1_08_04

Programas de
Geometria Descritiva A e B do 10º e 11º anos do Ensino Secundário (ES)
Geometria Descritiva A do 10º e 11º ou 11º e 12º anos do ES
Geometria Descritiva B do 10º e 11º anos do ES
Geometria Descritiva A do 10º e 11º ou 11º e 12º anos do ES Recorrente
Geometria Descritiva. Cursos Profissionais de Nível Secundário
1999-2005

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

GEOMETRIA DESCRITIVA A

10º e 11º ANOS ou 11º e 12º anos

CURSO CIENTÍFICO-HUMANÍSTICO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
E CURSO CIENTÍFICO-HUMANÍSTICO DE ARTES VISUAIS

AUTORES
JOÃO PEDRO XAVIER (COORDENADOR)
JOSÉ AUGUSTO REBELO

HOMOLOGAÇÃO
22/02/2001

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 3

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA 5

FINALIDADES 5

OBJECTIVOS 5

VISÃO GERAL DE TEMAS/CONTEÚDOS 6

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS 12

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER 13

AVALIAÇÃO 13

RECURSOS 15

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA 17

GESTÃO 17

CONTEÚDOS/TEMAS, SUGESTÕES METODOLÓGICAS 17

CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA 32

MODELOS DIDÁCTICOS 35

GLOSSÁRIO 36

4. BIBLIOGRAFIA 38

DIDÁCTICA ESPECÍFICA 38

GEOMETRIA 38

GEOMETRIA DESCRITIVA 41

DESENHO TÉCNICO 46

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de GEOMETRIA DESCRITIVA A é uma disciplina bianual que integra o tronco comum da componente de formação específica dos alunos no âmbito dos Cursos Científico--Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Artes Visuais, visando o aprofundamento, estruturação e sistematização de conhecimentos e competências metodológicas no âmbito da Geometria Descritiva.

Uma vez que a Geometria Descritiva permite, dada a natureza do seu objecto, o desenvolvimento das capacidades de ver, perceber, organizar e catalogar o espaço envolvente, propiciando instrumentos específicos para o trabalhar - em desenho - ou para criar novos objectos ou situações, pode compreender-se como o seu alcance formativo é extremamente amplo. Sendo essencial a áreas disciplinares onde é indispensável o tratamento e representação do espaço - como sejam, a arquitectura, a engenharia, as artes plásticas ou o *design* - a sua importância faz-se sentir também ao nível das atitudes dirigindo-se ao estudante considerado globalmente enquanto pessoa humana e não apenas funcionalmente enquanto aprendiz de um dado ofício.

Desse modo, o sentido da presença desta disciplina no reportório curricular do ensino secundário é o de contribuir para a formação de indivíduos enquanto tal e, particularmente, para quem seja fundamental o "diálogo" entre a mão e o cérebro, no desenvolvimento recíproco de ideias e representações gráficas.

Os conteúdos constantes do Programa de GD-A, após o *módulo inicial* de introdução à geometria no espaço, abordam dois sistemas de representação - **diédrico** e **axonométrico** - considerados como fundamentais ou basilares na formação secundária de um aluno no âmbito da Geometria Descritiva os quais se constituem, ademais, como denominador comum às várias vias de prosseguimento de estudos.

Optou-se por leccionar os dois sistemas de representação referidos na sequência indicada, já que parece justificável que o estudo do sistema de representação axonométrica se faça, no ensino secundário, com um grau de desenvolvimento maior do que no ensino básico, onde este sistema mereceu apenas uma abordagem pertencente ao domínio do Desenho Técnico aliada à representação de formas bastante simples, predominantemente paralelepipédicas. Sendo assim, embora o estudo da axonometria continue a visar, fundamentalmente, a representação de formas ou objectos tridimensionais, interessa agora fazer a desmontagem do sistema, conhecer os seus princípios e entender o seu funcionamento, o que implica uma síntese de operações abstractas que o aluno não está apto a realizar no início do 10º ano, além de pré-requisitos específicos que o estudo desenvolvido do sistema de representação diédrica lhe deverá fornecer.

É exactamente a representação diédrica que constitui o cerne do programa, dado que o conhecimento deste sistema de representação não só fornece os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de qualquer outro, como se revela bastante eficaz na consecução do objectivo essencial de desenvolver a capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional.

Em relação à sequência do ensino-aprendizagem dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior

grau de abstracção, foi procurado atenuar esta componente, através das didácticas e metodologia propostas. Desse modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se que seja realizada em ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel - após ter visto e compreendido - sem decorar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia**. Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na partição de unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão inevitável do Programa em dois anos lectivos. Deveremos pensar que um programa não se destina apenas a alunos bons, para os quais qualquer método pedagógico se adapta, mas para o aluno médio com algumas dificuldades na aprendizagem. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção": *... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construi-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (...) dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura, nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência*. O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver a capacidade de visualização mental e representação gráfica, de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver a capacidade de interpretação de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Promover a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Reconhecer a função e vocação particular de cada um desses sistemas de representação
- Representar com exactidão sobre desenhos que só têm duas dimensões os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento dos sistemas estudados no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação

- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas

- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso

- Relacionar-se responsavelmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias tolerantes e de respeito

VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

O Programa é composto por um módulo inicial que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do Programa, que se reparte, inevitavelmente, pelos dois anos lectivos. Conclui o programa o estudo dos fundamentos da Representação Axonométrica e sua aplicação na representação de formas tridimensionais. A repartição temática do Programa e o respectivo peso de cada unidade aparece esquematizada no seguinte quadro:

QUADRO RESUMO DO PROGRAMA

Módulo Inicial	9 aulas
Introdução à Geometria Descritiva	4 aulas
Representação Diédrica	164 aulas
Representação Axonométrica	21 aulas
Total de aulas de 90 minutos	198 aulas

Os conteúdos seleccionados são considerados como essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas no âmbito dos sistemas de representação a estudar.

É proposta uma sequência, em correspondência com sugestões metodológicas específicas, que se julga ser mais conveniente. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o Programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa.

Como exemplo referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos ou de sólidos com base assente em planos, que sucedem o estudo dos métodos geométricos auxiliares, que podem ser abordados em paralelo ou mesmo os problemas métricos que, embora constituam um item autónomo, poderão ser tratados parcialmente à medida que os alunos se vão familiarizando com os referidos métodos. É natural focar a questão da determinação da distância de dois pontos logo que o aluno tenha condições de determinar a

verdadeira grandeza do segmento que eles definem tal como parece lógico solicitar a determinação do ângulo de duas rectas ou a distância de um ponto a uma recta mal seja possível rebater qualquer plano. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profíquas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento (instrumentos e materiais de traçado e medição: critérios de escolha, manutenção e conservação; suportes: critérios de escolha, conservação) e aspectos de representação (princípios gerais de representação; escrita, formatos dos desenhos, material de desenho; termos relativos a desenhos técnicos), que não poderão deixar de ser veiculados.

CONTEÚDOS DE CADA ANO

10º ANO

DESENVOLVIMENTO

1 Módulo inicial

1.1 Ponto
1.2 Recta
1.3 Posição relativa de duas rectas
- complanares
  - paralelas
  - concorrentes
- enviesadas

1.4 Plano
1.5 Posição relativa de rectas e de planos
- recta pertencente a um plano
- recta paralela a um plano
- recta concorrente com um plano
- planos paralelos
- planos concorrentes

1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos
- rectas perpendiculares e ortogonais
- recta perpendicular a um plano
- planos perpendiculares

1.7 Superfícies
Generalidades, geratriz e directriz
Algumas superfícies:
- plana
- piramidal
- cónica
- prismática
- cilíndrica
- esférica

1.8 Sólidos
- pirâmides
- paralelepípedos
- prismas
- cones
- cilindros
- esfera

1.9 Secções planas de sólidos e truncagem

2 Introdução à Geometria Descritiva

2.1 Geometria Descritiva
- 2.1.1 Resenha histórica
- 2.1.2 Objecto e finalidade
- 2.1.3 Noção de projecção
  - projectante
  - superfície de projecção
  - projecção

2.2 Tipos de projecção
- 2.2.1 Projecção central ou cónica
- 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica
  - projecção oblíqua ou clinogonal
  - projecção ortogonal

2.3 Sistemas de representação - sua caracterização:
- pelo tipo de projecção
- pelo número de projecções utilizadas
- pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional
  - projecção única
  - *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção

2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica
- 2.4.1 Representação triédrica
  - triedros trirrectângulos de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3)
  - eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z
  - coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*)
  - representação triédrica de um ponto
- 2.4.2 Representação diédrica
  - diedros de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2)
  - eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra)
  - planos bissectores dos diedros
  - representação diédrica de um ponto
- 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade

3 Representação diédrica

3.1 Ponto
- 3.1.1 Localização de um ponto
- 3.1.2 Projecções de um ponto

3.2 Segmento de recta
- 3.2.1 Projecções de um segmento de recta
- 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção:
  - perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical
  - paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas)
  - paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal
  - paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil

– não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo

3.3 Recta
- 3.3.1 Recta definida por dois pontos
- 3.3.2 Projecções da recta
- 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta
- 3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores
- 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção
- 3.3.6 Posição relativa de duas rectas
  - complanares
    - paralelas
    - concorrentes
  - enviesadas

3.4 Figuras planas I
Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil

3.5 Plano
- 3.5.1 Definição do plano por:
  - pontos não colineares
  - uma recta e um ponto exterior
  - duas rectas paralelas
  - duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção)
- 3.5.2 Rectas contidas num plano
- 3.5.3 Ponto pertencente a um plano
- 3.5.4 Rectas notáveis de um plano:
  - horizontais
  - frontais
  - de maior declive
  - de maior inclinação
- 3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção

  Planos projectantes:
  - paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente)
  - perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical
  - perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)

  Planos não projectantes:
  - de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X)
  - oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)

3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano)
- 3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante
- 3.6.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante
- 3.6.3 Intersecção de dois planos projectantes
- 3.6.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante
- 3.6.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral)
- 3.6.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13}
- 3.6.7 Intersecção de planos (método geral)
- 3.6.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um:
  - plano projectante
  - plano oblíquo
  - plano de rampa
- 3.6.9 Intersecção de três planos

3.7 Sólidos I
- 3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular)

de base horizontal, frontal ou de perfil
3.7.2 Paralelepípedos rectângulos e prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil
3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil)
3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos

---

3.8 Métodos geométricos auxiliares I
3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares
– características e aptidões
3.8.2 Mudança de diedros de projecção
(casos que impliquem apenas uma mudança)
3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto
3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta
3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano
3.8.3 Rotações
(casos que impliquem apenas uma rotação)
3.8.3.1 Rotação do ponto
3.8.3.2 Rotação da recta
3.8.3.3 Rotação de um plano projectante
3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes

3.9 Figuras planas II
Figuras planas situadas em planos verticais ou de topo

3.10 Sólidos II
Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo

---

11º ANO

3.11 Paralelismo de rectas e de planos
3.11.1 Recta paralela a um plano
3.11.2 Plano paralelo a uma recta
3.11.3 Planos paralelos (definidos ou não pelos traços)

3.12 Perpendicularidade de rectas e de planos
3.12.1 Rectas horizontais perpendiculares e rectas frontais perpendiculares
3.12.2 Recta horizontal (ou frontal) perpendicular a uma recta
3.12.3 Recta perpendicular a um plano
3.12.4 Plano perpendicular a uma recta
3.12.5 Rectas oblíquas perpendiculares
3.12.6 Planos perpendiculares

3.13 Métodos geométricos auxiliares II
3.13.1 Mudança de diedros de projecção
(casos que impliquem mudanças sucessivas)
3.13.1.1 Transformação das projecções de uma recta
3.13.1.2 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano
3.13.2 Rotações
(casos que impliquem mais do que uma rotação)
3.13.2.1 Rotação de uma recta
3.13.2.2 Rotação de um plano
3.13.2.3 Rebatimento de planos não projectantes
– rampa
– oblíquo

3.14 Problemas métricos
- 3.14.1 Distâncias
  - 3.14.1.1 Distância entre dois pontos
  - 3.14.1.2 Distância de um ponto a uma recta
  - 3.14.1.3 Distância de um ponto a um plano
  - 3.14.1.4 Distância entre dois planos paralelos
- 3.14.2 Ângulos
  - 3.14.2.1 Ângulo de uma recta com um plano frontal ou com um plano horizontal
  - 3.14.2.2 Ângulo de um plano com um plano frontal ou com um plano horizontal
  - 3.14.2.3 Ângulo de duas rectas concorrentes ou de duas rectas enviesadas
  - 3.14.2.4 Ângulo de uma recta com um plano
  - 3.14.2.5 Ângulo de dois planos

3.15 Figuras planas III
Figuras planas situadas em planos não projectantes

3.16 Sólidos III
Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos não projectantes

3.17 Secções
- 3.17.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos
  - horizontal, frontal e de perfil
- 3.17.2 Secções de cones, cilindros e esfera por planos projectantes
- 3.17.3 Secções em sólidos (pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por qualquer tipo de plano
- 3.17.4 Truncagem

3.18 Sombras
- 3.18.1 Generalidades
- 3.18.2 Noção de sombra própria, espacial, projectada (real e virtual)
- 3.18.3 Direcção luminosa convencional
- 3.18.4 Sombra projectada de pontos, segmentos de recta e recta nos planos de projecção
- 3.18.5 Sombra própria e sombra projectada de figuras planas (situadas em qualquer plano) sobre os planos de projecção
- 3.18.6 Sombra própria e sombra projectada de pirâmides, de paralelepípedos rectângulos e de prismas, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção
- 3.18.7 Planos tangentes às superfícies cónica e cilíndrica:
  - num ponto da superfície
  - por um ponto exterior
  - paralelos a uma recta dada
- 3.18.8 Sombra própria e sombra projectada de cones e de cilindros, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção

4 Representação axonométrica

4.1 Introdução
- 4.1.1 Caracterização
- 4.1.2 Aplicações

4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais:
Cavaleira e Planométrica
- 4.2.1 Generalidades
- 4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes
- 4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo

4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas

4.3 Axonometrias ortogonais:
Trimetria, Dimetria e Isometria
- 4.3.1 Generalidades
- 4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas
  - 4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos
  - 4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo
- 4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas

4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais
Métodos de construção
- 4.4.1 Método das coordenadas
- 4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente
- 4.4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articulação das abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura metodológica envolvente facilitará a compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* de promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com a Área de Projecto.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, aretes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste Programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidos em conta questões relacionadas com a História da Arte.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo
- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

AVALIAÇÃO

A avaliação em Geometria Descritiva é contínua e integra três componentes: diagnóstica, formativa e sumativa.
Tem como referência os **objectivos e a aferição das competências adquiridas** e, define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

Conceitos

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos dos sistemas de representação diédrica e axonométrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação dos sistemas de representação utilizados;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

Técnicas

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;
- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;
- a legibilidade das notações.

Realização

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

Atitudes

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

Técnicas e instrumentos de avaliação

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas;
- atitudes reveladas durante as actividades.

RECURSOS

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Video* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)

- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *vídeo*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de *CAD*
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

GESTÃO

A gestão da carga horária pressupõe a metodologia proposta na apresentação e gestão dos conteúdos e considera como carga horária 4,5 horas x 33 semanas = 148,5 horas/ano, o que perfaz o total de 99 aulas de 90 minutos cada .

A atribuição de carga horária, expressa em números de aulas de 90 minutos cada, à abordagem de cada ponto do programa é uma sugestão passível de alteração, quer causada por demoras imprevistas nas actividades de desenvolvimento dessas abordagens, quer pela necessidade de organização da turma em grupos com ritmos de aprendizagem diferentes ou com trabalhos de execução de diferentes durações.

CONTEÚDOS/TEMAS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

10º ANO		
DESENVOLVIMENTO	**Nº de AULAS/90 MINUTOS**	**SUGESTÕES METODOLÓGICAS**
1 Módulo inicial	**9**	
1.1 Ponto 1.2 Recta 1.3 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas 1.4 Plano 1.5 Posição relativa de rectas e de planos – recta pertencente a um plano – recta paralela a um plano – recta concorrente com um plano – planos paralelos – planos concorrentes 1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos – rectas perpendiculares e ortogonais – recta perpendicular a um plano – planos perpendiculares 1.7 Superfícies Generalidades, geratriz e directriz Algumas superfícies: – plana – piramidal – cónica – prismática – cilíndrica – esférica 1.8 Sólidos	9	Neste *módulo inicial*, onde se pretende revisitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar. Com esses referenciais, ou outros expedientes, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade). O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a

– pirâmides – paralelepípedos – prismas – cones – cilindros – esfera 1.9 Secções planas de sólidos e truncagem		perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo. O domínio visual e espacial destas condições deverá permitir uma abordagem preliminar de problemas métricos de determinação de distâncias (distância entre dois pontos, de um ponto a uma recta, de um ponto a um plano, de dois planos paralelos) e de ângulos (ângulo de duas rectas, de uma recta com um plano, noção de diedro e ângulo diedro), levando o aluno a deduzir o conjunto de procedimentos necessários para chegar a uma solução. Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos *modelos B a K* ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas. As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizados as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos. Exemplos de situações para “visualizar” o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes, – de um ponto – de uma recta – de um plano – dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta) – dos vértices de um quadrado – dos pontos de uma circunferência – das faces de um diedro – etc... ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de, – uma esfera – um cilindro de revolução – um cone de revolução – um cubo

		Recomenda-se que a forma das secções referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido. Para explorar a relação espaço-plano-espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembrar algumas construções elementares da geometria plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.
2 Introdução à Geometria Descritiva	**4**	
2.1 Geometria Descritiva 2.1.1 Resenha histórica 2.1.2 Objecto e finalidade 2.1.3 Noção de projecção – projectante – superfície de projecção – projecção	1	Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana. Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.
2.2 Tipos de projecção 2.2.1 Projecção central ou cónica 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica – projecção oblíqua ou clinogonal – projecção ortogonal	1	A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam: – transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná-lo num ponto impróprio; – partir de um triângulo equilátero ($60^o+60^o+60^o$) e chegar a um triângulo isósceles ($90^o+90^o+0^o$) transformando um vértice num ponto impróprio;

		– aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da sua transformação numa recta, ou seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio; – etc… Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira. Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.
2.3 Sistemas de representação - sua caracterização: – pelo tipo de projecção – pelo número de projecções utilizadas – pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional – projecção única – *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção	1	Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles. Em *Ver pelo desenho* (ilustração 66, p.87) Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.
2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica 2.4.1 Representação triédrica – triedros trirrectângulos de projecção – planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3) – eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z – coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*) – representação triédrica de um ponto 2.4.2 Representação diédrica – diedros de projecção – planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2) – eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra) – planos bissectores dos diedros – representação diédrica de um ponto 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade	1	Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do *modelo A* que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional. O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3) como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvam os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em

		correlação. De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível, frequentemente, omitir a identificação dos vértices que os definem.
3 Representação diédrica	**164**	
3.1 Ponto 3.1.1 Localização de um ponto 3.1.2 Projecções de um ponto	4	Para facilitar a visualização espacial pode ser retomado o *modelo A*, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal. Propõe-se que: – o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção; – o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção; – o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X; – represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.
3.2 Segmento de recta 3.2.1 Projecções de um segmento de recta 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção: – perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical – paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas) – paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal – paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil – não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo	3	Propõe-se que: – o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção; – no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).
3.3 Recta 3.3.1 Recta definida por dois pontos 3.3.2 Projecções da recta 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta	8	Propõe-se: – partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos

3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção 3.3.6 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas		extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção; – levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção; – que, de uma recta, o aluno simule, no modelo: – as projecções; – os traços; – que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada; – representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.
3.4 Figuras planas I Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil	4	Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil. O uso de *software* de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.
3.5 Plano 3.5.1 Definição do plano por: – pontos não colineares – uma recta e um ponto exterior – duas rectas paralelas – duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção) 3.5.2 Rectas contidas num plano 3.5.3 Ponto pertencente a um plano 3.5.4 Rectas notáveis de um plano: – horizontais – frontais – de maior declive – de maior inclinação 3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção Planos projectantes: – paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente) – perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical – perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)	16	Será de tratar, como mais habitual por ser geral, a representação diédrica dos planos pelas projecções de três pontos não colineares ou de duas rectas paralelas ou de duas rectas concorrentes (que podem ser os traços do plano nos planos de projecção). Com o intuito de facilitar a visualização do plano, a sua representação por 3 pontos não colineares poderá ser transformada na representação do triângulo por eles definido. O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do *modelo A* permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que: – uma recta esteja contida num plano; – um ponto pertença a um plano. Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de

Planos não projectantes: – de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X) – oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)		maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano. Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano. Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma "face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor. Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.
3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano) 3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante 3.6.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante 3.6.3 Intersecção de dois planos projectantes 3.6.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante 3.6.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral) 3.6.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13} 3.6.7 Intersecção de planos (método geral) 3.6.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um: – plano projectante – plano oblíquo – plano de rampa 3.6.9 Intersecção de três planos	20	Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano. Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o β_{24}. Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.
3.7 Sólidos I 3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil 3.7.2 Paralelepípedos e prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil 3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil) 3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos	7	Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a *software* de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderá facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades. Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas com diferentes cotas ou

		afastamentos para melhor percepção das visibilidades. Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções. Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção. Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos - tetraedro e hexaedro regulares - ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.
3.8 Métodos geométricos auxiliares I		
3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares – características e aptidões	4	Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – recta horizontal em recta de topo – recta frontal em recta vertical – recta oblíqua em recta horizontal ou frontal – plano de topo em plano horizontal – plano vertical em plano frontal
3.8.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança) 3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto 3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta 3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano		
3.8.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação) 3.8.3.1 Rotação do ponto 3.8.3.2 Rotação da recta 3.8.3.3 Rotação de um plano projectante 3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes	8	No estudo da rotação da recta (*modelo L*) propõem-se os seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo – uma recta frontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta vertical – uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a *software* de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base

		desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura. Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará a denominar-se rebatimento. O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de economia de meios.
3.9 Figuras planas II Figuras planas situadas em planos verticais ou de topo	4	Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Désargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.
3.10 Sólidos II Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo	8	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do *software* já mencionado.
11º ANO		
3.11 Paralelismo de rectas e de planos 3.11.1 Recta paralela a um plano 3.11.2 Plano paralelo a uma recta 3.11.3 Planos paralelos (definidos ou não pelos traços)	2	Sugere-se que, através da simulação das situações espaciais no modelo, o aluno infira os teoremas de paralelismo de rectas e de planos.
3.12 Perpendicularidade de rectas e de planos 3.12.1 Rectas horizontais perpendiculares e rectas frontais perpendiculares 3.12.2 Recta horizontal (ou frontal) perpendicular a uma recta 3.12.3 Recta perpendicular a um plano 3.12.4 Plano perpendicular a uma recta 3.12.5 Rectas oblíquas perpendiculares 3.12.6 Planos perpendiculares	5	Deve salientar-se o facto de que duas rectas perpendiculares se projectam em ângulo recto num plano de projecção desde que pelo menos uma delas seja paralela a esse plano. Na perpendicularidade de recta e plano deve ser verificado o teorema anterior relativamente a rectas horizontais e frontais do plano.
3.13 Métodos geométricos auxiliares II 3.13.1 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem mudanças sucessivas) 3.13.1.1 Transformação das projecções de	4	Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar

uma recta 3.13.1.2 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano		– uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal – um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal Na sequência destes exercícios podem revisitar-se as intersecções de planos propondo este método como alternativa ao denominado "método geral da intersecção de planos", já que ele nos dá a possibilidade de transformar um plano qualquer em projectante.
3.13.2 Rotações (casos que impliquem mais do que uma rotação) 3.13.2.1 Rotação de uma recta 3.13.2.2 Rotação de um plano 3.13.2.3 Rebatimento de planos não projectantes – rampa – oblíquo	8	Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal – um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, será conveniente recorrer ao *modelo M*, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento. Mais uma vez, o aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo a escolha orientar-se segundo o princípio de economia de meios.
3.14 Problemas métricos 3.14.1 Distâncias 3.14.1.1 Distância entre dois pontos 3.14.1.2 Distância de um ponto a uma recta 3.14.1.3 Distância de um ponto a um plano 3.14.1.4 Distância entre dois planos paralelos	4	Na resolução de problemas métricos será vantajoso que o aluno resolva um mesmo problema utilizando diferentes métodos auxiliares e que, a partir daí, conclua as vantagens de um relativamente aos outros.
3.14.2 Ângulos 3.14.2.1 Ângulo de uma recta com um plano frontal ou com um plano horizontal 3.14.2.2 Ângulo de um plano com um plano frontal ou com um plano horizontal 3.14.2.3 Ângulo de duas rectas concorrentes ou de duas rectas enviesadas 3.14.2.4 Ângulo de uma recta com um plano 3.14.2.5 Ângulo de dois planos	6	Quanto aos problemas de determinação da verdadeira grandeza de ângulos, deverá ser dada especial atenção às definições da geometria euclidiana relativas ao "ângulo de uma recta com um plano" e ao "ângulo de dois planos".
3.15 Figuras planas III Figuras planas situadas em planos não	4	Ver sugestões didácticas do ponto 3.9

projectantes		
3.16 Sólidos III Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos não projectantes	7	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo.
3.17 Secções 3.17.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos – horizontal, frontal e de perfil 3.17.2 Secções de cones, cilindros e esfera por planos projectantes 3.17.3 Secções em sólidos (pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por qualquer tipo de plano 3.17.4 Truncagem	15	Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações: – secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: – sem aresta(s) de perfil – com aresta(s) de perfil; – secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: – sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção – com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção. Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede. Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases. Quanto à esfera poder-se-á verificar que a secção produzida por qualquer tipo de plano é sempre um círculo, podendo variar desde um círculo máximo até ao ponto, no caso de tangência. Poder-se-á utilizar o Teorema de Désargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes. Na resolução de problemas, que

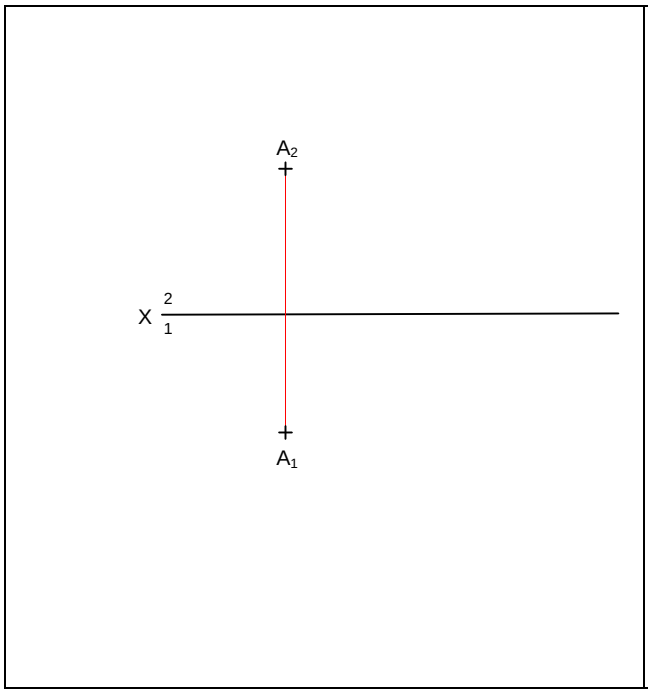
		envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade). Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder-se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.
3.18 Sombras 3.18.1 Generalidades 3.18.2 Noção de sombra própria, espacial, projectada (real e virtual) 3.18.3 Direcção luminosa convencional 3.18.4 Sombra projectada de pontos, segmentos de recta e recta nos planos de projecção 3.18.5 Sombra própria e sombra projectada de figuras planas (situadas em qualquer plano) sobre os planos de projecção 3.18.6 Sombra própria e sombra projectada de pirâmides, de paralelepípedos rectângulos e de prismas, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção 3.18.7 Planos tangentes às superfícies cónica e cilíndrica: – num ponto da superfície – por um ponto exterior – paralelos a uma recta dada 3.18.8 Sombra própria e sombra projectada de cones e de cilindros, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção	23	Para facilitar a aquisição dos conceitos de sombra própria, espacial, projectada, real e virtual, será conveniente a utilização de um foco luminoso (lâmpada ou luz solar) e de formas bi ou tridimensionais que produzirão sombras diversificadas conforme o seu posicionamento. Para melhor compreensão dos pontos de quebra poderá ser vantajoso o estudo comparativo da sombra de um segmento de recta fazendo alterações sucessivas das suas coordenadas de forma a projectar sombra só num plano de projecção, nos dois ou só no outro plano. Poderá ser seguido o mesmo raciocínio para figuras planas. Será de todo o interesse alertar os alunos para a vantagem da determinação prévia da linha separatriz de luz e sombra, para identificar a sombra própria e, a partir desta, induzir a projectada. Nesse sentido, pode-se fazer incidir um foco luminoso nos sólidos em causa para identificar a separatriz de luz e sombra que, no caso de cones e cilindros, corresponde às geratrizes de tangência dos planos luz/sombra. Considera-se favorável iniciar o estudo da sombra de sólidos pela pirâmide (com base situada num plano de projecção). Sugere-se que, para pirâmides com base igual (e em posição igual) mas de diferentes alturas, se faça o estudo comparativo do número de faces em sombra própria. Fazendo o mesmo estudo comparativo para o cone, os alunos poderão inferir a variação de posição das geratrizes separatrizes luz/sombra.

