



M 2014

VERIFICAÇÃO DE ELEMENTOS EM BETÃO ESTRUTURAL COM BASE EM MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES

VASCO GUIMARÃES CORTEZ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
À FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO EM
ENGENHARIA CIVIL - ESTRUTURAS

VERIFICAÇÃO DE ELEMENTOS EM BETÃO ESTRUTURAL COM BASE EM MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES

VASCO GUIMARÃES CORTEZ

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Professor Doutor Mário Jorge de Seixas Pimentel

JUNHO DE 2018

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2012/2013

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2014/2015 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2015.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

I know not how I seem to others, but to myself I am but a small child wandering upon the vast shores of knowledge, every now and then finding a small bright pebble to content myself with while the vast ocean of undiscovered truth lay before me.

Isaac Newton

AGRADECIMENTOS

Gostaria de prestar o meu reconhecimento a todos aqueles que, direta ou indiretamente, permitiram que este trabalho fosse possível, ao longo destes curtos, mas intensos quatro meses de trabalho.

Em especial agradeço ao Professor Mário Pimentel, não só pelo imenso conhecimento transmitido e bibliografia cedida, mas também pela exigência e rigor com que me fez crescer e aprender por mim mesmo, e ainda pela disponibilidade, paciência, e simpatia com que sempre me recebeu.

À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto agradeço os meios disponibilizados e a oportunidade de realização desta investigação.

Ao Cláudio Ferreira agradeço especialmente a entajuda e colaboração durante o semestre da dissertação.

Agradeço ainda ao Bruno Sousa e à Cecília Parente a camaradagem durante o ano letivo, assim como a todos os restantes amigos e colegas pela cooperação e ambiente de trabalho criados, sem os quais tudo teria sido mais difícil.

Aos meus pais e irmã agradeço o apoio constante e incondicional, sem o qual nada poderia ter feito.

RESUMO

A análise e dimensionamento de estruturas em betão armado é realizada com recurso a variados métodos, tal como o método das escoras e tirantes, fruto de experimentação prática na escola de Estugarda. Com semelhanças nos princípios, desenvolveram-se em Zurique e em Copenhaga os modelos de campos de tensões, estes com base teórica, fundada nas teorias da plasticidade e da análise limite. Concebidos para serem resolvidos por via analítica, com leis constitutivas rígido-plásticas (campos de tensões descontínuos), eles podem hoje ser aplicados numericamente, contemplando leis elasto-plásticas (campos de tensões contínuos). Para isso, é necessário recorrer a análises não lineares pelo método dos elementos finitos. Enquanto os primeiros são comumente utilizados (explícita ou implicitamente) no dimensionamento, estando até na base de disposições regulamentares, os segundos são geralmente reservados para a análise de estruturas existentes.

O que se pretendeu com este trabalho foi investigar a possibilidade da utilização desta metodologia no dimensionamento comum, de uma forma automatizada, robusta e rápida, tal como hoje acontece com os métodos de análise elástica. Sendo exigência dos métodos de análise não-linear de estruturas a existência de um dimensionamento prévio à análise, é necessária a sua aplicação de forma iterativa. Procurou-se testar a sua aplicação a estruturas com regiões de descontinuidade, em substituição ou complemento dos atuais métodos. Procurou-se também obter uma aproximação à realidade dos modelos de dimensionamento utilizados, ampliando a gama de soluções disponíveis e removendo limitações e simplificações, assim como verificar o rigor dos métodos e parâmetros de segurança previstos nos códigos existentes.

A metodologia utilizada foi a resolução analítica de alguns exemplos de complexidade crescente e confrontação dos resultados com a análise numérica dos mesmos exemplos. Alguns foram baseados na bibliografia, pelo que possibilitaram ainda a comparação com resultados de ensaios. Para os campos de tensões contínuos foi feita previamente uma análise de sensibilidade, para afinar o tipo e tamanho dos elementos finitos, assim como os métodos de integração e outros parâmetros. Finalmente, estas duas metodologias foram ainda aplicadas a um caso real no qual a sua utilização é exemplificativa: as vigas-parede da Estação de Tratamento de Águas Residuais de Sobreiras no Porto, tendo sido feita uma verificação de segurança do dimensionamento efetuado.

