comboio em repouso ou com movimento retilíneo e uniforme constitui um referencial inercial, mas ou comboio com movimento não uniforme não será um referencial inercial. Se a velocidade do comboio for uniforme, mas o movimento for ao longo de uma curva, a esfera rodaria para alguns dos lados da mesa e o comboio não seria um referencial inercial.

4.1.2. Força e aceleração

A segunda lei de Newton pode ser considerada a definição do conceito de força na mecânica; define-se em termos do efeito que produz sobre os corpos em que atua. O texto original do livro de Newton é:

> **LEI II.**
> *A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada.*
>
> Se uma força gera uma quantidade de movimento, uma força dupla gerará uma quantidade de movimento dupla, uma força tripla gerará uma quantidade de movimento tripla, quer a força seja impressa de uma vez e imediatamente, quer seja impressa gradual e sucessivamente. E se o corpo já então se movia, a nova quantidade de movimento (sempre dirigida na direção da força atuante) é adicionada ou subtraída à quantidade de movimento inicial, conforme sejam concordantes ou opostas uma da outra; ou juntas obliquamente de forma a produzir uma nova quantidade de movimento composta pela determinação das duas.

Antes de enunciar essa lei, Newton já tinha definido previamente no seu livro a **quantidade de movimento**, que na nossa linguagem vetorial moderna corresponde a um vetor $\vec{p}$, igual ao produto entre a massa da partícula, m, e a sua velocidade,

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \tag{4.1}$$

a quantidade de movimento também costuma ser designada de momento linear.

A "mudança da quantidade de movimento", referida no enunciado da lei, é a quantidade de movimento final, $\vec{p}_2$, menos a quantidade de movimento inicial, $\vec{p}_1$. Na frase "quer a força seja impressa de uma vez e imediatamente, quer seja impressa gradual e sucessivamente" Newton está a referir-se ao integral da força em função do tempo. Consequentemente, em notação vetorial a segunda lei de Newton equivale à seguinte equação:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{4.2}$$

Inicialmente Newton está a considerar apenas uma força $\vec{F}$ a atuar sobre o corpo, mas a seguir explica que se houver mais do que uma força, os termos $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ devem ser combinados "obliquamente". Essa forma de juntar forças obliquamente é explicada mais para a frente no seu livro e é o que hoje em dia é conhecido como **regra do paralelogramo**, para somar dois vetores (ver figura 2.3 do capítulo 2).

Assim sendo, a forma mais geral da segunda lei de Newton é,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1} \tag{4.3}$$

em que $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ é a força resultante, igual à soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo.

O integral da força resultante em função do tempo, no lado esquerdo da equação (4.3), é um vetor $\vec{I}$ chamado **impulso**. Como tal, se um corpo tem inicialmente uma quantidade de movimento $\vec{p}_1$ e sobre ele atua uma força durante um intervalo de tempo, no fim desse intervalo a quantidade de movimento do corpo será $\vec{p}_1 + \vec{I}$.

A equação (4.3) pode ser escrita também de modo diferencial,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{4.4}$$

e escrevendo a quantidade de movimento em função da velocidade obtém-se,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\,(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \tag{4.5}$$

Se a massa do corpo for constante, a derivada acima será igual ao produto da massa pela derivada da velocidade, ou seja, igual à massa vezes a aceleração:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}} \tag{4.6}$$

Esta é a forma mais habitual de escrever a segunda lei de Newton.

A unidade de força no Sistema Internacional (SI) de unidades é o newton, N. Uma força de 1 N é a força que produz a aceleração de 1 m/s^2 num corpo com massa de 1 kg.

Conforme já foi referido em capítulos anteriores, no vácuo todos os objetos em queda livre são acelerados com a **aceleração da gravidade**, que na superfície terrestre tem um valor g.

Assim sendo, de acordo com a segunda lei de Newton o peso de qualquer objeto (força da gravítica exercida pela Terra) é diretamente proporcional à sua massa:

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{4.7}$$

em que $\vec{g}$, é um vetor constante na direção vertical, com sentido de cima para baixo e módulo igual à aceleração da gravidade, g, que é aproximadamente igual a 9.8 m/s^2.

Por exemplo, um corpo com massa de 2 kg na superfície terrestre terá um peso de 19.6 N. Se o mesmo corpo estiver num satélite, a sua massa seria a mesma mas o seu peso seria muito menor, devido a que a aceleração da gravidade é muito menor à altura à que se encontra o satélite. Na distância à que se encontra a Lua, a aceleração da gravidade é apenas 0.00269 m/s^2; o peso da Lua é esse valor vezes a sua massa.

O peso de um corpo é realmente a soma vetorial de muitas forças: o peso de cada uma das partículas que compõem o corpo, que somadas produzem o peso total mg. Para além do módulo, direção e sentido, o ponto onde é aplicada uma força também é importante. Newton aborda essa questão no seu livro, mas esse assunto será adiado até o capítulo 5. Por enquanto, bastará ter em conta que o peso de um corpo deve ser representado sempre num ponto designado por **centro de gravidade**, que nos corpos homogéneos e com formas geométricas simples encontra-se no centro geométrico.

Igual que a primeira lei, a segunda lei é válida apenas em referenciais inerciais. Dois referencias inerciais podem ter uma velocidade relativa, mas essa velocidade relativa deverá ser constante. Conclui-se que a aceleração relativa de um referencial inercial em relação aos outros deverá ser nula. Como tal, a aceleração de um objeto deverá ser a mesma em relação a qualquer referencial inercial. As velocidades medidas em diferentes referenciais inerciais podem ser diferentes, mas a sua derivada (aceleração) será igual em todos. Newton acreditava na possibilidade de determinar a aceleração absoluta de um objeto, em relação ao espaço absoluto, e na equação $\vec{F} = m\vec{a}$ interpretava $\vec{a}$ como a aceleração absoluta. Para determinar se um referencial é inercial, bastará observar objetos livres, nos que não atue nenhuma força. Se permanecerem num estado de repouso o movimento retilíneo uniforme, o referencial será inercial.

4.1.3. Lei de ação e reação

LEI III.
A toda a ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas.

Aquilo que puxa ou comprime outra coisa é puxado ou comprimido da mesma maneira por essa coisa. Se premir uma pedra com um dedo, o dedo é igualmente premido pela pedra. Se um cavalo puxar uma pedra por meio de uma corda, o cavalo será puxado para trás igualmente em direção à pedra. Pois a corda esticada tanto puxa o cavalo para a pedra como puxa a pedra para o cavalo, tanto dificulta a progressão do cavalo como favorece a progressão da pedra. Se um corpo bater noutro e pela sua força lhe mudar a quantidade de movimento, sofrerá igual mudança na sua quantidade de movimento, em sentido oposto. As mudanças feitas por estas ações são iguais, não nas velocidades, mas nas quantidades de movimento dos corpos. Isto, suposto que os corpos não são retidos por outros impedimentos. Portanto, se as quantidades de movimento são mudadas de igual, as mudanças de velocidades em sentido contrário são inversamente proporcionais às massas dos corpos.

Esta terceira lei enunciada por Newton é conhecida como **lei de ação e reação**. considere-se o exemplo proposto por Newton: um cavalo que arrasta um bloco pesado por meio de uma corda (figura 4.1). A corda exerce a mesma força sobre o bloco e sobre o cavalo, mas em sentidos opostos.

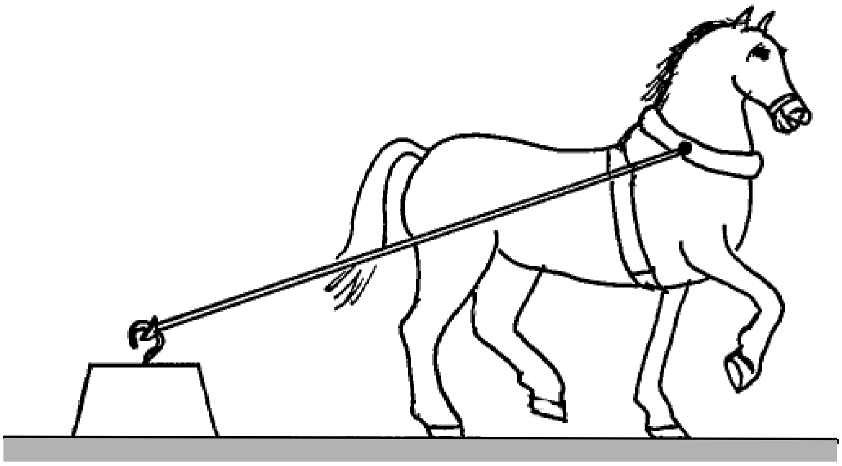


Figura 4.1.: Cavalo a arrastar um bloco de 350 kg.

É conveniente analisar por separado as forças que atuam no bloco e no cavalo, como mostra a figura 4.2. Se a velocidade com que o cavalo arrasta o bloco for constante, a segunda lei de Newton implicará que a soma das forças que atuam sobre o bloco e sobre o cavalo será nula.

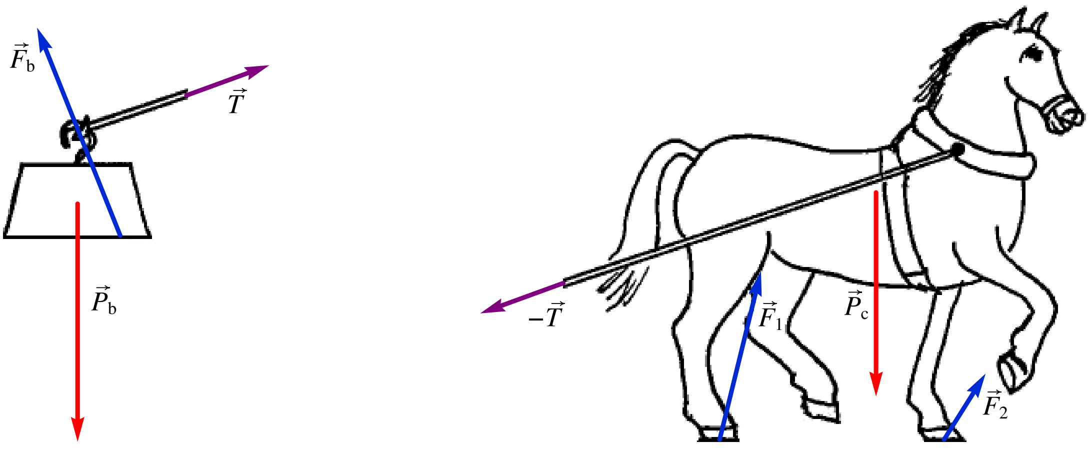


Figura 4.2.: Forças sobre o bloco e sobre o cavalo.

O peso do bloco, $\vec{P}_b$, atua no centro de gravidade do bloco. A corda puxa o bloco na direção em que está esticada, com uma força $\vec{T}$, como se mostra no lado esquerdo da figura 4.2. A resultante do peso e da força da corda é um vetor que aponta para baixo e para a direita. Uma vez que a resultante das forças no bloco é nula (aceleração nula), o chão deverá exercer uma força $\vec{F}_\text{b}$ para cima e para a esquerda, força essa devida ao contato entre as superfícies do bloco e do chão.

A corda puxa o cavalo para trás, com a força $-\vec{T}$ oposta à força que atua no bloco. Nas duas ferraduras do cavalo que estão em contato com o chão haverá duas forças de contato, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, que apontam para cima e para a frente. A resultante dessas duas forças, mais o peso do cavalo e a tensão na corda, deverá ser nula.

As forças exercidas pelo chão são as 3 forças $\vec{F}_\text{b}$, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Essas três forças de contato com o chão contrariam a tendência a cair do bloco e do cavalo, travam o movimento do bloco e a empurram o cavalo para a frente. A corda está a travar o movimento do cavalo e ao mesmo tempo está a puxar o bloco para a frente, com a mesma força com que está a travar o cavalo.

Sobre o chão atuam em total 5 forças de reação, representadas na figura 4.3. As reações aos pesos do bloco e do cavalo, $-\vec{P}_\text{b}$ e $-\vec{P}_\text{c}$, são as forças de atração gravítica do bloco e do cavalo sobre a Terra. Essas forças atuam no centro de gravidade da Terra, mas foram representadas perto do chão na figura. As outras três forças são as forças exercidas sobre o chão pelo bloco e pelo cavalo. Se a velocidade do cavalo for constante, a soma dessas 5 forças será nula.

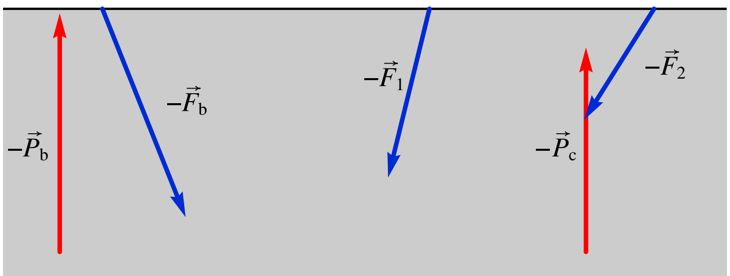


Figura 4.3.: Forças exercidas sobre o chão.

Se o cavalo estivesse a acelerar, a soma das forças sobre o cavalo e o bloco seria uma força que apontaria para a direita. A soma das 5 forças que atuam sobre o chão seria a reação dessa força; nomeadamente, sobre a Terra atuaria uma força igual e oposta, para a esquerda, que fazia com que se deslocasse para a esquerda.

No entanto, como a massa da Terra é muitas ordens de grandeza superior à massa do cavalo e do bloco, a aceleração da Terra para a esquerda seria imperceptível em comparação com a aceleração para a direita do cavalo e do bloco. Como salienta Newton, o resultado dessas forças sobre o cavalo mais o bloco e sobre o chão não seria o de produzir velocidades iguais e de sentidos contrários, mas sim quantidades de movimento iguais e de sentido contrário.

Exemplo 4.1
Sobre uma partícula com massa de 200 gramas atuam duas forças (unidades SI):

$$\vec{F}_1 = 2t\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y \qquad\qquad \vec{F}_2 = -2\,\vec{e}_x + \vec{e}_y$$

em que t é o tempo. A partícula parte do repouso em $t = 0$, na posição $\vec{r} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$. Calcule a posição da partícula em $t = 3$ s.

Resolução. A força resultante é a soma das duas forças

$$\vec{F} = 2(t-1)\,\vec{e}_x + 5\,\vec{e}_y$$

dividindo pela massa, 0.2 kg, obtém-se a aceleração vetorial

$$\vec{a} = 10(t-1)\,\vec{e}_x + 25\,\vec{e}_y$$

substituindo na equação $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$ obtém-se,

$$10(t-1)\,\vec{e}_x + 25\,\vec{e}_y = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$$

separando variáveis e integrando,

$$\int_0^t \left(10(t-1)\,\vec{e}_x + 25\,\vec{e}_y\right)\mathrm{d}\,t = \int_{\vec{0}}^{\vec{v}} \mathrm{d}\,\vec{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = (5\,t^2 - 10\,t)\,\vec{e}_x + 25\,t\,\vec{e}_y$$

substituindo na equação $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$,

$$(5\,t^2 - 10\,t)\,\vec{e}_x + 25\,t\,\vec{e}_y = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$$

separando variáveis e integrando obtém-se o vetor posição em $t = 3$

$$\int_0^3 \left((5\,t^2 - 10\,t)\,\vec{e}_x + 25\,t\,\vec{e}_y\right)\mathrm{d}\,t = \int_{\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z}^{\vec{r}} \mathrm{d}\,\vec{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r} = \vec{e}_x + 113.5\,\vec{e}_y + \vec{e}_z$$

4.2. Componentes normal e tangencial da força

Conforme referido no capítulo 3, a aceleração de um objeto pode ser sempre separada nas suas componentes tangencial e normal,

$$\vec{a} = a_\mathrm{t}\,\vec{e}_\mathrm{t} + a_\mathrm{n}\,\vec{e}_\mathrm{n} \tag{4.8}$$

onde $a_t = \dot{v}$ e $a_n = v^2/R$. Aplicando a segunda lei de Newton, podemos também separar a força resultante em componentes normal e tangencial:

$$\vec{F} = F_t \vec{e}_t + F_n \vec{e}_n \tag{4.9}$$

em que $F_t = m\,a_t$ e $F_n = m\,a_n$.

Se a força resultante sobre uma partícula com velocidade $\vec{v}$ for $\vec{F}$, a componente F_t na direção paralela a $\vec{v}$ faz aumentar ou diminuir a velocidade, conforme estiver no mesmo sentido ou no sentido oposto de $\vec{v}$. A componente F_n perpendicular a $\vec{v}$ faz curvar a trajetória da partícula no sentido dessa componente (figura 4.4).

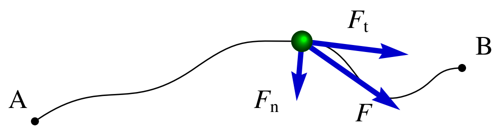
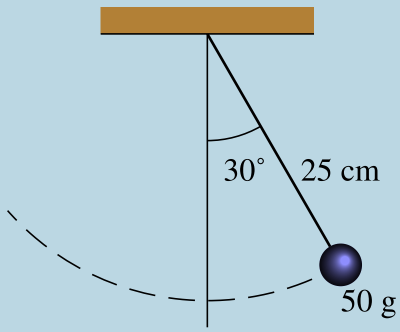
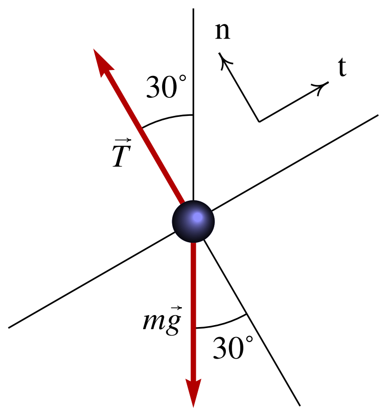


Figura 4.4.: Componentes tangencial e normal da força.

Exemplo 4.2
Um **pêndulo simples**, formado por uma esfera de 50 gramas pendurada de um fio de 25 cm, oscila pela ação da gravidade. No instante representado na figura, em que o fio faz um ângulo de 30° com a vertical, a esfera está a subir e o valor da sua velocidade é 1 m/s. Encontre o módulo da força de tensão no fio nesse instante e a aceleração tangencial da esfera.



Resolução. Convém fazer um diagrama de corpo livre da esfera, isto é, um diagrama indicando unicamente as forças externas que atuam sobre o objeto. Neste caso, ignorando a resistência do ar, só há duas causas possíveis para essas forças: o fio e a atração da gravidade. Assim sendo, as únicas forças externas sobre a esfera são a tensão $\vec{T}$ do fio, que atua na direção do fio e o peso, $m\vec{g}$, na direção vertical e sentido para baixo. A figura mostra as forças e os ângulos conhecidos.



Uma vez identificadas as forças, escolhe-se um sistema de eixos para calcular as componentes das forças. Neste caso, como o movimento é circular, é conveniente usar os eixos tangencial e normal, representados pelas leras t e n no diagrama de corpo livre.

O eixo normal aponta na direção do centro de curvatura da trajetória, que neste caso é a mesma direção do fio. O eixo tangencial é tangente à trajetória circular e, portanto, o vetor velocidade é perpendicular ao fio. Como a esfera está a subir, o vector velocidade tem o sentido do eixo t no diagrama.

A tensão do fio tem unicamente componente normal e não tangencial. A componente tangencial do peso é $-m\,g\,\sin 30° = -0.245$ N e a componente normal é $-m\,g\,\cos 30° = -0.4244$ N. Assim, as componentes tangencial e normal da força resultante são:

$$F_\text{t} = -0.245$$
$$F_\text{n} = T - 0.4244$$

A aceleração tangencial é até agora desconhecida, mas a aceleração normal pode ser calculada com os dados conhecidos.

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{R} = \frac{1^2}{0.25} = 4$$

(unidades SI). Igualando as componentes tangencial e normal a $m\,a_\text{t}$ e $m\,a_\text{n}$, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$-0.245 = 0.05\,a_\text{t}$$
$$T - 0.4244 = 0.05 \times 4$$

e a resposta é $a_\text{t} = -4.9$ m/s^2, $T = 0.624$ N. O sinal negativo da aceleração tangencial indica que a velocidade está a diminuir.

4.3. Reação normal e força de atrito

No exemplo do cavalo a arrastar um bloco da secção anterior já foi referida a existência de forças de contacto entre duas superfícies. Essas forças podem apontar em qualquer direção, mas o sentido é sempre no sentido em que as duas superfícies tendem a se afastar.

É habitual separar essas forças de contato em duas componentes, uma componente perpendicular às superfícies em contato, chamada **reação normal** e outra componente tangente às superfícies, denominada **força de atrito**.

A força de contato entre superfícies é realmente uma força distribuída em vários pontos da superfície. A resultante de todas essas forças será representada num ponto da superfície, separando as componentes normal e tangencial (figura 4.5). A reação normal, R_n terá sempre o sentido que faz separar os dois corpos em contato. A força de atrito, $\vec{F}_\text{a}$, pode ter qualquer um dos dois sentidos na direção tangencial.

4.3.1. Atrito estático

Quando não existe movimento relativo entre as duas superfícies em contato, a força de atrito designa-se de atrito estático. A força de atrito estático pode ser nula, ou pode estar

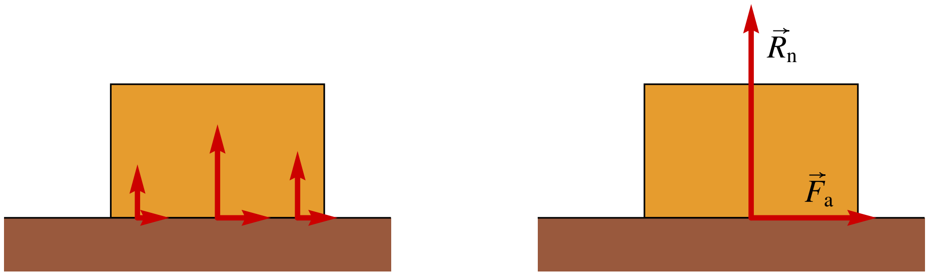


Figura 4.5.: Reação normal R_n e força de atrito $\vec{F}_a$ sobre um bloco na superfície de uma mesa.

orientada em qualquer dos dois sentidos na direção tangente às superfícies em contato.

No exemplo do cavalo e o bloco (figura 4.2) as forças de atrito nas ferraduras do cavalo são atrito estático. A força de atrito estático faz possível colocar um veículo em movimento ou fazer com que trave. É também a força que nos permite caminhar: empurramos com os nossos pés o chão e a reação do chão no sentido oposto faz-nos avançar.

Figura 4.6.: A força que permite que o elétrico suba uma encosta ou trave na descida é a força de atrito estático entre as rodas e os carris.

Mas se o chão estivesse coberto por gelo, os pés escorregavam para trás e não se conseguia avançar para a frente. Isso acontece porque o módulo da força de atrito estático não pode ultrapassar um valor máximo, que é proporcional à reação normal:

$$\boxed{F_e \le \mu_e R_n} \tag{4.10}$$

em que μ_e é uma constante própria do tipo de superfícies em contato, chamada **coeficiente de atrito estático**. O coeficiente de atrito estático costuma ser menor que 1. Em termos da força de contato completa, isso implica que a a força de contato costuma estar perto da direção normal, com desvio máximo de menos de 45°.

Considere-se um exemplo: as forças entre a estrada e os pneus de uma bicicleta. As forças de atrito entre os dois pneus e a estrada são ambas forças de atrito estático, porque as rodas não escorregam. Na roda traseira a força de atrito aponta para a frente, na direção do movimento da bicicleta (figura 4.7), como resultado da reação da estrada à ação que o pneu exerce sobre a estrada no sentido oposto.

A força de atrito na roda da frente é no sentido oposto ao movimento, porque nessa roda não é exercida nenhuma tração pelo ciclista. Para manter essa roda em rotação, contrariando o atrito no eixo da roda, é preciso que a estrada atue com força de atrito no sentido oposto à velocidade da bicicleta.

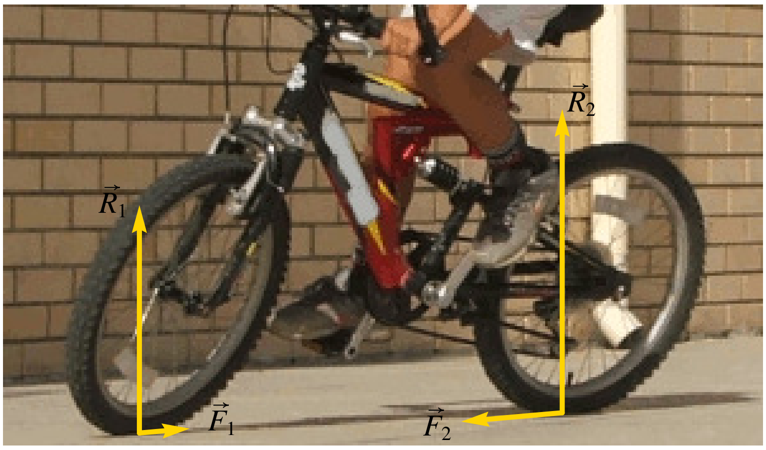


Figura 4.7.: Forças normais e de atrito entre os pneus de uma bicicleta e a estrada.

Se a velocidade da bicicleta for constante, o módulo da força de atrito no pneu traseiro deverá ser igual à soma dos módulos da força de atrito no pneu da frente e da resistência do ar.

4.3.2. Atrito cinético

Quando as duas superfícies em contato deslizam entre si, a força de atrito designa-se de atrito cinético. No exemplo do cavalo e o bloco (figura 4.2) a força de atrito que atua no bloco é atrito cinético.

A força de atrito cinético é sempre oposta ao movimento e tem módulo constante que depende da reação normal:

$$\boxed{F_\text{c} = \mu_\text{c}\, R_\text{n}} \tag{4.11}$$

Em que μ_c é o **coeficiente de atrito cinético**, que costuma ser menor que o coeficiente de atrito estático entre as mesmas superfícies.

Por ser oposta ao movimento, a força de atrito cinético faz sempre diminuir o valor da velocidade relativa entre as superfícies, mas nunca pode inverter o sentido da velocidade. No instante em que a velocidade seja nula, a força de atrito cinético também será nula.

Assim, embora o seu módulo seja constante, a força de atrito cinético depende implicitamente da velocidade. Na notação vetorial pode escrever-se na forma seguinte:

$$\vec{F}_c = \begin{cases} \vec{0} & v = 0 \\ -\dfrac{\mu_c R_n}{v}\vec{v} & v \neq 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Em que $\vec{v}$ é a velocidade do corpo sobre o qual atua essa força, relativa à superfície que produz o atrito.

Exemplo 4.3
Determine as forças que atuam sobre o bloco e o cavalo na figura 4.1, quando a velocidade é constante, sabendo que a massa do cavalo é 300 kg, a massa do bloco 350 kg, o ângulo que a corda faz com a horizontal é 20°, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o chão é 0.4 e o coeficiente de atrito estático entre as ferraduras do cavalo e o chão é 0.5.

Resolução. As forças que atuam sobre o bloco e sobre o cavalo foram representadas na figura 4.2. Como a aceleração é nula, a soma das componentes horizontais e verticais das forças sobre o bloco e o cavalo deverá ser nula.

Começando pelo bloco, convém separar a força $\vec{F}_b$ na sua componente normal, R_n (reação normal) e a sua componente tangencial, F_a (força de atrito). A soma das forças horizontais e verticais é,

$$T\,\cos(20°) - F_a = 0 \qquad\qquad R_n + T\,\sin(20°) - m_b\,g = 0$$

Como a força de atrito F_a é atrito cinético, pode ser substituída por $\mu_c R_n$ e, substituindo os valores do coeficiente de atrito cinético, massa do bloco e aceleração da gravidade, obtém-se um sistema de duas equações com duas incógnitas,

$$T\,\cos(20°) - 0.4\,R_n = 0 \qquad\qquad R_n + T\,\sin(20°) - 3430 = 0$$

a resolução desse sistema, no Maxima, é obtida como se segue.

```
(%i1) float(solve([T*cos(%pi/9)-0.4*Rn=0,Rn+T*sin(%pi/9)-3430=0]));
(%o1)    [[T = 1274.499893860665, Rn = 2994.095363633225]]
```

A reação normal no bloco é 2994 N e a tensão na corda é 1274 N.

A soma das forças horizontais e verticais que atuam sobre o cavalo é:

$$F_{a1} + F_{a2} - T\,\cos(20°) = 0 \qquad\qquad R_1 + R_2 - T\,\sin(20°) - m_c\,g = 0$$

repare-se que neste caso não existe relação entre as forças de atrito e as reações normais, porque o atrito é estático. Substituindo o valor de T já calculado, a massa do cavalo e a aceleração da gravidade,

$$F_{a1} + F_{a2} = 1198\ \text{N}$$

$$R_1 + R_2 = 3376\,\mathrm{N}$$

A soma das reações normais nos pes do cavalo é 3376 N e a soma das forças de atrito é 1198 N. No capítulo sobre dinâmica da rotação explicar-se-á como calcular os valores de R_1 e R_2 por separado. Por enquanto só é possível calcular a sua soma.

Os valores de F_{a1} e F_{a2} não podem ser calculados sem informação adicional; seria preciso saber a relação entre as pressões que o cavalo está a exercer em cada pé nesse instante. Do ponto de vista da dinâmica é apenas possível calcular a soma dessas duas forças.

O coeficiente de atrito estático entre as ferraduras e a estrada permite conferir se o cavalo consegue de facto arrastar o bloco, que tem peso superior ao seu próprio peso. A força de atrito estático máximo entre as ferraduras e o chão é:

$$F_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{e}}\,(R_1 + R_2) = 1688\,\mathrm{N}$$

A soma das forças F_{a1} e F_{a2} é menor que esse valor; conclui-se que o cavalo podia arrastar um bloco ainda mais pesado sem que as ferraduras comecem a escorregar.

4.3.3. Força de resistência nos fluidos

A maior parte dos movimentos analisados neste livro são movimentos de corpos rígidos dentro de fluidos. No exemplo do cavalo que arrasta um bloco, os dois corpos estão em movimento dentro do ar, que é um fluido. O ar exerce uma força de resistência ao movimento, que é sempre em sentido oposto à velocidade.

Nos diagramas de forças na figura 4.2 ignorou-se a força de resistência do ar, admitindo que seria muito menor do que as outras forças, porque o valor da velocidade é baixo. Mas em casos como o a queda livre de um objeto, essas forças já não são desprezáveis. Nesta secção explica-se como dependem essas forças da velocidade.

A força de resistência ao movimento nos fluidos é produzida principalmente por dois mecanismos diferentes; o primeiro depende da viscosidade do fluido e é devido a que as camadas do fluido mais próximas colam-se ao corpo, acompanhando o seu movimento e criando atrito com outras camadas de fluido mais afastadas, que se traduz numa força diretamente proporcional à velocidade.

O segundo mecanismo tem a ver com a diferença de pressões gerada no fluido à frente e atrás do corpo. O fluido é comprimido na região da frente. Essa diferença de pressões produz uma força oposta ao movimento, diretamente proporcional ao quadrado da velocidade.

Os dois mecanismos estão sempre presentes, mas em algumas condições um deles pode ser muito mais apreciável do que o outro. O **número de Reynolds** permite concluir qual dos dois mecanismo é mais importante e é definido por

$$N_{\mathrm{R}} = l\,v\left(\frac{\rho}{\eta}\right) \qquad (4.13)$$

onde l é um comprimento da ordem de grandeza da secção reta do corpo visto na direção do movimento, v a velocidade do corpo, ρ a massa volúmica do fluido e η o seu coeficiente de viscosidade. O número de Reynolds não tem unidades e não é necessário conhecer o seu valor exato mas apenas a sua ordem de grandeza.

Stokes demonstrou que nas condições em que o número de Reynolds é muito baixo (ordem de grandeza de 1 ou menor), a força de resistência do fluido é proporcional à velocidade. No caso de uma esfera de raio R, a expressão para essa força é:

$$\boxed{F_\text{r} = 6\,\pi\,\eta\,R\,v} \tag{4.14}$$

Quando o número de Reynolds é muito elevado (ordem de grandeza dos milhares, ou maior) a força de resistência do fluido é proporcional ao quadrado da velocidade do corpo:

$$F_\text{r} = \frac{1}{2} C_\text{D}\,\rho\,A\,v^2 \tag{4.15}$$

onde ρ é a massa volúmica do fluido, C_D é a constante aerodinâmica do corpo, menor para corpos pontiagudos e maior para corpos menos aerodinâmicos e A é a secção reta do corpo visto na direção do movimento. No caso de uma esfera de raio R, essa secção é πR^2 e o coeficiente aerodinâmico é aproximadamente 1/2; como tal, a força de resistência do fluido sobre a esfera, quando o número de Reynolds é elevado é:

$$\boxed{F_\text{r} = \frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2} \tag{4.16}$$

Se a velocidade for muito elevada, da ordem da velocidade do som no fluido (no ar é da ordem de 340 m/s) a força de resistência do fluido é proporcional à velocidade levantada a um expoente maior do que 2.

Para uma esfera de raio R, o número de Reynolds pode ser calculado substituindo l por R na equação (4.13). Para decidir qual das duas equações, (4.14) ou (4.16), é a correta, pode começar-se por admitir que o número de Reynolds é baixo e resolve-se o problema usando a equação (4.14); se os valores obtidos conduzem a um número de Reynolds baixo, admite-se que a solução é correta; caso contrário, resolve-se novamente o problema usando a equação (4.16) e corrobora-se que os resultados conduzem a um número de Reynolds elevado mas a velocidade é menor que a velocidade do som nesse fluido (ver o problema 7 no fim do capítulo).

A resistência ao movimento dos corpos no ar pode admitir-se que é proporcional ao quadrado da velocidade, a menos que a velocidade seja comparável ou superior à velocidade do som no ar (340 m/s). Com efeito, o coeficiente de viscosidade é 5 ordens de grandeza menor que a massa volúmica, conduzindo a números de Reynolds elevados; o número de Reynolds só é baixo se a velocidade for muito baixa, mas nesse caso a resistência do ar é desprezável, ou nos corpos microscópicos em que o tratamento macroscópico da mecânica Newtoniana não é o mais apropriado.

No caso de uma esfera em queda livre num fluido, atuam 3 forças externas: o peso, $m\,g$, a impulsão, que de acordo com o princípio de Arquimedes é igual ao peso do fluido que ocupava o espaço da esfera, $m_{\text{f}}\,g$, e a força de resistência do fluido. Se a massa volúmica da esfera é maior que a massa volúmica do fluido, o peso $m\,g$ é maior que a impulsão $m_{\text{f}}\,g$ e a esfera cai; nesse caso, a resistência do fluido aponta para cima e o seu módulo é dado pelas expressões (4.14) ou (4.16). Na queda livre no ar, a aceleração resultante tem módulo $m'\,g - C\,v^2$, apontando na direção vertical para baixo, onde C é uma constante e $m' = m - m_{\text{f}}$. No problema 9 do capítulo 1 demonstrou-se que a velocidade atinge um valor limite $\sqrt{m'\,g/C}$.

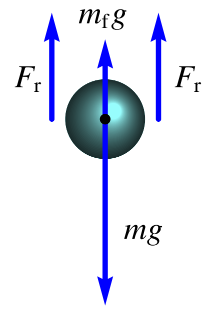


Figura 4.8.: Queda num fluido.

Perguntas

1. Um livro encontra-se em repouso sobre uma mesa. Qual das afirmações seguintes é correta:

A. Não há força a atuar sobre o livro.

B. O livro não tem inércia.

C. Não há força a atuar sobre a mesa.

D. O livro encontra-se em equilíbrio.

E. A inércia do livro é igual à inércia da mesa.

2. Duas bolas metálicas têm o mesmo tamanho mas uma delas pesa o dobro da outra. As duas bolas são lançadas simultaneamente, a partir do repouso, do topo de um prédio. Como se comparam os tempos de queda das bolas?

A. A bola mais pesada demora aproximadamente metade do tempo da bola mais leve.

B. A bola mais leve demora aproximadamente metade do tempo da bola mais pesada.

C. Os dois tempos são semelhantes, mas a bola mais pesada demora menos tempo que a bola mais leve.

D. Os dois tempos são semelhantes, mas a bola mais leve demora menos tempo que a bola mais pesada.

E. As duas bolas demoram exatamente o mesmo tempo.

3. Um camião grande colide frontalmente com um carro pequeno. Durante a colisão:

A. O camião exerce uma força maior sobre o carro do que a força do carro sobre o camião.

B. O carro exerce uma força maior sobre o camião do que a força do camião sobre o carro.

C. Nenhum dos dois exerce força sobre o outro; o carro fica esmagado simplesmente por se atravessar no caminho do camião.

D. O camião exerce força sobre o carro, mas o carro não exerce nenhuma força sobre o camião.

E. O camião exerce uma força sobre o carro e o carro exerce a mesma força sobre o camião.

4. Atira-se uma pedra verticalmente, para cima. No ponto mais alto da trajetória da pedra:

A. A sua velocidade e aceleração apontam para baixo.

B. A sua velocidade aponta para cima e a aceleração aponta para baixo.

C. A velocidade e aceleração são ambas nulas.

D. A velocidade é nula e a aceleração aponta para baixo.

E. A velocidade aponta para baixo e a aceleração é nula.

5. Uma mulher empurra uma caixa grande, com uma força horizontal constante. A força exercida pela mulher faz com que a caixa se desloque horizontalmente, com velocidade constante v_0. Assim, o módulo da força exercida pela mulher:

A. É igual ao peso da caixa.

B. É maior do que o peso da caixa.

C. É igual à força total que contraria o movimento da caixa.

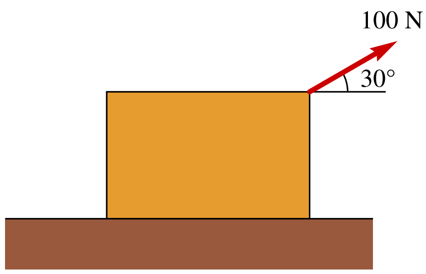
D. É maior do que a força total que contraria o movimento da caixa.

E. É maior do que o peso e a força que contraria o movimento da caixa.

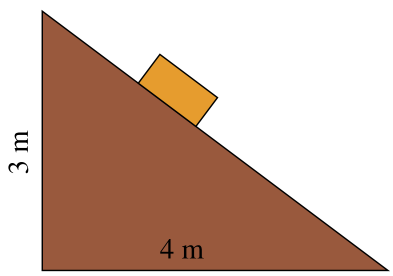
Problemas

1. Uma pessoa com 70 kg sobe num ascensor até o sexto andar de um prédio. O ascensor parte do repouso no rés de chão, acelera até o segundo andar, com aceleração uniforme de 2 m/s^2, mantém a velocidade constante entre o segundo e o quarto andar, e trava entre o quarto e o sexto andar, com aceleração uniforme de -2 m/s^2. Determine o módulo da reação normal nos pés da pessoa, em cada parte do percurso.

2. Um bloco com massa igual a 30 kg encontra-se sobre uma superfície horizontal, com coeficiente de atrito cinético igual a 0.35. Sobre o bloco atua uma força externa de 100 N, que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Determine o valor da aceleração do bloco.

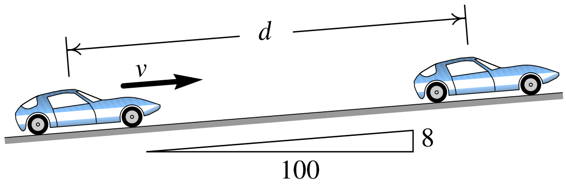


3. Um bloco de massa $m = 2.1$ kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com 4 m de base e 3 m de altura. Se o coeficiente de atrito cinético, entre o bloco e a superfície do plano inclinado, for igual a 0.25, calcule o valor da força de atrito sobre o bloco.

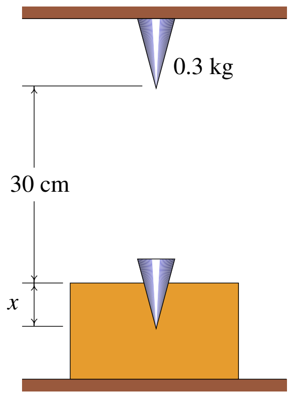


4. Um objeto com massa de 2 kg desloca-se com velocidade inicial $(3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)$ m/s, quando é aplicada uma força externa $\vec{F} = -0.4\vec{v}$ (unidades SI) que atua durante 5 segundos. Determine: (*a*) a velocidade final após os 5 segundos. (*b*) O impulso transmitido pela força externa durante os 5 segundos.

5. Um automóvel com 1230 kg sobe uma rampa com declive do 8 por cento, com velocidade constante. (*a*) Determine o valor da força de atrito total (soma das forças nos quatro pnéus). (*b*) Qual será o valor mínimo que deverá ter o coeficiente de atrito estático para que o automóvel consiga subir a rampa?



6. Para determinar a rigidez de um material, coloca-se um bloco do material 30 cm por baixo de um cone metálico de 0.3 kg; o cone deixa-se cair livremente, a partir do repouso, penetrando uma distância x no bloco até parar. Sabe-se que quando o cone penetra no bloco a força do bloco sobre o cone é kx^2 onde k é uma constante que depende da resistência à penetração do material; se o cone penetrar uma distância $x = 5$ cm, calcule o valor da constante k.

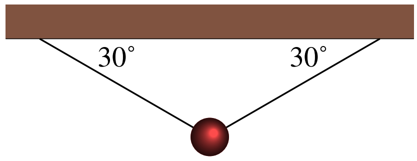


7. Uma esfera de raio R e massa volúmica ρ_e cai livremente dentro de um fluido com massa volúmica ρ e coeficiente de viscosidade η. (*a*) Encontre as expressões para a velocidade terminal quando a resistência do fluido é proporcional à velocidade ou quando é proporcional ao quadrado da velocidade. (*b*) Calcule a velocidade terminal dentro de glicerina, água e ar de uma esfera de aço (massa volúmica 7800 kg/m^3) e diâmetro de 1 cm; em cada caso determine o valor do número de Reynolds. Use os dados na tabela seguinte:

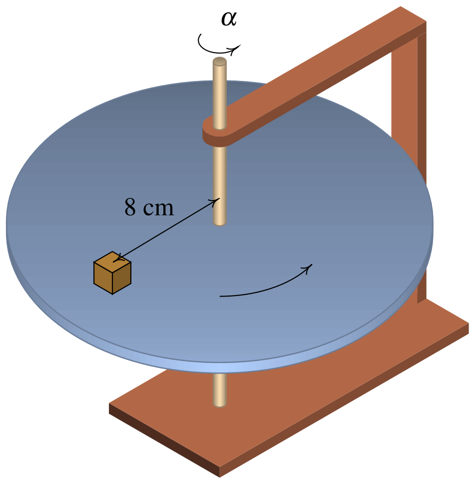
Fluido	**Coef. de viscosidade (kg/(m·s))**	**Massa volúmica (kg/m^3)**
Glicerina	1.5	1200
Água	10^{-3}	1000
Ar	1.8×10^{-5}	1.2

8. Calcule a velocidade terminal em queda livre no ar de: (*a*) Uma gota de chuva com raio igual a 1 mm (admita que a massa volúmica da água é 1000 kg/m^3). (*b*) Uma pedra de granizo com raio de 1 cm (a massa volúmica do gelo é 917 kg/m^3). (*c*) Uma bola de ténis de mesa com raio de 1.9 cm e massa 0.0024 kg. (*d*) Uma bola de ténis com raio de 3.25 cm e massa 0.062 kg. (Consulte o problema anterior).

9. Uma esfera de 0.8 kg encontra-se inicialmente em repouso, pendurada por dois fios. O fio da esquerda é cortado subitamente. Determine a tensão no fio do lado direito, antes de o outro fio ter sido cortado e no instante em que o fio acabou de ser cortado (admita que a massa dos fios é nula).



10. Para medir o coeficiente de atrito estático entre um bloco e um disco, fez-se rodar o disco com uma aceleração angular $\alpha = 5\ \text{rad/s}^2$ constante. O disco parte do repouso em $t = 0$ e no instante $t = 0.82$ s o bloco começa a derrapar sobre o disco. Determine o valor do coeficiente de atrito estático.



Respostas

Perguntas: 1. D. **2.** C. **3.** E. **4.** D. **5.** C.

Problemas

1. Entre o R/C e o 2º, 826 N. Entre o 2º e o 4º, 686 N. Entre o 4º e o 6º, 546 N.

2. 0.040 m/s^2

3. 4.12 N.

4. (*a*) $(1.10\,\vec{e}_x - 1.47\,\vec{e}_y)$ m/s. (*b*) $(-3.79\,\vec{e}_x + 5.06\,\vec{e}_y)$ N·s.

5. (*a*) 961.2 N. (*b*) 0.08.

6. 24 696 N/m^2.

7. (*a*) Se a resistência é proporcional à velocidade: $v_\text{t} = \dfrac{2\,R^2\,g}{9\,\eta}\,(\rho_\text{e} - \rho)$. Se a resistência é proporcional ao quadrado da velocidade: $v_\text{t} = \sqrt{\dfrac{16}{3} R\,g 9\,\eta \left(\dfrac{\rho_\text{e}}{\rho} - 1\right)}$. (*b*) Glicerina: $v_\text{t} = 0.240$ m/s, $N_\text{R} = 0.958$; água: $v_\text{t} = 1.33$ m/s, $N_\text{R} = 6665$; ar: $v_\text{t} = 41.2$ m/s, $N_\text{R} = 13737$.

8. (*a*) 9.33 m/s = 33.6 km/h. (*b*) 20.0 m/s = 71.9 km/h. (*c*) 8.25 m/s = 29.7 km/h. (*d*) 24.7 m/s = 88.8 km/h.

9. Antes de cortar-se o fio, $T = m\,g = 7.94$ N. Após ter sido cortado o fio, $T = m\,g/2 = 3.92$ N.

10. 0.143

5. Dinâmica dos corpos rígidos

Para conseguir dar uma curva com uma bicicleta ou uma moto, é necessário que exista suficiente atrito entre os pneus e a estrada, porque a força de atrito deverá ser igual à massa vezes a aceleração centrípeta. Como a força de atrito atua na superfície dos pneus, se o condutor não se inclinasse, a lei da inércia implicava que a sua tendência fosse continuar numa trajetória retilínea, contrariando a trajetória circular da superfície dos pneus produzindo desequilíbrio. Nas corridas de motos, as velocidades elevadas implicam ângulos de inclinação maiores; para conseguir inclinar mais a moto, o condutor vira inicialmente o volante no sentido oposto ao sentido em que vai tomar a curva e sai para o lado em que a moto se inclina para contrariar a tendencia da moto cair para o lado oposto.

5.1. Vetores deslizantes

Os vetores introduzidos no capítulo 2 são vetores livres, que são considerados iguais se tiverem o mesmo módulo, direção e sentido, independentemente do ponto do espaço onde se encontrem. No caso das forças, não basta saber o módulo, direção e sentido. Por exemplo, quando se aplica uma força numa porta para fechá-la, para além do módulo, direção e sentido da força, será também importante o ponto em que essa força for aplicada. Quanto mais longe das dobradiças for aplicada a força, mais fácil será fechar a porta; a força necessária para fechar a porta será muito elevada se for aplicada num ponto muito próximo de uma das dobradiças.

Assim sendo, as forças são realmente **vetores deslizantes**, que produzem o mesmo efeito quando aplicadas em qualquer ponto na sua **linha de ação** (a linha reta que passa pelo ponto onde a força é aplicada, seguindo a direção da força) mas produzem efeitos diferentes quando aplicadas em diferentes linhas paralelas. No exemplo apresentado na figura 5.1, as três forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ têm o mesmo módulo, direção e sentido; $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são iguais, por terem também a mesma linha de ação, mas são diferentes de $\vec{F}_3$ que atua noutra linha de ação diferente.

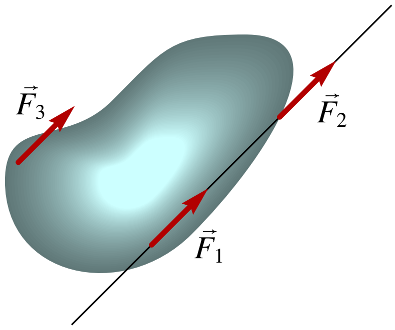


Figura 5.1.: Forças com o mesmo módulo, direção e sentido.

Contudo, no capítulo 4 sempre que foi necessário somar forças admitiu-se que podiam ser deslocadas livremente e somadas como vetores livres. Nas próximas seções mostra-se que essa soma de forças como se fossem vetores livres não está errada, sempre e quando seja adicionado também o efeito de rotação introduzido quando se desloca uma força para outro ponto. No movimento de translação sem rotação, é também importante considerar os efeitos de rotação das várias forças e conferir que se anulam entre sim, para que o movimento seja realmente sem rotação.

5.2. Adição de forças

Duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ com a mesma linha de ação podem ser deslocadas para um ponto comum e somadas nesse ponto. A força resultante estará na mesma linha de ação e terá módulo $(F_1 + F_2)$, se o sentido das forças for o mesmo, ou $|F_1 - F_2|$, caso contrário.

Duas forças serão concorrentes se as suas linhas de ação forem diferentes, mas com um ponto comum, R, como no exemplo da figura 5.2. Nesse caso, as forças podem ser deslocadas e somadas nesse ponto comum com a regra do paralelogramo; a linha de ação da força resultante será a reta que passa por esse ponto comum, na direção da diagonal do paralelogramo.

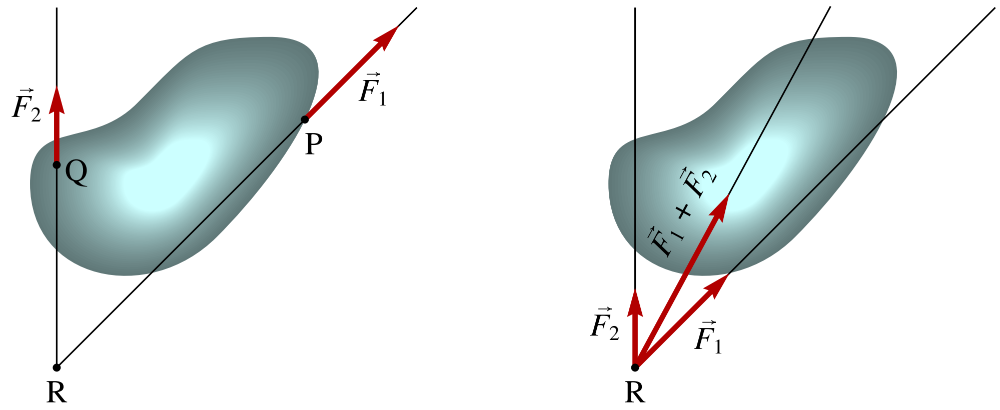


Figura 5.2.: Adição de forças concorrentes.

Quando as duas linhas de ação de duas forças são paralelas, como é o caso na figura 5.3, podem ser somadas usando o procedimento, ilustrado no lado direito da figura: desloca-se a força $\vec{F}_2$ na sua linha de ação L$_2$ até o ponto R de interseção de L$_2$ com o plano perpendicular às linhas de ação, que passa pelo ponto P. Nos pontos P e R adicionam-se duas forças $\vec{F}_3$ e $-\vec{F}_3$, com a mesma linha de ação, sem produzir nenhuma alteração já que a soma dessas duas forças é nula. No ponto P somam-se as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ e substituem-se pela resultante $\vec{F}_4$ e no ponto R somam-se as forças $\vec{F}_2$ e $-\vec{F}_3$ e substituem-se pela resultante $\vec{F}_5$. As forças $\vec{F}_4$ e $\vec{F}_5$ serão concorrentes, podendo ser somadas no ponto comum das suas linhas de ação, S, obtendo-se a força resultante $\vec{F}_6$ no ponto S.

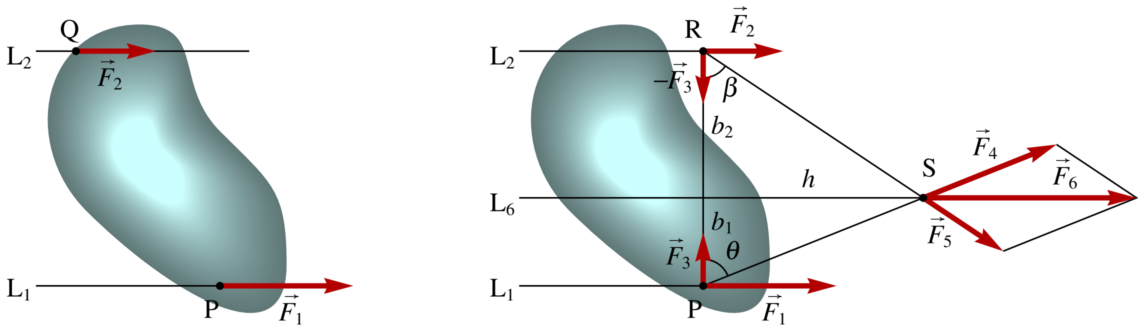


Figura 5.3.: Adição de forças paralelas.

Observe-se que a força resultante das duas forças paralelas é também na mesma direção das forças originais e o seu módulo é igual à soma dos módulos das forças originais ($F_6 = F_1 + F_2$), se os sentidos das forças for o mesmo, como na figura 5.3, ou igual à diferença entre os módulos ($F_6 = |F_1 - F_2|$), caso os sentidos sejam opostos.

Para calcular as distâncias b_1 e b_2, entre as linhas de ação das forças originais e a linha de ação L$_6$ da força resultante, observa-se na figura 5.3 que a altura h dos dois triângulos com bases b_1 e b_2 verifica,

$$h = b_1 \tan\theta = \frac{b_1 F_1}{F_3} \qquad\qquad h = b_2 \tan\beta = \frac{b_2 F_2}{F_3} \tag{5.1}$$

e, como tal,

$$\boxed{F_1\, b_1 = F_2\, b_2} \tag{5.2}$$

Esta é a equação fundamental das alavancas e o procedimento usado aqui para obtê-la foi introduzido por Newton no seu livro. As distâncias b_1 e b_2 chamam-se **braços** das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Para equilibrar as forças paralelas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, seria preciso aplicar uma força oposta, de módulo $F_1 + F_2$, na linha de ação em que os dois braços b_1 e b_2 verifiquem a regra das alavancas (5.2).

5.3. Momentos e binários

A regra das alavancas pode ser explicada introduzindo o conceito de **momento**. Define-se o valor do momento de uma força em relação a um ponto O, como o produto do módulo da força pela distância desde o ponto O até a linha de ação da força (braço b),

$$\boxed{M_\text{O} = F\, b} \tag{5.3}$$

O momento M_O representa o efeito de rotação produzido pela força, se o ponto O do corpo rígido estivesse fixo, podendo o corpo rodar à volta desse ponto. Quanto mais afastada estiver a linha de ação da força em relação ao ponto fixo O, maior será o efeito rotativo produzido pela força. Isso explica porquê é mais fácil fechar a porta quanto mais longe das dobradiças for aplicada a força; a distância entre a linha de ação da força e a linha das dobradiças é o braço e quanto maior for, maior será o momento da força aplicada.

Sendo $\vec{r}$ o vetor posição do ponto P em que a força $\vec{F}$ é aplicada, em relação à origem O, o braço da força em relação à origem O é igual a $r\sin\theta$, em que o ângulo θ é o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (figura 5.4). Conclui-se que valor do momento da força em relação ao ponto O é igual a,

$$M_\text{O} = F\, r \sin\theta \tag{5.4}$$

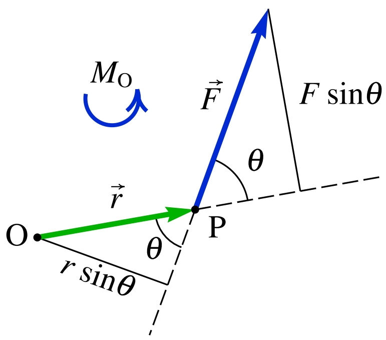


Figura 5.4.: Momento de uma força.

Repare-se que ($F\ \sin\theta$) é a componente da força na direção perpendicular ao vetor posição $\vec{r}$, ou seja, o valor do momento da força é também igual ao produto da distância desde o ponto de aplicação até a origem, r, pela componente perpendicular da força. O momento produzido pela força é devido unicamente à componente perpendicular da força.

A equação (5.4) mostra que o momento da força é igual ao módulo do produto vetorial entre o vetor posição e a força e mostra a conveniência de definir o momento em forma vetorial:

$$\boxed{\vec{M}_{\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{5.5}$$

O vetor $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ representa um efeito de rotação num plano perpendicular a ele. Na figura 5.4 o momento é um vetor que aponta para fora da figura e costuma ser representado por uma seta circular, no sentido da rotação que segue a regra da mão direita em relação ao sentido do vetor $\vec{M}_{\mathrm{O}}$.

Um **binário** é um conjunto de duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, iguais e opostas, com linhas de ação paralelas, como mostra a figura 5.5. O binário não produz nenhuma translação em nenhum sentido, mas apenas rotação. O momento total, em relação à origem O, é a soma dos momentos das duas forças,

$$\vec{r}_{\mathrm{Q}} \times \vec{F} - \vec{r}_{\mathrm{P}} \times \vec{F} = (\vec{r}_{\mathrm{Q}} - \vec{r}_{\mathrm{P}}) \times \vec{F} \tag{5.6}$$

Os dois vetores de posição dos pontos Q e P dependem da escolha da origem, mas a sua diferença é o vetor $\vec{r}_{\mathrm{PQ}}$ na figura, que não depende do ponto onde estiver a origem.

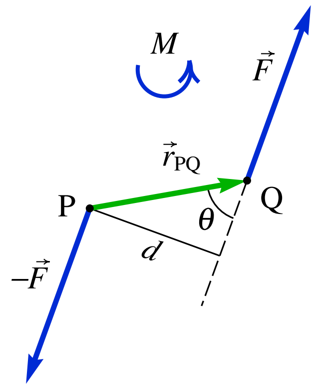


Figura 5.5.: Binário.

Isso quer dizer que o binário produz um momento que não depende de nenhum ponto de referência,

$$\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{PQ}} \times \vec{F} \tag{5.7}$$

Na figura 5.5 o momento do binário é um vetor para fora da figura, representado pela seta circular no sentido anti-horário.

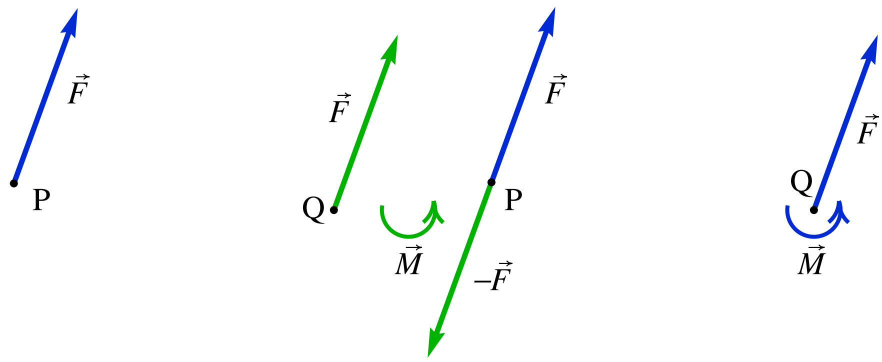


Figura 5.6.: Procedimento para deslocar uma força de um ponto P para outro ponto Q.

Uma força $\vec{F}$ aplicada num ponto P pode ser deslocada para outro ponto Q, fora da sua linha de ação, usando o procedimento ilustrado na figura 5.6. Adicionam-se duas forças $-\vec{F}$ e $\vec{F}$ nos pontos P e Q e, para não alterar nada, adiciona-se também um binário $\vec{M}$

com o mesmo módulo do binário das forças introduzidas, mas no sentido oposto. No caso da figura 5.6, M deve ser no sentido horário e com módulo igual ao produto de F pela distância desde Q até a linha de ação da força original; ou, em forma vetorial, $\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{QP}} \times \vec{F}$. No ponto P há duas forças iguais e opostas que se anulam, ficando no fim a força $\vec{F}$ no ponto Q e o binário $\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{QP}} \times \vec{F}$ que é igual ao momento $\vec{M}_Q$ que a força original, em P, produz em relação ao ponto Q.

Conclui-se que para somar um conjunto de forças num ponto Q, somam-se os momentos das forças em relação a esse ponto, dando um binário resultante, e somam-se as forças como vetores livres. O resultado é a força resultante no ponto Q e o binário resultante.

Quando as direções de todas as forças estiverem num mesmo plano, será conveniente definir dois dos eixos coordenados nesse plano, por exemplo x e y e a origem no ponto onde vão ser somadas as forças. Assim sendo, o momento de cada força $\vec{F}$ em relação à origem introduz um binário que tem unicamente componente segundo z, dada pelo determinante,

$$M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

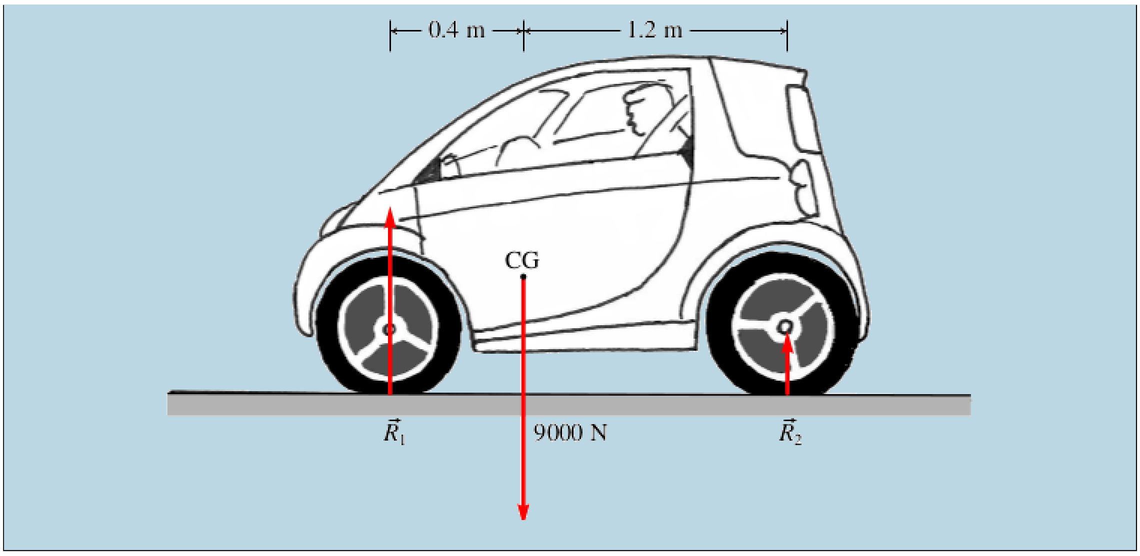
em que x e y são as coordenadas do ponto onde está a ser aplicada a força $\vec{F}$. Para obter o binário resultante bastará somar os valores de M_z obtidos para cada força.

5.4. Corpos rígidos em equilíbrio

Se todas as forças externas aplicadas num corpo rígido, somadas num ponto qualquer, produzem força resultante e binário resultante nulos, conclui-se que a força resultante e o binário resultante também serão nulos em qualquer outro ponto. A justificação é que, como a força resultante é obtida somando as forças como vetores livres, será igual em qualquer ponto; o binário resultante sim é diferente quando a força resultante é colocada em diferentes pontos e a diferença entre o binário em dois pontos diferentes será igual ao momento introduzido quando a força resultante for deslocada entre esses pontos. Mas no caso em que a força resultante é nula, esse deslocamento par diferentes pontos não produz nenhum binário adicional e o binário devera ser igual, e nulo, em todos os pontos.

Quando a força resultante e o binário resultante são nulos, diz-se que o corpo rígido está em equilíbrio. Equilíbrio esse que pode ser estático —objeto em repouso— ou cinético —objeto com movimento linear uniforme. Assim sendo, as condições para que um corpo rígido esteja em equilíbrio é a soma das forças seja nula e que a soma dos momentos das forças, em relação a um ponto qualquer, seja nula.

Exemplo 5.1
O automóvel na figura desloca-se com velocidade constante de 120 km/h numa estrada perfeitamente horizontal. Sabendo que o peso total do automóvel é 9000 N, determine a força de reação normal em cada pneu.



Resolução. Por ter movimento retilíneo e uniforme, o automóvel está em equilíbrio. Na figura, o vetor R_1 representa a soma das duas reações nos pneus da frente e R_2 a soma das reações normais dos pneus de atrás. As forças horizontais, que são a resistência do ar e o atrito da estrada nos pneus, não podem ser calculadas neste problema. O único que é possível afirmar a respeito é que essas duas forças são iguais e opostas e o atrito é estático e contraria a resistência do ar. Por enquanto, admite-se que essas duas forças são desprezáveis em comparação com o peso e no fim será discutida a influência dessas forças no resultado obtido. A condição para que a soma das forças verticais seja nula é:

$$R_1 + R_2 = 9000$$

Para encontrar o valor dessas duas variáveis será necessário considerar também a condição de que o binário resultante deverá ser nulo. Por existir equilíbrio, qualquer ponto pode ser usado como referência para calcular os momentos; é conveniente escolher o ponto onde há mais forças aplicadas, já que o momento dessas forças em relação ao ponto de referência será nulo. Neste caso escolhe-se um dos pontos de contato dos pneus com a estrada, ou o centro de gravidade (CG). Usando como referência o ponto de aplicação de R_1, a soma dos momentos é:

$$1.6R_2 - 0.4 \times 9000 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R_2 = 2250\,\text{N}$$

A seguir podia substituir-se esse valor na condição para a soma das forças verticais, mas também é possível calcular novamente soma de momentos, em relação ao ponto de aplicação de R_2,

$$1.2 \times 9000 - 1.6R_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R_1 = 6750\,\text{N}$$

Admitindo que o centro de gravidade esteja a igual distância dos lados direito e esquerdo do automóvel, se este for simétrico, as reações nos dois pneus da frente serão iguais e, portanto, a reação em cada pneu será 3375 N. Nos pneus de atrás as reações também serão iguais, cada uma com módulo 1125 N.