		Atendendo a que a sombra projectada de pontos, rectas ou superfícies são entidades representadas por duas projecções e, apesar de ser usual desprezar a projecção situada no eixo X, recomenda-se, pelo menos numa fase inicial de estudo, que cada ponto de sombra seja sempre representado pelas suas duas projecções.
4 Representação axonométrica	**21**	
4.1 Introdução 4.1.1 Caracterização 4.1.2 Aplicações	4	Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades. Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentados aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do *design* industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria, na descrição dessas formas.
4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais: Cavaleira e Planométrica 4.2.1 Generalidades 4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes 4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo 4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas		No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar-se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os efeitos produzidos. Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder-se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente,

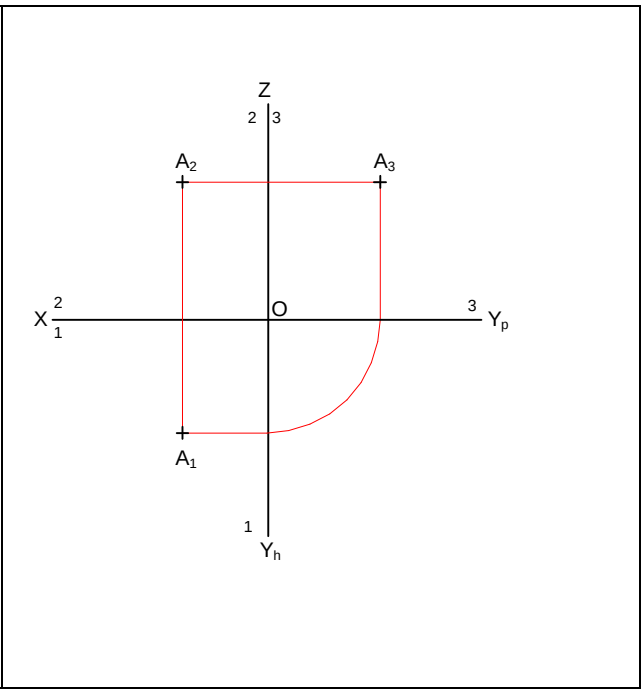
		distorções. Seria interessante relacionar as axonometrias clinogonais com as sombras em representação diédrica, previamente estudadas, para assim vislumbrar a relação entre ambos os tipos de projecção.
4.3 Axonometrias ortogonais: Trimetria, Dimetria e Isometria 4.3.1 Generalidades 4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas 4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos 4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo 4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas	4	Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (*modelo N*) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações. No modelo poder-se-á evidenciar claramente: – a correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico; – os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do **triângulo fundamental** correspondente à base da **pirâmide axonométrica** com vértice na origem do sistema de eixos; – a configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria; – a redução das medidas resultante da inclinação dos eixos. Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um eixo, o que seria desejável, poder-se-á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas. Neste processo deverá salientar-se: – o teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto correspondente ao rebatimento da origem; – os conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e, consequentemente, o recurso ao Teorema de Désargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um

		sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo. Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.
4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas por: – paralelepípedos rectângulos com as bases ou faces paralelas a um dos planos coordenados – pirâmides e prismas regulares e oblíquos de base(s) regular(es) com a(s) referida(s) base(s) paralela(s) a um dos planos coordenados e com pelo menos uma aresta da(s) base(s) paralela(s) a um eixo – cones e cilindros de revolução e oblíquos com base(s) em verdadeira grandeza (só no caso da axonometria clinogonal) Métodos de construção 4.4.1 Método das coordenadas 4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente 4.4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)	13	Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar ênfase ao chamado “método dos cortes” (4.4.3) devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.

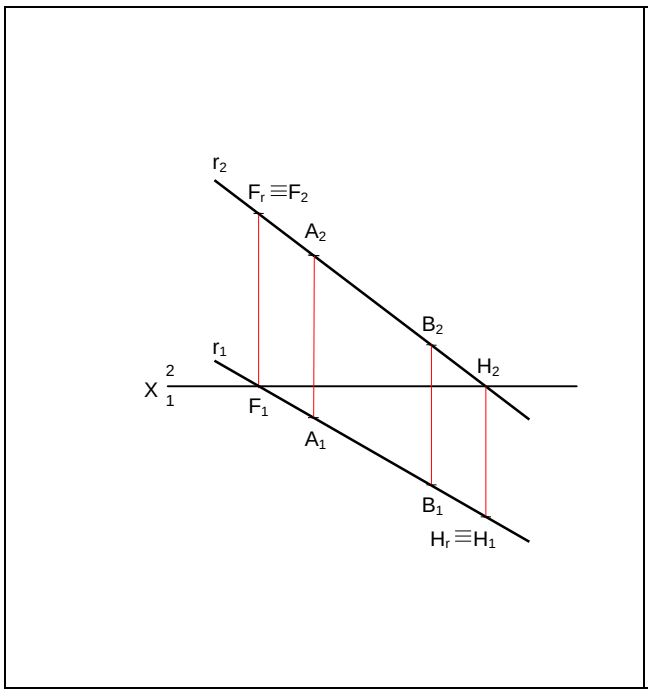
CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



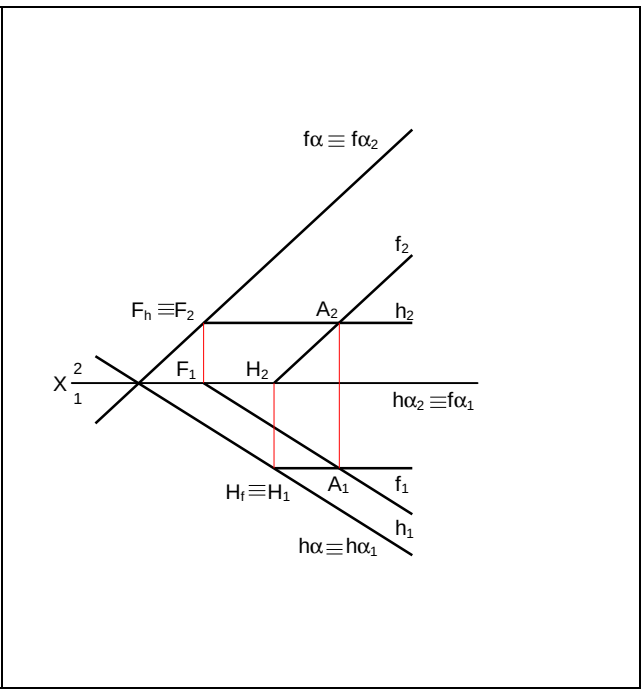
Representação diédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



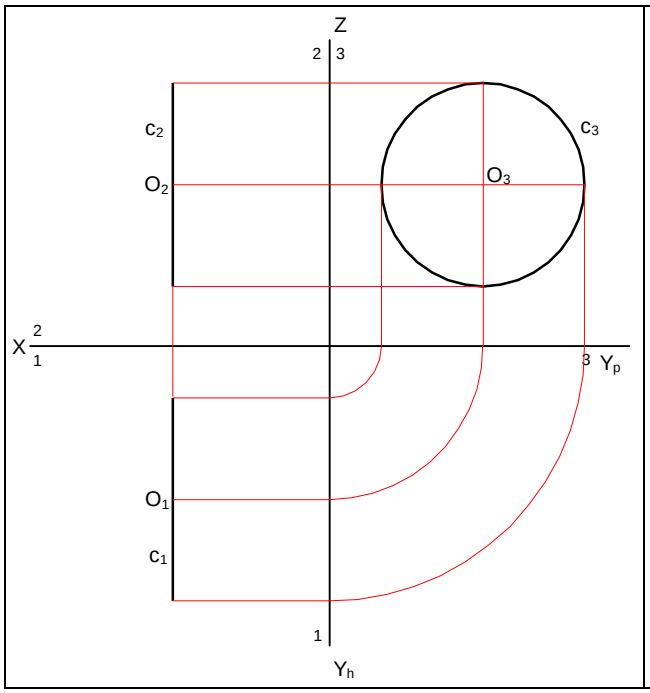
Representação triédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



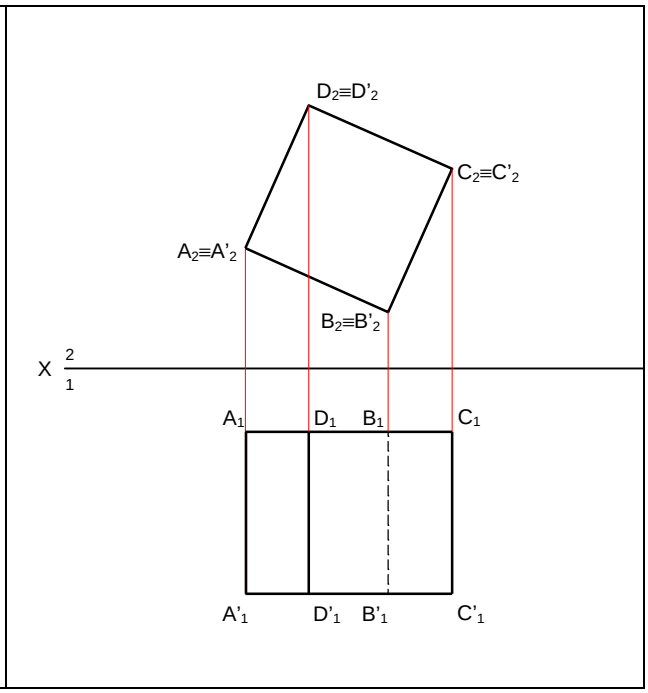
Representação de uma recta **r** e dos seus traços horizontal e frontal



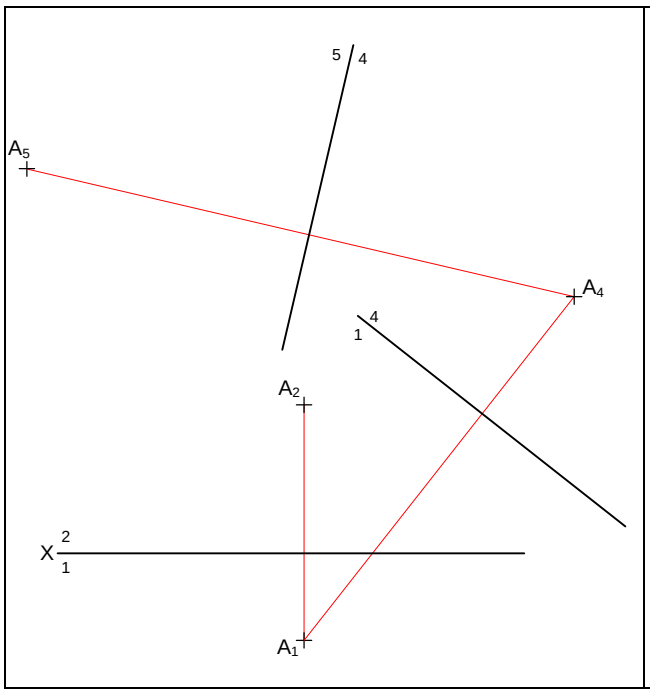
Representação de um plano a pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



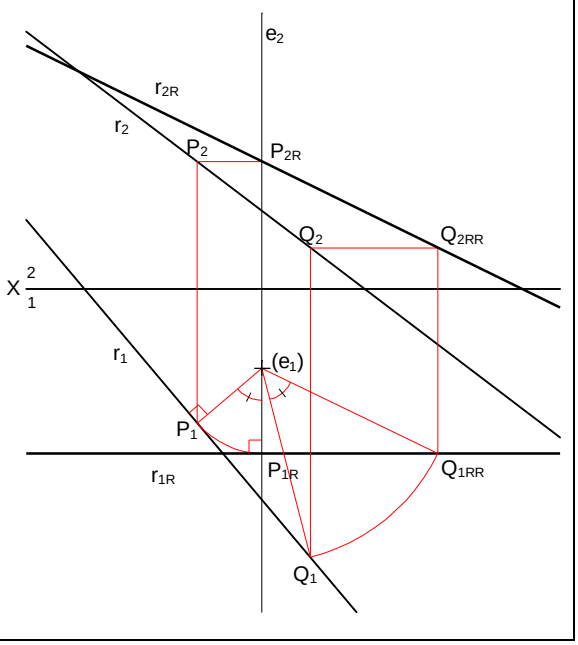
Representação triédrica de uma circunferência **c** de perfil



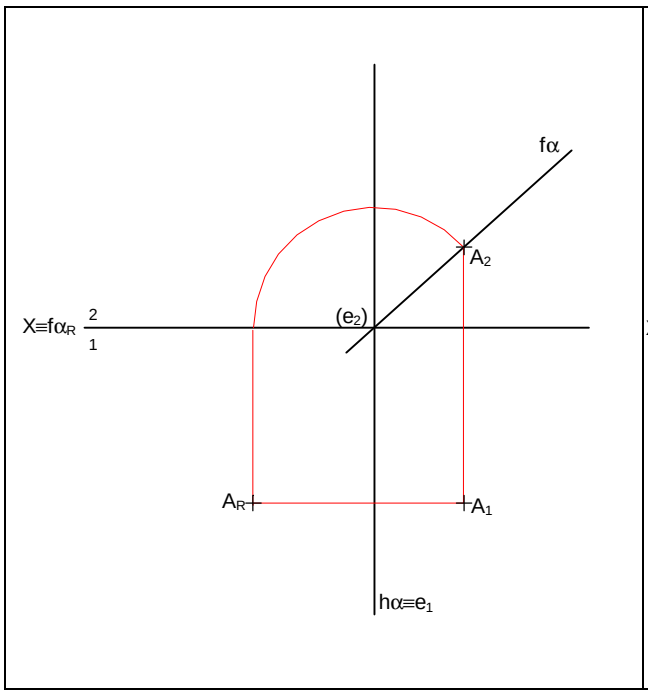
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



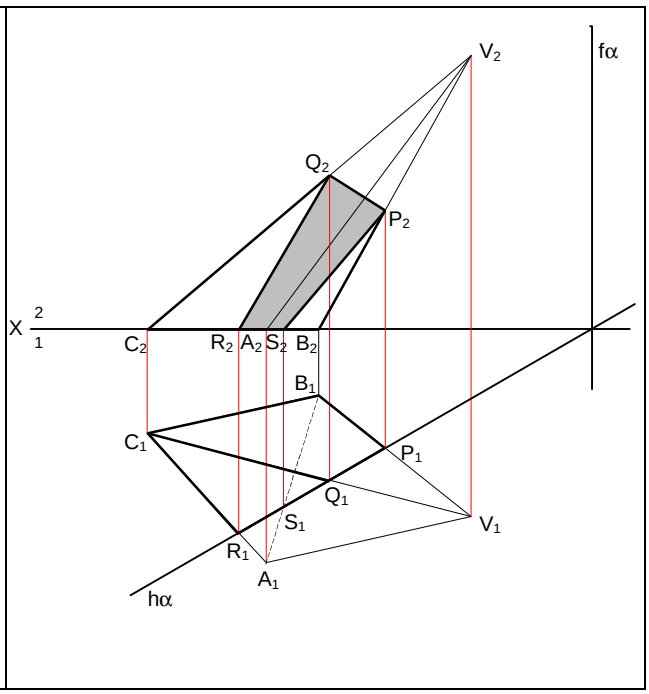
Mudança de diedros
Projecções de um ponto **A** em diferentes diedros



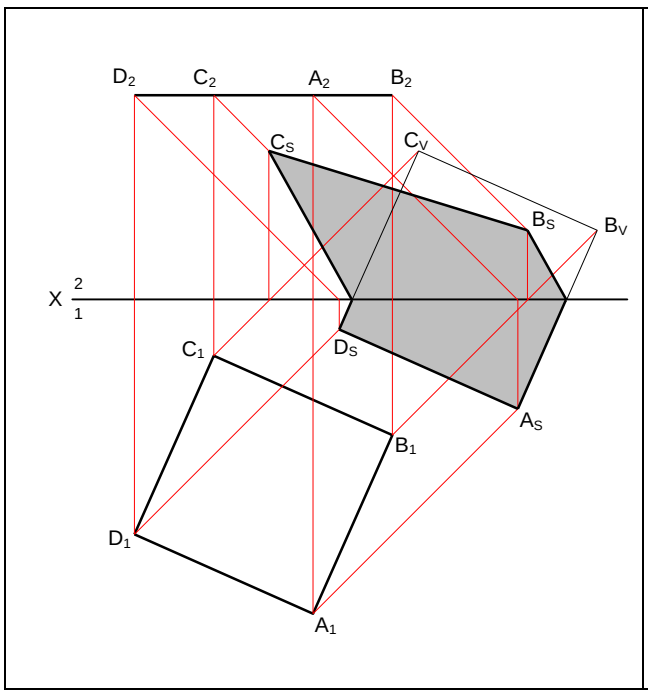
Transformação de uma recta oblíqua **r** numa recta frontal através de uma rotação em torno de um eixo vertical **e**



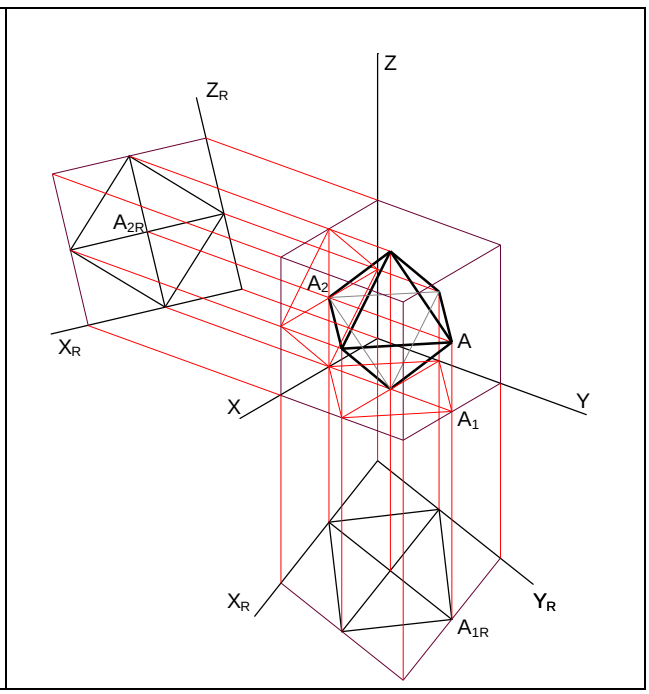
Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal



Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical



Sombra produzida por um quadrado [ABCD] nos planos de projecção



Representação trimétrica de um octaedro com aplicação simultânea de dois métodos construtivos: do paralelepípedo envolvente e dos cortes

MODELOS DIDÁCTICOS

Existe um conjunto de modelos expressamente concebidos para a leccionação da disciplina de Geometria Descritiva que são os seguintes:

MODELO A

Este modelo é constituido pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidas elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

MODELO M

Modelo destinado a visualizar o rebatimento de um plano oblíquo, quer pelo triângulo do rebatimento quer pelas rectas horizontais ou frontais do plano. O plano oblíquo é truncado por um plano projectante que lhe é perpendicular, também ele rebatível, de modo a permitir a visualização do triângulo do rebatimento e a determinação da sua verdadeira grandeza, o que permite reproduzir espacialmente todas as operações que serão efectuadas no papel para rebater o plano.

MODELO N

Realizado com esquadros de desenho este modelo, que se destina à leccionação das axonometrias, permite a visualização do triedro definido pelos planos coordenados e da pirâmide axonométrica quando fazemos coincidir a sua base (triângulo fundamental) com o plano axonométrico. Nesta última situação torna-se possível efectuar o rebatimento de uma face da pirâmide para o plano de projecção, bem como o seu contra-rebatimento, dando a entender os procedimentos necessários para a determinação de verdadeiras grandezas e das escalas axonométricas.

GLOSSÁRIO

eixo X ou **aresta dos diedros** (linha de terra) - recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

axonometrias clinogonais – axonometrias oblíquas (ver projecção clinogonal)

axonometria planométrica – designação pela qual é actualmente conhecida a axonometria militar (norma ISO 5456)

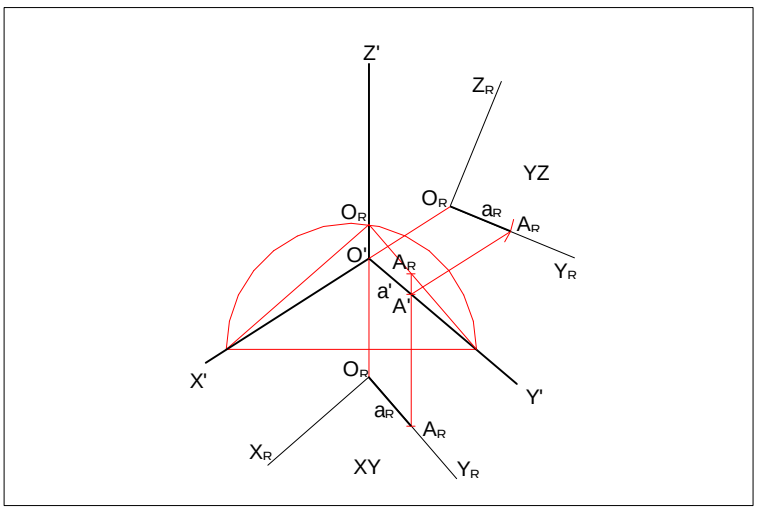
diedros de projecção (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

eixos de coordenadas ortogonais - referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abcissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

incidência - o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva - os pontos, as rectas e os planos - ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

sistema de representação – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

método dos cortes – processo que consiste no rebatimento dos planos coordenados para o interior da pirâmide axonométrica (para evitar que os planos coordenados apresentem faces distintas após o rebatimento), seguido de uma translação de cada par de eixos de coordenadas segundo uma direcção normal à charneira do rebatimento, permitindo a representação de cortes horizontais e verticais do objecto. Por contra-rebatimento e através da conjugação de, pelo menos, dois cortes, obtém-se a projecção axonométrica do objecto.



mudança de diedros de projecção (mudança de planos) - utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

plano frontal de projecção (plano vertical de projecção) - plano frontal de afastamento nulo

projecção clinogonal - termo utilizado para designar a projecção paralela oblíqua em relação a um plano de projecção; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

rectas de maior declive de um plano - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

rectas de maior inclinação de um plano - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

representação diédrica ou **sistema de representação diédrica** - método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projecção ortogonal, método ou sistema diédrico, projecção diédrica, etc…

teorema de Désargues - se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projecção próprio ou impróprio), as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

triedros trirrectângulos de projecção - são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projecção horizontal, frontal e de perfil

4. BIBLIOGRAFIA

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

> Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Planos a médio e longo prazo - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies*). Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P. (1987). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

> Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

Geometria

*Aguilar, L. T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

> Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos

conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo inicial previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um "antigo" compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Colecção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma "verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas".

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoelpi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personagens, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A. A F.(1947*). A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Salienta-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

"Ver pelo desenho", como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 - Fundamentos, Álgebra y Geometria*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço:

http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm

Geometria Descritiva

Almeida, Á. D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED, (1)* 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

Aubert, J. (1982), Dessin d'Architecture a partir de la Geometrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. C. (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (3 e 4.)* 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. C. (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (7).* 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário "Como ensinar Geometria Descritiva", organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géometrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedica um dos capítulos à homologia plana.

*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974*). Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V. O., Sementsov, M. A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descriptiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

*Leitão, C.A. M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N. C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED, (14*). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – "Geometria: que futuro?" – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da Geometria Descritiva de Monge para uso na "Escuela de Caminos", precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J. S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capitulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descriptiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L. P. M. (1899). *Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica - Tomo I e II - Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores geómetras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

*Pinheiro, C. .S. & Sousa, P. F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal. O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Rodriguez de Abajo, F. J. (1992). *Geometria Descriptiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do "sistema diédrico" . Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BENGOA, V. A. (1987). *Geometria Descriptiva - Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BLANCO, A. R. (1982), *Geometria Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Ribeiro, C. T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

"...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão." (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Sánchez Gallego, J. A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relacão à

representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do "método dos cortes" sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

*Sant'ana, S. & GOMES, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a "percepção" da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J. P. (1999). Acerca da "nova" terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED, (9).* 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

XAVIER, J. P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED, (12).* 7-22.

Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, "Saber ver a Geometria Descritiva", onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como "método dos cortes", secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

Desenho Técnico

*Cunha, L. V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J. S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico).* Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

NORMAS

Norma ISO 128 Princípios gerais de representação
Norma ISO 216 Formatos de papéis
Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)
Norma ISO 3098 Escrita
Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção
Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos
Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho
Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos (generalidades e tipo de desenho)
Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

Endereços na Internet:

http://www.geom.umn.edu/
http://www.ul.ie/~rynnet/keanea/homepage.html
http://www.albares.com/dibujotecnico/salaestudios/salaestudios.htm
http://www.arq.ufrgs.br/
http://www.mat.uel.br/barison/DGGDcont.htm
http://www.cce.ufsc.br/~ligsouza/geometria_descritiva.htm
http://indigo.ie/~paulmcd/
http://www.engr.ukans.edu/~rhale/ae421/giesecke/CHAP17.PDF
http://thales.cica.es/ed/practicas/TecInfo/09/indice.html
http://www.anth.org.uk/NCT/
http://mane.mech.virginia.edu/~engr160/Graphics/Outline.html
http://drr.arc.uniroma1.it/decarlo/
http://www.terravista.pt/ancora/6707/impindex2.html
http://www.fc.up.pt/atractor

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

GEOMETRIA DESCRITIVA B

10º E 11º ANOS

CURSO TECNOLÓGICO DE DESIGN DE EQUIPAMENTO

AUTORES
JOÃO PEDRO XAVIER (COORDENADOR)
JOSÉ AUGUSTO REBELO

HOMOLOGAÇÃO
05/03/2001

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 3

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA 5

FINALIDADES 5

OBJECTIVOS 5

VISÃO GERAL DE TEMAS/CONTEÚDOS 6

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS 11

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER 12

AVALIAÇÃO 12

RECURSOS 14

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA 15

GESTÃO 15

CONTEÚDOS/TEMAS, SUGESTÕES METODOLÓGICAS 15

CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA 28

MODELOS DIDÁCTICOS 31

GLOSSÁRIO 32

4. BIBLIOGRAFIA 34

DIDÁCTICA ESPECÍFICA 34

GEOMETRIA 34

GEOMETRIA DESCRITIVA 37

DESENHO TÉCNICO 42

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de GEOMETRIA DESCRITIVA **B** é uma disciplina bianual que integra a componente de formação científico-tecnológica do Curso Tecnológico de Design de Equipamento.

É uma disciplina de iniciação à Geometria Descritiva e, como tal, os conteúdos que a integram foram seleccionados de molde a garantir um campo de competências essenciais no âmbito da representação diédrica e da representação axonométrica.

Os conteúdos constantes do Programa de GD-B, após o *módulo inicial* de introdução à geometria no espaço, abordam dois sistemas de representação - **diédrico** e **axonométrico** - considerados como fundamentais ou basilares na formação secundária de um aluno no âmbito da Geometria Descritiva.

Optou-se por leccionar os dois sistemas de representação referidos na sequência indicada, já que parece justificável que o estudo do sistema de representação axonométrica se faça, no ensino secundário, com um grau de desenvolvimento maior do que no ensino básico, onde este sistema mereceu apenas uma abordagem pertencente ao domínio do Desenho Técnico aliada à representação de formas bastante simples, predominantemente paralelepipédicas. Sendo assim, embora o estudo da axonometria continue a visar, fundamentalmente, a representação de formas ou objectos tridimensionais, interessa agora fazer a desmontagem do sistema, conhecer os seus princípios e entender o seu funcionamento, o que implica uma síntese de operações abstractas que o aluno não está apto a realizar no início do 10º ano, além de pré-requisitos específicos que o estudo desenvolvido do sistema de representação diédrica lhe deverá fornecer.