A investigação elaborada permitiu concluir que é possível fazer análises não lineares com modelos de campos de tensões contínuos que dão resultados estáveis de forma relativamente autónoma e rápida, complementando ou substituindo outros métodos de dimensionamento. Estes modelos permitem não só encontrar soluções mais adequadas do comportamento à rotura, mas também resolver problemas mais complexos e sem solução analítica.

Parece haver indícios de que estes métodos serão generalizados na prática da engenharia de estruturas no futuro, com a evolução progressiva do cálculo computacional. A revisão dos atuais códigos estruturais parece também ir no sentido de tirar partido destas capacidades, permitindo a validação de soluções mais complexas e difíceis de analisar por outros meios.

PALAVRAS-CHAVE: betão estrutural, campos de tensões, dimensionamento, regiões de descontinuidade, análise não linear de estruturas.

ABSTRACT

The analysis and design of structures in reinforced concrete is done with the help of several different methods. One of them is the Strut-and-Tie Theory, developed as result of practical tests done in the school of Stuttgart. With similar principles, the Stress Fields' Models were developed in Zurich and Copenhagen, these ones based on theoretical formulation, based on the Plasticity Theory. Conceived to be solved analytically with rigid-plastic constitutive laws (discontinuous stress fields), they can now be solved numerically by considering elastic-plastic constitutive laws (continuous stress fields). For this, it is necessary to employ non-linear analysis using the finite element method. While the first ones are commonly used (explicitly or implicitly) in structural design, being even the basis of code rules, the second ones are reserved for the analysis of existing structures, being the procedures quite time consuming and laborious.

The scope of this work is, considering the progress in the current computing capacities, to investigate the possibility of using this methodology in common structural dimensioning in an automatic, robust and fast way, the same way it is done with elastic analysis' methods. As the non-linear analysis demands an existing design solution in forehand, the method must be used in an iterative manner. It was intended to test its application to structures with discontinuity regions, replacing or complementing actual methods. The aim was to test an approximation to the reality of the usual models, enlarging the available solutions range and removing limitations and simplifications, as well as to verify the accuracy of the methods and parameters foreseen in the existing codes.

The applied methodology consisted in solving analytically some examples of increasing complexity and to compare the results with the numerical analysis with the same examples. Some of them were based in bibliography, which allowed also to compare with test results. For the continuous stress field's models a sensitivity analysis was made in order to define the type and size of the finite elements, as well as the integration methods and other parameters. Finally, these two methodologies were also applied to a real case in which their use is illustrative: Sobreiras Wastewater Treatment Plant in the city of Porto, Portugal, being made a safety verification of its structural design.

The investigation allowed to conclude that it is possible to produce non-linear analysis with continuous stress field models which give stable results in a relatively autonomous and fast manner, complementing other design methods. These methods allow not only to find solutions which are closer to the failure loads, but also to solve more complex problems and without analytical solution.

It seems that these methods will be generalized in the practice of structural engineering in the future, being this kind of difficulties mitigated with the evolution of the structural design software. The update of the actual structural codes seems to lead in the direction of taking advantage of these capacities, in order to validate more complex solutions and hard to analyze otherwise.

KEYWORDS: reinforced concrete, stress fields, structural design, discontinuity regions, nonlinear structural analysis.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
1 INTRODUÇÃO	13
1.1. MÉTODO DAS ESCORAS E TIRANTES.....	13
1.2. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES.....	13
1.3. TEOREMA DO LIMITE INFERIOR	14
1.4. APLICAÇÃO PRÁTICA	15
1.5. OBJETIVOS, MÉTODO E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	15
1.5.1. Objetivos.....	15
1.5.2. Metodologia.....	15
1.5.3. Estrutura.....	16
2 MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES DESCONTÍNUOS.....	17
2.1. INTRODUÇÃO	17
2.2. LEIS CONSTITUTIVAS E MODOS DE ROTURA	17
2.3. RESISTÊNCIA PLÁSTICA DO BETÃO.....	19
2.4. TOPOLOGIA DOS CAMPOS DE TENSÕES	22
2.5. VERIFICAÇÃO DOS NÓS	25
2.5.1. Esmagamento do betão	25
2.5.2. Ancoragem das armaduras	27
2.6. EXEMPLOS	28
2.6.1. Carga concentrada em apoio direto	28
2.6.2. Carga distribuída	32
2.6.3. Estudo do efeito de apoio direto	33
2.6.4. Escorregamento da ancoragem (nó CCT)	36
2.6.5. Aplicação na verificação de segurança ao esforço transversal de vigas	37
2.6.5.1. Vigas Higgins <i>et al.</i>	37
2.6.5.2. Vigas Walraven <i>et al.</i>	42
2.7. CONCLUSÕES.....	45
3 MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES CONTÍNUOS	47
3.1. INTRODUÇÃO	47
3.2. LEIS CONSTITUTIVAS E MODOS DE ROTURA	48