As forças de atrito e da resistência do ar constituem um binário; como a linha de ação das forças de atrito com a estrada está por debaixo da linha de ação da resistência do ar, esse binário faz rodar o automóvel no sentido horário, aumentando as reações normais nos pneus de atrás e diminuindo as reações normais nos pneus da frente. Para calcular o momento da força de resistência do ar, seria preciso conhecer o coeficiente aerodinâmico C_D do automóvel, a velocidade do vento e o ponto de aplicação da resultante dessa força, que está distribuída em toda a superfície do automóvel.

5.5. Centro de massa

Um corpo rígido é uma distribução contínua de massa num volume. Se a massa total do corpo for m, e $\text{d}m$ for a massa infinitesimal que existe em cada ponto do corpo,

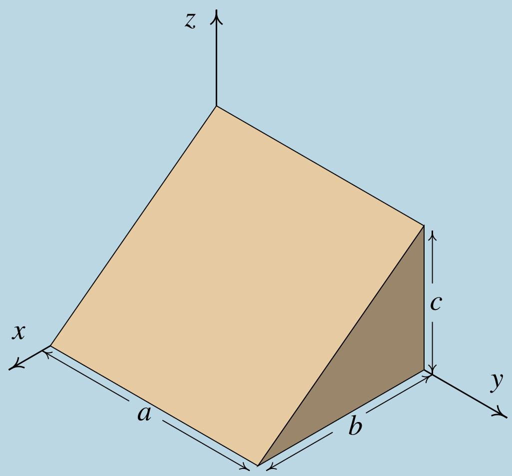
$$m = \int \text{d}m \tag{5.9}$$

em que o integral é de volume, dentro do volume ocupado pelo sólido, já que $\text{d}m$ é o produto da massa volúmica ρ pelo volume infinitesimal $\text{d}x\,\text{d}y\,\text{d}z$.

Define-se o vetor posição do **centro de massa**, $\vec{r}_\text{cm}$, igual à média, pesada pela massa, do vetor posição no sólido:

$$\boxed{\vec{r}_\text{cm} = \frac{\int \vec{r}\,\text{d}m}{m}} \tag{5.10}$$

Exemplo 5.2
Encontre a posição do centro de massa do sólido homogéneo representado na figura.



Resolução. O volume do sólido é delimitado pelos 5 planos $x = 0$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$ e $z = c\,(1 - x/b)$.

A área infinitesimal $\text{d}m$ é igual à carga volúmica ρ vezes o volume infinitesimal em coordenas cartesianas, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Começa-se por calcular a massa total a partir da equação (5.9):

$$m = \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-x/b)} \rho \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Como o corpo é homogéneo, ρ é constante. No Maxima, os três integrais pode ser calculado em forma sequencial; p representará a massa volúmica

```
(%i1) integrate (p, z, 0, c*(1 - x/b))$
(%i2) integrate (%, x, 0, b)$
(%i3) m: integrate (%, y, 0, a);
                                 a b c p
(%o3)                            -------
                                    2
```

Embora os resultados intermédios não tenham sido apresentados, estão armazenados nas variáveis %o1 e %o2.

Para calcular $\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$, repete-se o mesmo integral de volume, mudando o integrando de ρ, para $(\rho\,\vec{r})$

```
(%i4) r: [x, y, z]$
(%i5) integrate (p*r, z, 0, c*(1 - x/b))$
(%i6) integrate (%, x, 0, b)$
(%i7) rcm: integrate (%,y,0,a)/m;
                                 b   a   c
(%o7)                           [-,  -,  -]
                                 3   2   3
```

Conclui-se que o vector posição do centro de massa é $\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \dfrac{b}{3}\vec{e}_x + \dfrac{a}{2}\vec{e}_y + \dfrac{c}{3}\vec{e}_z$.

Em todo corpo rígido existe sempre um único ponto que é o centro de massa. Se a origem for escolhida exatamente no centro de massa, o valor de $\vec{r}_{\mathrm{cm}}$ será nulo e a equação (5.10) dá,

$$\int \vec{r}\,\mathrm{d}m = 0 \tag{5.11}$$

O integral em (5.11) será nulo unicamente se a origem estiver no centro de massa. Em qualquer outro ponto o resultado seria um vetor não nulo. Este resultado será muito importante mais para a frente.

Derivando os dois lados da equação (5.10) obtém-se a expressão da o velocidade do centro de massa,

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\displaystyle\int \vec{v}\,\mathrm{d}m}{m}} \tag{5.12}$$

Isto é, a velocidade do centro de massa é a média das velocidades de todos os pontos do corpo, pesada pela massa do ponto.

Derivando a equação (5.12), obtém-se a aceleração do centro de massa,

$$\boxed{\vec{a}_{\rm cm} = \frac{\displaystyle\int \vec{a}\,\mathrm{d}m}{m}} \tag{5.13}$$

que é a média, pesada pela massa, das acelerações de todos os pontos no sólido.

Se o referencial em que é medida a aceleração $\vec{a}$ de cada ponto for um referencial inercial, o produto $\vec{a}\,\mathrm{d}m$ será igual à força resultante $\mathrm{d}\vec{f}$ que atua sobre a massa $\mathrm{d}m$:

$$\mathrm{d}\vec{f} = \vec{a}\,\mathrm{d}m \tag{5.14}$$

Repare-se que sempre que exista aceleração, deverá existir uma força infinitesimal $\mathrm{d}\vec{f}$ aplicada em cada ponto do sólido, para conseguir acompanhar o movimento do corpo, permanecendo rígido. Na maioria dos pontos essa força é devida unicamente às forças internas de contato entre as partes do corpo, forças essas que são desencadeadas em todo o corpo pela ação de n forças externas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ que atuam em n pontos do corpo rígido. Nos pontos 1, 2, ..., n, a força $\vec{f}$ inclui as forças de contato mais a força externa em cada ponto. A diferencial $\mathrm{d}\vec{f}$ é a variação da força em todos os pontos do volume do corpo.

Substituindo a expressão (5.14) na equação (5.13), conclui-se que,

$$\int \mathrm{d}\vec{f} = m\,\vec{a}_{\rm cm} \tag{5.15}$$

Na soma das forças em todos os pontos do corpo, por cada força interna de contato que existir num ponto, existirá outra força igual mas de sentido oposto em outro ponto vizinho, devido à lei de ação e reação. Assim sendo, no integral $\int \mathrm{d}\vec{f}$ todas as forças internas de contato serão eliminadas, ficando unicamente a soma das forças externas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, que é igual à força resultante sobre o corpo rígido. Como tal, a equação (5.15) é equivalente a,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\rm cm}} \tag{5.16}$$

Este resultado importante é a lei do movimento de translação do corpo rígido:

> *O movimento do centro de massa de qualquer corpo rígido com massa m é igual ao movimento que teria uma partícula pontual com massa m e força resultante igual à soma de todas as forças externas aplicadas sobre o corpo rígido.*

Lembre-se que a soma das forças é feita como se fossem vetores livres. Se a força resultante for nula, o centro de massa estará ou em repouso ou em estado de movimento retilíneo uniforme, mas outros pontos no corpo rígido poderão ter movimentos mais complicados.

O peso é um exemplo de força externa aplicada em todos os pontos do corpo rígido. A equação (5.15) nesse caso dá,

$$\int \vec{g}\,\mathrm{d}m = m\,\vec{a}_{\rm cm} \tag{5.17}$$

Se a aceleração da gravidade $\vec{g}$ for igual em todos os pontos do corpo, o integral no lado esquerdo será igual a $m\vec{g}$ e conclui-se que a aceleração do centro de massa é igual à aceleração da gravidade e que o **centro de gravidade** —ponto de aplicação da força resultante do peso de todas as partes do corpo— coincide com o centro de massa. Existem casos em que $\vec{g}$ não é constante em todo o corpo, mas geralmente isso não acontece, sendo possível assumir que o peso total do objeto é a força $m\vec{g}$ aplicada no centro de massa.

Considere-se, por exemplo, uma lâmina triangular. Pendurando-a por um dos vértices, começará a oscilar até parar numa posição em que o centro de gravidade esteja no mesmo segmento de reta vertical que passa pelo vértice; se esse segmento for traçada no triângulo e o procedimento for repetido para os outros dois vértices, o ponto onde se cruzam os três segmentos será o centro de gravidade e centro de massa. Se a massa volúmica do triângulo for igual em todos os pontos, cada uma dos segmento verticais será a mediana que divide o triângulo em duas partes com a mesma área e, portanto, com o mesmo peso. Nos sólidos com formas simétricas e massa volúmica constante, o centro de massa encontra-se no centro geométrico. A figura 5.7 mostra três exemplos.

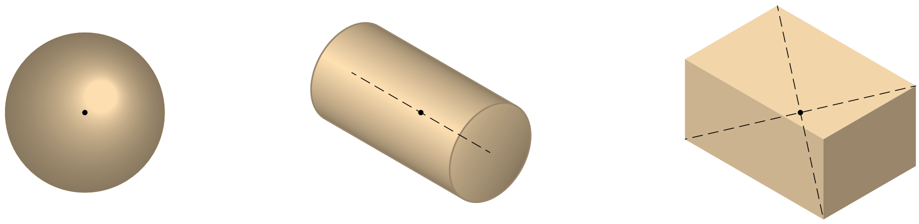


Figura 5.7.: Centros de massa de 3 objetos com massa volúmica constante: esfera, cilindro e paralelepípedo.

5.6. Movimento geral do corpo rígido

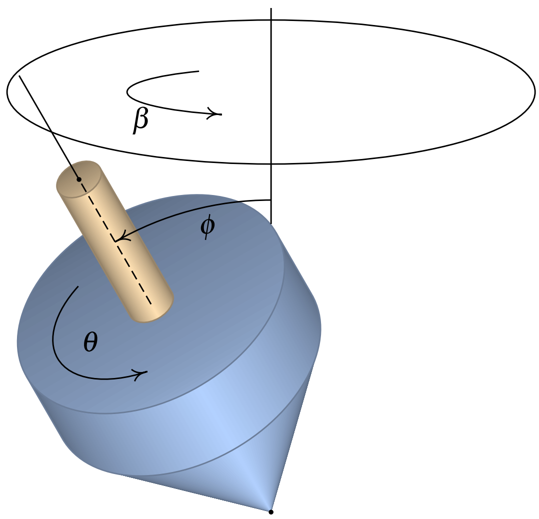


Figura 5.8.: Os 3 graus de liberdade na rotação de um corpo rígido.

A dinâmica do corpo rígido consiste no estudo dos efeitos das forças e binários externos na variação dos seus seis graus de liberdade. A trajetória de um ponto qualquer no corpo, usado como referência, dá informação sobre a variação de três desses graus de liberdade. Os restantes 3 graus de liberdade são 3 ângulos. No pião da figura 5.8 indicam-se dois ângulos, β e ϕ, que definem a direção do eixo do pião; o terceiro ângulo, θ, determina a rotação do pião em relação ao seu eixo. Nesse caso, dois dos ângulos, β e θ, variam em função do tempo e, portanto, há duas velocidades angulares, $\dot{\beta}$ e $\dot{\theta}$.

No pião da figura, o momento do peso em relação ao ponto de contacto no chão produz rotação no sentido em que o ângulo ϕ aumentaria, mas como o pião já tem outra rotação no sentido indicado para o aumento de θ, o eixo do pião não cai mas desloca-se no círculo indicado na figura.

5.6.1. Rotação com eixo fixo

Quando o eixo de rotação de um corpo rígido permanece fixo em relação a um sistema inercial, a segunda lei de Newton será válida para as acelerações medidas no referencial do corpo rígido. Assim sendo, a equação (3.24) permite calcular a força que atua na massa diferencial dm em cada ponto

$$\mathrm{d}\vec{f} = \left(R\,\alpha\,\vec{e}_\theta - R\,\omega^2\,\vec{e}_R\right)\mathrm{d}m \tag{5.18}$$

Cada uma dessas forças produz um momento $\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{f}$ em relação à origem, mas como o corpo rígido pode rodar unicamente em torno do eixo fixo z, interessa unicamente calcular a componente z, obtida usando unicamente a componente radial do vetor de posição:

$$\mathrm{d}\vec{M}_z = (R\,\vec{e}_R)\times\mathrm{d}\vec{f} = R^2\,\alpha\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}m \tag{5.19}$$

Integrando no volume do corpo rígido obtém-se a componente z do binário resultante,

$$\int \mathrm{d}M_z = \alpha\int R^2\,\mathrm{d}m \tag{5.20}$$

A aceleração angular foi colocada fora do integral, por ser igual em todos os pontos do corpo rígido. O integral no lado direito,

$$\boxed{I_z = \int R^2\,\mathrm{d}m} \tag{5.21}$$

é o **momento de inércia**, do corpo rígido, em relação ao eixo dos z.

No integral $\int\mathrm{d}M_z$ todos os momentos das forças internas de contato serão eliminados, em consequência da lei de ação e reação, ficando unicamente a soma dos momentos produzidos pelas forças externas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$. Assim sendo, a equação (5.20) conduz à lei da rotação com eixo de rotação fixo:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha} \tag{5.22}$$

Exemplo 5.3
Determine o momento de inércia de um cilindro homogéneo, com raio R e altura L, em relação ao seu eixo de simetria.

Resolução. Como o eixo de rotação é o mesmo eixo do cilindro, o volume do cilindro define-se em coordenadas cilíndricas através das condições $0 \leq z \leq L$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq R' \leq R$ (usa-se R' para a coordenada cilíndrica, não confundi-la com o raio do cilindro).

O elemento diferencial de volume em coordenadas cilíndricas é ($R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$) e, como tal, $\mathrm{d}m = \rho\,R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, em que ρ é a massa volúmica. O momento de inércia é,

$$I_z = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R R'^3\,\mathrm{d}R'\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{\rho\,\pi\,L R^4}{2}$$

Repare-se que a massa do cilindro é obtida pelo integral,

$$m = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R R'\,\mathrm{d}R'\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho\,\pi\,L R^2$$

Assim sendo, a expressão para o momento de inércia é: $\quad I_z = \dfrac{1}{2}\,m R^2$

No movimento de rotação, o momento de inércia joga um papel semelhante à massa no movimento de translação. Repare-se na semelhança da equação (5.22) com a segunda lei de Newton.

A tabela 5.1 mostra as expressões do momento de inércia de alguns sólidos em relação aos eixos que passam pelo seu centro de massa.

O momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa permite calcular o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo, a uma distância d do eixo no centro de massa, usando o **teorema dos eixos paralelos**:

$$I_z = I_{\mathrm{cm}} + m\,d^2 \tag{5.23}$$

Também é possível calcular o momento de inércia de um sólido somando os momentos de inércia das várias partes que constituem o sólido, já que o integral (5.21) pode ser escrito como a soma dos integrais nas várias partes. O momento de uma barra suficientemente fina pode também ser obtido a partir da expressão para o cilindro, no limite $R \to 0$.

Uma roldana fixa é um exemplo de corpo rígido com eixo de rotação fixo. Se a roldana for homogénea, o centro de massa também estará no eixo de rotação. A figura 5.9 mostra uma roldana de massa m e raio R, em que o fio acompanha a rotação da roldana, sem deslizar. As forças e momentos externos são o peso, $m\vec{g}$, as tensões na corda nos dois lados da roldana, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, a força de contato no eixo da roldana, $\vec{F}_\mathrm{e}$ e o binário M que é produzido pelo atrito no eixo da roldana, no sentido oposto à rotação da roldana.

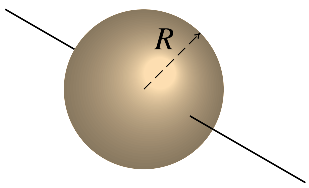
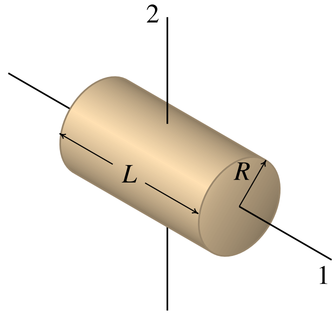
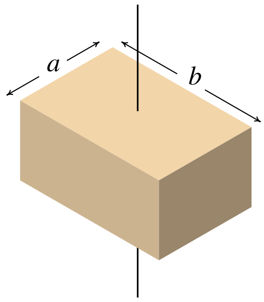
Esfera	**Cilindro**	**Paralelepípedo**
		
$\frac{2}{5}\,mR^2$	Eixo 1: $\frac{1}{2}\,mR^2$ Eixo 2: $\frac{1}{12}\,m\left(3R^2+L^2\right)$	$\frac{1}{12}\,m\left(a^2+b^2\right)$

Tabela 5.1.: Momentos de inércia de alguns sólidos com massa volúmica constante, para eixos que passam pelo centro de massa.

O peso da roldana e a força de contato $\vec{F}_\text{e}$ não produzem momento em relação ao eixo. Como a roldana é um cilindro, usando a expressão para o momento de inércia na tabela 5.1, a equação para o binário resultante é,

$$R\,F_1 - R\,F_2 - M = \frac{1}{2}\,m\,R^2\,\alpha \tag{5.24}$$

Quando o atrito no eixo pode ser ignorado,

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\,m\,a_\text{t} \tag{5.25}$$

em que $a_\text{t} = R\,\alpha$ é a aceleração tangencial de um ponto na corda. Observe-se que, independentemente do raio da roldana, quando a massa da roldana for muito menor que F_1/a_t e F_2/a_t, pode admitir-se que a tensão é igual nos dois lados da corda.

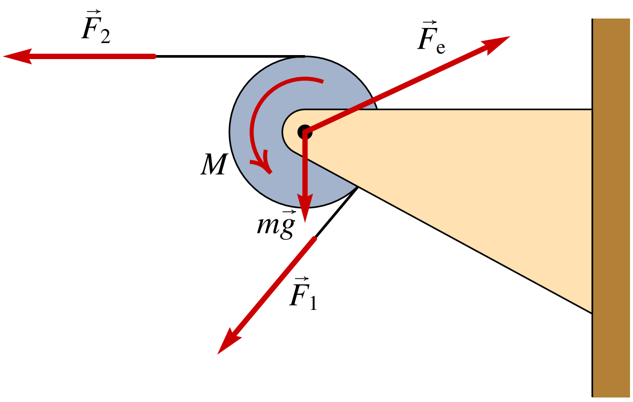


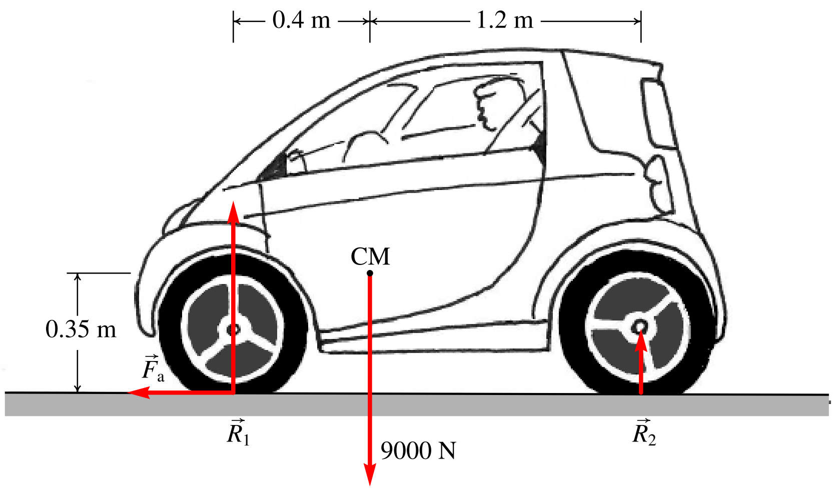
Figura 5.9.: Forças e binários externos sobre uma roldana.

5.6.2. Translação sem rotação

Num corpo rígido com movimento de translação sem rotação, a cada instante a aceleração de todos os pontos é a mesma, igual à aceleração do centro de massa, que é igual à soma das forças externas dividida pela massa do corpo. Como o corpo não roda, a soma dos momentos de todas as forças em relação ao centro de massa deverá ser nula. Há que ter atenção ao facto de que a soma do momentos é nula unicamente em relação ao centro de massa; em relação a outro ponto P, a soma dos momentos será igual e oposta ao momento da força resultante, que atua no centro de massa, em relação a P.

Exemplo 5.4
O automóvel do exemplo 5.1, acelera durante 20 s, com aceleração segundo a trajetória constante, desde o repouso até à velocidade de 60 km/h. Sabendo que o centro de gravidade está a uma altura de 35 cm por cima do chão, determine as força de reação normal em cada pneu.

Resolução. Ignorando a resistência do ar, a única força externa horizontal é a força de atrito estático, $\vec{F}_a$, entre os pneus e a estrada, que deverá apontar no sentido da aceleração. A figura seguinte mostra o diagrama de forças externas.



R_1 representa a soma das duas reações nos dois pneus da frente e R_2 a soma das reações normais dos pneus de atrás. A aceleração tangencial do automóvel é no sentido horizontal e igual a:

$$a_t = \frac{60/3.6}{20} = \frac{5}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A lei do movimento para a translação conduz às equações:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = m\,g \\ F_a = m\,a_t \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} R_1 + R_2 = 9000 \\ F_a = \dfrac{9000 \times 5}{9.8 \times 6} \end{cases}$$

Em relação ao eixo que passa pelo centro de massa, perpendicular à figura, o peso não produz nenhum momento. Os momentos de R_1 e F_a são no sentido horário e o momento de R_2 é no sentido anti-horário. Como o automóvel não tem movimento de rotação, a aceleração angular é nula e a lei do movimento de rotação é:

$$1.2R_2 - 0.4R_1 - 0.35F_a = 0$$

A resolução do sistema das 3 equações conduz a,

$$F_a = 765\ \text{N} \qquad R_1 = 6583\ \text{N} \qquad R_2 = 2417\ \text{N}$$

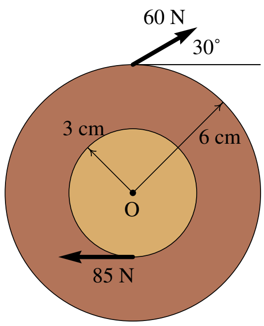
A reação em cada pneu da frente será 3291 N e em cada pneu de atrás 1209 N.

Perguntas

1. As componentes cartesianas de uma força são $\vec{F} = -3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$. Em qual das posições na lista deveria ser aplicada a força para produzir momento no sentido horário em relação à origem?

A. $-2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$
B. $-3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$
C. $2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$
D. $3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$
E. $3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$

2. Sobre um disco aplicam-se duas forças externas, como se mostra na figura. Calcule o momento resultante, em relação ao ponto O, em unidades de N·m.



A. 0.57
B. 1.05
C. 4.35
D. 5.67
E. 6.15

3. Uma peça metálica com massa volúmica constante e massa m é construída com dois cilindros da mesma altura, mas raios diferentes $a > b$, colados um sobre o outro de forma que os seus eixos estejam alinhados. Calcule o momento de inércia da peça em relação ao seu eixo de simetria.

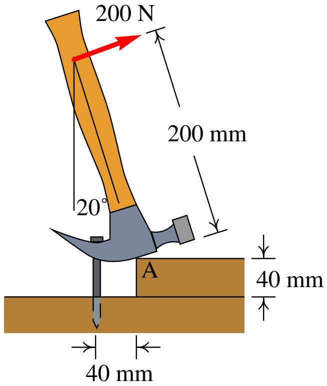
A. $\frac{1}{2}m\left(a^2 - b^2\right)$
B. $\frac{1}{2}m\left(a^4 + b^4\right)$
C. $\frac{1}{2}m\left(\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}\right)$
D. $\frac{1}{2}m\left(a^2 + b^2\right)$
E. $\frac{1}{2}m\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)$

4. Duas crianças com massas de 30 kg e 45 kg estão sentadas nos dois lados de um sobe e desce. Se a criança mais pesada estiver sentada a 1.2 m do eixo do sobe e desce, a que distância do eixo deverá sentar-se a outra criança para manter o sobe e desce em equilíbrio?

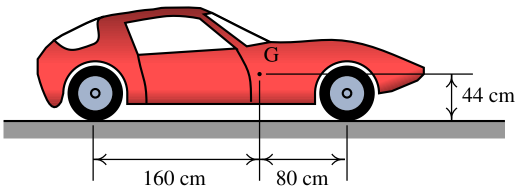
A. 1.5 m
B. 0.8 m
C. 1.8 m
D. 1.2 m
E. 0.98 m

Problemas

1. O martelo na figura apoia-se sobre um bloco de madeira de 40 mm de espessura, para facilitar a extração do prego. Sabendo que é necessária uma força de 200 N (perpendicular ao martelo) para extrair o prego, calcule a força sobre o prego e a reação no ponto A. Admita que o peso do martelo pode ser desprezado e em A existe suficiente atrito para evitar que o martelo escorregue.

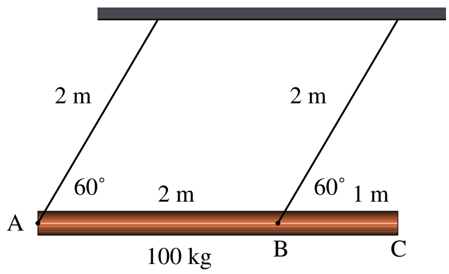


2. Um automóvel com tração frontal acelera uniformemente desde o repouso atingindo uma velocidade de 100 km/h em 11 segundos. Se o peso do automóvel for 9750 N, calcule as reações normais e a força de atrito sobre cada pneu. ¿Qual será o valor mínimo que deverá ter o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada para que automóvel possa atingir essa aceleração?



3. Usando integração no volume do sólido, demonstre o resultado da tabela 5.1, para o momento de inércia de um paralelepípedo com eixo de rotação perpendicular a uma das faces e passando pelo centro de massa.

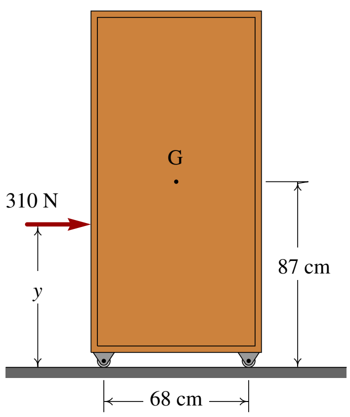
4. Um tronco uniforme de 100 kg está pendurado por meio de dois cabos do mesmo comprimento. O tronco larga-se a partir do repouso na posição representada na figura; calcule a tensão e a aceleração angular dos cabos no preciso instante em que o tronco é largado a partir do repouso.



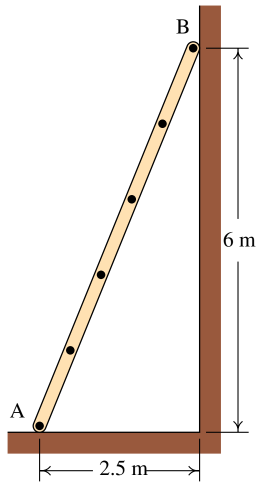
5. Um armário de 45 kg, montado sobre rodas que o deixam andar livremente sobre o chão, é acelerado por uma força externa de 310 N.

(*a*) Calcule os valores máximo e mínimo que pode ter a altura *y* para o armário acelerar sem as rodas perderem o contato com o chão.

(*b*) Calcule a aceleração do armário, quando *y* estiver entre os valores mínimo e máximo calculados na alínea anterior.



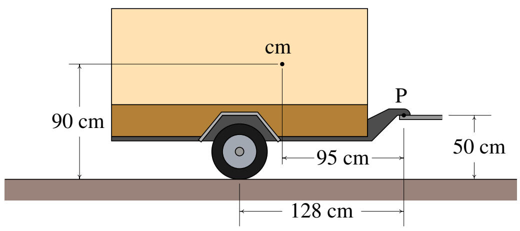
6. A escada na figura está apoiada numa superfície horizontal (ponto A) e numa parede vertical (ponto B). Entre a escada e a superfície horizontal o coeficiente de atrito estático é μ_e, enquanto que o atrito da escada com a parede vertical é desprezável. Admitindo que o centro de gravidade da escada se encontra a metade do seu comprimento, calcule o valor mínimo de μ_e, para garantir que a escada permaneça em repouso.



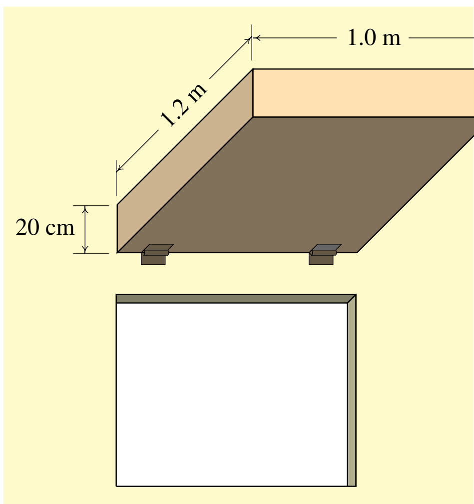
7. A massa do reboque na figura é 750 kg e está ligado no ponto P a uma trela de um automóvel. A estrada é horizontal e os dois pneus idênticos podem ser considerados como um só, com uma única reação normal e força de atrito desprezável; a resistência do ar também será desprezada.

(*a*) Calcule a reação normal nos pneus e a força vertical no ponto P, quando a velocidade for constante.

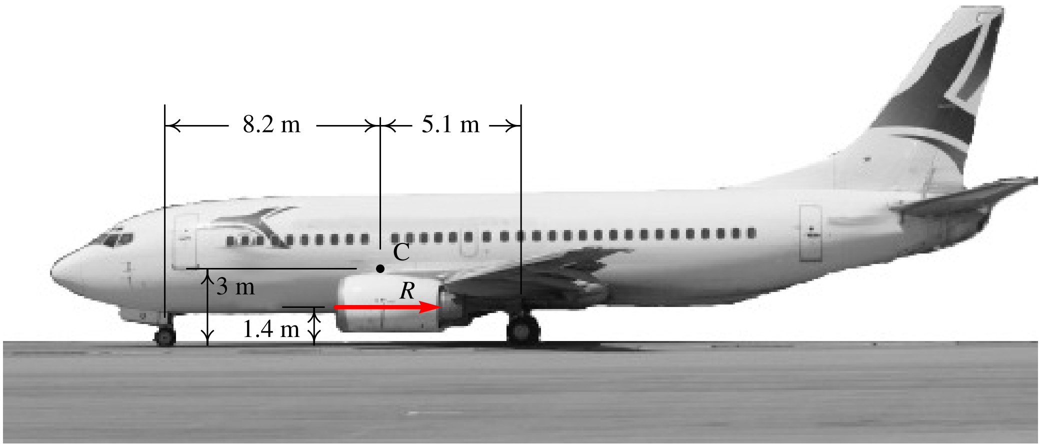
(*b*) Quando o automóvel estiver a acelerar, com $a_t = 2$ m/s^2, a força em P terá componentes horizontal e vertical. Calcule essas componentes e a reação normal nos pneus (o momento de inércia das rodas e o atrito com a estrada são desprezáveis).



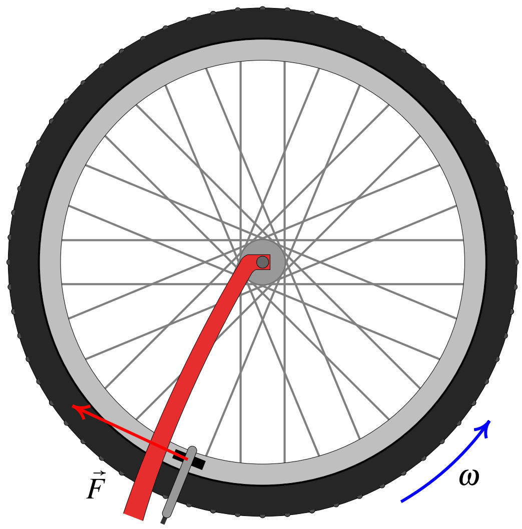
8. A caixa retangular homogénea na figura está ligada a duas dobradiças que lhe permitem rodar para fechar a janela, ou abrir até a posição horizontal apresentada na figura, para dar sombra durante o dia. A corrente que segura a caixa na posição horizontal quebra-se repentinamente e a caixa cai batendo na parede. Desprezando o atrito nos eixos das dobradiças e a resistência do ar, calcule a velocidade angular com que a caixa bate na parede.



9. O avião na figura, com massa total de 1.1×10^5 kg, aterra numa pista horizontal. O ponto C representa o centro de gravidade. No instante em que a velocidade é de 210 km/h (para a esquerda), o piloto liga as turbinas em modo inverso, produzindo a força constante R (representada na figura) e após ter precorrido 580 m na pista a velocidade diminui para 70 km/h. Durante esse percurso, as forças de atrito nos pneus e a resistência do ar podem ser ignoradas, em comparação com a força R que é muito maior. Calcule a reação normal na roda da frente.



10. Para testar os travões, uma bicicleta foi colocada com as rodas para o ar e a roda foi posta a rodar livremente, como mostra a figura. Foi medido o tempo que a roda demorou a dar 10 voltas, obtendo-se o valor de 8.2 s (admita que nesse intervalo a velocidade angular ω permanece constante). Imediatamente a seguir, aplicaram-se os travões e a roda demorou 2.9 s até parar completamente. A figura mostra a força de atrito $\vec{F}$ entre os calços e o aro, que é tangente ao aro e aplicada a uma distância de 27.1 cm do eixo da roda. (a) Admitindo que a força $\vec{F}$ é constante, a aceleração angular que ela produz também será constante; calcule essa aceleração angular. (b) Calcule o número de voltas efetuadas pela roda durante o tempo em que os travões atuaram. (c) Sabendo que o momento de inércia da roda, em relação ao seu centro, é igual a 0.135 kg·m^2, calcule o módulo da força $\vec{F}$.



Respostas

Perguntas: 1. E. **2.** D. **3.** C. **4.** C. **Problemas**

1. O prego exerce uma força de 1000 N, para baixo. $\vec{F}_A = -187,9\vec{e}_x + 931,6\vec{e}_y$ (N)
2. Pneus da frente: R_n = 3020 N, F_a = 1256 N. Pneus trazeiros: R_n = 1855 N, $F_a = 0$ (admitindo que as rodas trazeiras são perfeitamente livres). O coeficiente de atrito estático mínimo é 0.416.
3. Neste caso $R^2 = x^2 + y^2$ e o volume do sólido é definido por $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, $-c/2 \leq z \leq c/2$.
4. $T_A = 212.2$ N, $T_B = 636.5$ N, $\alpha_A = \alpha_B = g/4 = 2.45$ rad/s^2
5. (*a*) Altura mínima 38.6 cm, máxima 135.4 cm (*b*) $\vec{a} = 6.89\vec{e}_x$ (m/s^2)
6. 0.21
7. (*a*) R_n = 5455 N, F_y = 1895 N. (*b*) F_x = 1500 N, F_y = 1426 N, R_n = 5923 N.
8. 5.274 s^{-1}
9. 448×10^3 N.
10. (*a*) 2.64 s^{-1}. (*b*) 1.77 voltas. (*c*) 1.32 N.

6. Trabalho e energia

Num salto com vara, a energia cinética da corrida inicial é convertida em energia potencial elástica da vara dobrada. Enquanto a vara recupera a forma reta, essa energia potencial elástica é transformada em energia potencial gravítica. No instante em que a vara recupera a forma reta, o saltador aproveita para empurrar para baixo, fazendo com que a reação do chão aumente ainda mais a sua energia potencial gravítica; finalmente, o saltador larga a vara e cai livremente transformando-se a energia potencial gravítica adquirida no salto em energia cinética.

6.1. Trabalho e energia cinética

A segunda lei de Newton (equação (4.6))

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{6.1}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças externas, conduz a uma relação útil chamada teorema do trabalho e da energia cinética. Para demonstrar esse teorema, considere-se um deslocamento vetorial infinitesimal $\mathrm{d}\vec{r}$ durante um intervalo infinitesimal de tempo $\mathrm{d}t$ (figura 6.1).

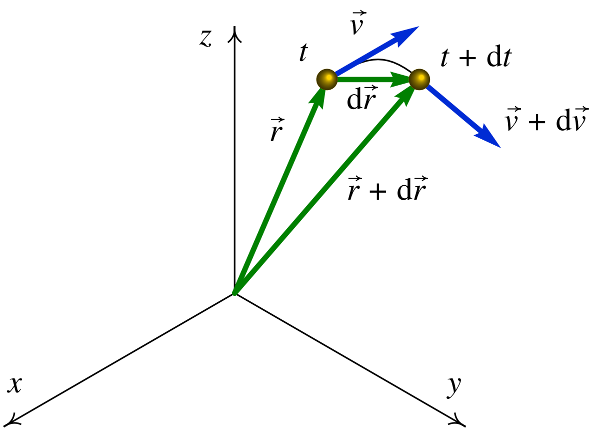


Figura 6.1.: Vetores posição e velocidade num instante t e num instante posterior $t + \mathrm{d}t$.

No limite infinitesimal em que $\mathrm{d}t$ tende para zero, o deslocamento vetorial é na direção tangencial e com módulo igual ao deslocamento ao longo da trajetória:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t = (v\,\mathrm{d}t)\,\vec{e}_\mathrm{t} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_\mathrm{t} \tag{6.2}$$

Usando esta expressão e multiplicando com produto escalar os dois lados da equação (6.1) pelo deslocamento infinitesimal, obtém-se

$$\vec{F}\cdot(\mathrm{d}s\,\vec{e}_\mathrm{t}) = m\vec{a}\cdot(\mathrm{d}s\,\vec{e}_\mathrm{t}) \quad\Longrightarrow\quad F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = m\,a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s \tag{6.3}$$

A equação cinemática $a_\mathrm{t} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ implica que $a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s$ é igual a $v\,\mathrm{d}v$ e, como tal,

$$F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = m\,v\,\mathrm{d}v \tag{6.4}$$

Integrando os dois lados da equação desde uma posição s_1, onde a velocidade é v_1, até outra posição s_2 onde a velocidade é s_2, obtém-se o **teorema do trabalho e a energia cinética**:

$$\boxed{\int\limits_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2} \tag{6.5}$$

A função da velocidade:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \tag{6.6}$$

chama-se **energia cinética** e o integral da componente tangencial da força ao longo da trajetória chama-se **trabalho** da força:

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, \mathrm{d}s \tag{6.7}$$

Ou seja, o teorema afirma que

> *O trabalho realizado pela força resultante, ao longo da trajetória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.*

Observe-se que em geral o trabalho de uma força pode ser calculado integrando $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ ao longo de qualquer curva, mas se essa curva não é a trajetória da partícula, o resultado pode não ser igual ao aumento de energia cinética. Em geral, um integral de linha entre dois pontos produz diferentes valores para diferentes curvas que unem esses pontos.

Unicamente a componente tangencial da força realiza trabalho ao longo da trajetória e pode alterar a energia cinética da partícula. Uma força perpendicular à trajetória não realiza trabalho e não altera a energia cinética da partícula.

O trabalho e a energia cinética têm unidades de energia, ou seja, joules no Sistema Internacional de unidades (1 J = 1 N·m).

Em coordenadas cartesianas, o deslocamento infinitesimal $\mathrm{d}\vec{r}$ é,

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \tag{6.8}$$

Exemplo 6.1

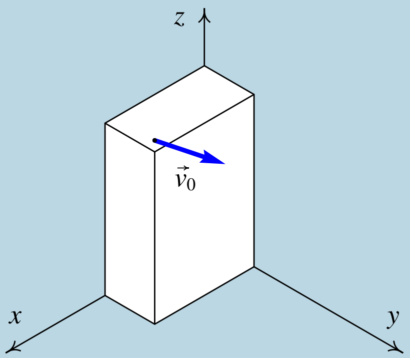
Um canhão dispara uma bala com 5 cm de raio, desde o terraço de um edifício, na posição inicial (em metros):

$$\vec{r}_0 = 9\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y + 15\,\vec{e}_z$$

com velocidade inicial (metros sobre segundo):

$$\vec{v}_0 = 13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y + 15\,\vec{e}_z$$

calcule a altura máxima atingida pela bala (valor máximo da coordenada z) e a posição em que a bala bate no chão ($z = 0$).



Resolução. Este é o mesmo exemplo 2.2 que já foi resolvido no capítulo 2, mas será agora resolvido através do trabalho e do impulso. Uma bala metálica tem massa volúmica aproximadamente 8 vezes maior que a da água. Nessas condições, a velocidade terminal da bala é da ordem de 132 m/s. O problema será resolvido ignorando a resistência do ar e a solução obtida será usada para comparar a velocidade máxima com a velocidade terminal. Um valor da velocidade máxima próximo ou por cima da velocidade limite indicará que a solução obtida tem um erro elevado.

No sistema de eixos da figura, o peso escreve-se $-m g \vec{e}_z$ e o impulso que produz desde o instante do lançamento da bala, $t = 0$, até um instante t posterior é,

$$\vec{I} = -\int_0^t m g \vec{e}_z \, \mathrm{d}t = -m g t \vec{e}_z$$

igualando o impulso à variação da quantidade de movimento, e dividindo pela massa, obtém-se,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - g t \vec{e}_z \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = 13 \vec{e}_x + 22.5 \vec{e}_y + (15 - 9.8 t) \vec{e}_z \tag{6.9}$$

Assim sendo, as componentes x e y da velocidade permanecem constantes. O valor mínimo do módulo da velocidade ocorrerá no instante em que $(15 - 9.8t)$ for igual a zero; o valor mínimo da velocidade, $v_{\text{mín}} = \sqrt{13^2 + 22.5^2} = 25.99$, corresponde ao ponto de altura máxima.

O trabalho realizado pelo peso é:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -m g \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{e}_z \cdot (\mathrm{d}x \vec{e}_x + \mathrm{d}y \vec{e}_y + \mathrm{d}z \vec{e}_z) = -m g \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z = m g (z_0 - z)$$

igualando à variação da energia cinética e dividindo pela massa,

$$2 g (z_0 - z) = v^2 - v_0^2 \tag{6.10}$$

Substituindo v pelo valor mínimo da velocidade, calcula-se a altura máxima $z_{\text{máx}}$

$$2 \times 9.8 \times (15 - z_{\text{máx}}) = 25.99^2 - 30^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z_{\text{máx}} = 26.5 \text{ m}$$

Para calcular a posição em que a bala bate no chão, calcula-se o valor da velocidade, quando a bala bate no chão, substituindo $z = 0$ na equação (6.10):

$$2 \times 9.8 \times 15 = v^2 - 30^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = 34.55 \text{ m/s}$$

e, de acordo com a equação (6.9), o quadrado do módulo da velocidade é:

$$34.55^2 = 13^2 + 22.5^2 + (15 - 9.8 t)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 3.86 \text{ s}$$

(tendo em conta que o tempo t é positivo). Durante esse tempo, o deslocamento horizontal é igual: $\vec{d} = 3.86(13\,\vec{e}_x + 22.5\,\vec{e}_y) = (50.18\,\vec{e}_x + 86.85\,\vec{e}_y)$ m, já que a componente horizontal da velocidade é constante.

O valor máximo da velocidade, atingido quando a bala bate no chão, é 34.55 m/s. Como esse valor é muito menor que a velocidade terminal (132 m/s), a solução obtida ignorando a resistência do ar não estará muito longe da solução verdadeira.

O teorema do trabalho e da energia cinética só contém uma parte da informação contida na segunda lei de Newton, já que a equação vetorial (6.1) são realmente 3 equações (uma para cada componente) agrupadas convenientemente em vetores. Contudo, é possível extrair as mesmas três equações a partir da energia cinética. Tendo em conta que:

$$E_\text{c} = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{6.11}$$

então as três componentes cartesianas da equação (6.1) obtêm-se assim:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v_x}\right) = F_x \quad \Longrightarrow \quad m\,a_x = F_x \tag{6.12}$$

e de forma análoga para as componentes y e z. Esta equação é generalizada no capítulo 8 para qualquer outro sistema de coordenadas diferentes das cartesianas.

6.2. Forças conservativas

Uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que depende unicamente da posição $\vec{r}$ chama-se **conservativa**, se o integral de linha entre dois pontos nas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$,

$$\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{6.13}$$

dá o mesmo resultado, para qualquer percurso possível desde $\vec{r}_1$ ate $\vec{r}_2$.

Assim sendo, é possível escolher um ponto arbitrário na posição $\vec{r}_0$ e definir uma função que U em qualquer ponto:

$$\boxed{U = -\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}} \tag{6.14}$$

Repare-se que essa definição não é possível quando o resultado do integral não está bem definido, nomeadamente quando o resultado é diferente usando diferentes percursos. A escolha do sinal negativo na definição é explicada mais à frente. A função U tem unidades de energia e denomina-se **energia potencial** associada à força conservativa $\vec{F}$. A vantagem de definir energias potenciais é que $U(\vec{r})$ é uma função escalar, mas simples do que a função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$, que permite caraterizar completamente a força; ou seja, dada uma energia potencial qualquer é possível encontrar a expressão da força associada.

Usando o teorema fundamental do cálculo vetorial, o integral de linha da força conservativa $\vec{F}$ é igual a:

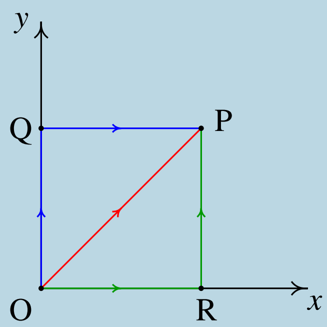
$$\boxed{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)} \tag{6.15}$$

isto é:

> *O trabalho realizado entre dois pontos por uma força conservativa é igual à diminuição da energia potencial associada a essa força.*

Repare-se que o trabalho é igual à diminuição da energia potencial, e não o seu aumento, devido à escolha do sinal negativo na definição da energia potencial. observe-se também que a definição (6.14) implica que a energia potencial tem valor nulo na posição de referencia $\vec{r}_0$; o efeito de usar diferentes escolhas do ponto de referencia $\vec{r}_0$ é acrescentar ou subtrair uma constante a U em todos os pontos, mas as diferenças de potencial $U_1 - U_2$ são independentes do ponto usado como referencia. O valor numérico da energia potencial num ponto não tem nenhum significado físico; o que tem significado é a diferença dos valores da energia potencial em dois pontos.

Exemplo 6.2
Calcule o integral de linha da força $\vec{F} = (3x+y)\vec{e}_x$, desde a origem O até o ponto P no plano xOy, com coordenadas $x = y = 1$, usando os 3 percursos indicados na figura: C_1 é o segmento de reta $\overline{\mathrm{OR}}$ (R com coordenadas $x = 1$, $y = 0$), seguido pelo segmento de reta de $\overline{\mathrm{RP}}$, C_2 é o segmento de reta $\overline{\mathrm{OQ}}$ (Q com coordenadas $x = 0$, $y = 1$), seguido pelo segmento de reta de $\overline{\mathrm{QP}}$ e C_3 é o segmento de reta de $\overline{\mathrm{OP}}$.



Resolução. O segmento de reta $\overline{\mathrm{OR}}$ é formado por todos os pontos com posição:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x \qquad 0 \le x \le 1 \quad y = 0$$

e o deslocamento infinitesimal ao longo desse segmento é então

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x$$

Assim sendo, nesse segmento

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (3x\,\vec{e}_x)\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{e}_x) = 3x\,\mathrm{d}x$$

e o integral de linha em $\overline{\mathrm{OR}}$ é:

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{R}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x = 1.5$$

No segmento $\overline{\mathrm{RP}}$,

$$\vec{r} = y\,\vec{e}_y \qquad 0 \le y \le 1 \quad x = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$$

e então

$$\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

e o integral é zero. Conclui-se que o integral de linha pelo percurso C_1 é igual a 1.5.

No segmento $\overline{\mathrm{OQ}}$,

$$\vec{r} = y\,\vec{e}_y \qquad 0 \le y \le 1 \quad x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$$

e o integral também é nulo.

No segmento $\overline{\mathrm{QP}}$,

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x \qquad 0 \le x \le 1 \quad y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x$$

e o integral é

$$\int_0^1 (3x+1)\mathrm{d}x = 2.5$$

O integral de linha pelo percurso C_2 é então igual a 2.5.

No segmento $\overline{\mathrm{OP}}$, a equação da reta que passa por O e P ($y = x$) permite escrever

$$\vec{r} = x\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \qquad 0 \le x \le 1 \quad y = x \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

e o integral de linha ao longo do percurso C_3 é

$$\int_0^1 (3x+x)\,\vec{e}_x\cdot(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x\,\mathrm{d}x = 2$$

Como o integral é diferente nos diferentes percursos, a força $\vec{F}$ não é conservativa.

No exemplo 6.1 foi possível calcular o integral de linha do peso, sem conhecer a equação da trajetória parabólica da bala de canhão, nem poder calcular a componente tangencial da força, porque como o peso $\vec{P}$ é sempre na direção de $\vec{e}_z$, o produto escalar $\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ é sempre igual a $P\,\mathrm{d}z$, para qualquer deslocamento em qualquer direção, e o integral de linha reduz-se a um integral ordinário numa única variável.

Em geral, sempre que o produto escalar $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ dependa de uma única variável, a força $\vec{F}$ é conservativa porque o integral de linha reduz-se a um integral ordinário e o resultado depende apenas dos valores dessa variável, nas posições inicial e final. As secções seguintes mostram alguns exemplos.

6.2.1. Energia potencial gravítica

Usando um sistema de coordenadas em que o eixo dos z é vertical e aponta para cima, o peso é

$$\vec{P} = -m\,g\,\vec{e}_z \tag{6.16}$$

o produto escalar $\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ é igual a $-m\,g\,\mathrm{d}z$. Ou seja, o peso é uma força conservativa e a energia potencial gravítica pode ser definida por:

$$U_\mathrm{g}(\vec{r}) = -\int\limits_0^z (-m\,g)\,\mathrm{d}z \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{U_\mathrm{g} = m\,g\,z} \tag{6.17}$$

Ou seja, a energia potencial gravítica de um corpo num ponto é igual ao produto do seu peso e a altura do ponto. As alturas podem medir-se a partir de qualquer ponto escolhido como referencia.

6.2.2. Energia potencial elástica

Quando uma mola elástica é esticada ou comprimida, exerce uma força elástica F_e nos dois extremos, no sentido que faz regressar a mola à sua forma original. Se s é a elongação da mola, isto é o seu comprimento atual menos o comprimento que teria quando não estiver nem esticada nem comprimida, o valor absoluto de F_e é diretamente proporcional a s

$$|F_\mathrm{e}| = k\,s \tag{6.18}$$

onde k é a constante elástica da mola. A expressão acima chama-se **lei de Hooke**.

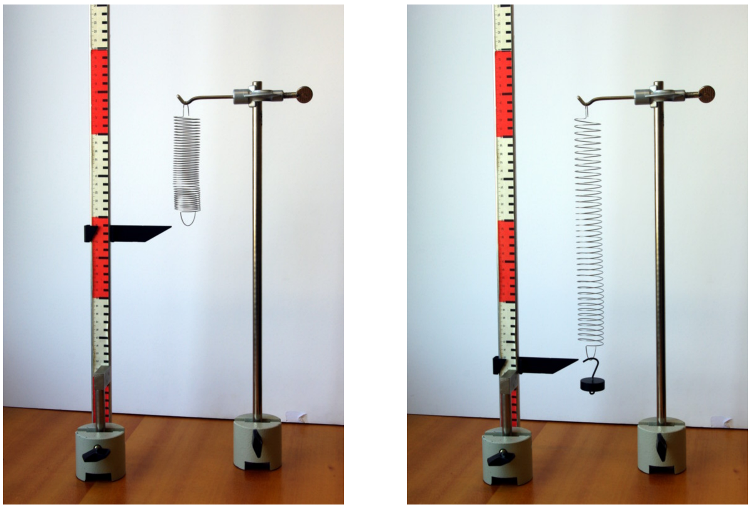


Figura 6.2.: Mola elástica pendurada dum suporte horizontal.

A figura 6.2 mostra um procedimento usado para medir a constante elástica de uma mola. Pendura-se um objeto com peso P, que estica a mola até ficar numa posição em que a força elástica equilibra o peso e mede-se elongação; o valor da constante elástica é o peso usado, P, dividido pela elongação.

No sistema da figura 6.3, o cilindro pode descolar-se ao longo de uma barra fixa e está ligado a uma mola com o outro extremo fixo num ponto fixo O. Em cada posição P do cilindro a elongação s da mola considera-se positiva se a mola estiver esticada, ou negativa se a mola estive comprimida; como tal, se o vetor $\vec{e}_s$ aponta no sentido em que s aumenta, o valor da força elástica é $F_e = -k\,s$ (faz diminuir s quando é positiva ou aumentar quando é negativa). O produto escalar

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k\,s\,\vec{e}_s \cdot d\vec{r} = -k\,s\,d\,s \qquad (6.19)$$

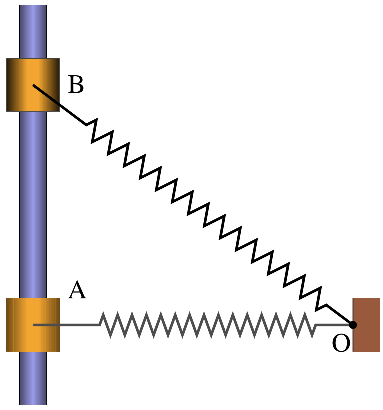


Figura 6.3.: Sistema com uma mola.

depende unicamente da variável s e, portanto, a força elástica é conservativa.

Usando como referência o valor $s = 0$ (posição em que a mola não exerce nenhuma força) a energia potencial elástica é:

$$U_e = -\int_0^s (-k\,s)\,d\,s \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{U_e = \frac{1}{2}k\,s^2} \qquad (6.20)$$

6.2.3. Energia potencial de forças centrais

Uma força central é uma força que depende da posição e em cada ponto do espaço aponta na direção radial (reta que passa pela origem e pelo ponto) e com valor que depende unicamente da distância r até a origem:

$$\vec{F}_c = f(r)\,\vec{e}_r \qquad (6.21)$$

Como o produto vetorial $\vec{F}_c \cdot d\vec{r} = f(r)\,d\,r$ depende unicamente da variável r, as forças centrais são sempre conservativas e a energia potencial associada é:

$$U_c = -\int_\infty^r f(r)\,d\,r \qquad (6.22)$$

O ponto de referência costuma ser colocado no infinito, porque estas forças costumam ser zero quando a distância r é infinita. Dois exemplos de forças centrais são a força gravítica entre partículas e a força elétrica entre cargas pontuais.

6.3. Energia mecânica

As forças que não são função unicamente da posição não são conservativas. Por exemplo a reação normal e a força de atrito estático sobre um corpo são reações, que dependem das condições em que se encontra o sistema; colocando o mesmo corpo na mesma posição de uma mesa, mas com diferentes objetos colocados por cima, a reação normal tem valores diferentes. A força de atrito cinético também não é conservativa. Depende da reação normal e também depende da direção do movimento (direção da velocidade).

No teorema do trabalho e a energia cinética (equação(6.5)), a resultante das forças externas pode ser escrita como a resultante de todas as forças conservativas mais a resultante de todas as forças não conservativas.

$$\int_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}^\mathrm{c}\,\mathrm{d}s + \int_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}^\mathrm{nc}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 \tag{6.23}$$

o lado direito é a energia cinética na posição final s_2, menos a energia cinética na posição inicial s_1 ($E_\mathrm{c}(s_2) - E_\mathrm{c}(s_1)$). O primeiro integral no lado direito é igual à soma dos integrais de todas as forças externas conservativas que atuam no sistema e é igual à diminuição da energia potencial total:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}^\mathrm{c}\,\mathrm{d}s = U(s_1) - U(s_2) \tag{6.24}$$

onde U é a soma de todas as energias potenciais que existam (gravítica, elástica, elétrica, etc.). Passando esses termos para o lado direito da equação obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}^\mathrm{nc}\,\mathrm{d}s = E_\mathrm{c}(s_2) + U(s_2) - E_\mathrm{c}(s_1) - U(s_1) \tag{6.25}$$

Define-se a **energia mecânica** igual à soma da energia cinética mais potencial, em qualquer posição da trajetória:

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + U \tag{6.26}$$

e a equação anterior é o **teorema do trabalho e a energia mecânica**

$$\boxed{\int_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}^\mathrm{nc}\,\mathrm{d}s = E_\mathrm{m}(s_2) - E_\mathrm{m}(s_1)} \tag{6.27}$$

O integral no lado esquerdo é o trabalho realizado por todas as forças externas não conservativas, ao longo da trajetória; ou seja,

> *O trabalho realizado pelas forças não conservativas, a longo da trajetória, é igual ao aumento da energia mecânica E_m.*

Uma consequência desse resultado é a **lei de conservação da energia mecânica**: quando todas as forças que realizam trabalho são conservativas, a energia mecânica do sistema permanecerá constante.

Observe-se que o integral no lado esquerdo da equação 6.27 não apresenta qualquer problema, porque o percurso de integração está bem definido, sendo a trajetória do corpo; pode dar-se o caso que a trajetória não seja conhecida previamente, mas de qualquer forma é uma curva única e bem definida. Se o integral de linha fosse calculado num percurso diferente da trajetória, o seu valor já não seria igual ao aumento da energia mecânica. O sinal negativo na definição da energia potencial prende-se ao fato de a energia mecânica ser definida como energia cinética mais potencial.

Observe-se também que, como a energia cinética nunca pode ser negativa, a energia mecânica E_m (potencial mais cinética) em qualquer posição da trajetória é sempre maior ou igual que à energia potencial nessa posição.

6.3.1. Gráficos de energia

O gráfico da energia potencial total $U(s)$ de todas as forças conservativas é muito útil na análise do movimento. A figura 6.4 mostra um exemplo; a curva a tracejado representa a energia potencial total do sistema, em função da posição na trajetória, s. A reta contínua é a energia mecânica; como é uma reta com ordenada constante, conclui-se que há conservação da energia mecânica e as únicas forças que realizam trabalho são todas conservativas.

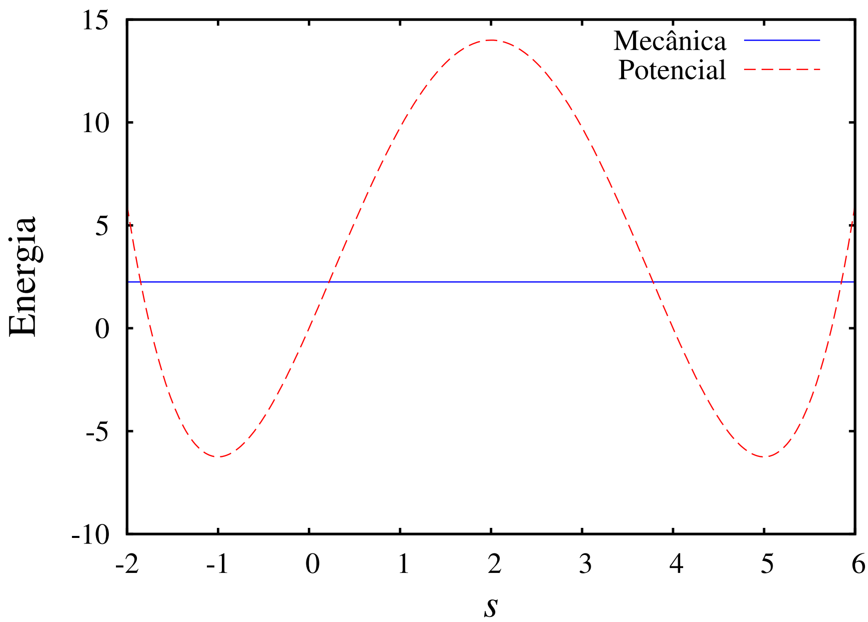


Figura 6.4.: Exemplo de energia potencial e energia mecânica.

As regiões do gráfico onde a reta da energia mecânica está por debaixo da curva de energia potencial são posições onde o sistema nunca pode estar, Porque a energia mecânica é sempre maior ou igual que a energia potencial. Por exemplo, no caso da figura 6.4, o corpo não pode nunca estar nas posições $s = 1$, $s = 2$ ou $s = 3$. Para poder alcançar essas posições, seria necessário aparecer outra força não conservativa que faça aumentar a energia mecânica.

A equação (6.24) significa que $U(s)$ é uma primitiva de F_t^c, com sinal trocado. Assim sendo, conclui-se que

$$\boxed{F_\text{t}^\text{c} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}} \tag{6.28}$$

ou seja, nos intervalos do gráfico de $U(s)$ onde a função é crescente, a resultante das forças conservativas aponta no sentido negativo de s e nos intervalos onde $U(s)$ é decrescente, a força conservativa resultante aponta no sentido positivo de s.

No caso do exemplo da figura 6.4, a energia potencial é decrescente nos intervalos $-2 < s < -1$ e $2 < s < 5$, a componente tangencial da força conservativa total é positiva, isto é, aponta no sentido em que a posição s aumenta. Nos intervalos $-1 < s < 2$ e $5 < s < 6$ a componente da força é negativa (aponta no sentido em que s diminui). Nos pontos $s = -1$, $s = 2$ e $s = 5$ a componente tangencial da força conservativa resultante é nula. Esses pontos onde o valor da força é nulo, chamam-se **pontos de equilíbrio**.

A energia mecânica não pode ser menor que -6.75. A reta da energia mecânica corresponde a um valor de 2.25 unidades. Com essa energia mecânica, o corpo só pode estar a deslocar-se numa vizinhança do ponto s=-1, ou numa vizinhança do ponto 5.

Nos pontos em que a reta da energia mecânica do corpo corta a curva da energia potencial, a energia cinética é nula e, como tal, a corpo fica em repouso; no entanto, a partícula não permanece sempre em repouso nesses pontos, porque a força nesses pontos não é nula.

Por exemplo, se num instante o corpo está na posição $s = 5$, deslocando-se no sentido em que s aumenta, continua a deslocar-se no mesmo sentido, até parar perto de $s = 6$; nesse ponto a força aponta no sentido negativo de s, o que faz com que o corpo regresse para o ponto $s = 5$, mas agora com velocidade no sentido negativo de s. O corpo aproximar-se-á do ponto $s = 3.8$, onde o valor da sua velocidade será nula; nesse ponto, como a componente tangencial da força é no sentido positivo de s, o corpo regressa à posição $x = 5$ começando novamente o mesmo ciclo.

6.4. Movimento harmónico simples

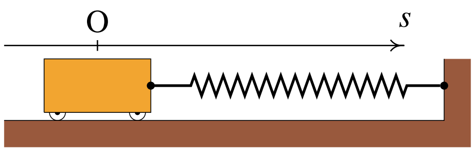


Figura 6.5.: Carrinho a oscilar sobre uma superfície horizontal.

Considere-se um carrinho de massa m sobre uma superfície horizontal, ligado a uma mola com constante elástica k, tal como mostra a figura 6.5. Se o atrito nos eixos das rodas, a massa das rodas e a resistência do ar são desprezadas, a única força que realiza trabalho é a força elástica da mola e há conservação da energia mecânica.

A trajetória é uma reta horizontal; escolhendo a origem O para medir a posição na trajetória, s, na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, a energia mecânica do sistema é,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 \tag{6.29}$$

A figura 6.6 mostra os gráficos da energia potencial e da energia mecânica constante. O carrinho oscila entre as duas posições $s = -A$ e $s = A$, onde a velocidade é nula, e cada vez que passa pela posição $s = 0$ a energia cinética é máxima. O valor da **amplitude** do movimento oscilatório é A, que depende do valor da energia mecânica; quanto maior for a energia, maior a amplitude.

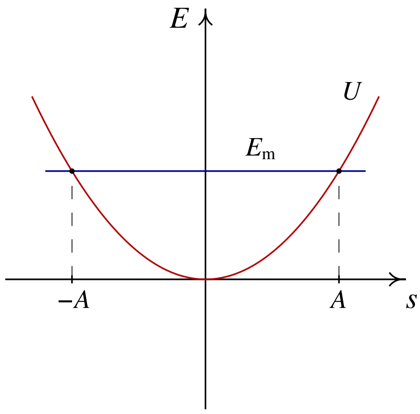


Figura 6.6.: Energia potencial e energia mecânica de um oscilador harmónico simples.

A relação entre a amplitude e a energia mecânica obtém-se substituindo $v = 0$ na equação (6.29):

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} k A^2 \tag{6.30}$$

A amplitude e a energia inicial não são valores caraterísticos do oscilador, mas são condições iniciais que dependem de como é colocado em movimento o sistema. A equação de movimento do sistema pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton, ou também derivando a expressão da energia mecânica (equação 6.29) em ordem ao tempo e integrando. O resultado é:

$$a_\mathrm{t} = -\frac{k}{m} s \tag{6.31}$$

Resolvendo a equação cinemática $a_\mathrm{t} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$, com condição inicial $v(s = A) = 0$, obtém-se v em função de s

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - s^2)} \tag{6.32}$$

igualando essa expressão (no caso em que v é positiva) à derivada $\dot{s}$ e separando variáveis, obtém-se

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{A^2-s^2}} \tag{6.33}$$

onde o tempo t_0 é o instante em que o carrinho passa pela posição de equilíbrio $s=0$. Calculando os integrais obtém-se a expressão para a posição s em função do tempo

$$\boxed{s = A\,\sin(\Omega t + \phi_0)} \tag{6.34}$$

onde a constante Ω, chamada **frequência angular**, é

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.35}$$

e ϕ_0 é uma constante que depende da escolha do instante em que t é igual a zero.

A frequência, que é o número de oscilações por unidade de tempo, é igual a,

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.36}$$

e o período de oscilação T é o inverso da frequência: $T = 1/f$.

A expressão (6.34) é a solução da equação diferencial $\ddot{s} = -(k/m)\,s$. Qualquer outro sistema em que a segunda derivada da variável seja igual à variável vezes uma constante negativa, é chamado também um oscilador harmónico simples e a solução será semelhante a (6.34).