É exactamente a representação diédrica que constitui o cerne do programa, dado que o conhecimento deste sistema de representação não só fornece os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de qualquer outro, como se revela bastante eficaz na consecução do objectivo essencial de desenvolver a capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional.

Em relação à sequência do ensino-aprendizagem dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior grau de abstracção, foi procurado atenuar esta componente, através das didácticas e metodologia propostas. Desse modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se que seja realizada em ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel - após ter visto e compreendido - sem decorar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem

por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia**. Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na partição de unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão inevitável do Programa em dois anos lectivos. Deveremos pensar que um programa não se destina apenas a alunos bons, para os quais qualquer método pedagógico se adapta, mas para o aluno médio com algumas dificuldades na aprendizagem. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção": *... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construi-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (...) dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura, nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência*. O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver a capacidade de visualização mental e representação gráfica, de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver a capacidade de interpretação de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Promover a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Reconhecer a função e vocação particular de cada um desses sistemas de representação
- Representar com exactidão sobre desenhos que só têm duas dimensões os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento dos sistemas estudados no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação

- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas

- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso

- Relacionar-se responsavelmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias tolerantes e de respeito

VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

O Programa é composto por um *módulo inicial* que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do Programa, que se reparte, inevitavelmente, pelos dois anos lectivos. Conclui o programa o estudo dos fundamentos da Representação Axonométrica e sua aplicação na representação de formas tridimensionais. A repartição temática do Programa e o respectivo peso de cada unidade aparece esquematizada no seguinte quadro:

QUADRO RESUMO DO PROGRAMA

Módulo Inicial	9 aulas
Introdução à Geometria Descritiva	4 aulas
Representação Diédrica	98 aulas
Representação Axonométrica	21 aulas
Total de aulas de 90 minutos	132 aulas

Os conteúdos seleccionados são considerados como essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas no âmbito dos sistemas de representação a estudar.

É proposta uma sequência, em correspondência com sugestões metodológicas específicas, que se julga ser mais conveniente. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o Programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa.

Como exemplo referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos projectantes ou de sólidos com base assente nesses planos que sucedem o estudo dos métodos geométricos auxiliares mas podem ser abordados em simultaneidade. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profíquas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento (instrumentos e materiais de traçado e medição: critérios de escolha, manutenção e conservação; suportes: critérios de escolha, conservação) e aspectos de representação (princípios gerais de representação; escrita, formatos dos desenhos, material de desenho; termos relativos a desenhos técnicos), que não poderão deixar de ser veiculados.

CONTEÚDOS DE CADA ANO

10º ANO

DESENVOLVIMENTO

1 Módulo inicial

1.1 Ponto
1.2 Recta
1.3 Posição relativa de duas rectas
- complanares
  - paralelas
  - concorrentes
- enviesadas

1.4 Plano
1.5 Posição relativa de rectas e de planos
- recta pertencente a um plano
- recta paralela a um plano
- recta concorrente com um plano
- planos paralelos
- planos concorrentes

1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos
- rectas perpendiculares e ortogonais
- recta perpendicular a um plano
- planos perpendiculares

1.7 Superfícies
Generalidades, geratriz e directriz
Algumas superfícies:
- plana
- piramidal
- cónica
- prismática
- cilíndrica
- esférica

1.8 Sólidos
- pirâmides
- paralelepípedos
- prismas
- cones
- cilindros
- esfera

1.9 Secções planas de sólidos e truncagem

2 Introdução à Geometria Descritiva

2.1 Geometria Descritiva
2.1.1 Resenha histórica
2.1.2 Objecto e finalidade
2.1.3 Noção de projecção
- projectante
- superfície de projecção
- projecção

2.2 Tipos de projecção
- 2.2.1 Projecção central ou cónica
- 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica
  - projecção oblíqua ou clinogonal
  - projecção ortogonal

2.3 Sistemas de representação - sua caracterização:
- pelo tipo de projecção
- pelo número de projecções utilizadas
- pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional
  - projecção única
  - *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção

2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica
- 2.4.1 Representação triédrica
  - triedros trirrectângulos de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3)
  - eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z
  - coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*)
  - representação triédrica de um ponto
- 2.4.2 Representação diédrica
  - diedros de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2)
  - eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra)
  - planos bissectores dos diedros
  - representação diédrica de um ponto
- 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade

3 Representação diédrica

3.1 Ponto
- 3.1.1 Localização de um ponto
- 3.1.2 Projecções de um ponto

3.2 Segmento de recta
- 3.2.1 Projecções de um segmento de recta
- 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção:
  - perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical
  - paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas)
  - paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal
  - paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil
  - não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo

3.3 Recta
- 3.3.1 Recta definida por dois pontos
- 3.3.2 Projecções da recta
- 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta
- 3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores
- 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção
- 3.3.6 Posição relativa de duas rectas
  - complanares
    - paralelas
    - concorrentes
  - enviesadas

3.4 Figuras planas I
Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil

3.5 Plano
- 3.5.1 Definição do plano por:
  - pontos não colineares
  - uma recta e um ponto exterior
  - duas rectas paralelas
  - duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção)
- 3.5.2 Rectas contidas num plano
- 3.5.3 Ponto pertencente a um plano
- 3.5.4 Rectas notáveis de um plano:
  - horizontais
  - frontais
  - de maior declive
  - de maior inclinação
- 3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção
  Planos projectantes:
  - paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente)
  - perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical
  - perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)

  Planos não projectantes:
  - de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X)
  - oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)

3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano)
- 3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante
- 3.6.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante
- 3.6.3 Intersecção de dois planos projectantes
- 3.6.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante
- 3.6.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral)
- 3.6.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13}
- 3.6.7 Intersecção de planos (método geral)
- 3.6.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um:
  - plano projectante
  - plano oblíquo
  - plano de rampa

11º ANO

3.7 Sólidos I
- 3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil
- 3.7.2 Paralelepípedos rectângulos e prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil
- 3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil)
- 3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos

3.8 Métodos geométricos auxiliares I
- 3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares - características e aptidões
- 3.8.2 Mudança de diedros de projecção
  (casos que impliquem apenas uma mudança)
  - 3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto
  - 3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta
  - 3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano
- 3.8.3 Rotações

(casos que impliquem apenas uma rotação)
3.8.3.1 Rotação do ponto
3.8.3.2 Rotação da recta
3.8.3.3 Rotação de um plano projectante
3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes
3.8.3.5 Rebatimento de planos não projectantes
- rampa
- oblíquo

3.9 Figuras planas II
Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo

---

3.10 Sólidos II
Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo

---

3.11 Secções
3.11.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos - horizontal, frontal e de perfil
3.11.2 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes ou de rampa
3.11.3 Truncagem

4 Representação axonométrica

4.1 Introdução
4.1.1 Caracterização
4.1.2 Aplicações

4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais:
Cavaleira e Planométrica
4.2.1 Generalidades
4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes
4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo
4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas

4.3 Axonometrias ortogonais:
Trimetria, Dimetria e Isometria
4.3.1 Generalidades
4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas
4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos
4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo
4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas

4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais
Métodos de construção
4.4.1 Método das coordenadas
4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente
4.4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articulação das abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura metodológica envolvente facilitará a compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* de promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com a Área de Projecto.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, aretes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste Programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidos em conta questões relacionadas com a História da Arte.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo
- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

AVALIAÇÃO

A avaliação em Geometria Descritiva é contínua e integra três componentes: diagnóstica, formativa e sumativa.

Tem como referência os **objectivos e a aferição das competências adquiridas** e, define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

Conceitos

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos dos sistemas de representação diédrica e axonométrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação dos sistemas de representação utilizados;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

Técnicas

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;
- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;
- a legibilidade das notações.

Realização

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

Atitudes

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

Técnicas e instrumentos de avaliação

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas;
- atitudes reveladas durante as actividades.

RECURSOS

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Video* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *video*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de *CAD*
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

GESTÃO

A gestão da carga horária pressupõe a metodologia proposta na apresentação e gestão dos conteúdos e considera como carga horária 3 horas x 33 semanas = 99 horas/ano, o que perfaz o total de 66 aulas de 90 minutos cada.

A atribuição de carga horária, expressa em números de aulas de 90 minutos cada, à abordagem de cada ponto do programa é uma sugestão passível de alteração, quer causada por demoras imprevistas nas actividades de desenvolvimento dessas abordagens, quer pela necessidade de organização da turma em grupos com ritmos de aprendizagem diferentes ou com trabalhos de execução de diferentes durações.

CONTEÚDOS/TEMAS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

10º ANO

DESENVOLVIMENTO	**Nº de AULAS/90 MINUTOS**	**SUGESTÕES METODOLÓGICAS**
1 Módulo inicial	**9**	
1.1 Ponto 1.2 Recta 1.3 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas 1.4 Plano 1.5 Posição relativa de rectas e de planos – recta pertencente a um plano – recta paralela a um plano – recta concorrente com um plano – planos paralelos – planos concorrentes 1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos – rectas perpendiculares e ortogonais – recta perpendicular a um plano – planos perpendiculares 1.7 Superfícies Generalidades, geratriz e directriz Algumas superfícies: – plana – piramidal – cónica – prismática – cilíndrica – esférica	9	Neste *módulo inicial*, onde se pretende revisitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar. Com esses referenciais, ou outros expedientes, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade). O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a

1.8 Sólidos – pirâmides – paralelepípedos – prismas – cones – cilindros – esfera 1.9 Secções planas de sólidos e truncagem		perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo. O domínio visual e espacial destas condições deverá permitir uma abordagem preliminar de problemas métricos de determinação de distâncias (distância entre dois pontos, de um ponto a uma recta, de um ponto a um plano, de dois planos paralelos) e de ângulos (ângulo de duas rectas, de uma recta com um plano, noção de diedro e ângulo diedro), levando o aluno a deduzir o conjunto de procedimentos necessários para chegar a uma solução. Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos *modelos B a K* ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas. As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizados as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos. Exemplos de situações para “visualizar” o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes, – de um ponto – de uma recta – de um plano – dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta) – dos vértices de um quadrado – dos pontos de uma circunferência – das faces de um diedro – etc... ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de, – uma esfera – um cilindro de revolução – um cone de revolução – um cubo Recomenda-se que a forma das secções

		referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido. Para explorar a relação espaço-plano--espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação descritiva, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembrar algumas construções elementares da geometria plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.
2 Introdução à Geometria Descritiva	**4**	
2.1 Geometria Descritiva 2.1.1 Resenha histórica 2.1.2 Objecto e finalidade 2.1.3 Noção de projecção – projectante – superfície de projecção – projecção	1	Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana. Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.
2.2 Tipos de projecção 2.2.1 Projecção central ou cónica 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica – projecção oblíqua ou clinogonal – projecção ortogonal	1	A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam: – transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná--lo num ponto impróprio; – partir de um triângulo equilátero (60º+60º+60º) e chegar a um triângulo isósceles (90º+90º+0º) transformando um vértice num ponto impróprio; – aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da sua transformação numa recta, ou

		seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio; – etc… Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira. Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.
2.3 Sistemas de representação - sua caracterização: – pelo tipo de projecção – pelo número de projecções utilizadas – pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional – projecção única – *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção	1	Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles. Em *Ver pelo desenho* (ilustração 66, p.87) Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.
2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica 2.4.1 Representação triédrica – triedros trirrectângulos de projecção – planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3) – eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z – coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*) – representação triédrica de um ponto 2.4.2 Representação diédrica – diedros de projecção – planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2) – eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra) – planos bissectores dos diedros – representação diédrica de um ponto 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade	1	Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do *modelo A* que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional. O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3) como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvam os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em correlação. De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível, frequentemente, omitir a

		identificação dos vértices que os definem.
3 Representação diédrica	**98**	
3.1 Ponto 3.1.1 Localização de um ponto 3.1.2 Projecções de um ponto	4	Para facilitar a visualização espacial pode ser retomado o *modelo A*, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal. Propõe-se que: – o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção; – o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção; – o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X; – represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.
3.2 Segmento de recta 3.2.1 Projecções de um segmento de recta 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção: – perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical – paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas) – paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal – paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil – não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo	3	Propõe-se que: – o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção; – no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).
3.3 Recta 3.3.1 Recta definida por dois pontos 3.3.2 Projecções da recta 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta 3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção 3.3.6 Posição relativa de duas rectas – complanares –paralelas –concorrentes – enviesadas	8	Propõe-se: – partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção; – levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção;

		– que, de uma recta, o aluno simule, no modelo:
		  – as projecções;
		  – os traços;
		– que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada;
		– representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.

3.4 Figuras planas I Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil	4	Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil. O uso de *software* de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.
3.5 Plano 3.5.1 Definição do plano por: – pontos não colineares – uma recta e um ponto exterior – duas rectas paralelas – duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção) 3.5.2 Rectas contidas num plano 3.5.3 Ponto pertencente a um plano 3.5.4 Rectas notáveis de um plano: – horizontais – frontais – de maior declive – de maior inclinação 3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção Planos projectantes: – paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente) – perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical – perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas) Planos não projectantes: – de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X) – oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)	16	Será de tratar, como mais habitual por ser geral, a representação diédrica dos planos pelas projecções de três pontos não colineares ou de duas rectas paralelas ou de duas rectas concorrentes (que podem ser os traços do plano nos planos de projecção). Com o intuito de facilitar a visualização do plano, a sua representação por 3 pontos não colineares poderá ser transformada na representação do triângulo por eles definido. O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do *modelo A* permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que: – uma recta esteja contida num plano; – um ponto pertença a um plano. Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano. Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano. Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma

		"face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor. Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.
3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano) 3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante 3.6.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante 3.6.3 Intersecção de dois planos projectantes 3.6.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante 3.6.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral) 3.6.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13} 3.6.7 Intersecção de planos (método geral) 3.6.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um: – plano projectante – plano oblíquo – plano de rampa	18	Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano. Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o β_{24}. Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.
11º ANO		
3.7 Sólidos I 3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil 3.7.2 Paralelepípedos rectângulos, prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil 3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil) 3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos	7	Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a *software* de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderá facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades. Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas com diferentes cotas ou afastamentos para melhor percepção das visibilidades. Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com

		cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções. Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção. Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos - tetraedro e hexaedro regulares - ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.
3.8 Métodos geométricos auxiliares I		
3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares – características e aptidões	4	Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – recta horizontal em recta de topo – recta frontal em recta vertical – recta oblíqua em recta horizontal ou frontal – plano de topo em plano horizontal – plano vertical em plano frontal
3.8.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança) 3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto 3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta 3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano		
3.8.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação) 3.8.3.1 Rotação do ponto 3.8.3.2 Rotação da recta 3.8.3.3 Rotação de um plano projectante 3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes 3.8.3.5 Rebatimento de planos não projectantes – rampa – oblíquo	10	No estudo da rotação da recta (*modelo L*) propõem-se os seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo – uma recta frontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta vertical – uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a *software* de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura. Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará a denominar-se rebatimento. O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de

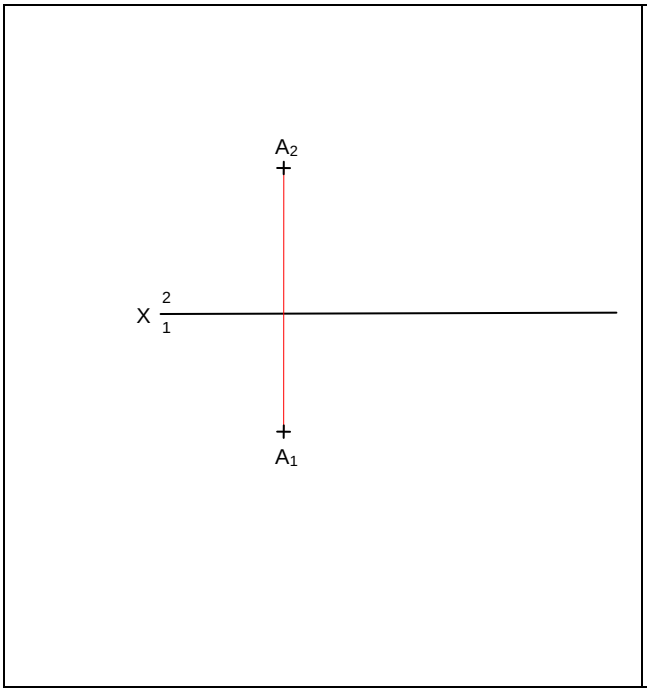
		economia de meios. Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, será conveniente recorrer ao *modelo M*, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento.
3.9 Figuras planas II Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo	4	Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Désargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.
3.10 Sólidos II Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo	8	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do *software* já mencionado.
3.11 Secções 3.11.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos – horizontal, frontal e de perfil 3.11.2 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes ou de rampa 3.11.3 Truncagem	12	Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações: – secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: – sem aresta(s) de perfil – com aresta(s) de perfil; – secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: – sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção – com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção. Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede. Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano

		pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases. Poder-se-á utilizar o Teorema de Désargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes. Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade). Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder-se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.
4 Representação axonométrica	**21**	
4.1 Introdução 4.1.1 Caracterização 4.1.2 Aplicações	4	Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades. Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentados aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do *design* industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria,

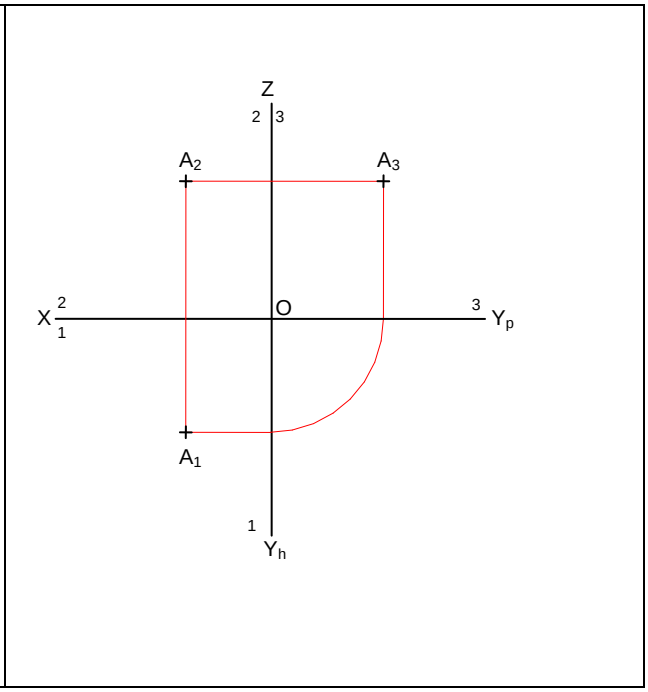
		na descrição dessas formas.
4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais: Cavaleira e Planométrica 4.2.1 Generalidades 4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes 4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo 4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas		No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar--se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os efeitos produzidos. Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder--se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente, distorções.
4.3 Axonometrias ortogonais: Trimetria, Dimetria e Isometria 4.3.1 Generalidades 4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas 4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos 4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo 4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas	4	Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (*modelo N*) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações. No modelo poder-se-á evidenciar claramente: – a correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico; – os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do **triângulo fundamental** correspondente à base da **pirâmide axonométrica** com vértice na origem do sistema de eixos; – a configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria; – a redução das medidas resultante da inclinação dos eixos. Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um eixo, o que seria desejável, poder-se--á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas. Neste processo deverá salientar-se: – o teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto

		correspondente ao rebatimento da origem; – os conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e, consequentemente, o recurso ao Teorema de Désargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo. Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.
4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas por: – paralelepípedos rectângulos com as bases ou faces paralelas a um dos plano coordenados – pirâmides e prismas regulares e oblíquos de base(s) regular(es) com a(s) referida(s) base(s) paralela(s) a um dos planos coordenados e com pelo menos uma aresta da(s) base(s) paralela(s) a um eixo – cones e cilindros de revolução e oblíquos com base(s) em verdadeira grandeza (só no caso da axonometria clinogonal) Métodos de construção 4.4.1 Método das coordenadas 4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente 4.4.3 Método dos cortes	13	Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar especial ênfase ao chamado “método dos cortes” (4.4.3) devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.

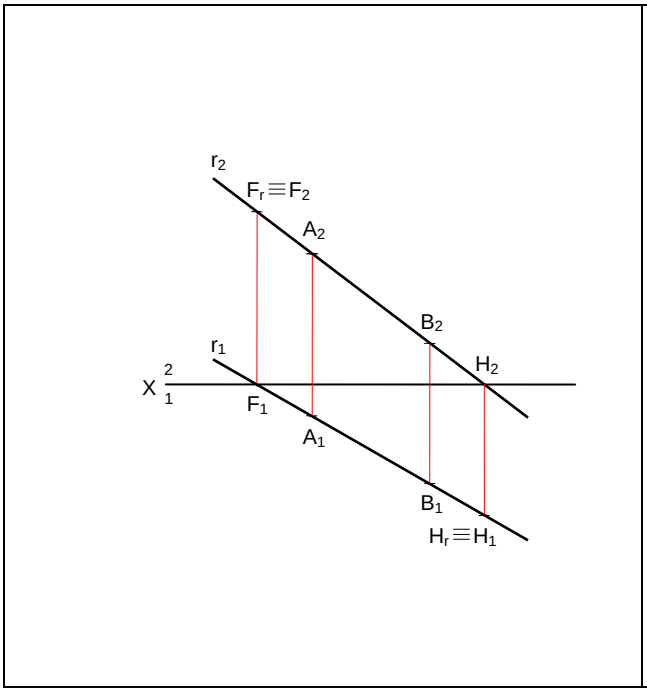
CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



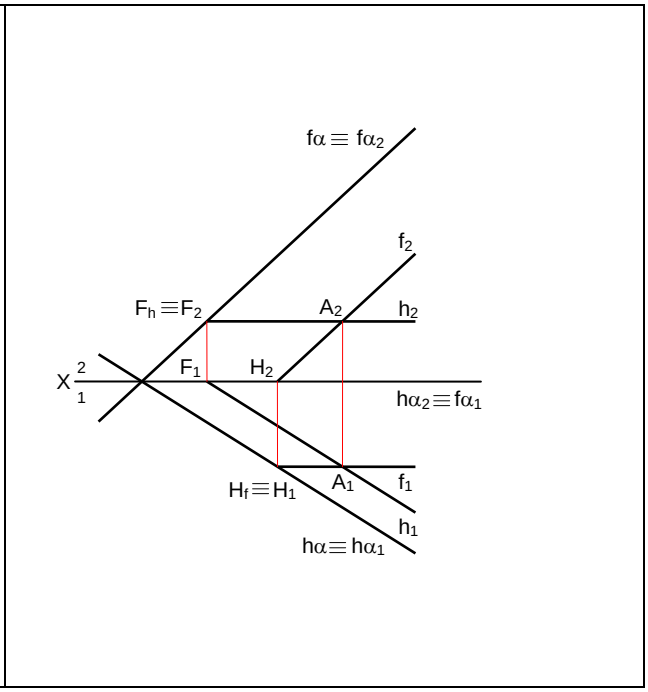
Representação diédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



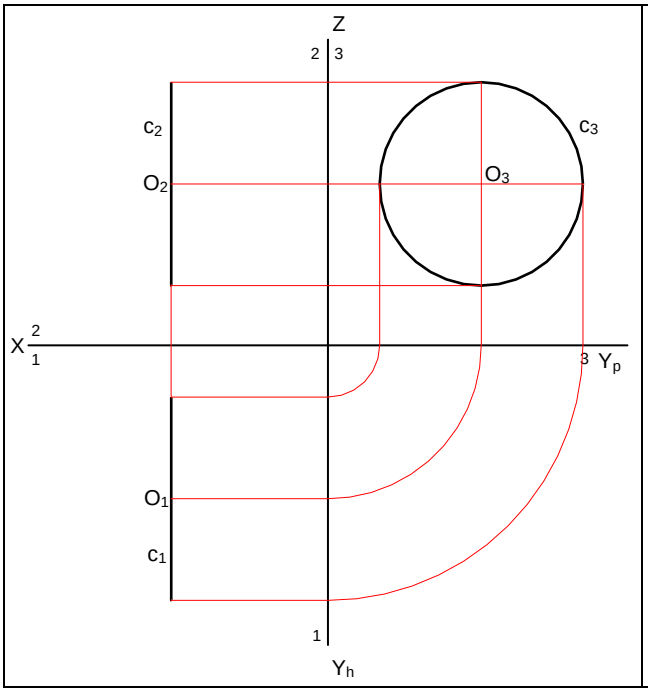
Representação triédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



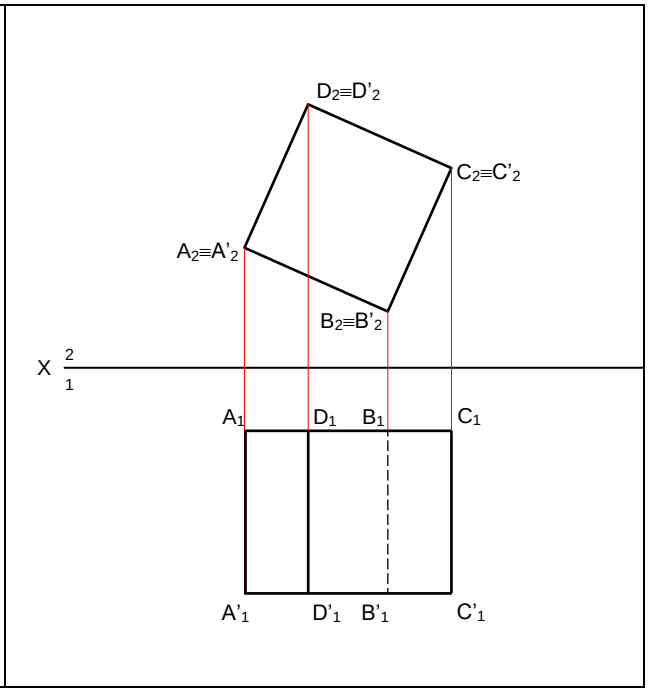
Representação de uma recta **r** e dos seus traços horizontal e frontal



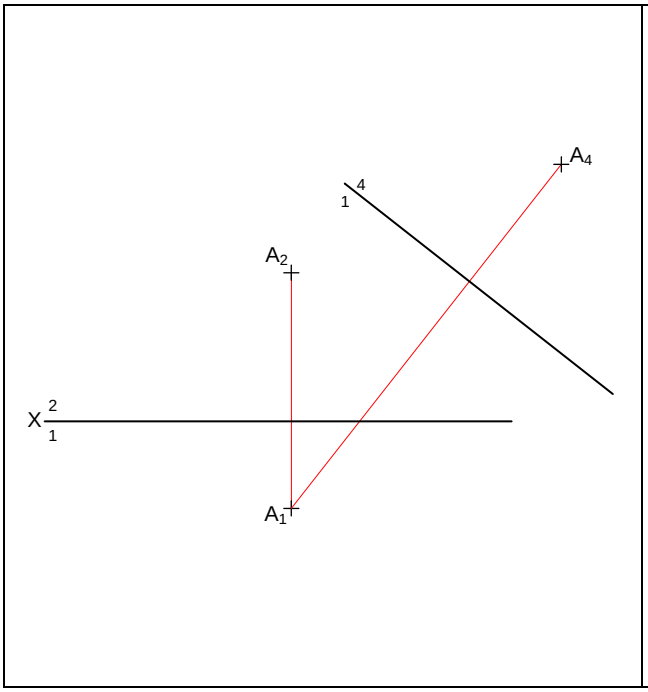
Representação de um plano **α** pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