3.3. RESISTÊNCIA PLÁSTICA DO BETÃO	49
3.4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	50
3.5. EXEMPLOS	54
3.5.1. Carga concentrada em apoio direto	54
3.5.2. Carga distribuída	55
3.5.3. Estudo do efeito de apoio direto	56
3.5.4. Esmagamento dos nós	60
3.5.4.1. Nó A – esmagamento no apoio	60
3.5.4.2. Nó A - esmagamento na escora	61
3.5.4.3. Nó B - esmagamento no apoio	62
3.5.4.4. Nó B - esmagamento nas escoras	63
3.5.5. Escorregamento da ancoragem (nó CCT)	63
3.6. Aplicação na verificação de segurança ao esforço transversal de vigas.....	66
3.6.1.1. Vigas Higgins <i>et al.</i>	66
3.6.1.2. Vigas Walraven <i>et al.</i>	68
3.7. CONCLUSÕES	71
4 ANÁLISE DAS VIGAS-PAREDE DA ETAR DE SOBREIRAS	73
4.1. INTRODUÇÃO	73
4.2. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA	73
4.3. AÇÕES CONSIDERADAS	74
4.4. HIPÓTESES ADOTADAS PARA OS MODELOS	75
4.5. ARMADURAS	76
4.6. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES DESCONTÍNUOS	78
4.6.1. MET mais simples para dimensionamento	78
4.6.2. Verificação dos nós	82
4.6.3. Refinamento do MET	83
4.7. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES CONTÍNUOS	84
4.8. MODELO SEM PRÉ-ESFORÇO	87
4.9. COMPARAÇÃO DOS DOIS MÉTODOS	88
4.10. CONCLUSÕES	90
5 CONCLUSÕES	91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1 - Descontinuidade entre zonas comprimidas (I) e zonas sem tensão (II) no betão (Pimentel, 2011)	17
Fig. 2 – Leis constitutivas dos materiais: a) betão b) aço (Niketić, 2017).....	18
Fig. 3 - Aumento da fragilidade com a classe de resistência do betão (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)	19
Fig. 4 - Resistência plástica do betão (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)	19
Fig. 5 - Resistência plástica para diferentes classes de resistência (Niketić, 2017)	19
Fig. 6 - Coeficiente de redução da resistência à compressão do betão devida à fragilidade	20
Fig. 7 - Coeficiente relativo às extensões transversais de acordo com diversos autores	21
Fig. 8 – Propostas de coeficientes fixos adaptáveis a diferentes situações de solicitação da peça em que $\eta\varepsilon = f_{cefcp}$ (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)	22
Fig. 9 – Diferentes topologias de campos de tensões (Pimentel, 2011): a) campo de tensões em paralelogramo b) leque centrado com a interseção fora da estrutura c) leque centrado com intersecção dentro da estrutura d) leque descentrado	23
Fig. 10 – Cálculo das tensões no interior de uma escora em leque (Almeida, 2010)	24
Fig. 11 - Tipologias de escoras: a) prismática b) em leque (Muttoni, Niketić e Fernández Ruiz, 2006)	24
Fig. 12 - Tipologia possível dos nós (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)	25
Fig. 13 - Nó concentrado e nó distribuído (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)	26
Fig. 14 – Metodologia das escoras em leque à entrada do nó, considerando tensão uniforme centrada na escora	26
Fig. 15 – Verificação das tensões à entrada de nós (IPQ, 2010): a) CCC b) CCT c) CTT	27
Fig. 16 - Ancoragem das armaduras (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006): a) e b) ancoragens concentradas c) lei constitutiva para a tensão tangencial de aderência d) ancoragem por aderência e comprimento de amarração (l_b).....	28
Fig. 17 – Viga simplesmente apoiada sujeita a cargas concentradas	29
Fig. 18 – Diagramas: a) esquema estrutural b) esforço transversal c) momentos fletores	29
Fig. 19 - Simplificação da estrutura inicial.....	29
Fig. 20 – MET para carga diretamente apoiada: a) modelo global b) equilíbrio do nó A c) equilíbrio do nó B	29
Fig. 21 - Cálculo à rotura de uma secção sujeita a flexão simples fendilhada (Faria e Pimentel, 2017)	30
Fig. 22 - Modelo de campos de tensão descontínuos para carga concentrada em apoio direto	31
Fig. 23 - Diagramas: a) esquema estrutural b) esforço transversal c) momentos fletores	32
Fig. 24 - Modelo de campo de tensões para carga distribuída	32
Fig. 25 – Modelo MET de transmissão de cargas: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 - modelo hiperstático... ..	33
Fig. 26 – Suspensão da carga entre a força e o apoio: campos de compressões no betão (I e II) e campo de tensões na armadura (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997)	34
Fig. 27 – Modelo MCTD: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 - modelo hiperstático.....	34