6.5. Energia cinética de rotação

No movimento de translação de um corpo rígido, em cada instante todas as partes do corpo deslocam-se com a mesma velocidade $\vec{v}$ e, com tal, a energia cinética total é igual a um meio da massa total vezes o valor da velocidade ao quadrado. No caso mais geral do movimento de rotação sobreposto à translação, para calcular a energia cinética total será necessário ter em conta que as velocidades de diferentes partes do objeto são diferentes. Conforme foi demonstrado no capítulo 3, a velocidade de cada ponto no corpo, em função da velocidade angular $\vec{\omega}$ e da velocidade $\vec{v}_\mathrm{O}$ de um ponto fixo no corpo rígido, é:

$$\vec{v} = \vec{v}_\mathrm{O} + \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{6.37}$$

em que $\vec{r}$ é a posição do ponto relativa ao ponto de referência O.

A energia cinética total obtém-se somando a energia de todas as partes infinitesimais do corpo rígido, com massa $\mathrm{d}m$,

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}m \tag{6.38}$$

O valor da velocidade ao quadrado é,

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_O^2 + |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 + 2\,\vec{v}_O\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{6.39}$$

O módulo de $(\vec{\omega}\times\vec{r})$ é ωR, em que R é a distância desde o ponto até um eixo que passa pelo ponto O, paralelo a $\vec{\omega}$. substituindo na expressão da energia cinética,

$$E_c = \frac{v_O^2}{2}\int \mathrm{d}m + \frac{\omega^2}{2}\int R^2\,\mathrm{d}m + \vec{v}_O\cdot\left(\vec{\omega}\times\int\vec{r}\,\mathrm{d}m\right) \tag{6.40}$$

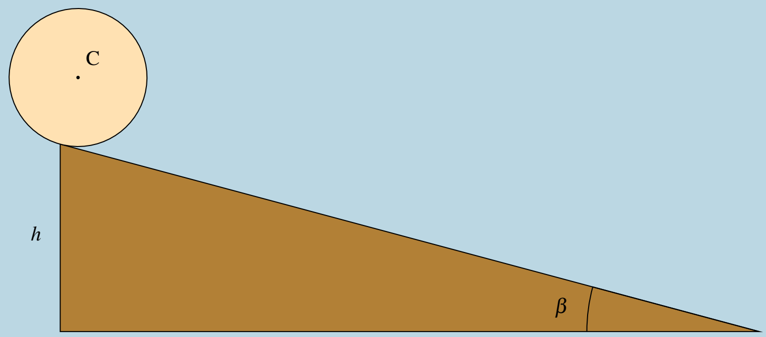
O integral no primeiro termo é igual à massa total m. Como foi referido na secção sobre o centro de massa, o único referencial em que o valor médio do vetor posição é nulo (equação (5.11)) é o referencial em que a origem está exatamente no centro de massa. Assim sendo, se o ponto de referência O for o centro de massa, o terceiro integral será nulo e obtém-se

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2} \tag{6.41}$$

em que I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, paralelo a $\vec{\omega}$.

Exemplo 6.3

Uma esfera de massa m e raio R parte do repouso a uma altura h numa rampa inclinada um ângulo β com a horizontal. A esfera roda na rampa, sem deslizar. Determine o valor da aceleração angular da esfera e a velocidade do centro de massa quando a esfera chega ao fim da rampa.



Resolução. Como a esfera roda sem deslizar, o ângulo de rotação θ está relacionado com a posição do centro de massa C, de acordo com a expressão que foi obtida no capítulo 3 para rodas que rolam sem derrapar:

$$s = R\,\theta$$

conclui-se então que o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ que a esfera roda desde o instante inicial no topo do plano inclinado. O valor da velocidade angular é $\omega = \dot{\theta}$ e o valor da velocidade do centro de massa é $v_{cm} = R\,\omega$.

Escolhendo a posição $s = 0$ no topo da rampa, com s positivo no sentido em que a esfera desce e energia potencial gravítica nula em $s = 0$, em qualquer posição $s = R\,\theta$ a esfera tem descido uma altura $R\,\theta\,\sin\beta$, em que β é o ângulo de inclinação do plano inclinado. A energia mecânica total é,

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}}\,\omega^2 - m\,g\,R\,\theta\,\sin\beta$$

Enquanto a esfera rode sem derrapar, a força de atrito com a superfície do plano é atrito estático, que não realiza trabalho. Ignorando a resistência do ar, a energia mecânica conserva-se e a sua derivada em ordem ao tempo é nula. Substituindo a expressão do momento de inércia da esfera em relação ao seu centro de massa, $2\,m R^2/5$, na equação anterior, derivando em ordem ao tempo e igualando a zero, obtém-se

$$m R\,\omega \left(\frac{7}{5} R\,\alpha - g\,\sin\beta\right) = 0$$

e a expressão para a aceleração angular α é,

$$\alpha = \frac{5\,g\,\sin\beta}{7\,R}$$

Com a esfera parte do repouso, no ponto inicial a sua energia cinética é nula e na parte mais baixa da rampa a energia cinética será igual à energia potencial gravítica inicial, 0, menos a energia gravítica final, $-m\,g\,h$

$$\frac{1}{2} m R^2\,\omega^2 + \frac{1}{5} m R^2\,\omega^2 = m\,g\,h \tag{6.42}$$

e a velocidade do centro de massa C no fim da rampa é

$$v_{\mathrm{C}} = R\,\omega = \sqrt{\frac{10\,g\,h}{7}} \tag{6.43}$$

Perguntas

1. A posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão $\vec{r} = 2t^2\,\vec{e}_x + \frac{5}{3}t^3\,\vec{e}_y$ (SI). Qual dos vetores na lista é perpendicular à trajetória da partícula no instante $t = 2$ s?

A. $4\vec{e}_x - 5\,\vec{e}_y$
B. $2\vec{e}_x - 5\,\vec{e}_y$
C. $-5\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$
D. $5\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y$
E. $-2\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y$

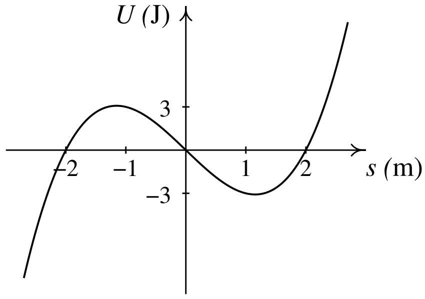
2. Sobre uma partícula atua uma força com direção, sentido e módulo constantes. O módulo da força é 1.6 N. Qual é o trabalho realizado por essa força quando a partícula se desloca uma distância de 20 cm numa direção que faz 60° com a força?

A. 0.28 J
B. 160 mJ
C. 0.68 J
D. 28 J
E. 16 J

3. Num oscilador harmónico simples formado por um corpo de massa m pendurado duma mola vertical com constante elástica k, se a massa for quadruplicada, qual das afirmações será correta?

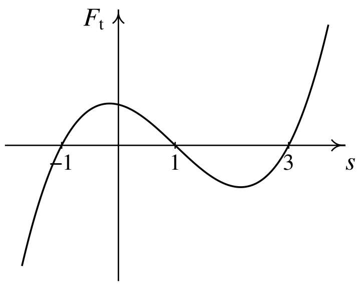
A. A frequência duplica.
B. O período duplica.
C. A amplitude duplica.
D. A energia mecânica duplica.
E. A energia potencial duplica.

4. A figura mostra o gráfico da energia potencial $U(s)$, de uma partícula em função da posição na trajetória, s. Se a partícula está a oscilar à volta da posição $s = 1$, com energia mecânica igual a 2 J, qual é o valor máximo da sua energia cinética?



A. −3 J
B. 3 J
C. 0
D. 2 J
E. 5 J

5. A figura mostra o gráfico da força tangencial resultante F_t, conservativa, sobre uma partícula. Quantos pontos de equilíbrio existem na região apresentada no gráfico?



A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

Problemas

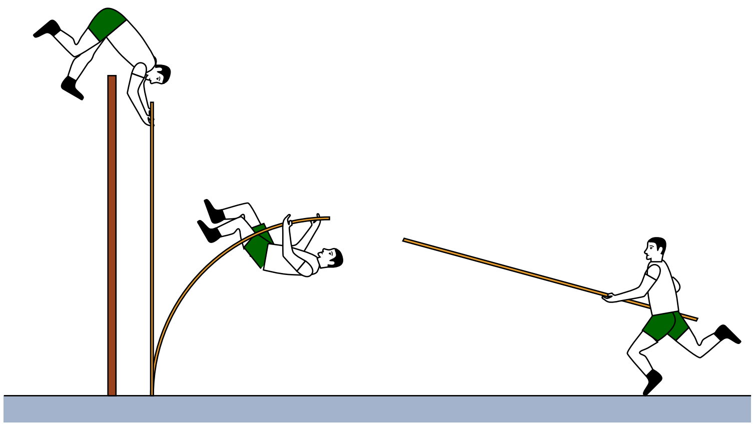
1. Calcule o integral de linha da força do exemplo 6.2: $\vec{F} = (3x + y)\,\vec{e}_x$, desde a origem O até o ponto P no plano xOy, com coordenadas $x = y = 1$, em que o percurso de integração é o arco mais curto da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (centro em $x = 1$, $y = 0$ e raio 1), que passa pela origem e pelo ponto P.

2. A lei da gravitação universal estabelece que qualquer corpo celeste de massa M produz uma força atrativa sobre qualquer outro corpo de massa m, dada pela expressão:

$$\vec{F}_g = -\frac{G M m}{r^2}\,\vec{e}_r$$

onde G é a constante de gravitação universal,, r é a distância entre os dois corpos e $\vec{e}$ é o versor radial, que aponta desde o corpo de massa M até o corpo de massa m. (a) Determine a expressão para a energia potencial gravítica U_g devida ao corpo de massa M. (b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, como se justifica a equação(6.17), $U_g = m g z$, para a energia potencial gravítica de um objeto na Terra?

3. Num salto com vara, um atleta de 70 kg usa uma vara uniforme de 4.5 kg com 4.9 m de comprimento. O salto do atleta tem três fases: primeiro o atleta corre, com o seu centro de gravidade a 1 m de altura e com o centro de gravidade da vara a 1.5 m de altura, até atingir uma velocidade de 9 m/s no instante em que possa a vara no chão. Na segunda fase, a energia da corrida é transferida para a vara, que se deforma e volta a esticar ficando vertical e elevando o atleta até uma altura próxima da altura da fasquia. Finalmente o atleta estica os braços, fazendo com que a reação normal forneça alguma energia adicional que eleva o centro de gravidade do saltador até 5.8 m de altura, conseguindo assim ultrapassar a fasquia a 5.6 m. Admitindo que não existem perdas de energia, calcule qual foi a energia mecânica transferida para o saltador na última fase, quando esticou os braços.

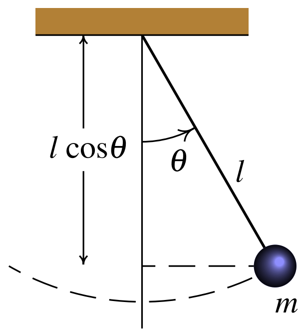


4. Resolva o problema 6 do capítulo 4 aplicando o teorema do trabalho e a energia mecânica. A força exercida pelo bloco sobre o cone, quando o cone penetra no bloco, é uma força conservativa ou não?

5. Num sistema como o da figura 6.6, o carrinho tem massa de 450 g. O carrinho é deslocado 5 cm da posição de equilíbrio e libertado a partir do repouso, começando a oscilar com um período de 1.2 s. Calcule: (a) A amplitude das oscilações. (b) A constante elástica da mola. (c) A velocidade máxima do carrinho.

6. Um pêndulo simples é composto por uma esfera de massa m, pendurada de uma corda muito fina, de comprimento l e massa desprezável. Quando a esfera parte do repouso, há um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ que o fio faz com a vertical.

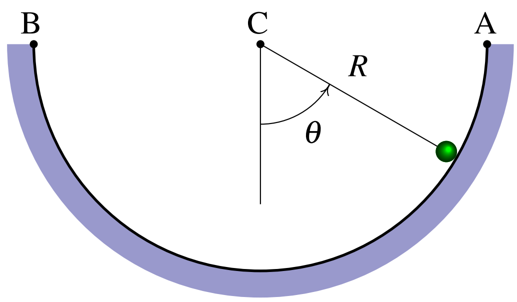
(a) Determine a expressão para a energia mecânica, em função do ângulo θ e da sua derivada $\dot{\theta}$, arbitrando que a energia potencial é nula em $\theta = 90°$. (b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica permanece constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão para $\ddot{\theta}$ em função do ângulo.



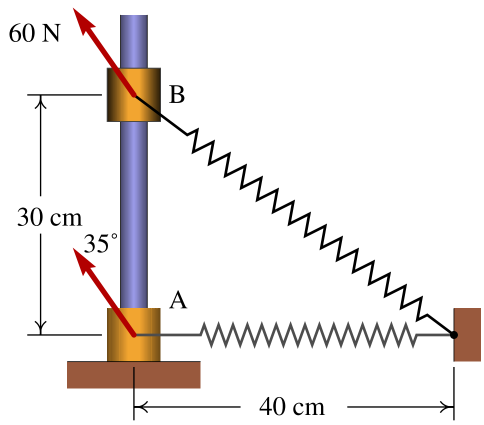
7. Uma esfera de raio r roda, sem deslizar, dentro de uma calha semicircular de raio R, que está num plano vertical (ver figura). (a) Demonstre que, em função da derivada do ângulo θ, a energia cinética da esfera é

$$E_\mathrm{c} = \frac{7}{10}\,m\,(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

(b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica é constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão da aceleração angular $\ddot{\theta}$ em função do ângulo. (c) Entre que valores deve estar a energia mecânica para que a esfera permaneça oscilando dentro da calha? (d) A partir do resultado da alínea b, determine a expressão para $\ddot{\theta}$, no limite quando o raio da esfera é muito menor que o raio da calha ($R - r \approx R$) e explique porque o resultado é diferente do resultado obtido para o pêndulo simples no problema 6.



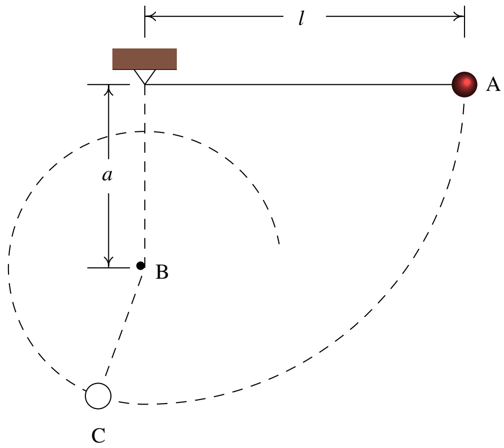
8. Um cilindro com massa de 80 g desliza a partir do repouso, no ponto A, até ao ponto B, devido a uma força externa constante de 60 N; o comprimento normal da mola é 30 cm e a sua constante elástica é 6 N/cm. Admitindo que não existe atrito com a barra fixa, calcule a velocidade com que o cilindro chega ao ponto B.



9. Resolva o problema 8 do capítulo 5 aplicando o princípio de conservação da energia mecânica.

10. Um cilindro desce uma rampa de altura h, a partir do repouso, rodando à volta do seu eixo sem deslizar. Calcule a velocidade do centro de massa do cilindro quando chega ao fim da rampa. Compare com o resultado do exemplo 6.3 para uma esfera; qual dos dois corpos desce mais rápido, a esfera ou o cilindro?

11. Uma esfera pendurada com uma corda de comprimento l parte do repouso na posição A, como mostra a figura. Quando a corda chega à posição vertical, entra em contato com um prego fixo no ponto B, que faz com que a esfera descreva um arco de raio menor que l. Calcule o valor mínimo que deve ter a para que a trajetória da esfera seja uma circunferência com centro em B (se a não for suficientemente grande, a corda deixa de estar esticada quando a esfera sobe e a esfera não chega até a parte mais alta do círculo).



12. Considere um projétil que é lançado desde o chão, num quarto onde existe vácuo, com uma velocidade inicial v_0 que faz um ângulo θ com a horizontal. (a) Calcule o tempo que o projétil demora até chegar ao ponto máximo da sua trajetória, onde a velocidade vertical é nula, e a posição nesse ponto. (b) Com base no resultado da alínea anterior, demonstre que o alcance horizontal do projétil (distância horizontal desde onde é lançado até onde cai) é igual a:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{6.44}$$

Respostas

Perguntas: 1. C. **2.** B. **3.** B. **4.** E. **5.** D.

Problemas

1. $\pi/4 + 3/2 \approx 2.29$

2. (a) $U_g = -\dfrac{G M m}{r}$

(b) Para um valor qualquer r_0, a série de Taylor de U_g é: $-\dfrac{G M m}{r_0} + \dfrac{G M m}{r_0^2}(r - r_0) - \ldots$

O primeiro termo é uma constante, que pode ser ignorada; no segundo termo, se r_0 for o raio da Terra, $r - r_o$ será a altura z desde a superfície da Terra e $G M / r_0^2$ será igual à constante g. Ignorando o resto da série, que para valores de z muito menores que r_0 não altera significativamente a soma dos dois primeiros termos, obtém-se $U_g \approx m g z$.

3. 317.4 J

4. 24 696 N/m^2. A força do bloco não é conservativa, porque só atua quando o cone está a penetrar; se o cone voltasse a subir, após ter penetrado no bloco, o bloco já não produzia força sobre o cone.

5. (*a*) 5 cm. (*b*) 12.34 N/m. (*c*) 26.2 cm/s.

6. (*a*) $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2} m\, l^2 \dot{\theta}^2 - m\, g\, l \cos\theta$ (*b*) $\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l} \sin\theta$

7. (*a*) Observe que a velocidade do centro de massa da esfera é $(R - r)\,\dot{\theta}$ e a condição de rodamento sem deslizamento implica que a velocidade angular da esfera é igual a essa velocidade dividida por r. (*b*) $\ddot{\theta} = -\dfrac{5\,g}{7\,(R - r)} \sin\theta$

(*c*) Maior que $-m\,g\,(R - r)$ e menor que zero; se a energia mecânica é exatamente igual a $-m\,g\,(R - r)$, a esfera não oscila, mas permanece em repouso no ponto mais baixo da calha. (*d*) O valor absoluto de $\ddot{\theta}$ é menor num fator 5/7, devido a que parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre 2/5 da energia cinética de translação, independentemente do valor de r; assim sendo, no limite $r \to 0$ também há 2/7 da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes 5/7 fazem aumentar θ.

8. 11.74 m/s.

9. 5.274 s^{-1}

10. $\sqrt{\dfrac{4\,g\,h}{3}}$. A esfera desce mais rápido que o cilindro, por ter menor momento de inércia.

11. $3\,l/5$

12. (*a*) $t = v_0 \sin\theta/g$, $\vec{r} = (v_0^2/2g)\left(\sin(2\theta)\,\vec{e}_x + \sin^2\theta\,\vec{e}_y\right)$

7. Sistemas dinâmicos

No estudo de um sistema dinâmico é importante determinar a existência de posições de equilíbrio. Os acrobatas na fotografia encontram-se numa situação de equilíbrio estável: se a bicicleta se inclinar lateralmente, o peso do acrobata pendurado por baixo faz com que o sistema se incline no sentido oposto, regressando à posição de equilíbrio. Se o acrobata na bicicleta não tivesse o segundo acrobata pendurado, a sua situação de equilíbrio seria instável: se a bicicleta se inclinasse lateralmente, o seu peso mais o do acrobata faziam aumentar ainda mais a inclinação, afastando a bicicleta da posição de equilíbrio.

7.1. Equações diferenciais

As equações cinemáticas são equações diferenciais ordinárias. Uma equação diferencial ordinária —ou em forma abreviada, EDO— é qualquer expressão que relaciona uma função, por exemplo $x(t)$ e as suas derivadas: $\dot{x}$, $\ddot{x}$, etc. Por exemplo: $x\ddot{x} - 2t = \dot{x}$; neste caso t é a variável independente e x a variável que depende de t. Muitos problemas de ciência e engenharia conduzem a equações diferenciais ordinárias que é preciso resolver para encontrar a função, no exemplo anterior $x(t)$. Existem equações que aparecem em diversos áreas diferentes; por exemplo, a equação do oscilador harmónico simples analisada no capítulo 6 é da forma geral $\ddot{x} = -Cx$, onde C é uma constante positiva; nos problemas de outras áreas científicas em que aparecem equações similares, o comportamento do sistema pode ser analisado por analogia com o movimento de um corpo ligado a uma mola elástica.

7.1.1. Equações de primeira ordem

Uma EDO é de primeira ordem se a única derivada que aparece na equação é de primeira ordem. Se a variável independente é t e a variável dependente x, esse tipo de equações podem ser escritas na forma geral

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{7.1}$$

onde $f(x,t)$ é uma expressão com x e t. Todas as equações diferenciais que foram resolvidas no capítulo 1, pelo método de separação de variáveis, são dessa forma. Mas existem outras equações de primeira ordem que não podem ser resolvidas por esse método; por exemplo, na equação $\dot{x} = t^2 - x^2$ não é possível separar as variáveis t e x.

Uma EDO admite muitas soluções diferentes, que dependem dos valores iniciais (t_0, x_0). Nos exemplos resolvidos no capítulo 1, para diferentes limites de integração obtinham-se diferentes soluções.

Uma EDO de primeira ordem com a forma geral $\dot{x} = f(x)$ é chamada **autonoma**, porque a variável independente t não aparece explicitamente no lado direito. Nesse caso, a solução x é ainda uma função do tempo mas acontece que as funções obtidas com as condições iniciais (t_0, x_0), (t_1, x_0), (t_2, x_0), etc. são a mesma função mas deslocada no eixo dos t. Diz-se que a forma como o sistema "evolui" a partir do valor inicial x_0 é igual, independentemente do instante em que o sistema começa a evoluir.

Em termos físicos, um sistema autónomo é um sistema que é regido sempre pelas mesmas leis físicas: a altura $x(t)$ de um corpo em queda livre desde um ponto com altura x_0 diminui sempre da mesma forma, em quanto não mude o valor de g ou deixe de existir atração gravitacional.

7.2. Sistemas de equações diferenciais autónomas

Considere-se agora o caso em que existem duas funções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que dependem do tempo e que são definidas por duas equações diferenciais autónomas de primeira ordem:

$$\dot{x_1} = f_1(x_1, x_2) \qquad \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2) \tag{7.2}$$

Por exemplo, o sistema:

$$\dot{x_1} = 4 - x_1^2 - x_2 \qquad \dot{x_2} = x_2 - x_1 \tag{7.3}$$

Pretende-se encontrar as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a partir de valores conhecidos de $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ num instante inicial t_0. Pode visualizar-se o problema num gráfico em que se colocam x_1 e x_2 em dois eixos perpendiculares, tal como na figura 7.1. No instante inicial valores iniciais $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ definem um ponto nesse plano e nos instantes os valores de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ mudam, fazendo com que esse ponto se desloque no plano ao longo de uma curva.

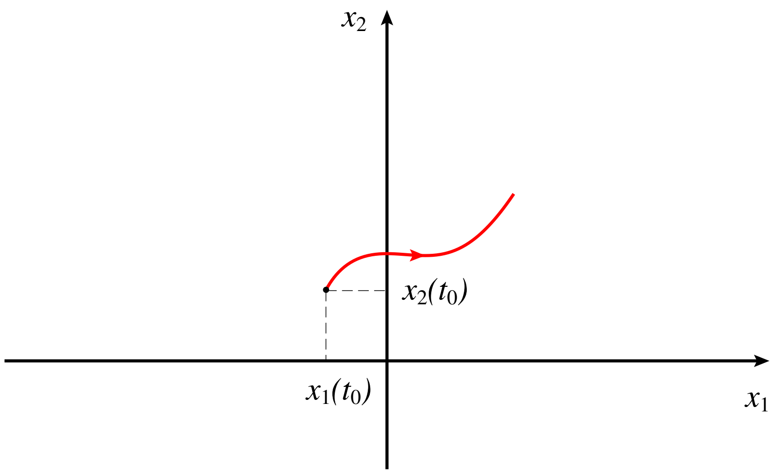


Figura 7.1.: Espaço de fase de um sistema autónomo com duas variáveis.

O plano com os eixos x_1 e x_2 chama-se **espaço de fase** e em cada instante t, o ponto do espaço de fase definido pelas coordenadas $(x_1(t), x_2(t))$ denomina-se o **estado** do sistema nesse instante. As duas variáveis x_1 e x_2 são as **variáveis de estado** e a curva representada na figura 7.1, que mostra a variação das variáveis de estado a partir de um estado inicial, é uma **curva de evolução** do sistema.

Qualquer ponto do espaço de fase pode se o estado inicial do sistema $(x_1(t_0), x_2(t_0))$. Os valores de $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ nesse ponto estão bem definidos e determinam como aumentam as variáveis de estado x_1 e x_2 nesse ponto. A expressão f_1, derivada de x_1 em ordem ao tempo, dá o aumento de x_1 por unidade de tempo; ou seja, o deslocamento da projeção do estado do sistema no eixo x_1, por unidade de tempo; em forma análoga, f_2 dá o deslocamento da projeção do estado do sistema no eixo x_2, por unidade de tempo.

Assim sendo, o vetor:

$$\boxed{\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\vec{e}_2} \tag{7.4}$$

define o deslocamento do estado do sistema no espaço de fase, por unidade de tempo e, por isso, chama-se **velocidade de fase**. Os lados direitos equações diferenciais (7.2) denominadas **equações de evolução** do sistema, definem a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase. Por exemplo, a expressão para a velocidade de fase do sistema definido pelas equações de evolução(7.3) é $\vec{u} = \left(4 - x_1^2 - x_2\right) \vec{e}_1 + (x_2 - x_1)\,\vec{e}_2$

O estado inicial $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ no instante t_0 desloca-se no espaço de fase com a velocidade de fase $\vec{u}(t_0)$; num instante posterior t_1, a velocidade de fase $\vec{u}(t_1)$ poderá ser outro vetor diferente que faz deslocar o estado em outra direção e com outra velocidade. Assim sendo, a evolução do estado do sistema em função do tempo é definida por uma curva contínua no espaço de fase, que parte do estado inicial $(x_1(t_0), x_2(t_0))$. Em cada ponto do espaço de fase em que as funções f_1 e f_2 estão definidas passa uma curva de evolução do sistema.

Em cada ponto do espaço de fase, a velocidade de fase $\vec{u}$ é tangente à curva de evolução que passa por esse ponto. Duas curvas de evolução diferentes nunca se podem cruzar em nenhum ponto no domínio das funções f_1 e f_2, porque no ponto em que se cruzassem existiriam duas velocidades de fase diferentes, que não é possível.

7.2.1. Campos de direções

É possível ter uma ideia de como é a evolução de um sistema dinâmico no tempo, sem ter de resolver as equações diferenciais (7.2). A figura 7.2 mostra a direção da velocidade de fase em vários pontos do espaço de fase, para um exemplo concreto. Esse tipo de gráfico designa-se de **campo de direções**.

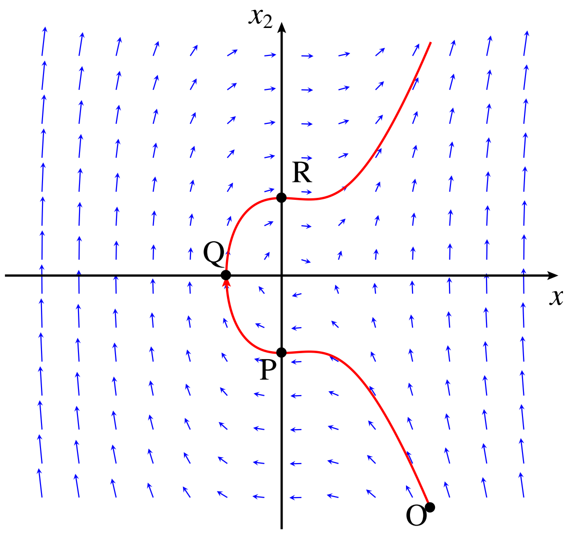


Figura 7.2.: Campo de direções de um sistema dinâmico e uma curva de evolução.

Olhando para o campo de direções é fácil prever como será a curva de evolução a partir de um estado inicial num instante t_0. Por exemplo, na figura 7.2 mostra-se uma das possíveis curvas de evolução do sistema, a partir do estado inicial P, com $x_1 = 0$ e $x_2 < 0$. Também é possível ver a evolução anterior do sistema em $t \leq t_0$ que o levou a ficar com o estado inicial P em t_0; vê-se na figura que o sistema passou pelo estado O antes de alcançar o estado P.

A curva mostra que a variável x_1, inicialmente positiva em O, diminui em função de tempo tornando-se negativa, até alcançar um valor mínimo e logo começa a aumentar ficando novamente positiva. A variável x_2 aumenta desde um valor inicial negativo e quando x_1 se aproxima de zero, diminui ligeiramente, começando a aumentar novamente enquanto x_1 permanece negativa, ficando igual a zero no instante em que x_1 tem o seu valor mínimo; quando x_1 volta a ficar positiva, x_2 diminui ligeiramente mas logo continua a aumentar.

7.2.2. Equações diferenciais de segunda ordem

A forma geral de uma equação diferencial autónoma de segunda ordem é:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{7.5}$$

que pode ser reduzida a duas equações de evolução de um sistema dinâmico com duas variáveis de estado. Basta considerar a primeira derivada $\dot{x}$ como uma outra variável y que também depende do tempo e, portanto a segunda derivada $\ddot{x}$ é igual a $\dot{y}$ e a equação diferencial fica $\dot{y} = f(x, y)$, que é uma equação de primeira ordem; mas como esta nova equação tem duas variáveis independentes, será necessária uma segunda equação que é a própria definição da nova variável introduzida: $y = \dot{x}$; ou seja, a equação inicial é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\dot{x} = y \tag{7.6}$$

$$\dot{y} = f(x, y) \tag{7.7}$$

Estas duas equações definem um sistema dinâmico com variáveis de estado x e y, e velocidade de fase

$$\vec{u} = y\,\vec{e}_x + f(x, y)\,\vec{e}_y \tag{7.8}$$

Nos sistemas mecânicos, a segunda lei de Newton permite encontrar a equação de movimento, que é uma expressão para a aceleração. Como a aceleração é a segunda derivada da posição, a equação de movimento é uma equação diferencial de segunda ordem. Define-se como variável adicional a velocidade, que é a primeira derivada da posição e, como tal, o espaço de fase é formado pelas variáveis de posição e de velocidade. O estado do sistema em cada instante é definido pela posição e a velocidade.

Exemplo 7.1
Uma partícula com massa de 0.5 kg desloca-se ao longo de um carril, sob a ação de uma força com componente tangencial $F_t = -s^3 + 6s^2 - 3s - 10$, onde s é a posição ao longo do carril (unidades SI). (a) Escreva as equações de evolução do sistema e identifique as variáveis de estado. (b) Trace o campo de direções para valores de s no intervalo $[-4, 8]$ e valores de v no intervalo $[-30, 30]$. (c) Num instante inicial a partícula encontra-se na posição $s = 4$, com componente da velocidade $v = 3$ m/s. Represente a curva de evolução da partícula no espaço de fase.

Resolução. (a) A aceleração tangencial $\ddot{s}$ é igual à componente tangencial da força dividida pela massa:

$$\ddot{s} = \frac{F_t}{m} = -2s^3 + 12s^2 - 6s - 20$$

esta equação de movimento é equivalente às seguintes equações de evolução de um sistema dinâmico:

$$\dot{s} = v \qquad \dot{v} = -2s^3 + 12s^2 - 6s - 20$$

As variáveis de estado são a posição na trajetória, s, e a velocidade v.

(b) e (c) A velocidade de fase é o vetor:

$$\vec{u} = v\,\vec{e}_s + \left(-2s^3 + 12s^2 - 6s - 20\right)\vec{e}_v$$

No Maxima, o campo de direções pode ser feito com o comando `plotdf`. Os dois primeiros argumentos que devem ser dados a esse comando são uma lista com as componentes da velocidade de fase e outra lista com os nomes das variáveis de estado. A seguir define-se o domínio de valores das variáveis de estado. Para traçar a curva de evolução que passa pelo estado inicial $x = 4$ e $v = 3$, usa-se a opção `trajectory_at`:

```
(%i1) plotdf ([v, -2*s^3+12*s^2-6*s-20], [s, v], [s, -4, 8],
              [v, -30, 30], [trajectory_at,4,3])$
```

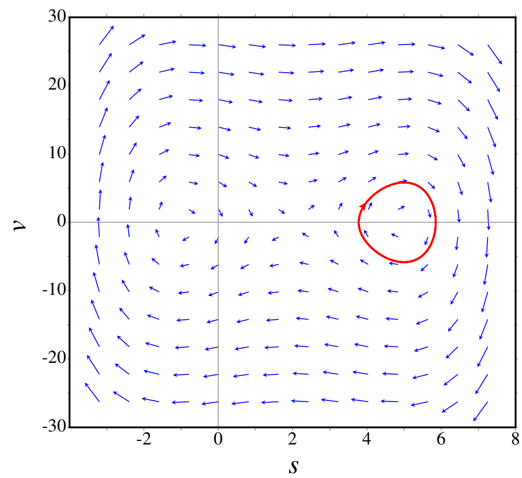


Figura 7.3.: Campo de direções do exemplo 7.1 e curva de evolução do sistema.

A figura 7.3 mostra o gráfico obtido. Os vetores que representam a velocidade de fase não foram desenhados com o valor real do seu comprimento, para evitar que se cruzem, mas foram ajustados de forma a ficar com tamanho ligeiramente menor que a distância entre os pontos da quadrícula em que são desenhados os vetores.

A curva de evolução da partícula a partir de $x = 4$ mostra que a partícula avança na direção positiva de x, até parar ($v_x = 0$) em aproximadamente $x = 5.8$; a seguir a partícula regressa para o ponto $x = 4$, com componente da velocidade $v_x = -3$, continua a deslocar-se no sentido negativo até parar aproximadamente em $x = 3.8$; finalmente, regressa ao ponto inicial $x = 4$ com a mesma componente da velocidade inicial $v_x = 3$. Nesse instante o ciclo repete-se.

7.2.3. Retratos de fase

O campo de direções fornece muita informação importante sobre o sistema. No exemplo apresentado na figura 7.3, as condições iniciais dadas conduzem a um movimento oscilatório à volta do ponto $x = 5$. Pode ver-se que se a velocidade inicial fosse mais elevada ou se a partícula partisse de uma posição inicial com $x > 6$, a oscilação seria até valores de x menores que -1.5. Também pode ver-se que existem outras curvas de evolução fechadas à volta de $x = -1.5$, ou seja, movimentos oscilatórios à volta desse ponto.

Um gráfico mais completo, mostrando várias curvas de evolução que ajudem a descrever os possíveis tipos de soluções do sistema, chama-se **retrato de fase** do sistema.

O campo de direções permite também compreender como funcionam os métodos numéricos para resolver sistemas de equações diferenciais. Dado um ponto inicial no espaço de fase e expressões que permitam calcular a velocidade de fase em cada ponto do espaço de fase, cria-se uma sequência de pontos em que cada ponto segue o anterior na direção definida pela velocidade de fase média entre esses dois pontos (consulte o capítulo de equações diferenciais do livro “Métodos Numéricos”[37]). A opção `trajectory_at` do comando `plotdf` que foi usada no exemplo acima faz com que o sistema de equações diferenciais seja resolvido numericamente, com condições iniciais dadas pelas coordenadas do ponto inicial e a solução é representada no mesmo gráfico do campo de direções.

Conforme já foi referido, o primeiro argumento que deve ser dado ao programa `plotdf` é uma lista com as expressões que definem as duas componentes da velocidade de fase, ou seja, as derivadas das duas variáveis de estado. Cada uma dessas expressões pode depender unicamente das duas variáveis de estado. A seguir a essa lista escreve-se outra lista com os nomes das duas variáveis de estado, na mesma ordem que foi usada para escrever as suas derivadas na primeira lista. Há várias opções adicionais que podem ser usadas; a lista completa pode ser consultada no capítulo sobre métodos numéricos no manual do Maxima.

O programa plotdf cria uma nova janela com o campo de direções, como a que se mostra na figura 7.4, para o exemplo da secção anterior. Deslocando o rato sobre o espaço de fase, aparecem no canto inferior direito as coordenadas do ponto onde está o ponteiro. Clicando no primeiro botão do rato sobre algum ponto no gráfico, aparece a curva de evolução que passa por esse ponto, com uma seta que indica o sentido de evolução.

A barra de menu da janela gráfica inclui vários botões. Os botões com os sinais + e - permitem aumenta ou diminuir o tamanho do gráfico. O botão com um disco permite gravar uma cópia do gráfico num ficheiro, em formato Postscript. O botão do lado direito,

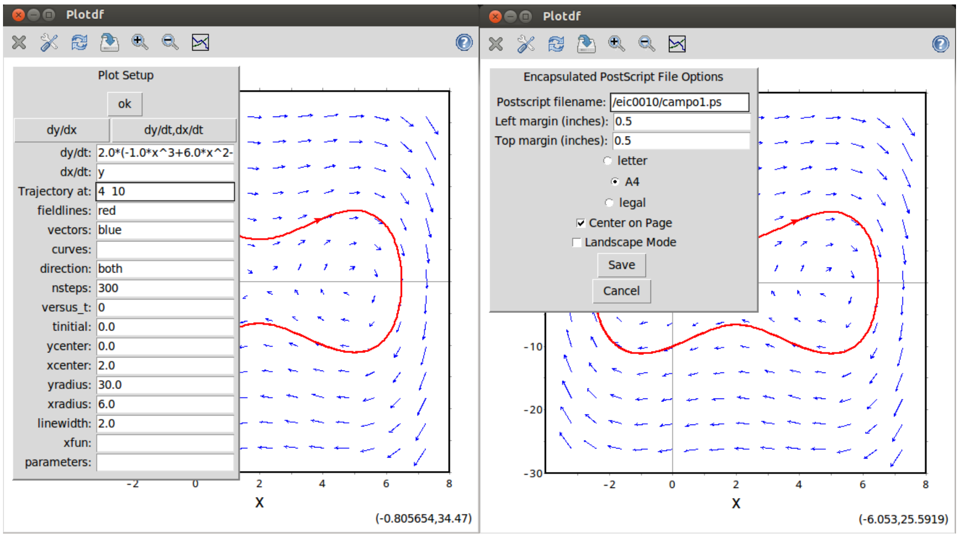


Figura 7.4.: Menus `Config` e `Save` do programa plotdf.

com um pequeno gráfico, abre uma nova janela mostrando os gráficos das duas variáveis de estado em função do tempo, correspondentes à última curva de evolução que tenha sido traçada.

O botão com uma chave de fendas abre o menu “Plot SetUp” (figura 7.4) que mostra vários parâmetros que podem ser alterados: as equações que definem as componentes da velocidade de fase, as cores usadas para os vetores da velocidade de fase (`vectors`) e as curvas de evolução (`fieldlines`), o domínio, etc.

Se o campo `vectors` é deixado em branco, não são traçados os vetores do lcampo de direções e se o campo `fieldlines` está em branco, não são traçadas curvas de evolução. Quando se altera um parâmetro, é necessário seleccionar “ok” e a seguir “Replot” (botão com setas a rodarem) para atualizar o gráfico.

O campo `direction` tem, por omissão, o valor `both`, que implica que quando se clica num ponto, aparece a curva de evolução que passa por esse ponto, para instantes anteriores e posteriores. Mudando essa variável para `forward` ou `backward`, consegue-se que a curva seja traçada unicamente para instantes posteriores ou anteriores. Introduzindo duas coordenadas no campo `Trajectory at`, separadas por espaço e carregando na tecla `Enter`, acrescenta-se mais uma curva que passa pelo ponto com essas coordenadas.

7.3. Pontos de equilíbrio

Em cada ponto do espaço de fase, a velocidade de fase indica a direção e sentido que segue a curva de evolução que passa por esse ponto. Nos pontos onde a velocidade de fase é nula, não existe nenhuma curva que passe por esse ponto. Nesse caso o estado da partícula permanece constante nesse ponto, que é chamado **ponto de equilíbrio**.

Exemplo 7.2
Encontre os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico

$$\dot{x_1} = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \qquad\qquad \dot{x_2} = x_2^2 - x_1^2 x + 1$$

Resolução. Para resolver o problema usando o Maxima, é conveniente guardar as duas expressões nos lados direitos das equações de evolução numa lista

```
(%i2) f: [4-x1^2-4*x2^2, x2^2-x1^2+1]$
```

a seguir, usa-se o comando `solve` para encontrar os pontos de equilíbrio que é onde as duas expressões são iguais a zero

```
(%i3) equilibrio: solve(f)$
(%i4) float (equilibrio);
(%o4) [[x2 = - .7745966692414833, x1 = - 1.264911064067352],
[x2 = - .7745966692414833, x1 = 1.264911064067352],
[x2 = .7745966692414833, x1 = - 1.264911064067352],
[x2 = .7745966692414833, x1 = 1.264911064067352]]
```

Chama-se **nulclina** da primeira variável à curva onde $\dot{x}_1$ é nula, que neste caso é a elipse $x_1^2/4 + x_2^2 = 1$, e as nulclinas da segunda variável são as duas partes da hipérbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Os pontos de equilíbrio do sistema são os quatro pontos de interseção entre a elipse e a hipérbole. Os gráficos dessas duas curvas desenham-se mais facilmente usando a forma paramétrica das equações:

```
(%i5) plot2d([[parametric, 2*cos(t),sin(t)],
       [parametric,-cosh(t/2),sinh(t/2)],
       [parametric,cosh(t/2),sinh(t/2)]],[t,-3.2,3.2],[y,-2,2],
       [legend,false],[xlabel,"x1"],[ylabel,"x2"])$
```

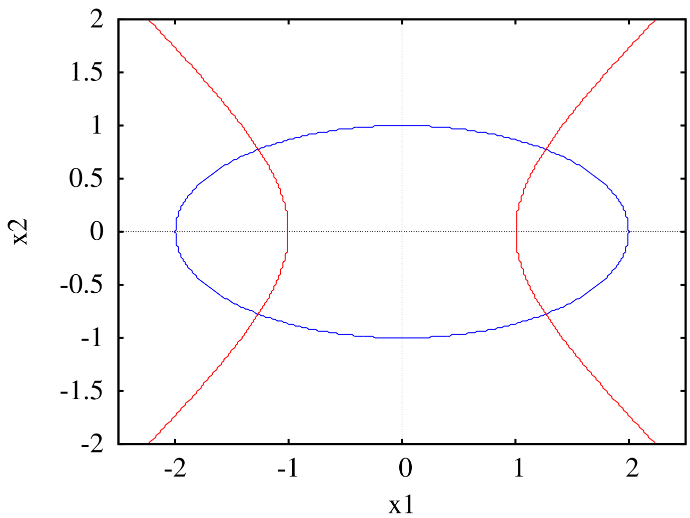


Figura 7.5.: Nulclinas e pontos de equilíbrio.

O resultado apresenta-se na figura 7.5. Dentro da elipse, como $\dot{x}_1$ é positiva, a velocidade de fase aponta para a direita; fora da elipse aponta para a esquerda. Na região à esquerda da hipérbole, a velocidade de fase aponta para baixo, entre os dois ramos da hipérbole aponta para cima e à direita da hipérbole aponta para baixo.

Nos sistemas mecânicos em que as duas variáveis de fase são a posição na trajetória s e a velocidade v, se as duas componentes da velocidade de fase são nulas então a velocidade e a aceleração tangencial são nulas. Isso implica que o sistema se encontra num estado de **equilíbrio estático**, em que a componente tangencial da força resultante e a velocidade são nulas e o objeto permanece em repouso. Nesses sistemas, todos os pontos no eixo das abcissas (eixo da variável s) no espaço de fase correspondem a estados de repouso ($v = 0$), mas não necessariamente estados de equilíbrio ($a_t = 0$). Os estados de equilíbrio do sistema dinâmico são os pontos de equilíbrio estático, que estão todos no eixo das abcissas ($v = 0$) e nos quais a velocidade de fase é nula. Nos pontos do eixo das abcissas onde a velocidade de fase não é nula, o sistema permanece instantaneamente em repouso, retomando imediatamente o seu movimento.

Um estado de **equilíbrio dinâmico** é um estado em que a aceleração tangencial é nula mas o objeto desloca-se com velocidade constante. No retrato de fase esses estados de equilíbrio dinâmico são retas paralelas ao eixo da posição s.

Exemplo 7.3

Um objeto com massa 0.3 kg desloca-se sob a ação de uma força com componente tangencial (unidades SI):

$$F_t = -\frac{s^4}{2} + 4\,s^3 - \frac{3}{2}\,s^2 - 32\,s + 25$$

onde s é a posição ao longo da trajetória. (a) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema. (b) Represente o retrato de fase do sistema.

Resolução. (a) Pode começar-se por armazenar a expressão da força em função da posição:

```
(%i6) Ft: -s^4/2 + 4*s^3 - 3*s^2/2 - 32*s + 25$
```

Para encontrar os pontos de equilíbrio, onde a força tangencial é nula, pode usar-se o comando `realroots`, já que só interessam as raízes reais

```
(%i7) se: float (realroots (Ft));
(%o7) [s = - 2.651742964982986, s = .8102310001850128,
                        s = 3.950161665678024, s = 5.891350239515305]
```

Existem então 4 pontos de equilíbrio, todos com $v = 0$ e com os 4 valores de s na saída (`%o7`). (b) Para construir o retrato de fase, escolhe-se um domínio que mostre os quatro pontos de equilíbrio, sem ficar muito próximos uns dos outros:

```
(%i8) plotdf ([v,Ft/0.3], [s,v], [s,-5,8], [v,-50,50])$
```

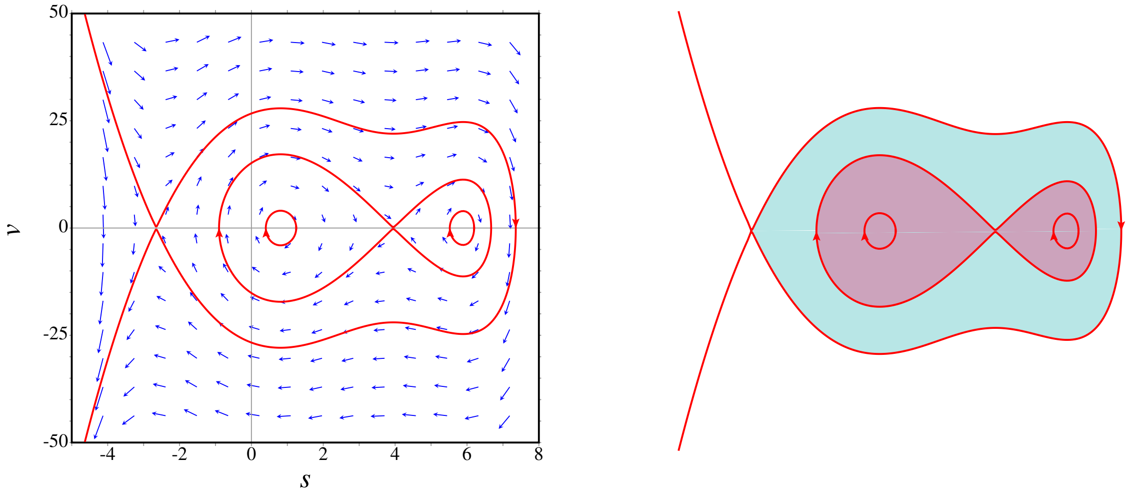


Figura 7.6.: Retrato de fase do exemplo 7.3; no lado direito mostram-se as regiões onde o sistema oscila.

O resultado mostra-se na figura 7.6. As curvas de evolução nas vizinhanças dos 2 pontos de equilíbrio em $s = 0.81$ e $s = 5.89$ são fechadas, com o ponto de equilíbrio no seu interior. Nos outros dois pontos de equilíbrio, $s = -2.65$ e $s = 3.95$, há curvas de evolução que começam ou terminam entram e no ponto (aproximam-se assimptoticamente desse ponto no limite $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$). Nas duas secções seguintes analisam-se com mais pormenor essas curvas.

7.3.1. Equilíbrio estável e instável

Os pontos de equilíbrio em $s = 0.81$ e $s = 5.89$ no exemplo 7.3 são pontos de **equilíbrio estável**, porque se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema regressará ao esse estado inicial.

Os outros dois pontos de equilíbrio, em $s = -2.65$ e $s = 3.95$, são pontos de **equilíbrio instável**, porque se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema afastar-se-á desse estado inicial.

As componentes da velocidade de fase permitem descobrir os pontos de equilíbrio. No caso dos sistemas mecânicos em que as variáveis de estado são s e v, basta encontrar as raízes da força tangencial (ou aceleração tangencial), em função da posição s, substituindo $v = 0$. Nesses sistemas a expressão de F_t ou a_t, com $v = 0$, permite identificar os pontos de equilíbrio estável ou instável. A figura 7.7 mostra o gráfico da força tangencial do exemplo 7.3.

Na figura 7.7, os pontos de equilíbrio s_e são os pontos em que a curva corta o eixo s. Se nesses pontos F_t passa de um valor negativo para um valor positivo, quer dizer que para $s < s_e$ a força aponta no sentido negativo de s, fazendo diminuir s ou seja, afastando o

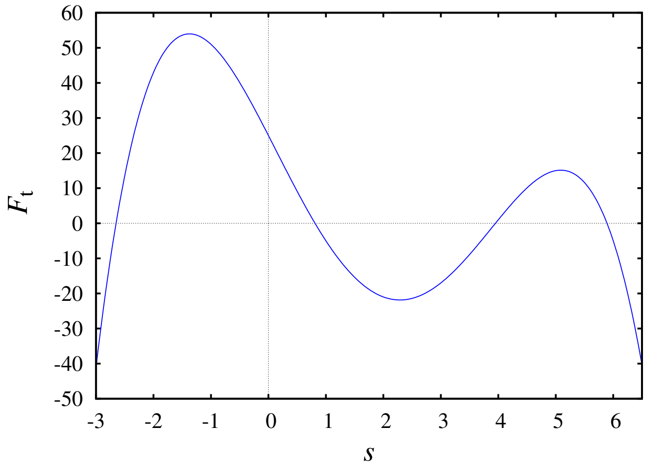


Figura 7.7.: Gráfico da força do exemplo 7.3.

sistema do ponto de equilíbrio; em $s > s_e$ a força é no sentido positivo de s, aumentando s e afastando também o sistema do ponto de equilíbrio. Assim sendo, nesses pontos o equilíbrio é instável.

Nos pontos de equilíbrio s_e em que F_t passa de um valor positivo para um valor negativo. A força faz aumentar s se $s < s_e$, ou diminuir se $s > s_e$. Ou seja, nesses pontos o equilíbrio é estável.

Nos capítulos 9 e 10 explica-se um método geral para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos mais gerais. O retrato de fase também é sempre uma boa ajuda para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

7.3.2. Ciclos e órbitas

No exemplo 7.3 (figura 7.6) as curvas de evolução nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio estável, em $s = 0.81$ e $s = 5.89$, são curvas fechadas à volta do ponto de equilíbrio. Cada uma dessas curvas fechadas, designadas de **ciclos**, implicam movimento oscilatório à volta do ponto de equilíbrio.

> *Um ciclo é uma curva fechada no espaço de fase que corresponde a oscilações periódicas das variáveis de estado.*

Ainda no retrato de fase 7.6, no ponto de equilíbrio instável em $s = 3.95$ há duas curvas de evolução que se aproximam assimptoticamente desse ponto; uma do lado esquerdo e outra do lado direito. Nenhuma dessas duas curvas é realmente uma curva fechada, porque o próprio ponto de equilíbrio não faz parte de nenhuma dessas duas curvas. Cada uma dessas duas curvas designa-se de **órbita homoclínica** e corresponde a um **solitão**, ou oscilação não periódica, em que cada variável de estado aumenta (ou diminui) afastando-se do valor de equilíbrio, mas volta a diminuir (ou aumentar) aproximando-se novamente do valor de equilíbrio no limite $t \to \infty$.

> *Uma órbita homoclínica é uma curva no espaço de fase que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto e corresponde a um solitão —oscilação não periódica— das variáveis de estado.*

No retrato de fase 7.6 existe também uma terceira órbita homoclínica, que parte do ponto de equilíbrio instável em $s = -2.65$, contornando os dois pontos de equilíbrio estável em $s = 0.81$ e $s = 5.89$ e regressando ao ponto em $s = -2.65$. Nesse exemplo, as órbitas homoclínicas demarcam a fronteira das zonas de estabilidade: no lado direito da figura 7.6, as duas zonas mais escuras correspondem a oscilações do sistema à volta de algum dos dois pontos de equilíbrio estável. Na zona colorida com uma cor mais clara, o sistema oscila à volta dos dois pontos de equilíbrio estável.

Observe-se que os ciclos aparecem sempre à volta dos pontos de equilíbrio estável e as órbitas homoclínicas começam e terminam sempre em pontos de equilíbrio instável. Um ponto de equilíbrio onde exista uma órbita homoclínica é, necessariamente, ponto de equilíbrio instável, porque numa direção o estado do sistema afasta-se do ponto, mas em outra direção o estado aproxima-se do ponto.

Observe-se que nos ciclos o sistema passa repetidamente pelos mesmos pontos no espaço de fase, enquanto que nas órbitas homoclínicas o sistema nunca chega a passar duas vezes por um mesmo ponto do espaço de fase.

Os gráficos da posição s e velocidade v em função do tempo (ver figura 7.8) podem ser desenhados usando a opção `versus_t` do programa `plotdf`, ou com o botão do menu.

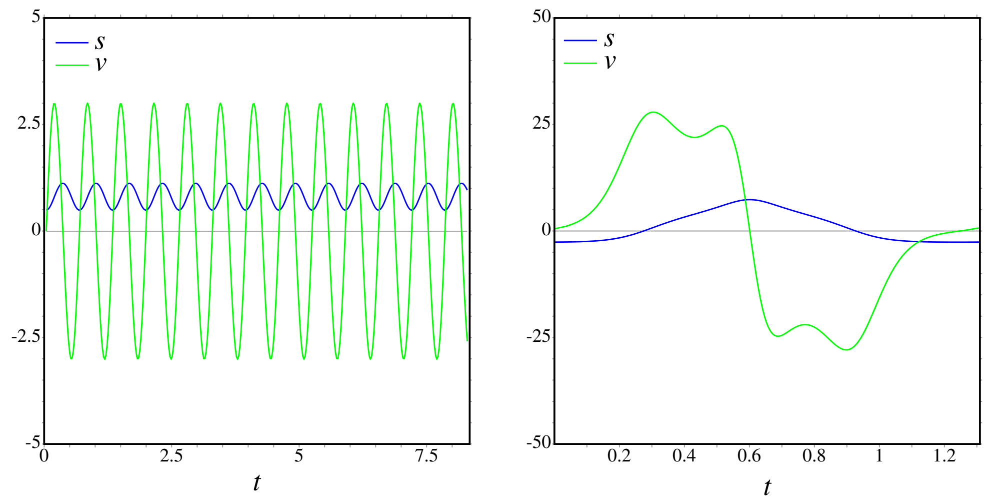


Figura 7.8.: Posição e velocidade em função do tempo no caso de um ciclo (esquerda) e de uma órbita homoclínica (direita).

O gráfico da evolução das variáveis no caso do ciclo, apresentado no lado esquerdo da figura 7.8, mostra a oscilação periódica das duas variáveis de estado em função do tempo. A combinação dessas duas variáveis no espaço de fase produz a elipse à volta do ponto $(0.81, 0)$ no retrato de fase 7.6. O lado direito da figura 7.8 mostra a oscilação não periódica das variáveis de estado, em função do tempo, no caso da órbita homoclínica no ponto de equilíbrio (-2.65, 0) na retrato de fase 7.6. Nesse ponto de equilíbrio existe unicamente uma órbita homoclínica porque as outras duas curvas que começam ou terminam no ponto são curvas abertas e afastam-se até o infinito.

Existem também **órbitas heteroclínicas** em alguns sistemas dinâmicos. O retrato de fase 7.9 mostra um exemplo. No triângulo que aparece no meio do retrato, os três vértices são pontos de equilíbrio instável; os três lados do triângulo são três curvas de evolução diferentes, que não têm nenhum ponto comum, porque os três vértices não fazem parte de nenhum desses segmentos de reta. Cada segmento parte de um ponto de equilíbrio e termina no ponto seguinte, completando uma sequência fechada de pontos e curvas, com igual número de pontos e de curvas que os ligam.

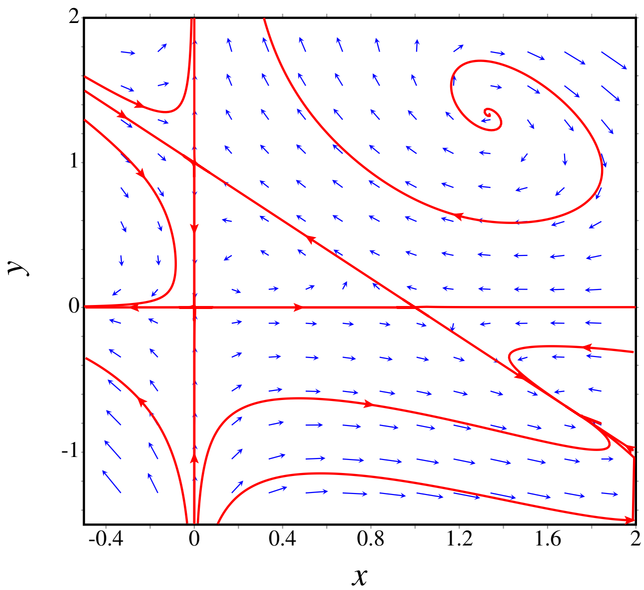


Figura 7.9.: Retrato de fase com uma órbita heteroclínica.

Uma órbita heteroclínica é formada por uma sequência de n curvas de evolução e n pontos de equilíbrio. A primeira curva começa no primeiro ponto e termina no segundo ponto, a segunda curva começa no segundo ponto e termina no terceiro e assim sucessivamente até a última curva que termina no ponto inicial..

7.4. Sistemas conservativos

Em alguns sistemas dinâmicos é possível encontrar uma função $H(x_1,x_2)$ das variáveis de estado que define todas as curvas de evolução no espaço de fase. Cada possível curva de evolução é dada pela equação

$$H(x_1,x_2) = C \tag{7.9}$$

com diferentes valores da constante C. A função H chama-se função **hamiltoniana** e os sistemas em que é possível encontrar tal função denominam-se **conservativos** ou sistemas hamiltonianos.

Como as variáveis de estado são funções do tempo t, uma função $f(x_1,x_2)$ é geralmente uma função que depende apenas do tempo. No entanto, no caso de $H(x_1,x_2)$ a equação (7.9) mostra que $\dot{H}=0$. Para calcular a derivada $\dot{H}$ usa-se a regra de derivação para funções compostas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x_1,x_2)=\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7.10}$$

Usando as equações de evolução (7.2), obtém-se

$$f_1\frac{\partial H}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial H}{\partial x_2}=0 \tag{7.11}$$

Uma forma de garantir que o resultado seja nulo, para quaisquer valores das variáveis de estado é se a função hamiltoniana cumpre as seguintes condições:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=-f_2 \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2}=f_1 \tag{7.12}$$

e nesse caso, repare-se que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 H}{\partial x_2\partial x_1}=0 \tag{7.13}$$

Conclui-se então que qualquer sistema dinâmico $\dot{x}_1=f_1$, $\dot{x}_2=f_2$ é conservativo se a **divergência** é nula:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0 \tag{7.14}$$

Quando o sistema dinâmico é equivalente a uma equação de segunda ordem $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$, as equações de evolução (7.6) e (7.7) a condição para ser conservativo reduz-se a:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{7.15}$$

ou seja, basta com que a função f não dependa de y para que o sistema seja conservativo.

No caso dos sistemas mecânicos, obtidos a partir da lei de Newton $\ddot{s}=F_\mathrm{t}/m$ basta com que a força tangencial não dependa da velocidade v, para que o sistema seja conservativo. Nesse caso, a função hamiltoniana tem de cumprir as duas condições:

$$\frac{\partial H}{\partial s}=-\frac{F_\mathrm{t}}{m} \qquad \frac{\partial H}{\partial v}=v \tag{7.16}$$

que conduz à função:

$$H=\frac{v^2}{2}-\frac{1}{m}\int\limits_{s_0}^{s}F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s \tag{7.17}$$

que é a energia mecânica —cinética mais potencial— por unidade de massa:

$$H(s,v) = \frac{E_c(v) + U(s)}{m} \tag{7.18}$$

Os dois sistemas considerados nos exemplos 7.1 e 7.3 são ambos conservativos. No exemplo 7.3, a energia potencial ao longo da trajetória é

$$U(s) = -\int_{s_0}^{s} F_t \, ds = -\int_{0}^{s} \left(-\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) ds = \frac{s^5}{10} - s^4 + \frac{s^3}{2} + 16s^2 - 25s$$

E a função hamiltoniana do sistema é

$$H(s,v) = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{3}\left(s^5 - 10s^4 + 5s^3 + 160s^2 - 250s\right) \tag{7.19}$$

As curvas de evolução do sistema são todas as curvas de nível da função hamiltoniana $H(s,v)$ no plano sv. O comando `ploteq` do Maxima pode ser usado para traçar as curvas de nível e a sua sintaxe é semelhante à de `plotdf`, só que o primeiro argumento deve ser a função H, em vez das componentes da velocidade de fase:

```
(%i9) ploteq (v^2/2+(s^5-10*s^4+5*s^3+160*s^2-250*s)/3, [s,v],
          [s,-5,8],[v,-50,50])$
```

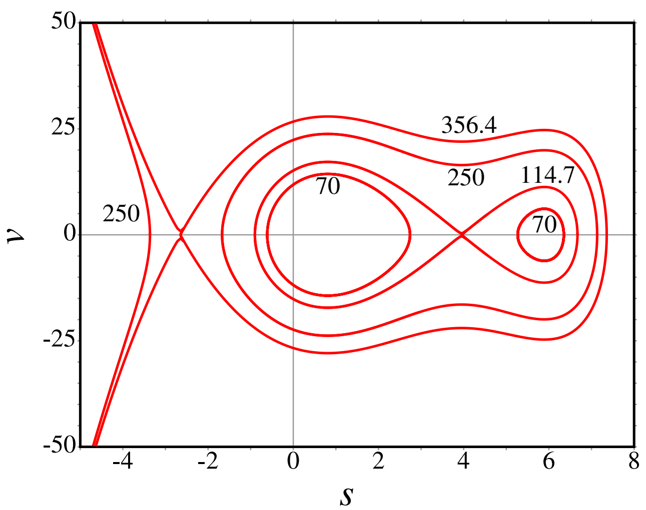


Figura 7.10.: Curvas de nível da função hamiltoniana do exemplo 7.3.

Tal como no caso de `plotdf`, é necessário clicar em algum ponto para que apareça a curva de nível que passa por esse ponto. O gráfico obtido mostra-se na figura 7.10, que é semelhante ao gráfico já obtido com `plotdf` na figura 7.10. A maior diferença é que agora não há setas a indicar o sentido da evolução temporal do sistema, mas como a componente horizontal da velocidade de fase é a própria velocidade, todas as curvas acima do eixo s deslocam-se de esquerda para direita (v positiva) e todas as curvas debaixo do eixo s deslocam-se de direita para esquerda (v negativa).

É muito importante compreender que a figura 7.10 mostra 9 curvas de evolução diferentes: 2 ciclos, com $H = 70$, cada uma à volta de um dos dois pontos de equilíbrio estável. Um ciclo com $H = 250$, que contorna os dois pontos de equilíbrio estável e o ponto de equilíbrio instável entre eles. Duas órbitas homoclínicas, ambas com $H \approx 114.7$, que começam e terminam no ponto de equilíbrio instável e cada uma contorna um dos pontos de equilíbrio estável; 114.7 é o valor, aproximado a uma casa decimal, de H no ponto de equilíbrio instável. No segundo ponto de equilíbrio instável, o valor aproximado de H é 356.4 e há três curvas de evolução com esse valor de H: uma órbita homoclínica que contorna os outros 3 pontos de equilíbrio, uma curva que começa no ponto de equilíbrio instável e outra que termina nesse ponto. No lado esquerdo dessas duas últimas curvas há ramos de hipérboles que se aproximam assimptoticamente dessas duas curvas, com valores de H menores que 356.4; na figura mostra-se uma delas, com $H = 250$.

Como foi referido no capítulo 6 (trabalho e energia), nos sistemas com forças conservativas os possíveis movimentos do sistema podem ser analisados no gráfico da energia potencial. No caso do exemplo 7.3, a figura 7.11 mostra o gráfico da energia potencial por unidade de massa, $V = U/m$. Os dois pontos de equilíbrio estável estão assinalados com círculos sólidos e os dois pontos de equilíbrio instável com circunferências.

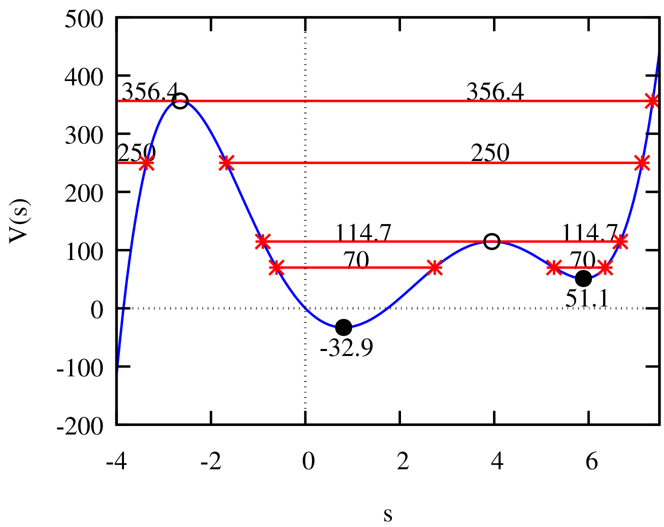


Figura 7.11.: Energia potencial por unidade de massa no exemplo 7.3 e alguns possíveis movimentos para alguns valores de H.