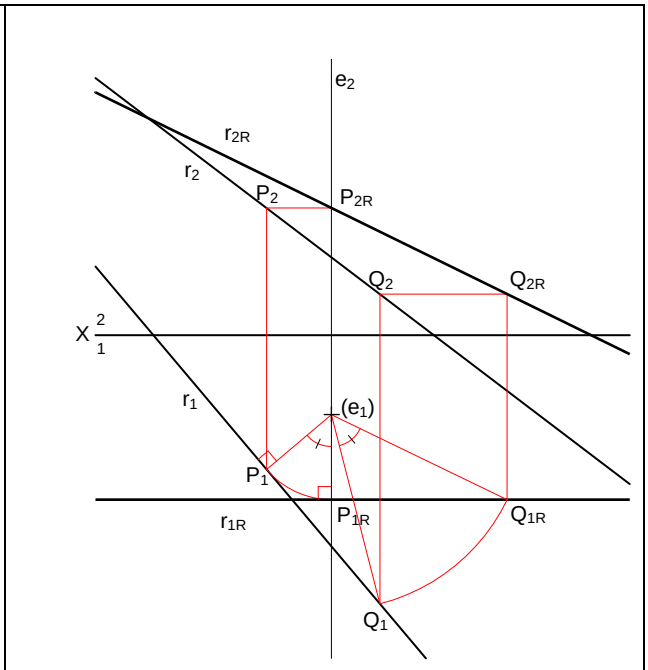
Representação triédrica de uma circunferência **c** de perfil



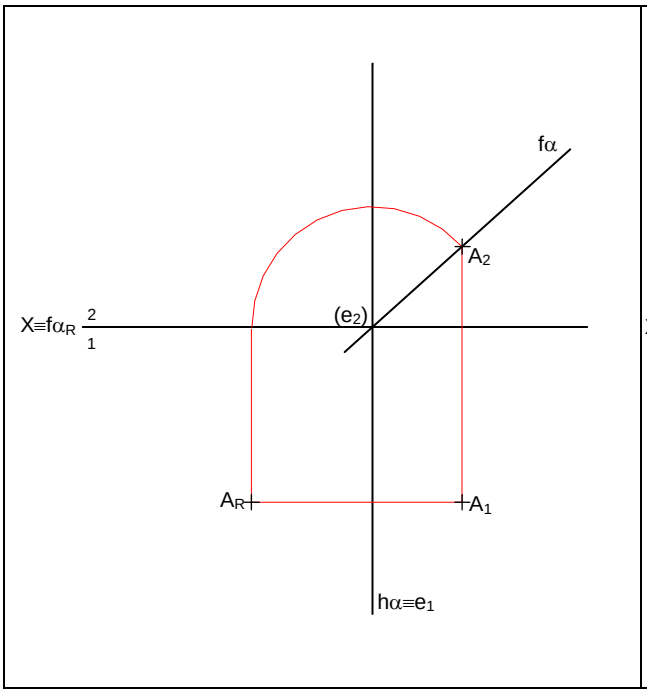
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



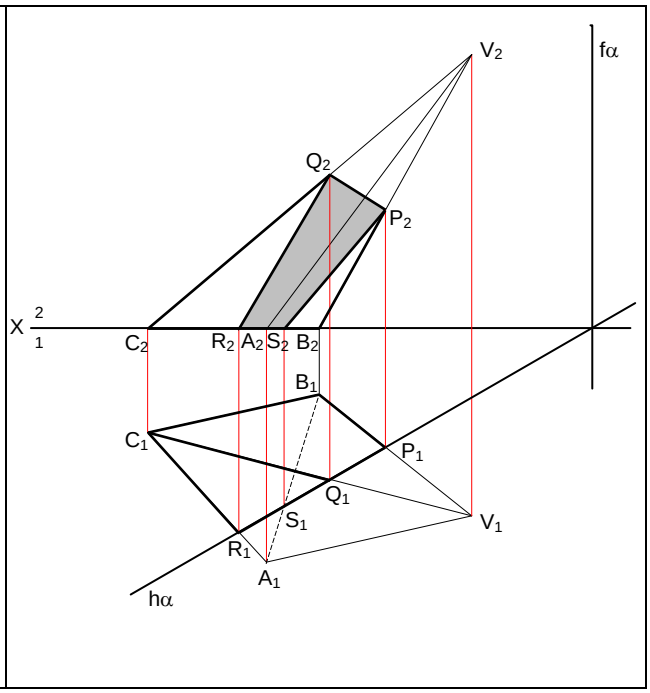
Mudança de diedros
Projecções de um ponto **A** em diferentes diedros



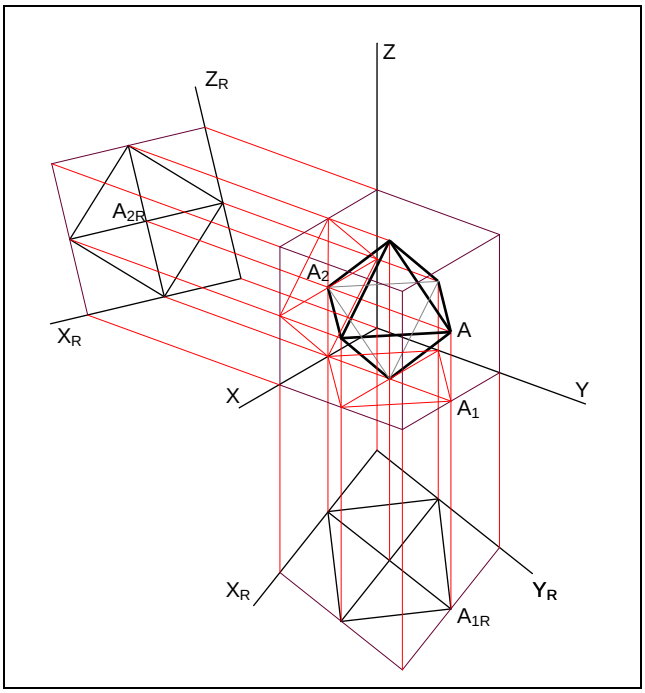
Transformação de uma recta oblíqua **r** numa recta frontal através de uma rotação em torno de um eixo vertical **e**



Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal



Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical



Representação trimétrica de um octaedro com aplicação simultânea de dois métodos construtivos: do paralelepípedo envolvente e dos cortes

MODELOS DIDÁCTICOS

Existe um conjunto de modelos expressamente concebidos para a leccionação da disciplina de Geometria Descritiva que são os seguintes:

MODELO A

Este modelo é constituido pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e triédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidas elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

MODELO M

Modelo destinado a visualizar o rebatimento de um plano oblíquo, quer pelo triângulo do rebatimento quer pelas rectas horizontais ou frontais do plano. O plano oblíquo é truncado por um plano projectante que lhe é perpendicular, também ele rebatível, de modo a permitir a visualização do triângulo do rebatimento e a determinação da sua verdadeira grandeza, o que permite reproduzir espacialmente todas as operações que serão efectuadas no papel para rebater o plano.

MODELO N

Realizado com esquadros de desenho este modelo, que se destina à leccionação das axonometrias, permite a visualização do triedro definido pelos planos coordenados e da pirâmide axonométrica quando fazemos coincidir a sua base (triângulo fundamental) com o plano axonométrico. Nesta última situação torna-se possível efectuar o rebatimento de uma face da pirâmide para o plano de projecção, bem como o seu contra-rebatimento, dando a entender os procedimentos necessários para a determinação de verdadeiras grandezas e das escalas axonométricas.

GLOSSÁRIO

eixo X ou **aresta dos diedros** (linha de terra) - recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

axonometrias clinogonais – axonometrias oblíquas (ver projecção clinogonal)

axonometria planométrica – designação pela qual é actualmente conhecida a axonometria militar (norma ISO 5456)

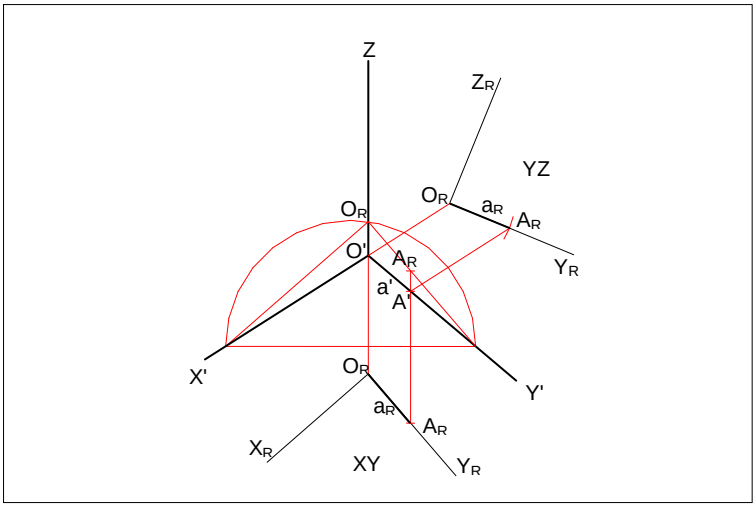
diedros de projecção (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

eixos de coordenadas ortogonais - referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abcissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

incidência - o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva - os pontos, as rectas e os planos - ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

sistema de representação – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

método dos cortes – processo que consiste no rebatimento dos planos coordenados para o interior da pirâmide axonométrica (para evitar que os planos coordenados apresentem faces distintas após o rebatimento), seguido de uma translação de cada par de eixos de coordenadas segundo uma direcção normal à charneira do rebatimento, permitindo a representação de cortes horizontais e verticais do objecto. Por contra-rebatimento e através da conjugação de, pelo menos, dois cortes, obtém-se a projecção axonométrica do objecto.



mudança de diedros de projecção (mudança de planos) - utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

plano frontal de projecção (plano vertical de projecção) - plano frontal de afastamento nulo

projecção clinogonal - termo utilizado para designar a projecção paralela oblíqua em relação a um plano de projecção; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

rectas de maior declive de um plano - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

rectas de maior inclinação de um plano - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

representação diédrica ou **sistema de representação diédrica** - método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projecção ortogonal, método ou sistema diédrico, projecção diédrica, etc…

teorema de Désargues - se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projecção próprio ou impróprio), as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

triedros trirrectângulos de projecção - são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projecção horizontal, frontal e de perfil

4. BIBLIOGRAFIA

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

> Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Planos a médio e longo prazo - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies*). Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P. (1987). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

> Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

Geometria

*Aguilar, L. T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

> Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo inicial previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um "antigo" compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Colecção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma "verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas".

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoelpi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personagens, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A. A F.(1947*). A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Salienta-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

"Ver pelo desenho", como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 - Fundamentos, Álgebra y Geometria*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço: http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm

Geometria Descritiva

Almeida, Á. D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED, (1)* 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

Aubert, J. (1982), Dessin d'Architecture a partir de la Geometrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. C. (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (3 e 4.)* 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. C. (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (7).* 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário "Como ensinar Geometria Descritiva", organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géometrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedica um dos capítulos à homologia plana.

*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974*). Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V. O., Sementsov, M. A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descriptiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da

Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

*Leitão, C.A. M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N. C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED, (14*). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – "Geometria: que futuro?" – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da Geometria Descritiva de Monge para uso na "Escuela de Caminos", precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J. S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capitulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descriptiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L. P. M. (1899). *Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica - Tomo I e II - Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores geómetras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

*Pinheiro, C. .S. & Sousa, P. F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal. O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Rodriguez de Abajo, F. J. (1992). *Geometria Descriptiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do "sistema diédrico" . Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BENGOA, V. A. (1987). *Geometria Descriptiva - Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BLANCO, A. R. (1982), *Geometria Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Ribeiro, C. T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

"...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão." (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Sánchez Gallego, J. A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relacão à representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do "método dos cortes" sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

*Sant'ana, S. & GOMES, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a "percepção" da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J. P. (1999). Acerca da "nova" terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED, (9).* 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

XAVIER, J. P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED, (12).* 7-22.

Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, "Saber ver a Geometria Descritiva", onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como "método dos cortes", secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

Desenho Técnico

*Cunha, L. V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J. S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico).* Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

NORMAS

Norma ISO 128 Princípios gerais de representação
Norma ISO 216 Formatos de papéis
Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)
Norma ISO 3098 Escrita
Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção
Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos
Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho
Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos
(generalidades e tipo de desenho)
Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

Endereços na Internet:

http://www.geom.umn.edu/
http://www.ul.ie/~rynnet/keanea/homepage.html
http://www.albares.com/dibujotecnico/salaestudios/salaestudios.htm
http://www.arq.ufrgs.br/
http://www.mat.uel.br/barison/DGGDcont.htm
http://www.cce.ufsc.br/~ligsouza/geometria_descritiva.htm
http://indigo.ie/~paulmcd/
http://www.engr.ukans.edu/~rhale/ae421/giesecke/CHAP17.PDF
http://thales.cica.es/ed/practicas/TecInfo/09/indice.html
http://www.anth.org.uk/NCT/
http://mane.mech.virginia.edu/~engr160/Graphics/Outline.html
http://drr.arc.uniroma1.it/decarlo/
http://www.terravista.pt/ancora/6707/impindex2.html
http://www.fc.up.pt/atractor

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DIRECÇÃO-GERAL DE INOVAÇÃO E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR

ENSINO RECORRENTE DE NÍVEL SECUNDÁRIO

GEOMETRIA DESCRITIVA A

10º E 11º ANOS OU 11º E 12º ANOS

CURSOS CIENTÍFICO-HUMANÍSTICOS DE:
ARTES VISUAIS
CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
CURSOS ARTÍSTICOS ESPECIALIZADOS DE:
DESIGN DE COMUNICAÇÃO
DESIGN DE PRODUTO
PRODUÇÃO ARTÍSTICA

AUTORES
JOÃO PEDRO XAVIER (COORDENADOR)
JOSÉ AUGUSTO REBELO

HOMOLOGAÇÃO
20/06/05

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 3

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA 5

FINALIDADES 5

OBJECTIVOS 5

VISÃO GERAL DE TEMAS/CONTEÚDOS 6

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS 8

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER 9

AVALIAÇÃO 10

RECURSOS 12

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA 13

MÓDULO 1 14

MÓDULO 2 20

MÓDULO 3 22

MÓDULO 4 25

MÓDULO 5 27

MÓDULO 6 30

CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA 33

MODELOS DIDÁCTICOS 36

GLOSSÁRIO 37

4. BIBLIOGRAFIA 39

DIDÁCTICA ESPECÍFICA 39

GEOMETRIA 39

GEOMETRIA DESCRITIVA 42

DESENHO TÉCNICO 46

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de GEOMETRIA DESCRITIVA A é uma disciplina bianual, que integra a componente de formação específica dos planos de estudo dos Cursos Científico-Humanísticos de Artes Visuais e de Ciências e Tecnologias, bem como a componente científica dos Cursos Artísticos Especializados de Design de Comunicação, de Design de Produto e de Produção Artística, visando o aprofundamento, estruturação e sistematização de conhecimentos e competências metodológicas no âmbito da Geometria Descritiva.

Uma vez que a Geometria Descritiva, dada a natureza do seu objecto, permite o desenvolvimento das capacidades de ver, perceber, organizar e catalogar o espaço envolvente, propiciando instrumentos específicos para o trabalhar – em desenho – ou para criar novos objectos ou situações, pode compreender-se o quanto o seu alcance formativo é extremamente amplo. Sendo essencial a áreas disciplinares onde é indispensável o tratamento e representação do espaço – como sejam, a arquitectura, a engenharia, as artes plásticas ou o *design* – a sua importância faz-se sentir também ao nível das atitudes, dirigindo-se ao estudante considerado globalmente enquanto pessoa humana e não apenas funcionalmente enquanto aprendiz de um dado ofício.

O sentido da presença desta disciplina no reportório curricular do ensino recorrente de nível secundário é o de contribuir para a formação de indivíduos enquanto tal e, estimular, particularmente, o "diálogo" entre a mão e o cérebro, no desenvolvimento recíproco de ideias e representações gráficas.

O presente programa tem por base o programa homónimo em regime diurno, ajustado ao modelo de organização por módulos capitalizáveis. Foi concebido para 33 semanas e segmentado em 3 módulos por ano lectivo. Cada módulo corresponde a um período, sendo a divisão por períodos uma indicação para o termo da sua capitalização.

Os conteúdos constantes do Programa de GD-A, após a introdução à geometria no espaço, abordam dois sistemas de representação – **diédrico** e **axonométrico** – considerados como fundamentais ou basilares na formação secundária de um aluno, no âmbito da Geometria Descritiva os quais se constituem, ademais, como denominador comum às várias vias de prosseguimento de estudos.

Optou-se por integrar, nos conteúdos programáticos, dois sistemas de representação, referidos na sequência indicada, já que parece justificável que o estudo do sistema de representação axonométrica se faça, no ensino secundário, com um grau de desenvolvimento maior do que no ensino básico, onde este sistema mereceu apenas uma abordagem pertencente ao domínio do Desenho Técnico aliada à representação de formas bastante simples, predominantemente paralelepipédicas. Sendo assim, embora o estudo da axonometria continue a visar, fundamentalmente, a representação de formas ou objectos tridimensionais, interessa agora fazer a desmontagem do sistema, conhecer os seus princípios e entender o seu funcionamento, o que implica uma síntese de operações abstractas que o aluno não está apto a realizar no início do 10º ano, além de pré-requisitos específicos que o estudo desenvolvido do sistema de representação diédrica lhe deverá fornecer.

É exactamente a representação diédrica que constitui o cerne do programa, dado que o conhecimento deste sistema de representação não só fornece os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de qualquer outro, como se revela bastante eficaz na consecução do objectivo essencial de desenvolver a capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional.

Em relação à sequência dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior grau de abstracção, procurou-se atenuar esta componente, através das didácticas e metodologia propostas. Deste modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se a ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel – após ter visto e compreendido – sem memorizar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida, a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem, que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia**. Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na partição de unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão do Programa em módulos capitalizáveis, no caso do ensino secundário recorrente. É nosso entendimento que um programa não se destina apenas a alunos bons, para os quais qualquer método pedagógico se adapta, mas para o aluno médio com algumas dificuldades na aprendizagem. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção": *... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construí-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (...) dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura, nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência*. O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver as capacidades de visualização mental e representação gráfica, de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver as capacidades de interpretação e de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e de resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Fomentar a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Reconhecer a função e vocação particular de cada um desses sistemas de representação
- Representar com exactidão, sobre desenhos que só têm duas dimensões, os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento dos sistemas estudados no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação

- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas

- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso

- Relacionar-se responsavelmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias, tolerantes e de respeito

VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

Este Programa é composto por uma secção inicial que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do Programa. Este tema reparte-se, inevitavelmente, pelos dois anos lectivos. Conclui o programa o estudo dos fundamentos da Representação Axonométrica e sua aplicação na representação de formas tridimensionais. A repartição temática do Programa, por módulos, e os respectivos pesos apresentam-se no seguinte quadro resumo:

10º ANO/11º ANO

Módulo 1 (9 semanas) **Duração: 1º Período lectivo**

Geometria no Espaço	9 aulas
Introdução à Geometria Descritiva	4 aulas
Representação Diédrica I	15 aulas

Módulo 2 (12 semanas) **Duração: 2º Período lectivo**

Representação Diédrica II	36 aulas

Módulo 3 (12 semanas) **Duração: 3º Período lectivo**

Representação Diédrica III	35 aulas

11º ANO/12º ANO

Módulo 4 (12 semanas) **Duração: 1º Período lectivo**

Representação Diédrica IV	36 aulas

Módulo 5 (12 semanas) **Duração: 2º Período lectivo**

Representação Diédrica V	36 aulas

Módulo 6 (9 semanas) **Duração: 3º Período lectivo**

Representação Axonométrica	27 aulas

Total de aulas de 90 minutos	198 aulas

Os conteúdos seleccionados são considerados como essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas, no âmbito dos sistemas de representação a estudar.

É proposta uma sequência, em correspondência com sugestões metodológicas específicas, que se julga ser mais conveniente. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o Programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa.

Como exemplo, referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos ou de sólidos com base assente em planos, que sucedem o estudo dos métodos geométricos auxiliares, mas que podem ser abordados em simultaneidade. Também os problemas métricos poderão ser tratados parcialmente à medida que os alunos se vão familiarizando com os referidos métodos. É natural focar a questão da determinação da distância entre dois pontos logo que o aluno tenha condições de determinar a verdadeira grandeza do segmento que eles definem, tal como parece lógico solicitar a determinação do ângulo de duas rectas ou a distância de um ponto a uma recta mal seja possível rebater qualquer plano. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profícuas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento e aspectos de representação que não poderão deixar de ser veiculadas.

CONTEÚDOS DE CADA ANO E DE CADA MÓDULO

10º ANO/11º ANO

MÓDULO 1 – GEOMETRIA NO ESPAÇO. REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I	**28**
1 Geometria no Espaço	**9**
1.1 Ponto	
1.2 Recta	
1.3 Posição relativa de duas rectas	
1.4 Plano	
1.5 Posição relativa de rectas e de planos	
1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos	
1.7 Superfícies	
1.8 Sólidos	
1.9 Secções planas de sólidos e truncagem	
2 Introdução à Geometria Descritiva	**4**
2.1 Geometria Descritiva	1
2.2 Tipos de projecção	1

2.3	Sistemas de representação – sua caracterização	1
2.4	Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica	1
3	**Representação diédrica**	**15**
3.1	Ponto	4
3.2	Segmento de recta	3
3.3	Recta	8

MÓDULO 2 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II		**36**
1	Figuras planas I	4
2	Plano	12
3	Intersecções (recta/plano e plano/plano)	20

MÓDULO 3 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III		**35**
1	Sólidos I	8
2	Métodos geométricos auxiliares I	13
3	Figuras planas II	5
4	Sólidos II	9

11º ANO/12º ANO

MÓDULO 4 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV		**36**
1	Paralelismo de rectas e de planos	2
2	Perpendicularidade de rectas e de planos	5
3	Métodos geométricos auxiliares II	10
4	Problemas métricos	9
5	Figuras planas III	4
6	Sólidos III	6

MÓDULO 5 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V		**36**
1	Secções	14
2	Sombras	22

MÓDULO 6 – REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA		**27**
1	Introdução	2
2	Axonometrias oblíquas ou clinogonais: Cavaleira e Planométrica	4
3	Axonometrias ortogonais: Trimetria, Dimetria e Isometria	4
4	Representação axonométrica de formas tridimensionais	17

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articular as abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos, tendo em vista o seu nível etário, uma vez que se trata de alunos adultos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das

situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura metodológica envolvente facilitará a compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* de promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com disciplinas de carácter oficinal.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, artes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste Programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidas em conta questões relacionadas com a História da Arte.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados

- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo
- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

AVALIAÇÃO

A avaliação das aprendizagens em Geometria Descritiva é contínua e compreende três modalidades: diagnóstica, formativa e sumativa,
Tem como referência os **objectivos e a aferição das competências adquiridas** e, define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

Conceitos

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos dos sistemas de representação diédrica e axonométrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação dos sistemas de representação utilizados;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

Técnicas

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;
- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;
- a legibilidade das notações.

Realização

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

Atitudes

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

Técnicas e instrumentos de avaliação

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas;

No ensino recorrente por módulos capitalizáveis, a avaliação diagnóstica assume uma importância acrescida já que se constitui como processo de aferição do nível de conhecimentos e competências prévias dos alunos, permitindo detectar as suas eventuais dificuldades, e também os saberes adquiridos através da experiência, sendo assim possível definir estratégias diferenciadas de ensino-aprendizagem no âmbito da turma.

Para a avaliação das aprendizagens, na modalidade de frequência não presencial, prevê-se uma prova sumativa que, nesta disciplina, corresponde a uma Prova Prática constituída por exercícios/problemas do domínio da Geometria do Espaço e da Geometria Descritiva que poderão integrar, eventualmente, um relatório escrito ou memória descritiva.

RECURSOS

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Vídeo* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *vídeo*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de CAD
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

10º ANO/11º ANO

MÓDULO 1
GEOMETRIA NO ESPAÇO. REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I

MÓDULO 2
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II

MÓDULO 3
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III

11º ANO/12º ANO

MÓDULO 4
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV

MÓDULO 5
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V

MÓDULO 6
REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA

MÓDULO 1
GEOMETRIA NO ESPAÇO. REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I

Duração de referência: 28 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Relacionar espacialmente os elementos geométricos
- Conhecer algumas superfícies e sólidos
- Reconhecer figuras correspondentes a secções planas de sólidos
- Adquirir a noção de projecção
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base do sistema de representação diédrica
- Caracterizar os sistemas de representação diédrica e triédrica
- Representar diedricamente o ponto, o segmento de recta e a recta

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

10º ANO/11º ANO

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Geometria no Espaço	**9**	
1.1 Ponto 1.2 Recta 1.3 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas 1.4 Plano 1.5 Posição relativa de rectas e de planos – recta pertencente a um plano – recta paralela a um plano – recta concorrente com um plano – planos paralelos – planos concorrentes 1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos – rectas perpendiculares e ortogonais – recta perpendicular a um plano – planos perpendiculares 1.7 Superfícies Generalidades, geratriz e directriz Algumas superfícies: – plana – piramidal – cónica – prismática – cilíndrica – esférica 1.8 Sólidos – pirâmides – paralelepípedos	9	Nesta unidade, onde se pretende revisitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar. Com esses referenciais, ou outras estratégias, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade). O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de

– prismas – cones – cilindros – esfera 1.9 Secções planas de sólidos e truncagem		um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo. O domínio visual e espacial destas condições deverá permitir uma abordagem preliminar de problemas métricos de determinação de distâncias (distância entre dois pontos, de um ponto a uma recta, de um ponto a um plano, de dois planos paralelos) e de ângulos (ângulo de duas rectas, de uma recta com um plano, noção de diedro e ângulo diedro), levando o aluno a deduzir o conjunto de procedimentos necessários para chegar a uma solução. Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos *modelos B a K* ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas. As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizadas as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos. Exemplos de situações para “visualizar” o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes, – de um ponto – de uma recta – de um plano – dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta) – dos vértices de um quadrado – dos pontos de uma circunferência – das faces de um diedro – etc... ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de, – uma esfera – um cilindro de revolução – um cone de revolução – um cubo Recomenda-se que a forma das secções referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido.

		Para explorar a relação espaço-plano-espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembrar algumas construções elementares da geometria plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.
2 Introdução à Geometria Descritiva	**4**	
2.1 Geometria Descritiva 2.1.1 Resenha histórica 2.1.2 Objecto e finalidade 2.1.3 Noção de projecção – projectante – superfície de projecção – projecção	1	Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana. Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.
2.2 Tipos de projecção 2.2.1 Projecção central ou cónica 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica – projecção oblíqua ou clinogonal – projecção ortogonal	1	A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam: – transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná-lo num ponto impróprio; – partir de um triângulo equilátero ($60^o+60^o+60^o$) e chegar a um triângulo isósceles ($90^o+90^o+0^o$) transformando um vértice num ponto impróprio; – aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da sua transformação numa recta, ou seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio;

		– etc… Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira. Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.
2.3 Sistemas de representação – sua caracterização: – pelo tipo de projecção – pelo número de projecções utilizadas – pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional – projecção única – *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção	1	Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles. Em *Ver pelo desenho* (ilustração 66, p.87) Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.
2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica 2.4.1 Representação triédrica – triedros trirrectângulos de projecção – planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3) – eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z – coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*) – representação triédrica de um ponto 2.4.2 Representação diédrica – diedros de projecção – planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2) – eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra) – planos bissectores dos diedros – representação diédrica de um ponto 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade	1	Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do *modelo A* que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional. O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3) como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvam os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em correlação. De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível, frequentemente, omitir a identificação dos vértices que os definem.

3 Representação diédrica	**15**	
3.1 Ponto 3.1.1 Localização de um ponto 3.1.2 Projecções de um ponto	4	Para facilitar a visualização espacial pode ser retomado o *modelo A*, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal. Propõe-se que: – o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção; – o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção; – o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X; – represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.
3.2 Segmento de recta 3.2.1 Projecções de um segmento de recta 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção: – perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical – paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas) – paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal – paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil – não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo	3	Propõe-se que: – o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção; – no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).
3.3 Recta 3.3.1 Recta definida por dois pontos 3.3.2 Projecções da recta 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta 3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção 3.3.6 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas	8	Propõe-se: – partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção; – levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção; – que, de uma recta, o aluno simule, no

		modelo: – as projecções; – os traços; – que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada; – representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.

MÓDULO 2
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II

Duração de referência: 36 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Representar diédrica e triedricamente figuras planas paralelas aos planos de projecção
- Representar diedricamente o plano
- Resolver problemas elementares de incidência e de intersecção relativos aos elementos geométricos

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Figuras planas I Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil	4	Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil. O uso de *software* de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.
2 Plano 2.1 Definição do plano por: – 3 pontos não colineares – uma recta e um ponto exterior – duas rectas paralelas – duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção) 2.2 Rectas contidas num plano 2.3 Ponto pertencente a um plano 2.4 Rectas notáveis de um plano: – horizontais – frontais – de perfil – de maior declive – de maior inclinação 2.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção Planos projectantes: – paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente) – perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical – perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas) Planos não projectantes:	12	Sem deixar de ter em conta as diferentes definições do plano deve privilegiar-se a sua representação através dos seus traços nos planos de projecção (rectas concorrentes) e/ou por um triângulo, figura que melhor permite visualizar a sua definição genérica por 3 pontos não colineares. O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do *modelo A* permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que: – uma recta esteja contida num plano; – um ponto pertença a um plano. Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano.