Fig. 28 – Modelo MCTD e MET sobrepostos: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 – modelo hiperstático	34
Fig. 29 – Escoras em leque e em paralelogramo numa viga simplesmente apoiada (Pimentel, 2011)	37
Fig. 30 – Vigas testadas por <i>Higgins et al</i> (Pimentel, 2011)	37
Fig. 31 – Modelo de treliça aplicado à verificação do esforço transversal em regiões de continuidade de vigas (Faria e Pimentel, 2017)	38
Fig. 32 - Evolução da resistência ao esforço transversal com a inclinação das escoras para a viga 1	39
Fig. 33 - Resistência de todas as vigas	39
Fig. 34 - Resistência experimental e de cálculo	40
Fig. 35 - Distribuição do esforço transversal (à esquerda) e das extensões (à direita) na secção transversal da viga (Pimentel, 2011)	41
Fig. 36 - Resistência experimental e de cálculo	42
Fig. 37 – Geometria das vigas estudadas (Belletti, Esposito e Walraven, 2013)	43
Fig. 38 - Evolução da resistência ao corte do betão e armadura com a inclinação das escoras: a) GDL30L b) GDL30M c) GDL30H d) GDL90L e) GDL90M f) GDL90H	44
Fig. 39 - Modelos de campos de tensões: a) descontínuos b) contínuos	47
Fig. 40 - Leis constitutivas: a) diagrama tensão-deformação do aço (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006) b) diagrama tensão-deformação e superfície de rotura adotados para o betão (Niketic, 2017)	48
Fig. 41 - Coeficientes de redução η_f e η_e utilizados para a resistência à compressão do betão (Pimentel, 2011)	49
Fig. 42 - Derivação das forças nodais para elementos finitos triangulares com a hipotenusa paralela e perpendicular à tensão principal (Niketic, 2017)	51
Fig. 43 - Dois dos tipos de malha estudados: a) triangular aberta b) retangular	52
Fig. 44 - Extensão de plastificação para diferentes valores de $f_{c,eff}$	54
Fig. 45 – Carga concentrada: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	55
Fig. 46 - Comparação dos MCTC para carga concentrada (a) e distribuída (b)	55
Fig. 47 –Carga distribuída: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	56
Fig. 48 – Estudo do efeito de apoio direto (a=0.70 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	57
Fig. 49 – Estudo do efeito de apoio direto (a=0.95 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	57
Fig. 50 – Estudo do efeito de apoio direto (a=1.20 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	58
Fig. 51 – Estudo do efeito de apoio direto (a=1.45 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	58