Uma propriedade importante é:

> *Num sistema mecânico conservativo, os pontos de equilíbrio estável são todos os mínimos locais da energia potencial e os pontos de equilíbrio instável são todos os máximos locais da energia potencial.*

No gráfico 7.11 estão também representadas as mesmas 9 curvas de evolução que foram traçadas no retrato de fase 7.10. Cada curva de evolução corresponde a um segmento de reta horizontal, com um valor de H constante, que só inclui os pontos onde H é maior que V. Lembre-se que, neste caso, $H = v^2/2 + V$; ou seja, em cada ponto num dos segmentos horizontais, v^2 é igual ao dobro da distância vertical do ponto até a curva $V(s)$; há dois valores da velocidade, com o mesmo valor absoluto $\sqrt{2(H-V)}$ e com sinais opostos, que correspondem à passagem da curva de evolução acima e debaixo do eixo s no espaço de fase (figura 7.10). Nos pontos assinalados com asteriscos, a velocidade é nula, tal como nos pontos de equilíbrio, mas a aceleração tangencial (declive de V com sinal trocado) não; como tal, nesses pontos o sistema inverte o sentido do seu movimento.

As curvas com $H > 356.4$ são movimentos em que o sistema pode partir de $s < -2.65$ (menor que a posição do ponto de equilíbrio instável), com $v > 0$, passando por todos os 4 pontos de equilíbrio e parando logo numa posição $s > 5.89$, onde inverte o sentido, repetindo o mesmo movimento mas com valores negativos de v.

Os dois gráficos 7.11 e 7.10 mostram a mesma informação de duas formas diferentes. A partir de um desses dois gráficos consegue-se visualizar como será o outro. De facto, para construir a figura 7.10, calculou-se com precisão o valor de s para um dos pontos assinalados com asteriscos nos segmentos de reta do gráfico 7.11 e introduziu-se esse valor, seguido de 0 (velocidade), no campo "Trajectory at" do menu de configuração do programa `ploteq`.

Pode imaginar-se a curva de energia potencial por unidade de massa como uma calha vertical; colocando uma esfera onde a altura é um máximo local, pode permanecer em repouso, mas um pequeno impulso faz com que comece a descer, afastando-se desse ponto máximo (equilíbrio instável). Se a esfera for libertada do repouso perto de um ponto onde a altura é um mínimo local (equilíbrio estável), desce acelerando até chegar ao mínimo, subindo no lado oposto até parar; se a esfera não perde nenhuma energia mecânica no seu percurso, a altura do ponto onde pára é igual à altura do ponto onde foi libertada. Assim sendo, a esfera volta a descer e regressa ao ponto inicial repetindo o ciclo indefinidamente.

Perguntas

1. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_t = (2-s)(3-s)$. Em $t = 0$ a partícula encontra-se em repouso no ponto $s = 2.5$. Em que ponto se encontrará após um tempo muito elevado?

A. Muito afastada, em $s \to \infty$

B. Oscilando à volta de $s = 2$

C. Em $s = 2$

D. Em $s = 3$

E. Oscilando à volta de $s = 3$

2. Um sistema é autónomo se:

A. Não tem nenhum ponto de equilíbrio instável.

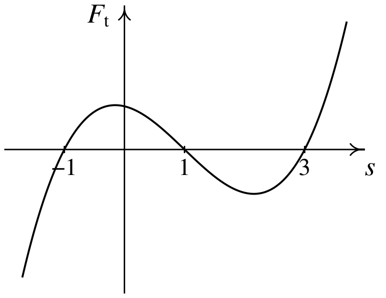
B. Não depende de outros sistemas.

C. Evolui de forma espontânea, sem precisar de agentes externos.

D. O seu estado não depende do tempo.

E. A evolução do sistema a partir de um estado inicial é igual em diferentes instantes.

3. A figura mostra o gráfico da componente tangencial da força resultante $F_t(s)$, que atua sobre um corpo. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da corpo?



A. $s = -1$ é estável e $s = 1$ instável.

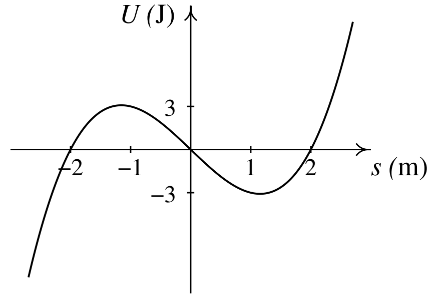
B. $s = 1$ é estável e $s = 3$ instável.

C. $s = -1$ é estável e $s = 3$ instável.

D. $s = -1$ e $s = 3$ são ambos estáveis.

E. $s = -1$ e $s = 1$ são ambos instáveis.

4. A figura mostra o gráfico da energia potencial $U(s)$ ao longo da trajetória, de um sistema mecânico conservativo. No instante inicial a energia mecânica do é 5 J, a posição $s = 1$ m e a velocidade é no sentido positivo de s. Como será o movimento do sistema?



A. Oscila à volta da posição $s = 1$

B. Oscila à volta da posição $s = 2$

C. Desloca-se até $s = 2$ e regressa e ficando em repouso em $s = -1$

D. Permanece em repouso em $s = 1$

E. Desloca-se até $s > 2$ e logo afasta-se em sentido negativo até $-\infty$.

5. Qual é a velocidade de fase do sistema conservativo com energia potencial ao longo da trajetória $U(s) = 3\,\mathrm{e}^s$ e massa $m = 3$?

A. $v\,\vec{e}_s - \mathrm{e}^s\,\vec{e}_v$

B. $v\,\vec{e}_s - \mathrm{e}^{-s}\,\vec{e}_v$

C. $v\,\vec{e}_s - s\,\vec{e}_v$

D. $v\,\vec{e}_s + \mathrm{e}^s\,\vec{e}_v$

E. $v\,\vec{e}_s + \mathrm{e}^{-s}\,\vec{e}_v$

Problemas

1. Uma bola com 0.150 kg é lançada verticalmente para cima, desde $y = 0$ (o eixo dos y aponta para cima, na vertical). Desprezando o atrito com o ar, a energia permanece constante. (*a*) Represente o retrato de fase, para $y > 0$, mostrando 4 curvas de evolução diferentes (use o valor 9.8 m/s^2 para g). Para cada curva, explique o significado dos pontos em que a curva interseta os eixos. (*b*) Explique como seria, no retrato de fase da alínea anterior, a curva de evolução de uma bola largada em queda livre, que bate no chão sendo projetada novamente para cima.

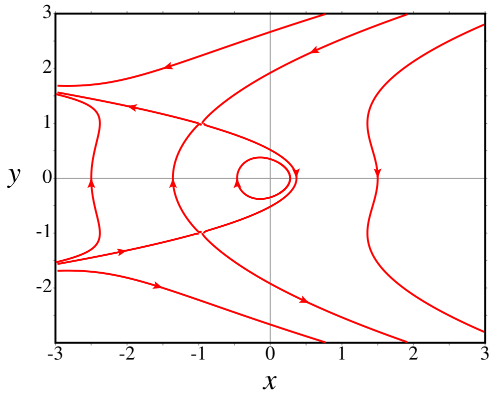
2. Em todos os problemas do capítulo 1, diga quais correspondem a sistemas autónomos ou não autónomos e conservativos ou não conservativos. Represente o retrato de fase do sistema do problema 5, mostrando a curva de evolução com as condições iniciais dadas.

3. Considere os 3 casos no problema 7 do capítulo 1: $a_t = -4s(1+ks^2)$ (unidades SI) (a) $k=0$, (b) $k=0.015$, (c) $k=-0.015$. Em cada caso encontre os pontos de equilíbrio, diga que tipo de ponto de equilíbrio é cada um, trace o retrato de fase e diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas.

4. A figura mostra o retrato de fase do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = y - y^3 \qquad\qquad \dot{y} = -x - y^2$$

(a) Indique se o sistema tem algum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica. (d) Explique porque a seguinte afirmação é errada: "*O retrato de fase inclui duas curvas de evolução parabólicas que se cruzam em dois pontos*".



5. A força tangencial resultante sobre um corpo com massa igual a 1 kg é $F_t = s + s^2$. (a) Encontre os pontos de equilíbrio e diga se são estáveis ou instáveis. (b) Calcule a energia potencial ao longo da trajetória, em função de s, arbitrando $U=0$ em $s=0$ e calcule a energia potencial em cada ponto de equilíbrio. (c) Represente o retrato de fase do sistema, mostrando as 4 curvas de evolução correspondentes à energias seguintes: 0, uma energia menor que as energias nos pontos de equilíbrio, uma energia compreendida entre as energias dos dois pontos de equilíbrio e uma energia maior que a energia dos pontos de equilíbrio. (d) Calcule a posição s onde o corpo pode estar em repouso, sem estar em equilíbrio, com energia total igual a zero; explique como seria o movimento do corpo nesse caso.

6. Uma partícula com massa m desloca-se sob a ação de uma força resultante com componente tangencial:

$$F_t = -ks + \frac{a}{s^3}$$

onde k e a são duas constantes positivas. (a) Encontre os pontos de equilíbrio e mostre que todos são estáveis. (b) Explique os possíveis o movimentos da partícula. (c) Trace o retrato de fase num sistema de unidades em que m, k e a são todas iguais a 1.

7. A equação de movimento de um pêndulo simples é (problema 6 do capítulo 6)

$$-\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta$$

As variáveis de estado são o ângulo com a vertical, θ e a derivada desse ângulo, ω. (a) Escreva as equações de evolução do sistema. (b) Determine a função hamiltoniana $H(\theta,\omega)$ a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \qquad \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

(c) Analisando o gráfico da energia potencial (função hamiltoniana com $\omega = 0$), demostre que o sistema tem muitas órbitas heteroclínicas e ciclos mas nenhuma órbita homoclínica.

8. Uma partícula com massa m desloca-se no eixo dos x com energia potencial:

$$U(x) = U_0 x^2 \mathrm{e}^{-a x^2}$$

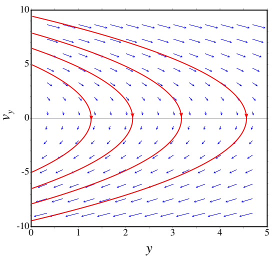
onde U_0 e a são duas constantes positivas. (a) Calcule a força que atua na partícula. (b) Encontre os pontos de equilíbrio e diga se são estáveis ou instáveis. (c) Represente o gráfico da energia potencial para $U_0 = 1$ e $a = 1$. (d) Represente o retrato de fase, no caso $m = 1$, mostrando a órbita heteroclínica e um dos ciclos.

Respostas

Perguntas: 1. B. **2.** E. **3.** B. **4.** E. **5.** A.

Problemas

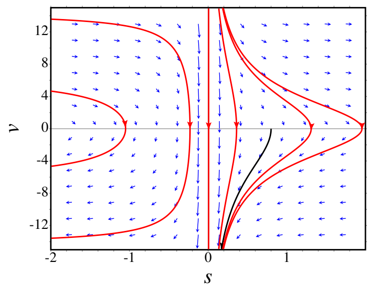
1. (a)



Os dois pontos simétricos onde cada parábola interseta o eixo da velocidade (ordenadas), representam o estado quando a partícula é lançada e quando cai novamente ao chão; o vértice de cada parábola no eixo das abcissas, é o estado no ponto onde a bola atinge a altura máxima.

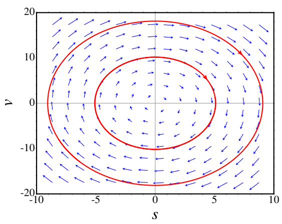
(b) A bola segue uma das curvas parabólicas no espaço de fase, e quando chega ao ponto no lado negativo do eixo da velocidade (ordenadas no espaço de fase), passa instantaneamente para o ponto que está à mesma distância da origem no lado positivo do eixo da velocidade.

2. Sistemas autónomos e conservativos nos problemas 2, 4, 5, 6, 7 e 10. Sistemas autónomos mas não conservativos nos problemas 8 e 9. Sistemas não autónomos e, portanto, não conservativos, nos problemas 1, 3 e 11.

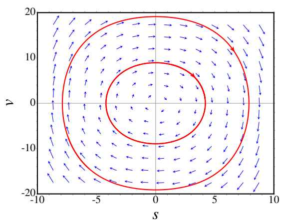


3. Para $k = 0$ e $k = 0.015$ existe unicamente um ponto de equilíbrio estável, em $s = 0$, $v = 0$, todas as curvas de evolução são ciclos e não existem órbita. Para $k = -0.015$ existem dois pontos de equilíbrio instável $s = -8.16$ e $s = +8.16$ ($v = 0$) e um ponto de equilíbrio estável $s = 0$, $v = 0$; existe uma órbita heteroclínica e todas as curvas de evolução no seu interior são ciclos; não existe nenhuma órbita homoclínica.

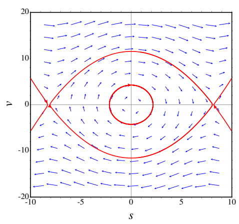
(a)



(b)



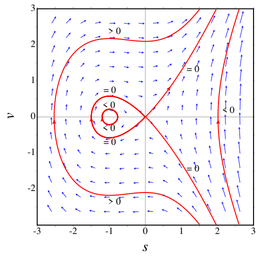
(c)



4. (a) Há uma órbita heteroclínica entre os pontos de equilíbrio instável $(-1,\ 1)$ e $(-1,\ -1)$ e nenhuma órbita homoclínica. Todas as curvas de evolução na região delimitada pela órbita heteroclínica são ciclos. (b) As duas parábolas são realmente 6 curvas de evolução diferentes, que se aproximam assimptoticamente ou se afastam dos dois pontos de equilíbrio instável sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se.

5. (a) Em $s=-1$, equilíbrio estável e em $s=0$, equilíbrio instável. (b) $U=-s^2/2-s^3/3$. No ponto de equilíbrio estável $E=-1/6$ J e no ponto de equilíbrio instável $E=0$.

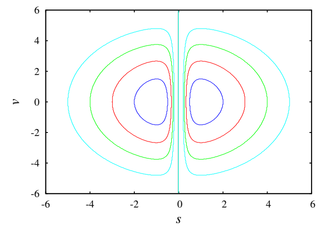
(c)



(d) $s=-3/2$; o corpo acelera no sentido positivo de s, começa a abrandar a sua velocidade em $s=-1$ e acaba por parar em $s=0$, ficando em repouso.

6. (a) Há dois pontos de equilíbrio: $\pm\sqrt[4]{a/k}$. Nos dois pontos o potencial é um mínimo local e, portanto, o equilíbrio é estável. (b) O movimento é sempre oscilatório, em s positiva ou negativa, de acordo com o estado inicial.

(c)



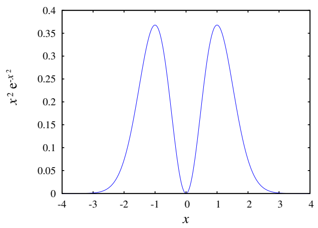
7. (a) $\dot{\theta}=\omega \qquad \dot{\omega}=-(g/l)\sin\theta$

(b) H é E_{m} dividida pelo momento de inércia $m\,l^2$: $\qquad H(\theta,\omega)=\dfrac{\omega^2}{2}-\dfrac{g}{l}\,cos\theta$

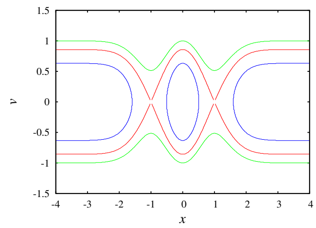
(c) Há pontos de equilíbrio estável em 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$,... e pontos de equilíbrio instável em $\pm\pi$, $\pm 3\pi$,... Qualquer valor de H entre $-g/l$ e g/l corresponde a um ciclo; em $H=g/l$ existe uma órbita heteroclínica entre $-\pi$ e π, outra órbita heteroclínica entre 3π e 5π,... Não existem órbitas homoclínicas porque qualquer segmento de reta com $H=g/l$ começa e termina em pontos de equilíbrio instáveis e não interseta a curva U.

8. (a) $2U_0\,x\left(a x^2-1\right)e^{-a x^2}$ (b)) equilíbrio estável em $x=0$ e equilíbrio instável em $\pm 1/\sqrt{a}$

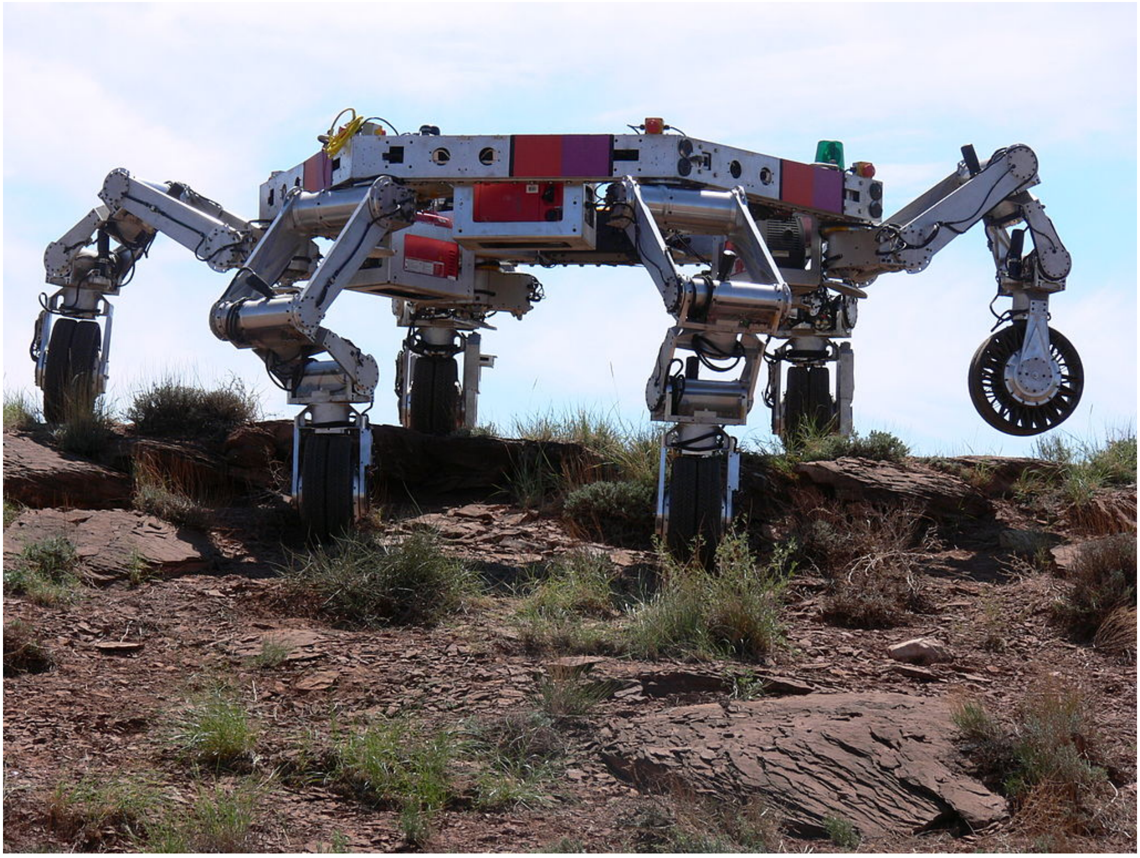
(c)



(d)



8. Mecânica lagrangiana



Cada braço num robot costuma ter 3 articulações. Em cada articulação há dois eixos perpendiculares, que permitem duas rotações independentes, correspondentes a dois graus de liberdade; assim sendo, cada braço tem 6 graus de liberdade, o suficiente para poder alcançar qualquer ponto dentro do seu alcance máximo, em qualquer direção desejada. O robot ATHLETE (*All-Terrain Hex-Legged Extra-Terrestrial Explorer*) na figura, usado pela NASA para exploração lunar, tem seis braços de 3 articulações e, incluindo os 3 graus de liberdade da posição de um ponto no corpo do robot, são ao tudo 39 graus de liberdade. O braço humano, sem incluir a mão, tem 7 graus de liberdade: o ombro permite 3 rotações diferentes, o cotovelo permite duas rotações diferentes e o pulso mais duas rotações.

8.1. Graus de liberdade e espaço de fase

Os sistemas mecânicos considerados no capítulo anterior têm todos um único grau de liberdade (uma coordenada ou ângulo para determinar a posição) e duas variáveis de estado: a variável associada a esse grau de liberdade e a sua derivada em ordem ao tempo (velocidade ou velocidade angular).

Num sistema com n graus de liberdade, existem n variáveis independentes dependentes do tempo, chamadas **coordenadas generalizadas**, que serão identificadas pelas letras: q_1, q_2, ..., q_n. Essas variáveis poderão ser comprimentos, ângulos ou qualquer outra grandeza. A derivada em ordem ao tempo de cada uma dessas variáveis são as **velocidades generalizadas**: $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$.

O espaço de fase tem $2n$ dimensões e cada ponto nesse espaço tem coordenadas ($q_1, \ldots, q_n$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$). A velocidade de fase, em cada ponto do espaço de fase, tem $2n$ componentes, ($\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$). Para se poder calcular a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase é necessário conhecer n expressões para as acelerações generalizadas $\ddot{q}_1$, ..., $\dot{q}_n$ em função das coordenadas e velocidades generalizadas, expressões essas que são denominadas **equações de movimento**.

As equações de movimento poderiam ser obtidas aplicando a segunda lei de Newton. No entanto, seria necessário relacionar cada aceleração generalizada $\ddot{q}$ com a aceleração do centro de massa de alguma parte do sistema e identificar todas as forças externas que atuam sobre essa parte do sistema. Algumas de essas forças são forças de ligação, por exemplo, a tensão num fio ou a reação normal numa superfície. No capítulo anterior viu-se que as equações de evolução podem ser obtidas também derivando a função hamiltoniana. O problema é que, em casos mais complicados dos que foram considerados no capítulo anterior, essa função não é a energia mecânica dividida pela massa ou pelo momento de inércia, mas pode ter formas mais complicadas. Nas secções seguintes introduz-se um método mais geral para obter as equações de movimento sem necessidade de identificar forças de ligação.

8.2. Equações de Lagrange

A energia cinética total E_c de um sistema mecânico é igual à soma de todas as energias cinéticas de translação e de rotação de todas as partes do sistema. Em geral, é uma função que pode depender de todas as coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo:

$$E_c(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t) \tag{8.1}$$

Num sistema em que o movimento está sujeito a algumas restrições existem forças de ligação resultantes dessas restrições. Por exemplo, num automóvel que se desloca sobre uma estrada, a reação normal da estrada sobre os pneus é a força de ligação que garante que a trajetória do automóvel siga a superfície da estrada. O atrito estático nas rodas com tração é também uma força de ligação, que garante que as rodas rodem sem deslizar sobre a superfície. A restrição de que o automóvel se desloque sobre a superfície da estrada permite reduzir as três coordenadas de posição a um único grau de liberdade: o deslocamento ao longo da estrada. A restrição de as rodas rodarem sem derrapar permite relacionar a velocidade angular das rodas com a velocidade do automóvel na estrada. Essa relação implica também uma relação entre o ângulo de rotação das rodas e o deslocamento do automóvel na estrada, o que faz com que apenas umas dessas duas variáveis seja suficiente para descrever o movimento do automóvel e a rotação das rodas.

Sempre que uma restrição no movimento de um sistema pode ser escrita em função das coordenadas generalizadas do sistema, permitindo assim reduzir o números de graus de liberdade, diz-se que é uma restrição **holonómica**. Nos sistemas holonómicos, sujeitos unicamente a restrições holonómicas, a segunda lei de Newton conduz às seguintes equações (a demonstração é feita no apêndice B):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1,\ldots n \tag{8.2}$$

onde Q_j é a componente j da **força generalizada**, definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{8.3}$$

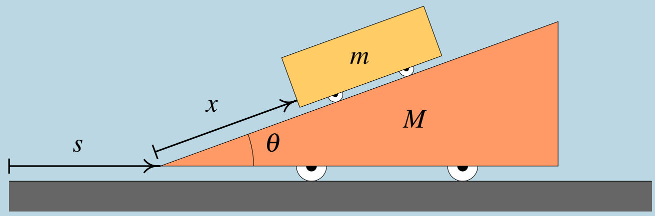
e a soma é feita sobre todas as forças $\vec{F}_i$ (internas ou externas) e $\vec{r}_i$ é a posição do ponto onde atua a força $\vec{F}_i$. No entanto, no é necessário considerar algumas das forças no cálculo de Q_j; por exemplo, as forças de ração normal de atrito estático podem ser ignoradas, porque atuam numa posição fixa $\vec{r}_i$ e, portanto, $\vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = 0$. A força de tensão num fio com comprimento constante também pode ser ignorada, porque atua em sentidos opostos nos dois extremos do fio e a soma de $\vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i$ nos dois extremos dá zero.

Entre as forças que devem ser incluídas em Q_j, algumas podem ser conservativas e, nesses casos, $\vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = -\mathrm{d}U$, onde U é a energia potencial associada a essa força. Assim sendo, a contribuição dessa força conservativa para Q_j é igual a $-\partial U/\partial q_j$ e as equações (8.2) podem ser escritas

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1,\ldots n \tag{8.4}$$

em que U é a energia potencial total do sistema e as componentes Q_j da força generalizada incluem unicamente as forças não conservativas. As equações (8.4) são as **equações de Lagrange**, válidas para os sistemas holonómicos. No caso particular de sistemas conservativos, o lado direito das equações é nulo.

Exemplo 8.1
O carrinho na figura, com massa m, encontra-se sobre o plano inclinado de massa M. O plano inclinado tem rodas que lhe permitem deslocar-se livremente sobre a mesa horizontal. Admitindo que a massa das rodas é muito menor que m e M e que o atrito no eixo das rodas é desprezável, encontre as equações de movimento do sistema.



Resolução. Para determinar as posições do carrinho e do plano inclinado num instante, basta saber o deslocamento horizontal s de um ponto do plano, em relação à mesa e o deslocamento x de um ponto do carrinho em relação ao plano inclinado. A figura acima mostra a forma como essas duas variáveis podem ser definidas. Assim sendo, o sistema tem dois graus de liberdade e as velocidades generalizadas são $\dot{s}$ e $\dot{x}$.

A velocidade generalizada $\dot{s}$ é também a velocidade do centro de massa do plano inclinado; $\dot{x}$ é a velocidade do carrinho em relação a plano inclinado. Escolhendo um eixo q perpendicular a s e apontando para cima, a forma vetorial da velocidade do plano inclinado e da velocidade do carrinho em relação ao plano são:

$$\vec{v}_\text{p} = \dot{s}\,\vec{e}_s \qquad \vec{v}_{\text{c/p}} = \dot{x}\left(\cos\theta\,\vec{e}_s + \sin\theta\,\vec{e}_q\right)$$

A velocidade do carrinho, em relação à mesa, é igual à soma desses dois vetores:

$$\vec{v}_\text{c} = (\dot{s} + \dot{x}\cos\theta)\,\vec{e}_s + \dot{x}\sin\theta\,\vec{e}_q$$

e o seu módulo ao quadrado é,

$$v_\text{c}^2 = (\dot{s} + \dot{x}\cos\theta)^2 + \dot{x}^2\sin^2\theta = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\,\dot{s}\,\dot{x}\cos\theta$$

Como a energia cinética de rotação das rodas é desprezável, a energia cinética total do sistema é:

$$E_\text{c} = \frac{M}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\,\dot{s}\,\dot{x}\cos\theta\right)$$

A energia potencial gravítica do plano inclinado pode ser ignorada porque permanece constante; como tal, a energia potencial do sistema é igual à energia potencial gravítica do carrinho:

$$U = m\,g\,x\sin\theta$$

note-se que a altura do centro de massa do carrinho, em relação à mesa, é um pouco maior que $x\sin\theta$, mas a diferença é uma constante que só acrescenta um valor constante a U, podendo ser ignorado.

Não existem forças não conservativas (ou melhor, estão a ser ignoradas); assim sendo, o lado direito nas equações de Lagrange (8.4) é zero. Na primeira equação de Lagrange, relacionada com a coordenada x é necessário calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \dot{x}} = m\,(\dot{x} + \dot{s}\,\cos\theta) \qquad \frac{\partial E_\text{c}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = m\,g\,\sin\theta$$

e a equação de Lagrange é,

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = m\,(\ddot{x} + \ddot{s}\,\cos\theta + g\,sin\theta) = 0$$

Em relação à coordenada s, as derivadas parciais são

$$\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \dot{s}} = (M+m)\,\dot{x} + m\,\dot{x}\,\cos\theta \qquad \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

e a equação de Lagrange é

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = (M+m)\,\ddot{s} + m\,\ddot{x}\,\cos\theta = 0$$

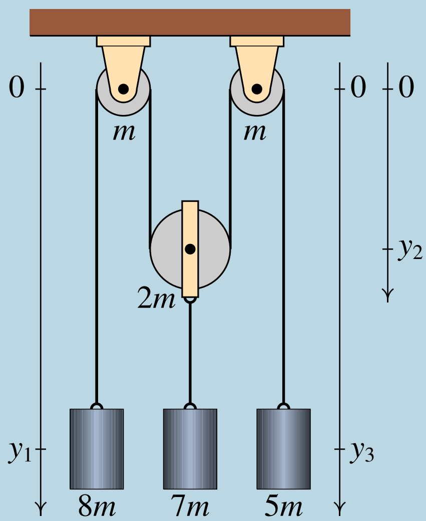
Resolvendo as duas equações de Lagrange para as acelerações $\ddot{x}$ e $\ddot{s}$, obtêm-se as duas equações de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{(M+m)\,g\,\sin\theta}{M + m\,\sin^2\theta} \qquad \ddot{s} = \frac{m\,g\,\sin\theta\,\cos\theta}{M + m\,\sin^2\theta}$$

As duas acelerações são constantes, $\ddot{x}$ negativa e $\ddot{s}$ positiva; ou seja, o carrinho desce o plano inclinado enquanto este começa a andar para a direita.

Exemplo 8.2

No sistema da figura, a roldana do meio pode subir e descer e as outras duas roldanas estão fixas ao teto. As massas das duas roldanas fixas é m, a massa da roldana móvel é $2\,m$ e as massas dos 3 cilindros são $8\,m$, $7\,m$ e $5\,m$ (no cilindro do meio, $7\,m$ já inclui também a massa do suporte que o liga à roldana móvel). As massas dos fios e o atrito nos eixos das roldanas são desprezáveis e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. Determine o valor das acelerações dos 3 cilindros.



Resolução. Para determinar a posição dos cilindros e da roldana móvel são necessárias 3 distâncias, que podem ser as três variáveis y_1, y_2 e y_3 indicadas na figura. As variáveis y_1 e

y_2 são as posições dos centros de massa dos dois cilindros nos extremos e y_2 é a posição do centro da roldana móvel; a posição do cilindro do meio é igual a y_2 mais uma constante.

A restrição de que o comprimento do fio seja constante conduz à seguinte equação:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = k$$

onde k é uma constante. Essa equação permite substituir uma das 3 variáveis em função das outras duas, reduzindo o número de graus de liberdade.

A restrição de rolamento das roldanas sem deslizamento do fio faz com que a velocidade angular de cada roldana seja $\omega = v_\mathrm{f}/r$, onde v_f é a velocidade do fio em relação ao centro da roldana e r é o raio da roldana. Admitindo que cada roldana seja um cilindro uniforme, o seu momento de inércia em relação ao eixo é $I = m_\mathrm{r}\, r^2/2$, onde m_r é a massa da roldana; assim sendo, a sua energia cinética de rotação é

$$\frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{m_\mathrm{r}}{4} v_\mathrm{f}^2$$

A energia cinética total do sistema é:

$$E_\mathrm{c} = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{m_3}{2} v_3^2 + \frac{m_\mathrm{r2}}{2} v_2^2 + \frac{m_\mathrm{r1}}{4} v_\mathrm{f1}^2 + \frac{m_\mathrm{r2}}{4} v_\mathrm{f2}^2 + \frac{m_\mathrm{r3}}{4} v_\mathrm{f3}^2$$

onde os índices 1, 2 e 3 referem-se aos 3 cilindros, os índices r1, r2 e r3 às 3 roldanas e os índices f1, f2 e f3 ao fio em relação aos centros das 3 roldanas. Observe-se que a roldana 2 tem tanto energia cinética de translação como energia cinética de rotação.

A energia potencial gravítica do sistema, excluindo termos constantes, é:

$$U = -m_1\, g\, y_1 - (m_2 + m_\mathrm{r2})\, g\, y_2 - m_3\, g\, y_3$$

A seguir, é necessário substituir os valores das massas e escrever essas energias em função das duas coordenadas generalizadas (y_1, y_2) e das duas velocidades generalizadas $v_1 = \dot{y}_1$ e $v_2 = \dot{y}_2$. Observe-se que $v_\mathrm{f1} = v_1$, $v_\mathrm{f2} = v_1 + v_2$ e $v_\mathrm{f3} = v_3$.

Usando o programa Maxima, a substituição pode ser feita assim:

```
(%i1) y3: k - y1 - 2*y2$
(%i2) v3: -v1 - 2*v2$
(%i3) [m1, m2, m3, mr1, mr2, mr3]: [8*m, 7*m, 5*m, m, 2*m, m]$
(%i4) [vf1, vf2, vf3]: [v1, v1+v2, v3]$
(%i5) Ec: ratsimp (m1*v1^2/2 + m2*v2^2/2 + m3*v3^2/2 + mr2*v2^2/2
          + mr1*vf1^2/4 + mr2*vf2^2/4 + mr3*vf3^2/4);
                             2                        2
                     32 m v2  + 24 m v1 v2 + 15 m v1
(%o5)                --------------------------------
                                    2
(%i6) U: ratsimp (-m1*g*y1 - (m2+mr2)*g*y2 - m3*g*y3);
(%o6)                   g m y2 - 3 g m y1 - 5 g k m
```

Ou seja (excluindo o termo $5\,g\,k\,m$ constante),

$$E_c = m\left(\frac{15}{2}v_1^2 + 16\,v_2^2 + 12\,v_1\,v_2\right) \qquad U = m\,g\,(y_2 - 3\,y_1)$$

As derivadas parciais em ordem a y_1 e v_1 são

$$\frac{\partial E_c}{\partial v_1} = m\,(15\,v_1 + 12\,v_2) \qquad \frac{\partial E_c}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y_1} = -3\,m\,g$$

e a respetiva equação de Lagrange é

$$15\,a_1 + 12\,a_2 - 3\,g = 0$$

em ordem a y_2 e v_2,

$$\frac{\partial E_c}{\partial v_2} = m\,(12\,v_1 + 32\,v_2) \qquad \frac{\partial E_c}{\partial y_2} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y_2} = m\,g$$

e a segunda equação de Lagrange é

$$12\,a_1 + 32\,a_2 + g = 0$$

note-se que os resultados não dependem do valor de m. As duas equações de Lagrange resolvem-se para encontrar as acelerações:

```
(%i7) solve ([15*a1 + 12*a2 - 3*g, 12*a1 + 32*a2 + g], [a1,a2]);
                             9 g          17 g
(%o7)                  [[a1 = ---, a2 = - ----]]
                             28           112
```

O cilindro do lado esquerdo tem aceleração igual a $9\,g/28$, para baixo (porque a_1 é positiva); o cilindro do meio e a roldana móvel têm aceleração $17\,g/112$, para cima. A aceleração do terceiro cilindro calcula-se a partir da restrição $a_3 = -a_1 - 2\,a2$, obtendo-se $-g/56$, que indica que o cilindro do lado direito acelera para cima.

Se inicialmente os 3 cilindros estão em repouso, o cilindro do lado esquerdo começa a descer e os outros dois cilindros sobem.

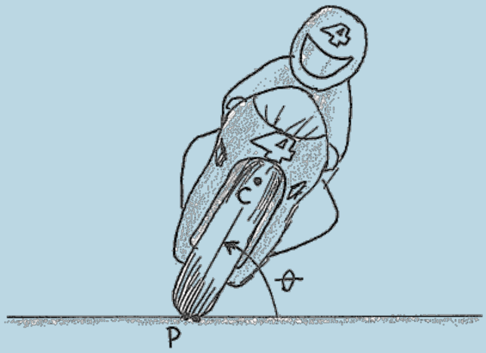
8.3. Condições de equilíbrio

Nos dois exemplos resolvidos na secção anterior, os valores obtido para as acelerações generalizadas foram constantes. Nos casos mais gerais, essas acelerações serão expressões que dependem das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo. A resolução desses sistemas de equações diferenciais é o objeto de estudo de todos os seguintes capítulos neste livro.

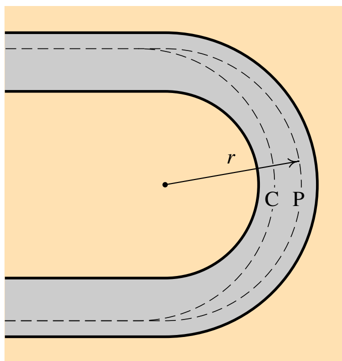
Sem ser necessário resolver as equações de movimento, é possível (e conveniente) começar por determinar os valores das coordenadas generalizadas para os quais o sistema estará em equilíbrio. A condição para que exista equilíbrio cinético é que as acelerações sejam nulas e se as velocidades também são nulas, o equilíbrio é estático.

Lembre-se que nos sistemas com apenas um grau de liberdade, a instabilidade dos pontos de equilíbrio determina-se a partir do sinal da derivada da aceleração, em ordem à coordenada generalizada. O ponto de equilíbrio é estável quando essa derivada é negativa ou instável quando for positiva.

Exemplo 8.3
Um motociclista que se desloca com velocidade v, numa curva de raio r, inclina o seu corpo e a moto um ângulo θ, em relação à horizontal, no sentido do centro de curvatura da curva. Determine o valor que deve ter θ, em função de v, r e h, que é a distância entre o ponto de contacto dos pneus com a estrada, P, e o centro de massa, C, do sistema.



Resolução. Devido à inclinação da moto, os pontos P e C não seguem a mesma trajetória, como se mostra na figura ao lado. O raio de curvatura da trajetória não deverá ser constante, para permitir a inclinação gradual da moto. Num instante em que a curvatura da trajetória do ponto P é r e a sua velocidade em relação a estrada é v, a curvatura da trajetória do ponto C é $r - h cos\theta$ e, portanto, o ponto C terá velocidade



$$v = \frac{r - h\cos\theta}{r}\, v$$

na direção paralela à velocidade do ponto P. Mas como o ângulo θ pode variar, o ponto C tem também outra componente de velocidade $h\,\dot{\theta}$, no plano perpendicular à velocidade de P. Assim sendo, a energia cinética de translação é

$$E_c = \frac{m}{2}\left(h^2\,\dot{\theta}^2 + \left(1 - \frac{h}{r}\cos\theta\right)^2 v^2\right)$$

Há também energias cinéticas de rotação, associadas à velocidade angular $\dot{\theta}$, à velocidade angular das rodas nos seus eixos e à rotação do sistema todo no plano horizontal, já que o motociclista entra na curva olhando numa direção e sai olhando para outra direção diferente. O cálculo dessas energias ultrapassa os objetivos deste livro introdutório; será considerado o caso em que essas energias podem ser desprezadas. A energia potencial gravítica do sistema é

$$U = m\,g\,h \sin\theta$$

As derivadas parciais das energias, em ordem a θ e $\dot{\theta}$ são

$$\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\dot{\theta}} = m\,h^2\,\dot{\theta} \qquad \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\theta} = \frac{m\,h\,v^2}{r}\sin\theta\left(1-\frac{h}{r}\cos\theta\right) \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta} = m\,g\,h\cos\theta$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{\theta} = \frac{v^2}{h\,r}\sin\theta\left(1-\frac{h}{r}\cos\theta\right) - \frac{g}{h}\cos\theta$$

A altura do centro de massa, h, costuma ser muito menor do que o raio da curva; assim sendo, a expressão entre parêntesis é aproximadamente 1 e uma boa aproximação é

$$\ddot{\theta} = \frac{v^2}{h\,r}\sin\theta - \frac{g}{h}\cos\theta$$

Para que exista equilíbrio, $\ddot{\theta} = 0$, o ângulo deverá ser:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{g\,r}{v^2}\right) \tag{8.5}$$

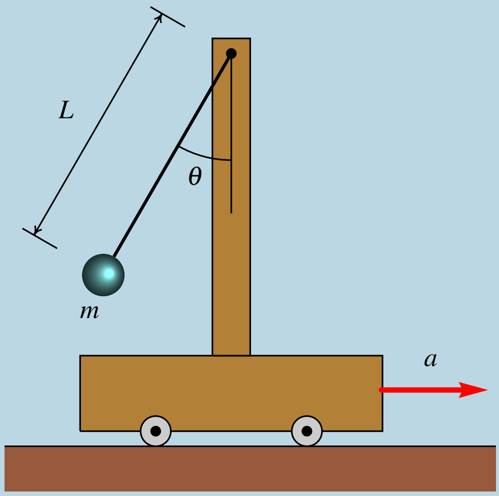
e a derivada da aceleração generalizada em ordem ao ângulo é:

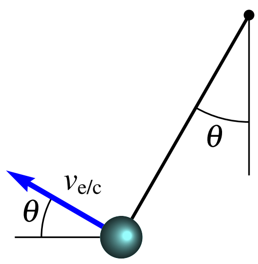
$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta} = \frac{v^2}{h\,r}\cos\theta + \frac{g}{h}\sin\theta$$

que é positiva, porque θ está entre 0 e $\pi/2$. Conclui-se que o equilíbrio é instável.

Exemplo 8.4

Um carrinho desloca-se sobre uma mesa horizontal, com aceleração constante de valor a. Sobre o carrinho há um poste com um pêndulo simples de massa m e comprimento L. Determine o valor do ângulo θ em que o pêndulo permanece em equilíbrio em relação ao carrinho. Admita que a massa do fio do pêndulo é desprezável e que o raio da esfera é muito menor que L.





Resolução. A velocidade do carrinho será sempre horizontal e com módulo at, onde t é o tempo a partir do instante em que a velocidade do carrinho era nula. A figura à direita mostra a velocidade $v_{e/c}$ da esfera, em relação ao carrinho, no caso em que $\dot{\theta}$ é positiva. O módulo de $v_{e/c}$ é igual a $L\dot{\theta}$ e usando um sistema de eixos com x na direção e sentido de $\vec{a}$ e y na vertical e para cima, as componentes vetoriais de $\vec{v}_{e/c}$ e da velocidade do carrinho são:

$$\vec{v}_{e/c} = L\dot{\theta}\,(-\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) \qquad \vec{v}_c = a\,t\,\vec{e}_x$$

A velocidade da esfera em relação à mesa é a soma desses dois vetores

$$\vec{v}_e = \left(a\,t - L\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{e}_x + L\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{e}_y$$

As energias cinética e potencial gravítica da esfera são:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(a^2t^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2\,a\,t\,L\dot{\theta}\,\cos\theta\right) \qquad U = -m\,g\,L cos\theta$$

A seguir calculam-se as derivadas parciais dessas energias

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\,\dot{\theta} - m\,a\,t\,L\cos\theta \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = m\,a\,t\,L\dot{\theta}\,\sin\theta \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = m\,g\,L\sin\theta$$

e aplica-se a equação de Lagrange

$$mL^2\,\ddot{\theta} - m\,a\,L\cos\theta + m\,a\,t\,L\dot{\theta}\,\sin\theta - m\,a\,t\,L\dot{\theta}\,\sin\theta + m\,g\,L\sin\theta = 0$$

Obtém-se assim a equação de movimento

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{L}\cos\theta - \frac{g}{L}\sin\theta \tag{8.6}$$

Para que exista equilíbrio, o ângulo deverá ser:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) \tag{8.7}$$

e a derivada da aceleração generalizada em ordem ao ângulo é

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta} = -\frac{a}{L}\sin\theta - \frac{g}{L}\cos\theta$$

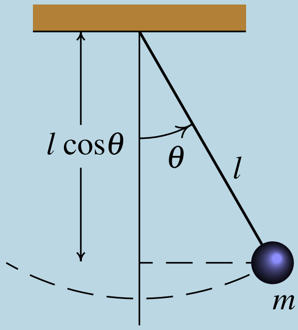
que é negativa, porque no ponto de equilíbrio θ está entre 0 e $\pi/2$. Conclui-se que o equilíbrio é estável; o pêndulo pode oscilar em torno do ângulo θ de equilíbrio.

Observe-se que a equação de movimento depende da aceleração do carrinho mas não da sua velocidade. Se o carrinho fosse uma carruagem sem janelas, o movimento do pêndulo permitia medir o valor da aceleração do carrinho, mas não a sua velocidade.

8.4. Forças dissipativas

Em todos os exemplos das secções anteriores não existiam forças não conservativas e, assim sendo, a força generalizada era nula. Os exemplos seguintes mostram casos em que existem forças não conservativas.

Exemplo 8.5
Um pêndulo simples é formado por um objeto pequeno de massa m, pendurado de um fio de comprimento l. A massa do fio é desprezável comparada com m. Determine a equação de movimento, incluindo a resistência do ar.



Resolução. A força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do pêndulo, e na direção oposta a essa velocidade (ver equação (4.16)). Como a velocidade do pêndulo é igual a $l\,\dot{\theta}$, a expressão para a força de resistência do ar é:

$$F_\mathrm{r} = -C\,l^2\,|\dot{\theta}|\,\dot{\theta}$$

onde C é uma constante. Fixando a origem no ponto onde o fio está colado, a posição do ponto onde atua essa força é

$$\vec{r} = l\,(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

e a sua derivada em ordem a θ é

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta} = l\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) = l\,\vec{e}_\theta$$

onde $\vec{e}_\theta$ é o versor tangente à trajetória circular do pêndulo, no sentido em que θ aumenta. A força generalizada é

$$Q_\theta = \vec{F}_\mathrm{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta} = \left(-C\,l^2\,|\dot{\theta}|\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)\cdot\left(l\,\vec{e}_\theta\right) = -C\,l^3\,|\dot{\theta}|\,\dot{\theta}$$

As energias cinética e potencial e as suas derivadas são semelhantes às do último exemplo da secção anterior, substituindo $a = 0$

$$E_\mathrm{c} = \frac{m}{2}\,l^2\dot{\theta}^2 \qquad U = -m\,g\,l\,cos\theta$$

$$\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\dot{\theta}} = m\,l^2\,\dot{\theta} \qquad \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\theta} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta} = m\,g\,l\sin\theta$$

A equação de Lagrange conduz a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{C\,l}{m}\,|\dot{\theta}|\,\dot{\theta} \tag{8.8}$$

8.5. Forças de ligação

Uma das vantagens da mecânica lagrangiana, em relação à mecânica vetorial, é não ter que identificar as forças de ligação, as suas direções e os pontos onde são aplicadas. No entanto, em alguns casos pode ser necessário ter de calcular essas forças. Por exemplo, quando existe atrito cinético entre duas superfícies, a força de atrito é proporcional à força de reação normal, que é uma de forças de ligação.

Existe um método que permite calcular as forças de ligação a partir das equações de Lagrange. Começa-se por identificar a restrição à qual está associada a força de ligação e escreve-se na forma $f(q_1,\ldots,q_n) = constante$. Por exemplo, a restrição de que o comprimento do fio é constante, $y_1 + 2y_2 + y_3 = k$, no exemplo 8.2, é responsável pela aparição de forças de tensão ao longo do fio e fez com que y_3 pudesse deixasse de ser um grau de liberdade, ficando unicamente y_1 e y_2. Assim sendo, para calcular a tensão na se elimina a variável y_3, ficando a energia em função das três variáveis (y_1, y_2, y_3) e das suas derivadas. Nesse caso a função $f(y_1,y_2,y_3)$ é igual a $y_1 + 2y_2 + y_3$.

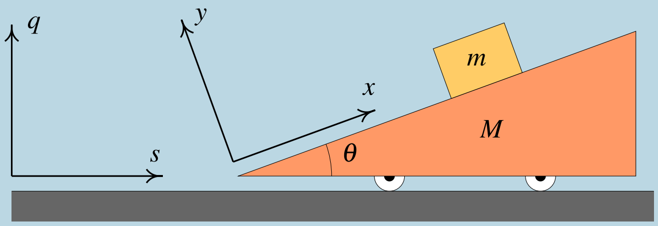
O passo seguinte consiste em agregar um termo $-\lambda\, \partial f/\partial q_j$ a cada equação de Lagrange, ficando

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1,\ldots n \tag{8.9}$$

a função λ, que pode ser calculada como se explica no exemplo a seguir, chama-se **multiplicador de Lagrange**. Cada termo $-\lambda\, \partial f/\partial q_j$ é a componente da força de ligação segundo q_j. No caso do exemplo do fio com as 3 roldanas e os 3 cilindros, $-\lambda\, \partial f/\partial y_1$, $-\lambda\, \partial f/\partial y_2$ e $-\lambda\, \partial f/\partial y_2$ seriam os valores das tensões em cada um dos 3 blocos, que são diferentes.

Exemplo 8.6

Um bloco de massa m escorrega sobre um plano inclinado de massa M que tem rodas que lhe permitem deslocar-se livremente sobre uma mesa horizontal, como mostra a figura. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é μ_c. Admitindo que a massa das rodas é muito menor que m e M e que o atrito no eixo das rodas é desprezável, encontre as equações de movimento do sistema.



Resolução. Na figura acima já foram indicados também os dois sistemas de eixos usados a seguir; os eixos s e q estão fixos à mesa e os eixos x e y deslocam-se com o plano inclinado.

Este exemplo é semelhante ao exemplo 8.1, mas com uma força não conservativa: atrito sinético entre o bloco e o plano inclinado. Como a força de atrito cinético é igual a $\mu_c R$, onde R é a reação normal entre o bloco e o plano, é necessário calcular essa reação normal. É necessário então fazer de conta que o bloco não mantém o contacto com o plano inclinado e que as duas coordenadas x e y podem variar. Nesse caso existem assim 3 graus de liberdade: x, y e s e a equação da restrição que faz com que o bloco esteja sempre em contacto com o plano inclinado é:

$$f(x,y,s) = y = \text{constante}$$

Introduz-se um multiplicador de Lagrange λ e as 3 componentes generalizadas da força de ligação são:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

Isso mostra que a força de ligação aponta na direção do eixo y e o multiplicar de Lagrange é a própria reação normal R_n entre o bloco e o plano.

Para determinar as componentes das velocidades em função das velocidades generalizadas ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{s}$), mostra-se a seguir um método diferente do que foi usado na resolução do exemplo 8.1. O vetor posição do centro de massa do plano inclinado é

$$\vec{r}_p = s\,\vec{e}_s + q\,\vec{e}_q$$

e a sua derivada é o vetor velocidade do plano inclinado: $\vec{v}_p = \dot{s}\,\vec{e}_s$.

A posição do bloco em relação ao centro de massa do plano inclinado é

$$\vec{r}_{b/p} = \vec{r}_O + x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$$

onde $\vec{r}_O$ é o vetor desde o centro de massa do plano inclinado até a origem dos eixos xy. A posição do bloco em relação à mesa é $\vec{r}_p + \vec{r}_{b/p}$; como os versores do referencial xy, em relação ao referencial sq, são

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_s + \sin\theta\,\vec{e}_q \qquad \vec{e}_y = -\sin\theta\,\vec{e}_s + \cos\theta\,\vec{e}_q$$

então a posição do bloco, no referencial sq fixo à mesa, é

$$\vec{r}_b = (s + x\cos\theta - y\sin\theta)\,\vec{e}_s + (q + x\sin\theta + y\cos\theta)\,\vec{e}_q + \vec{r}_O$$

e derivando obtém-se a velocidade do bloco

$$\vec{v}_b = (\dot{s} + \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta)\,\vec{e}_s + (\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)\,\vec{e}_q$$

Como a energia cinética de rotação das rodas é desprezável, a energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{M}{2}v_p^2 + \frac{m}{2}v_b^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\,\dot{s}\,\dot{x}\cos\theta - 2\,\dot{s}\,\dot{y}\sin\theta\right)$$

A altura do bloco, em relação à mesa é

$$h = \vec{r}_{\mathrm{b}} \cdot \vec{e}_q = q + x \sin\theta + y \cos\theta + h_{\mathrm{O}}$$

e, ignorando os termos constantes, a energia potencial gravítica do sistema é

$$U = m\,g\,(x \sin\theta + y \cos\theta)$$

Neste caso existe uma força interna que realiza trabalho: a força de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado. Para calcular as componentes Q_j da força generalizada há que ter em conta que na expressão $Q_j = \vec{F} \cdot \partial\vec{r}/\partial q_j$ o vetor $\vec{r}$ é a posição do bloco em relação ao plano inclinado $\vec{r}_{b/p}$, porque a força é interna; usando a expressão dada acima para $\vec{r}_{b/p}$, as 3 derivadas parciais são $\partial\vec{r}/\partial x = \vec{e}_x$, $\partial\vec{r}/\partial y = \vec{e}_y$ e $\partial\vec{r}/\partial s = 0$. Como a força de atrito é $\mu_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{n}} \vec{e}_x$, as três componentes da força generalizada são então

$$Q_x = \mu_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{n}} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \mu_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{n}} \qquad Q_y = \mu_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{n}} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \qquad Q_s = 0$$

As equações de Lagrange (8.9) para as 3 coordenadas são

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} = Q_x \quad &\Longrightarrow \quad m\,(\ddot{x} + \ddot{s}\cos\theta + g\,\sin\theta) = \mu_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{n}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} = Q_y \quad &\Longrightarrow \quad m\,(\ddot{y} - \ddot{s}\sin\theta + g\,\cos\theta) - R_{\mathrm{n}} = 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial s} = Q_s \quad &\Longrightarrow \quad (M+m)\,\ddot{s} + m\,(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = 0
\end{aligned}$$

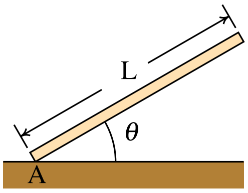
Estas 3 equações podem ser resolvidas para encontrar as 2 equações de movimento para $\ddot{x}$ e $\ddot{s}$ em função de (x, s, $\dot{x}$, $\dot{s}$) e a força de ligação R_{n}. Para substituir y, $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ em função das coordenadas e velocidade generalizadas (x, s, $\dot{x}$, $\dot{s}$). usa-se a equação da restrição, $f(x,y,s) =$ constante, que neste caso é $y =$ constante e, portanto, $\ddot{y} = 0$. Eliminando os termos $\ddot{y}$ nas equações de Lagrange e resolvendo para $\ddot{x}$, $\ddot{s}$ e R obtém-se

$$\ddot{x} = -\frac{(M+m)\,g\,\beta}{M + m\,\beta\,\sin\theta} \qquad \ddot{s} = \frac{m\,g\,\beta\,\cos\theta}{M + m\,\beta\,\sin\theta} \qquad R_{\mathrm{n}} = \frac{m\,M\,g\,\cos\theta}{M + m\,\beta\,\sin\theta} \tag{8.10}$$

onde $\beta = \sin\theta - \mu_{\mathrm{c}}\cos\theta$. No caso em que $\mu_{\mathrm{c}} = 0$, β é igual a $\sin\theta$ e as equações de movimento são as mesmas que foram obtidas no exemplo 8.1.

Perguntas

1. Uma barra muito comprida e homogénea, de comprimento L e massa m, está a cair para o chão. No ponto A o coeficiente de atrito estático é suficientemente elevado para evitar que o ponto A se desloque enquanto o ângulo θ diminui. Determine a expressão para a energia cinética da barra, em função da velocidade angular $\dot{\theta}$



A. $\dfrac{1}{8}mL^2\dot{\theta}^2$

B. $\dfrac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$

C. $\dfrac{1}{12}mL^2\dot{\theta}^2$

D. $\dfrac{1}{4}mL^2\dot{\theta}^2$

E. $\dfrac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

2. Numa máquina de Atwood, penduram-se dois blocos nos extremos de um fio que passa por uma roldana (ver figura); o bloco mais pesado desce com aceleração constante e o bloco mais leve sobe com o mesmo valor da aceleração. Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar e sabendo que as massas dos blocos são $3m$ e $4m$ e a roldana é um disco homogéneo com massa $2m$, determine o valor da aceleração dos blocos.

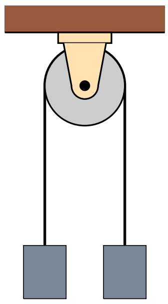
A. $g/7$

B. g

C. $7g/8$

D. $3g/4$

E. $g/8$



3. A energia cinética de uma partícula em movimento sobre um cilindro de raio R é $m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)/2$, em que θ e z são as coordenadas da posição da partícula no cilindro, e a sua energia potencial é $az^2/2 + b\theta^2/2 + cz\theta$, onde a, b e c são constantes. Determine a aceleração $\ddot{\theta}$.

A. $-\dfrac{b\theta + cz}{m}$

B. $-\dfrac{b\theta + cz}{mR^2}$

C. $-\dfrac{b\theta + cz}{mR}$

D. $-\dfrac{b\theta + az}{mR}$

E. $-\dfrac{b\theta + az}{mR^2}$

4. As expressões para as energias cinética e potencial de um sistema com dois graus de liberdade, x e θ, são: $E_c = 5\dot{x}^2 + 11\dot{\theta}^2$ e $U = -3x\theta$. Encontre a expressão para a aceleração $\ddot{\theta}$.

A. $3\theta/22$

B. $3x\theta/5$

C. $3x/22$

D. $3x\theta/22$

E. $3x/5$

5. As energias cinética e potencial gravítica de um corpo celeste em órbita à volta do Sol são dadas pelas expressões

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \qquad U = -\frac{4\pi^2 m}{r}$$

onde m é a massa do corpo, r a distância do Sol ao corpo, θ um ângulo medido no plano da órbita com vértice no Sol, as distâncias estão a ser medidas em unidades astronômicas e o tempo em anos. Encontre a equação de movimento para $\ddot{r}$

A. $r\ddot{\theta} + \left(\dfrac{2\pi}{r}\right)^2$

B. $r^2\dot{\theta} + (2\pi r)^2$

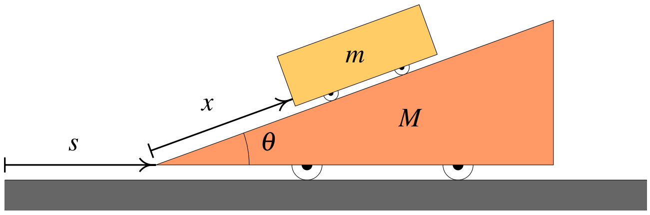
C. $r\dot{\theta}^2 + \left(\dfrac{2\pi}{r}\right)^2$

D. $r\dot{\theta} + (2\pi r)^2$

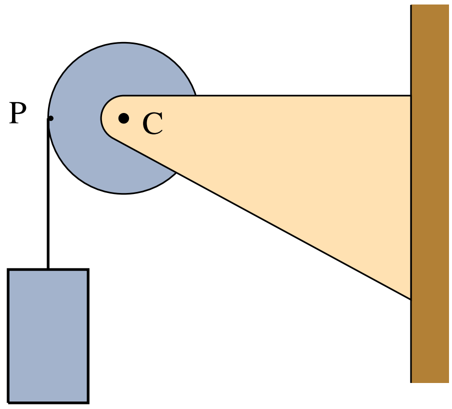
E. $r^2\dot{\theta}^2 + \left(\dfrac{2\pi}{r}\right)^2$

Problemas

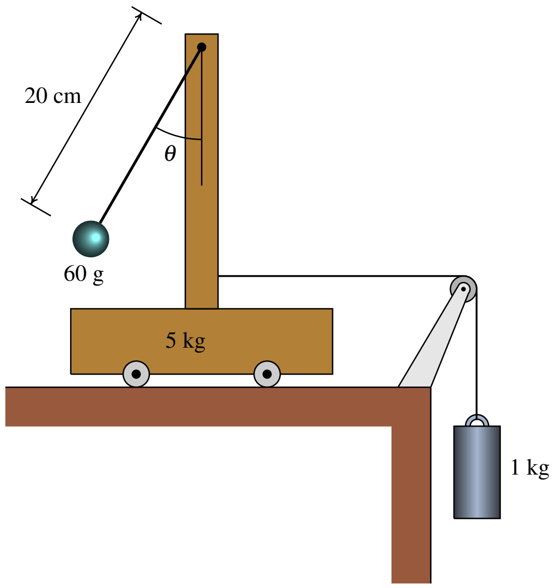
1. No exemplo 8.1, se as massas são $m = 0.6$ kg e $M = 2.5$ kg e o ângulo é $\theta = 20°$, (*a*) determine os valores da aceleração do plano inclinado e do carrinho em relação ao plano inclinado. (*b*) Se num instante inicial o plano inclinado e o carrinho estão em repouso, com $x_0 = 20$ cm, calcule o valor da velocidade, relativa ao plano inclinado, com que o carrinho chega à base do plano inclinado ($x = 0$) e o tempo que demora. (*c*) Na alínea anterior, calcule o valor da velocidade do plano inclinado quando o carrinho chega à base do plano inclinado.



2. Cola-se um extremo de um fio num ponto P de uma roldana, enrolando-o e pendurando um bloco de massa m no outro extremo. O sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser a altura y que o bloco desce. Admita que a roldana é um disco homogéneo com massa igual a metade da massa do bloco, e que a massa do fio, a força de atrito cinético no eixo da roldana e a resistência do ar são desprezáveis. (*a*) Encontre o valor da aceleração do bloco, em relação à aceleração da gravidade. (*b*) Se o bloco parte do repouso, determine o valor da sua velocidade após ter descido 50 cm.



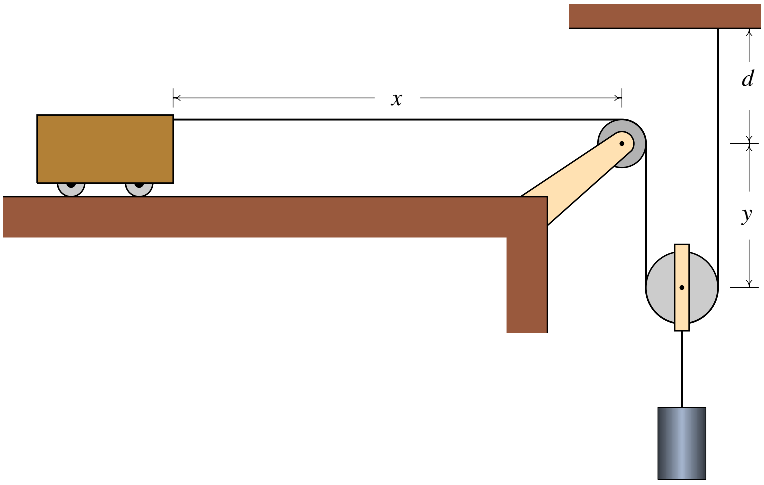
3. No sistema representado na figura, a massa das rodas e da roldana e o atrito nos seus eixos podem ser desprezados. (*a*) Determine as expressões para as energias cinética e potencial do sistema, em função do ângulo θ e do deslocamento horizontal x do carrinho. (*b*) Calcule o valor das acelerações do carrinho e do cilindro. (*c*) Encontre o valor do ângulo θ na posição de equilíbrio e diga se o equilíbrio é estável ou instável.



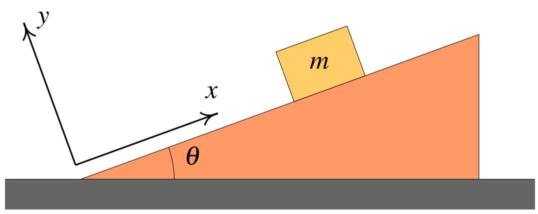
4. A roldana fixa no sistema da figura tem massa m e a roldana móvel tem massa $2m$ (ambas podem ser consideradas discos uniformes). A massa do carrinho é $20m$ e a massa do cilindro mais o suporte que o liga à roldana móvel é $8m$. Admita que a massa do fio e das rodas do carrinho, a força de atrito cinético nos eixos das roldanas e das rodas do carrinho e a resistência do ar são desprezáveis. (*a*) Mostre que, em função da altura y que o cilindro desce, as energias cinética e potencial do sistema são

$$E_c = \frac{91}{2} m \dot{y}^2 \qquad U = -10 m g y$$

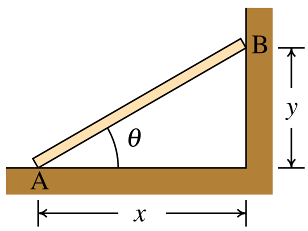
(*b*) Determine o valor das acelerações do cilindro e do carrinho.



5. Um bloco de massa m desce um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e plano inclinado é μ_c. Usando a equação de Lagrange com um multiplicador, encontre as expressões para a reação normal do plano sobre o bloco e da aceleração do bloco, $\ddot{x}$ (despreze a resistência do ar).



6. A barra na figura é homogénea, com massa m e comprimento $L = 2$ m e está apoiada no chão no ponto A e numa parede no ponto B. No instante inicial, a barra é colocada em repouso, com ângulo inicial $\theta = 30°$. Se o chão e a parede forem muito lisos, as forças de atrito nos pontos A e B são desprezáveis e a barra desce até que o ângulo θ diminui até 0. Admita que os pontos A e B permanecem sempre em contacto com o chão e a parede, que a resistência do ar é desprezável e que a grossura da barra é muito menor que o seu comprimento.