	– de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção – perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X) – oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)		Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano. Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma "face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor. Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.
3	Intersecções (recta/plano e plano/plano) 3.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante 3.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante 3.3 Intersecção de dois planos projectantes 3.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante 3.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral) 3.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13} 3.7 Intersecção de planos (método geral) 3.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um: – plano projectante – plano oblíquo – plano de rampa 3.9 Intersecção de três planos	20	Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano. Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o β_{24}. Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.

MÓDULO 3
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III

Duração de referência: 35 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Representar sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(is), frontal(is) ou de perfil; representar a esfera
- Representar pontos e linhas situados nas arestas, faces ou superfícies dos sólidos
- Aplicar os métodos geométricos auxiliares para obtenção de verdadeiras grandezas de figuras situadas em planos projectantes
- Representar figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais e de topo
- Representar sólidos (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares) de base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Sólidos I 1.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil 1.2 Paralelepípedos e prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil 1.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil) 1.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos	8	Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a *software* de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderá facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades. Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas com diferentes cotas ou afastamentos para melhor percepção das visibilidades. Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções.

		Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção. Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos - tetraedro e hexaedro regulares - ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.
2 Métodos geométricos auxiliares I 2.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares – características e aptidões 2.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança) 2.2.1 Transformação das projecções de um ponto 2.2.2 Transformação das projecções de uma recta 2.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano 2.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação) 2.3.1 Rotação do ponto 2.3.2 Rotação da recta 2.3.3 Rotação de um plano projectante 2.3.4 Rebatimento de planos projectantes	13	Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar, – recta horizontal em recta de topo – recta frontal em recta vertical – recta oblíqua em recta horizontal ou frontal – plano de topo em plano horizontal – plano vertical em plano frontal No estudo da rotação da recta (*modelo L*) propõem-se os seguintes problemas--tipo: transformar, – uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo – uma recta frontal numa recta fronto--horizontal ou numa recta vertical – uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a *software* de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura. Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará a denominar-se rebatimento. O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de economia de meios.

3	Figuras planas II Figuras planas situadas em planos verticais ou de topo	5	Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Desargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.
4	Sólidos II Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo	9	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do *software* já mencionado.

MÓDULO 4
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV

Duração de referência: 36 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Resolver problemas de paralelismo e perpendicularidade de rectas e de planos
- Aplicar os métodos geométricos auxiliares para obtenção de verdadeiras grandezas de figuras situadas em planos não projectantes
- Resolver problemas de determinação de verdadeiras grandezas lineares e angulares
- Representar figuras planas situadas em planos não projectantes
- Representar sólidos (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares) de base(s) situada(s) em planos não projectantes

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

11º ANO/12ºANO

DESENVOLVIMENTO	**AULAS**	**SUGESTÕES METODOLÓGICAS**
1 Paralelismo de rectas e de planos 1.1 Recta paralela a um plano 1.2 Plano paralelo a uma recta 1.3 Planos paralelos (definidos ou não pelos traços)	2	Sugere-se que, através da simulação das situações espaciais no modelo, o aluno infira os teoremas de paralelismo de rectas e de planos.
2 Perpendicularidade de rectas e de planos 2.1 Rectas horizontais perpendiculares e rectas frontais perpendiculares 2.2 Recta horizontal (ou frontal) perpendicular a uma recta 2.3 Recta perpendicular a um plano 2.4 Plano perpendicular a uma recta 2.5 Rectas oblíquas perpendiculares 2.6 Planos perpendiculares	5	Deve salientar-se o facto de que duas rectas perpendiculares se projectam em ângulo recto num plano de projecção desde que pelo menos uma delas seja paralela a esse plano. Na perpendicularidade de recta e plano deve ser verificado o teorema anterior relativamente a rectas horizontais e frontais do plano.
3 Métodos geométricos auxiliares II 3.1 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem mudanças sucessivas) 3.1.1 Transformação das projecções de uma recta 3.1.2 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano	10	Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal – um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal Na sequência destes exercícios podem revisitar-se as intersecções de planos propondo este método como alternativa ao denominado “método geral da intersecção de planos”, já que ele nos dá

	3.2 Rotações (casos que impliquem mais do que uma rotação) 3.2.1 Rotação de uma recta 3.2.2 Rotação de um plano 3.2.3 Rebatimento de planos não projectantes – rampa – oblíquo		a possibilidade de transformar um plano qualquer em projectante. Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal – um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, será conveniente recorrer ao *modelo M*, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento. Mais uma vez, o aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo a escolha orientar-se segundo o princípio de economia de meios.
4	Problemas métricos 4.1 Distâncias 4.1.1 Distância entre dois pontos 4.1.2 Distância de um ponto a uma recta 4.1.3 Distância de um ponto a um plano 4.1.4 Distância entre dois planos paralelos 4.2 Ângulos 4.2.1 Ângulo de uma recta com um plano frontal ou com um plano horizontal 4.2.2 Ângulo de um plano com um plano frontal ou com um plano horizontal 4.2.3 Ângulo de duas rectas concorrentes ou de duas rectas enviesadas 4.2.4 Ângulo de uma recta com um plano 4.2.5 Ângulo de dois planos	9	Na resolução de problemas métricos será vantajoso que o aluno resolva um mesmo problema utilizando diferentes métodos auxiliares e que, a partir daí, conclua as vantagens de um relativamente aos outros. Quanto aos problemas de determinação da verdadeira grandeza de ângulos, deverá ser dada especial atenção às definições da geometria euclidiana relativas ao “ângulo de uma recta com um plano” e ao “ângulo de dois planos”.
5	Figuras planas III Figuras planas situadas em planos não projectantes	4	Seguir as sugestões definidas no item “Figuras planas II”.
6	Sólidos III Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos não projectantes	6	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo.

MÓDULO 5
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V

Duração de referência: 36 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Determinar secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos horizontal, frontal ou de perfil
- Determinar secções em sólidos (cones, cilindros e esfera) por planos projectantes
- Determinar secções em sólidos (pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por qualquer tipo de plano
- Adquirir a noção de sombra própria, espacial e projectada (real e virtual)
- Determinar sombras de pontos, segmentos de recta e rectas nos planos de projecção
- Determinar sombras próprias e sombras projectadas de figuras planas (situadas em qualquer tipo de plano) sobre os planos de projecção
- Determinar a sombra própria e sombra projectada de pirâmides, de paralelepípedos rectângulos e de prismas, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção
- Resolver problemas de tangência relativos às superfícies cónica e cilíndrica
- Determinar a sombra própria e sombra projectada de cones e de cilindros, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Secções 1.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos – horizontal, frontal e de perfil 1.2 Secções de cones, cilindros e esfera por planos projectantes 1.3 Secções em sólidos (pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por qualquer tipo de plano 1.4 Truncagem	14	Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações: – secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: – sem aresta(s) de perfil – com aresta(s) de perfil; – secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: – sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção – com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção. Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação

		do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede. Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases. Quanto à esfera poder-se-á verificar que a secção produzida por qualquer tipo de plano é sempre um círculo, podendo variar desde um círculo máximo até ao ponto, no caso de tangência. Poder-se-á utilizar o Teorema de Desargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes. Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade). Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder--se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.
2 Sombras 2.1 Generalidades 2.2 Noção de sombra própria, espacial, projectada (real e virtual) 2.3 Direcção luminosa convencional 2.4 Sombra projectada de pontos, segmentos de recta e recta nos planos de projecção 2.5 Sombra própria e sombra projectada de figuras planas (situadas em qualquer plano) sobre os planos de projecção 2.6 Sombra própria e sombra projectada de pirâmides, de paralelepípedos rectângulos e de prismas, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção 2.7 Planos tangentes às superfícies cónica e cilíndrica:	22	Para facilitar a aquisição dos conceitos de sombra própria, espacial, projectada, real e virtual, será conveniente a utilização de um foco luminoso (lâmpada ou luz solar) e de formas bi ou tridimensionais que produzirão sombras diversificadas conforme o seu posicionamento. Para melhor compreensão dos pontos de quebra poderá ser vantajoso o estudo comparativo da sombra de um segmento de recta fazendo alterações sucessivas das suas coordenadas de forma a projectar sombra só num plano de projecção, nos dois ou só no outro plano. Poderá ser seguido o mesmo raciocínio

– num ponto da superfície – por um ponto exterior – paralelos a uma recta dada 2.8 Sombra própria e sombra projectada de cones e de cilindros, com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil, nos planos de projecção		para figuras planas. Será de todo o interesse alertar os alunos para a vantagem da determinação prévia da linha separatriz de luz e sombra, para identificar a sombra própria e, a partir desta, induzir a projectada. Nesse sentido, pode-se fazer incidir um foco luminoso nos sólidos em causa para identificar a separatriz de luz e sombra que, no caso de cones e cilindros, corresponde às geratrizes de tangência dos planos luz/sombra. Considera-se favorável iniciar o estudo da sombra de sólidos pela pirâmide (com base situada num plano de projecção). Sugere-se que, para pirâmides com base igual (e em posição igual) mas de diferentes alturas, se faça o estudo comparativo do número de faces em sombra própria. Fazendo o mesmo estudo comparativo para o cone, os alunos poderão inferir a variação de posição das geratrizes separatrizes luz/sombra. Atendendo a que a sombra projectada de pontos, rectas ou superfícies são entidades representadas por duas projecções e, apesar de ser usual desprezar a projecção situada no eixo X, recomenda-se, pelo menos numa fase inicial de estudo, que cada ponto de sombra seja sempre representado pelas suas duas projecções.

MÓDULO 6
REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA

Duração de referência: 27 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Caracterizar o sistema de representação axonométrica
- Caracterizar as axonometrias ortogonais e clinogonais
- Determinar as escalas axonométricas por processos geométricos
- Representar, em axonometria, formas tridimensionais simples e compostas

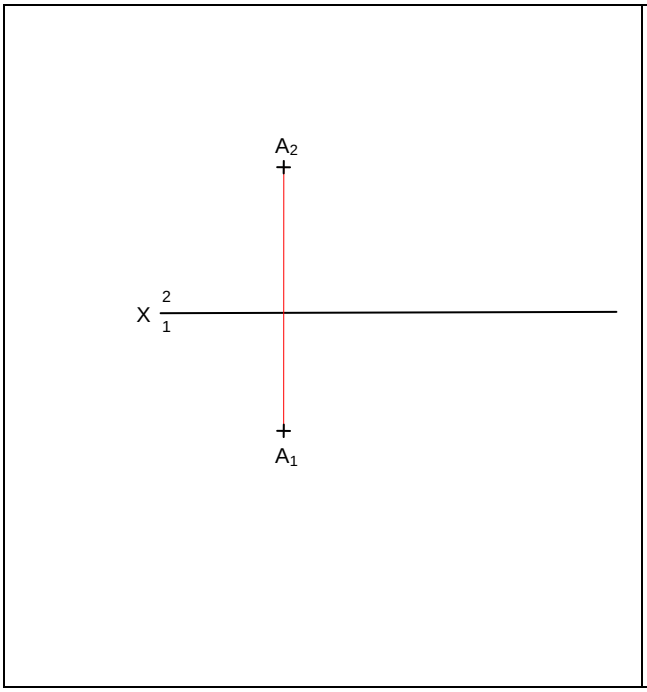
TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
Representação axonométrica	**27**	
1 Introdução 1.1 Caracterização 1.2 Aplicações	2	Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades. Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentadas aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do *design* industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria, na descrição dessas formas.
2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais: Cavaleira e Planométrica 2.1 Generalidades 2.2 Direcção e inclinação das projectantes 2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo 2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas	4	No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar-se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os

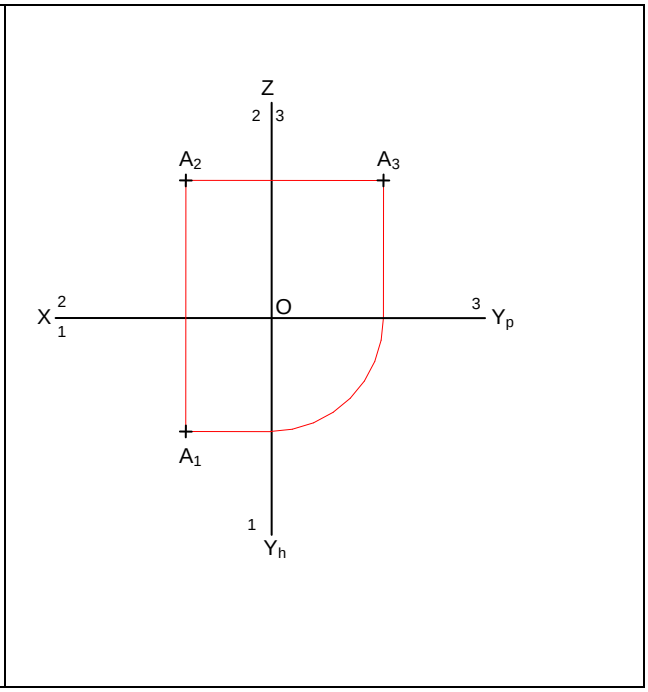
		efeitos produzidos. Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder-se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente, distorções. Seria interessante relacionar as axonometrias clinogonais com as sombras em representação diédrica, previamente estudadas, para assim vislumbrar a relação entre ambos os tipos de projecção.
3 Axonometrias ortogonais: Trimetria, Dimetria e Isometria 3.1 Generalidades 3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas 3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos 3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo 3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas	4	Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (*modelo N*) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações. No modelo poder-se-á evidenciar claramente: – a correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico; – os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do **triângulo fundamental** correspondente à base da **pirâmide axonométrica** com vértice na origem do sistema de eixos; – a configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria; – a redução das medidas resultante da inclinação dos eixos. Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um eixo, o que seria desejável, poder-se-á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas. Neste processo deverá salientar-se: – o teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto correspondente ao rebatimento da origem; – os conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e,

		consequentemente, o recurso ao Teorema de Desargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo. Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.
4 Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas por: – paralelepípedos rectângulos com as bases ou faces paralelas a um dos planos coordenados – pirâmides e prismas regulares e oblíquos de base(s) regular(es) com a(s) referida(s) base(s) paralela(s) a um dos planos coordenados e com pelo menos uma aresta da(s) base(s) paralela(s) a um eixo – cones e cilindros de revolução e oblíquos com base(s) em verdadeira grandeza (só no caso da axonometria clinogonal) Métodos de construção 4.1 Método das coordenadas 4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente 4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)	17	Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar ênfase ao chamado “método dos cortes” (4.4.3) devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.

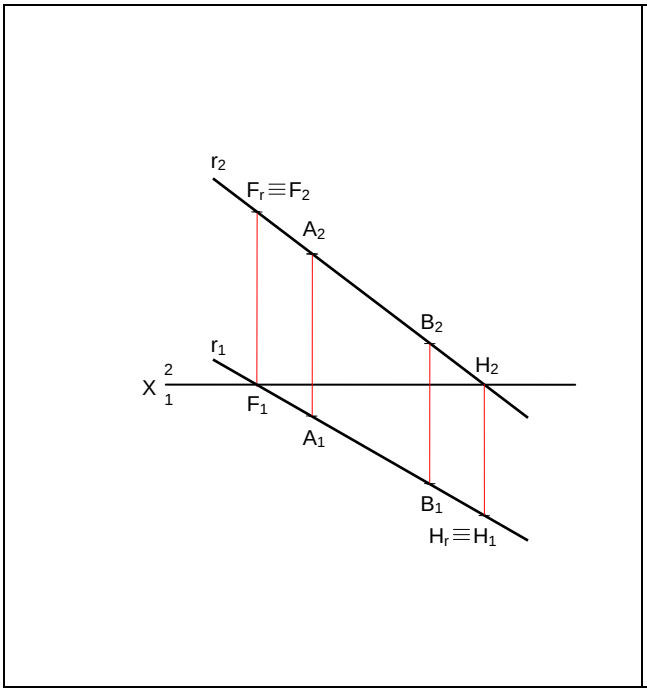
CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



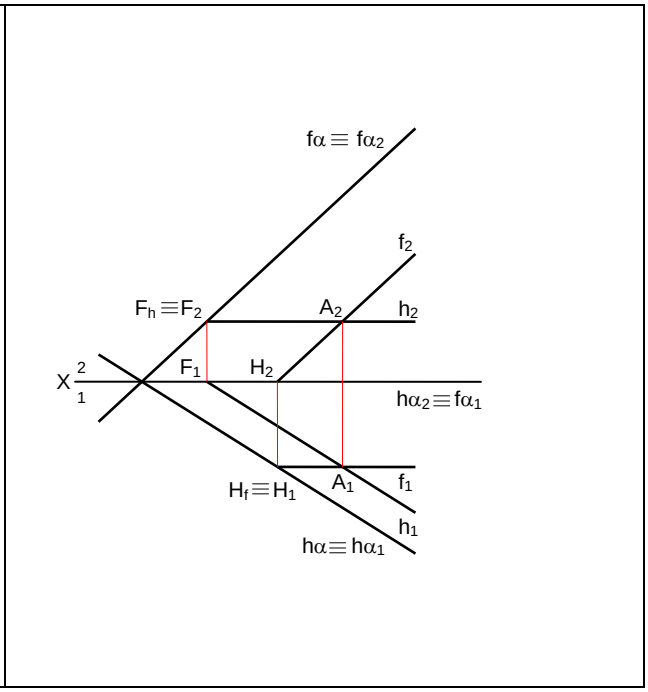
Representação diédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



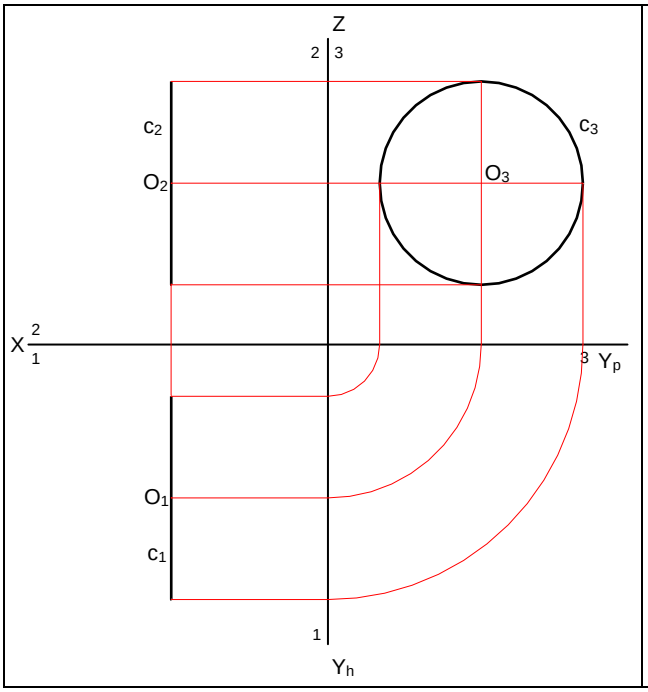
Representação triédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



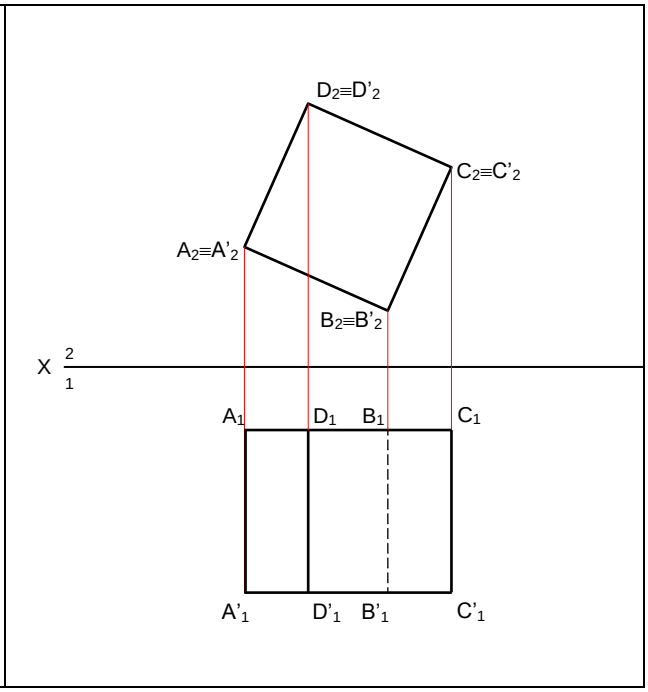
Representação de uma recta **r** e dos seus traços horizontal e frontal



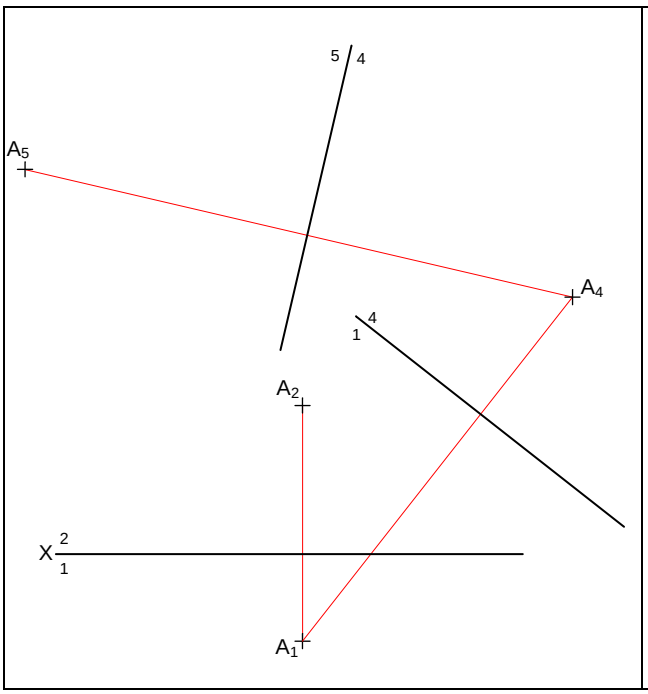
Representação de um plano **α** pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



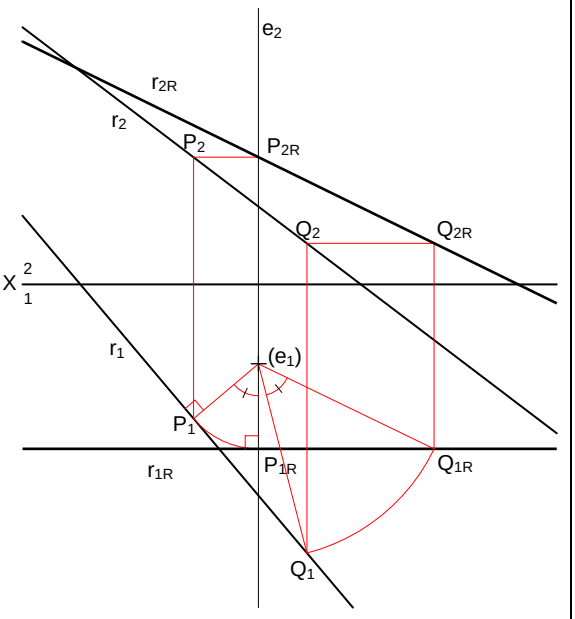
Representação triédrica de uma circunferência **c** de perfil



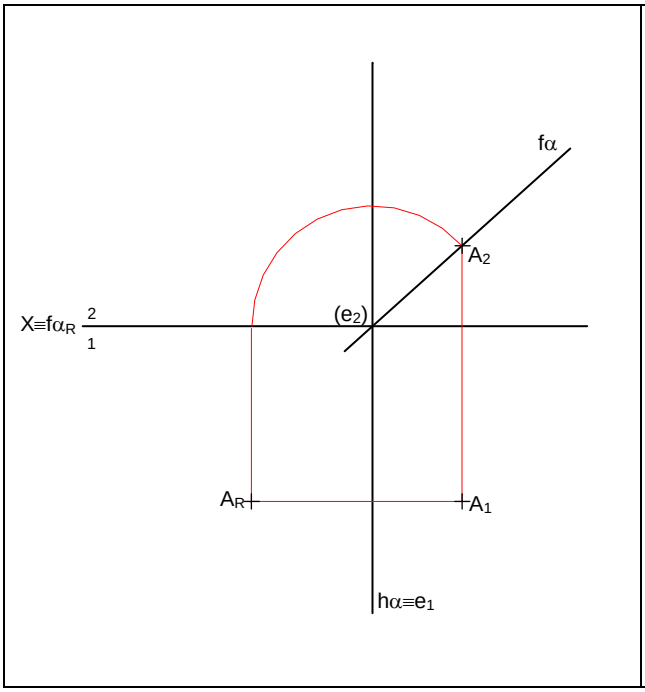
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



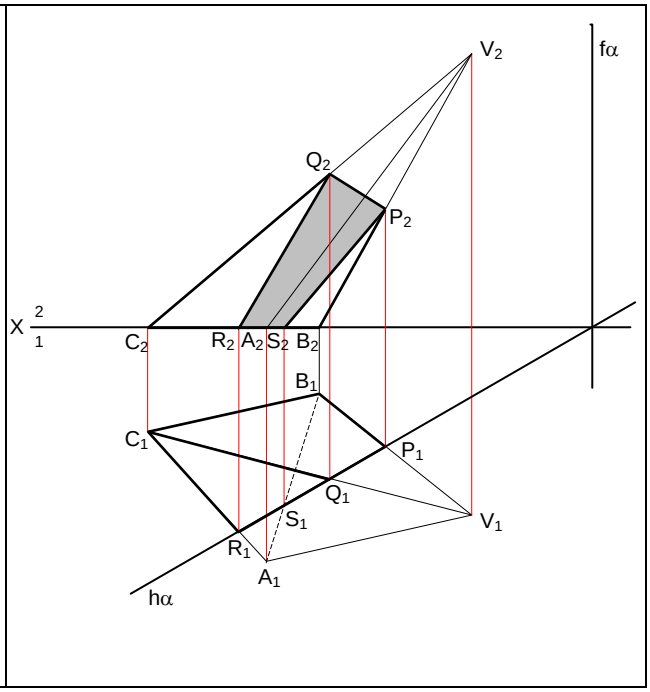
Mudança de diedros
Projecções de um ponto **A** em diferentes diedros



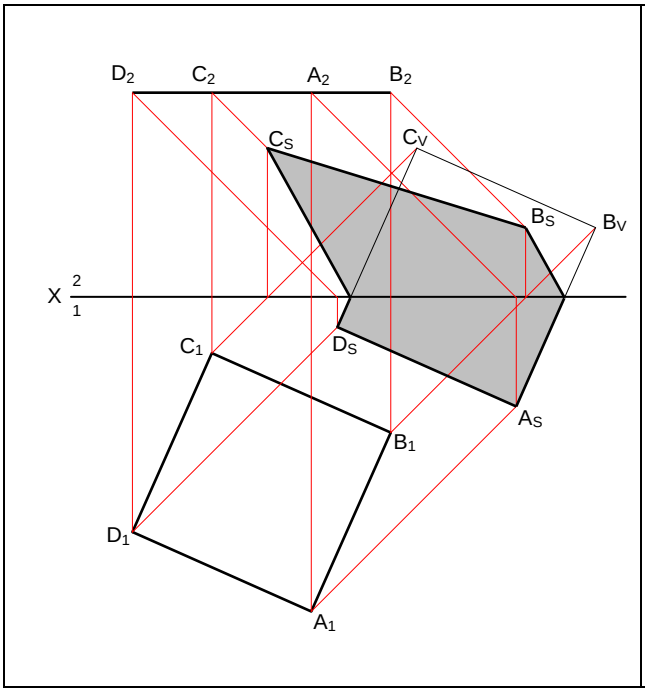
Transformação de uma recta oblíqua **r** numa recta frontal
através de uma rotação em torno de um eixo vertical **e**



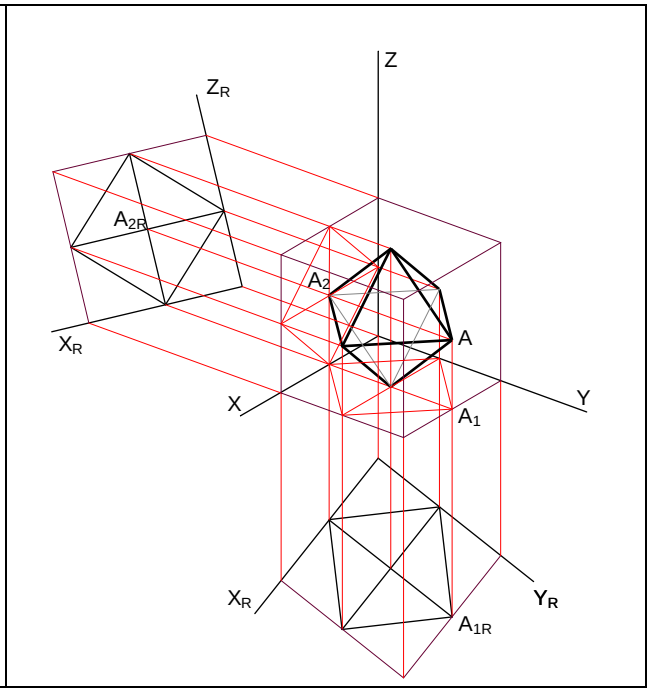
Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal



Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical



Sombra produzida por um quadrado [ABCD] nos planos de projecção



Representação trimétrica de um octaedro com aplicação simultânea de dois métodos construtivos: do paralelepípedo envolvente e dos cortes

MODELOS DIDÁCTICOS

Existe um conjunto de modelos expressamente concebidos para a leccionação da disciplina de Geometria Descritiva que são os seguintes:

MODELO A

Este modelo é constituído pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidos elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

MODELO M

Modelo destinado a visualizar o rebatimento de um plano oblíquo, quer pelo triângulo do rebatimento quer pelas rectas horizontais ou frontais do plano. O plano oblíquo é truncado por um plano projectante que lhe é perpendicular, também ele rebatível, de modo a permitir a visualização do triângulo do rebatimento e a determinação da sua verdadeira grandeza, o que permite reproduzir espacialmente todas as operações que serão efectuadas no papel para rebater o plano.