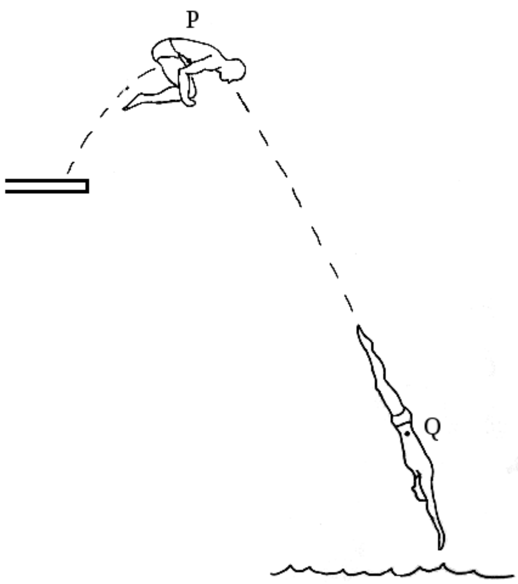
(*a*) Demonstre que em qualquer instante o valor da velocidade do centro de massa da barra é igual a $L\dot{\theta}/2$. Encontre as expressões, em função do ângulo θ, para: (*b*) a energia cinética, (*b*) a energia potencial gravítica, (*d*) a aceleração angular e (*e*) a velocidade angular. (*f*) O tempo que a barra demora a cair até o chão é o integral

$$t = \int\limits_{\pi/6}^{0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}}$$

e, em princípio, usando a expressão obtida na alínea *e* seria possível calcular o integral; no entanto, esse integral não pode ser calculado analiticamente e os métodos numéricos também falham por tratar-se de um integral impróprio ($1/\dot{\theta}$ é infinito no ponto inicial). Integre as equações de evolução em forma numérica e analise a solução para determinar o instante em que a barra bate no chão; diga qual é o tempo que a barra demora a bater no chão, com precisão de três algarismos significativos.

7. Num pêndulo simples, composto por um objeto pequeno de massa m pendurado por um fio de massa desprezável e comprimento l, o ponto onde o fio está fixo desloca-se para cima e para baixo segundo a expressão $A\cos(\omega t)$, onde A e ω são duas constantes. (*a*) Ignorando a resistência do ar, determine as expressões para as energias cinética e potencial em função do angulo θ que o pêndulo faz com a vertical. (*b*) Determine a equação de movimento para $\ddot{\theta}$. (*c*) Diga para que valores das constantes A e ω o ponto de equilíbrio $\theta = 0$ é estável ou instável.

8. O saltador na figura encolhe o corpo no ponto P, para rodar mais rapidamente, e estende-o novamente em Q, para reduzir a rotação na entrada para a água. As alterações da velocidade angular são consequência da alteração do momento de inércia (*a*) Se o momento de inércia do saltador em relação ao centro de massa é I, que depende do tempo, escreva as expressões para as suas energias cinética e potencial em função da posição (x, y) do centro de massa e do ângulo de rotação θ. (*b*) Usando a equação de Lagrange para θ, demonstre que o **momento angular** $L = I\,\dot{\theta}$ permanece constante. (*c*) Se no ponto P mais alto da trajetória o momento de inércia é 3.28 kg·m^2 e a velocidade angular $\dot{\theta} = 4$ s^{-1} e no ponto Q o momento de inércia é 28.2 kg·m^2, determine a velocidade angular do saltador no ponto Q.



9. A energia potencial gravítica de um corpo celeste de massa m, em órbita à volta de outro corpo de massa M, é dada pela expressão (ver problema 2 do capítulo 6):

$$U_g = -\frac{G M m}{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal e r a distância entre os dois corpos. Pode demonstrar-se que as possíveis órbitas do corpo celeste são sempre planas; como tal, o movimento orbital tem dois graus de liberdade que podem ser r e um ângulo θ medido no plano da órbita, com vértice no corpo de massa M. Nesse sistema de coordenadas polares, o quadrado da velocidade do corpo de massa m é $(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$. ($a$) A partir da equação de Lagrange para θ, demonstre que o **momento angular**

$$L = m r^2 \dot{\theta}$$

do corpo de massa m em relação ao corpo de massa M, é constante. (b) Encontre a equação de movimento para $\ddot{r}$ e mostre que depende unicamente de r e $\dot{r}$ e não de θ.

Respostas

Perguntas: 1. B. **2.** E. **3.** B. **4.** C. **5.** C.

Problemas

1. (a) $\ddot{x} = -4.043$ m/s^2 e $\ddot{s} = 0.735$ m/s^2. (b) $\dot{x} = -1.272$ m/s, $\Delta t = 0.315$ s. (c) $\dot{s} = 0.231$ m/s.

2. (a) $2g/3$ (b) 2.56 m/s.

3. (a) Em unidades SI, $E_c = 3.03\dot{x}^2 + 1.2\times 10^{-3}\,\dot{\theta}^2 - 1.2\times 10^{-2}\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos\theta$
$U = -9.8x - 0.1176\cos\theta$. ($b$) 1.617 m/s^2. ($c$) 9.37°, estável.

4. (b) Cilindro: $10g/91 \approx 1.08$ m/s^2. Carrinho: $20g/91 \approx 2.15$ m/s^2.

5. $R_n = m g\, cos\theta \qquad \ddot{x} = -g\,(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$

6. (b) $\dfrac{5}{24} m L^2\,\dot{\theta}^2 \qquad$ (c) $\dfrac{L}{2} m g \sin\theta$

(d) $\ddot{\theta} = -\dfrac{6g}{5L}\cos\theta \qquad$ (e) $\dot{\theta} = -2\sqrt{\dfrac{3g}{5L}\left(\dfrac{1}{2} - \sin\theta\right)}$

(f) 0.445 s.

7. (a) $E_c = \dfrac{m}{2}\left(l^2\,\dot{\theta}^2 + A^2\omega^2\,\sin(\omega t) - 2A\,l\,\omega\dot{\theta}\sin\theta\,\sin(\omega t)\right)$
$U = m g\,(A\cos(\omega t) - l\cos\theta)$

(*b*) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\, sin\theta + \frac{A\,\omega^2}{l}\,\sin\theta\,\cos(\omega\,t)$ (*c*) Se $A\,\omega^2 \leq g$, o equilíbrio é estável; se $g < A\,\omega^2 \leq 2\,g$, o ponto de equilíbrio é estável em alguns intervalos e instável em outros; $A\,\omega^2 > 2\,g$, o equilíbrio é instável.

8. (*a*) $E_\text{c} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\,I\,\dot{\theta}^2$, $U = m\,g\,y$. (*b*) $\frac{\mathrm{d}\,(I\,\dot{\theta})}{\mathrm{d}\,t} = 0$, que implica $I\,\dot{\theta} =$ constante. (*c*) 0.465 s^{-1}

9. (*a*) a equação de Lagrange é: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(m\,r^2\,\dot{\theta}\right) = 0$ que implica $m\,r^2\,\dot{\theta}$ constante.
(b) $\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2\,r^3} - \frac{G\,M}{r^2}$ onde L, m, G e M são constantes.

9. Sistemas lineares

Um metrónomo produz pulsos de duração regular que podem ser ajustados deslocando um peso na haste que oscila. Os osciladores jogam um papel muito importante na teoria dos sistemas dinâmicos, como casos típicos de sistemas lineares.

9.1. Sistemas lineares no plano

Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado é definido por duas equações de evolução com a forma geral (7.2) introduzida no capítulo 7:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad\qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{9.1}$$

Diz-se que o sistema é linear quando as duas funções f_1 e f_2 são combinações lineares das variáveis de estado:

$$f_1 = A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 \qquad\qquad f_2 = A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 \tag{9.2}$$

onde A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22} são quatro constantes.

As duas equações de evolução podem ser escritas de forma mais compacta usando matrizes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.3}$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se substituindo o lado esquerdo da equação (9.3) por uma matriz com zeros nas duas linhas, dando um sistema de equações lineares homogéneo; exlcuindo os casos em que o determinante da matriz A_{ij} seja nulo, esse sistema tem apenas uma solução: $x_1 = x_2 = 0$. Assim sendo, os sistemas dinâmicos lineares com matrizes não singulares têm um único ponto de equilíbrio na origem.

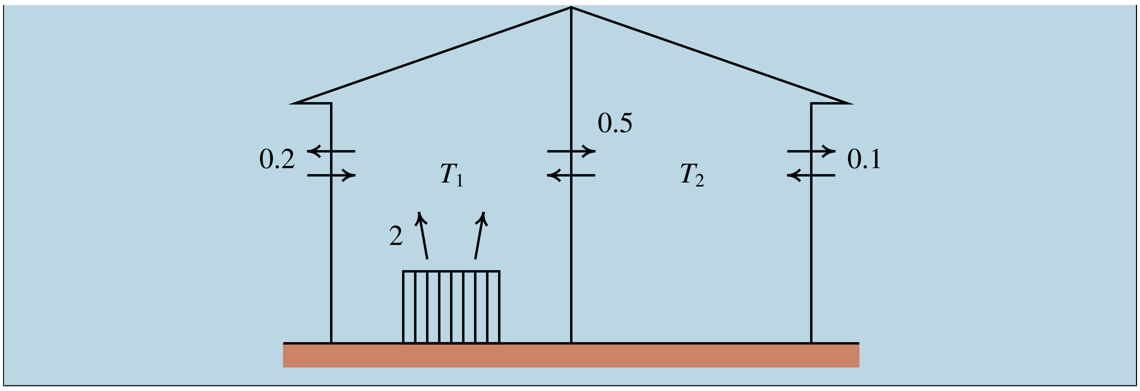
Quando as equações de evolução são combinações lineares das variáveis de estado mais uma constante, é possível fazer uma mudança de equações que tornam o sistema linear, como no caso do exemplo seguinte.

Exemplo 9.1

As temperaturas T_1 e T_2 em duas divisões de uma casa verificam as seguintes equações:

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 2 - 0.2(T_1 - 8) - 0.5(T_1 - T_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0.1(T_2 - 8) - 0.5(T_2 - T_1)$$

em que as temperaturas são medidas em graus centígrados e o tempo em horas. A temperatura exterior é 8° C. Os termos $-0.2(T_1 - 8)$ e $-0.1(T_2 - 8)$ representam o calor que sai de cada divisão para o exterior, por unidade de tempo, divididos pelas capacidades caloríficas de cada divisão. O termo $-0.5(T_1 - T_2)$ tem a ver com o calor que passa de uma divisão para a outra e o termo constante 2 é devido a que na primeira divisão há um aquecedor ligado que fornece uma quantidade constante de calor durante cada hora. Determine as temperaturas das duas divisões no estado de equilíbrio e escreva o sistema de forma linear.



Resolução. Os lados direitos das duas equações diferenciais definem as componentes da velocidade de fase, no espaço de fase (T_1, T_2). Os pontos de equilíbrio, onde o estado do sistema permanece constante, são os pontos onde as duas componentes da velocidade de fase são nulas. Usando comando `solve` do Maxima,

```
(%i1) eq1: 2 - 0.2*(T1 - 8) - 0.5*(T1 - T2)$
(%i2) eq2: - 0.1*(T2 - 8) - 0.5*(T2 - T1)$
(%i3) solve([eq1, eq2]);
                              236        256
(%o3)                  [[T2 = ---, T1 = ---]]
                              17         17
(%i4) float(%);
(%o4)   [[T2 = 13.88235294117647, T1 = 15.05882352941176]]
```

ou seja, no estado de equilíbrio as temperaturas das duas divisões são 15.1° C e 13.9° C.

Para tornar o sistema linear basta deslocar a origem de coordenadas para o ponto de equilíbrio. Isso consegue-se definindo duas novas variáveis:

$$x_1 = T_1 - \frac{256}{17} \qquad\qquad x_2 = T_2 - \frac{236}{17}$$

e nesse sistema de variáveis as equações do sistema são (basta eliminar os termos constantes no sistema original):

$$\dot{x}_1 = -0.7x_1 + 0.5x_2 \qquad\qquad \dot{x}_2 = 0.5x_1 - 0.6x_2 \tag{9.4}$$

A figura 9.1 mostra as nulclinas, onde cada uma das componentes da velocidade de fase do exemplo 9.1 é nula. Na nulclina de T_2, a derivada $\dot{T}_2$ é nula e, portanto, se o estado inicial fosse um ponto sobre essa reta, a temperatura T_2 permanecia constante e estado evoluia na direção paralela ao eixo T_1. Se o estado inicial estivesse na nulclina de T_1, o estado evoluia na direção paralela ao eixo T_2. O ponto de equilíbrio encontra-se na interseção das duas nulclinas. Na região entre as duas nulclinas, os vetores na figura mostram que a veilocidade de fase tem de apontar na direção do ponto de equilíbrio e ostado deverá aporiximar-se do ponto de equilíbrio; mas será que nas outras regiões o estado inicial também se aproxima do estado de equilíbrio? na próxima secção mostra-se um métido geral para responder a essa questão.

Quando as equações de evolução são obtidas a partir de uma única equação diferencial de segunda ordem, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, o sistema dinâmico é linear se a função f é uma combinação linear de x e $\dot{x}$. Nesse caso, a forma matricial do sistema é

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes.

9.2. Estabilidade dos sistemas lineares

No exemplo 9.1, se as temperaturas de cada divisão atingirem os valores de equilíbrio, permanecerão constantes. Mas será que as temperaturas chegam a atingir esses valores? Ou será que enquanto a temperatura de uma das divisões se aproxima do seu valor de equilíbrio a outra temperatura afasta-se do seu valor de equilíbrio? Será que o ponto de equilíbrio é estável ou instável?

Nos sistemas analisados no capítulo 7, quando o estado inicial do sistema está próximo de um ponto de equilíbrio instável, o sistema pode terminar afastando-se até o infinito, ou afastar-se inicialmente e a seguir regressar assimptoticamente para esse ponto e na vizinhança dos pontos de equilíbrio estável o sistema oscila. No exemplo 9.1, um ciclo no espaço de fase correspondia a uma situação em que as duas temperaturas flutuavam.

Nesta secção introduz-se um método geral para analisar a estabilidade dos sistemas lineares (comportamento na vizinhança dos pontos de equilíbrio). A equação matricial (9.3) pode

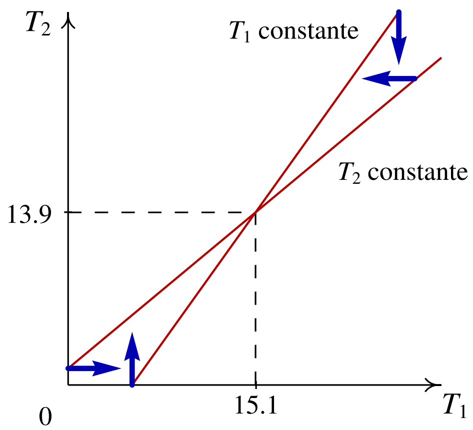


Figura 9.1.: Nulclinas e temperaturas de equilíbrio no exemplo 9.1.

interpretar-se como a representação matricial da equação vetorial:

$$\vec{u} = \hat{A}\,\vec{r} \tag{9.6}$$

onde a posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{u}$ do estado são vetores no espaço de fase e $\hat{A}$ é um operador linear que atua sobre os vetores do espaço de fase produzindo outros vetores nesse espaço.

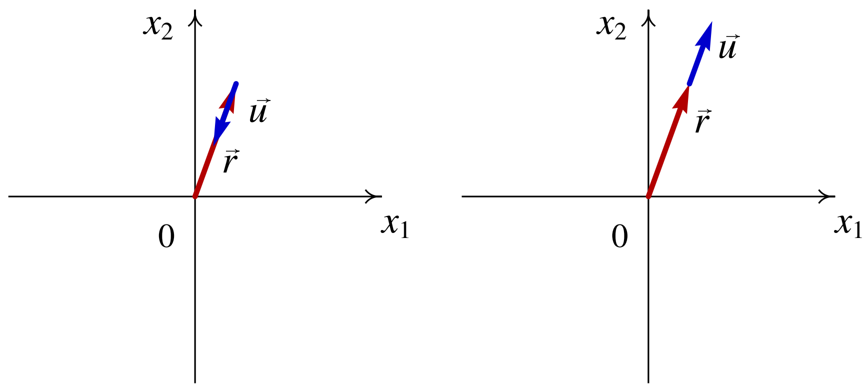


Figura 9.2.: Quando a velocidade é na direção da posição, o sistema aproxima-se ou afasta-se da origem.

Se num instante a velocidade $\vec{u}$ e o vetor posição $\vec{r}$, do estado no espaço de fase, são na mesma direção, há duas possibilidades (figura 9.2): se os dois vetores têm sentidos opostos, o estado aproxima-se da origem (ponto de equilíbrio) e se têm o mesmo sentido, o estado afasta-se da origem. A condição para que $\vec{u}$ e $\vec{r}$ tenham a mesma direção é

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{r} \tag{9.7}$$

onde λ é um número real. Se λ é positivo, o sistema afasta-se-á do ponto de equilíbrio e se λ é negativo, o sistema aproxima-se do ponto de equilíbrio. Substituindo a expressão anterior na equação (9.6), obtém-se:

$$\boxed{\hat{A}\,\vec{r} = \lambda\,\vec{r}} \tag{9.8}$$

Os vetores $\vec{r}$ que verificam a condição (9.8) chamam-se **vetores próprios** do operador $\hat{A}$ e os respetivos valores λ são os **valores próprios** do operador.

Exemplo 9.2
Encontre os valores e vetores próprios do sistema linear do exemplo 9.1.

Resolução. Como as equações de evolução já foram armazenadas nas variáveis `eq1` e `eq2`, pode usar-se o comando `coefmatrix` para obter a matriz do sistema (equação (9.4)):

```
(%i5) A: coefmatrix([eq1,eq2],[T1,T2]);
                              [    7     1  ]
                              [ - --     -  ]
                              [   10     2  ]
(%o5)                         [             ]
                              [  1        3 ]
                              [  -      - - ]
                              [  2        5 ]
```

que são as mesmas 4 constantes nas equações (9.4). A seguir, pode usar-se o comando `eigenvectors` do Maxima para obter valores e vetores próprios:

```
(%i6) eigenvectors(A)$
(%i7) float (%);
(%o7) [[[- 1.152493781056044, - .1475062189439555], [1.0, 1.0]],
        [[[1.0, - .9049875621120891]], [[1.0, 1.104987562112089]]]]
```

A primeira lista mostra os valores próprios, $\lambda_1 = -1.15$ e $\lambda_2 = -0.148$; a segunda lista são as "multiplicidades" de cada valor próprio, que neste caso é 1. As últimas duas listas definem as direções dos vetores próprios correspondentes aos dois valores próprios; quaisquer vetores na mesma direção de um desses dois vetores, também será vetor próprio.

Como existem dois valores próprios negativos, existem assim duas direções no plano de fase em que o estado do sistema aproxima-se do estado de equilíbrio na origem. Pode obter-se o retrato de fase do sistema usando o comando `plotdf`:

```
(%i8) vars: [x1, x2]$
(%i9) plotdf([A[1].vars, A[2].vars], vars)$
```

A notação `A[1]` usa-se para obter a primeira linha da matriz e o ponto indica produto matricial.

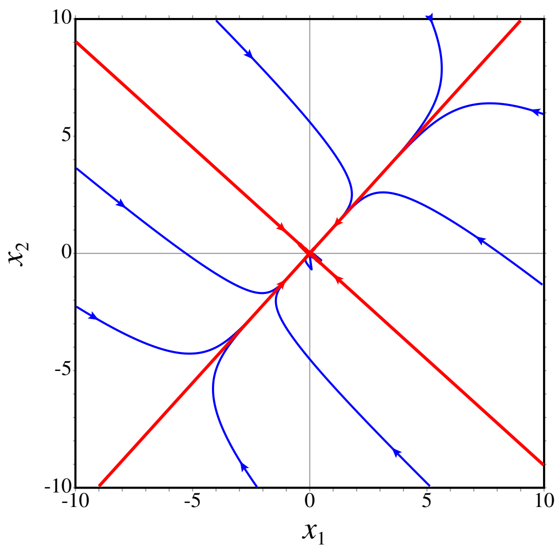


Figura 9.3.: Retrato de fase do exemplo 9.1. As duas retas seguem as direções dos dois vetores próprios.

A figura 9.3 mostra o retrato de fase. As direções dos dois vetores próprios (as duas retas) são traçadas escrevendo no campo "Trajectory at" do menu de configuração as coordenadas dos vetores obtidos no resultado `%o7` e as mesmas coordenadas com sinais opostos. Se o estado inicial não estiver sobre uma das direções dos vetores próprios, a curva de evolução aproxima-se rapidamente do vetor correspondente ao valor próprio com menor valor absoluto.

Observe-se que as duas nulclinas representadas na figura 9.1 encontram-se aos dois lados da reta com declive positivo, no retrato de fase 9.3 e cruzam-se na origem, onde foi deslocado o ponto de equilíbrio.

Se inicialmente a temperatura em toda a casa for igual à temperatura exterior, $T_1 = T_2 = 8$, então os valores iniciais das variáveis x_1 e x_2 serão $8 - 15.1$ e $8 - 13.9$; a curva de evolução no espaço de fase e a evolução das temperaturas em função do tempo podem ser traçadas com o comando seguinte:

```
(%i10) plotdf([A[1].vars, A[2].vars], vars,
[trajectory_at,8-15.1,8-13.9],[versus_t,1],[direction,forward])$
```

O resultado mostra-se na figura 9.4. Os gráficos em função do tempo mostram que após 30 horas, as duas temperaturas atingem praticamente os valores de equilíbrio.

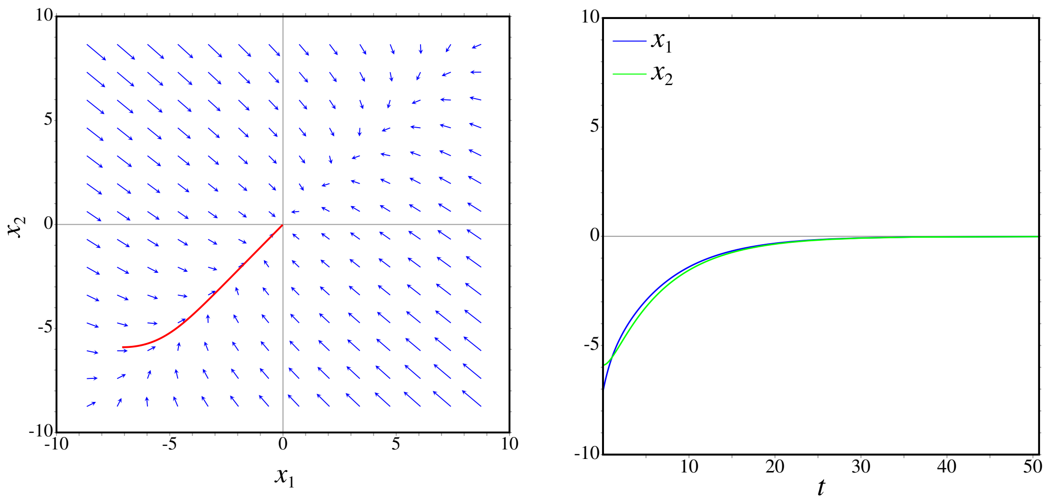


Figura 9.4.: Curva de evolução e temperaturas em função do tempo, quando as duas temperaturas iniciais são de 8°C.

9.3. Classificação dos pontos de equilíbrio

A forma geral de um sistema dinâmico linear, com qualquer número de variáveis, é:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \hat{A}\,\vec{r}} \qquad (9.9)$$

em que $\vec{r}$ é a posição do sistema no espaço de fase e $\hat{A}$ é um operador linear.

Num espaço de fase com duas variáveis de estado x_1 e x_2, a representação matricial da equação (9.9) é a equação (9.3).

Se o determinante da matriz $\det(\hat{A}) = |A_{ij}|$ é diferente de zero, existe um único ponto de equilíbrio, na origem: $x_1 = x_2 = 0$.

A existência de valores próprios da matriz $\hat{A}$ implica existência de direções em que o estado aproxima-se ou afasta-se em linha reta do ponto de equilíbrio. Os valores próprios da matriz $\hat{A}$ são os valores λ que verificam a equação (9.8). No espaço de fase com duas variáveis, essa equação conduz a:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9.10}$$

Calculando o determinante, obtêm-se a seguinte equação quadrática, chamada **equação caraterística**:

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\hat{A})\,\lambda + \det(\hat{A}) = 0} \tag{9.11}$$

onde $\mathrm{tr}(\hat{A}) = A_{11} + A_{22}$ é o **traço** da matriz e $\det(\hat{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ é o determinante. As duas raízes da equação caraterística são:

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(\hat{A})}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\mathrm{tr}(\hat{A})}{2}\right]^2 - \det(\hat{A})} \tag{9.12}$$

Se as raízes forem números complexos, significará que não existem vetores próprios no espaço de fase (x_1, x_2). Se existir uma única raiz real, existirá pelo menos um vetor próprio no espaço de fase e se existirem duas raízes reais diferentes, existirão dois vetores próprios linearmente independentes no espaço de fase.

9.3.1. Pontos de sela

Quando o determinante $\det(\hat{A})$ é negativo, a expressão dentro da raíz na equação (9.12) é positiva e

$$\sqrt{\left[\frac{\mathrm{tr}(\hat{A})}{2}\right]^2 - \det(\hat{A})} > \left|\frac{\mathrm{tr}(\hat{A})}{2}\right| \tag{9.13}$$

Isso implica que existem dois valores próprios reais, λ_1 e λ_2, com sinais diferentes, um deles positivo e o outro negativo.

A esses dois valores próprios correspondem dois vetores próprios linearmente independentes, que definem duas direções no espaço de fase onde o sistema evolui ao longo de uma reta (ver figura 9.5). Na direção correspondente ao valor próprio negativo, o sinal negativo implica que o estado se aproxima da origem. Na direção associada ao valor próprio positivo, o sinal positivo implica que o estado se afasta da origem.

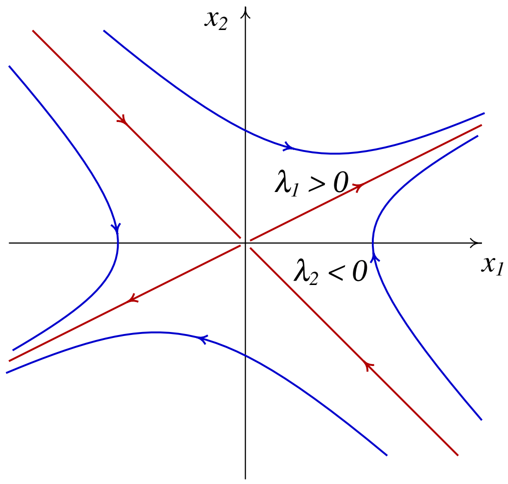


Figura 9.5.: Ponto de sela: existem duas direções em que o estado evolui em linha reta, num dos casos afastando-se da origem e no outro caso aproximando-se.

As outras curvas de evolução do sistema serão todas curvas que se aproximam da origem durante algum tempo, mas acabam sempre por se afastar até o infinito (figura 9.5). A denominação desse tipo de ponto de equilíbrio é **ponto de sela**. Trata-se de pontos de equilíbrio instável.

Observe-se que nos pontos de sela, a pesar de existirem curvas de evolução que começam ou terminam nesse ponto, não podem existir órbitas homoclínicas porque essas curvas de evolução são retas que se estendem até infinito. As órbitas homoclínicas só aparecem nos sistemas não lineares. As órbitas heteroclínicas também não aparecem nos sistemas lineares porque precisam, pelo menos, de dois pontos de equilíbrio, mas os sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio.

9.3.2. Nós estáveis e instáveis

Quando o determinante $\det(\hat{A})$ é positivo mas menor que $\text{tr}(\hat{A})^2/4$, existem duas soluções reais da equação (9.12), ambas com o mesmo sinal de $\text{tr}(\hat{A})$.

Se os dois valores próprios são negativos, existem duas direções no espaço de fase em que o estado se aproxima do ponto de equilíbrio (lado esquerdo da figura 9.6); devido à continuidade das curvas de evolução do sistema, qualquer outra curva de evolução será uma curva que se aproxima do ponto de equilíbrio. A denominação do ponto de equilíbrio é **nó estável**, ou atrativo.

Se os dois valores próprios são positivos, existem duas direções no espaço de fase em que o estado se afasta do ponto de equilíbrio. Qualquer que seja o estado inicial, o sistema sempre se afasta do ponto de equilíbrio (lado direito da figura 9.6) e o ponto chama-se **nó instável**, ou repulsivo.

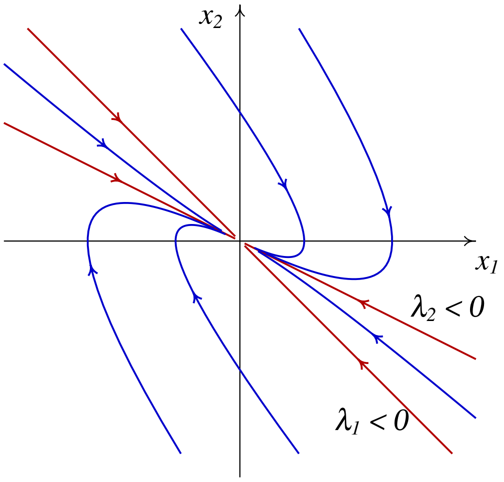


Figura 9.6.: Quando existem dois valores próprios reais, diferentes, com o mesmo sinal, o ponto de equilíbrio é um nó, estável (esquerda) ou instável (direita).

9.3.3. Focos e centros

Quando o determinante $\det(\hat{A})$ é maior que $\mathrm{tr}(\hat{A})^2/4$, as duas soluções da equação (9.12) são números complexos $\lambda = a \pm \mathrm{i}\, b$. Isso quer dizer que não existem curvas de evolução que sejam retas. Todas as curvas de evolução são curvas.

O sinal da parte real das soluções complexas da equação (9.12) determina se as curvas de evolução se aproximam ou afastam do ponto de equilíbrio. Se a parte real das raízes é negativa (matriz com traço negativo), as curvas de evolução do sistema são espirais que se aproximam do ponto de equilíbrio (lado esquerdo da figura 9.7) e o ponto de equilíbrio é designado de **foco estável**, ou atrativo.

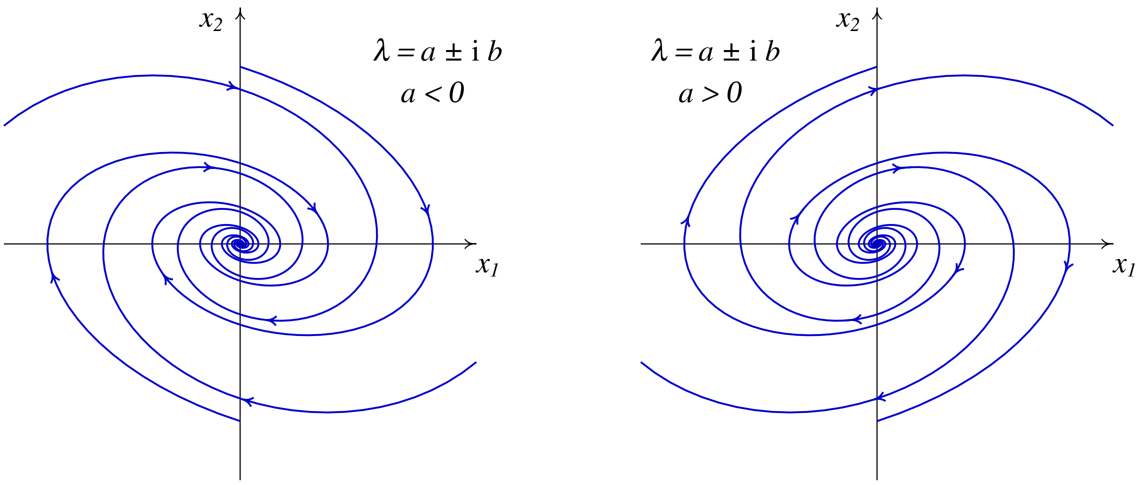


Figura 9.7.: Quando os valores próprios são complexos, o ponto de equilíbrio é um foco, estável (esquerda) ou instável (direita).

Se a parte real das raízes é positiva (matriz com traço positivo), as curvas de evolução do sistema afastam-se do ponto de equilíbrio, formando espirais (lado direito da figura 9.7) e o ponto de equilíbrio é designado de **foco instável**, ou repulsivo.

Se o traço da matriz é nulo, as soluções da equação (9.12) são dois números imaginários puros, com a mesma parte imaginária mas com sinais opostos. Nesse caso todas as curvas de evolução do sistema são ciclos e o ponto de equilíbrio, estável, chama-se **centro**.

A figura 9.8 apresenta um sumário dos diferentes tipos de ponto de equilíbrio, em função do traço e o determinante da matriz do sistema.

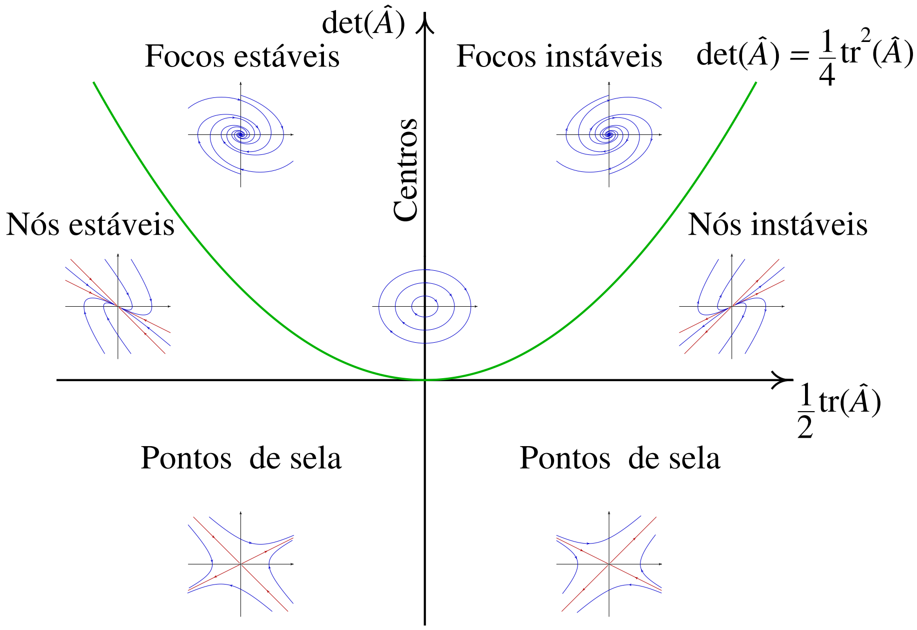


Figura 9.8.: Tipos de ponto de equilíbrio de um sistema linear com duas variáveis de estado.

9.3.4. Nós próprios e impróprios

Quando o determinante $\det(\hat{A})$ é exatamente igual $\mathrm{tr}(\hat{A})^2/4$ (pontos na parábola na figura 9.8), existe unicamente um valor próprio real.

Essa situação conduz a dois tipos diferentes de ponto de equilíbrio. Se a matriz é diagonal, os valores na diagonal são necessariamente o valor próprio e qualquer vetor do espaço de fase é vetor próprio da matriz. Isso implica que todas as curvas de evolução do sistema são retas que passam pela origem, afastando-se, se o valor próprio é positivo (lado esquerdo na figura 9.9) ou aproximando-se, se o valor próprio é negativo. O ponto de equilíbrio denomina-se **nó próprio**, estável ou instável, dependendo do sinal do valor próprio.

A segunda situação possível, quando a matriz não é diagonal, existe um único vetor próprio e o ponto de equilíbrio é designado de **nó impróprio**. Existe unicamente uma direção no

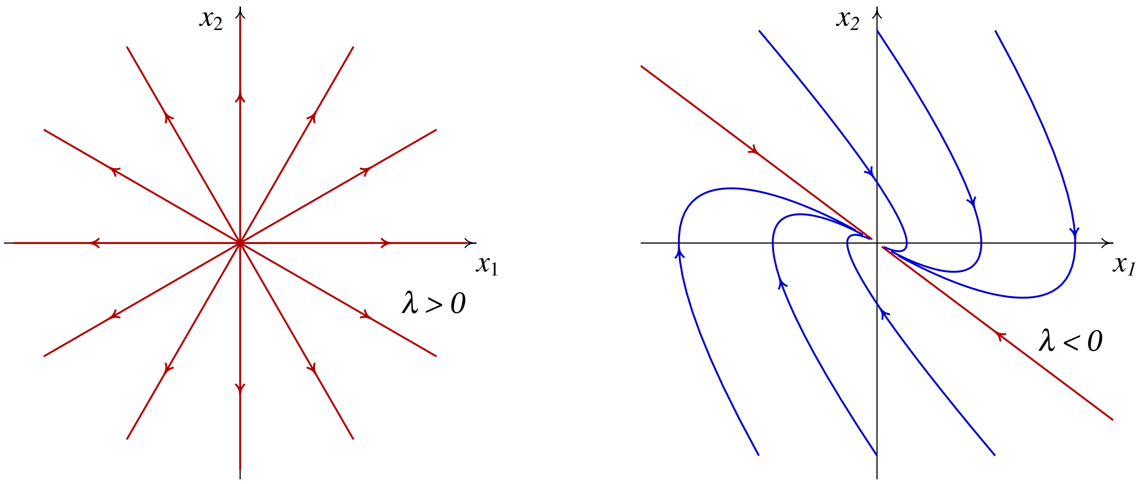


Figura 9.9.: Retratos de fase de um nó próprio instável (esquerda) e de um nó impróprio estável (direita).

espaço de fase em que o estado evolui em linha reta; todas as outras curvas de evolução do sistema acumulam-se nessa direção. Se o valor próprio é negativo, o nó impróprio é estável (lado direito na figura 9.9) e se o valor próprio é positivo o ponto de equilíbrio é um nó impróprio instável.

Uma forma conveniente de identificar o tipo de equilíbrio num sistema linear é a seguinte: se a matriz é diagonal, os números na diagonal são os valores próprios. Se os dois valores próprios na diagonal são iguais, o ponto é um nó próprio, repulsivo se o valor próprio é positivo ou atrativo se o valor próprio é negativo; nesse caso qualquer vetor no plano de fase é vetor próprio.

Se a matriz não é diagonal, escreve-se a equação caraterística (9.11) e encontram-se os valores próprios. Em função dos valores próprios obtidos, usa-se a tabela 9.1 para classificar o ponto de equilíbrio.

Valores próprios λ	**Tipo de ponto**	**Tipo de equilíbrio**
2, reais, com sinais opostos	ponto de sela	instável
2, reais, positivos	nó repulsivo	instável
2, reais, negativos	nó atrativo	estável
2, complexos, com parte real positiva	foco repulsivo	instável
2, complexos, com parte real negativa	foco atrativo	estável
2, imaginários	centro	estável
1, real, positivo	nó impróprio	instável
1, real, negativo	nó impróprio	estável

Tabela 9.1.: Classificação dos pontos de equilíbrio dos sistemas lineares.

9.3.5. Sistemas conservativos lineares

Nos sistemas lineares e conservativos, a condição (7.14) de que a divergência é nula implica, a partir das equações (9.2),

$$A_{11} + A_{22} = 0 \tag{9.14}$$

ou seja, o traço da matriz do sistema, $\text{tr}(\hat{A})$, é nulo e, de acordo com o gráfico 9.8, o ponto de equilíbrio na origem pode ser unicamente um centro, se for estável, ou um ponto de sela, se for instável. Os sistemas lineares conservativos nunca têm nós nem focos.

9.4. Osciladores lineares

Nos sistemas mecânicos com um único grau de liberdade s, a equação de movimento conduz a um sistema dinâmico linear quando é uma combinação linear de s e v:

$$a_{\text{t}} = C_1\, s + C_2\, v \tag{9.15}$$

onde C_1 e C_2 são constantes. O termo $C_1\, x$ é a componente conservativa da força tangencial, dividida pela massa m e o termo $C_2\, v$ é a componente não conservativa da força tangencial, dividida por m.

Exemplo 9.3
Um **oscilador invertido** é um sistema com equação de movimento $\ddot{s} = C\, s$, onde C é uma constante positiva. Analise a estabilidade do sistema e represente o retrato de fase em unidades em que $C = 1$.

Resolução. As variáveis de estado são s e v e a forma matricial das equações de evolução (equação (9.5)) são:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

O traço da matriz é nulo, e o determinante é igual a $-C$, que é negativo. Assim sendo, a equação caraterística é $\lambda^2 - C = 0$ e os valores próprios são $\sqrt{C}$ e $-\sqrt{C}$. De acordo com a tabela 9.1, o ponto de equilíbrio na origem é um ponto de sela (instável).

O retrato de fase, no caso $C = 1$, constrói-se com o comando:

```
(%i11) plotdf ([v, s], [s, v])$
```

a figura 9.10 mostra o gráfico obtido, após desenhar manualmente algumas trajetórias.

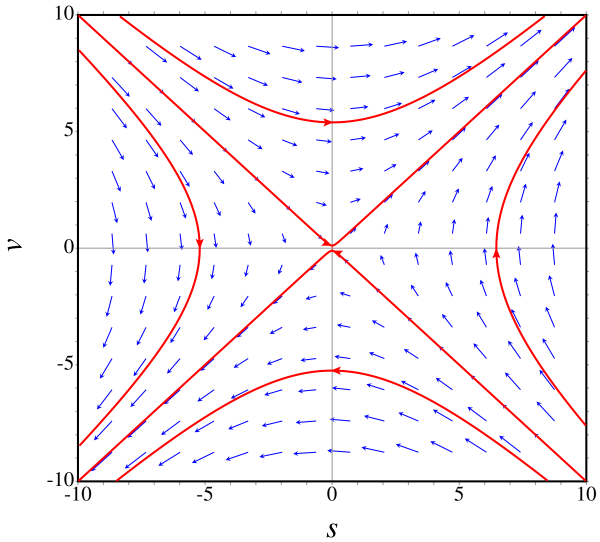


Figura 9.10.: Retrato de fase do oscilador invertido.

Exemplo 9.4
Analise a estabilidade e as curvas de evolução de um oscilador harmónico simples.

Resolução. O oscilador harmónico simples foi estudado na secção 6.4, onde se mostra que a equação de movimento é (equação (6.31)):

$$\ddot{s} = -C\,s \tag{9.17}$$

onde C é uma constante positiva.

Assim sendo, a forma matricial do sistema é:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \tag{9.18}$$

O traço da matriz é zero e o determinante é C, que é positivo. Consequentemente, os valores próprios são dois números imaginários puros:

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{C} \tag{9.19}$$

e o ponto de equilíbrio é um centro.

Se o oscilador está inicialmente no estado de equilíbrio, $s = v = 0$, permanece em repouso; caso contrário, a curva de evolução é uma elipse (figura 9.11), que corresponde a um movimento harmónico simples com frequência angular $\Omega = \sqrt{C}$. Isto é, sempre que os valores próprios de um sistema linear de duas variáveis sejam imaginários puros, o sistema é um oscilador harmónico simples, com frequência angular Ω igual ao módulo dos valores próprios, $|\lambda|$. No caso de um corpo de massa m ligado a uma mola com constante elástica k, a constante C é k/m e a frequência angular é $\sqrt{k/m}$.

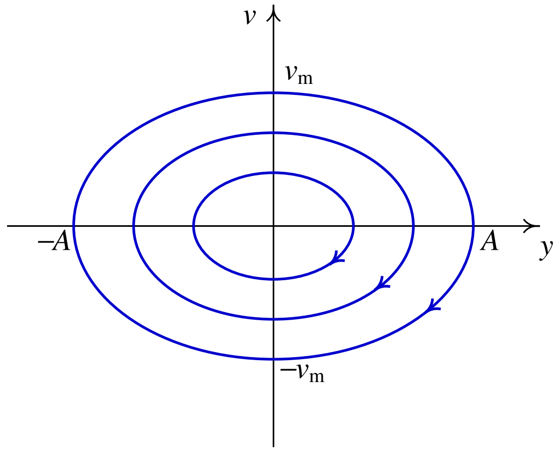


Figura 9.11.: As curvas de evolução do oscilador harmónico simples são todas ciclos.

9.4.1. Osciladores amortecidos

O oscilador harmónico simples do exemplo 9.4 é um sistema idealizado, pois na prática existem forças dissipativas. Um exemplo é o sistema de amortecimento de um automóvel (figura 9.12). Cada roda está ligada à carroçaria por meio de uma mola elástica; no interior de cada mola há um cilindro (amortecedor) com um pistão que se desloca dentro de óleo.

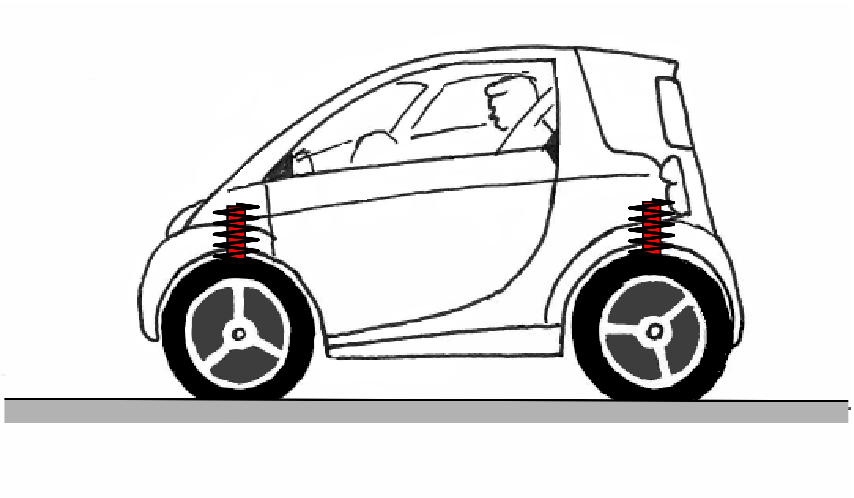


Figura 9.12.: Sistema de suspensão de um automóvel.

Se y for a altura do ponto da carroçaria onde está apoiado o amortecedor, medida desde a posição de equilíbrio $y = 0$, a força vertical resultante sobre a carroçaria é:

$$F_y = -k\,y - C\,v \tag{9.20}$$

em que k e C são constantes positivas; k é a constante elástica da mola e C depende do tamanho do pistão e do coeficiente de viscosidade do óleo dentro do amortecedor.

Essa força conduz ao seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v_y \end{bmatrix} \tag{9.21}$$

onde Ω é a frequência angular, $\sqrt{k/m}$, e α é igual a $\sqrt{C/m}$.

O traço da matriz do sistema é $-\alpha^2$, negativo, e o determinante é Ω^2, positivo. Assim sendo, os valores próprios são ou números reais negativos ou números complexos com parte real negativa. Isso implica que o sistema é sempre estável, acabando por ficar em repouso em $y = 0$ e $v_y = 0$.

No entanto, a forma como o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio dependerá do tipo de ponto. Se o amortecimento é fraco,

$$\alpha^4 < 4\Omega^2 \tag{9.22}$$

e os valores próprios são complexos; a matriz do sistema está na região dos focos estáveis na figura 9.8. A evolução de y em função do tempo é um movimento oscilatório com amplitude decrescente, como mostra a figura 9.13.

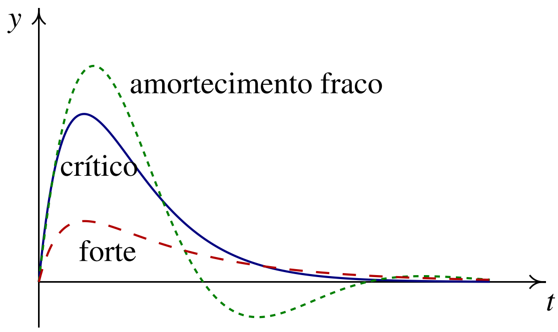


Figura 9.13.: Variação da altura y em função do tempo, para os três tipos de amortecimento.

No caso em que:

$$\alpha^4 = 4\Omega^2 \tag{9.23}$$

diz-se que há **amortecimento crítico**. Nesse caso existe um único valor próprio real. Como a matriz não é diagonal, o ponto de equilíbrio é um nó impróprio estável. A evolução de y em função de t é apresentada na figura 9.13.

Finalmente, no caso de amortecimento forte,

$$\alpha^4 > 4\Omega^2 \tag{9.24}$$

existem dois valores próprios diferentes e negativos. O ponto de equilíbrio é um nó estável e y aproxima-se mais rapidamente do ponto de equilíbrio (figura 9.13).

O sistema de suspensão deve garantir que o sistema se aproxime diretamente do equilíbrio sem passar várias vezes por esse ponto, o que tornava o automóvel muito inseguro. Como tal, o amortecimento deve ser suficientemente forte para que o ponto de equilíbrio seja um nó.

Com o uso, a sujidade e as impurezas no óleo dentro dos amortecedores do automóvel fazem com que o coeficiente de viscosidade diminua; há também perdas de óleo. Esses fatores reduzem o valor da constante α por baixo do valor crítico. Se, empurrando a carroçaria do automóvel para baixo, o automóvel oscila ligeiramente, está na altura de substituir os amortecedores.

Perguntas

1. Quantas dimensões tem o espaço de fase de um oscilador harmónico simples em três dimensões (x, y, z)?

A. 1 | C. 3 | E. 6
B. 2 | D. 4

2. Os valores próprios de um oscilador harmónico simples são $4\,\mathrm{i}$ e $-4\,\mathrm{i}$ (em unidades SI). Calcule o período de oscilação, em segundos.

A. 4π | C. $\pi/4$ | E. $\pi/2$
B. π | D. 2π

3. Se F_t é a componente tangencial da força resultante sobre uma partícula, s é aposição na trajetória e v a velocidade, qual das seguintes expressões conduz a um sistema linear?

A. $F_\mathrm{t} = 3\,s\,v$
B. $F_\mathrm{t} = 2\,v$
C. $F_\mathrm{t} = 2\,\sin(s)$
D. $F_\mathrm{t} = 2\,s\,(1-s)$
E. $F_\mathrm{t} = 3\,s^2$

4. O espaço de fase de um sistema é o plano $(x, \dot{x})$. Qual pode ser a equação diferencial associada a esse sistema?

A. $\ddot{x} = x^2 - 2\,t$ | D. $\dot{x} = x^2 - 2\,t$
B. $3x\ddot{x} + 2\dot{x} = x^2$ | E. $3t\ddot{x} + 2\dot{x} = x^2$
C. $3\dot{x} + 2x\dot{x} = x^2$

5. A matriz de um sistema linear de segunda ordem tem traço igual a 4 e determinante igual a 3. Que tipo de ponto fixo é a origem?

A. nó instável | D. foco instável
B. nó estável | E. foco estável
C. ponto de sela

Problemas

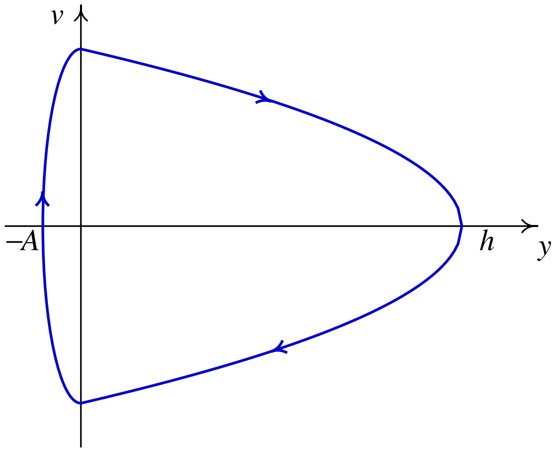
1. Em cada caso, use o Maxima para encontrar os valores e vetores próprios do sistema. Diga que tipo de ponto equilíbrio tem o cada sistema e represente os retratos de fase.

   (a) $\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = 4x + y$

   (b) $\dot{x} = -3x + \sqrt{2}y \qquad \dot{y} = \sqrt{2}x - 2y$

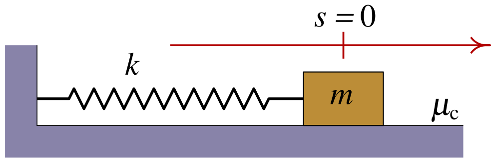
   (c) $\dot{x} = x - y \qquad \dot{y} = x + 3y$

2. A figura mostra a curva de evolução hipotética de uma bola que cai em queda livre e é disparada para cima novamente após ter batido no chão, se não existisse nenhuma força dissipativa. A parte do gráfico para valores positivos de y corresponde ao lançamento vertical de um projétil, ignorando a resistência do ar. A parte do gráfico para valores negativos de y corresponde à deformação elástica da bola quando choca com o chão; durante o tempo de contacto com o chão, admite-se que o movimento vertical da bola é um movimento harmónico simples, sem dissipação de energia.



   Sabendo que a altura máxima atingida pela bola é $h = 10$ m e que a deformação máxima quando a bola bate no chão é $A = 1$ cm, calcule: (a) A velocidade máxima da bola ao longo do seu movimento. (b) A frequência angular da deformação elástica da bola. (c) O tempo que dura o contacto entre a bola e o chão.

3. Um bloco com massa $m = 0.6$ kg que se encontra sobre uma mesa horizontal está ligado a uma mola elástica com constante $k = 50$ N/m ($s = 0$ é a posição em que a mola não está nem comprimida nem esticada). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é $\mu_c = 0.4$. (a) Trace o retrato de fase e a curva de evolução correspondente às posições iniciais $s = \pm 0.07$ m e $s = \pm 0.09$ m (em ambos casos, use velocidade inicial $v = 0.001$ m/s). (b) Com base no retrato de fase na alínea anterior, diga quais são os pontos de equilíbrio do sistema.



4. Um cilindro de massa m está pendurado, na vertical, de uma mola com constante elástica k, tal como na figura 6.2; se y é a altura do centro de massa do cilindro, na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, despreze a resistência do ar e: (a) Encontre a equação de movimento, a partir da equação de Lagrange, ou se preferir, a partir da segunda lei de Newton. (b) Encontre o valor de y no ponto de equilíbrio. (c) Mostre que o sistema pode escrever-se como sistema linear, com uma mudança de variável de y para uma nova variável z e que a equação de movimento em função de z é a equação de um oscilador harmónico simples com frequência angular $\sqrt{k/m}$.

5. As quatro molas da suspensão nas quatro rodas de um automóvel têm todas uma constante elástica $k = 15$ kN/m. (a) Calcule a altura que o carro desce em cada roda, quando entram no automóvel 4 passageiros, todos com massa $m = 70$ kg, admitindo que o peso se distribui por igual nas quatro rodas. (b) Se a massa total do automóvel, incluindo os quatro passageiros, é $m = 1350$ kg, calcule o valor crítico da constante de atrito C em cada amortecedor (admita que o peso distribui-se por igual nas quatro rodas e, portanto, a massa equivalente em cada mola é a quarta parte da massa total). (c) Calcule os valores próprios, λ, no caso em que a constante C for o dobro do valor crítico (consulte o problema 4).

6. A equação de movimento $a_{\text{t}} = C_1\, s + C_2\, v$, com $C_1 > 0$, descreve um oscilador invertido, com dissipação de energia (se C_2 é negativa) ou com aumento da energia (se C_2 é positiva). Mostre que a condição $C_1 > 0$ é suficiente para garantir que existem dois valores próprios reais diferentes, um positivo e o outro negativo, independentemente do valor de C_2. Assim sendo, o ponto de equilíbrio sempre é um ponto de sela.

7. Considere o oscilador harmónico amortecido com equação de movimento:

$$2\,\ddot{s} + A\,\dot{s} + 3\,s = 0$$

onde A é a constante de amortecimento. Trace a curva de evolução e os gráficos de $s(t)$ e $\dot{s}(t)$, com condições iniciais $s(0) = 4$, $\dot{s}(0) = -1$, para valores do parâmetro A compreendidos entre 0 e 7 (deve usar a opção **sliders** do `plotdf`). Analise o comportamento dos gráficos para os diferentes valores de A identificando os três casos: amortecimento fraco, amortecimento crítico e amortecimento forte.

Respostas

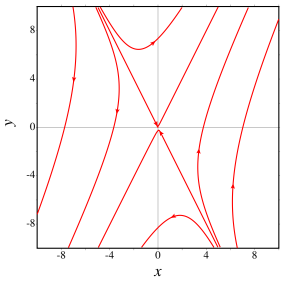
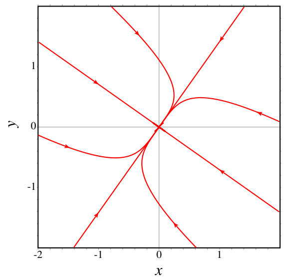
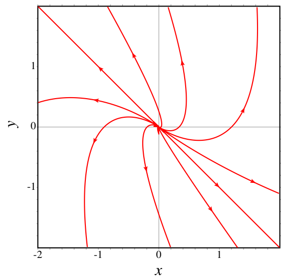
Perguntas: **1.** E. **2.** E. **3.** B. **4.** B. **5.** A.

Problemas

1. (a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$
$\vec{v}_1 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$
$\vec{v}_2 = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y$
Ponto de sela.

(b) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$
$\vec{v}_1 = \vec{e}_x - (\sqrt{2}/2)\vec{e}_y$
$\vec{v}_2 = \vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y$
Nó estável.

(c) $\lambda = 2$
$\vec{v} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$
Nó impróprio instável.

2. (a) 14 m/s (b) 1400 s^{-1} (c) 2.24 ms.

3. (b) O único ponto de equilíbrio é na origem; no entanto, em todos os pontos, diferentes da origem, no intervalo $-0.024 < s < 0.024$ o sistema desloca-se em pequenos "saltos" até à origem. Essa situação peculiar é devida a erro numérico; com intervalos de tempo suficientemente pequenos o bloco aproxima-se continuamente da origem. Na prática, existe também atrito estático, que faz com que todos os pontos no intervalo $-0.024 < s < 0.024$ sejam, de faco, pontos de equilíbrio.

4. (a) $\ddot{y} = -\dfrac{k}{m} y - g$ (b) $y_e = -\dfrac{m\,g}{k}$ (c) A mudança de variável é $z = y + \dfrac{m\,g}{k}$ e a nova equação de movimento é $\ddot{z} = -\dfrac{k}{m} z$ (a gravidade não interessa) e: $\Omega = |\lambda| = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

5. (a) 4.57 cm. (b) 4500 kg/s. (c) $\lambda_1 = -24.88\ s^{-1}$ e $\lambda_2 = -1.786\ s^{-1}$

6. Os dois valores próprios são $\lambda_1 = (C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4C_1})/2$ e $\lambda_2 = (C_2 - \sqrt{C_2^2 + 4C_1})/2$. Como $C_2^2 + 4C_1$ é sempre maior que zero, os dois valores são sempre reais. Como $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{C_2^2 + 4C_1}$ é diferente de zero, os dois valores próprios são diferentes. O produto dos dois valores próprios é $\lambda_1 \lambda_2 = -C_1$ que, por ser negativo, implica que os dois valores têm sempre sinais opostos.

7.
```
plotdf([v,-1.5*s-A*v/2],[s,v],[parameters,"A=0"],[sliders,"A=0:7"],
          [s,-5,5],[v,-5,5],[trajectory_at,4,-1],[direction,forward]);
```

10. Sistemas não lineares

Um **segway** é um veículo com um único eixo e duas rodas. Juntamente com o monociclo, são dois exemplos de pêndulos invertidos. O pêndulo invertido é um sistema instável; uma inclinação fora da vertical conduz a um binário que faz aumentar a inclinação. Para conseguir manter a posição de equilíbrio, o *segway* precisa de um sistema de controlo automático do motor, de forma a exercer forças de tração no sentido que for necessário para restabelecer a posição vertical. Quando o veículo está parado, a ação do motor desencadeia a força de atrito com o chão, com o módulo e sentido que evite que o veículo se incline. Quando o veículo entra em movimento, a ação do motor desencadeia a força de atrito necessária para contrariar o binário produzido pelo peso do condutor. No caso do monociclo, a ação dos pedais desencadeia a força de atrito necessária para manter o equilíbrio.

10.1. Aproximação linear

Nos sistemas dinâmicos com duas variáveis de estado:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad\qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{10.1}$$

cada uma das funções f_1 e f_2 podem ser escritas na forma de uma série de Taylor, na vizinhança de um ponto qualquer $(a,\, b)$ do espaço de fase:

$$f_i(x_1, x_2) = f_i(a, b) + (x_1 - a)\, \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\bigg|_{(a,b)} + (x_2 - b)\, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\bigg|_{(a,b)} + \ldots \qquad (i = 1, 2) \tag{10.2}$$

Se o ponto $(a,\, b)$ é um ponto de equilíbrio, então $f_1(a, b) = 0 = f_2(a, b)$ e, portanto, o primeiro termo das duas séries é nulo. Mudando a origem de coordenadas para o ponto de equilíbrio $(a,\, b)$, isto é, num novo sistema de coordenadas: $x = x_1 - a$, $y = x_2 - b$, as funções são, aproximadamente,

$$f_i(x, y) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\bigg|_{(a,b)} x + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\bigg|_{(a,b)} y \qquad\qquad (i = 1, 2) \tag{10.3}$$

Os índices $(a,\, b)$ indicam que x_1 e x_2 devem ser substituídas por a e b após as derivadas parciais terem sido calculadas. Substituindo essas aproximações no sistema (10.1), obtém-se um sistema linear (repare-se que $\dot{x} = \dot{x}_1$, porque a é uma constante, e $\dot{y} = \dot{x}_2$, porque b também é constante.)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(a,b)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

esta aproximação linear é válida apenas numa vizinhança da origem $(x = 0,\, y = 0)$, ou seja, quando x_1 e x_2 estejam próximas de a e b.

A matriz quadrada na equação (10.4) chama-se **matriz jacobiana**, e representa-se por $J_{(f_1, f_2)}(x_1, x_2)$. Substituindo as coordenadas $(a,\, b)$ do ponto de equilíbrio na matriz jacobiana, obtém-se uma matriz constante. Por cada ponto de equilíbrio existe uma matriz de coeficientes constantes, que define o sistema linear que aproxima bem o sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio. Os valores e vetores próprios de cada uma dessas matrizes permitem analisar a estabilidade do sistema, na vizinhança de cada ponto de equilíbrio, da mesma forma que é feito para os sistemas lineares.

Exemplo 10.1
Classifique os pontos de equilíbrio e represente o retrato de fase do sistema:

$$\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \qquad\qquad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1$$

Resolução. Já foi demonstrado no exemplo 7.2 do capítulo 7, que este sistema tem quatro pontos de equilíbrio. As funções f_1 e f_2 e os pontos de equilíbrio são armazenados em duas listas assim:

```
(%i1) f: [4-x1^2-4*x2^2, x2^2-x1^2+1]$
(%i2) equilibrio: solve(f)$
```

Convém também definir outra lista com os nomes das variáveis de estado:

```
(%i3) v: [x1, x2]$
```

A matriz jacobiana, com duas linhas e duas colunas, obtem-se com o comando `jacobian` do Maxima, que precisa de duas listas: uma lista com as funções e outra lista com os nomes das variáveis

```
(%i4) J: jacobian(f,v);
                           [ - 2 x1   - 8 x2 ]
(%o4)                      [                 ]
                           [ - 2 x1    2 x2  ]
```

Substituindo as coordenadas de cada ponto fixo, obtêm-se as matrizes dos sistemas lineares que aproximam o sistema na vizinhança do respetivo ponto de equilíbrio. Por exemplo, no primeiro ponto de equilíbrio,

```
(%i5) subst (equilibrio[1], J);
                        [   5/2                 ]
                        [  2          8 sqrt(3)  ]
                        [ -------    ---------  ]
                        [ sqrt(5)     sqrt(5)   ]
(%o5)                   [                       ]
                        [   5/2                 ]
                        [  2           2 sqrt(3) ]
                        [ -------   - --------- ]
                        [ sqrt(5)      sqrt(5)  ]
```

Para estudar a estabilidade do sistema na vizinhança desse ponto de equilíbrio, calculam-se os valores próprios dessa matriz.

```
(%i6) eigenvectors(%)$
(%i7) float (%);
(%o7) [[[- 3.963484674287924, 4.944113463939662], [1.0, 1.0]],
        [[[1.0, - 1.047852879483257]], [[1.0, 0.389604589019394]]]]
```

O resultado mostra 4 listas; a primeira lista são os valores próprios, a segunda lista são as multiplicidades de cada valor próprio, e as últimas duas listas são os vetores próprios.

Nesse ponto de equilíbrio os valores próprios são reais, com sinais opostos; conclui-se que é um ponto de sela. O quarto ponto de equilíbrio também é ponto de sela:

```
(%i8) subst (equilibrio[4], J);
                       [     5/2                 ]
                       [    2          8 sqrt(3) ]
                       [ - -------   - --------- ]
                       [   sqrt(5)      sqrt(5)  ]
(%o8)                  [                         ]
                       [     5/2                 ]
                       [    2          2 sqrt(3) ]
                       [ - -------     --------- ]
                       [   sqrt(5)      sqrt(5)  ]
```

```
(%i9) eigenvectors(%)$
(%i10) float (%);
(%o10) [[[- 4.944113463939662, 3.963484674287924], [1.0, 1.0]],
        [[[1.0, 0.389604589019394]], [[1.0, - 1.047852879483257]]]]
```

No segundo ponto de equilíbrio:

```
(%i11) subst (equilibrio[2], J);
                          [      5/2               ]
                          [     2         8 sqrt(3) ]
                          [ - -------    --------- ]
                          [    sqrt(5)     sqrt(5)  ]
(%o11)                    [                        ]
                          [      5/2               ]
                          [     2          2 sqrt(3) ]
                          [ - -------  - --------- ]
                          [    sqrt(5)      sqrt(5) ]
(%i12) eigenvectors(%)$
(%i13) float (%);
(%o13) [[[- 0.2 (19.64454513856129 %i + 10.19753866654418),
 0.2 (19.64454513856129 %i - 10.19753866654418)], [1.0, 1.0]],
[[[1.0, - .04166666666666666 (15.21659923309355 %i
 - 1.898979485566357)]], [[1.0, .04166666666666666
 (15.21659923309355 %i + 1.898979485566357)]]]]
```

Como os valores próprios são complexos, com parte real negativa, o ponto de equilíbrio é um foco atrativo (estável). Cálculos semelhantes para o terceiro ponto de equilíbrio mostram que também é um foco, mas repulsivo (instável), porque os valores próprios são complexos, com parte real positiva. O retrato de fase aparece na figura 10.1, que foi obtida com o comando:

```
(%i14) plotdf(f, v, [x1,-3,3], [x2,-3,3])$
```

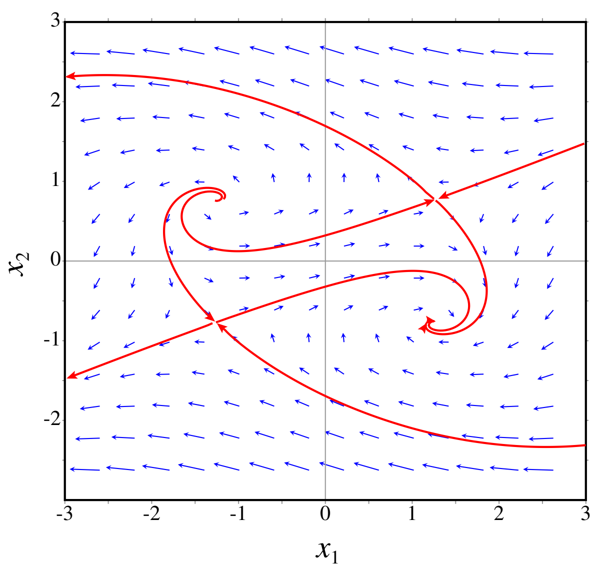


Figura 10.1.: Retrato de fase do sistema $\dot{x_1} = 4 - x_1^2 - 4x_2^2$, $\dot{x_2} = x_2^2 - x_1^2 + 1$.

Existe um único ponto de equilíbrio estável, em $(x_1, x_2) = (1.26, -0.77)$. Os outros 3 pontos de equilíbrio são instáveis. Na figura 10.1, as duas curvas de evolução que foram desenhadas a sair do foco repulsivo em $(x_1, x_2) = (-1.26, 0.77)$, e a continuação dessas curvas passando pelos pontos de sela, delimitam uma região de estabilidade, em que se o estado inicial do sistema estiver nessa região, o estado final aproximar-se-á do ponto de equilíbrio estável.

10.2. O pêndulo

O tipo de pêndulo estudado nesta secção é formado por um objeto ligado a uma barra rígida atravessada por um eixo horizontal fixo (figura 10.2). Esse tipo de pêndulo pode rodar num plano vertical dando voltas completas. O sistema tem um único grau de liberdade, θ, que é o ângulo que a barra faz com a vertical; admite-se que $\theta = 0$ corresponde à posição em que o pêndulo está na posição mais baixa e $\theta = \pi$ corresponde à posição mais alta. A velocidade angular é $\dot{\theta}$ e a velocidade do centro de massa é $r\,\dot{\theta}$ onde r é a distância desde o centro de massa até o eixo.
A energia cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 \qquad (10.5)$$

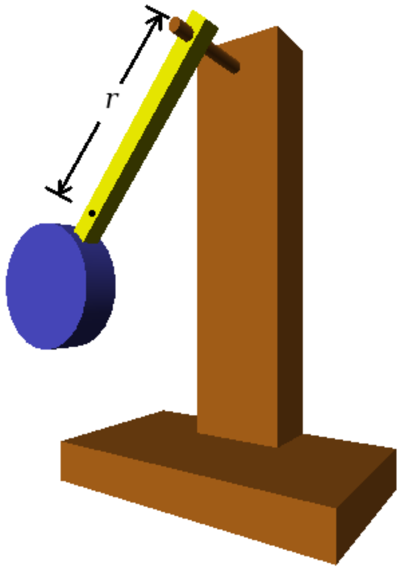


Figura 10.2.: Pêndulo.

Onde m é a massa total e I_{cm} o momento de inércia em relação ao centro de massa. De acordo com o teorema dos eixos paralelos (5.23), $m r^2 + I_{cm}$ é o momento de inércia I_e em relação ao eixo do pêndulo, que pode ser escrito $I_e = m r_g^2$, onde r_g é o raio de giração em relação ao eixo. Como tal, a energia cinética é

$$E_c = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot{\theta}^2 \qquad (10.6)$$

A energia potencial gravítica é (escolhendo energia nula para $\theta = \pi/2$)

$$U = -m g r \cos\theta \qquad (10.7)$$

Ignorando a resistência do ar, a equação de Lagrange conduz à equação de movimento:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta \qquad (10.8)$$

onde $l = r_g^2/r$ tem unidades de comprimento. No caso particular de um **pêndulo simples**, em que a massa da barra é desprezável e o objeto é pequeno, l é a distância desde o objeto até o eixo (ver exemplo 8.5).

As equações de evolução obtêm-se definindo ω igual à velocidade angular:

$$\dot{\theta} = \omega \tag{10.9}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{10.10}$$

Estas equações não lineares não podem ser resolvidas analiticamente, mas podem ser resolvidas por aproximação numérica. O comando `rk` do Maxima pode ser usado para obter a solução usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem; é necessário dar 4 argumentos ao comando: uma lista de expressões para as componentes da velocidade de fase, uma lista com os nomes das variáveis de estado, uma lista com valores iniciais para essas variáveis e um intervalo de valores para a variável independente, incluindo o nome dessa variável, valor inicial, valor final e valor dos incrementos nesse intervalo. O comando `rk` produz uma lista de pontos que aproximam a solução; cada ponto terá as coordenadas da variável independente, seguida pelas variáveis de estado.

Por exemplo, para um pêndulo com l igual a 50 cm, que é largado do repouso com ângulo inicial de 30°, a solução aproximada é obtida com (q e w representam θ e ω):

```
(%i15) s: rk([w,-(9.8/0.5)*sin(q)],[q,w],[%pi/6,0],[t,0,5,0.01])$
```

Os gráficos de θ e ω em função do tempo (figura 10.3) e a curva de evolução no espaço de fase $\theta\omega$ obtêm-se com os comandos:

```
(%i16) plot2d ([[discrete,makelist([p[1],p[2]],p,s)],
           [discrete,makelist([p[1],p[3]],p,s)]],
           [legend, "ângulo","vel. angular"], [xlabel,"t"])$

(%i17) plot2d ([discrete,makelist([p[2],p[3]],p,s)],
           [xlabel,"ângulo"],[ylabel,"vel. angular"])$
```

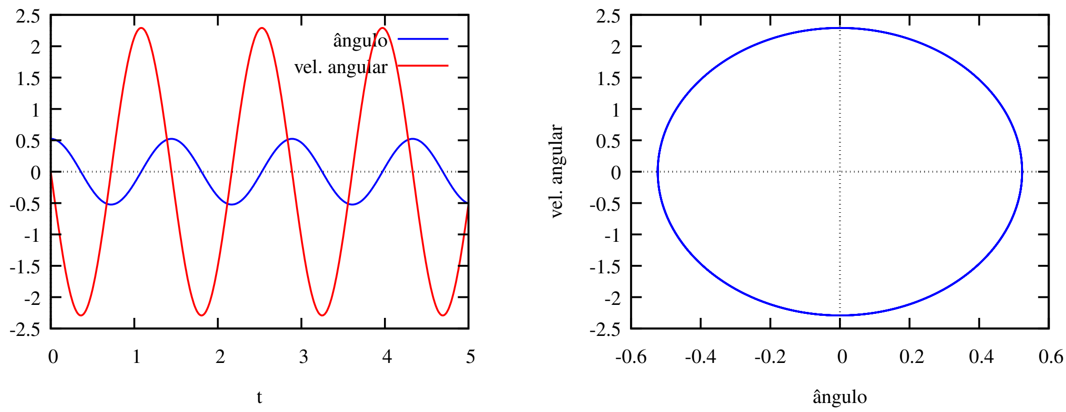


Figura 10.3.: Oscilações de um pêndulo de 50 cm com amplitude de 30°.

A lista de dados numéricos obtida permite concluir que o período de oscilação está entre 1.44 s e 1.45 s. Os gráficos na figura 10.3 são muito parecidos com os gráficos de um oscilador harmónico simples. Se o ângulo inicial for maior, essa semelhança começa a desaparecer. Por exemplo, a figura 10.4 mostra os resultados obtidos com ângulo inicial de 120°.

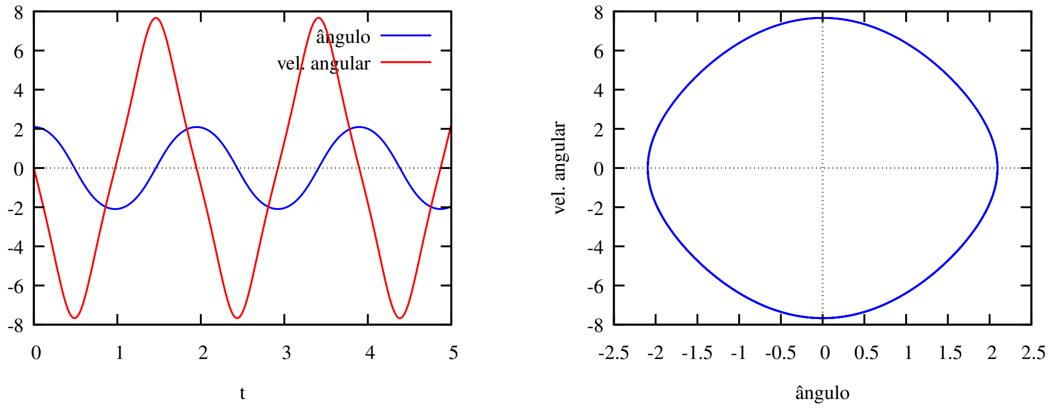


Figura 10.4.: Oscilações de um pêndulo de 50 cm com amplitude de 120°.

Neste caso conclui-se a partir dos dados numéricos que o período de oscilação aumento, em relação à amplitude de 30° e está entre 1.94 s e 1.95 s. Nos dois casos apresentados nas figuras 10.3 e 10.4, a curva de evolução é um ciclo, indicando que existe um ponto de equilíbrio estável na região interna do ciclo.

Os pontos de equilíbrio do pêndulo, onde os lados direitos das equações (10.9) e (10.10) são nulos, encontram-se em $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ e $\omega = 0$.

Os pontos em $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, são realmente o mesmo ponto físico, na posição mais baixa do pêndulo, correspondentes à passagem do pêndulo por essa posição, após um número qualquer de voltas. Os pontos em $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ são também o mesmo ponto físico, na posição mais alta do pêndulo.

10.3. Aproximação linear do pêndulo

A matriz jacobiana correspondente às equações (10.9) e (10.10) do pêndulo é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

No ponto de equilíbrio em $\theta = 0$ (em geral, 0, $\pm 2\,\pi$, $\pm 4\,\pi$,...), a matriz é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

que é a matriz de um oscilador harmónico simples, analisada no exemplo 9.4 do capítulo 9. Os dois valores próprios são $\pm\mathrm{i}\sqrt{g/l}$, o ponto de equilíbrio $\theta = \omega = 0$ é um centro e se o estado inicial do sistema está próximo desse ponto, o pêndulo oscila com frequência angular $\Omega = \sqrt{g/l}$. No caso do pêndulo de 50 cm considerado na secção anterior, essa expressão conduz ao período 1.42 s. Lembre-se que esse valor é apenas uma aproximação, que é melhor quanto menor for a amplitude; os valores do período calculados numericamente na secção anterior são mais realistas.

Na vizinhança do ponto de equilíbrio $\theta = \pi$ (em geral, $\pm\pi$, $\pm 3\,\pi$,...), a matriz jacobiana é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

que é a matriz de um oscilador invertido, analisada no exemplo 9.3 do capítulo 9. Os dois valores próprios são $\pm\sqrt{g/l}$ e o ponto de equilíbrio é ponto de sela (equilíbrio instável).

O retrato de fase no intervalo $-10 < \theta < 10$, mostrará 3 centros (-2π, 0 e 2π) e 4 pontos de sela (-3π, $-\pi$, π e 3π). No caso $l = 50$ cm considerado na secção anterior, usa-se o comando:

```
(%i18) plotdf([w,-(9.8/0.5)*sin(q)],[q,w],[q,-10,10],[w,-20,20])$
```

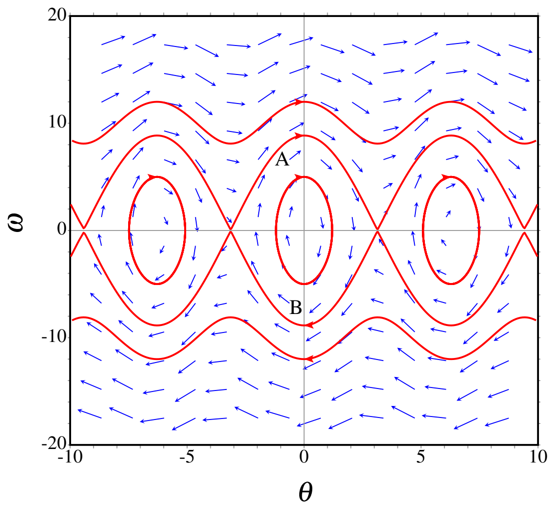


Figura 10.5.: Retrato de fase de um pêndulo de 50 cm.

A figura 10.5 mostra o retrato de fase do pêndulo. No eixo horizontal está representado o ângulo θ e no eixo vertical a velocidade angular ω. As duas curvas identificadas com as letras A e B na figura 10.5, formam parte de uma **órbita heteroclínica**.

As órbitas heteroclínicas do pêndulo correspondem ao caso em que a energia mecânica do pêndulo é exatamente igual à energia potencial gravítica no ponto de altura máxima. Usando como referência $U = 0$ quando a barra do pêndulo está na horizontal ($\theta = \pi/2$), a energia potencial no ponto mais alto é $U = m\,g\,l$.

Essas órbitas heteroclínicas também são **separatrizes**, porque delimitam a região onde existe movimento oscilatório: região sombreada na figura 10.6. Se o estado inicial está dentro dessa região, o pêndulo oscila; caso contrário, o pêndulo descreve movimento circular não uniforme.

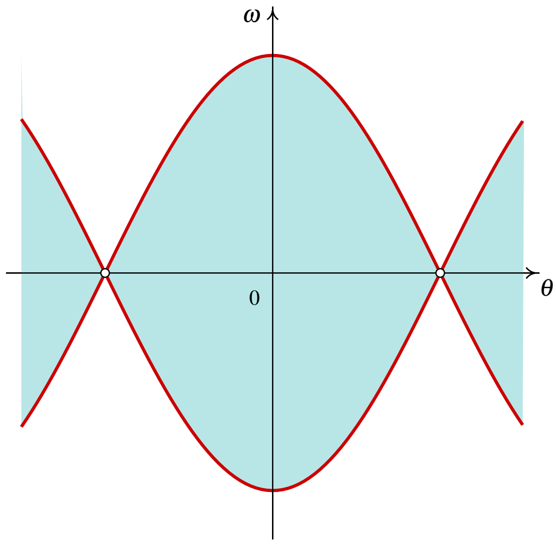


Figura 10.6.: As órbitas heteroclínicas delimitam a região de movimento oscilatório.

As figuras 10.3 e 10.4 mostram que com amplitude 30° a aproximação linear é bastante boa, pois a curva de evolução é muito parecida à do oscilador harmónico simples e o período é próximo do período obtido com a aproximação linear, mas com amplitude de 120°, a aproximação linear já não é muito boa.

10.4. Espaços de fase com várias dimensões

Nos sistemas mecânicos autónomos, por cada grau de liberdade há uma equação de movimento, que implica duas variáveis de estado. Assim sendo, a dimensão do espaço de fase é o dobro do número de graus de liberdade. Se um sistema não é autónomo é necessário acrescentar mais uma dimensão ao espaço de fase, como se mostra na seguinte secção. Existem então sistemas mecânicos com espaços de fase de dimensão 2, 3, 4, 5, ...

Nos casos em que o espaço de fase tem mais do que duas dimensões o programa `plotdf` não pode ser utilizado para esboçar o retrato de fase. É necessário resolver as equações de evolução para alguns valores iniciais específicos e construir gráficos mostrando apenas algumas das variáveis de estado.

10.4.1. Sistemas de equações não autónomas

A forma geral de um sistema com n equações diferenciais não autónomas é:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\\
\dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)
\end{aligned}$$

Para distinguir os diferentes estados do sistema são necessários os valores das n variáveis x_i e o valor do tempo; o seja, cada estado é um ponto com $n+1$ coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ e o espaço de fase tem $n+1$ dimensões. A velocidade de fase é a derivada das coordenadas do estado: $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, \dot{t})$. As expressões para as primeiras n componentes são dadas pelo sistema de n equações diferenciais acima, e a última componente $\dot{t}$ é sempre igual a 1 (derivada de t em ordem a t). Como tal, o sistema de n equações não autónomas considera-se um sistema dinâmico com $n+1$ variáveis de estado.

Esse tipo de sistemas de equações podem ser resolvidos também com o comando `rk`, sem ser necessário indicar t como variável de estado, nem a última componente da velocidade de fase, $\dot{x}$; o valor inicial de t dá-se no intervalo de integração e não na lista de valores iniciais das variáveis de estado. No entanto, há que ter em conta que se a velocidade de fase depende da variável independente t, essa variável é também variável de estado.

Exemplo 10.2
A equação diferencial:

$$t^2\,\ddot{x} + t\,\dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right) x = 0$$

é uma equação de Bessel. Escreva a equação como sistema dinâmico e identifique o espaço de fase.

Resolução. Define-se uma variável auxiliar y igual a $\dot{x}$:

$$\dot{x} = y \tag{10.14}$$

assim sendo, a segunda derivada $\ddot{y}$ é igual à primeira derivada de y e a equação de Bessel é:

$$t^2\,\dot{y} + t\,y + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right) x = 0$$

resolvendo para $\dot{y}$, obtém-se:

$$\dot{y} = \left(\frac{1}{9t^2} - 1\right) x - \frac{y}{t} \tag{10.15}$$

Como esta equação não é autónoma, é necessário considerar a variável independente t como mais uma variável de estado, com a equação de evolução trivial:

$$\dot{t} = 1 \tag{10.16}$$

O espaço tem três dimensões e cada estado tem coordenadas (t, x, y). O sistema dinâmico é definido pelas 3 equações de evolução (10.14), (10.15) e (10.16).

10.4.2. Lançamento de projéteis

No caso do lançamento de um projétil com velocidade oblíqua, sobre o corpo atuam três forças externas: o peso, $m_\text{p}\, g$, a resistência do ar, F_r e a impulsão $m_\text{a}\, g$, onde m_p é a massa do projétil e m_a a massa do ar que ocupava o mesmo volume do projétil. O problema é semelhante ao problema da queda livre, estudado na secção 4.3.3 do capítulo 4, mas a força de resistência do ar deixa de ser vertical (ver figura 10.7). O peso e a impulsão são verticais, em sentidos opostos, podendo ser combinados numa única força vertical (peso eficaz) de módulo $(m_\text{p} - m_\text{a})\, g$.

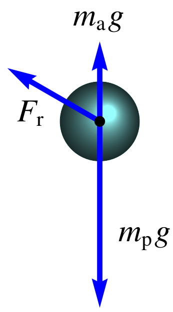


Figura 10.7.: Projétil no ar.

Admite-se que a massa volúmica do projétil é muito maior que a massa volúmica do ar e, portanto, o peso eficaz aponta para baixo e $m_\text{p} - m_\text{a}$ é quase igual a m_p. De qualquer modo, a massa do projétil costuma medir-se medindo o seu peso eficaz no ar, assim que o valor medido (m) da massa do projétil é realmente $m_\text{p} - m_\text{a}$ e o peso eficaz é $m\, g$.

A força de resistência do ar muda constantemente de sentido, porque é sempre tangente à trajetória e no sentido oposto à velocidade. Como foi explicado no capítulo 4, no caso do ar o número de Reynolds costuma ser elevado e admite-se que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade. Se o projétil é uma esfera de raio R, a expressão do módulo de F_r é dada pela equação (4.16) e a força é:

$$\vec{F}_\text{r} = -\frac{\pi}{4}\rho\, R^2\, v^2\, \vec{e}_\text{t} \tag{10.17}$$

onde ρ é a massa volúmica do ar e $\vec{e}_\text{t}$ é o vetor tangencial que aponta na direção e sentido do vetor velocidade:

$$\vec{e}_\text{t} = \frac{\vec{v}}{v} \tag{10.18}$$

Escolhendo um sistema de eixos em que a gravidade aponta no sentido negativo do eixo dos y e a velocidade inicial $\vec{v}_0$ com que é lançado o projétil está no plano xy, o peso e a força de resistência do ar estão sempre no plano xy e o movimento do projétil dá-se nesse plano. Assim sendo, o vetor velocidade é $(v_x\, \vec{e}_x + v_y\, \vec{e}_y)$ e a força de resistência do ar é:

$$\vec{F}_\text{r} = -\frac{\pi}{4}\rho\, R^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, (v_x\, \vec{e}_x + v_y\, \vec{e}_y) \tag{10.19}$$

O vetor do peso é $-m\,g\,\vec{e}_y$. Aplicando a segunda lei de Newton, obtêm-se as componentes da aceleração:

$$a_x = -\frac{\pi\,\rho\,R^2}{4\,m}\,v_x\,\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{10.20}$$

$$a_y = -g - \frac{\pi\,\rho\,R^2}{4\,m}\,v_y\,\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{10.21}$$

Estas equações devem ser resolvidas em simultâneo porque as duas componentes v_x e v_y aparecem nas duas equações. É impossível encontrar a solução exata do problema, mas pode obter-se uma aproximação numérica.

A seguir vão-se comparar as trajetórias de duas esferas diferentes, lançadas com a mesma velocidade inicial para compará-las com a trajetória parabólica que teriam se pudessem ser lançadas no vácuo, sem resistência do ar. Considere-se o caso em que a velocidade inicial é 12 m/s, fazendo um ângulo de 45° com o plano horizontal; as componentes da velocidade inicial são,

```
(%i19) [vx0, vy0]: float (12*[cos(%pi/4),sin(%pi/4)])$
```

Começando pelo caso mais fácil, o lançamento dos projéteis no vácuo, as componentes da aceleração são $a_x = 0$ e $a_y = -9.8$. O estado do projétil é (x, y, v_x, v_y) e a velocidade de fase (v_x, v_y, a_x, a_y). Os valores iniciais da velocidade já foram calculados em (`%i19`) e arbitre-se que o projétil parte da origem com valores iniciais nulos para x e y. Para integrar as equações de movimento desde $t = 0$ até $t = 2$ s, com incrementos de 0.01 s, usa-se o comando:

```
(%i20) tr1: rk ([vx,vy,0,-9.8], [x,y,vx,vy], [0,0,vx0,vy0],
              [t,0,2,0.01])$
```

e o último ponto calculado na lista `tr1` é,

```
(%i21) last (tr1);
(%o21) [2.0, 16.97056274847712, - 2.62943725152285,
                              8.485281374238571, - 11.11471862576144]
```

As 5 componentes do ponto são o tempo, as coordenadas da posição e as componentes da velocidade. Este resultado mostra que em $t = 2$ a bola já está a cair, porque v_y é negativa e que já desceu debaixo do altura inicial, porque y é negativa.

Como se pretende obter a trajetória até a bola regressar à altura $y = 0$, é necessário extrair unicamente os pontos da lista `tr1` com terceira componente (y) positiva. Percorre-se a lista toda, comparando o terceiro elemento de cada ponto com 0, até encontrar o primeiro ponto em que o terceiro elemento é negativo. Isso consegue-se usando o comando `sublist_indices` do Maxima:

```
(%i22) first (sublist_indices (tr1, lambda([p],p[3] < 0)));
(%o22)                          175
```

O comando `lambda` usou-se para definir um operador que compara o terceiro elemento da entrada que lhe for dada com zero. O comando `sublist_indices` percorre a lista `tr1` passando cada elemento como entrada para esse operador e, nos casos em que o operador produz o resultado "true", o índice do respetivo elemento da lista é acrescentado a uma sub lista. O comando `first` seleciona apenas o primeiro elemento nessa sub lista, neste caso, o índice do primeiro ponto em que y é negativo. Como tal, só interessam os primeiros 174 pontos na lista; se o objetivo é construir o gráfico da trajetória, extraem-se as coordenadas x e y dos primeiros 174 pontos noutra lista:

```
(%i23) r1: makelist ([tr1[i][2], tr1[i][3]], i, 1, 174)$
```

A seguir vai repetir-se o mesmo procedimento para uma bola de ténis e uma bola de ténis de mesa, tendo em conta a resistência do ar. A massa volúmica do ar é aproximadamente 1.2 kg/m^3. É conveniente definir uma função que calcula a constante que aparece nas equações de movimento (10.20) e (10.21), em função do raio e a massa de cada uma das bolas; também é conveniente definir a expressão do módulo da velocidade para não ter que escrevê-la várias vezes:

```
(%i24) c(R,m) := -%pi*1.2*R^2/4/m$
(%i25) v: sqrt(vx^2+vy^2)$
```

Uma bola de ténis típica tem raio aproximado 3.25 cm e massa 62 gramas. No comando (`%i19`) é necessário substituir a aceleração da gravidade pelas duas expressões (10.20) e (10.21) da aceleração:

```
(%i26) tr2: rk ([vx, vy, c(0.0325,0.062)*vx*v,
          -9.8+c(0.0325,0.062)*vy*v], [x,y,vx,vy],
          [0,0,vx0,vy0], [t,0,2,0.01])$
```

O primeiro ponto com altura negativa é

```
(%i27) first (sublist_indices (tr2, lambda([p],p[3] < 0)));
(%o27)                            167
```

e a trajetória da bola de ténis armazena-se noutra variável:

```
(%i28) r2: makelist ([tr2[i][2],tr2[i][3]],i,1,166)$
```

Repetem-se os mesmos cálculos para uma bola de ténis de mesa típica, com raio 1.9 cm e massa 2.4 g

```
(%i29) tr3: rk ([vx, vy, c(0.019,0.0024)*vx*v,
            -9.8+c(0.019,0.0024)*vy*v], [x,y,vx,vy],
            [0,0,vx0,vy0], [t,0,2,0.01])$
(%i30) first (sublist_indices (tr3, lambda([p],p[3] < 0)));
(%o30)                            133
(%i31) r3: makelist ([tr3[i][2],tr3[i][3]],i,1,132)$
```

O gráfico das 3 trajetórias, representado na figura 10.8, obteve-se com o seguinte comando:

```
(%i32) plot2d ([[discrete, r1], [discrete, r2], [discrete, r3]],
         [xlabel, "x (m)"], [ylabel, "y (m)"], [y, 0, 12],
         [legend, "vácuo", "ténis", "ténis de mesa"])$
```

A trajetória das bolas no ar não é uma parábola, mas no fim curva-se mais e termina com uma queda mais vertical. O efeito do resistência do ar é mais visível na bola de ténis de mesa; a pesar de ser mais pequena que a bola de ténis, a força de resistência do ar produz nela maior aceleração tangencial negativa, devido à sua menor massa volúmica. Lançadas com a mesma velocidade, o alcance horizontal da bola de ténis de mesa é 6.2 m e o da

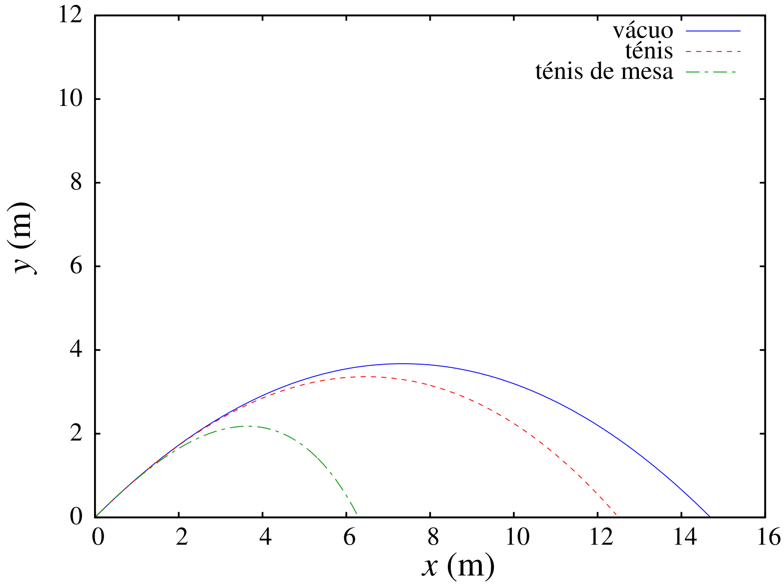


Figura 10.8.: Trajetórias de uma bola no vácuo e bolas de ténis e ténis de mesa no ar.

bola de ténis 12.4 m. O alcance horizontal hipotético das duas bolas, se a resistência do ar pudesse ser ignorada, seria 14.7 m.

10.4.3. Pêndulo de Wilberforce

O pêndulo de Wilberforce (figura 10.9) é constituído por um cilindro pendurado de uma mola vertical muito comprida. Quando uma mola é esticada ou comprimida, cada espira muda ligeiramente de tamanho; no pêndulo de Wilberforce, o número elevado de espiras na mola faz com que seja mais visível essa mudança, de forma que enquanto a mola oscila, também se enrola ou desenrola, fazendo rodar o cilindro em relação ao eixo vertical.

O sistema tem dois graus de liberdade, a altura z do centro de massa do cilindro e o ângulo de rotação do cilindro à volta do eixo vertical, θ. Se $z = 0$ e $\theta = 0$ são escolhidos na posição de equilíbrio, é possível ignorar a energia potencial gravítica que poderá ser eliminada das equações com uma mudança de variáveis (ver problema 4 di capítulo 9). A energia potencial elástica tem 3 termos, que dependem da elongação da mola z e do seu ângulo de rotação θ; as energias cinética e potencial são,

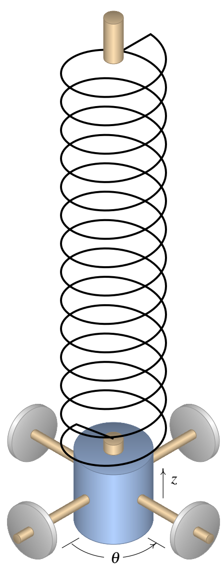


Figura 10.9.: Pêndulo de Wilberforce.

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\,\dot{\theta}^2 \qquad U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}a\,\theta^2 + b\,z\,\theta \tag{10.22}$$

em que k, a e b são constantes elásticas da mola. As equações de Lagrange, ignorando a resistência do ar e outras forças dissipativas, conduzem às seguintes equações de movimento:

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z - \frac{b}{m}\theta \qquad \ddot{\theta} = -\frac{a}{I_{\text{cm}}}\theta - \frac{b}{I_{\text{cm}}}z \tag{10.23}$$

Para resolver as equações de evolução numericamente, é preciso saber alguns valores típicos para a massa, o momento de inércia e as constantes elásticas,

```
(%i33) [m, I, k, a, b]: [0.5, 1e-4, 5, 1e-3, 0.5e-2]$
```

a solução no intervalo de tempo desde 0 até 40, com condição inicial $z = 10$ cm e as outras variáveis iguais a 0, obtém-se com o seguinte comando:

```
(%i34) sol: rk(['v,w,-(k*z+b*ang)/m,-(a*ang+b*z)/I],[z,ang,'v,w],
              [0.1,0,0,0],[t,0,40,0.01])$
```

A figura 10.10 mostra o gráfico obtido para o ângulo θ e a elongação z, multiplicada por um fator de 100 para que seja visível na mesma escala do ângulo.

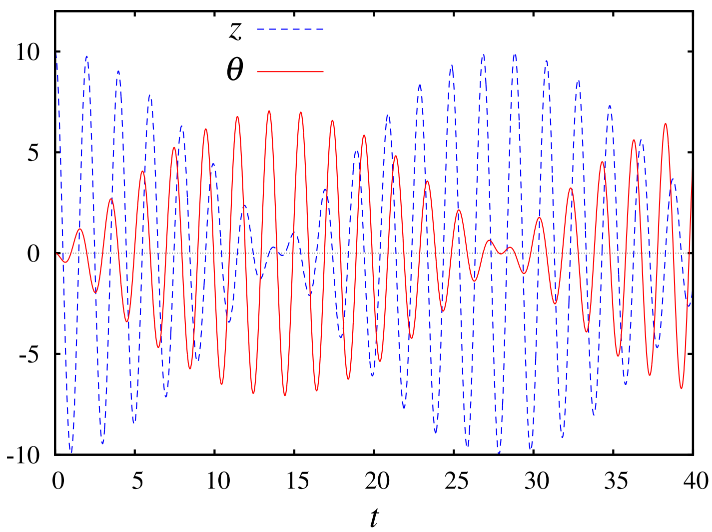


Figura 10.10.: Elongação e ângulo de rotação no pêndulo de Wilberforce.

O gráfico mostra uma caraterística interessante do pêndulo de Wilberforce: se o pêndulo é posto a oscilar, sem rodar, a amplitude das oscilações lineares decresce gradualmente, enquanto que o cilindro começa a rodar com oscilações de torção que atingem uma amplitude máxima quando o cilindro deixa de se deslocar na vertical. A amplitude das oscilações de torção começa logo a diminuir à medida que a oscilação linear cresce novamente. Essa intermitência entre deslocamento vertical e rotação repete-se indefinidamente.

A projeção do retrato de fase nas variáveis z e θ é apresentada na figura 10.11.

Neste sistema existem duas frequências angulares. A frequência angular longitudinal e a frequência angular de torção,

$$\Omega_z^2 = \frac{k}{m} \qquad \Omega_\theta^2 = \frac{a}{I_{\text{cm}}} \tag{10.24}$$

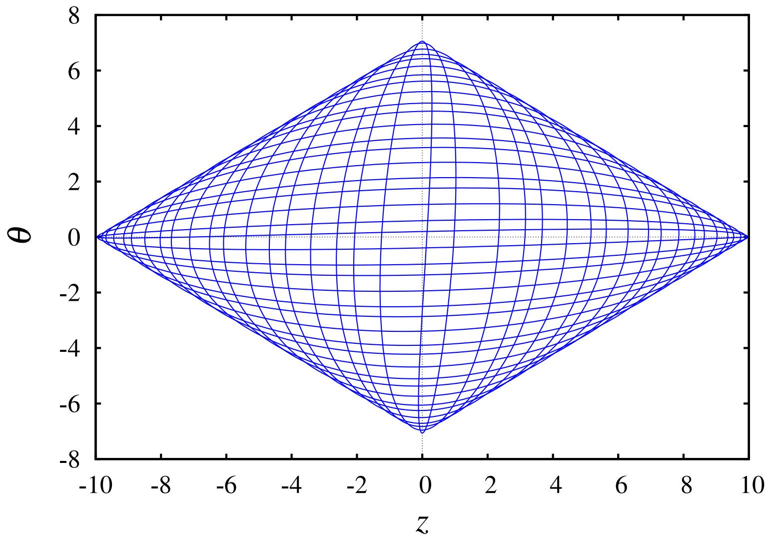


Figura 10.11.: Retrato de fase no plano formado pela elongação e o ângulo.

O cilindro num pêndulo de Wilberforce costuma ter quatro porcas que podem ser deslocadas, aumentando ou diminuindo o momento de inércia, para conseguir que as duas frequências sejam muito parecidas e o efeito de alternância entre oscilações lineares e rotacionais seja mais visível. Os valores dos parâmetros usados no exemplo acima, foram escolhidos de forma a garantir duas frequências iguais.

Perguntas

1. O valor ideal do período de um pêndulo com comprimento l é $2\pi\sqrt{l/g}$, onde g é a aceleração da gravidade. Na prática, o período só se aproxima do seu valor ideal em algumas situações. Se o ângulo θ é zero no ponto de equilíbrio estável, qual das condições seguintes garante que o período de oscilação seja aproximadamente igual ao valor ideal?

A. valor máximo da velocidade angular pequeno.

B. aceleração da gravidade pequena.

C. comprimento l pequeno.

D. valor máximo do ângulo pequeno.

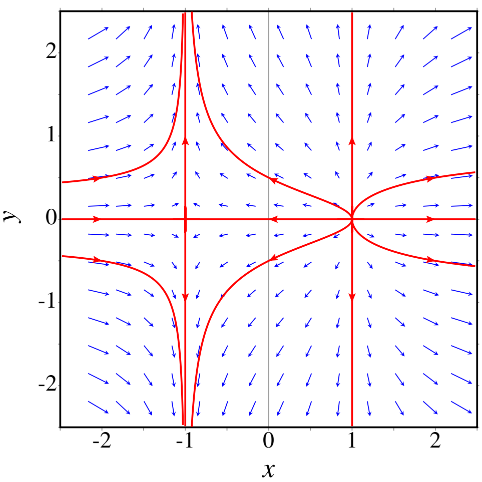
E. atrito com o ar desprezável.

2. A força tangencial numa partícula com velocidade v e posição na trajetória s é: $F_t = 4s(s - v^2)$. Quantos pontos de equilíbrio tem o sistema?

A. 1 C. 3 E. 0

B. 2 D. 4

3. No retrato de fase na figura, que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto (1,0)?



A. nó atrativo
B. foco repulsivo
C. ponto de sela
D. foco atrativo
E. nó repulsivo

4. Qual é a matriz jacobiana do sistema $\dot{x} = y^2$, $\dot{y} = xy$?

A. $\begin{bmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & xy \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$

5. As equações de evolução de um sistema dinâmico no espaço de fase (x, y), são $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = y + 1$. Qual dos seguintes vetores aponta na direção e sentido da velocidade de fase em (1, 2)?

A. $4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$
B. $2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$
C. $6\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$
D. $4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$
E. $-2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$

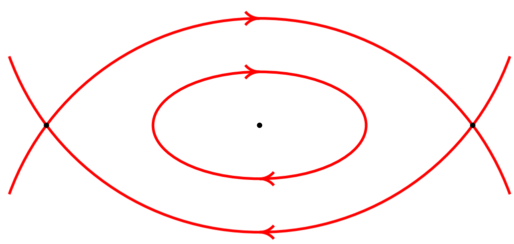
Problemas

1. Uma partícula com massa m, desloca-se ao longo do eixo dos x sob a ação de uma força resultante F_x que depende da posição x e da componente da velocidade v_x. Para cada um dos casos seguintes encontre os pontos de equilíbrio, diga que tipo de ponto equilíbrio é cada um (estável ou instável; centro, foco, nó ou ponto de sela) e desenhe o retrato de fase mostrando as órbitas mais importantes:

(a) $F_x = -mx(1 + v_x)$

(b) $F_x = -mx(x^2 + v_x - 1)$

2. O diagrama mostra o retrato de fase de um sistema com unicamente 3 pontos de equilíbrio, no caso idealizado em que não existe atrito. Faça (a mão) um esboço da energia potencial e de como seria o retrato de fase do sistema real, considerando as forças de atrito.



3. A amplitude de oscilação de um pêndulo decresce, devido à força de resistência do ar e ao atrito no eixo. Admita um pêndulo de comprimento $l = 50$ cm e massa $m = 0.150$ kg, em que o atrito no eixo é desprezável mas a resistência do ar não. A equação de movimento é a equação (8.8)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{C\,l}{m}|\dot{\theta}|\,\dot{\theta}$$

Se a massa m estiver concentrada numa esfera de raio $R = 2$ cm, a expressão para a constante C é dada pela equação (4.16): $C = \pi\rho R^2/4$, onde $\rho = 1.2$ kg/m^3 é a massa volúmica do ar. Trace os gráficos de $\theta(t)$, $\omega(t)$ e da trajetória no espaço de fase e explique o significado físico da solução, para os dois casos seguintes:

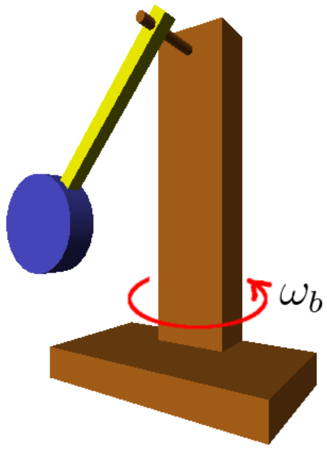
(a) O pêndulo parte do repouso com um ângulo inicial $\theta = 120°$.

(b) O pêndulo é lançado desde $\theta = 60°$, com uma velocidade angular inicial $\omega = -7.8$ s^{-1}.

4. A base do pêndulo da figura 10.2 roda no plano horizontal, com velocidade angular constante ω_b, enquanto o pêndulo oscila. (a) Demonstre que a equação de movimento é:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l}\sin\theta\left(r\,\omega_b^2\cos\theta - g\right)$$

onde r é a distância do centro de massa até o eixo e l é o raio de giração ao quadrado, sobre r.(b) Trace o gráfico de $\sin\theta\left(r\,\omega_b^2\cos\theta - g\right)$ em função de θ, entre $-\pi$ e π, para um pêndulo com $r = 0.3$ m e $\omega_b = 2$ s^{-1}. Repita o gráfico alterando o valor de ω_b para 8 s^{-1}. Com base nos dois gráficos, identifique em cada caso os pontos de equilíbrio estável e instável. (c) Demonstre que quando $\omega_b < \sqrt{g/r}$, existe um único ponto de equilíbrio estável em $\theta = 0$ e um único ponto de equilíbrio instável em $\theta = \pm\pi$. (d) Se $\omega_b > \sqrt{g/r}$, demostre que os pontos de equilíbrio em $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$ são ambos instáveis e aparecem dois pontos de equilíbrio estável em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é um ângulo entre zero e $\pi/2$.



5. Na trajetória da bola de ténis de mesa calculada na secção 10.4.2, o alcance horizontal da bola é aproximadamente o valor da coordenada x do último ponto da lista de pontos `r1`. Repita os cálculos, com diferentes valores do ângulo de lançamento, para determinar os valores do alcance com ângulos de 35°, 36°, 37°, 38°, 39° e 40°. Registe numa tabela os valores obtidos para o alcance horizontal, em função do ângulo, com precisão até os milímetros. Com base na tabela, qual é o ângulo de lançamento que produz o maior alcance horizontal? Usando o resultado do problema 12, mostre que no vácuo o ângulo que produz o alcance máximo é 45°.

6. O sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = 2xy^3 - x^4 \qquad \dot{y} = y^4 - 2x^3 y$$

tem um único ponto de equilíbrio na origem. A matriz jacobiana nesse ponto é igual a zero e, portanto, os valores próprios (nulos) não podem ser usados para caraterizar o ponto de equilíbrio. Use o seguinte método para analisar o retrato de fase do sistema: (a) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto do eixo dos x e em qualquer ponto do eixo dos y. (b) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto das duas retas $y = x$ e $y = -x$. (c) Faça a mão um gráfico mostrando os versores que encontrou nas alíneas a e b, em vários pontos nos 4 quadrantes do espaço de fase, e trace algumas curvas de evolução seguindo as direções da velocidade de fase. Com base nesse gráfico, que tipo de ponto de equilíbrio julga que é a origem? (d) Diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e no caso afirmativo quantas.

7. Uma partícula de massa m desloca-se no plano xy sob a ação de uma força conservativa com energia potencial,

$$U = \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2$$

onde k_x e k_y são duas constantes positivas. As trajetórias da partícula obtidas com diferentes valores dessas constantes chamam-se **figuras de Lissajous**.

(a) Encontre as duas equações de movimento para $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$

(b) Resolva numericamente as equações de movimento, no caso $m = 0.3$, $k_x = 2$ e $k_y = 8$ (unidades SI), entre $t = 0$ e $t = 2.43$, se a partícula partir do ponto $(1,0)$ com velocidade inicial $\vec{v} = 0.6\,\vec{e}_y$. Desenhe o gráfico da trajetória da partícula no plano xy.

(c) Repita a alínea anterior, mas admitindo que a partícula parte do ponto $(1,0)$ com velocidade inicial $\vec{v} = 0.3\,\vec{e}_x + 0.6\,\vec{e}_y$.

(d) Observe que o sistema pode ser considerado como um conjunto de dois osciladores harmónicos independentes, nas direções x e y. Calcule o período de oscilação para cada um dos dois osciladores e diga qual é a relação entre os dois períodos.

(e) Repita os cálculos da alínea c, mudando o valor de k_y para 18. Que relação encontra entre o gráfico da trajetória e k_y/k_x?

8. Qualquer corpo celeste (planeta, cometa, asteróide, sonda espacial, etc) de massa m no sistema solar tem uma energia potencial gravítica produzida pelo Sol, que é responsável pelas órbitas elípticas desses corpos. A expressão para a energia potencial é,

$$U = -\frac{G\,M\,m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde G é a constante de gravitação universal, M é a massa do Sol, e as coordenadas x e y são medidas no plano da órbita do corpo celeste, com origem no Sol. Se as distâncias forem medidas em unidades astronómicas, UA, e os tempos em anos, o produto GM será igual a $4\pi^2$.

(a) Encontre as equações de movimento do corpo celeste, em unidades de anos para o tempo e UA para as distâncias.

(b) O cometa Halley chega até uma distância mínima do Sol igual a 0.587 UA. Nesse ponto, a sua velocidade é máxima, igual a 11.50 UA/ano, e perpendicular à sua distância até o Sol. Determine numericamente a órbita do cometa Halley, a partir da posição inicial $0.587\vec{e}_x$, com velocidade inicial $11.50\vec{e}_y$, com intervalos de tempo $\Delta t = 0.05$ anos. Desenhe a órbita desde $t = 0$ até $t = 100$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(c) Repita o procedimento da alínea anterior com $\Delta t = 0.02$ anos e desenhe a órbita desde $t = 0$ até $t = 150$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(d) Diga qual é, aproximadamente, a distância máxima que o cometa Halley se afasta do Sol, e compare a órbita do cometa com as órbitas do planeta mais distante, Neptuno (órbita entre 29.77 UA e 30.44 UA) e do planeta mais próximo do Sol, Mercúrio (órbita entre 0.31 UA e 0.39 UA) (Plutão já não é considerado um planeta).

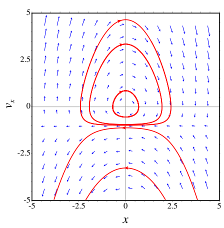
Respostas

Perguntas: 1. D. **2.** A. **3.** E. **4.** C. **5.** D.

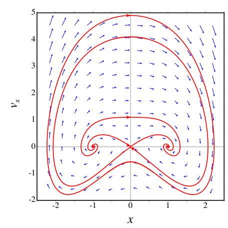
Problemas

1. (a) Unicamente um centro em $(x, v_x) = (0,0)$. (b) Um ponto de sela em $(x, v_x) = (0,0)$, um foco instável em $(x, v_x) = (-1,0)$ e um foco estável em $(x, v_x) = (1,0)$.

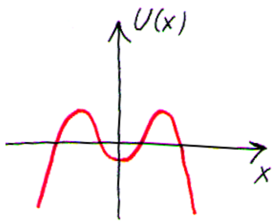
(a)

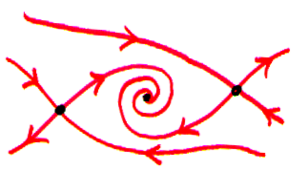


(b)

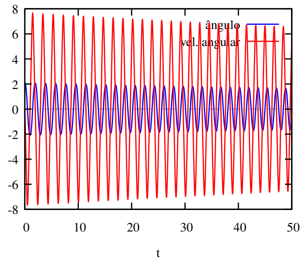


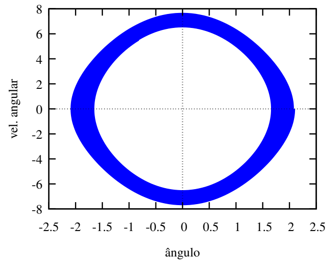
2. Os pontos de sela continuam sendo pontos de sela e o centro passa a ser foco estável.



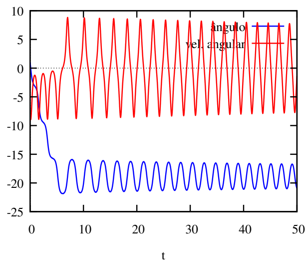


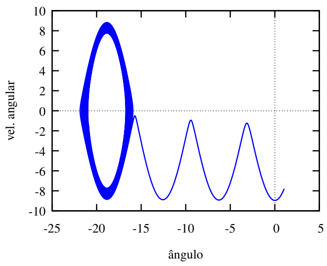
3. (*a*) O pêndulo oscila com amplitude que decresce lentamente:



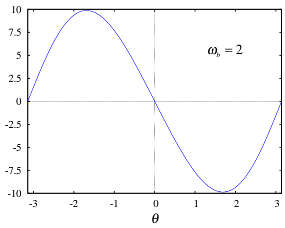


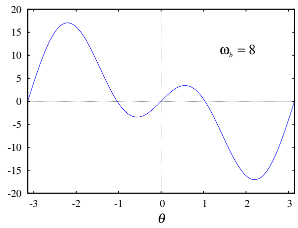
(*a*) O pêndulo faz três voltas completas, rodando no sentido horário, e quando passa a quarta vez pela posição de equilíbrio estável, começa a oscilar com amplitude que decresce lentamente:





4. (*b*)





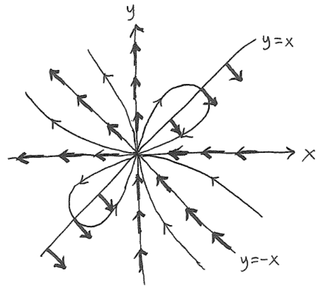
Com $\omega_b = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, há um ponto de equilíbrio estável em $\theta = 0$ e um ponto de equilíbrio instável em $\theta = \pm\pi$. Com $\omega_b = 8\ \mathrm{s}^{-1}$, há dois pontos de equilíbrio instável em $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$ e dois pontos de equilíbrio estável em $\theta \approx -1$ e $\theta \approx 1$.

5.

Ângulo	Alcance (m)
35°	6.293
36°	6.299
37°	6.301
38°	6.299
39°	6.325
40°	6.314

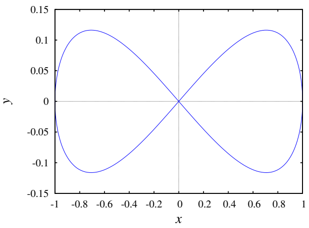
O ângulo de 37° produz o alcance máximo. No problema 12, o valor máximo do seno é 1, quando $2\,\theta = 90°$ e, portanto, $\theta = 45°$.

6. (a) No eixo dos x, $-\vec{e}_x$. No eixo dos y, $\vec{e}_y$. (b) Na reta $y = x$, $(\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2}$. Na reta $y = -x$, $(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$. ($c$) Figura ao lado; a origem é ponto de sela. (d) Nenhum ciclo nem órbita heteroclínica; número infinito de órbitas homoclínicas (todas as curvas de evolução no primeiro e terceiro quadrantes).

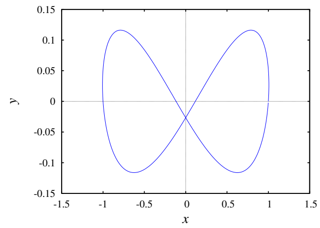


7. (a) $\ddot{x} = -\dfrac{k_x}{m}x \qquad \ddot{y} = -\dfrac{k_y}{m}y$

(b)

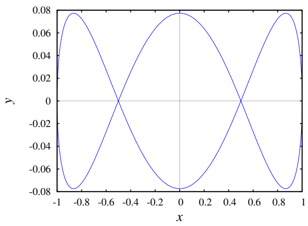


(c)



(d) Na direção x, 2.433 s. Na direção y, 1.217 s. O período na direção x é o dobro do período na direção de y.

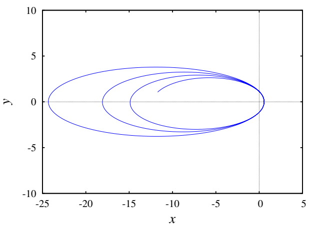
(e)



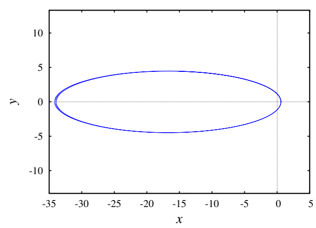
Se $\sqrt{k_y/k_x}$ for um número inteiro, o estado da partícula regressa ao estado inicial depois de descrever uma figura de Lissajous com $\sqrt{k_y/k_x}$ *loops* segundo o eixo dos x.

8. (a) $\ddot{x} = -\dfrac{4\pi^2 x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \ddot{y} = -\dfrac{4\pi^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(b)



(c)



Na alínea b o erro numérico é muito elevado; a energia do cometa não permanece constante mais diminui. Na alínea c o erro numérico é muito menor, mas o cometa continua a perder energia; seria preciso reduzir ainda mais o valor de Δt para diminuir o erro. (d) 34.4 UA. A órbita sai por fora da órbita de Neptuno, e entra até um ponto entre órbitas de Mercúrio e Vénus.

11. Ciclos limite e sistemas de duas espécies

A aranha caranguejo é um predador que consegue mudar a sua cor para camuflar-se das suas presas. Na fotografia, uma aranha caranguejo, pousada numa flor, apanha duas moscas que estavam a acasalar. Os sistemas predador presa são um exemplo de sistema de duas espécies; a evolução da população das duas espécies pode ser estudada com a teoria de sistemas dinâmicos.

11.1. Ciclos limite

Num sistema conservativo, todos pontos de equilíbrio estável são **centros** e existem **ciclos**, que correspondem a movimentos oscilatórios.

Na prática, um sistema conservativo é apenas uma idealização. Existem forças dissipativas que tornam um centro em **foco atrativo**; os ciclos passam a ser espirais que se aproximam do foco atrativo e o movimento oscilatório descrito por essas espirais tem amplitude de oscilação decrescente, aproximando-se para zero. A energia diminui ao longo da curva de evolução até o valor mínimo local no ponto de equilíbrio estável.

Também podem existir forças externas que aumentam a energia mecânica do sistema. Nesse caso o centro torna-se um **foco repulsivo** e os ciclos são substituídos por espirais que se afastam do ponto. Essas curvas de evolução com forma de espiral representam movimento oscilatório com amplitude crescente; ao longo das curvas a energia aumenta a medida que o estado se afasta do mínimo local de energia.

A conjugação dos dois efeitos: forças dissipativas mais forças externas que fornecem energia, pode produzir a combinação exata que mantem o sistema em movimento oscilatório com amplitude constante. Um exemplo típico é um relógio de pêndulo: a dissipação de energia devida à resistência do ar e atrito no eixo é compensada por um mecanismo que produz um momento sobre o pêndulo.

Isso explica porque os sistemas não conservativos também podem ter ciclos no espaço de fase. Mas comumente esses ciclos são isolados; nomeadamente, existem apenas para um valor específico da amplitude e não para qualquer amplitude arbitrária. Esse tipo de ciclos isolados, nos sistemas não lineares, são designados **ciclos limite**.

11.1.1. Equação de Van der Pol

Uma equação não linear conhecida há muito tempo e que dá origem a ciclos limite é a equação de Van der Pol, que apareceu no estudo dos circuitos elétricos e outros sistemas mecânicos:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{11.1}$$

onde ε é um parâmetro positivo. Se x^2 for maior que 1, o segundo termo é dissipativo e implica diminuição da amplitude de oscilação. Se x^2 for menor que 1, o sistema terá fornecimento de energia e a amplitude de oscilação aumentará. Assim sendo, espera-se que, independentemente do estado inicial, o sistema termine oscilando com amplitude próxima de 1. A equação de van der Pol é equivalente ao seguinte sistema dinâmico autónomo:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -x - 2\varepsilon(x^2 - 1)y \tag{11.2}$$

Existe um único ponto de equilíbrio, na origem. A matriz Jacobiana nesse ponto é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\varepsilon \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

e os valores próprios são $\lambda = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

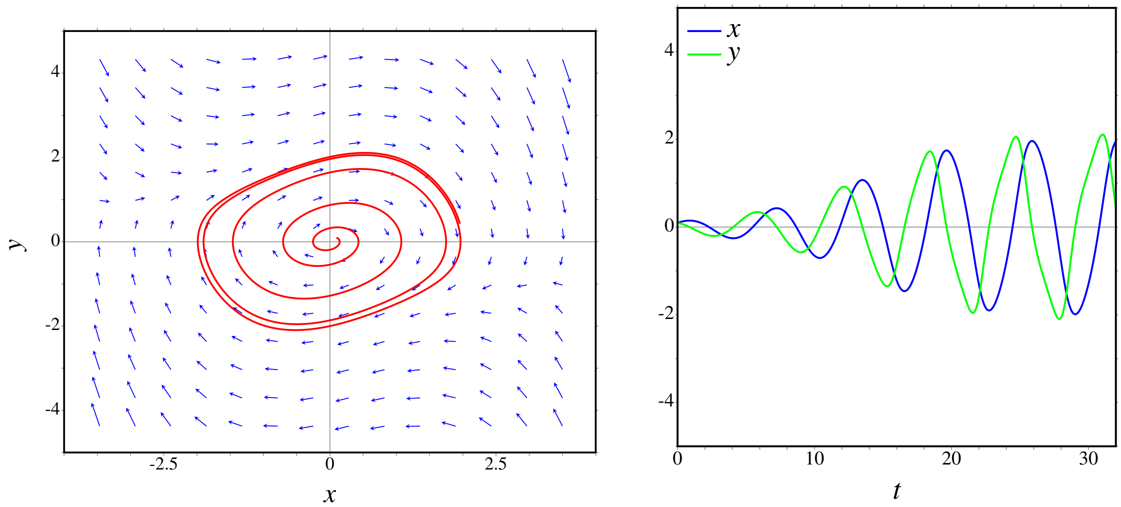


Figura 11.1.: Solução da equação de van der Pol para um valor pequeno do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, com estado inicial próximo da origem.

A origem é ponto repulsivo, que poderá ser foco ($\varepsilon < 1$), nó ($\varepsilon > 1$) ou nó impróprio ($\varepsilon = 1$). A figura 11.1 mostra o retrato de fase e o estado em função do tempo, no caso $\varepsilon = 0.17$, com condições iniciais: $x = y = 0.1$. Os gráficos foram produzidos com:

```
(%i1) plotdf([y,-x-2*e*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
      [parameters,"e=0.17"], [x,-4,4], [y,-5,5], [nsteps,900],
      [trajectory_at,0.1,0.1], [versus_t,1])$
```

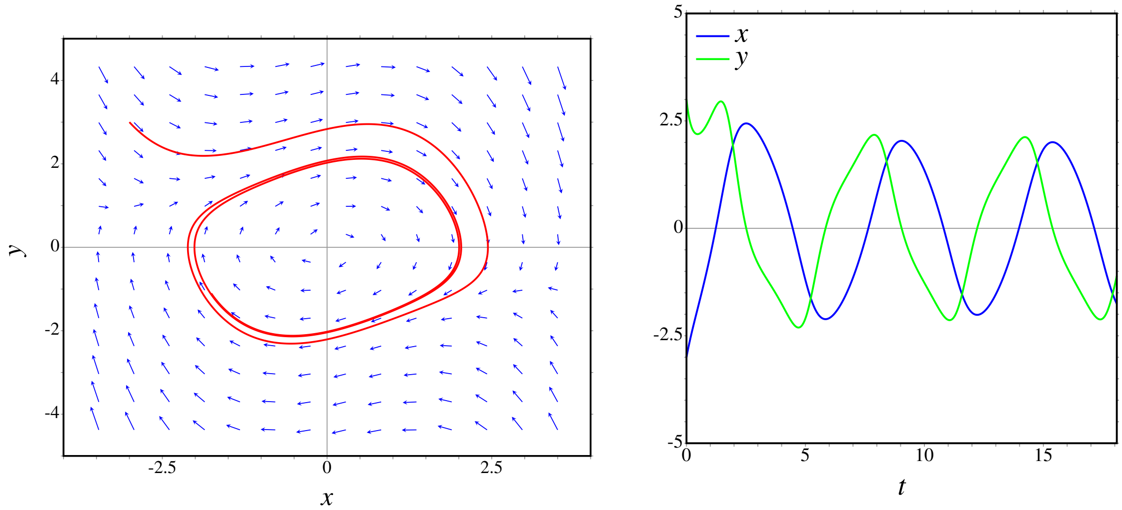


Figura 11.2.: Solução da equação de van der Pol para um valor pequeno do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, com estado inicial afastado da origem.

O sistema oscila, com amplitude inicialmente crescente, mas após algumas oscilações estas são cada vez mais uniformes. No retrato de fase, a órbita cresce aproximando-se de um ciclo limite com forma de retângulo de vértices arredondados.

Com o mesmo valor do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, mas com um estado inicial que está fora do ciclo limite, a amplitude das oscilações decresce até ficar uniforme e igual à solução obtida no caso anterior, como mostra a figura 11.2, que foi obtida com o seguinte comando:

```
(%i2) plotdf([y,-x-2*e*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
      [parameters,"e=0.17"], [x,-4,4], [y,-5,5], [nsteps,900],
      [trajectory_at,-3,3], [versus_t,1])$
```

Nos dois casos das figuras 11.1 e 11.2 o sistema aproxima-se do mesmo ciclo; no primeiro caso a aproximação é feita desde dentro do ciclo e no segundo caso desde fora. Esse tipo de ciclo é um **ciclo limite atrativo**. Existem também ciclos limite repulsivos, no caso em que as órbitas perto desse ciclo afastam-se dele.

Se o parâmetro ε for maior que 1 e o estado inicial estiver próximo da origem, o sistema aproxima-se muito mais rapidamente do ciclo limite, já que a origem passa a ser um nó repulsivo. Por exemplo, para $\varepsilon = 1.7$ e estado inicial $x = y = 0.1$:

```
(%i3) plotdf([y,-x-2*e*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
        [parameters,"e=1.7"], [x,-4,4], [y,-6,6], [nsteps,1500],
        [trajectory_at,0.1,0.1], [versus_t,1])$
```

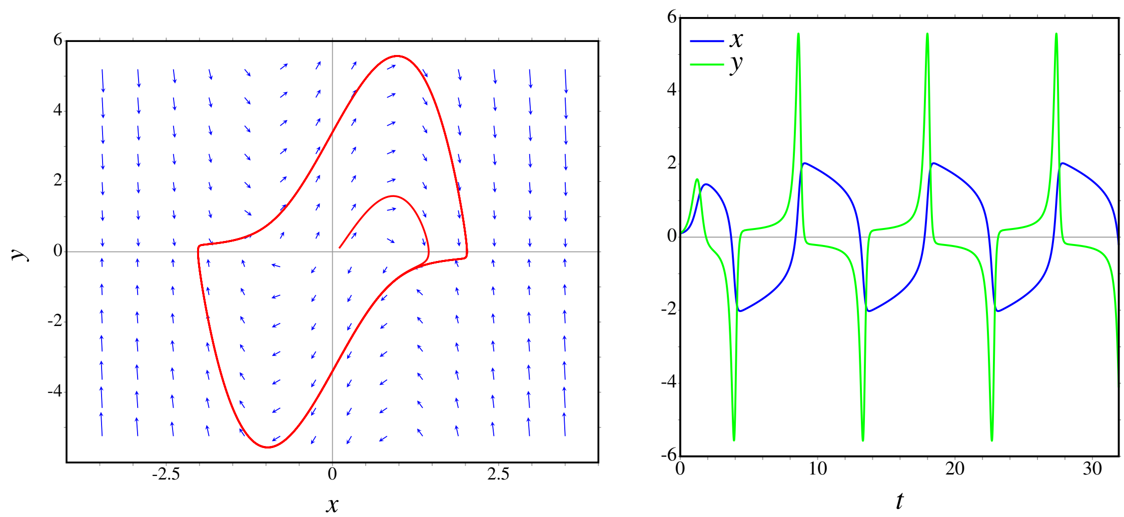


Figura 11.3.: Solução da equação de van der Pol para um valor elevado do parâmetro $\varepsilon = 1.7$ e com estado inicial próximo da origem.

No caso $\varepsilon = 1.7$, o ciclo limite tem uma forma mais complicada no espaço de fase (figura 11.3), em comparação com o retângulo de vértices arredondados obtido no caso $\varepsilon = 0.17$ (figura 11.1).

Em função do tempo, quanto menor for o parâmetro ε, mais parecidas serão as oscilações a uma função periódica de frequência única (função seno ou cosseno). Quanto maior for o parâmetro ε, mais complicadas serão as oscilações, como no caso da figura 11.3, correspondendo à sobreposição de funções sinusoidais com várias frequências diferentes.

O circuito, ou sistema físico, descrito pela equação de van der Pol é um sistema auto-regulado. Nomeadamente, independentemente do estado inicial do sistema, o estado final será um movimento oscilatório com amplitudes e frequências específicas do circuito.

11.1.2. Existência de ciclos limite

Num ponto do espaço de fase, que não seja ponto de equilíbrio, passa exatamente uma curva de evolução. As curvas de evolução de um sistema dinâmico contínuo, no espaço de fase, nunca se podem cruzar.

Essas propriedades são úteis para descobrir a existência de ciclos limite. Por exemplo, no retrato de fase apresentado na figura 11.4, a origem é um foco repulsivo; na vizinhança da origem as curvas de evolução são espirais que apontam para fora da origem. No entanto, nas regiões mais afastadas da origem, as curvas de evolução aproximam-se da origem, indicando que na realidade o sistema é estável.

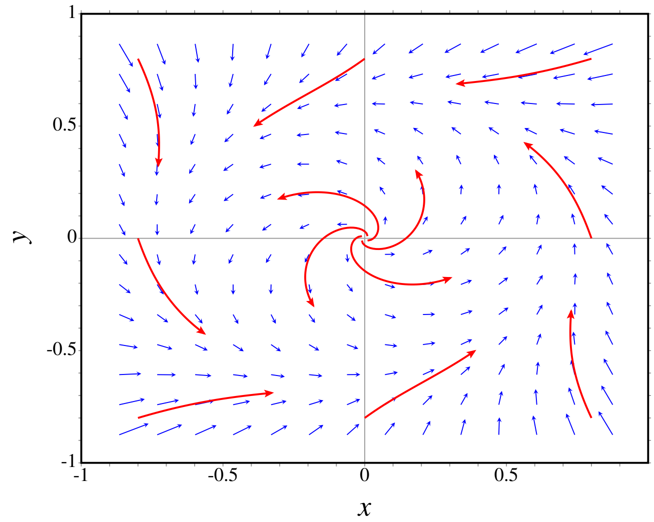


Figura 11.4.: Retrato de fase de um sistema com um ciclo limite.

Como as curvas que saem do ponto de equilíbrio não se podem cruzar com as curvas que se aproximam dele, deverá existir um ciclo limite para onde todas as curvas de evolução aproximar-se-ão assimptóticamente, sem se cruzarem nem se tocarem.