MODELO N

Realizado com esquadros de desenho este modelo, que se destina à leccionação das axonometrias, permite a visualização do triedro definido pelos planos coordenados e da pirâmide axonométrica quando fazemos coincidir a sua base (triângulo fundamental) com o plano axonométrico. Nesta última situação torna-se possível efectuar o rebatimento de uma face da pirâmide para o plano de projecção, bem como o seu contra-rebatimento, dando a entender os procedimentos necessários para a determinação de verdadeiras grandezas e das escalas axonométricas.

GLOSSÁRIO

eixo X ou **aresta dos diedros** (linha de terra) – recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

axonometrias clinogonais – axonometrias oblíquas (ver projecção clinogonal)

axonometria planométrica – designação pela qual é actualmente conhecida a axonometria militar (norma ISO 5456)

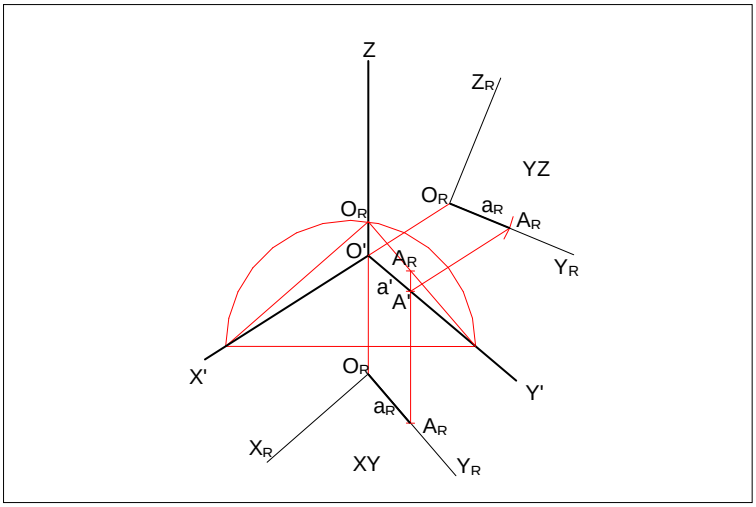
diedros de projecção (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

eixos de coordenadas ortogonais – referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abcissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

incidência – o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva - os pontos, as rectas e os planos - ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

sistema de representação – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

método dos cortes – processo que consiste no rebatimento dos planos coordenados para o interior da pirâmide axonométrica (para evitar que os planos coordenados apresentem faces distintas após o rebatimento), seguido de uma translação de cada par de eixos de coordenadas segundo uma direcção normal à charneira do rebatimento, permitindo a representação de cortes horizontais e verticais do objecto. Por contra-rebatimento e através da conjugação de, pelo menos, dois cortes, obtém-se a projecção axonométrica do objecto.



mudança de diedros de projecção (mudança de planos) – utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

plano frontal de projecção (plano vertical de projecção) – plano frontal de afastamento nulo

projecção clinogonal - termo utilizado para designar a projecção paralela oblíqua em relação a um plano de projecção; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

rectas de maior declive de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

rectas de maior inclinação de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

representação diédrica ou **sistema de representação diédrica** – método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projecção ortogonal, método ou sistema diédrico, projecção diédrica, etc…

teorema de Desargues – se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projecção próprio ou impróprio), as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

triedros trirrectângulos de projecção – são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projecção horizontal, frontal e de perfil

4. BIBLIOGRAFIA

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Planos a médio e longo prazo - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies*). Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P. (1987). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

Geometria

*Aguilar, L. T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo 1 sobre geometria do espaço previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um "antigo" compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Colecção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma "verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas".

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoelpi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personagens, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A. A F.(1947*). A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Salienta-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

"Ver pelo desenho", como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 - Fundamentos, Álgebra y Geometria*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço: http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm

Geometria Descritiva

Almeida, Á. D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED, (1)* 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

Aubert, J. (1982), Dessin d'Architecture a partir de la Geometrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. C. (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (3 e 4.)* 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. C. (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (7).* 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário "Como ensinar Geometria Descritiva", organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géometrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedica um dos capítulos à homologia plana.

*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974*). Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V. O., Sementsov, M. A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descriptiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

*Leitão, C.A. M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N. C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED, (14*). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – "Geometria: que futuro?" – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da Geometria Descritiva de Monge para uso na "Escuela de Caminos", precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J. S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capitulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descriptiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L. P. M. (1899). *Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica - Tomo I e II - Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores geómetras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

*Pinheiro, C. .S. & Sousa, P. F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu).
O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal.
O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Rodriguez de Abajo, F. J. (1992). *Geometria Descriptiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do "sistema diédrico" . Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BENGOA, V. A. (1987). *Geometria Descriptiva - Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BLANCO, A. R. (1982), *Geometria Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Ribeiro, C. T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

"...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão." (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Sánchez Gallego, J. A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relacão à representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica

são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do “método dos cortes” sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

*Sant’ana, S. & GOMES, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a “percepção” da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J. P. (1999). Acerca da “nova” terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED, (9).* 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

XAVIER, J. P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED, (12).* 7-22.

Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, “Saber ver a Geometria Descritiva”, onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como “método dos cortes”, secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

Desenho Técnico

*Cunha, L. V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J. S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico).* Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

NORMAS

Norma ISO 128 Princípios gerais de representação
Norma ISO 216 Formatos de papéis
Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)
Norma ISO 3098 Escrita
Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção
Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos
Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho
Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos (generalidades e tipo de desenho)
Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

Endereços na Internet:

http://apus.uma.pt/~jkosta/FILES/mapa_do_site/1.html
http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html
http://www.anth.org.uk/NCT/
http://www.fc.up.pt/atractor
http://www.geom.umn.edu/

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DIRECÇÃO GERAL DE INOVAÇÃO E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR

ENSINO RECORRENTE DE NÍVEL SECUNDÁRIO

GEOMETRIA DESCRITIVA B

10º E 11º ANOS OU 11º E 12º ANOS

CURSO TECNOLÓGICO DE DESIGN DE EQUIPAMENTO
CURSO TECNOLÓGICO DE MULTIMÉDIA
CURSO ARTÍSTICO ESPECIALIZADO DE COMUNICAÇÃO AUDIOVISUAL

AUTORES
JOÃO PEDRO XAVIER (COORDENADOR)
JOSÉ AUGUSTO REBELO

HOMOLOGAÇÃO
…

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 3

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA 5

FINALIDADES 5

OBJECTIVOS 5

VISÃO GERAL DE TEMAS/CONTEÚDOS 6

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS 8

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER 9

AVALIAÇÃO 10

RECURSOS 12

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA 13

MÓDULO 1 14

MÓDULO 2 17

MÓDULO 3 21

MÓDULO 4 23

MÓDULO 5 24

MÓDULO 6 27

CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA 29

MODELOS DIDÁCTICOS 32

GLOSSÁRIO 33

4. BIBLIOGRAFIA 34

DIDÁCTICA ESPECÍFICA 34

GEOMETRIA 34

GEOMETRIA DESCRITIVA 37

DESENHO TÉCNICO 42

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de GEOMETRIA DESCRITIVA B é uma disciplina bianual que integra a componente de formação científica dos planos de estudo dos Cursos Tecnológico de Design de Equipamento, Tecnológico de Multimédia e Artístico Especializado de Comunicação Audiovisual.

É uma disciplina de iniciação à Geometria Descritiva e, como tal, os conteúdos que a integram foram seleccionados de molde a garantir um campo de competências essenciais no âmbito da representação espacial.

O presente programa tem por base o programa homónimo em regime diurno, ajustado ao modelo de organização por módulos capitalizáveis. Foi concebido para 33 semanas e segmentado em 3 módulos por ano lectivo. Cada módulo corresponde a um período, sendo a divisão por períodos uma indicação para o termo da sua capitalização.

Inicia-se o programa com uma abordagem à geometria no espaço para se dedicar, em seguida, ao estudo do sistema de representação diédrica. Considera-se que este sistema, por si só, garante a formação essencial para a construção do saber nesta área disciplinar. Com efeito, o seu conhecimento é bastante para fornecer os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de qualquer outro sistema de representação, como se revela bastante eficaz na consecução do objectivo essencial de desenvolver a capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional.

Em relação à sequência dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior grau de abstracção, foi procurado atenuar esta componente, através das didácticas e metodologia propostas. Desse modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se a ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel – após ter visto e compreendido – sem memorizar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia**. Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na partição de unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão do Programa em módulos capitalizáveis, no caso do ensino secundário recorrente. È nosso entendimento que um programa não se destina apenas a alunos bons, para os quais qualquer método pedagógico se adapta, mas para o aluno médio com algumas dificuldades na aprendizagem. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção": *... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construi-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (...) dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura, nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência*. O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver as capacidades de visualização mental e representação gráfica, de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver as capacidades de interpretação e de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e de resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Fomentar a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica do sistema de representação diédrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base do sistema de representação diédrica
- Reconhecer a função e vocação particular do sistema de representação diédrica
- Representar com exactidão, sobre desenhos que só têm duas dimensões, os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento do sistema estudado no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação

- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas

- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso

- Relacionar-se responsavelmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias, tolerantes e de respeito

VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

Este Programa é composto por uma secção inicial, correspondente ao Módulo 1, que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do Programa, que se reparte, inevitavelmente, pelos dois anos lectivos e ocupa os Módulos 2 a 6. A repartição temática do Programa e os respectivos pesos apresentam-se no seguinte quadro resumo:

10º ANO/11º ANO

Módulo 1 (9 semanas)	**Duração: 1º Período lectivo**
Geometria no Espaço	9 aulas

Módulo 2 (12 semanas)	**Duração: 2º Período lectivo**
Representação Diédrica I	12 aulas

Módulo 3 (12 semanas)	**Duração: 3º Período lectivo**
Representação Diédrica II	12 aulas

11º ANO/12º ANO

Módulo 4 (10 semanas)	**Duração: 1º Período lectivo**
Representação Diédrica III	20 aulas

Módulo 5 (12 semanas)	**Duração: 2º Período lectivo**
Representação Diédrica IV	24 aulas

Módulo 6 (11 semanas)	**Duração: 3º Período lectivo**
Representação Diédrica V	22 aulas

Total de aulas de 90 minutos	99 aulas

Os conteúdos seleccionados são considerados essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas, no âmbito do sistema de representação a estudar.

É proposta a sequência que se julga ser mais conveniente, em correspondência com sugestões metodológicas específicas. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o Programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa.

Como exemplo, referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos projectantes ou de sólidos com base assente nesses planos, que sucedem ao estudo dos métodos geométricos auxiliares, mas que podem ser abordados em simultaneidade. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profícuas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento e aspectos de representação que não poderão deixar de ser veiculadas.

CONTEÚDOS DE CADA ANO E DE CADA MÓDULO

10º ANO/11º ANO

MÓDULO 1 – GEOMETRIA NO ESPAÇO	**9**
1 Ponto	
2 Recta	
3 Posição relativa de duas rectas	
4 Plano	
5 Posição relativa de rectas e de planos	
6 Perpendicularidade de rectas e de planos	
7 Superfícies	
8 Sólidos	
9 Secções planas de sólidos e truncagem	

MÓDULO 2 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I	**12**
1 Introdução à Geometria Descritiva	**1**
1.1 Geometria Descritiva	
1.2 Tipos de projecção	
1.3 Sistemas de representação – sua caracterização	
1.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica	

2	**Representação diédrica**	**11**
2.1	Ponto	4
2.2	Segmento de recta	3
2.3	Recta	4

MÓDULO 3 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II	**12**
1 Figuras planas I	2
2 Plano	10

11º ANO/12º ANO

MÓDULO 4 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III	**20**
1 Intersecções (recta/plano e plano/plano)	20
MÓDULO 5 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV	**24**
1 Sólidos I	8
2 Métodos geométricos auxiliares I	11
3 Figuras planas II	5
MÓDULO 6 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V	**22**
1 Sólidos II	8
2 Secções	14

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articular as abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos, tendo em vista o seu nível etário, uma vez que se trata de alunos adultos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura metodológica envolvente facilitará a compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos

para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* de promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com disciplinas de carácter oficinal.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, artes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste Programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidas em conta questões relacionadas com a História da Arte.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo
- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

AVALIAÇÃO

A avaliação das aprendizagens em Geometria Descritiva é contínua e compreende três modalidades: diagnóstica, formativa e sumativa.

Tem como referência os **objectivos e a aferição das competências adquiridas** e define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

Conceitos

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos do sistema de representação diédrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação do sistema de representação utilizado;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

Técnicas

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;
- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;

- a legibilidade das notações.

Realização

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

Atitudes

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

Técnicas e instrumentos de avaliação

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas.

No ensino recorrente por módulos capitalizáveis, a avaliação diagnóstica assume uma importância acrescida já que se constitui como processo de aferição do nível de conhecimentos e competências prévias dos alunos, permitindo detectar as suas eventuais dificuldades, e também os saberes adquiridos através da experiência, sendo possível estratégias diferenciadas de ensino-aprendizagem no âmbito da turma.

Para a avaliação das aprendizagens, na modalidade de frequência não presencial prevê-se uma prova sumativa que, nesta disciplina, corresponde a uma Prova Prática constituída por exercícios/problemas do domínio da Geometria do Espaço e da Geometria Descritiva que poderão integrar, eventualmente, um relatório escrito ou memória descritiva.

RECURSOS

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Vídeo* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *vídeo*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de CAD
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

10º ANO/11º ANO

MÓDULO 1
GEOMETRIA NO ESPAÇO

MÓDULO 2
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I

MÓDULO 3
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II

11º ANO/12º ANO

MÓDULO 4
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III

MÓDULO 5
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV

MÓDULO 6
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V

MÓDULO 1
GEOMETRIA NO ESPAÇO

Duração de referência: 9 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Relacionar espacialmente os elementos geométricos
- Conhecer algumas superfícies e sólidos
- Reconhecer figuras correspondentes a secções planas de sólidos

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

10º ANO/11º ANO

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
Geometria no Espaço	**9**	
1 Ponto 2 Recta 3 Posição relativa de duas rectas – complanares – paralelas – concorrentes – enviesadas 4 Plano 5 Posição relativa de rectas e de planos – recta pertencente a um plano – recta paralela a um plano – recta concorrente com um plano – planos paralelos – planos concorrentes 6 Perpendicularidade de rectas e de planos – rectas perpendiculares e ortogonais – recta perpendicular a um plano – planos perpendiculares 7 Superfícies Generalidades, geratriz e directriz Algumas superfícies: – plana – piramidal – cónica – prismática – cilíndrica – esférica 8 Sólidos – pirâmides – paralelepípedos – prismas – cones – cilindros – esfera 9 Secções planas de sólidos e truncagem	9	Nesta unidade, onde se pretende revisitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar. Com esses referenciais, ou outras estratégias, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade). O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo.

		O domínio visual e espacial destas condições deverá permitir uma abordagem preliminar de problemas métricos de determinação de distâncias (distância entre dois pontos, de um ponto a uma recta, de um ponto a um plano, de dois planos paralelos) e de ângulos (ângulo de duas rectas, de uma recta com um plano, noção de diedro e ângulo diedro), levando o aluno a deduzir o conjunto de procedimentos necessários para chegar a uma solução. Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos *modelos B a K* ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas. As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizadas as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos. Exemplos de situações para "visualizar" o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes, – de um ponto – de uma recta – de um plano – dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta) – dos vértices de um quadrado – dos pontos de uma circunferência – das faces de um diedro – etc... ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de, – uma esfera – um cilindro de revolução – um cone de revolução – um cubo Recomenda-se que a forma das secções referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido. Para explorar a relação espaço-plano--espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação descritiva, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides, paralelepípedos e

		prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembrar algumas construções elementares da geometria plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.

MÓDULO 2
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I

Duração de referência: 12 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Adquirir a noção de projecção
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base do sistema de representação diédrica
- Caracterizar os sistemas de representação diédrica e triédrica
- Representar diedricamente o ponto, o segmento de recta e a recta

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Introdução à Geometria Descritiva	**1**	
1.1 Geometria Descritiva 1.1.1 Resenha histórica 1.1.2 Objecto e finalidade 1.1.3 Noção de projecção – projectante – superfície de projecção – projecção	1	Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana. Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.

1.2 Tipos de projecção
- 1.2.1 Projecção central ou cónica
- 1.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica
  - projecção oblíqua ou clinogonal
  - projecção ortogonal

A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam:

- transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas, fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná-lo num ponto impróprio;
- partir de um triângulo equilátero ($60^o+60^o+60^o$) e chegar a um triângulo isósceles ($90^o+90^o+0^o$), transformando um vértice num ponto impróprio;
- aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da sua transformação numa recta, ou seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio;
- etc…

Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira.

Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.

1.3 Sistemas de representação – sua caracterização:
- pelo tipo de projecção
- pelo número de projecções utilizadas
- pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional
  - projecção única
  - *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção

Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles.

Em *Ver pelo desenho* (ilustração 66, p.87) Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.

1.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica 1.4.1 Representação triédrica – triedros trirrectângulos de projecção – planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3) – eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z – coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*) – representação triédrica de um ponto 1.4.2 Representação diédrica – diedros de projecção – planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2) – eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra) – planos bissectores dos diedros – representação diédrica de um ponto 1.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade		Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do *modelo A* que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional. O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3) como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvam os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em correlação. De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível, frequentemente, omitir a identificação dos vértices que os definem.
2 Representação diédrica	**11**	
2.1 Ponto 2.1.1 Localização de um ponto 2.1.2 Projecções de um ponto	4	Para facilitar a visualização espacial pode ser retomado o *modelo A*, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal. Propõe-se que: – o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção; – o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção; – o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X; – represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.

2.2 Segmento de recta 2.2.1 Projecções de um segmento de recta 2.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção: – perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical – paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas) – paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal – paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil – não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo	3	Propõe-se que: – o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção; – no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).
2.3 Recta 2.3.1 Recta definida por dois pontos 2.3.2 Projecções da recta 2.3.3 Ponto pertencente a uma recta 2.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores 2.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção 2.3.6 Posição relativa de duas rectas – complanares –paralelas –concorrentes – enviesadas	4	Propõe-se: – partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção; – levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção; – que, de uma recta, o aluno simule, no modelo: – as projecções; – os traços; – que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada; – representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.

MÓDULO 3
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II

Duração de referência: 12 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Representar diédrica e triedricamente figuras planas paralelas aos planos de projecção
- Representar diedricamente o plano

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Figuras planas I Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil	2	Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil. O uso de *software* de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.
2 Plano 2.1 Definição do plano por: – 3 pontos não colineares – uma recta e um ponto exterior – duas rectas paralelas – duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção) 2.2 Rectas contidas num plano 2.3 Ponto pertencente a um plano 2.4 Rectas notáveis de um plano: – horizontais – frontais – de perfil – de maior declive – de maior inclinação 2.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção Planos projectantes: – paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente) – perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical – perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas) Planos não projectantes: – de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano	10	Sem deixar de ter em conta as diferentes definições do plano deve privilegiar-se a sua representação através dos seus traços nos planos de projecção (rectas concorrentes) e/ou por um triângulo, figura que melhor permite visualizar a sua definição genérica por 3 pontos não colineares. O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do *modelo A,* permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que: – uma recta esteja contida num plano; – um ponto pertença a um plano. Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano. Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos

de referência das abcissas); passante (contém o eixo X) – oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)		particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano. Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma "face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor. Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.

MÓDULO 4
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III

Duração de referência: 20 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Resolver problemas elementares de incidência e de intersecção relativos aos elementos geométricos

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

11º ANO/12º ANO

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Intersecções (recta/plano e plano/plano) 1.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante 1.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante 1.3 Intersecção de dois planos projectantes 1.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante 1.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral) 1.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13} 1.7 Intersecção de planos (método geral) 1.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um: – plano projectante – plano oblíquo – plano de rampa	20	Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano. Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o β_{24}. Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.

MÓDULO 5
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV

Duração de referência: 24 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

- Representar sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(is), frontal(is) ou de perfil
- Representar pontos e linhas situados nas arestas, faces ou superfícies dos sólidos
- Aplicar os métodos geométricos auxiliares para obtenção de verdadeiras grandezas de figuras situadas em planos projectantes
- Representar figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais e de topo

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Sólidos I 1.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil 1.2 Paralelepípedos rectângulos, prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil 1.3 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos	8	Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a *software* de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderá facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades. Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas, com diferentes cotas ou afastamentos para melhor percepção das visibilidades. Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções. Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção.

			Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos – tetraedro e hexaedro regulares – ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.
2	Métodos geométricos auxiliares I 2.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares – características e aptidões 2.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança) 2.2.1 Transformação das projecções de um ponto 2.2.2 Transformação das projecções de uma recta 2.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano 2.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação) 2.3.1 Rotação do ponto 2.3.2 Rotação da recta 2.3.3 Rotação de um plano projectante 2.3.4 Rebatimento de planos projectantes	11	Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar – recta horizontal em recta de topo – recta frontal em recta vertical – recta oblíqua em recta horizontal ou frontal – plano de topo em plano horizontal – plano vertical em plano frontal No estudo da rotação da recta (*modelo L*) propõem-se os seguintes problemas-tipo: transformar – uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo – uma recta frontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta vertical – uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a *software* de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura. Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará a denominar-se rebatimento. O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de economia de meios.

3	Figuras planas II Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo	5	Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Desargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.

MÓDULO 6
REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V

Duração de referência: 22 aulas (de 90 minutos)

OBJECTIVOS

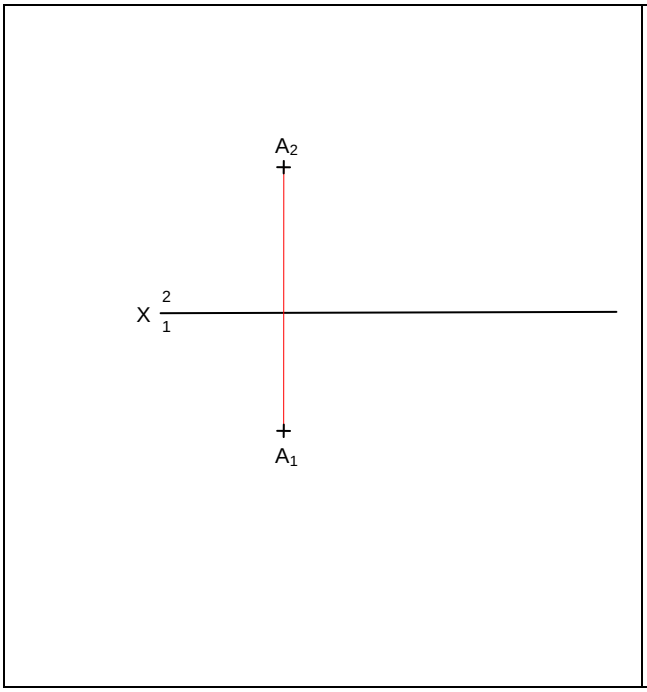
- Representar sólidos (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares) de base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo
- Determinar secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos horizontal, frontal ou de perfil
- Determinar secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes

TEMAS/CONTEÚDOS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

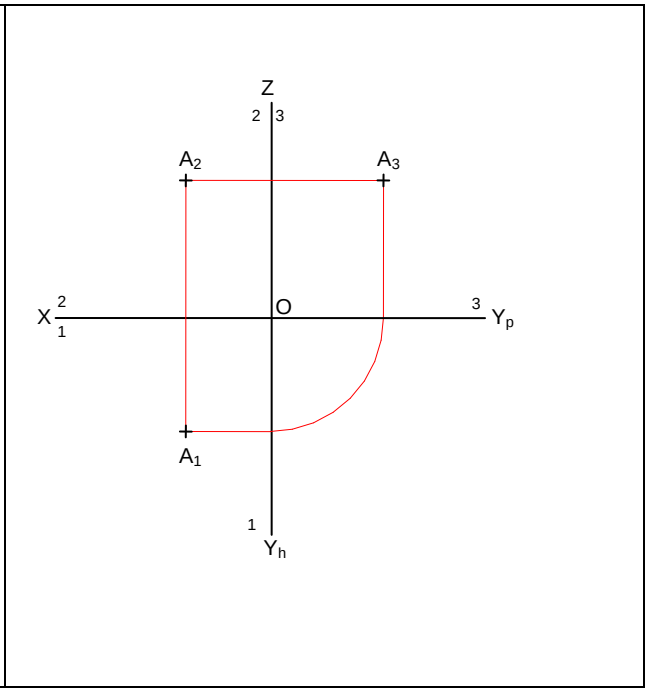
DESENVOLVIMENTO	AULAS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS
1 Sólidos II Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo	8	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do *software* já mencionado.
2 Secções 2.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos – horizontal, frontal e de perfil 2.2 Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes 2.3 Truncagem	14	Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações: – secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: – sem aresta(s) de perfil – com aresta(s) de perfil; – secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: – sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção – com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção. Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede. Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a

		superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases. Poder-se-á utilizar o Teorema de Desargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes. Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade). Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder-se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.

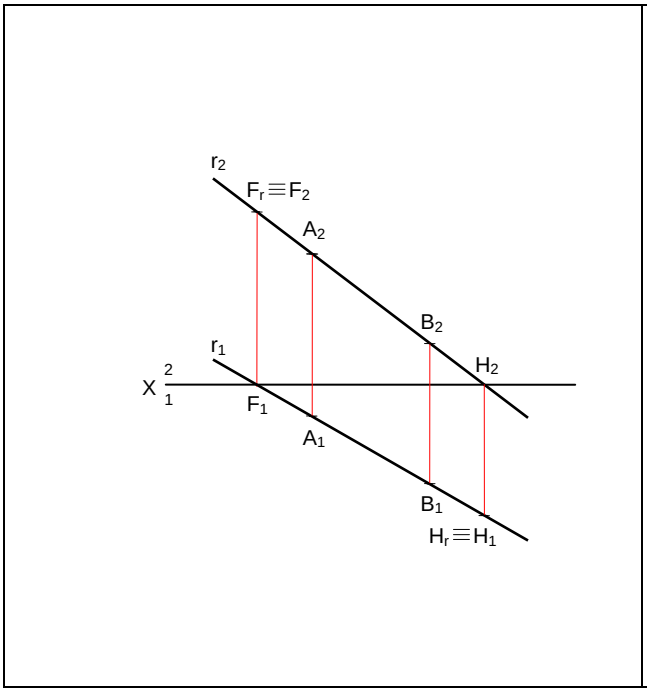
CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



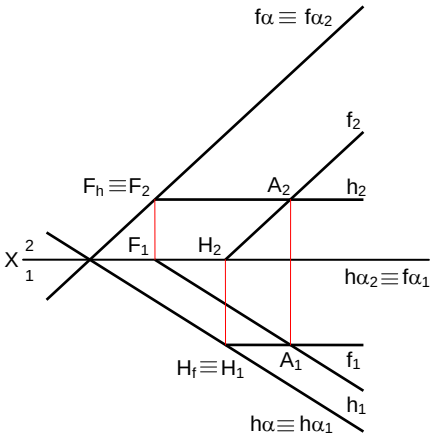
Representação diédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



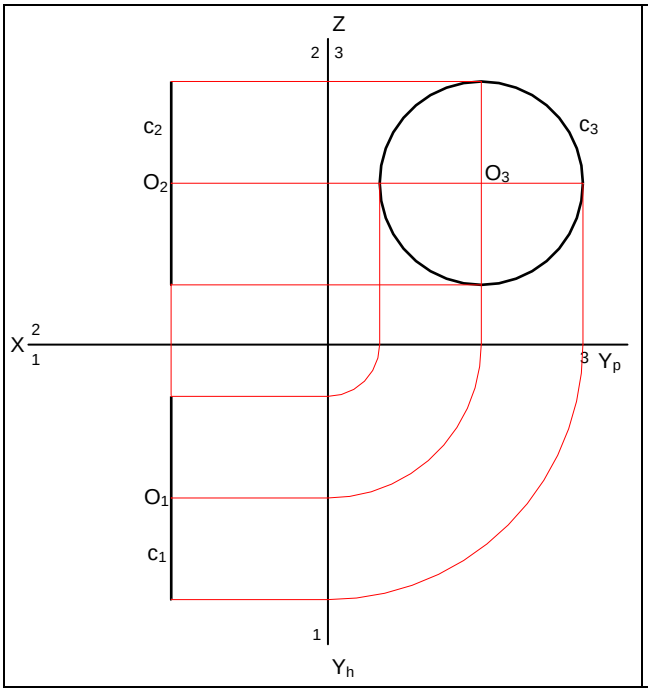
Representação triédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



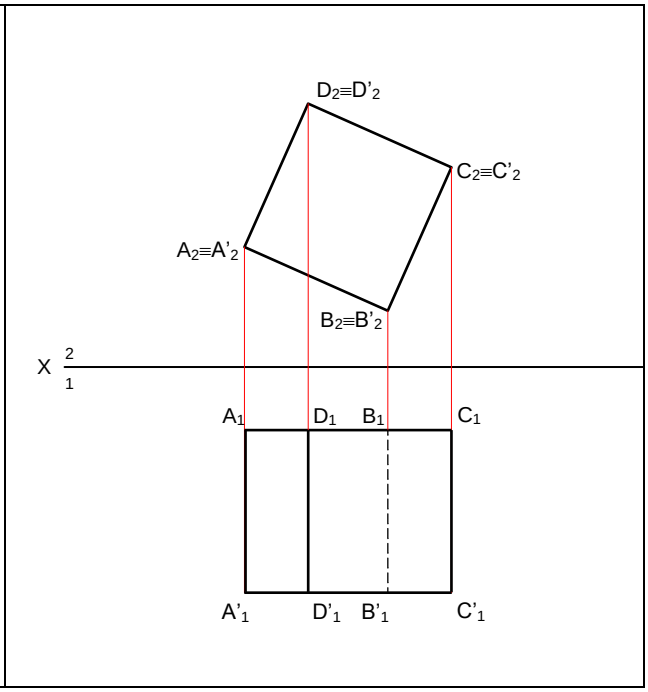
Representação de uma recta **r** e dos seus traços horizontal e frontal



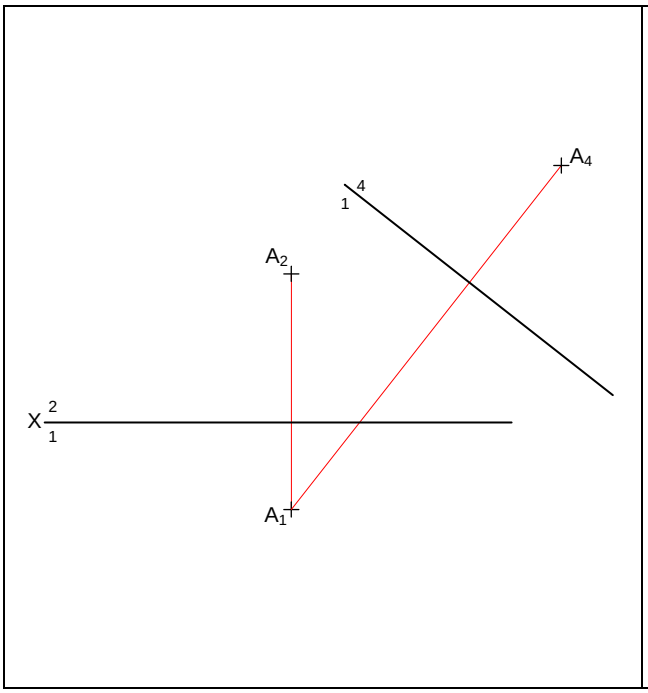
Representação de um plano **α** pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



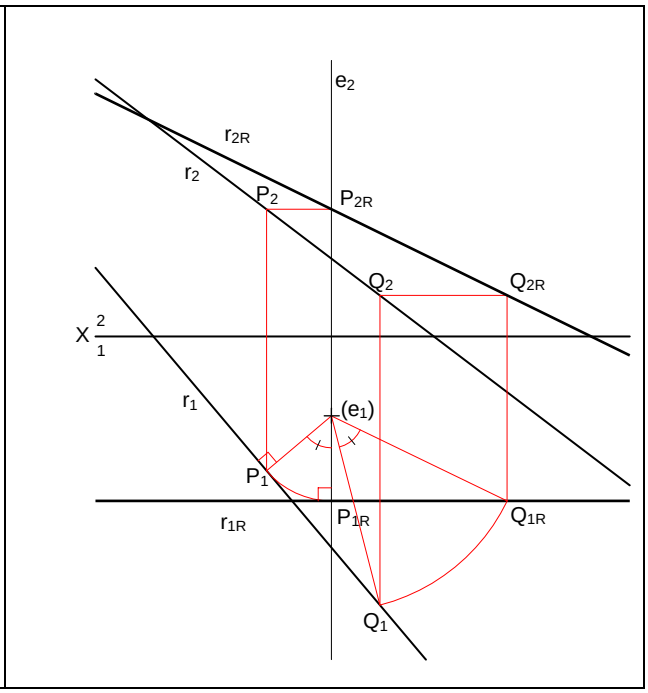
Representação triédrica de uma circunferência **c** de perfil



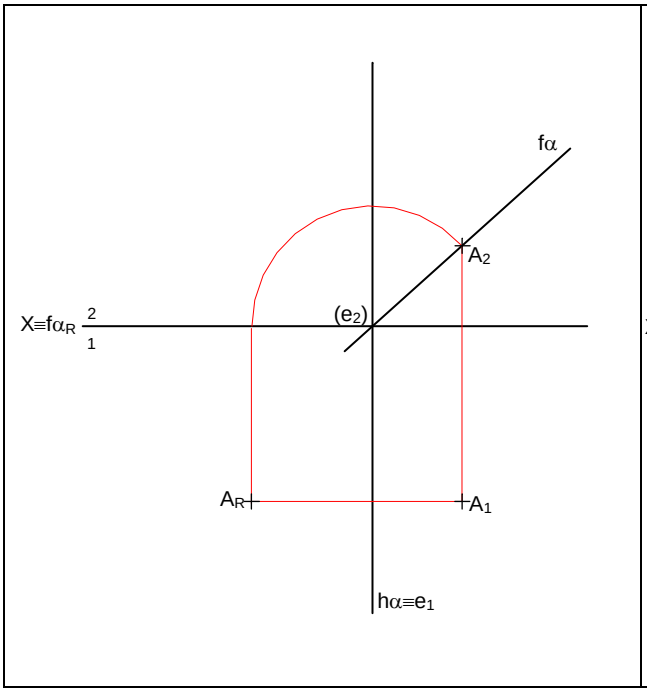
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



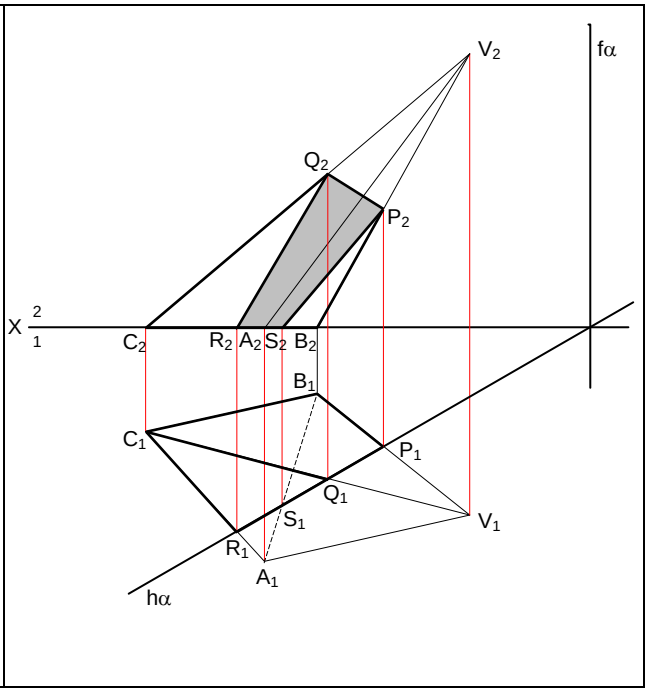
Mudança de diedros
Projecções de um ponto **A** em diferentes diedros



Transformação de uma recta oblíqua **r** numa recta frontal
através de uma rotação em torno de um eixo vertical **e**



Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal



Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical

MODELOS DIDÁCTICOS

Existe um conjunto de modelos expressamente concebidos para a leccionação da disciplina de Geometria Descritiva que são os seguintes:

MODELO A

Este modelo é constituído pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e triédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidos elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

GLOSSÁRIO

eixo X ou **aresta dos diedros** (linha de terra) – recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

diedros de projecção (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

eixos de coordenadas ortogonais – referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abcissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

incidência – o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva – os pontos, as rectas e os planos – ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

sistema de representação – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

mudança de diedros de projecção (mudança de planos) – utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

plano frontal de projecção (plano vertical de projecção) – plano frontal de afastamento nulo

projecção clinogonal – termo utilizado para designar a projecção paralela oblíqua em relação a um plano de projecção; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

rectas de maior declive de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

rectas de maior inclinação de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

representação diédrica ou **sistema de representação diédrica** – método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projecção ortogonal, método ou sistema diédrico, projecção diédrica, etc…

teorema de Desargues – se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projecção próprio ou impróprio), as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

triedros trirrectângulos de projecção – são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projecção horizontal, frontal e de perfil

4. BIBLIOGRAFIA

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

> Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Planos a médio e longo prazo - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies*). Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J. A.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P. (1987). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

> Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

Geometria

*Aguilar, L. T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

> Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo 1 sobre geometria no espaço previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um "antigo" compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Colecção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma "verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas".

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoelpi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personagens, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A. A F.(1947*). A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Salienta-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

"Ver pelo desenho", como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 - Fundamentos, Álgebra y Geometria*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço: http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm

Geometria Descritiva

Almeida, Á. D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED, (1)* 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

Aubert, J. (1982), Dessin d'Architecture a partir de la Geometrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. C. (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (3 e 4.)* 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. C. (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (7).* 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário "Como ensinar Geometria Descritiva", organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géometrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedica um dos capítulos à homologia plana.

*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974*). Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V. O., Sementsov, M. A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descriptiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

*Leitão, C.A. M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N. C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED, (14*). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – "Geometria: que futuro?" – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da Geometria Descritiva de Monge para uso na "Escuela de Caminos", precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J. S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capitulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descriptiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L. P. M. (1899). *Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica – Tomo I e II - Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores geómetras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

*Pinheiro, C. .S. & Sousa, P. F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal. O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Rodriguez de Abajo, F. J. (1992). *Geometria Descriptiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do "sistema diédrico" . Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BENGOA, V. A. (1987). *Geometria Descriptiva – Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BLANCO, A. R. (1982), *Geometria Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Ribeiro, C. T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

"...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão." (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Sánchez Gallego, J. A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relacão à representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica

são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do “método dos cortes” sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

*Sant’ana, S. & GOMES, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a “percepção” da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J. P. (1999). Acerca da “nova” terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED, (9).* 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

XAVIER, J. P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED, (12).* 7-22.

Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, “Saber ver a Geometria Descritiva”, onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como “método dos cortes”, secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

Desenho Técnico

*Cunha, L. V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J. S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico).* Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

NORMAS

Norma ISO 128 Princípios gerais de representação
Norma ISO 216 Formatos de papéis
Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)
Norma ISO 3098 Escrita
Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção
Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos
Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho
Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos (generalidades e tipo de desenho)
Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

Endereços na Internet:

http://apus.uma.pt/~jkosta/FILES/mapa_do_site/1.html
http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html
http://www.anth.org.uk/NCT/
http://www.fc.up.pt/atractor
http://www.geom.umn.edu/

Ministério da Educação

CURSOS PROFISSIONAIS DE NÍVEL SECUNDÁRIO

PROGRAMA

Componente de Formação Científica

Disciplina de

Geometria Descritiva

Direcção-Geral de Formação Vocacional

2005/6

Parte I

Orgânica Geral

Índice:

		Página
1.	Caracterização da Disciplina	2
2.	Visão Geral do Programa	3
3.	Competências a Desenvolver	6
4.	Orientações Metodológicas / Avaliação	6
5.	Elenco Modular	10
6.	Bibliografia	10
7.	Anexos	16

1. Caracterização da Disciplina

A Componente Científica é constituída, em cada curso profissional, por duas ou três disciplinas que proporcionam uma formação científica de base que corresponde, simultaneamente, às exigências de um nível secundário de educação e de uma qualificação profissional de nível 3. A Geometria Descritiva integra esta componente em cursos de várias famílias profissionais, com uma carga horária total de 200 horas.

É uma disciplina de iniciação à Geometria Descritiva, que tem por base o programa homólogo de outros percursos formativos de nível secundário ajustado ao modelo curricular modular dos cursos profissionais, cujos conteúdos visam garantir um campo de competências essenciais no âmbito da representação espacial.

O programa inicia-se com uma abordagem à geometria no espaço para se dedicar, em seguida, ao estudo de dois sistemas de representação – **diédrico** e **axonométrico** – considerados como fundamentais ou basilares na formação secundária de um aluno.

Optou-se por integrar, nos conteúdos programáticos, os dois sistemas de representação referidos na sequência indicada, já que parece justificável que o estudo do sistema de representação axonométrica se faça, no ensino secundário, com um grau de desenvolvimento maior do que no ensino básico, onde este sistema mereceu apenas uma abordagem pertencente ao domínio do Desenho Técnico aliada à representação de formas bastante simples, predominantemente paralelepipédicas. Sendo assim, embora o estudo da axonometria continue a visar, fundamentalmente, a representação de formas ou objectos tridimensionais, interessa agora fazer a desmontagem do sistema, conhecer os seus princípios e entender o seu funcionamento, o que implica uma síntese de operações abstractas que o aluno não está apto a realizar no início do 10º ano, além de pré-requisitos específicos que o estudo desenvolvido do sistema de representação diédrica lhe deverá fornecer.

Em relação à sequência dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior grau de abstracção, procurou-se ultrapassar a dificuldade que daí advém através da metodologia e didácticas propostas. Deste modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se a ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel – após ter visto e compreendido – sem memorizar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida, a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem, que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a**

procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia. Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na segmentação em unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão do programa em módulos conforme o modelo curricular dos cursos profissionais. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção"*... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construí-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (...)* ***dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura,*** *nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência*. O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

2. Visão Geral do Programa

FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver a capacidade de visualização mental e representação gráfica de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver a capacidade de interpretação de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e de resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Fomentar a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Reconhecer a função e vocação particular de cada um desses sistemas de representação
- Representar com exactidão, sobre desenhos que só têm duas dimensões, os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento dos sistemas estudados no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação
- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas
- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso
- Relacionar-se responsavelmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias, tolerantes e de respeito

VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

Este programa é composto por uma secção inicial que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do programa. Conclui o programa o estudo dos fundamentos da Representação Axonométrica e sua aplicação na representação de formas tridimensionais.

A repartição temática do programa, por módulos, e os respectivos conteúdos apresentam-se seguidamente:

MÓDULO 1 – GEOMETRIA NO ESPAÇO. SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO

1 Geometria no Espaço

1.1 Ponto
1.2 Recta
1.3 Posição relativa de duas rectas
1.4 Plano
1.5 Posição relativa de rectas e de planos
1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos
1.7 Superfícies
1.8 Sólidos
1.9 Secções planas de sólidos e truncagem

2 Introdução à Geometria Descritiva

2.1 Geometria Descritiva

2.2 Tipos de projecção

2.3 Sistemas de representação – sua caracterização

2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica

MÓDULO 2 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA I – PONTO E RECTA

1 Ponto

2 Segmento de recta

3 Recta

MÓDULO 3 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA II – FIGURAS PLANAS E PLANO

1 Figuras planas I

2 Plano

MÓDULO 4 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA III – INTERSECÇÕES E SÓLIDOS

1 Intersecções (recta/plano e plano/plano)

2 Sólidos I

MÓDULO 5 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA IV – MÉTODOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES

1 Métodos geométricos auxiliares I

2 Rotações

3 Figuras planas II

MÓDULO 6 – REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA V – SÓLIDOS E SECÇÕES

1 Sólidos II

2 Secções

MÓDULO 7 – REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA

1 Introdução

2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais: Cavaleira e Planométrica

3 Axonometrias ortogonais: Trimetria, Dimetria e Isometria

4 Representação axonométrica de formas tridimensionais

Os conteúdos seleccionados são considerados como essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas, no âmbito dos sistemas de representação a estudar.

É proposta uma sequência, em correspondência com sugestões metodológicas específicas, que se julga ser mais conveniente. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na

compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa. Como exemplo, referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos ou de sólidos com base assente em planos, que sucedem o estudo dos métodos geométricos auxiliares, mas que podem ser abordados em simultaneidade. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profícuas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento (instrumentos e materiais de traçado e medição: critérios de escolha, manutenção e conservação; suportes: critérios de escolha, conservação) e aspectos de representação (princípios gerais de representação; escrita, formatos dos desenhos, material de desenho) que não poderão deixar de ser veiculadas.

3. Competências a Desenvolver

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo
- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

4. Orientações Metodológicas / Avaliação

SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articular as abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos, tendo em vista o seu nível etário, uma vez que se trata de jovens adultos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura

metodológica envolvente facilitará a compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com disciplinas de carácter oficinal.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, artes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidas em conta questões relacionadas com a História da Arte.

AVALIAÇÃO

A avaliação das aprendizagens em Geometria Descritiva é contínua e compreende três modalidades: diagnóstica, formativa e sumativa.

Nos cursos profissionais organizados por módulos, a avaliação diagnóstica assume uma importância acrescida já que se constitui como processo de aferição do nível de conhecimentos e competências prévias dos alunos, permitindo detectar as suas eventuais dificuldades, e também os saberes adquiridos através da experiência, sendo assim possível definir estratégias diferenciadas de ensino-aprendizagem no âmbito da turma.

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de técnicas e instrumentos, tais como:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas.

A avaliação tem como referência **os objectivos e a aferição das competências adquiridas** e define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

Conceitos

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos dos sistemas de representação diédrica e axonométrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação dos sistemas de representação utilizados;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

Técnicas

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;
- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;
- a legibilidade das notações.

Realização

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

Atitudes

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

RECURSOS

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Vídeo* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *vídeo*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de CAD
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

AVALIAÇÃO SUMATIVA EXTERNA

A disciplina de Geometria Descritiva é sujeita a avaliação sumativa externa concretizada na realização de exames nacionais nos termos e para os efeitos estabelecidos no artigo 11.º do Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março, conjugado com o artigo 26.º da Portaria n.º 550-C/2004, de 21 de Maio.

Assim, esta modalidade de avaliação aplica-se apenas para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior aos alunos dos cursos profissionais, cujas portarias de criação identifiquem a Geometria Descritiva como disciplina sujeita a exame.

Em cumprimento do n.º 4 do artigo 26.º da portaria acima referida, estabelece-se que as provas de exame incidem sobre todos os módulos da disciplina (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7).

5. Elenco Modular

Número	**Designação**	**Duração de referência** (horas)
1	Geometria no Espaço. Sistemas de Representação	21
2	Representação Diédrica I – Ponto e Recta	24
3	Representação Diédrica II – Figuras Planas e Plano	30
4	Representação Diédrica III – Intersecções e Sólidos	36
5	Representação Diédrica IV – Métodos Geométricos Auxiliares	28
6	Representação Diédrica V – Sólidos e Secções	30
7	Representação Axonométrica	30

6. Bibliografia

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

*Gama, M.J.; Silveira, M.F.; Carvalho, J.P.; Rebelo, J.A. (1986). *Geometria Descritiva – Planos a médio e longo prazo – 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Gama, M.J.; Silveira, M.F.; Carvalho, J.P.; Rebelo, J.A. (1986). *Geometria Descritiva – Actividades de Aprendizagem e de Avaliação – 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Gama, M.J.; Silveira, M.F.; Carvalho, J.P.; Rebelo, J.A. (1986). Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J.A. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies*). Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

*Rebelo, J.A.; Silveira, M.F.; Carvalho, J.P. (1987). *Geometria Descritiva – Actividades de Aprendizagem e de Avaliação – 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

Geometria

*Aguilar, L.T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo 1 sobre geometria do espaço previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um "antigo" compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Colecção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma "verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas".

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoelpi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personagens, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A.A.F.(1947*). A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Salienta-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o

estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

"Ver pelo desenho", como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 – Fundamentos, Álgebra y Geometría*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço: http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm

Geometria Descritiva

Almeida, Á.D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED, (1)* 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

Aubert, J. (1982), Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. Couceiro da (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (3 e 4.)* 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. Couceiro da (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED, (7).* 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário "Como ensinar Geometria Descritiva", organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géometrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedica um dos capítulos à homologia plana.

*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974*). Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descriptiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

*Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N.C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED, (14*). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – "Geometria: que futuro?" – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da Geometria Descritiva de Monge para uso na "Escuela de Caminos", precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J.S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capítulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descriptiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L.P.M. (1899). *Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica – Tomo I e II – Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores geómetras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

*Pinheiro, C.S. & Sousa, P.F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

*Pinheiro, C.S. & Sousa, P.F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu).

O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal.

O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do "sistema diédrico". Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F.J. & Bengoa, V.A. (1987). *Geometría Descriptiva - Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F.J. & Blanco, A.R. (1982), *Geometría Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Ribeiro, C.T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

"...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão." (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relacão à representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do "método dos cortes" sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

*Sant'ana, S. & Gomes, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a "percepção" da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J.P. (1999). Acerca da "nova" terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED, (9).* 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

Xavier, J.P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED, (12).* 7-22.

Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, "Saber ver a Geometria Descritiva", onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como "método dos cortes", secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

Desenho Técnico

*Cunha, L.V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J.S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico).* Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

Normas

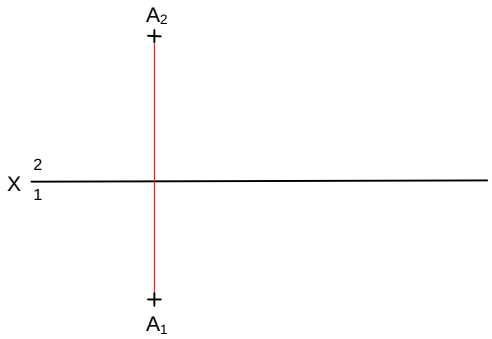
Norma ISO 128 Princípios gerais de representação
Norma ISO 216 Formatos de papéis
Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)
Norma ISO 3098 Escrita
Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção
Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos
Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho
Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos (generalidades e tipo de desenho)
Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

Endereços na Internet

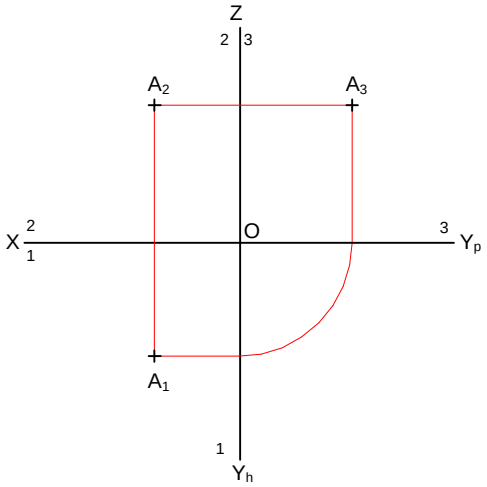
http://apus.uma.pt/~jkosta/FILES/mapa_do_site/1.html
http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html
http://www.anth.org.uk/NCT/
http://www.fc.up.pt/atractor
http://www.geom.umn.edu/

7. Anexos

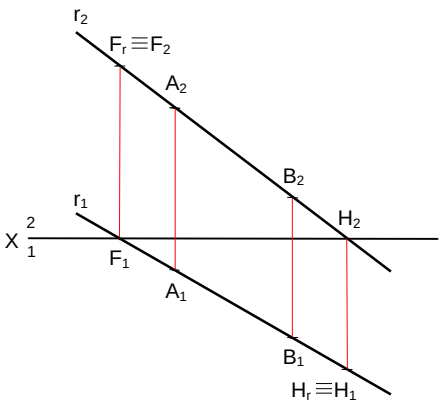
CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



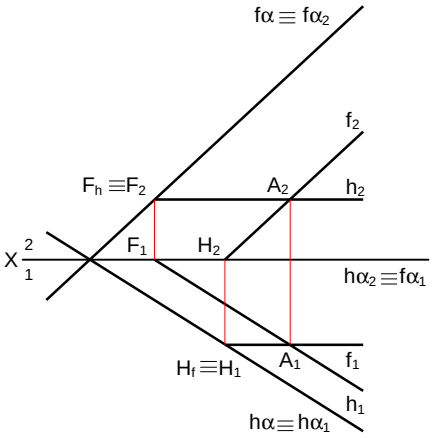
Representação diédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



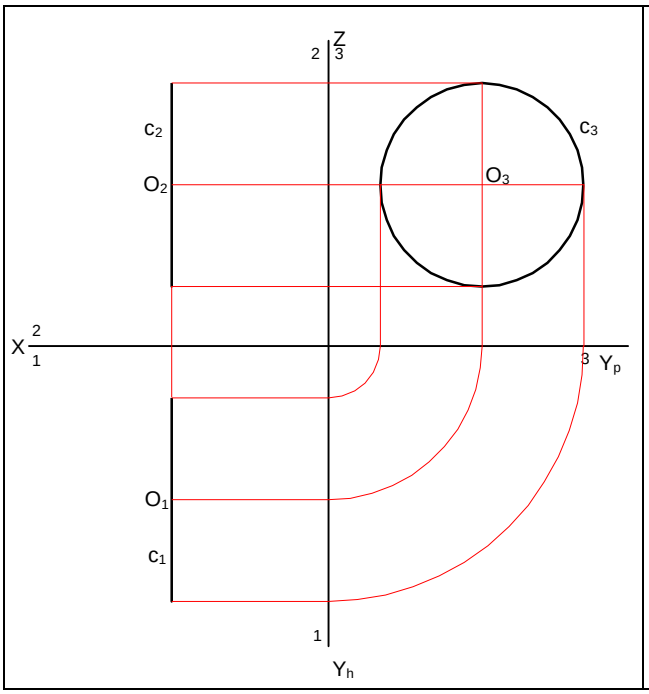
Representação triédrica de um ponto **A** de coordenadas positivas