Em alguns casos consegue-se demonstrar matematicamente a existência do ciclo limite, usando coordenadas polares, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 11.1
Demonstre que o sistema com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2) \qquad \dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$$

tem um ciclo limite.

Resolução. Os pontos em que as duas componentes da velocidade de fase são nulas são:

```
(%i4) f1: -y+x*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i5) f2: x+y*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i6) solve([f1,f2]);
(%o6)                          [[x = 0, y = 0]]
```

Assim sendo, existe um único ponto de equilíbrio, na origem. O retrato de fase obtido com as funções f_1 e f_2 é apresentado na figura 11.5, que mostra o ciclo limite.

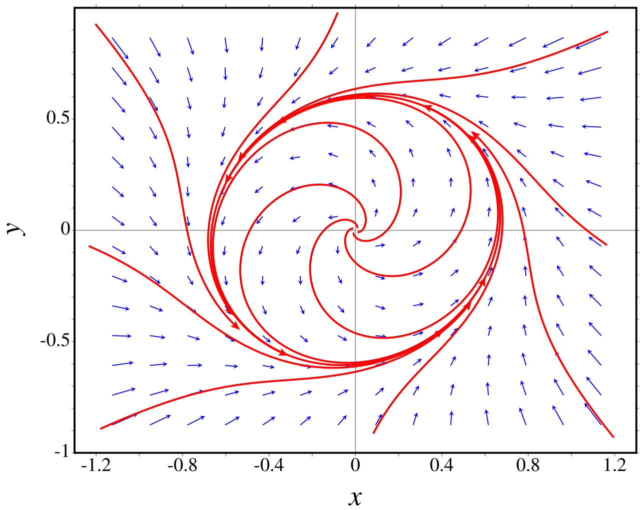


Figura 11.5.: Retrato de fase do sistema $\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2)$, $\dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$.

As coordenadas cartesianas podem ser substituídas por coordenadas polares. Será preciso fazer essa substituição também nos lados esquerdos das equações: $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Desse modo, é necessário escrever as equações de evolução completas:

```
(%i7) depends([x,y],t)$
(%i8) eq1: diff(x,t) = f1;
                       dx           2        2
(%o8)                  -- = x (- 3 y  - 2 x  + 1) - y
                       dt
(%i9) eq2: diff(y,t) = f2;
```

```
                         dy           2       2
(%o9)                    -- = y (- 3 y  - 2 x  + 1) + x
                         dt
```

O comando `depends` foi usado para indicar que x e y dependem de t; se isso não tivesse sido indicado, as derivadas teriam sido calculadas como derivadas parciais, dando o resultado 0.

A substituição para coordenadas polares é a seguinte:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

no Maxima, usaremos `u`, em vez de θ. É preciso declarar também a dependência no tempo das variáveis r e u, antes de fazer a substituição:

```
(%i10) depends([r,u],t)$
(%i11) eq3: ev(eq1, x=r*cos(u), y=r*sin(u), diff)$
(%i12) eq4: ev(eq2, x=r*cos(u), y=r*sin(u), diff)$
```

o modificador `diff` é para forçar a que as derivadas sejam calculadas. Finalmente, resolve-se o sistema para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

```
(%i13) solve([eq3,eq4],[diff(r,t),diff(u,t)]);
           dr        3    2          3    2           du
(%o13)   [[-- = - 3 r  sin (u) - 2 r  cos (u) + r, -- = 1]]
           dt                                         dt
```

O resultado obtido é,

$$\dot{r} = r - r^3(2 + \sin^2\theta) \qquad\qquad \dot{\theta} = 1$$

A segunda equação mostra que o ângulo aumenta com taxa constante. O estado roda no espaço de fase, com velocidade angular constante. Enquanto roda, o valor de r muda; para r igual a 1/2, a derivada $\dot{r}$ é igual a $(2 - \sin^2\theta)/8$, que é positivo; nomeadamente, r aumentará até um valor maior que 1/2. Se $r = 1$, a derivada de r será $\dot{r} = -1 - \sin^2\theta$, que é negativa para qualquer valor de θ. Consequentemente, r diminuirá até um valor menor que 1. Conclui-se que deve existir um ciclo limite na região $1/2 < r < 1$. Neste caso o ciclo limite é estável[1]. O retrato de fase mostra o ciclo limite (figura 11.5).

11.1.3. Inexistência de ciclos limite

Se existir um ciclo limite, na região dentro dele deverá existir pelo menos um foco, um centro ou um nó. Isso implica que se numa região do espaço de fase não existir nenhum foco, centro ou nó, nessa região não pode existir nenhum ciclo limite. O determinante da matriz jacobiana é igual ao produto dos valores próprios; assim sendo, num sistema

[1] Deixa-se como exercício para o leitor encontrar o valor de r, diferente de zero, em que a derivada $\dot{r}$ é nula, e demonstrar que para diferentes ângulos esse valor está compreendido entre $\sqrt{3}/3$ e $\sqrt{2}/2$.

de segunda ordem, se num ponto de equilíbrio o determinante da matriz jacobiana for negativo, esse ponto será necessariamente ponto de sela.

Conclui-se que num sistema de segunda ordem, se dentro de uma região do espaço de fase não existir nenhum ponto de equilíbrio onde o determinante da matriz jacobiana seja positivo, nessa região não poderá existir nenhum ciclo limite. Esse método é útil para demonstrar que num sistema não existem ciclos limite.

Exemplo 11.2
Demonstre que o sistema seguinte não possui nenhum ciclo limite.

$$\dot{x} = y^2 - x \qquad \dot{y} = y + x^2 + yx^3$$

Resolução.

```
(%i14) f: [y^2-x, y+x^2+y*x^3]$
(%i15) solve(f);
```

produz unicamente uma solução real, na origem. Assim, o único ponto de equilíbrio é a origem.

```
(%i16) vars: [x,y]$
(%i17) jacobian(f,vars)$
(%i18) determinant(ev(%,x=0,y=0));
(%o18)                                 - 1
```

portanto, a origem é um ponto de sela e não existe nenhum ciclo limite.

11.2. Coexistência de duas espécies

Sejam duas populações diferentes que interagem. A função $x(t)$ representa o número de elementos da espécie 1, no instante t, e $y(t)$ o número de elementos da espécie 2, no instante t.

As taxas de aumento das populações das duas espécies serão:

$$\frac{\dot{x}}{x} \qquad \frac{\dot{y}}{y} \tag{11.4}$$

e as equações de evolução do sistema deverão ter a forma geral:

$$\dot{x} = x\,f(x,y) \qquad \dot{y} = y\,g(x,y) \tag{11.5}$$

É importante observar que no instante em que não existiam elementos de uma das espécies, a população dessa espécie não podera aumentar nem diminuir. A função f é a soma da taxa de natalidade da espécie 1, menos a sua taxa de mortalidade. g é a soma da taxa de natalidade da espécie 2, menos a sua taxa de mortalidade.

Só estamos interessados no primeiro quadrante do espaço de fase, onde as duas variáveis x e y são positivas, pois a população de cada espécie não poderá ser um número negativo. Como x e y são positivas, as componentes da velocidade de fase são proporcionais a f e g.

Na ausência de elementos da espécie 2, a taxa de crescimento da população 1 é $f(x,0)$.

Três modelos que costumam ser usados para o crescimento da população são os seguintes (a e b são constantes):

1. $f(x,0) = a > 0$, aumento exponencial da população.
2. $f(x,0) = -a < 0$, extinção exponencial da população.
3. $f(x,0) = a - bx \qquad a > 0 \quad b > 0$, modelo logístico; população com limite a/b.

o mesmo aplica-se à outra espécie e à função: $g(0,y)$.

11.2.1. Sistemas predador presa

Num sistema predador presa, a taxa de mortalidade da espécie 1 é proporcional à população da espécie 2, e a taxa de natalidade da espécie 2 aumenta em função da população da espécie 1. Nesse caso, a espécie 1 são presas, e a população 2 são predadores que se alimentam das presas.

O aumento do número de presas, aumenta a taxa de crescimento da população de predadores: $g(x,y)$ é crescente em função de x. O aumento do número de predadores, diminui a taxa de crescimento da população de presas: $f(x,y)$ é decrescente em função de y.

Essas relações permitem que seja possível a existência de ciclos, tal como se mostra na figura 11.6 mas, naturalmente deverá existir um centro, foco ou nó dentro do ciclo.

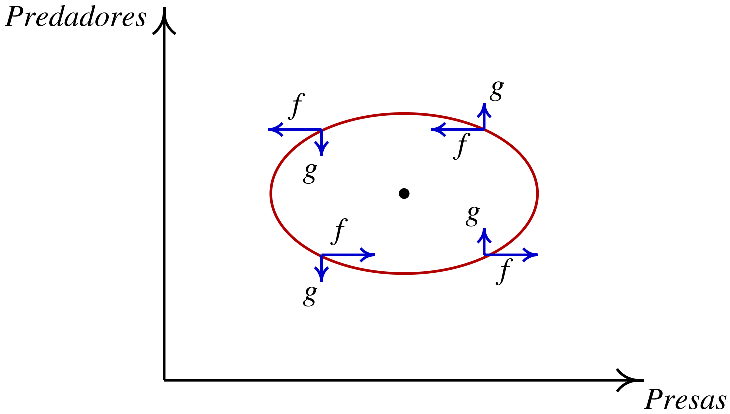


Figura 11.6.: Possível ciclo num sistema predador presa.

A origem também é um ponto de equilíbrio. Como sobre cada um dos eixos coordenados a velocidade de fase é na mesma direção do eixo, a origem e quaisquer outros pontos de equilíbrio nos eixos deverão ser nós ou pontos de sela. Se um desses pontos for estável, implicará um estado em que uma das espécies foi extinta e a população da outra permanece constante (modelo logístico).

Exemplo 11.3
Analise o modelo de **Lotka-Volterra**:

$$\dot{x} = x(a - cy) \qquad\qquad \dot{y} = y(bx - d)$$

com 4 parâmetros positivos a, b, c e d.

Resolução. Observando as equações, conclui-se que x representa uma população de presas, com crescimento exponencial, e y é uma população de predadores, com extinção exponencial.

Os pontos de equilíbrio serão:

```
(%i19) f: [x*(a-c*y), y*(b*x-d)]$
(%i20) vars: [x,y]$
(%i21) equil: solve(f,vars);
                                        d       a
(%o21)              [[x = 0, y = 0], [x = -, y = -]]
                                        b       c
```

ou seja, existem 2 pontos de equilíbrio na região de interesse: (0,0) e (d/b, a/c).

```
(%i22) jacobiana: jacobian(f, vars)$
```

Na origem:

```
(%i23) jacobiana, equil[1];
                              [ a    0  ]
(%o23)                        [         ]
                              [ 0  - d  ]
```

os valores próprios são a e $-d$. A origem é um ponto de sela (instável). No segundo ponto fixo:

```
(%i24) jacobiana, equil[2];
                           [          c d ]
                           [  0     - --- ]
                           [           b  ]
(%o24)                     [              ]
                           [ a b          ]
                           [ ---      0   ]
                           [  c           ]
(%i25) eigenvectors(%);
(%o25) [[[- sqrt(- a d), sqrt(- a d)], [1, 1]],
                         b sqrt(- a d)              b sqrt(- a d)
                    [[[1, -------------]], [[1, - -------------]]]]
                              c d                        c d
```

os valores próprios são imaginários; portanto, o segundo ponto de equilíbrio é um centro.

Qualquer situação inicial (na região onde as duas variáveis são positivas) faz parte de um ciclo, em que as populações das duas espécies oscilam. Para desenhar o retrato de fase, usa-se o comando:

```
(%i26) plotdf(f, vars, [parameters,"a=6,b=3,c=2,d=15"],
        [x,0,10], [y,0,10], [nsteps,1000], [direction,forward],
        [trajectory_at,7,1], [versus_t,1])$
```

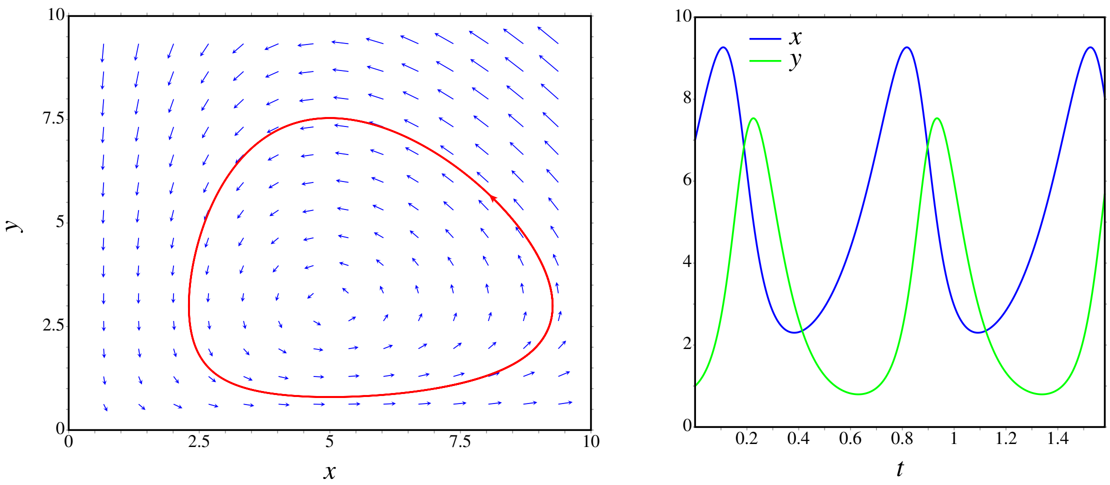


Figura 11.7.: Retrato de fase do modelo de Lotka-Volterra e gráfico das populações em função do tempo.

Inicialmente, as populações de presas e de predadores aumentam, mas quando o número de predadores aumentar por cima do seu valor médio, a população de presas começará a decrescer. Quando o número de presas for menor que o seu valor médio, a falta de presas fará com que a população de predadores diminua; quando diminuir por baixo do seu valor médio, a população de presas voltará a aumentar e o ciclo repetir-se-á.

O modelo de Lotka-Volterra produz ciclos, que podem fazer oscilar a população entre um valor muito pequeno e um valor muito elevado. Situação essa que não é muito realista num sistema predador presa. Um sistema mais realista deverá ter apenas ciclos limite, como no exemplo seguinte.

Exemplo 11.4
Analise o modelo seguinte, de **Holling-Tanner** e mostre que tem um ciclo limite

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6\,x\,y}{7+7x} \qquad \dot{y} = 0.2\,y\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

Resolução. Observando as equações, conclui-se que x representa uma população de presas, com crescimento logístico, e y é a população de predadores, com crescimento logístico.

```
(%i27) f: [x*(1-x/7) -6*x*y/(7+7*x), 0.2*y*(1-y/2/x)]$
(%i28) equil: solve(f);
(%o28) [[y = 0, x = 0], [y = 0, x = - 1], [y = 0, x = 7],
                                 [y = - 14, x = - 7], [y = 2, x = 1]]
```

existem 3 pontos de equilíbrio: (0, 0), (7, 0) e (1, 2).

```
(%i29) vars: [x,y]$
(%i30) J: jacobian(f, vars)$
(%i31) eigenvectors(ev(J, equil[3])), numer;
(%o31)   [[[0.2, - 1], [1, 1]], [[[1, - 1.6]], [[1, 0]]]]
```

portanto, o ponto de equilíbrio em (7, 0) é ponto de sela. A matriz jacobiana na origem não pode ser calculada, porque obtêm-se denominadores nulos; a análise de estabilidade da origem será adiada.

O ponto (1, 2) é foco repulsivo, como mostra:

```
(%i32) eigenvectors(ev(J, equil[5]));
```

A curva que sai do ponto de sela (7, 0), na direção do vetor $(-1, 1.6)$, aproxima-se do foco repulsivo; assim, deverá existir um ciclo limite estável à volta do foco instável.

O retrato de fase (figura 11.8) é obtido com o comando:

```
(%i33) plotdf(f, vars, [x,-0.1,10], [y,-0.1,8])$
```

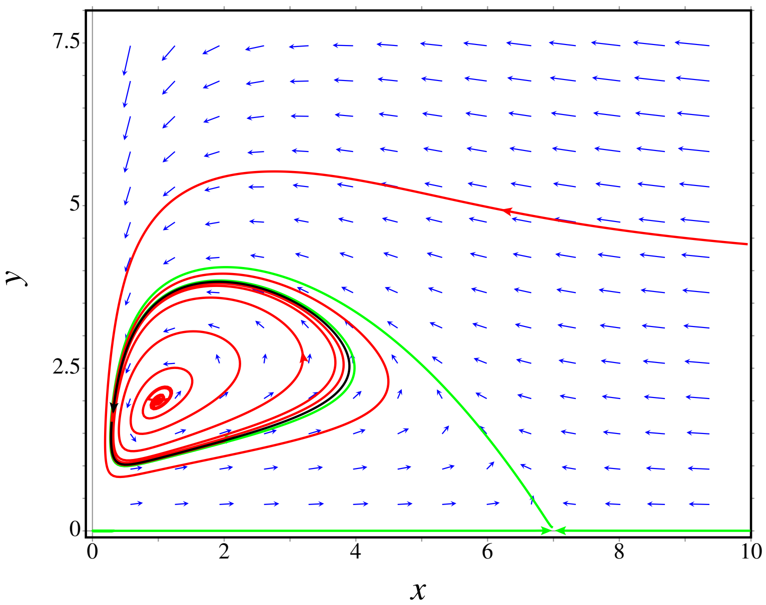


Figura 11.8.: Retrato de fase do modelo de Holling-Tanner.

Usou-se -0.1, para evitar os denominadores nulos obtidos quando $x = 0$.

O ciclo limite aparece mais escuro na figura 11.8 e as órbitas que entram e saem do ponto de sela em $x = 7$ mais claras. No eixo dos y há uma descontinuidade na derivada de y e, por isso, não existem curvas de evolução nesse eixo, mas para $x > 0$ a origem comporta-se como ponto de sela.

11.2.2. Sistemas com competição

Se as duas espécies estão em competição pelos mesmos recursos, a taxa de aumento de cada uma das populações diminui com o aumento da outra população. Consequentemente, já não poderão existir ciclos, como acontecia nos sistemas predador presa.

Exemplo 11.5
Explique os possíveis retratos de fase para o seguinte sistema com 6 parâmetros positivos a, b, c, d, e, f:

$$\dot{x} = x(a - bx - cy) \qquad \dot{y} = y(d - ey - fx)$$

Resolução: As equações mostram que se trata de um sistema de duas espécies em competição. Para evitar conflitos com valores de variáveis usados nos exemplos anteriores, convém apagar os valores numéricos armazenados nas variáveis do Maxima.

```
(%i34) remvalue(all)$
(%i35) fg: [x*(a-b*x-c*y),y*(d-e*y-f*x)]$
(%i36) vars: [x,y]$
(%i37) equil: solve(fg, vars);
                         a                    d
(%o37) [[x = 0, y = 0], [x = -, y = 0], [x = 0, y = -],
                         b                    e
                                  a e - c d      a f - b d
                        [x = - ---------, y = ---------]]
                                  c f - b e      c f - b e
```

O único ponto de equilíbrio fora dos eixos é o quarto; pode usar-se o comando `subst` para simplificar o resultado, definindo 3 novas constantes,

```
(%i38) ponto:subst([c*f-b*e=c1,a*e-c*d=-c2,a*f-b*d=c3],equil[4]);
                               c2      c3
(%o38)                    [x = --, y = --]
                               c1      c1
```

esse ponto só estará no primeiro quadrante se as três constantes c_1, c_2 e c_3, forem todas positivas ou todas negativas.

```
(%i39) jacobiana: jacobian(fg, vars)$
(%i40) jacobiana, equil[4]$
```

a matriz pode ser simplificada aplicando as funções `ratsimp` e `factor` a cada elemento da matriz (para aplicar uma função a cada elemento de uma lista ou matriz usa-se o comando `map`):

```
(%i41) map(ratsimp, %)$
(%i42) map(factor, %);
                 [   b (a e - c d)     c (a e - c d)   ]
                 [   -------------     -------------   ]
                 [     c f - b e         c f - b e     ]
(%o42)           [                                     ]
                 [    f (a f - b d)     e (a f - b d)  ]
                 [ - -------------   - -------------   ]
                 [      c f - b e         c f - b e    ]
```

apareceram novamente as três constantes c_1, c_2 e c_3 definidas previamente; substituindo essas variáveis obtém-se:

```
(%i43) matriz: subst([c*f-b*e=c1, a*e-c*d=-c2, a*f-b*d=c3], %);
                          [    b c2     c c2 ]
                          [ - ----   - ---- ]
                          [     c1       c1  ]
(%o43)                    [                  ]
                          [   c3 f     c3 e  ]
                          [ - ----   - ---- ]
                          [     c1       c1  ]
(%i44) factor(ratsimp(determinant(matriz)));
                            c2 c3 (c f - b e)
(%o44)                    - -----------------
                                    2
                                  c1
```

como $(cf - be)$ é igual a c_1, o determinante da matriz jacobiana no ponto de equilíbrio é igual a $-c_2 c_3/c_1$. Ou seja, se as 3 constantes c_1, c_2 e c_3 forem positivas, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Se as 3 constantes forem negativas, o ponto fixo poderá ser um nó atrativo, para alguns valores dos parâmetros.

Por exemplo, se as 3 constantes são positivas com os valores (3, 2, 2) obtém-se o retrato de fase no lado esquerdo da figura 11.9:

```
(%i45) plotdf(fg, vars, [x,0,3.1], [y,0,3.1],
         [parameters,"a=2,b=1,d=2,e=1,c=2,f=2"])$
```

Se no instante inicial a população de uma das espécies for menor, essa espécie será extinta (o sistema aproxima-se do ponto de sela num dos eixos). Se inicialmente as duas populações forem iguais, atinge-se o ponto de equilíbrio em que as duas populações são iguais a 2/3 ($x = c_2/c_1$, $y = c_3/c_1$)).

Um exemplo do segundo caso, em que as 3 constantes são negativas, é apresentado no lado direito da figura 11.9, que foi obtido com os valores (-3/4, -1, -1) para as três constantes:

```
(%i46) plotdf(fg, vars, [x,0,3.1], [y,0,3.1],
                [parameters,"a=2,b=1,d=2,e=1,c=0.5,f=0.5"])$
```

Neste caso, as duas espécies coexistem em forma harmoniosa atingindo sempre o ponto de equilíbrio em que as duas populações são iguais a 4/3 ($x = c_2/c_1$, $y = c_3/c_1$).

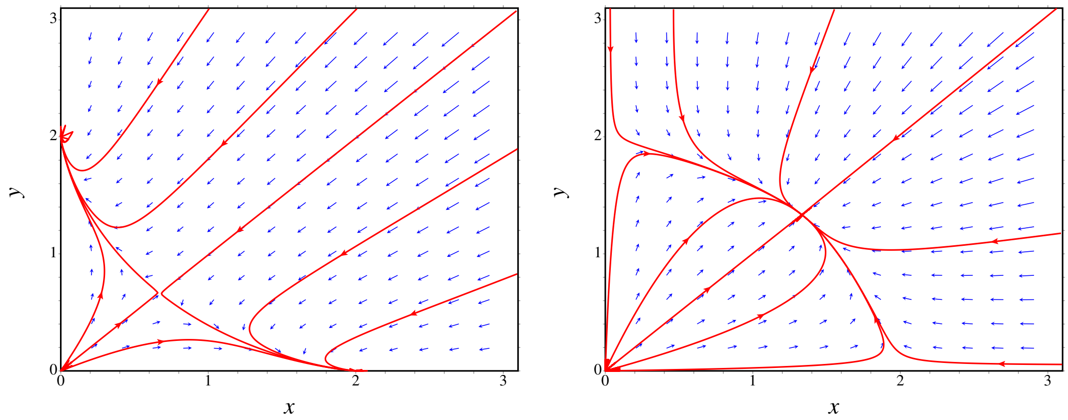


Figura 11.9.: Retratos de fase do exemplo 11.5, nos casos de equilíbrio instável (esquerda) e estável (direita).

Perguntas

1. Um sistema, no espaço de fase (x, y), tem um ciclo limite com raio constante, igual a 2 unidades. Após uma mudança de variáveis para coordenadas polares (r, θ), com origem no centro do ciclo limite, a equação obtida para o ângulo foi: $\dot{\theta} = 3$. Qual poderá ser a equação obtida para o raio r?

A. $\dot{r} = 2r - 1$
B. $\dot{r} = 3r - 2$
C. $\dot{r} = 2 - 2r$
D. $\dot{r} = 2r - 4$
E. $\dot{r} = 3 - r$

2. Um sistema com variáveis de estado (x, y) tem um ciclo limite e um único ponto de equilíbrio P. O que é que carateriza os pontos (x, y) do ciclo limite?

A. Estão todos à mesma distância de P.
B. Em todos eles a velocidade de fase aponta para P.
C. Formam uma curva que passa por P.
D. Formam uma curva fechada com P no interior.
E. Formam uma curva fechada com P no exterior.

3. Um sistema, no espaço de fase (x, y), tem um ponto de equilíbrio em (2, 3). Após uma mudança de variáveis para coordenadas polares (r, θ), com origem no ponto (2, 3), o sistema obtido foi: $\dot{r} = 2r$, $\dot{\theta} = -3$. O que é que possível concluir acerca do sistema?

A. (2,3) é um foco repulsivo.
B. Existe um ciclo limite à volta de (2,3).
C. (2,3) é um centro.
D. (2,3) é um foco atrativo.
E. (2,3) é um nó repulsivo.

4. As equações $\dot{x} = y(3-x)$, $\dot{y} = x(5+y)$ definem um sistema:

A. Predador presa.

B. De duas espécies com competição.

C. Conservativo.

D. Linear.

E. Não linear.

5. As equações de evolução de um sistema de duas espécies são:

$$\dot{x} = x(3-y) \qquad \dot{y} = y(x-5)$$

que tipo de sistema é?

A. Predador presa, sendo x as presas.

B. Predador presa, sendo y as presas.

C. Sistema com competição.

D. Sistema com cooperação.

E. Sistema linear.

Problemas

1. Uma população de dragões, y, e uma população de águias, x, evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(2-y) \qquad \dot{y} = \frac{y}{2}(x-3)$$

Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

2. Considere o modelo de Verhulst para duas populações:

$$\dot{x} = x(1-x-2y) \qquad \dot{y} = y(1+5x-y)$$

diga se é um sistema com competição ou um sistema predador presa (e nesse caso quais as presas e quais os predadores). Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase.

3. Para cada um dos modelos de duas espécies com competição, na lista que se segue, diga se existe coexistência ou exclusão mútua entre as duas espécies. Se existir coexistência, diga a natureza do ponto de equilíbrio (estável ou instável). Se existir exclusão mútua, diga qual das duas espécies sobrevive. Em todos os casos construa o gráfico do retrato de fase.

(a) $\dot{x} = x(2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y)$ $\qquad$ $\dot{y} = y(1 - \frac{1}{10}y - \frac{1}{8}x)$

(b) $\dot{x} = 2x(1 - \frac{1}{20}x) - \frac{1}{25}xy$ $\qquad$ $\dot{y} = 4y(1 - \frac{1}{40}y) - \frac{1}{10}xy$

(c) $\dot{x} = x(1 - \frac{1}{20}x - \frac{1}{8}y)$ $\qquad$ $\dot{y} = y(1 - \frac{1}{12}y - \frac{1}{16}x)$

(d) $\dot{x} = 2x(1 - \frac{1}{100}x) - \frac{1}{40}xy$ $\qquad$ $\dot{y} = 10y(1 - \frac{1}{50}y) - \frac{1}{8}xy$

4. Para demonstrar que o sistema não linear:

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \qquad\qquad \dot{y} = x + y - x^2 y - y^3$$

tem um ciclo limite estável:

(a) Use coordenadas polares para transformar o sistema num sistema de segunda ordem para as variáveis r e θ (sugestão: use o comando `trigreduce` para simplificar o resultado).

(b) Trace o gráfico de $\dot{r}$ em função de r (r não pode ser negativo) e diga qual será o valor limite de r após um tempo bastante elevado.

(c) Escreva a equação do ciclo limite, em função das coordenadas cartesianas (x, y).

(d) Corrobore a sua resposta traçando o retrato de fase no plano cartesiano (x, y).

5. Demonstre que o sistema seguinte não tem nenhum ciclo limite.

$$\dot{x} = y \qquad\qquad \dot{y} = x$$

6. O sistema de equações de Rössler em 3 dimensões é:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + 0.2y \\ \dot{z} &= 0.2 + (x - c)z\end{aligned}$$

e tem ciclos limite para alguns valores do parâmetro c; nomeadamente, após algum tempo, as variáveis x, y e z descrevem ciclos que se repetem periodicamente.

(a) Use o programa `rk` para encontrar a solução do sistema com $c = 3$ e condições iniciais $x(0) = z(0) = 0$, $y(0) = 4$, no intervalo $0 \leq t \leq 200$; use 5000 passos ($\Delta t = 0.04$).

(b) Usando unicamente o intervalo $160 \leq t \leq 200$ da solução encontrada na alínea anterior, obtenha os gráficos de y em função de x, e de x em função de t.

(c) Determine, aproximadamente, o período dos ciclos representados nos gráficos da alínea anterior.

Respostas

Perguntas: **1.** D. **2.** D. **3.** A. **4.** E. **5.** A.

Problemas

1. A origem é ponto de sela, e o ponto (3, 2) é centro. O estado limite é um ciclo. Nenhuma das duas espécies será extinta.

2. Sistema predador presa: x são as presas e y os predadores. A origem é nó próprio, repulsivo, o ponto (1, 0) é ponto de sela e o ponto (0, 1) é nó impróprio, atrativo.

3. a) Exclusão, com extinção da espécie y e $x \to 10$.

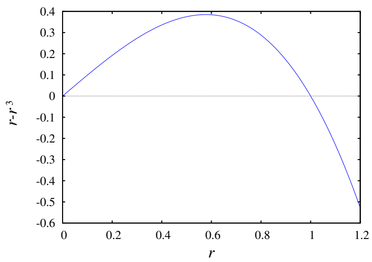
b) Coexistência, com $x \to 20/3$ e $y \to 100/3$. O ponto de equilíbrio é estável.

c) Coexistência, no ponto instável ($x = 80/7$, $y = 24/7$). O sistema pode terminar com uma das espécies extintas e $x \to 20$ ou $y \to 12$.

d) Exclusão, com extinção da espécie y e $x \to 100$.

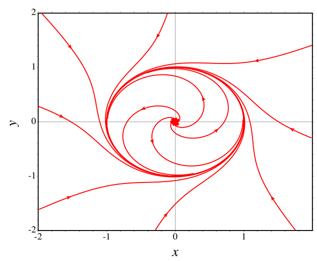
4. (a) $\dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r - r^3$

(b)



(c) $x^2 + y^2 = 1$

(d)



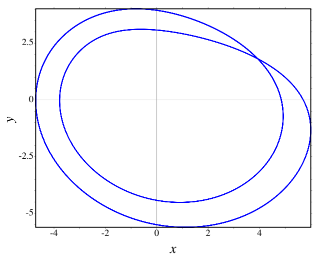
O gráfico de $\dot{r}$ mostra que r aumenta se for menor que 1 e diminui se for maior que 1. Assim, r aproximar-se-á do valor limite 1.

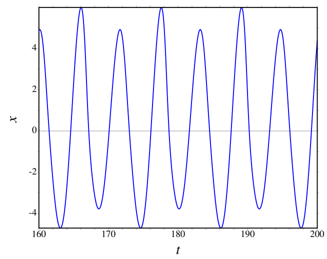
5. O determinante da matriz jacobiana é negativo em qualquer ponto e, portanto, não podem existir ciclos limite.

6. (a) O último elemento na lista obtida com `rk` é:

```
[200.0,4.393203951154127,-4.475965919862805,0.200584446836176]
```

(b)





(c) O período dos ciclos é aproximadamente 11.52.

12. Sistemas caóticos

Os investigadores da NASA no Centro de Investigação de Langley usam fumo colorido, que ascende desde uma fonte em terra, para visualizar um dos vórtices produzidos na ponta de uma das assas dum avião agrícola. A turbulência associada ao vórtice é um exemplo de movimento caótico. A imprevisibilidade desse movimento torna muito perigosa a aproximação de outros aviões dentro da zona de turbulência. Estudos como este da NASA são usados para determinar a distância mínima recomendável entre aviões em voo, em função das condições; por exemplo, quando há mau tempo esses vórtices são menores porque são dissipados pelo vento.

12.1. Órbitas fechadas atrativas

No capítulo anterior viu-se que quando existe um ciclo limite atrativo, as curvas de evolução aproximam-se assimptoticamente desse ciclo. Também é possível existirem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas atrativas, como no exemplo seguinte.

Exemplo 12.1
Desenhe o retrato de fase do sistema com equações de evolução:

$$\dot{x} = x\left(y^2 + 2xy - x - \frac{15}{4}y + 1\right) \qquad \dot{y} = y\left(-2x^2 - xy + y + \frac{15}{4}x - 1\right)$$

e mostre que existe uma órbita heteroclínica atrativa.

Resolução. Começa-se por criar uma lista com as funções f e g, e outra lista com as variáveis de estado:

```
(%i1) fg: [x*(y^2+2*x*y-x-15*y/4+1), y*(-2*x^2-x*y+y+15*x/4-1)]$
(%i2) vars: [x, y]$
```

A seguir, determina-se a posição dos pontos de equilíbrio:

```
(%i3) solve(fg, vars);
(%o3) [[x = 0, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = 0, y = 1],
                     7         3         4       4         1       1
               [x = -, y = - -], [x = -, y = -], [x = -, y = -]]
                     4         4         3       3         4       4
```

existem 6 pontos de equilíbrio. Em vez de calcular a matriz jacobiana para cada ponto, vamos tentar descobrir que tipo de ponto é cada um, a partir do campo de direções, numa região que inclui os 6 pontos de equilíbrio:

```
(%i4) plotdf(fg, vars, [x,-0.5,2], [y,-1.5,2]);
```

Traçando algumas curvas de evolução com o programa `plotdf`, descobre-se que os pontos (0, 0), (1, 0) e (0, 1) são pontos de sela, os pontos (0.25, 0.25) e (1.33..., 1.333...) são focos repulsivos, e o ponto (1.75, -0.75) é um nó atrativo. Também vê-se que as 3 retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - x$ são separatrizes (ver figura 12.1). O triângulo com vértices nos 3 pontos de sela é uma órbita heteroclínica.

Todas as curvas de evolução que saem do foco no ponto $\alpha(\Gamma) = (0.25, 0.25)$ aproximam-se assimptóticamente da órbita heteroclínica que, consequentemente é atrativa.

A diferença entre uma órbita heteroclínica atrativa, como a que existe no exemplo anterior e um ciclo limite atrativo, está na forma como o sistema se aproxima desses conjuntos limite. Para estudar a forma como é feita essa aproximação no caso da órbita heteroclínica, representa-se o gráfico de evolução das variáveis de estado em função do tempo. Usando o

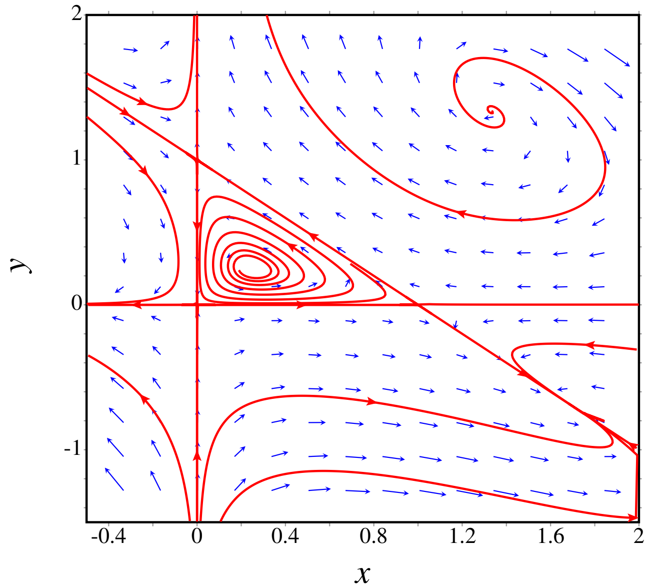


Figura 12.1.: Retrato de fase do exemplo 12.1, com uma órbita heteroclínica atrativa.

programa `rk`, com valores iniciais $x = 0.26$ e $y = 0.26$, e para t desde 0 até 500,

```
(%i5) sol: rk(fg,vars,[0.26,0.26],[t,0,500,0.1])$
```

convém analisar o resultado da última iteração:

```
(%i6) last(sol);
(%o6) [414.1, 3.657395675763059e+20, - 2.352719815911233e+20]
```

neste caso, o programa rk conseguiu integrar unicamente até o tempo final $t = 414.1$. Em versões do Maxima compiladas com outras variantes do Lisp, o mesmo programa pode parar num tempo t diferente. Isso é devido a que, a acumulação de erros numéricos pode provocar que uma das duas variáveis de estado atinja um valor por fora do triângulo formado pelos 3 pontos de sela; nesse caso, a variável cresce rapidamente para infinito. Quando o valor obtido for muito elevado, provocará um erro no programa rk que será concluído nesse ponto.

Para representar os gráficos das duas variáveis de estado, em função do tempo, desde $t = 0$ até $t = 414.1$, com os resultados obtidos, usando apenas um quinto dos pontos obtidos (que é suficiente neste caso), usam-se os comandos:

```
(%i7) solx: makelist([sol[i][1],sol[i][2]],i,1,length(sol),5)$
(%i8) plot2d([discrete,solx],[y,-0.2,1.2],[xlabel,"t"],
                                       [ylabel,"x"]);

(%i9) soly: makelist([sol[i][1],sol[i][3]],i,1,length(sol),5)$
(%i10) plot2d([discrete,soly],[y,-0.2,1.2],[xlabel,"t"],
                                       [ylabel,"y"]);
```

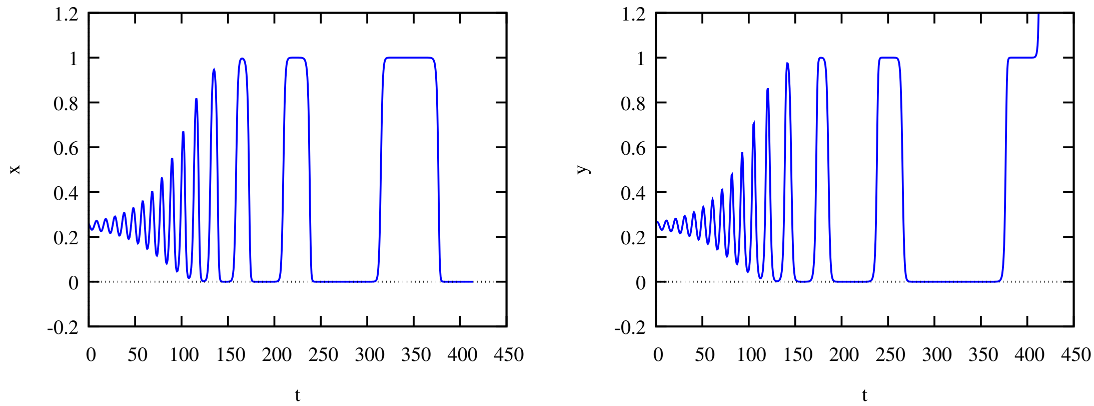


Figura 12.2.: Evolução das variáveis de estado numa curva de evolução que se aproxima da órbita heteroclínica do exemplo 12.1.

A figura 12.2 mostra a evolução das variáveis de estado. Inicialmente, cada variável oscila com período aproximadamente constante e amplitude crescente. A amplitude aproxima-se de um valor máximo e o período começa a aumentar gradualmente. O estado permanece cada vez mais tempo perto de cada ponto de sela, e a seguir desloca-se rapidamente para o ponto de sela seguinte. Esse comportamento é semelhante ao que foi observado no capítulo 10, para a órbita heteroclínica do pêndulo simples. Nesse caso, com energia ligeiramente menor que a energia no ponto de equilíbrio instável, a curva de evolução do pêndulo encontrava-se muito próxima da órbita heteroclínica. Para o pêndulo simples, as curvas que se aproximam da órbita heteroclínica são ciclos fechados, enquanto que no exemplo anterior as curvas que se aproximam da órbita heteroclínica são espirais que se aproximam cada vez mais da órbita heteroclínica.

12.2. Comportamento assimptótico

Em capítulos anteriores tem sido apresentados sistemas em que o estado evolui para um ponto de equilíbrio estável. Um exemplo é um pêndulo; o atrito com o ar faz diminuir a amplitude das oscilações e o pêndulo aproxima-se do ponto de equilíbrio estável, na posição mais baixa do pêndulo.

Outros sistemas evoluem aproximando-se de um ciclo no espaço de fase; após algum tempo, cada variável de estado varia de forma cíclica repetitiva. Os pontos do espaço de fase que fazem parte do ciclo limite constituem o **conjunto limite** das curvas de evolução do sistema.

O **conjunto limite positivo**, $\omega(\Gamma)$, de uma curva de evolução Γ no espaço de fase, é o ponto, ou conjunto de pontos, para onde a curva Γ se aproxima no limite $t \to \infty$. Define-se também o **conjunto limite negativo**, $\alpha(\Gamma)$, constituído pelo ponto ou conjunto de pontos para onde a curva Γ aproxima-se no limite $t \to -\infty$.

Esses conjuntos limite poderão não existir, se a trajetória se afastar continuamente sem limite. Se existirem, os conjuntos limite poderão ser pontos de equilíbrio, ciclos ou órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

A designação α e ω para os conjuntos limite negativo e positivo, é devida a que essas duas letras são a primeira e última letra no alfabeto grego; $\alpha(\Gamma)$ é a origem donde sai a trajetória Γ, e $\omega(\Gamma)$ é o fim de Γ.

12.2.1. Teorema de Poincaré-Bendixson

Num sistema dinâmico onde existam unicamente duas variáveis de estado, que possam ter qualquer valor real, o espaço de fase é um plano. Se as duas variáveis de estado fossem x_1 e x_2, o espaço de fase será o plano x_1x_2. As equações de evolução serão:

$$\dot{x_1} = f_1(x_1, x_2) \qquad\qquad \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2) \tag{12.1}$$

e a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase é o vetor:

$$\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\vec{e}_2 \tag{12.2}$$

Em cada ponto esse vetor determina a tangente à curva de evolução Γ que passa por esse ponto. Duas curvas de evolução diferentes nunca se podem cruzar em nenhum ponto no domínio das funções f_1 e f_2, porque no ponto em que se cruzassem existiriam duas velocidades de fase diferentes, que não é possível.

O enunciado do teorema de Poincaré-Bendixson é:

> *Em qualquer sistema com apenas duas variáveis de estado (espaço de fase plano), se existir o conjunto limite positivo, ou negativo, de uma trajetória* Γ*, esse conjunto limite deverá ser um dos três casos seguintes:*
>
> 1. *Um ponto de equilíbrio.*
> 2. *Um ciclo.*
> 3. *Uma órbita homoclínica ou heteroclínica.*

Em particular, quando existir o conjunto limite positivo $\omega(\Gamma)$, é designado também por **atrator**. Segundo o teorema de Poncairé-Bendixson, no plano os únicos atratores podem ser pontos de equilíbrio, ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas.

Se o conjunto limite positivo, $\omega(\Gamma)$, de uma trajetória for um único ponto, esse ponto deverá ser um ponto de equilíbrio, que pode ser um nó ou foco estável, ou um ponto de sela. Se o conjunto limite negativo, $\alpha(\Gamma)$, for um único ponto, poderá ser um nó ou foco repulsivo, ou um ponto de sela.

Um ponto de sela pode ser simultâneamente conjunto limite positivo e negativo de uma trajetória; nomeadamente, a trajetória começa nesse ponto de sela e fecha-se terminando no mesmo ponto de sela. Esse tipo de trajetória fechada constitui uma órbita homoclínica.

12.2.2. Critério de Bendixson.

A divergência da velocidade de fase (equação (7.4)) é definida por:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{12.3}$$

Outro teorema importante, designado de critério de Bendixson é o seguinte:

> *Num sistema dinâmico com apenas duas variáveis de estado, se numa região simplesmente conexa R, do plano de fase, a* ***divergência*** *da velocidade de fase for sempre positiva ou sempre negativa, então em R não existe nenhum ciclo, nem órbita homoclínica nem órbita heteroclínica.*

Uma região R simplesmente conexa é uma região sem nenhum buraco no seu interior: a reta que une dois pontos quaisquer na região deverá estar contida completamente em R.

O critério de Bendixson é útil para determinar em que regiões do plano de fase podem existir ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

Exemplo 12.2
Demonstre que um pêndulo, amortecido pela resistência do ar não pode ter nenhum ciclo, nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

Resolução. No capítulo 8 obteve-se a equação de movimento (equação (8.8)) que conduz às equações de evolução para o ângulo, θ e a velocidade angular ω:

$$\dot{\theta} = \omega \qquad\qquad \dot{\omega} = -K_1 \sin\theta - K_2\,|\omega|\,\omega$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas.

A divergência da velocidade de fase é:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial\,(-K_1 \sin\theta - K_2\,|\omega|\,\omega)}{\omega} = -2\,K_2\,|\omega|$$

Assim sendo, conclui-se que a divergência é sempre negativa (sistema dissipativo) e, portanto, não existe nenhum ciclo nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas. No caso conservativo, quando a resistência do ar é nula, $K_2 = 0$, a divergência é nula e não verifica a condição do critério de Bendixson; nesse caso existem ciclos.

Se existir uma curva de evolução fechada C, formada por um ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica, no interior dessa curva fechada e na sua vizinhança, as trajetórias podem ter algum dos 3 comportamentos seguintes:

- Aproximam-se assimptóticamente de C.

- Afastam-se assimptóticamente de C.
- Formam uma família contínua de ciclos.

No primeiro caso, a curva C é o conjunto limite positivo, $\omega(\Gamma)$, de todas as curvas Γ no seu interior. Deve existir necessariamente um ponto de equilíbrio, no interior de C, que seja o conjunto limite negativo $\alpha(\Gamma)$ de todas essas curvas; ou seja, esse ponto de equilíbrio deve ser nó ou foco instável.

No segundo caso, a curva C é conjunto limite negativo, $\alpha(\Gamma)$, de todas as curvas Γ no seu interior. Deve existir necessariamente um ponto de equilíbrio, no interior de C, que seja o conjunto limite positivo $\omega(\Gamma)$ de todas essas curvas; como tal, esse ponto de equilíbrio deve ser nó ou foco estável.

No terceiro caso, um dos ciclos menores pode ser ciclo limite atrativo ou repulsivo, existindo assim um nó ou foco no seu interior, como nos dois casos anteriores. Se nenhum dos ciclos na família de ciclos internos é um ciclo limite, deve existir um centro no interior da família de ciclos.

Independentemente da situação no interior da curva C, no seu exterior podem existir outros ciclos ou C pode ser conjunto limite atrativo ou repulsivo. Isto é, uma órbita fechada pode ser atrativa no interior e no exterior, atrativa no interior mas repulsiva no exterior, etc.

12.3. Bifurcações

No problema 4 do capítulo 10 mostrou-se que, se a base dum pêndulo roda no plano horizontal, com velocidade angular maior que $\sqrt{g/r}$, a posição mais baixa do pêndulo deixa de ser ponto de equilíbrio estável, passando a ser ponto de equilíbrio instável, e aparecem dois novos pontos de equilíbrio estável.

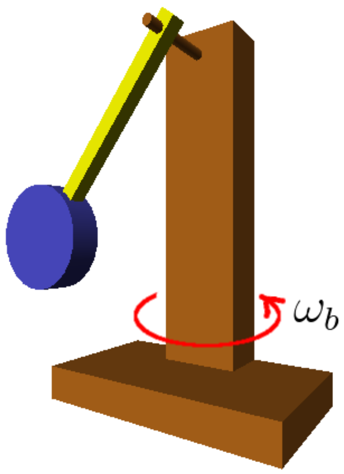


Figura 12.3.: Pêndulo simples com a base em rotação no plano horizontal.

A equação de movimento (ver problema 4 do capítulo 10) conduz às equações de evolução para o ângulo, θ e a velocidade angular, ω

$$\dot{\theta} = \omega \qquad\qquad \dot{\omega} = \sin\theta \left(\frac{l}{r}\,\omega_b^2 \cos\theta - \frac{g}{l}\right) \tag{12.4}$$

O lado esquerdo da figura 12.4 mostra o retrato de fase correspondente a essas equações, no caso em que a velocidade angular da base, ω_b, é menor que $\sqrt{g/r}$. Existem dois pontos de equilíbrio, em $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$; o primeiro ponto é um centro, e o segundo ponto é um ponto de sela.

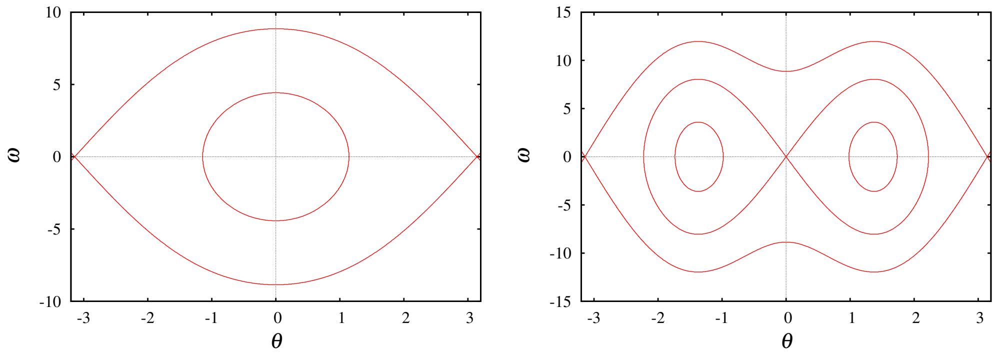


Figura 12.4.: Retrato de fase dum pêndulo com velocidade angular menor (lado esquerdo) e maior (lado direito) que o valor de bifurcação.

O lado direito da figura 12.4 mostra o retrato de fase quando a velocidade angular da base, ω_b, é maior que $\sqrt{g/r}$. O ponto de equilíbrio em $\theta = 0$ torna-se instável, passando a ser um ponto de sela com duas órbitas homoclínicas. Dentro de cada órbita homoclínica há um novo centro. O sistema poderá oscilar em forma periódica à volta de algum dos dois centros.

Diz-se que o sistema sofre uma **bifurcação** em $\omega_b = \sqrt{g/r}$. Imagine que a base do pêndulo estivesse inicialmente em repouso, e o pêndulo na posição de equilíbrio estável, com $\theta = 0$ e $\omega = 0$. Se a base começar a rodar com aceleração angular positiva, chegará um instante em que o estado do pêndulo se torna instável, e qualquer pequena perturbação faz com que o pêndulo suba abruptamente para uma das duas novas posições de equilíbrio estável.

Como normalmente existe alguma incerteza experimental associada às medições de $\theta = 0$ e $\omega = 0$, isso implicará a impossibilidade de prever para qual dos dois novos pontos de equilíbrio irá subir o pêndulo, quando ω_b atingir o valor que produz bifurcação.

Outro exemplo físico simples com bifurcação, já estudado por Euler no século XVIII, é uma barra flexível, por exemplo uma régua plástica apoiada numa mesa, e com uma força externa F que faz com que permaneça na posição vertical. Se F não ultrapassar um valor crítico F_c, a régua permanecerá direta e em equilíbrio. Se a força F ultrapassar o valor crítico F_c, a régua encurva-se, até ficar numa nova posição de equilíbrio em que o centro da régua está afastado uma distância Δx da vertical. Acontece que o desvío da barra pode ser para a direita ou para a esquerda da vertical. Ou seja, existem dois pontos de equilíbrio com Δx positiva ou negativa.

Em função de F, o ponto de equilíbrio $\Delta x = 0$, para $F < F_c$, separa-se em dois pontos de equilíbrio, $\Delta x > 0$ e $\Delta x < 0$, para $F > F_c$. Trata-se de uma bifurcação: em $\Delta x = 0$ ainda existe uma posição de equilíbrio, mas é bastante instável. Aparecem duas novas posições de equilíbrio com Δx positivo e negativo. Com uma régua que seja bastante reta e simétrica em relação às deformações para os dois lados, será difícil prever para qual dos dois lados irá inclinar-se, quando F aumentar por cima do limiar de bifurcação.

12.4. Sistemas caóticos

Num sistema contínuo com duas variáveis de estado, o teorema de Poincaré-Bendixson garante que as curvas de evolução que não têm conjuntos limite positivo nem negativo aproximam-se do infinito nos limites $t \to \infty$ e $t \to -\infty$.

Num sistema contínuo com 3 ou mais variáveis de estado, já não se verifica o teorema de Poincaré-Bendixson. Assim sendo, podem existir curvas de evolução que nunca saem de uma região finita do espaço de fase, mas que não têm conjuntos limite positivo nem negativo. Para qualquer valor de t, positivo ou negativo, a curva de evolução nunca passa novamente por um ponto do espaço de fase por onde já passou num instante t_1 (se o fizer, entrava num ciclo e teria um conjunto limite). O sistema evolui para um número infinito de estados diferentes, sem sair duma região finita do espaço de fase; nomeadamente, as variáveis de estado nunca chegam a crescer indefinidamente. Esse tipo de comportamento chama-se **caos**.

Quando o conjunto limite positivo de curvas de evolução for o mesmo, esse conjunto limite designa-se **atrator**. As curvas de evolução caóticas não têm nenhum conjunto limite, mas costumam aparecer na proximidade de um conjunto de pontos de equilíbrio (ou ciclo) atrativos e repulsivos, designados **atrator estranho**. A conjugação de atração e repulsão dá origem ao comportamento caótico.

12.4.1. Bola elástica sobre uma mesa oscilatória

Um sistema mecânico simples em que existem curvas de evolução caóticas é uma bola que cai para uma mesa horizontal, perde uma percentagem da sua energia quando choca com a mesa e após a colisão é projetada para cima. Se a mesa estiver estática, a bola acabará por ficar em repouso sobre a mesa após alguns saltos. Se a mesa tiver um movimento oscilatório, a bola pode ganhar energia se colidir com a mesa quando esta está a deslocar-se para cima. Se a oscilação da mesa for suficientemente rápida e com amplitude suficientemente grande, a trajetória da bola poderá ser caótica.

No caso em que a mesa estiver estática, em cada colisão com a mesa a velocidade da bola muda de sentido e o seu módulo é multiplicado pelo **coeficiente de restituição**, α, menor que 1. Com a mesa em movimento, se v_o e v_m forem as componentes verticais da velocidade da bola e da mesa, no instante da colisão, e se v_f for a componente vertical da velocidade da bola imediatamente após a colisão, verifica-se a seguinte equação

$$v_f - v_m = -\alpha(v_o - v_m) \tag{12.5}$$

nomeadamente em cada colisão, a velocidade da bola relativa à mesa muda de sentido e o seu valor diminui num fator α. Assim, a velocidade da bola após a colisão é,

$$v_f = (\alpha + 1)\, v_m - \alpha\, v_o \tag{12.6}$$

Se o movimento da mesa for harmónico simples, escolhendo a origem de coordenadas e do tempo de forma apropriada, a expressão para a altura da superfície da mesa em função do tempo será,

$$y_m = \beta\, \sin(\omega\, t) \tag{12.7}$$

a derivada de y_m é igual à velocidade instantânea da mesa,

$$v_m = \omega\beta\, \cos(\omega\, t) \tag{12.8}$$

Para traçar a curva de evolução no espaço de fase, começa-se por escolher alguns valores para os parâmetros:

```
(%i11) [alfa, beta, omega]: [0.9, 0.3, 8]$
(%i12) [g, dt, vi, fase, yi]: [-9.8, 0.01, 0, 0, 5]$
```

A altura e a velocidade da bola em cada instante serão armazenadas numa lista, `pontos`, que será utilizada no fim para obter o gráfico da curva de evolução no espaço de fase.

```
(%i13) pontos: [[yi, vi]]$
(%i14) for i thru 7600 do
  (yi: yi + vi*dt, ym: beta*sin(fase), vm: beta*omega*cos(fase),
  if (vi < vm) and (yi < ym)
     then (vi: (1 + alfa)*vm - alfa*vi)
     else (vi: vi + g*dt),
  fase: fase + omega*dt,
  pontos: cons([yi, vi], pontos))$
```

A condição que indica a ocorrência de uma colisão da bola com a mesa é quando as alturas das duas aproximam-se para o mesmo valor e a componente vertical da velocidade da bola é menor que a componente vertical da mesa (bola a aproximar-se da mesa). Como no programa o tempo não aumenta continuamente mas em intervalos discretos, as duas alturas não chegam a ser iguais; a condição que será usada para indicar a ocorrência da colisão será quando a altura do centro da bola for menor que a altura da superfície da mesa.

Para representar a curva de evolução no espaço de fase pode usar-se o comando:

```
(%i15) plot2d([discrete,pontos], [xlabel,"y"], [ylabel,"v"])$
```

O resultado é apresentado no lado direito da figura 12.5; são apresentadas apenas duas das 3 variáveis de estado, a altura da bola e a velocidade, pois o tempo também é uma variável de estado neste caso (o sistema não é autónomo). Consequentemente, a curva de evolução da figura 12.5 não chega a cruzar-se com si própria, porque os diferentes pontos da curva têm todos valores diferentes da terceira variável de estado.

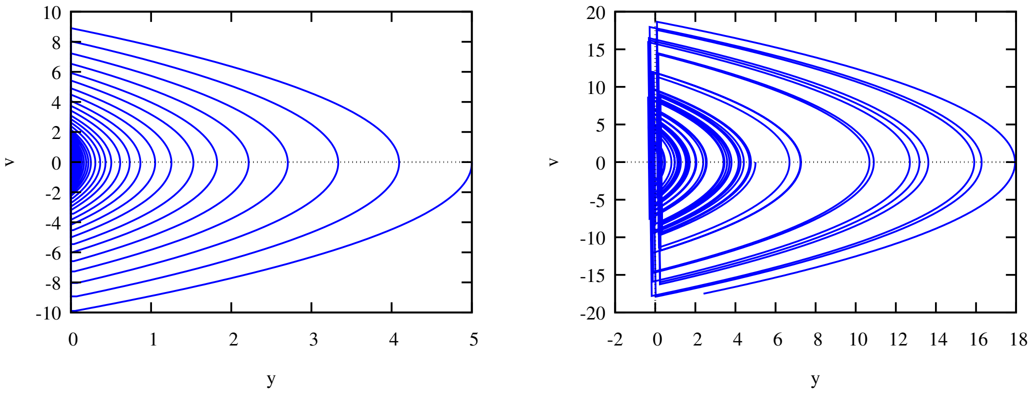


Figura 12.5.: Curva de evolução da bola em queda livre sobre uma mesa. No lado esquerdo quando a mesa está estática e no lado direito quando a mesa oscila.

As diferentes parábolas no lado direito da figura 12.5 não surgem de forma ordenada, de maior para menor ou de menor para maior, mas de forma bastante irregular. O ponto de equilíbrio em $y = 0$, $v = 0$ desaparece e é substituído por um ciclo, que corresponde à situação em que a bola estivesse em repouso em relação à mesa, oscilando com o mesmo movimento oscilatório; esse ciclo é um atrator estranho.

Pode representar-se também num gráfico as posições y e velocidades v da bola em cada instante em que há uma colisão com a mesa. O seguinte programa para o Maxima, cria uma lista com esses valores:

```
(%i16) discreto(y0,dt,n) :=
 block([pontos:[],v:0,y:y0,fase:0,g:-9.8,
                alfa:0.9,beta:0.28,omega:8,vm,ym],
  for i thru n do
    (y:y + v*dt, ym:beta*sin(fase), vm:beta*omega*cos(fase),
    if (v < vm) and (y < ym)
      then (v:(1 + alfa)*vm - alfa*v,pontos:cons([ym,v],pontos))
      else (v: v + g*dt),
    fase: fase + omega*dt,
    if fase>2*%pi then fase:fase-2*%pi),
  pontos)$
```

As variáveis de entrada para esse programa são a altura inicial da bola, o valor dos incrementos de tempo, Δt, e o número de iterações (o número de pontos obtidos será muito menor). Experimentam-se diferentes valores do números de iterações, até obter-se um número suficientemente elevado de pontos que permitam visualizar o comportamento sequência. Por exemplo, a figura 12.6 foi obtida com os seguintes comandos:

```
(%i17) pontos: discreto(5,0.01,200000)$
(%i18) plot2d([discrete,pontos],[xlabel,"y"],[ylabel,"v"],
                                    [style,[points,1.2]])$
```

A ordem em que aparecem os pontos no gráfico 12.6 é bastante irregular, mas com muitos pontos começa a ser visível um padrão elíptico repetitivo. Esses padrões elípticos são

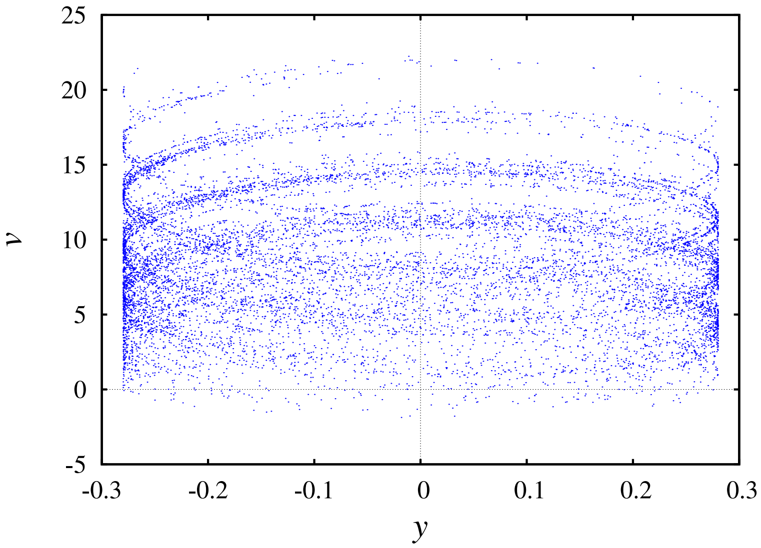


Figura 12.6.: Altura e velocidade da bola nos instantes em que choca com a mesa oscilatória.

réplicas da curva de evolução no espaço de fase do movimento harmónico simples da mesa, deslocada com diferentes valores da velocidade com que a bola bate na mesa.

O sistema obtido pela sequência de alturas y_i e velocidades v_i em cada colisão com a mesa, constitui um sistema dinâmico discreto de segunda ordem. Neste caso trata-se de um sistema discreto caótico. Em contraste com os sistemas contínuos, onde o comportamento caótico aparece unicamente quando há 3 ou mais variáveis de estado, os sistemas dinâmicos discretos com qualquer número de variáveis de estado podem ser caóticos.

12.4.2. Equações de Lorenz

No sistema estudado na secção anterior, a curva de evolução caótica permanece numa região finita do plano $y-v$, mas a terceira variável de fase, o tempo, está sempre a aumentar e, portanto, não permanece numa região finita. Outro exemplo de sistema caótico no qual todas as variáveis permanecem numa região finita do espaço de fase é o sistema de Lorenz.

Em 1963, o meteorologista E. N. Lorenz introduziu um modelo meteorológico para as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos. As três equações diferencias do sistema são as seguintes

$$\dot{x} = \sigma\,(y-x) \tag{12.9}$$

$$\dot{y} = r\,x - y - x\,z \tag{12.10}$$

$$\dot{z} = x\,y - b\,z \tag{12.11}$$

onde x representa a amplitude das correntes de conveção, y é a diferença de temperaturas entre as correntes ascendente e descendente, e z representa o desvio da temperatura normal no plano. Os três parâmetros σ, r e b são positivos e dependem das propriedades físicas do fluxo de ar.

Algumas propriedades deste sistema são as seguintes:

- Existe simetria em relação à transformação $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$
- O eixo z é invariante; nomeadamente, se o estado em algum instante estiver no eixo z, continuará a evoluir nesse eixo.
- Se o parâmetro r (número de Rayleigh) estiver dentro do intervalo $0 < r < 1$, o único ponto de equilíbrio é a origem, que é ponto de equilíbrio estável.
- Existe uma bifurcação do ponto de equilíbrio na origem, quando $r = 1$. Para valores r superiores a 1, a origem torna-se ponto de equilíbrio instável, e aparecem outros dois pontos de equilíbrio, com os mesmo valor de z, mas com valores simétricos de x e y.
- Se r estiver compreendido entre 1 e o valor crítico:

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \tag{12.12}$$

  os dois novos pontos de equilíbrio são estáveis e a origem é instável. Para valores de r superiores ao valor crítico, os 3 pontos de equilíbrio são instáveis, e constituem um atrator estranho.

Alguns valores típicos de σ (número de Prandtl) e de b são 10 e 8/3. Com esses valores as equações de Lorenz são,

```
(%i19) eq1: 10*(y-x)$
(%i20) eq2: r*x-y-x*z$
(%i21) eq3: x*y-8*z/3$
```

Com esses parâmetros, o valor crítico de r é aproximadamente 24.737. O valor $r = 28$, conduzirá a um sistema caótico:

```
(%i22) eqs: [eq1,subst(r=28,eq2),eq3]$
(%i23) vars: [x,y,z]$
```

Para obter a curva de evolução com valores iniciais $x = y = z = 5$, desde $t = 0$ até $t = 20$, convém primeiro conferir que a solução numérica tenha um erro numérico aceitável; isso consegue-se diminuindo sucessivamente o valor de Δt, até obter resultados semelhantes:

```
(%i24) sol: rk(eqs,vars,[5,5,5],[t,0,20,0.005])$
(%i25) last(sol);
(%o25) [20.0, - 9.828387365172379, - 15.51963096146439,
                                               19.70704286873746]
(%i26) sol: rk(eqs,vars,[5,5,5],[t,0,20,0.001])$
(%i27) last(sol);
(%o27) [20.0, - 9.982849005403644, - 16.02444928910877,
                                               19.29327684005623]
(%i28) sol: rk(eqs,vars,[5,5,5],[t,0,20,0.0005])$
(%i29) last(sol);
(%o29) [20.0, - 9.9832189094693, - 16.03359008769737,
                                               19.27538731261633]
```

A lista `sol` pode ser usada para obter vários gráficos diferentes. Por exemplo, a figura 12.7 mostra a solução obtida para x em função do tempo (linha contínua). O valor de x oscila de forma complicada, sem repetir o mesmo padrão de oscilações.