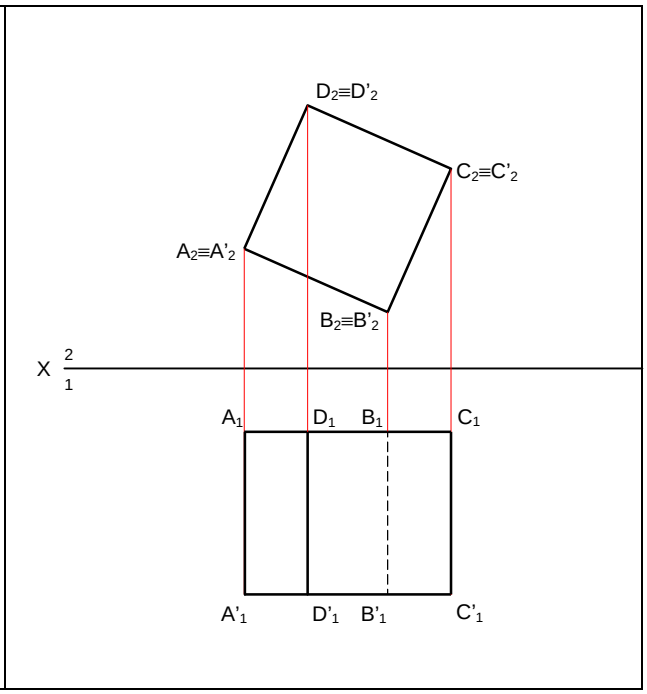
Representação de uma recta **r** e dos seus traços horizontal e frontal



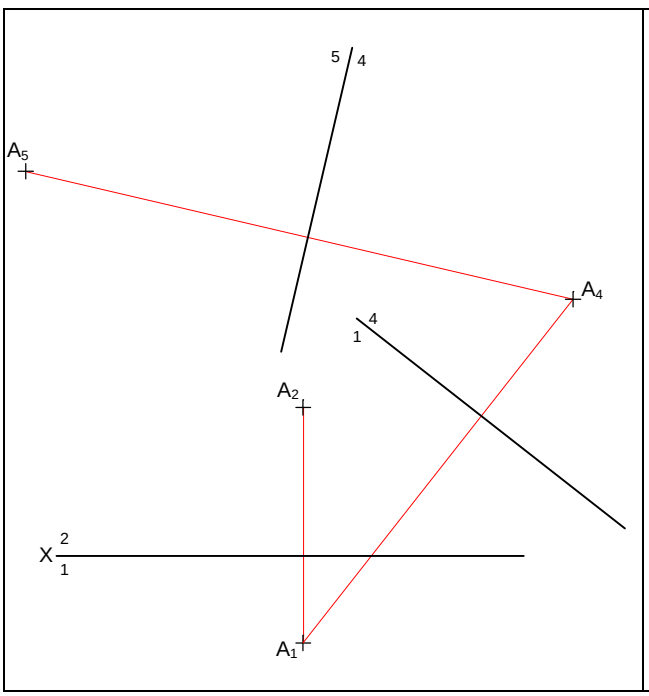
Representação de um plano a pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



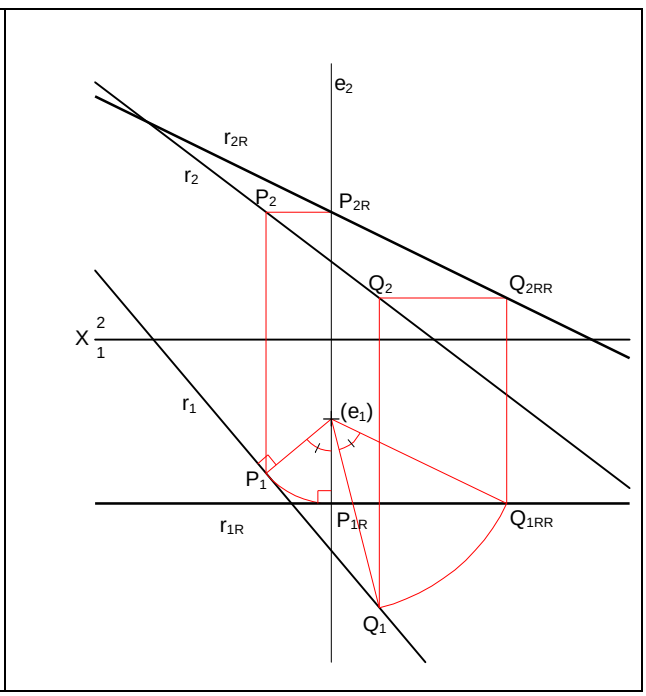
Representação triédrica de uma circunferência **c** de perfil



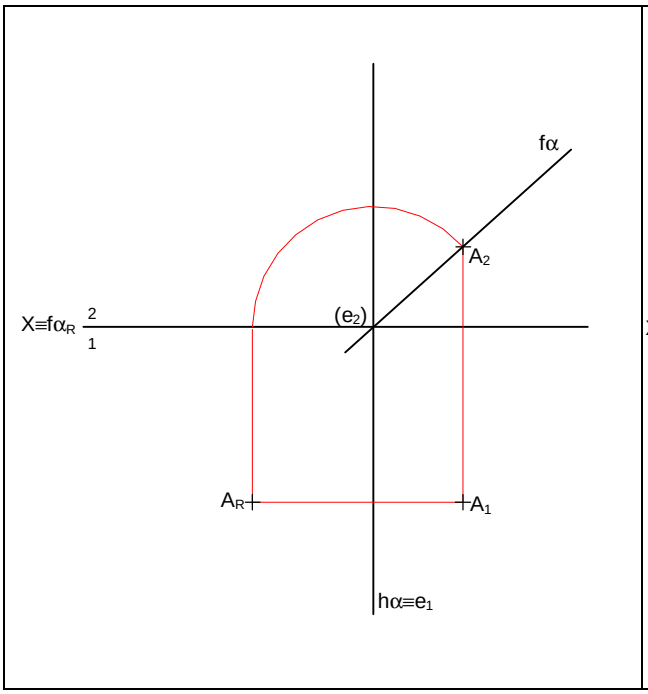
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



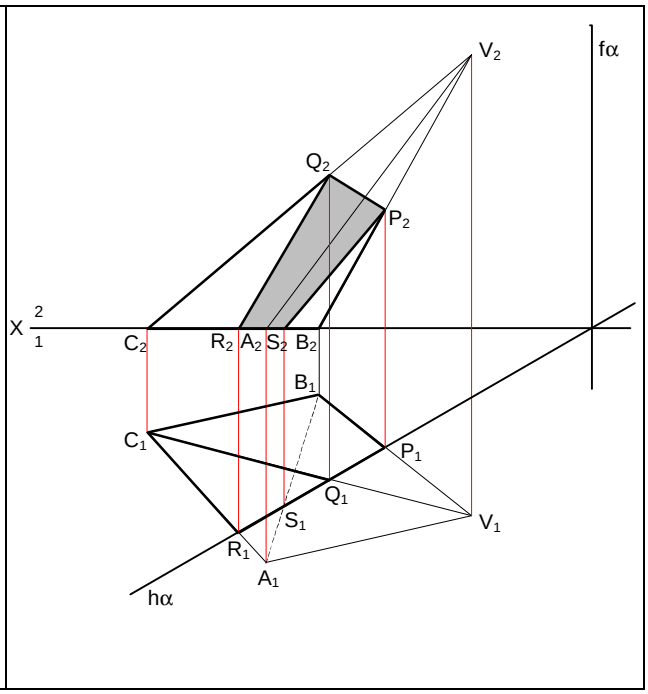
Mudança de diedros
Projecções de um ponto **A** em diferentes diedros



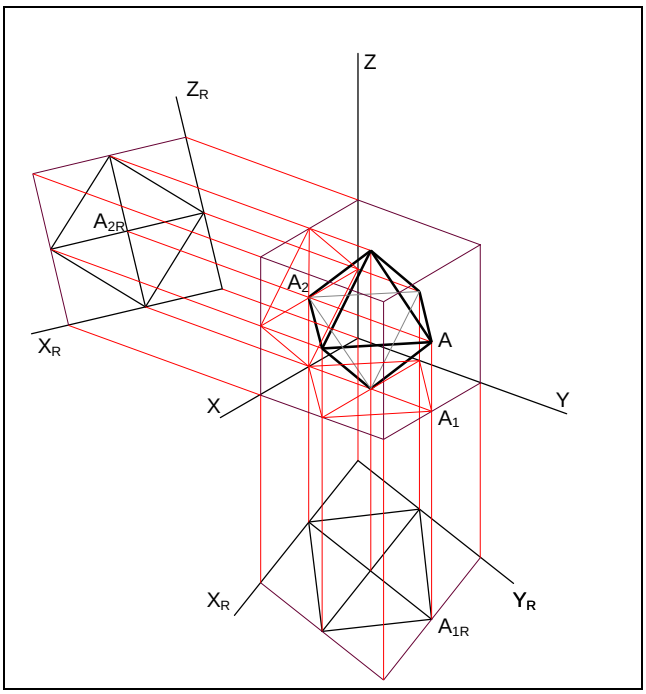
Transformação de uma recta oblíqua **r** numa recta frontal
através de uma rotação em torno de um eixo vertical **e**



Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal



Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical



Representação trimétrica de um octaedro com aplicação simultânea de dois métodos construtivos: do paralelepípedo envolvente e dos cortes

MODELOS DIDÁCTICOS

Os modelos tridimensionais de apoio à leccionação da disciplina de Geometria Descritiva são os seguintes:

MODELO A

Este modelo é constituído pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidos elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

MODELO M

Modelo destinado a visualizar o rebatimento de um plano oblíquo, quer pelo triângulo do rebatimento quer pelas rectas horizontais ou frontais do plano. O plano oblíquo é truncado por um plano projectante que lhe é perpendicular, também ele rebatível, de modo a permitir a visualização do triângulo do rebatimento e a determinação da sua verdadeira grandeza, o que permite reproduzir espacialmente todas as operações que serão efectuadas no papel para rebater o plano.

MODELO N

Realizado com esquadros de desenho este modelo, que se destina à leccionação das axonometrias, permite a visualização do triedro definido pelos planos coordenados e da pirâmide axonométrica quando fazemos coincidir a sua base (triângulo fundamental) com o plano axonométrico. Nesta última situação torna-se possível efectuar o rebatimento de uma face da pirâmide para o plano de projecção, bem como o seu contra-rebatimento, dando a entender os procedimentos necessários para a determinação de verdadeiras grandezas e das escalas axonométricas.

GLOSSÁRIO

eixo X ou **aresta dos diedros** (linha de terra) – recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

axonometrias clinogonais – axonometrias oblíquas (ver projecção clinogonal)

axonometria planométrica – designação pela qual é actualmente conhecida a axonometria militar (norma ISO 5456)

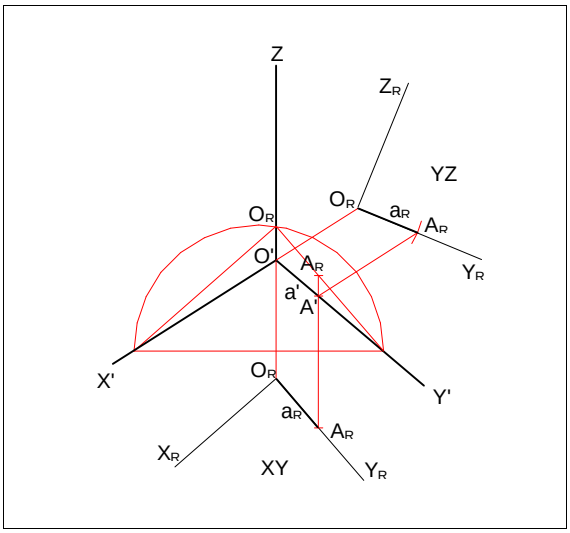
diedros de projecção (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

eixos de coordenadas ortogonais – referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abcissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

incidência – o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva - os pontos, as rectas e os planos - ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

sistema de representação – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

método dos cortes – processo que consiste no rebatimento dos planos coordenados para o interior da pirâmide axonométrica (para evitar que os planos coordenados apresentem faces distintas após o rebatimento), seguido de uma translação de cada par de eixos de coordenadas segundo uma direcção normal à charneira do rebatimento, permitindo a representação de cortes horizontais e verticais do objecto. Por contra-rebatimento e através da conjugação de, pelo menos, dois cortes, obtém-se a projecção axonométrica do objecto.



mudança de diedros de projecção (mudança de planos) – utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

plano frontal de projecção (plano vertical de projecção) – plano frontal de afastamento nulo

projecção clinogonal – termo utilizado para designar a projecção paralela oblíqua em relação a um plano de projecção; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

rectas de maior declive de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

rectas de maior inclinação de um plano – rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

representação diédrica ou **sistema de representação diédrica** – método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projecção ortogonal, método ou sistema diédrico, projecção diédrica, etc…

Teorema de Desargues – se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projecção próprio ou impróprio) as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

triedros trirrectângulos de projecção – são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projecção horizontal, frontal e de perfil

Parte II

Módulos

Índice:

		Página
Módulo 1	Geometria no Espaço. Sistemas de Representação	23
Módulo 2	Representação Diédrica I – Ponto e Recta	30
Módulo 3	Representação Diédrica II – Figuras Planas e Plano	34
Módulo 4	Representação Diédrica III – Intersecções e Sólidos	38
Módulo 5	Representação Diédrica IV – Métodos Geométricos Auxiliares	41
Módulo 6	Representação Diédrica V – Sólidos e Secções	44
Módulo 7	Representação Axonométrica	47

MÓDULO 1

Geometria no Espaço. Representação Diédrica I

Duração de Referência: **20 horas**

1 Apresentação

O primeiro módulo deste programa compreende:

– uma iniciação à Geometria do Espaço que visa o desenvolvimento do conhecimento dos elementos geométricos que participam na definição do espaço euclidiano;

– uma breve introdução à Geometria Descritiva que se concentra, fundamentalmente, na veiculação do conceito de projecção mas que também se ocupa do reconhecimento dos vários sistemas representativos, com incidência particular no sistema de representação diédrica, objecto de tratamento preferencial no programa.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Relacionar espacialmente os elementos geométricos
- Conhecer algumas superfícies e sólidos
- Reconhecer figuras correspondentes a secções planas de sólidos
- Adquirir a noção de projecção
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base do sistema de representação diédrica

- Caracterizar os sistemas de representação diédrica e triédrica

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Geometria no Espaço

1.1. Ponto

1.2. Recta

1.3. Posição relativa de duas rectas

– complanares

◦ paralelas

◦ concorrentes

– enviesadas

1.4. Plano

1.5. Posição relativa de rectas e de planos

– recta pertencente a um plano

– recta paralela a um plano

– recta concorrente com um plano

– planos paralelos

– planos concorrentes

1.6. Perpendicularidade de rectas e de planos

– rectas perpendiculares e ortogonais

– recta perpendicular a um plano

– planos perpendiculares

1.7. Superfícies

Generalidades, geratriz e directriz

Algumas superfícies:

– plana

– piramidal

– cónica

– prismática

– cilíndrica

– esférica

1.8. Sólidos

– pirâmides

– paralelepípedos

– prismas
– cones
– cilindros
– esfera

1.9. Secções planas de sólidos e truncagem

2. Introdução à Geometria Descritiva

2.1. Geometria Descritiva
2.1.1. Resenha histórica
2.1.2. Objecto e finalidade
2.1.3. Noção de projecção
– projectante
– superfície de projecção
– projecção

2.2. Tipos de projecção
2.2.1. Projecção central ou cónica
2.2.2. Projecção paralela ou cilíndrica
– projecção oblíqua ou clinogonal
– projecção ortogonal

2.3. Sistemas de representação – sua caracterização:
– pelo tipo de projecção
– pelo número de projecções utilizadas
– pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional
◦ projecção única
◦ *n* projecções e rebatimento de *n-1* planos de projecção

2.4. Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica
2.4.1. Representação triédrica
– triedros trirrectângulos de projecção
– planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3)
– eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z
– coordenadas ortogonais: *x, y, z* (*abcissa* ou *largura; ordenada/afastamento* ou *profundidade; cota* ou *altura*)
– representação triédrica de um ponto
2.4.2. Representação diédrica
– diedros de projecção
– planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2)

– eixo X ou aresta dos diedros (Linha de Terra)

– planos bissectores dos diedros

– representação diédrica de um ponto

2.4.3. Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Geometria no Espaço

Nesta unidade, onde se pretende revisitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar.

Com esses referenciais, ou outras estratégias, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade).

O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo.

Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos *modelos B a K* ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas.

As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizadas as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos.

Exemplos de situações para “visualizar” o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes

– de um ponto

– de uma recta

– de um plano

– dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta)

– dos vértices de um quadrado

– dos pontos de uma circunferência

– das faces de um diedro

– etc...

ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de

– uma esfera

– um cilindro de revolução

– um cone de revolução

– um cubo

Recomenda-se que a forma das secções referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido.

Para explorar a relação espaço-plano-espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação descritiva, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembrar algumas construções elementares da Geometria Plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.

Introdução à Geometria Descritiva

Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana.

Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.

Tipos de projecção

A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam:

– transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas, fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná-lo num ponto impróprio;

– partir de um triângulo equilátero ($60^o+60^o+60^o$) e chegar a um triângulo isósceles ($90^o+90^o+0^o$), transformando um vértice num ponto impróprio;

– aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da sua transformação numa recta, ou seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio;

– etc…

Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira.

Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.

Sistemas de representação

Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles.

Em *Ver pelo desenho* (ilustração 66, p.87), Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.

Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica

Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do *modelo A* que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional.

O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3), como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvem os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em correlação.

De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível, frequentemente, omitir a identificação dos vértices que os definem.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica – La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Fernandes, A.N.P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Marcolli, A. (1971). *Teoria del Campo – Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho – Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

Morais, J.S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– espaço da sala de aula

– objectos da sala de aula

– fita métrica

– modelos de sólidos

– modelos de superfícies (modelos B a K)

– modelos de sólidos em vinil com líquido colorido

– modelo A – sistema triédrico/diédrico

MÓDULO 2

Representação Diédrica I – Ponto e Recta

Duração de Referência: **24 horas**

1 Apresentação

Neste segundo módulo dá-se início ao estudo do sistema de representação diédrica com a descrição dos elementos geométricos, ponto e recta. A sequência na abordagem destes elementos é mediada pelo tratamento do segmento de recta de acordo com a metodologia, inerente ao Programa, de abordar previamente casos particulares e, a partir daí, proceder à generalização.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Representar diedricamente o ponto, o segmento de recta e a recta

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Ponto

1.1. Localização de um ponto

1.2. Projecções de um ponto

2. Segmento de recta

2.1. Projecções de um segmento de recta

2.2. Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção:

- perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical
- paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas)
- paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal
- paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil
- não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo

3. Recta

3.1. Recta definida por dois pontos

3.2. Projecções da recta

3.3. Ponto pertencente a uma recta

3.4. Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores

3.5. Posição da recta em relação aos planos de projecção

3.6. Posição relativa de duas rectas

- complanares
  - paralelas
  - concorrentes
- enviesadas

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Ponto

Para facilitar a visualização espacial deve recorrer-se ao *modelo A*, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal.

Propõe-se que:

- o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção;
- o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção;
- o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X;
- represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.

Segmento de recta

Propõe-se que:

– o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção;

– no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).

Recta

Propõe-se:

– partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção;

– levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção;

– que, de uma recta, o aluno simule, no modelo:

◦ as projecções;

◦ os traços;

– que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada;

– representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– modelo A – sistema triédrico/diédrico

MÓDULO 3

Representação Diédrica II – Figuras Planas e Plano

Duração de Referência: **30 horas**

1 Apresentação

O terceiro módulo deste Programa compreende o estudo da representação diédrica de figuras planas e do plano concluindo, assim, a abordagem dos elementos geométricos simples. O tratamento do plano, entidade abstracta, é precedido da abordagem de figuras concretas que se consideram como porções limitadas desse plano.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Representar diédrica e triedricamente figuras planas paralelas aos planos de projecção
- Representar diedricamente o plano

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Figuras planas I

Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil

2. Plano

2.1. Definição do plano por:

– pontos não colineares

– uma recta e um ponto exterior

– duas rectas paralelas

– duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção)

2.2. Rectas contidas num plano

2.3. Ponto pertencente a um plano

2.4. Rectas notáveis de um plano:

– horizontais

– frontais

– de perfil

– de maior declive

– de maior inclinação

2.5. Posição de um plano em relação aos planos de projecção

Planos projectantes:

– paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente)

– perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical

– perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)

Planos não projectantes:

– de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção – perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X)

– oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Figuras Planas

Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil.

O uso de *software* de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.

Plano

Sem deixar de ter em conta as diferentes definições do plano deve privilegiar-se a sua representação através dos seus traços nos planos de projecção (rectas concorrentes) e/ou por um triângulo, figura que melhor permite visualizar a sua definição genérica por 3 pontos não colineares.

O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do *modelo A* permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que:

- uma recta esteja contida num plano;
- um ponto pertença a um plano.

Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano.

Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano.

Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma "face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor.

Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– modelo A – sistema triédrico/diédrico

MÓDULO 4

Representação Diédrica III – Intersecções e Sólidos

Duração de Referência: **36 horas**

1 Apresentação

O quarto módulo do Programa inicia-se com a representação diédrica dos elementos geométricos tendo em conta as relações de incidência e de intersecção entre eles. Seguidamente é tratada a representação diédrica e triédrica de sólidos considerando as situações posicionais que não necessitam de recurso a métodos geométricos auxiliares.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Resolver problemas básicos de incidência e de intersecção relativos aos elementos geométricos
- Representar sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(is), frontal(is) ou de perfil
- Representar pontos e linhas situados nas arestas, faces ou superfícies dos sólidos

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Intersecções (recta/plano e plano/plano)

1.1. Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante
1.2. Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante
1.3. Intersecção de dois planos projectantes
1.4. Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante
1.5. Intersecção de uma recta com um plano (método geral)
1.6. Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o β_{24} ou β_{13}
1.7. Intersecção de planos (método geral)
1.8. Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um:
- plano projectante
- plano oblíquo
- plano de rampa

2. Sólidos I

2.1. Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil
2.2. Paralelepípedos rectângulos, prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil
2.3. Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Intersecções

Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano.

Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o β_{24}.

Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.

Sólidos

Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a *software* de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderão facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades.

Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas com diferentes cotas ou afastamentos para melhor percepção das visibilidades.

Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções.

Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção.

Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos – tetraedro e hexaedro regulares – ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

MÓDULO 5

Representação Diédrica IV – Métodos Geométricos Auxiliares

Duração de Referência: **28 horas**

1 Apresentação

O quinto módulo deste Programa dedica-se à abordagem dos métodos geométricos auxiliares de projecção considerando o estudo de planos projectantes. Nesse âmbito inclui a representação diédrica de figuras planas contidas nesses planos.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Aplicar os métodos geométricos auxiliares para obtenção de verdadeiras grandezas de figuras situadas em planos projectantes
- Representar figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais e de topo

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Métodos geométricos auxiliares I

1.1. Estrutura comparada dos métodos auxiliares – características e aptidões

1.2. Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança)
   1.2.1. Transformação das projecções de um ponto
   1.2.2. Transformação das projecções de uma recta
   1.2.3. Transformação das projecções de elementos definidores de um plano
1.3. Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação)
   1.3.1. Rotação do ponto
   1.3.2. Rotação da recta
   1.3.3. Rotação de um plano projectante
   1.3.4. Rebatimento de planos projectantes

2. Figuras planas II

Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Métodos geométricos auxiliares

Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo:

– transformar
- recta horizontal em recta de topo
- recta frontal em recta vertical
- recta oblíqua em recta horizontal ou frontal
- plano de topo em plano horizontal
- plano vertical em plano frontal

No estudo da rotação da recta (*modelo L*) propõem-se os seguintes problemas-tipo:

– transformar
- uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo
- uma recta frontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta vertical
- uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal

Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a *software* de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura.

Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará a denominar-se rebatimento.

O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de economia de meios.

Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, será conveniente recorrer ao *modelo M*, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento.

Figuras planas

Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Desargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– modelo L – rotação da recta

– modelo M – rebatimento do plano oblíquo

MÓDULO 6

Representação Diédrica V – Sólidos e Secções

Duração de Referência: **30 horas**

1 Apresentação

Este sexto módulo do Programa compreende o estudo de sólidos com base ou bases situadas em planos projectantes, bem como a determinação de secções planas de sólidos em situações simples. Basicamente, quando os sólidos têm base(s) projectante(s), estudam-se os casos de secções produzidas por planos paralelos aos planos de projecção e, quando os sólidos têm base(s) paralela(s) aos planos de projecção, consideram-se as secções produzidas por qualquer plano projectante.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Representar sólidos (pirâmides, paralelepípedos e prismas regulares) de base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo
- Determinar secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos horizontal, frontal ou de perfil
- Determinar secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Sólidos II

Pirâmides, paralelepípedos rectângulos e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo

2. Secções

2.1. Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) por planos
– horizontal, frontal e de perfil

2.2. Secções em sólidos (pirâmides, cones, paralelepípedos rectângulos, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes

2.3. Truncagem

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Sólidos

Recomenda-se o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do *software* de geometria dinâmica.

Secções

Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações:

- secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral:
  - sem aresta(s) de perfil
  - com aresta(s) de perfil
- secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base:
  - sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção
  - com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção

Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede.

Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases.

Poder-se-á utilizar o Teorema de Desargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes.

Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade).

Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder-se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Aubert, J. (1982)*, Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Leitão, C.A.M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodriguez de Abajo, F.J. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistema Diédrico*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– modelos tridimensionais de sólidos

– candeeiro com um quebra-luz de boca circular

MÓDULO 7

Representação Axonométrica

Duração de Referência: **30 horas**

1 Apresentação

O sétimo módulo do Programa concentra-se no estudo do sistema de representação axonométrica – ortogonal e clinogonal – e versa, essencialmente, o conhecimento da sua fundamentação projectiva e descritiva. O encontro de competências anteriores com o domínio deste novo saber permitirá tratar, igualmente, a representação axonométrica de formas tridimensionais simples e compostas.

2 Competências Visadas

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

3 Objectivos de Aprendizagem

- Caracterizar o sistema de representação axonométrica
- Caracterizar as axonometrias ortogonais e clinogonais
- Determinar as escalas axonométricas por processos geométricos
- Representar, em axonometria, formas tridimensionais simples e compostas

4 Âmbito dos Conteúdos

1. Introdução
   1.1. Caracterização
   1.2. Aplicações
2. Axonometrias oblíquas ou clinogonais:
   Cavaleira e Planométrica
   2.1. Generalidades
   2.2. Direcção e inclinação das projectantes
   2.3. Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo
   2.4. Axonometrias clinogonais normalizadas
3. Axonometrias ortogonais:
   Trimetria, Dimetria e Isometria
   3.1. Generalidades
   3.2. Determinação gráfica das escalas axonométricas
      3.2.1. Rebatimento do plano definido por um par de eixos
      3.2.2. Rebatimento do plano projectante de um eixo
   3.3. Axonometrias ortogonais normalizadas
4. Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas por:
   – paralelepípedos rectângulos com as bases ou faces paralelas a um dos planos coordenados
   – pirâmides e prismas regulares e oblíquos de base(s) regular(es) com a(s) referida(s) base(s) paralela(s) a um dos planos coordenados e com pelo menos uma aresta da(s) base(s) paralela(s) a um eixo
   – cones e cilindros de revolução e oblíquos com base(s) em verdadeira grandeza (só no caso da axonometria clinogonal)

   Métodos de construção
   4.1. Método das coordenadas
   4.2. Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente
   4.3. Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades.

Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentadas aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do *design* industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria, na descrição dessas formas.

No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar-se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os efeitos produzidos. Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder-se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente, distorções.

Seria interessante relacionar as axonometrias clinogonais com as sombras em representação diédrica, previamente estudadas, para assim vislumbrar a relação entre ambos os tipos de projecção.

Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (*modelo N*) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações.

No modelo poder-se-á evidenciar claramente:

- a correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico;
- os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do **triângulo fundamental** correspondente à base da **pirâmide axonométrica** com vértice na origem do sistema de eixos;
- a configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria;
- a redução das medidas resultante da inclinação dos eixos.

Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um eixo, o que seria desejável, poder-se-á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas.

Neste processo deverá salientar-se o teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto correspondente ao rebatimento da origem; apelar aos conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e, consequentemente, o recurso ao Teorema de Desargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida.

Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo.

Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.

Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar ênfase ao chamado “método dos cortes” devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.

6 Bibliografia / Outros Recursos

Bibliografia

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Nannoni, D. (1978, 1981)*. Il Mondo delle Proiezioni – Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Rodríguez de Abajo, F.J. & **Bengoa**, V.A. (1987). *Geometría Descriptiva – Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Sánchez Gallego, J.A. (1992). *Geometría Descriptiva – Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Schmidt, R. (1986). *Geometría Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

Recursos

– modelo N – pirâmide axonométrica