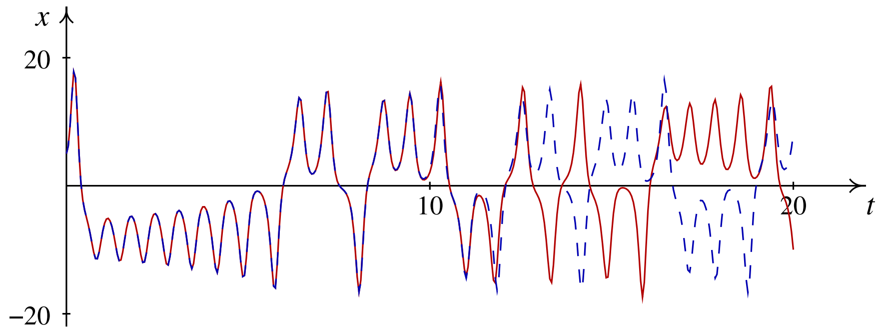


Figura 12.7.: Oscilações do sistema de Lorenz para dois valores muito próximos do estado inicial: $x(0) = 5$ (linha contínua) e $x(0) = 5.005$ (linha a tracejado). Parâmetros: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, $y(0) = 5$, $z(0) = 5$.

Repetindo o mesmo cálculo, mas mudando ligeiramente o valor inicial de x para 5.005 e mantendo os mesmos valores iniciais de y e z, obtém-se a solução apresentada com linha a tracejado na figura 12.7. As duas soluções parecem idênticas até $t = 10$, mas a partir desse tempo começam a diferir drasticamente.

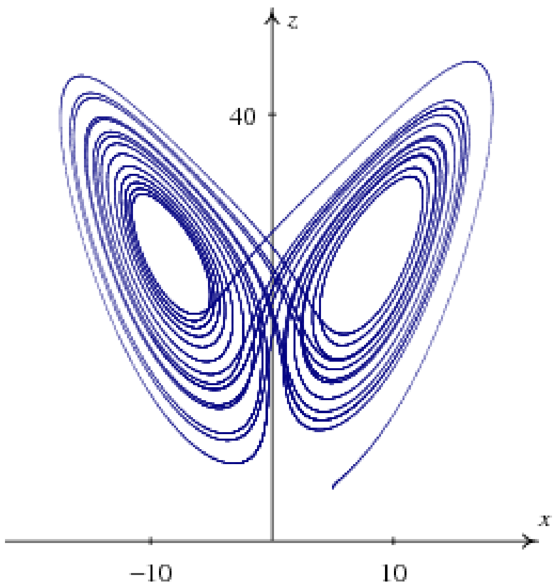
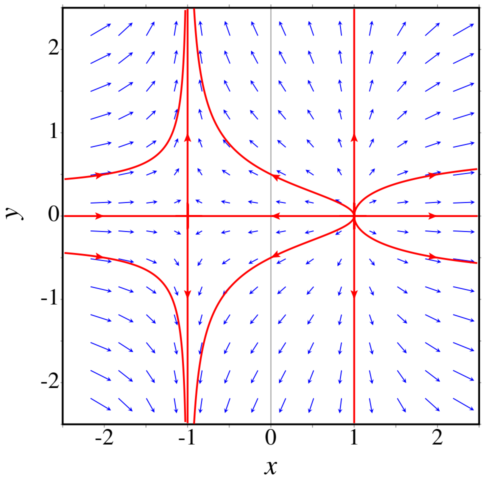


Figura 12.8.: Curva de evolução caótica do sistema de Lorenz, projetada no plano xz. Os parâmetros são os mesmos da figura 12.7, com $x(0) = 5$.

Um gráfico das coordenadas z e x da solução obtida numericamente mostra que o estado do sistema oscila algumas vezes à volta de um dos pontos de equilíbrio fora da origem, saltando repentinamente para o outro ponto de equilíbrio fora da origem (ver figura 12.8). Nesse ponto são realizadas outro número de oscilações antes de regressar para o outro ponto. O número de oscilações perto de cada ponto, antes de passar para o próximo, não obedece nenhum padrão repetitivo.

Perguntas

1. No sistema representado na figura, qual é o conjunto limite negativo da trajetória que passa pelo ponto (0, 0.5)?



A. (0, -0.5)
B. (1, 0)
C. (0, 0)
D. (-1, 0)
E. não existe

2. Se a curva de evolução de um sistema dinâmico, no espaço de fase, passa duas vezes pelo mesmo ponto P, o qué é que podemos concluir?

A. o ponto P é um ponto de equilíbrio.
B. o sistema é caótico.
C. o sistema tem mais do que duas variáveis de estado.
D. o sistema tem duas variáveis de estado.
E. a curva é um ciclo.

3. Qual das seguintes não é uma propriedade dos sistemas caóticos?

A. sistema não linear.
B. 3 ou mais variáveis de estado.
C. existência de atratores estranhos.
D. soluções não periódicas.
E. inexistência de pontos de sela.

4. Para resolver numericamente um sistema caótico, é preciso usar uma maior precisão do que para um sistema não caótico. Isso é devido a que um sistema caótico:

A. não tem curvas de evolução periódicas.
B. tem mais do que duas variáveis de estado.
C. é muito sensível às condições iniciais.
D. produz fractais.
E. tem soluções que crescem muito rapidamente.

5. Em que condições poderá um sistema de duas espécies tornar-se caótico?

A. só se for sistema predador presa.
B. só se existir competição entre as espécies.
C. só se existir ajuda mútua entre espécies.
D. só se o sistema não for autónomo.
E. nunca.

Problemas

1. Em cada caso, encontre os conjuntos limite positivo e negativo das trajetórias que passam pelos pontos (0, 0) e (1, 1), usando técnicas analíticas ou gráficas:

a) $\dot{x} = x$, $\dot{y} = x^2 + y^2 - 1$.

b) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$

2. Demonstre que o sistema

$$\dot{x} = 2x - y + 36x^3 - 15y^2 \qquad \dot{y} = x + 2y + x^2 y + y^5$$

não tem ciclos, nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

3. A forma geral do sistema de Rössler depende de 3 parâmetros positivos a, b e c:

$$\dot{x} = -y - z \qquad \dot{y}x + cy \qquad \dot{z} = a + (x - b)z$$

O objetivo deste problema é investigar a solução do sistema para diferentes valores de c, com a e b fixos. Em cada caso deverá usar o programa `rk` várias vezes: a primeira vez para deixar evoluir o sistema um tempo suficientemente grande, para que o ponto final seja parte do conjunto limite positivo (ou perto dele). As outras vezes que executar o programa `rk`, usará como valores iniciais os valores finais da primeira execução. Use em todos os casos $a = 2$, $b = 4$, e valores iniciais para a primeira instância de `rk`: $x = y = z = 2$.

(a) Para $c = 0.3$, use o programa `rk` para obter a solução no intervalo entre $t = 0$ e $t = 80$, com $\Delta t = 0.01$. Execute novamente o programa `rk`, usando como valores iniciais os valores finais da execução anterior, mas com t entre 0 e 5. Trace o gráfico de y vs x. Execute repetidamente o programa `rk`, aumentado gradualmente o valor final de t, até conseguir que o gráfico forme uma curva fechada. Qual é o valor final de t que produz a curva fechada?

(b) Repita o procedimento da alínea anterior, para $c = 0.35$. Diga qual é o valor final de t que faz com que a curva seja fechada.

(c) Repita o mesmo procedimento, para $c = 0.375$, e encontre o valor final de t que produz a curva fechada.

(d) Em $c = 0.398$, o sistema torna-se caótico. A curva de evolução já não chega a ser nunca fechada para nenhum valor de t. Repita o procedimento das alíneas anteriores, mas na segunda parte trace unicamente o gráfico para t entre 0 e 250.

4. Encontre os pontos de equilíbrio do sistema de Lorenz com os seguintes parâmetros:

$$\dot{x} = 10(y - x) \qquad \dot{y} = 28x - y - zx \qquad \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z$$

e demonstre que o valor de $r = 28$ é superior ao valor crítico para que o sistema seja caótico.

Respostas

Perguntas: 1. B. **2.** E. **3.** E. **4.** C. **5.** D.

Problemas

1. (*a*) para o ponto (0, 0), α é o ponto (0, 1) e ω é o ponto (0, -1). Para (1, 1) α é o ponto (0, 1) e ω não existe. (*b*) para o ponto (0, 0), que é ponto de equilíbrio, α e ω são o próprio ponto. Para (1, 1) α e ω são iguais ao círculo que com centro na origem e raio igual a $\sqrt{2}$.

2. A divergência é $4+109x^2+5y^4$, que é sempre positiva; o critério de Bendixson implica que não existe nenhum ciclo nem órbitas homo/heteroclínicas.

3. (*a*) $t=7$ (*b*) $t=13$ (*c*) $t=25$.

4. Os 3 pontos de equilíbrio são: (0, 0, 0), (8.485, 8.485, 27) e (-8.485, -8.485, 27). O valor crítico de r é 24.737, menor que 28.

A. Tutorial do Maxima

A.1. Introdução

Maxima é um pacote de software livre. No seu sítio na Web, http://maxima.sourceforge.net, pode ser descarregado e existe muita documentação que também pode ser copiada livremente.

Maxima é um dos sistemas de álgebra computacional (CAS) mais antigos. Foi criado pelo grupo MAC no MIT, na década de 60 do século passado, e inicialmente chamava-se *Macsyma* (*project MAC's SYmbolic MAnipulator*). *Macsyma* foi desenvolvido originalmente para os computadores de grande escala DEC-PDP-10 que eram usados em várias instituições académicas.

Na década de 80, foi portado para várias novas plataformas e uma das novas versões foi denominada *Maxima*. Em 1982 o MIT decidiu vender *Macsyma* como software priprietário e, simultaneamente, o professor William Schelter da Universidade de Texas continuou a desenvolver o *Maxima*. Na segunda metade da década de 80 apareceram outros sistemas CAS proprietários, por exemplo, *Maple* e *Mathematica*, semelhantes a *Macsyma*. Em 1998, o professor Schelter obteve autorização do DOE (*Department of Energy*), que tinha os direitos de autor sobre a versão original do *Macsyma*, para distribuir livremente o código fonte do *Maxima*. Após a morte do professor Schelter em 2001, formou-se um grupo de voluntários que continuam a desenvolver e distribuir o *Maxima* como *software* livre.

No caso dos sistemas CAS, as vantagens do *software* livre são bastante importantes. Quando um método falha ou dá respostas muito complicadas é bastante útil ter acesso aos pormenores da implementação subjacente ao sistema. Por outro lado, no momento em que começarmos a depender dos resultados de um sistema CAS, é desejável que a documentação dos métodos envolvidos esteja disponível e que não existam impedimentos legais que nos proíbam de tentar descobrir ou modificar esses métodos.

A.2. Xmaxima

Existem várias interfaces diferentes para trabalhar com o Maxima. Pode ser executado desde uma "consola", ou pode ser usada algumas das interfaces gráficas como: `wxmaxima`, `imaxima` ou `xmaxima`. A figura A.1, mostra o aspeto da interface **Xmaxima**, que é a interface gráfica desenvolvida originalmente pelo professor William Schelter.

Xmaxima serve apenas como interface para estabelecer uma ligação (*socket*) com o

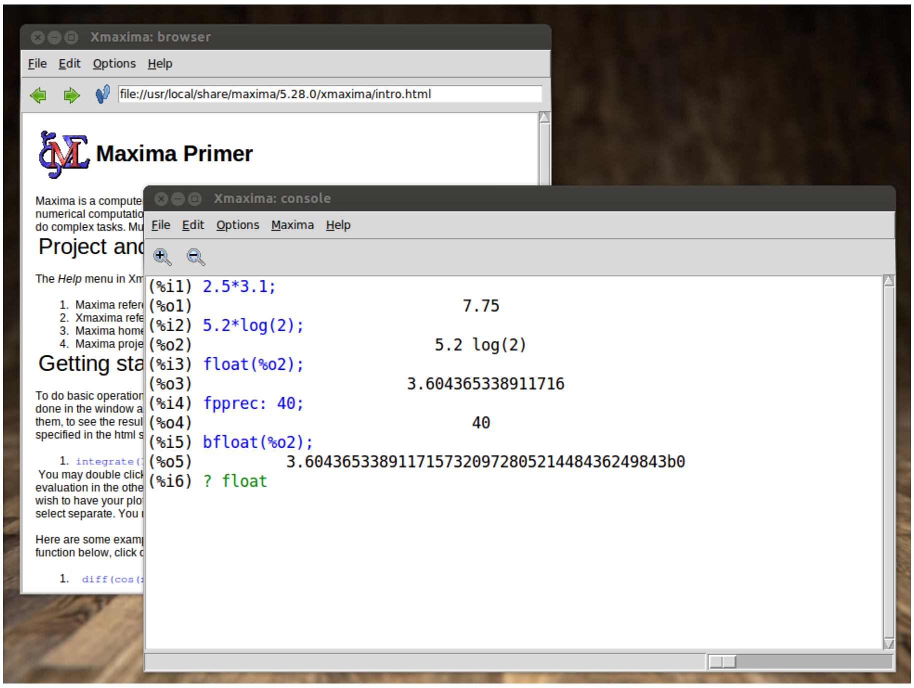


Figura A.1.: A interface gráfica *Xmaxima*.

programa Maxima, enviar através dessa ligação os comandos que o utilizador escreve, e apresentar as respostas dadas pelo Maxima.

Xmaxima normalmente abre duas janelas independentes (figura A.1). Uma das janelas, chamada **browser**, mostra um tutorial e permite consultar o manual ou páginas Web. A segunda janela, a **consola**, é onde deverão ser escritos os comandos do Maxima e onde serão obtidas as respostas a esses comandos.

No menu "Edit" existem opções para fazer reaparecer um comando que já foi escrito ("previous input") ou para copiar e colar texto; algumas opções nos menus também podem ser acedidas com as teclas de atalho apresentadas no menu.

Diferentes cores são usadas para distinguir os comandos que já foram processados (em azul) do comando que está a ser escrito e que ainda não foi enviado para o Maxima (em verde); o texto a negro são os resultados obtidos (ver figura A.1). Para modificar um comando já executado ou começar um novo comando, há que ter atenção a que o texto escrito esteja a aparecer a verde ou azul, para garantir que será enviado para o Maxima; caso contrário, poderá ser necessário usar as opções "Interrupt" ou "Input prompt", no menu "File", para recuperar o estado em que Xmaxima aceita comandos para enviar para o Maxima.

Também é possível deslocar o cursor para alguma entrada anterior no ecrã (a azul), modificá-la e premir na tecla de fim de linha para repetir o mesmo comando.

A.3. Entrada e saída de dados

Quando se inicia uma sessão do Maxima, aparece um símbolo `(%i1)`. Ao lado desse símbolo deverá ser escrito um comando válido, terminado pelo símbolo de ponto e vírgula. Premindo a tecla de fim de linha, o comando que foi escrito ficará gravado numa variável `%i1` e o resultado será gravado numa outra variável `%o1` e apresentado no ecrã. A seguir aparecerá o símbolo `(%i2)`, que permite dar um segundo comando e assim sucessivamente. O uso mais básico que pode ser feito do Maxima é como calculadora, para realizar contas, como nos seguintes exemplos.

```
(%i1) 2.5*3.1;
(%o1)                      7.75
(%i2) 5.2*log(2);
(%o2)                   5.2 log(2)
```

O resultado `%o2` mostra dois aspetos importantes no funcionamento do Maxima. Em primeiro lugar, o logaritmo natural de 2 não foi calculado, porque o resultado é um número irracional que não pode ser representado em forma numérica exata. A outra coisa importante é que o carater `*`, que é sempre necessário usar nos comandos de entrada para indicar um produto, não foi escrito na saída. Isto é devido a que a saída está a ser apresentada, por omissão, num modo denominado `display2d` em que a saída é centrada no ecrã e apresentada numa forma semelhante a como costumamos escrever expressões algébricas a mão.

Uma forma de obter uma representação numérica aproximada do logaritmo de 2 seria forçar a passagem para números de ponto flutuante, escrevendo o 2 com um ponto decimal: `log(2.0)`; outra forma seria usar a função `float` assim: `float(log(2))`. Quando tenha sido obtido algum resultado que inclui um número irracional, como no caso do resultado `%o2`, pode obter-se a representação aproximada desse resultado usando a seguinte sintaxe:

```
(%i3) float(%o2);
(%o3)               3.604365338911716
```

A função `float` representa o seu argumento em ponto flutuante com 16 algarismos. A função `bfloat` (*big float*) produz um resultado semelhante, mas permite usar uma precisão numérica mais elevada; a variável `fpprec` (que significa *floating point precision*), indica quantas casas decimais serão usadas e o seu valor predefinido é de 16. Aumentando o valor de `fpprec` é possível obter maior precisão; por exemplo, para mostrar o resultado `%o2` com 40 algarismos significativos, usam-se os seguintes comandos:

```
(%i4) fpprec: 40;
(%o4)                        40
(%i5) bfloat(%o2);
(%o5)   3.604365338911715732097280521448436249843b0
```

A letra b e o número 0 no fim do resultado `%o5` indicam que se trata de um número no formato de ponto flutuante de precisão elevada. O número a seguir à letra é o expoente;

neste caso em que o expoente é zero, o número deverá ser multiplicado por $10^0 = 1$. A notação de uma letra b seguida de um inteiro pode ser usada também para forçar a que um resultado seja apresentado no formato de ponto flutuante de precisão elevada; por exemplo, `5.2*log(2b0)`.

Para consultar a informação do manual sobre alguma das funções ou variáveis especiais (por exemplo, as funções referidas acima: `display2d`, `float`, `bfloat` ou a variável `fpprec`), usa-se a função `describe`, que pode ser abreviada com um símbolo de interrogação seguido pelo nome da função ou variável; por exemplo

```
(%i6) ? float

 -- Function: float (<expr>)
     Converts integers, rational numbers and bigfloats in <expr> to
     floating point numbers.  It is also an `evflag', `float' causes
     non-integral rational numbers and bigfloat numbers to be converted
     to floating point.


  There are also some inexact matches for `float'.
  Try `?? float' to see them.

(%o6)                       true
```

A.4. Variáveis

Para dar um valor a uma variável usa-se o símbolo "`:`" e não o símbolo de igualdade "=", que será utilizado para definir equações matemáticas. O nome das variáveis poderá ser qualquer combinação de letras, números e os símbolos % e _, mas o primeiro caráter não pode ser um número. *Maxima* faz distinção entre maiúsculas e minúsculas. Por exemplo:

```
(%i1) a: 2;
(%o1)                            2
(%i2) b: -2$

(%i3) c: -4$

(%i4) Raiz1: (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
(%o4)                            2
(%i5) (-b - sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
(%o5)                          - 1
```

nas variáveis `a`, `b`, `c` e `Raiz1` foram armazenados os valores 2, -2, 4 e 2.

Observe que as entradas `%i2` e `%i3` foram terminadas com o símbolo $, em vez de ponto e vírgula. Isso faz com que o comando seja executado, mas sem que o resultado seja apresentado no ecrã.

Para eliminar o valor associado a uma variável usa-se `remvalue`; no seguinte exemplo remove-se o valor numérico de `a` e atribui-se a `Raiz1` uma expressão que depende de `a`:

```
(%i6) remvalue (a)$

(%i7) Raiz1: (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
                        sqrt(16 a + 4) + 2
(%o7)                   ------------------
                               2 a
```

Para eliminar os valores atribuídos a todas as variáveis escreve-se `remvalue(all)`. Observe que o valor atribuído a uma variável não tem de ser um valor numérico; no comando `%i7` substitui-se o valor de 2 que já tinha a variável `Raiz1` pela expressão apresentada em `%o7`.

Para substituir uma variável numa expressão por um valor numérico, usa-se o comando `subst`; por exemplo, para obter o valor de `Raiz1` no caso em que `a` for igual a 1 e aproximar o resultado exato a um número com algumas casas decimais, usam-se os seguintes comandos:

```
(%i8) subst (a=1, Raiz1);
                           2 sqrt(5) + 2
(%o8)                      -------------
                                 2
(%i9) float(%o8);
(%o9)                   3.23606797749979
```

observe que os comandos anteriores não alteraram o conteúdo da variável `Raiz1`.

Maxima define internamente algumas variáveis, com nomes a começar pelo símbolo %. Um exemplo são as variáveis %1, %1, %i2, %o2, etc., usadas para armazenar os comandos já inseridos e os seus resultados. O símbolo % representa o último resultado obtido; por exemplo, no comando `%i9` seria equivalente escrever apenas %, em vez de %o8.

No comando `%i5` não foi indicado nenhum nome de variável para armazenar a expressão que foi escrita; no entanto, o resultado foi armazenado automaticamente na variável `%o5`, que pode ser usada mais tarde, na mesma forma que é usada a variável `Raiz1`. Convém não usar nomes de variáveis iguais aos nomes de funções do Maxima, embora seja possível ter funções, variáveis e outros objetos com os mesmos nomes.

Uma variável pode ser usada também para armazenar uma equação matemática; por exemplo:

```
(%i10) segunda_lei: F = m*a;
(%o10)                       F = a m
```

Observe que, normalmente, os comandos inseridos são simplificados pelo Maxima antes de serem executados. Neste caso, a simplificação consistiu em reordenar as variáveis no produto `m*a` em ordem alfabética. Se alguma das 3 variáveis `F`, `m` ou `a` tivesse algum valor ou expressão já atribuída, esses valores ou expressões teriam sido substituídos, antes de armazenar a equação resultante na variável `segunda_lei`. Neste caso nenhuma das 3 variáveis tinham valores atribuídos; se a seguir fosse atribuído um valor a uma das variáveis, a equação que já foi armazenada em `segunda_lei` não seria alterada, como ilustram os seguintes comandos:

```
(%i11) a: 3;
(%o11)                          3
(%i12) segunda_lei;
(%o12)                        F = a m
```

Para atribuir valores nessa equação já armazenada, há que usar o comando `subst`; por exemplo:

```
(%i13) subst([m=2, 'a=5], segunda_lei);
(%o13)                        F = 10
```

Observe que quando são substituídas várias variáveis numa expressão é necessário colocar todos os valores das variáveis separados por vírgulas e entre parêntesis retos. Outro símbolo útil é o apóstrofo, que impede que seja substituído o valor armazenado numa variável; no comando `%i13` colocou-se um apóstrofo antes da variável `a`, porque se tivesse sido substituído o valor numérico dessa variável, a expressão ficava "3=5" e nenhum valor seria atribuído à variável `a`

```
(%i14) subst([m=2, 3=5], segunda_lei);
(%o14)                        F = 2 a
```

A.5. Listas

Uma variável pode conter também uma lista de valores, que são colocados entre parêntesis rectos, separados por vírgulas. Por exemplo, o comando seguinte guarda na variável `quadrados` uma lista com os quadrados dos 5 primeiros números inteiros positivos:

```
(%i1) quadrados: [1, 4, 9, 16, 25]$
```

Muitas das operações entre números realizadas no Maxima podem também ser realizadas com listas. Por exemplo, para obter outra lista em que cada elemento é a raiz quadrada dum elemento na lista anterior, multiplicado por 3, basta escrever:

```
(%i2) 3*sqrt(quadrados);
(%o2)                    [3, 6, 9, 12, 15]
```

Os elementos da lista são contados a começar por 1 e obtêm-se colocando o número do elemento entre parêntesis retos; por exemplo, o terceiro elemento da lista `quadrados` é 9 e pode ser obtido assim:

```
(%i3) quadrados[3];
(%o3)                         9
```

Uma função muito útil para criar listas é `makelist`, que expande uma expressão dada com diferentes valores de uma variável. O primeiro argumento dado a `makelist` é a expressão, o segundo argumento é o nome da variável que será substituída na expressão anterior por uma sequência de números que vão desde um valor inicial até um valor final definidos pelo terceiro e quarto argumentos. Se houver um quinto argumento, será o incremento usado para os valores da variável; caso contrário, o incremento da variável será 1. Dois exemplos do seu uso são os seguintes

```
(%i4) cubos1: makelist ( i^3, i, 1, 5 );
(%o4)                    [1, 8, 27, 64, 125]
(%i5) cubos2: makelist ( i^3, i, 1, 5, 0.6);
(%o5) [1, 4.096000000000001, 10.648, 21.95200000000001,
                         39.30400000000001, 64.0, 97.33599999999998]
```

Na primeira lista foram calculados os cubos de 1, 2, 3, 4 e 5. Na segunda, foram calculados os cubos de 1, 1.6, 2.2, 2.8, 3.4, 4 e 4.6. O terceiro argumento pode ser também outra lista, com os valores que deverão ser dados à variável; por exemplo, para criar uma lista com o cubo dos números 5, -3 e 8, usa-se:

```
(%i6) makelist ( i^3, i, [5, -3, 8]);
(%o6)                     [125, - 27, 512]
```

A.6. Constantes

Existem algumas constantes importantes já predefinidas no Maxima. Os seus nomes começam sempre com o símbolo %. Três constantes importantes são o número π, representado por `%pi`, o número de Euler, e, base dos logaritmos naturais, representado por `%e`, e o número imaginário $i = \sqrt{-1}$, representado por `%i`.

Tanto `%pi` como `%e` são números irracionais, que não podem ser representados em forma numérica exata, mas pode obter-se uma aproximação numérica com o número de casas decimais desejadas; por exemplo, as primeiras 200 casas decimais do número π são:

```
(%i1) fpprec: 200$
(%i2) bfloat(%pi);
(%o2) 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\
58209749445923078164062862089986280348253421170679821480865\
13282306647093844609550582231725359408128481117450284102701\
938521105559644622948954930382b0
```

em que o caráter "\" no fim de uma linha indica que continua na linha seguinte.

O número `%i` é útil para trabalhar com números complexos. Por exemplo:

```
(%i3) (3 + %i*4) * (2 + %i*5);
(%o3)                (4 %i + 3) (5 %i + 2)
```

Para que o resultado anterior seja apresentado como um único número complexo, com parte real e parte imaginária, usa-se a função `rectform` (que significa *rectangular form*):

```
(%i4) rectform(%);
(%o4)                      23 %i - 14
```

A.7. Guardar informação entre sessões

Para guardar todos os comandos que foram escritos durante uma sessão de trabalho no Xmaxima, existe a opção "*Save Maxima Input to File*" no menu "*File*". O ficheiro gravado com essa opção pode ser carregado mais tarde no Maxima e todos os comandos no ficheiro serão executados como se tivessem sido escritos sequencialmente, usando a opção "*Batch File*" no menu "*Edit*". As funções `stringout` e `batch` do Maxima permitem realizar as mesmas tarefas, sem ter de usar os menus do Xmaxima.

Também pode ser útil preparar previamente um ficheiro de texto com os comandos que serão usados numa sessão do Maxima e a seguir carregar esse ficheiro com a opção "*Batch File*". Dessa forma, se houver um erro que exige que todos os comandos sejam inseridos novamente, bastará corrigir o ficheiro "batch" e carregá-lo novamente.

A opção "*Save Console to File*" do Xmaxima, no menu "*Edit*", guarda toda a informação que apareceu no ecrã, incluindo os símbolos `%i1`, `%o1`, `%i2`, `%o2`, etc.

Alguns comandos devam ser executados novamente em sessões de trabalho posteriores, por exemplo, a definição de uma função usada com frequência, podem ser colocados num ficheiro que depois será carregado usando a função `batch`, com argumento igual ao nome do ficheiro, se o ficheiro se encontrar no directório onde o Maxima procura ficheiros executáveis do utilizador. A localização desse diretório pode ser descoberta olhando para o conteúdo da variável `maxima_userdir`. Se o ficheiro não estiver nesse diretório, nem no diretório de trabalho, será preciso indicar o nome completo do ficheiro, incluindo o caminho do diretório onde se encontra.

Para que um ficheiro "batch" seja carregado automaticamente cada vez que se inicia uma nova sessão do Maxima, deverá ter o nome `maxima-init.mac` e estar localizado num dos diretórios em que são procurados ficheiros executáveis do utilizador. Por exemplo, se existir um ficheiro `maxima-init.mac` com o seguinte conteúdo:

```
grav: 9.8$
fpprintprec: 12$
```

cada vez que se iniciar uma sessão do Maxima ficará definida uma variável `grav` com valor predefinido igual a 9.8. A variável `fpprintprec` é uma variável interna que estabelece o número máximo de casas decimais apresentadas nos resultados de ponto flutuante, neste caso doze casas decimais.

A.8. Expressões e equações

Uma expressão pode conter operações matemáticas com variáveis indefinidas. Por exemplo:

```
(%i1) 3*x^2 + 2*cos(t)$
```

Essas expressões podem ser depois usadas para produzir outras expressões. Por exemplo:

```
(%i2) %^2 + x^3;
                             2             2    3
(%o2)                   (3 x  + 2 cos(t))  + x
```

Para dar valores às variáveis nessa expressão usa-se o comando `subst`:

```
(%i3) subst ([x=0.5, t=1.3], %);
(%o3)                    1.776218979135868
```

O sinal de igualdade foi usado para indicar os valores a substituir nas variáveis, mas não implica que tenham sido atribuídos os valores numéricos 0.5 e 1.3 às variáveis `x` e `t`. Para atribuir valores ou expressões a uma variável, usa-se os dois pontos e nunca o igual.

Outro uso do sinal de igualdade é para definir equações matemáticas; por exemplo:

```
(%i4) 3*x^3 + 5*x^2 = x - 6;
                               3      2
(%o4)                       3 x  + 5 x  = x - 6
```

Para encontrar as raízes de um polinómio pode ser usada a função `allroots`; por exemplo:

```
(%i5) allroots(%);
(%o5) [x = .9072509934422512 %i + .2775838134100475,
 x = .2775838134100475 - .9072509934422512 %i,
 x = - 2.221834293486762]
```

Há duas raízes complexas e uma real. As três equações entre parêntesis retos em `%o5` fazem parte duma lista com 3 elementos. Por exemplo, o terceiro elemento nessa lista é:

```
(%i6) %[3];
(%o6)                  x = - 2.221834293486762
```

A variável `x` permanece indefinida, já que o sinal de igualdade não é usado para atribuir valores numéricos às variáveis. As raízes obtidas em `%o5` são aproximadas e não exatas. Em alguns casos, as raízes podem ser calculadas em forma algébrica exata, usando o comando `solve` que também resolve outros tipos de equações diferentes de polinómios. Por exemplo, o uso de `solve` para encontrar as raízes do polinómio acima é o seguinte:

```
(%i7) solve ( 3*x^3 + 5*x^2 = x - 6, x )$
(%i8) float ( rectform( % ));
(%o8) [x = .9072509934422583 %i + .2775838134100501,
 x = - 2.221834293486767, x = .2775838134100501
  - .9072509934422583 %i]
```

O resultado da função `solve` não foi apresentado no ecrã, porque ocupa várias linhas de expressões algébricas, mas apenas foram apresentadas as partes reais e imaginárias das raízes (comando `rectform`) aproximando os seus valores numéricos por números de ponto flutuante (comando `float`).

Se já tivesse sido atribuído um valor numérico à variável `x`, antes da entrada `%i7`, obtinha-se uma mensagem de erro porque o valor da variável seria substituído antes de ser executado o comando `solve` e esse comando não aceita um segundo argumento numérico. Para evitar o erro, pode usar-se o prefixo `'` (apóstrofe) para evitar que o valor numérico de `x` seja substituído: `solve(3*'x^3+5*'x^2='x-6,'x)`, ou, quando já não for necessário usar o valor numérico atribuído a essa variável, poderá ser eliminada com o comando `remvalue`, para não ter de usar apóstrofes cada vez que se tiver de dar o nome dessa variável:

```
(%i9) remvalue (x)$
```

Para resolver um sistema de equações, que podem ser lineares ou não lineares, o primeiro argumento para o comando `solve` deverá ser uma lista com as equações e o segundo uma lista com os nomes das variáveis; as equações podem ser guardadas em variáveis. Por exemplo:

```
(%i10) eqA: (4 + 8)*x1 - 8* x2 = 6 + 4$
(%i11) eqB: (2+ 8 + 5 + 1)*x2 - 8*x1 = -4$
(%i12) solve ( [eqA, eqB], [x1, x2] );
                                       1
(%o12)                [[x1 = 1, x2 = -]]
                                       4
```

O sistema anterior também podia ter sido resolvido mais rapidamente com o comando `linsolve`, em vez de `solve`, por tratar-se de um sistema de equações lineares.

A.9. Gráficos

A.9.1. Funções de uma variável

Para desenhar o gráfico de uma ou várias funções de uma variável, usa-se o comando `plot2d`. Por exemplo, para desenhar o gráfico do polinómio $3x^3 + 5x^2 - x + 6$, no intervalo de x entre -3 e 1, usa-se o comando:

```
(%i1) plot2d(3*x^3 + 5*x^2 - x + 6, [x, -3, 1])$
```

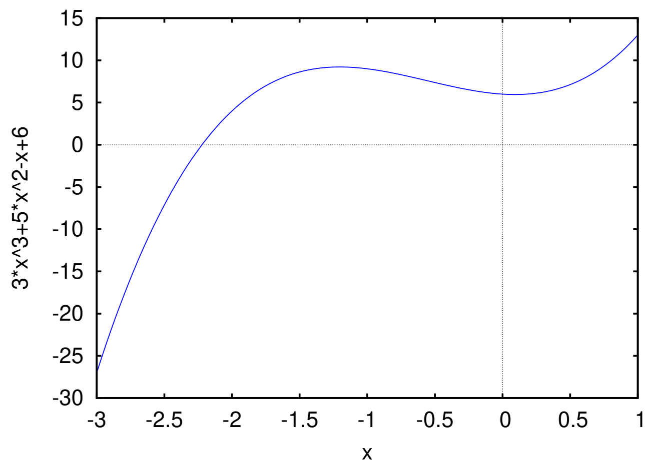


Figura A.2.: Gráfico do polinómio $3x^3 + 5x^2 - x + 6$.

É necessário indicar o domínio de valores de x que vai ser apresentado no gráfico. O resultado aparece numa nova janela (ver figura A.2). Passando o rato sobre um ponto no gráfico, são apresentadas as coordenadas desse ponto. O gráfico é produzido por um programa externo, *Gnuplot*, que deverá ser instalado conjuntamente com *Maxima*.

Para desenhar várias funções no mesmo gráfico, colocam-se as funções dentro de uma lista. Por exemplo:

```
(%i2) plot2d ( [sin(x), cos(x)], [x, -2*%pi, 2*%pi] )$
```

O resultado é apresentado na figura A.3.

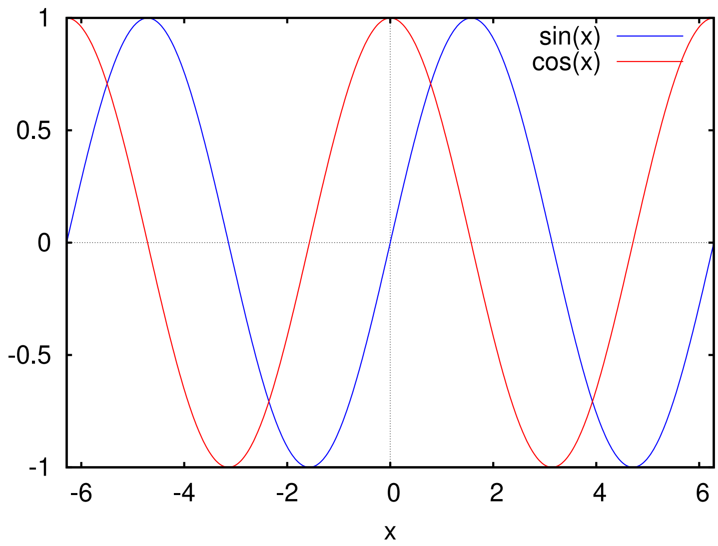


Figura A.3.: Gráfico das funções seno e cosseno.

A.9.2. Criação de ficheiros gráficos

A partir da versão 5.32, existem três opções, `pdf_file`, `png_file` e `ps_file` que permitem gravar o gráfico num ficheiro em formato PDF, PNG ou PostScript.

Por exemplo, para gravar o gráfico produzido pelo comando `%i1` num ficheiro PNG, usa-se o comando:

```
(%i3) plot2d(3*x^3+5*x^2-x+6,[x,-3,1],[png_file,"funcao1.png"]);
```

O gráfico fica gravado no ficheiro funcao1.png, no formato PNG. Se o comando `plot2d` é terminado em ponto e vírgula, será mostrado na consola o caminho completo onde foi armazenado o ficheiro. O nome que se dá ao ficheiro pode também incluir o caminho completo do diretório onde se quer armazenar o ficheiro.

Para produzir a figura A.2 em formato PDF, usa-se o seguinte comando:

```
(%i4) plot2d(3*x^3+5*x^2-x+6,[x,-3,1],[pdf_file,"funcao1.pdf"]);
```

A.9.3. Gráficos de pontos

É possível também fazer um gráfico de um conjunto de pontos num sistema com duas coordenadas. As duas coordenadas de cada ponto podem ser indicadas como uma lista dentro de outra lista com todos os pontos; por exemplo, para desenhar os três pontos (1.1, 5), (1.9, 7) e (3.2,9), as coordenadas dos pontos podem ser guardadas numa lista p:

```
(%i5) p: [[1.1, 5], [1.9, 7], [3.2, 9]]$
```

Para desenhar o gráfico, é necessário dar à função `plot2d` uma lista que comece com a palavra-chave `discrete`, seguida pela lista de pontos. Neste caso não é obrigatório indicar o domínio para a variável do eixo horizontal:

```
(%i6) plot2d ( [discrete,p] )$
```

O gráfico é apresentado na figura A.4.

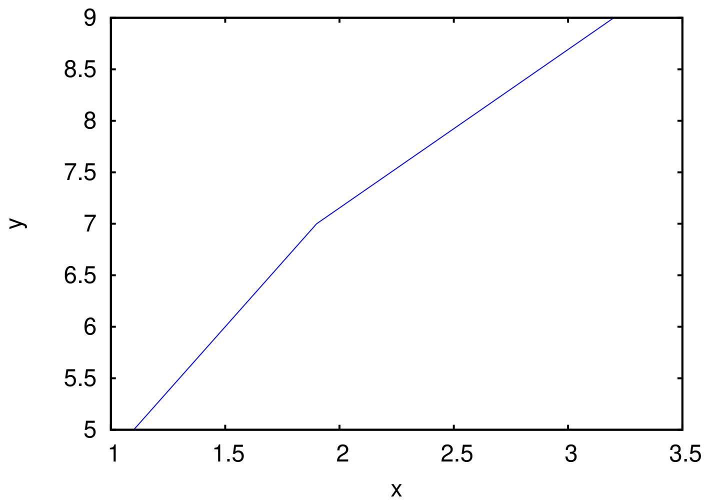


Figura A.4.: Gráfico de um conjunto de 3 pontos.

Por omissão, os pontos são ligados entre si por segmentos de recta; para mostrar apenas os pontos, sem segmentos de recta, usa-se a opção `style`, com o valor `points`.

A.9.4. Pontos e funções

Podem também combinar-se o gráfico de um ou vários conjuntos de pontos com o gráfico de uma ou várias funções. Nesse caso, cada conjunto de pontos será representado por uma lista a começar com a palavra-chave `discrete`, como na secção anterior, e cada função será representada por uma expressão; as listas de pontos e expressões deverão ser colocadas dentro de outra lista e será necessário indicar o domínio para a variável independente (eixo das abcissa); é possível também especificar um domínio para a variável dependente (eixo das ordenadas), para uma melhor apresentação, usando a opção `y`.

Exemplo A.1
Representa num gráfico os resultados experimentais na tabela, junto com a curva teórica esperada: $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, com $g = 980$ cm/s^2

L (cm)	T (s)
10	0.6
20	0.9
30	1.1
40	1.3
50	1.4

Resolução. O gráfico dos resultados, junto com a curva esperada, pode ser obtido com os seguintes comandos:

```
(%i7) tabela: [[10, .6], [20, .9], [30, 1.1], [40, 1.3], [50, 1.4]]$
(%i8) plot2d([[discrete, tabela], 2*%pi*sqrt(L/980)], [L,0,60],
        [style, points, lines], [color, red, blue],
        [point_type, asterisk], [legend, "resultado", "teoria"],
        [xlabel, "L (cm)"], [ylabel, "T (s)"], [y,0,2])$
```

A opção `style` em `%i8` indica que o primeiro conjunto de pontos deverá ser representado por pontos e a função que vem a seguir será representada com segmentos de recta. O gráfico é apresentado na figura A.5. A opção `y` é especialmente útil para limitar os valores apresentados no eixo vertical, no caso de funções com assimptotas verticais.

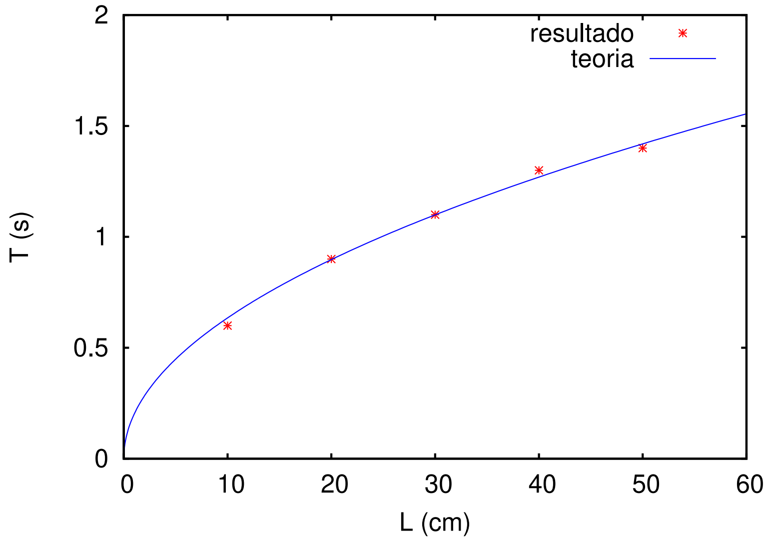


Figura A.5.: Gráfico de dados experimentais junto com uma expressão teórica.

A.9.5. Funções de duas variáveis

Para traçar gráficos de funções de duas variáveis, em 3 dimensões, usa-se o comando `plot3d`. Por exemplo, o gráfico no lado esquerdo da figura A.6 foi produzido com o comando:

```
(%i9) plot3d ( sin(x)*sin(y), [x, 0, 2*%pi], [y, 0, 2*%pi] )$
```

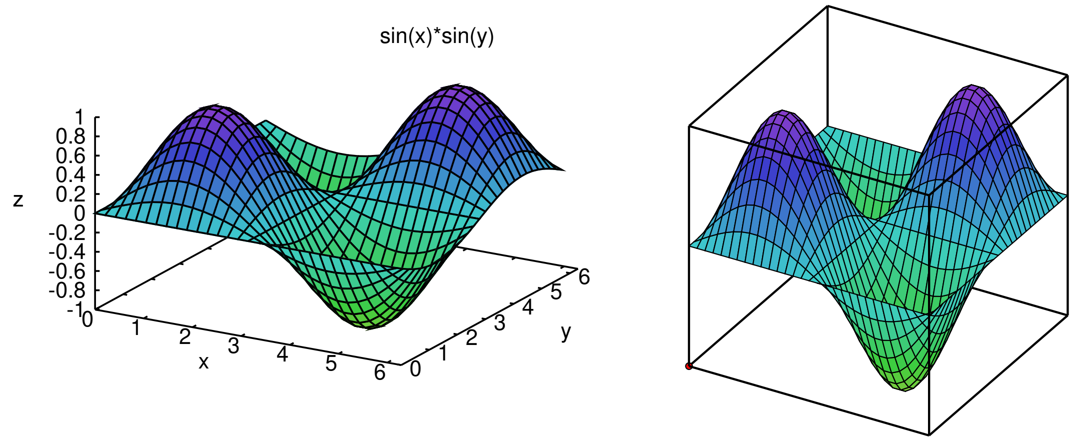


Figura A.6.: Gráfico da função $\sin(x)\sin(y)$, produzido por *Gnuplot* (à esquerda) e por *Xmaxima*.

Deslocando o rato enquanto o botão do lado esquerdo estiver premido, a superfície roda podendo ser vista desde diferentes direções. O comando `plot3d` também aceita uma lista de várias funções a serem representadas no mesmo gráfico. Também pode usar-se uma lista de 3 funções, que representam as 3 componentes do vector posição que define uma superfície em 3 dimensões (gráfico paramétrico). Consulte a documentação sobre o comando `plot3d`.

Existe ainda outro programa gráfico incluído com *Xmaxima*, que pode ser usado em substituição de *Gnuplot*. Todos os gráficos anteriores podiam ter sido produzidos directamente com Xmaxima, adicionando uma opção para alterar o formato. Por exemplo, no caso do gráfico em criado em (`%i9`) seria preciso escrever:

```
(%i10) plot3d( sin(x)*sin(y), [x, 0, 2*%pi], [y, 0, 2*%pi],
                          [plot_format, xmaxima] )$
```

O resultado aparece no lado direito da figura A.6.

Xmaxima pode ser usado para produzir os gráficos obtidos com as funções `plot2d` e `plot3d`, inclusivamente quando essas funções forem usadas em outra interface do Maxima, sem ser Xmaxima. Nomeadamente, Xmaxima fornece tanto uma interface gráfica para a consola do Maxima, como um programa gráfico que pode substituir o *Gnuplot*.

Existem muitas outras opções para os comandos `plot2d` `plot3d` para obter mais informação, procure "plotting" no manual (`?? plotting`).

A.10. Funções do Maxima

No Manual do Maxima usa-se o termo função para referir-se a pequenos programas com algumas variáveis de entrada e uma saída. Por exemplo, para definir uma função `fact(6)` que calcule o fatorial do número 6, ou de qualquer outro número inteiro colocado entre os parêntesis, pode usar-se o seguinte comando:

```
(%i1) fact(n) := if n <= 1 then 1 else n*fact(n-1);
(%o1)    fact(n) := if n <= 1 then 1 else n fact(n - 1)
(%i2) fact(6);
(%o2)                          720
```

Não é preciso usar nenhum comando para produzir a saída, já que a saída será sempre a que for produzida pelo último comando executado pela função. As funções podem usar a sua própria definição em forma recursiva, como no caso de `fact` definida acima.

Vários comandos do Maxima podem ser agrupados, entre parêntesis e separados por vírgulas. Os comandos serão executados sequencialmente e o resultado final será o resultado do último comando; os comandos podem ser escritos em várias linhas diferentes. Isso é útil no caso das funções; por exemplo, a seguinte função encontra o máximo divisor comum entre dois números dados.

```
(%i3) mdc(x,y) := (
          print("O máximo divisor comum de", x, "e", y, "é:"),
          gcd(x,y))$

(%i4) mdc(24,16);
O máximo divisor comum de 24 e 16 é:
(%o4)                           8
```

Quando se usa uma função que não existe num comando, não é produzida nenhuma mensagem de erro, mas na saída do comando aparece a mesma função sem alteração; por exemplo:

```
(%i6) 2*4*maximo(3,5,2);
(%o6)                    8 maximo(3, 5, 2)
```

Isso pode acontecer também com algumas funções predefinidas do Maxima quando não é possível calcular um resultado. Por exemplo:

```
(%i7) log(x^2+3+x);
                              2
(%o7)                    log(x  + x + 3)
```

Esse comportamento das funções é muito útil, porque mais tarde podemos alterar o argumento e recalcular a função. Por exemplo, no último resultado podemos substituir `x` pelo valor numérico 2 e calcular o logaritmo

```
(%i8) subst(x=2.0, %);
(%o8)                   2.19722457733622
```

usou-se 2.0, em vez de 2, para que o logaritmo fosse calculado aproximadamente como um número de ponto flutuante.

Um comando que é útil quando se definem funções é `block`, que permite definir variáveis locais dentro da função (consulte o manual).

A.11. Expressões algébricas e listas

Maxima inclui muitas funções para trabalhar com expressões algébricas. Por exemplo, para expandir produtos e potências de expressões usa-se `expand`.

```
(%i1) (x + 4*x^2*y + 2*y^2)^3;
                      2      2       3
(%o1)             (2 y  + 4 x  y + x)
(%i2) expand(%);
        6       2  5       4  4         4       6  3
(%o2) 8 y  + 48 x  y  + 96 x  y  + 12 x y  + 64 x  y
                   3  3       5  2      2  2       4      3
            + 48 x  y  + 48 x  y  + 6 x  y  + 12 x  y + x
```

A função `factor` é usada para fatorizar uma expressão. Outras funções úteis para simplificar expressões algébricas são `ratsimp`, `radcan` e `xthru`. Entre várias expressões equivalentes o conceito de simplicidade é relativo e depende do gosto de cada um; assim sendo, diferentes funções de simplificação simplificam uma expressão em forma diferente; em cada caso será conveniente experimentar com diferentes funções para decidir a forma preferida para apresentar uma expressão.

Para substituir uma expressão ou várias expressões em outra, usa-se a função `subst`; por exemplo, para substituir x por $1/z$, e y pelo valor numérico 2 no resultado (`%o2`), escreve-se:

```
(%i3)  subst([x=1/z, y=2], %o2);
           192   1560   385   1560   192   512
(%o3)      --- + ---- + --- + ---- + --- + --- + 512
            z      2     3      4     5     6
                  z     z      z     z     z
```

para reduzir tudo a um denominador comum e guardar o resultado na variável `res` uma possibilidade é escrever:

```
(%i4) res: ratsimp(%);
          6        5         4        3         2
      512 z  + 192 z  + 1560 z  + 385 z  + 1560 z  + 192 z + 512
(%o4) ----------------------------------------------------------
                                   6
                                  z
```

As expressões algébricas são representadas internamente como listas; como tal, é possível usar nelas as funções que o Maxima fornece para trabalhar com listas. Por exemplo, a função `length` calcula o comprimento de uma lista; essa função aplicada a uma lista calculará o número de termos; por exemplo

```
(%i5) length(res);
(%o5)                           2
```

Como a expressão `res` foi reduzida a uma única fração, os dois termos contabilizados por `length` são o denominador e o numerador; assim sendo, a função `first`, que extrai o primeiro elemento de uma lista, mostrará unicamente o numerador da expressão `res`

```
(%i6) first(res);
            6         5          4         3          2
(%o6) 512 z  + 192 z  + 1560 z  + 385 z  + 1560 z  + 192 z + 512
```

e o comprimento dessa nova expressão é:

```
(%i7) length(%);
(%o7)                           7
```

Cada um dos sete elementos dessa lista são os sete termos somados em (`%o6`). Uma expressão que já não possa ser separada em mais partes, por exemplo, x, chama-se um **átomo**; as funções que esperam uma lista como argumento produzem uma mensagem de erro quando lhes for dada como argumento um átomo. A função `atom` diz se o seu argumento é um átomo ou não.

Outra função muito útil para trabalhar com listas é a função `map`, que permite aplicar outra função a cada elemento de uma lista. No caso de uma expressão racional, pode ser usada para aplicar uma função ao numerador e ao denominador. Por exemplo, observe a diferença entre expandir uma expressão racional e expandir o numerador e denominador por separado:

```
(%i8) frac1: (x+y)^2 / (x-y)^2;
                                  2
                           (y + x)
(%o8)                      --------
                                  2
                           (x - y)
(%i9) expand(frac1);
              2                                     2
             y                2 x y                x
(%o9) --------------- + --------------- + ---------------
       2             2   2             2   2             2
      y  - 2 x y + x    y  - 2 x y + x    y  - 2 x y + x
(%i10) map ( expand, frac1 );
                          2           2
                         y  + 2 x y + x
(%o10)                   ---------------
                          2           2
                         y  - 2 x y + x
```

A.12. Trigonometria

Existem também várias funções do Maxima para simplificar expressões com funções trigonométricas. A função `trigexpand` serve para expandir senos ou cossenos de somas ou diferenças de ângulos:

```
(%i1) trigexpand(sin(u+v)*cos(u)^3);
            3
(%o1)    cos  (u) (cos(u) sin(v) + sin(u) cos(v))
```

A função `trigreduce` tenta expandir a expressão de forma a que cada termo só tenha uma função trigonométrica.

```
(%i2) trigreduce(%);
      sin(v + 4 u) + sin(v - 2 u)
(%o2) ---------------------------
                   8
                                  3 sin(v + 2 u) + 3 sin(v)
                                + -------------------------
                                              8
```

A função `trigsimp` usa a identidade trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e as relações entre as funções trigonométricas, para tentar escrever uma expressão apenas em termos das funções seno e cosseno. Por exemplo:

```
(%i3) tan(x)*sec(x)^2 + cos(x)*(1 - sin(x)^2);
            2                             2
(%o3)     sec  (x) tan(x) + cos(x) (1 - sin  (x))
(%i4) trigsimp(%);
                                   6
                         sin(x) + cos  (x)
(%o4)                    -----------------
                                 3
                             cos  (x)
```

A.13. Cálculo

A forma mais simples de representar funções matemáticas no Maxima consiste em usar expressões. Por exemplo, para representar a função $f(x) = 3x^2 - 5x$ podemos guardar a expressão na variável f

```
(%i1)  f: 3*x^2 - 5*x;
                                  2
(%o1)                          3 x  - 5 x
```

A derivada da função f em ordem a x calcula-se usando a função `diff`

```
(%i2)  diff (f, x);
(%o2)                          6 x - 5
```

e a primitiva em ordem a x calcula-se com a função `integrate`

```
(%i3) integrate (f, x);
                                       2
                                 3  5 x
(%o3)                           x  - ----
                                      2
```

O valor da função num ponto, por exemplo, $f(1)$, pode ser calculado substituindo x por 1 com a função `subst`, ou com a função `at`

```
(%i4) at (f, x=1);
(%o4)                             - 2
```

Também é possível usar funções do Maxima para representar funções matemáticas. Por exemplo, a mesma função $3x^2 - 5x$ também podia ter sido definida assim:

```
(%i5) g(x) := 3*x^2 - 5*x;
                                     2
(%o5)                   g(x) := 3 x  - 5 x
```

a sua derivada em ordem a x obtém-se com

```
(%i6) diff (g(x), x);
(%o6)                           6 x - 5
```

e a sua primitiva com

```
(%i7) integrate (g(x), x);
                                       2
                                 3  5 x
(%o7)                           x  - ----
                                      2
```

Neste caso, o valor da função num ponto, por exemplo em $x = 1$, é mais fácil de calcular

```
(%i8) g(1);
(%o8)                             - 2
```

No entanto, há que ter muito cuidado com este método pois é preciso que o resultado da função do Maxima seja uma expressão. Por exemplo, se definirmos a função

```
(%i9) h(x) := if x <0 then x/2 else x^2;
                                          x       2
(%o9)            h(x) := if x < 0 then - else x
                                          2
```

os valores em diferentes pontos, por exemplo $h(1)$, são obtidos sem problema, mas não será possível obter a sua derivada com `diff`

```
(%i10) diff (h(x), x);
                 d                      x       2
(%o10)          -- (if x < 0 then - else x )
                dx                      2
```

nem a sua primitiva com `integrate`.

Quando uma expressão depende de várias variáveis, `diff` calcula derivadas parciais:

```
(%i11) diff(x^2*y-y^3, x);
(%o11)                          2 x y
```

Um integral definido calcula-se em forma semelhante às primitivas, mas incluindo os limites de integração a seguir à variável de integração; por exemplo:

```
(%i12) integrate(1/(1 + x^ 2), x, 0, 1);
                                 %pi
(%o12)                           ---
                                  4
```

Problemas

1. Trace o gráfico de cada uma das seguintes funções, usando intervalos que mostrem bem a forma das funções.

(a) $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$

(b) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(c) $y = \sqrt{20 - x^2}$

(d) $y = \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 - 4}$

2. O gráfico da função $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$ apresenta dois pontos extremos (um mínimo local e um máximo local). Desenhe o gráfico dessa função. Sabendo que a derivada da função é nula nos dois pontos extremos, calcule as coordenadas x e y desses dois pontos.

3. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $(-2,\ 7)$, $(-4,\ 1)$ e $(4,\ -5)$. **Sugestão**: a forma geral da equação será $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Para encontrar as três constantes a, b e r, substitua as coordenadas de cada um dos 3 pontos dados, e resolva o sistema das 3 equações obtidas.

4. Defina uma função `fib(n)` em Maxima para calcular qualquer número na sequência de Fibonacci, $f_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, definida, para $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, por:

$$f_0 = 1 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Calcule a relação f_{n+1}/f_n para alguns valores crescentes de n, e mostre que a relação aproxima-se do limite $(1+\sqrt{5})/2$. O número $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ é designado de proporção áurea e no Maxima está predefinido na constante `%phi`.

Respostas

2. O máximo local encontra-se em (0.709, 4.30), e o mínimo local em (3.29, -4.30).

3. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 50$

5. (d) 594.5 m

B. Equações de Lagrange

Neste apêndice mostra-se como surgem as equações de Lagrange a partir da segunda lei de Newton. Considere-se um sistema formado por m corpos rígidos com vetores posição dos centros de massa: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_m$. Ou seja, são necessárias $3m$ coordenadas, que podem ser distâncias ou ângulos, para determinar a configuração do sistema.

Se o sistema é holonómico, existem equações que relacionam algumas das $3m$ coordenadas e que permitem reduzir o número de coordenadas independentes para n coordenadas generalizadas ($n < 3m$):

$$q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$$

Cada vetor de posição $\vec{r}_i$ pode depender de várias dessas coordenadas e do tempo:

$$\vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

e a velocidade do corpo i é

$$\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

ou seja, $\vec{v}_i$ também depende das coordenadas generalizadas, do tempo e das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$:

$$\vec{v}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

e as derivadas parciais de $\vec{v}_i$ obtêm-se derivando o somatório acima:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad\qquad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \tag{B.1}$$

O vetor aceleração do corpo i é:

$$\vec{a}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \tag{B.2}$$

Se num instante dado o valor de cada coordenada q_j é modificado para $q_j + \delta q_j$, cada vetor posição sofre uma alteração:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{B.3}$$

e multiplicando escalarmente os dois lados da equação (B.2) pelos dois lados desta equação, obtém-se

$$\vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{B.4}$$

Como a derivada do produto $\vec{v}_i \cdot \partial\vec{r}_i/\partial q_j$ é,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

De acordo com as equações (B.1), a derivada $\partial\vec{r}_i/\partial q_j$ e o termo dentro dos parêntesis no lado direito da equação são as derivadas parciais de $\vec{v}_i$ em ordem a $\dot{q}_j$ e q_j, obtendo-se assim o resultado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}$$

e a equação (B.4) pode escrever-se então,

$$\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j \tag{B.5}$$

A seguir observe-se que as derivadas parciais de v_i^2 em ordem às coordenadas e velocidades generalizadas são:

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} = \frac{\partial(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial q_j} = 2\,\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}$$
$$\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial \dot{q}_j} = 2\,\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

substituindo estas duas expressões na equação (B.5) e multiplicando os dois lados da equação pela massa m_i do corpo i, obtém-se

$$m_i\,\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_i}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{m_i}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j}\right]\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}i}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}i}}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

onde $E_{\mathrm{c}i}$ é a energia cinética do corpo i. A segunda lei de Newton diz que $m_i\,\vec{a}_i$ é a força resultante sobre o corpo i; usando a expressão (B.3) e somando sobre todos os corpos i, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

que conduz às equações de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots n \tag{B.6}$$

onde E_{c} é a energia total do sistema e Q_j é definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{B.7}$$

C. Créditos fotográficos

A maior parte das fotografias e figuras neste manual são originais e são distribuídas com a mesma licença “Creative Commons Attribution Sharealike 2.5” do livro. As figuras e fotos que não são originais têm todas licenças livres. A principal fonte dessas figuras foi o arquivo da Wikimedia Commons (http://commons.wikimedia.org). A lista de autores e licenças é a seguinte:

- Figura 1 (pág. 1). Autor: Beat (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons Attribution Sharealike 2.0 Generic license.
- Figura 1.3 (pág. 4). Autor: OS2Warp (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 1.4 (pág. 5). Autor: Wikipedian Kbh3rd (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons Attribution Sharealike 2.0.
- Figura 2 (pág. 19). Autor: Adrian Pingstone. Domínio público.
- Figura 3 (pág. 39). Autor: Boris23 (Wikipedia Alemã). Domínio público.
- Figura 4 (pág. 59). Autor: LCDR Mark Wetzler, NOAA, *National Weather Service* (NWS). Domínio público.
- Figura 4.6 (pág. 69). Autor desconhecido. Domínio público.
- Figura 5 (pág. 79). Autor: SCrider (Flickr). Licença: Creative Commons Attribution Sharealike 2.0 Generic license.
- Figura 6 (pág. 99). Autor: Hunter Peress. Licença: GFDL 1.2+ ou Creative Commons Attribution Sharealike 3.0.
- Figura 7 (pág. 121). Autor: David Turner. Licença: GFDL 1.2+ ou Creative Commons Attribution Sharealike 3.0.
- Figura 8 (pág. 143). NASA/JPL. Domínio público.
- Figura 9 (pág. 163). Autor: Paco Vila. Licença: Creative Commons Attribution 2.0.
- Figura 10 (pág. 183). Autor: Mario Roberto Duran Ortiz. Licença Creative Commons Attribution Sharealike 3.0.
- Figura 11 (pág. 205). Autor: Alvesgaspar (Wikimedia Commons). Licença: GFDL 1.2+ ou Creative Commons Attribution Sharealike 3.0.
- Figura 12 (pág. 223). Foto número EL-1996-00130 do arquivo da NASA-LaRC. Domínio público.

Bibliografia

[1] Acheson, D. *From calculus to chaos. An introduction to dynamics*. Oxford University Press, Oxford, U. K., 1997.

[2] Alonso, M. e Finn, E. J. *Física*. Addison-Wesley, Reading, U. S. A., 1999.

[3] Antunes, F. *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática*. Lidel, edições técnicas, Lda., Lisboa, Portugal, 2012.

[4] Arnold, V. I. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir, Moscovo, 1987.

[5] Banks, B. W. *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods*. Pearson, 2000.

[6] Beer, F. P. e Johnston Jr, E. R. *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica*. McGraw-Hill editora, 7a edição, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.

[7] Blanchard, P., Devaney, R. L. e Hall, G. R. *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editores, México, 1999.

[8] Borelli, R. L. e Coleman C. S. *Differential equations: a modeling perspective*. John Wiley & Sons, Inc., Mexico, 1998.

[9] Devaney, R. L. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press, U. S. A., 1992.

[10] Edwards, C. H. e Penney, D. E. *Differential Equations. Computing and Modeling*. Pearson Education, Inc., New Jersey, U. S. A., 3a edição, 2004.

[11] Farlow, S. J. *An Introduction to Differential Equations and their Applications*. McGraw-Hill, Singapore, 1994.

[12] Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C. *Caos: uma introdução*. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, Brasil, 1994.

[13] French, A. P. *Newtonian Mechanics*. W. W. Norton & Company, New York, U. S. A., 1971.

[14] Garcia, A. L. *Numerical methods for physics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, U. S. A., 2000.

[15] Gerthsen, C., Kneser e Vogel, H. *Física*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 2a edição, 1998.

[16] Gregory, R. D. *Classical Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2006.

[17] Guckenheimer, J. e Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 2002.

[18] Hand, L. N. e Finch, J. D. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1998.

[19] José, J. V. e Saletan, E. J. *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1998.

[20] Kallaher, M. J. (editor). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology*. The Mathematical Association of America, U. S. A., 1999.

[21] Kibble, T. W. B. e Berkshire, F. H. *Classical Mechanics*. Addison Wesley Longman, Essex, U. K., 4a edição, 1996.

[22] Kittel, Ch., Knight, W. D. e Ruderman, M. A. *Mechanics. Berkeley physics course, volume 1*. McGraw-Hill, New York, U. S. A., 1965.

[23] Lynch, S. *Dynamical systems with applications using MAPLE*. Birkhaüser, Boston, U. S. A., 2001.

[24] Meriam, J. L. e Kraige, L. G. *Engineering Mechanics: Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, U. S. A., versão SI, 4a edição, 1998.

[25] Monteiro, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2002.

[26] Nayfeh, A. H. e Balachandran, B. *Applied nonlinear dynamics*. John Wiley and Sons, 1995.

[27] Newton, I. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 2010.

[28] Parker, T. E. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1989.

[29] Redfern, D., Chandler, E. e Fell, R. N. *Macsyma ODE lab book*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, U. S. A., 1997.

[30] Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C. e Kyner, W. T. *Differential equations*. Addison-Wesley, 2a edição, 1988.

[31] Solari, H. G., Natiello, M. A. e Mindlin, G. B. *Nonlinear Dynamics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, U. K. 1996.

[32] Spiegel, M. R., Lipschutz, S. e Spellman, D. *Vector Analysis*. Mc Graw-Hill, New York, U. S. A., 2a edição, 2009.

[33] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books, Cambridge, U. S. A., 2000.

[34] Targ, S. *Curso Teórico-Prático de Mecânica*. Lopes da Silva Editora, Porto, Portugal, 1976.

[35] Taylor, J. R. *Classical Mechanics*. University Science Books, Sausalito, U. S. A., 2005.

[36] Thornton, S. T. e Marion, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. Thomson, Brooks/Cole, Belmont, U. S. A., 5a edição, 2004.

[37] Villate, J. E. *Métodos Numéricos*. edição do autor, Porto, 2014. (disponível em http://def.fe.up.pt)

Índice

Este livro pode ser descarregado livremente, em ficheiro PDF, ou consultado em versão HTML, no sítio:

http://def.fe.up.pt