Fig. 52 – Estudo do efeito de apoio direto (a=1.70 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	59
Fig. 53 – Estudo do efeito de apoio direto (a=1.95 m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais	59
Fig. 54 - Comparação dos vários casos de afastamento progressivo da carga do apoio	60
Fig. 55 – Rotura por esmagamento do nó CCT na face do apoio: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰).....	61
Fig. 56 – Rotura por esmagamento do nó CCT na face da escora: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	62
Fig. 57 – Rotura por esmagamento do nó CCC na face do apoio: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	63
Fig. 58 - Lei usada para o modelo <i>bond slip</i> (tensão tangencial / deslocamento relativo entre o aço e o betão)	64
Fig. 59 – Alteração do modelo para forçar a rotura por escorregamento e comprimento de amarração considerado nos MCTD.....	64
Fig. 60 – Rotura por escorregamento da armadura: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰).....	65
Fig. 61 - Diagramas de tensões-deformações, carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e dos ensaios (linha verde), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰) das vigas 1 a 5.....	66
Fig. 62 - Diagramas de tensões-deformações, carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e dos ensaios (linha verde), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰) das vigas 5 a 10.....	67
Fig. 63 – Efeito da armadura de corte na resistência: a preto resultados numéricos, a vermelho MCTC e a linha cinza MCTD	68
Fig. 64 - Extensões de tração na armadura transversal da viga 3 para uma carga de 736 kN	68
Fig. 65 - Diagramas de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e do ensaio (linha azul), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	69
Fig. 66 - Diagramas de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e do ensaio (linha azul), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)	70
Fig. 67 - Comparação dos resultados experimentais e numéricos.....	70
Fig. 68 – Comparação dos resultados normalizados.....	70
Fig. 69 – ETAR de Sobreiras: vista aérea, corte pelos corpos A e B e planta esquemática (Pimentel, 2004)	73
Fig. 70 – Cortes pelas vigas-parede: a) perpendicular ao desenvolvimento b) paralelo ao desenvolvimento.....	74
Fig. 71 - Vista do apoio das vigas-parede: a) lâminas do piso inferior b) pormenor dos esquadros de reforço	74
Fig. 72 – Geometria: a) real (Pimentel, 2004) b) considerada	75

Fig. 73 - Ações adotadas	75
Fig. 74 – Malha de elementos finitos e condições de apoio consideradas	76
Fig. 75 - Localização da armadura distribuída no modelo de elementos finitos	76
Fig. 76 - MET simples para dimensionamento	78
Fig. 77 - Distribuição das reações de apoio e momentos numa análise elástica da estrutura	79
Fig. 78 - Distribuição das reações de apoio e momentos numa análise elástica da estrutura – simplificação	79
Fig. 79 – Desvio da força da escora no esquadro	83
Fig. 80 - Largura centrada na escora para consideração das tensões como uniformes	83
Fig. 81 - MET refinado	84
Fig. 82 - Diagrama de carga-deslocamento	85
Fig. 83 - MCTC para passos sucessivos da análise: a) no fim do LC1 b) no fim do LC2 c) para um fator de carga 0.5 (LC3) d) para um fator de carga 1 (LC3)	85
Fig. 84 – MCTC na rotura (FC=2.44)	86
Fig. 85 – MCTC: direções das extensões principais de compressão na rotura (FC=2.44)	86
Fig. 86 – Elementos finitos plastificados, com extensão principal de compressão é superior a f_{cd}/E_{cd} na rotura.....	86
Fig. 87 - Deformada da estrutura na rotura	87
Fig. 88 - Diagrama de carga-deslocamento	87
Fig. 89 - Deformada do modelo sem pré-esforço.....	87
Fig. 90 - Diagramas de forças no betão ao longo de alinhamentos verticais: a) meio-vão da esquerda b) meio vão da direita	88
Fig. 91 - Diagramas de tensões na armadura ao longo de alinhamentos verticais: a) apoio da esquerda (B) b) apoio da direita (D)	89
Fig. 92 - Sobreposição do MCTD com o MCTC.....	89
Fig. 93 - Tensões principais ao longo de uma linha horizontal imediatamente acima da laje	89

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Materiais, parâmetros geométricos e características da armadura longitudinal.....	30
Tabela 2 – Resultados para carga concentrada em apoio direto	30
Tabela 3 – Resultado do cálculo à flexão do momento resistente	31
Tabela 4 - Tensões nos nós - carga concentrada em apoio direto.....	32
Tabela 5 - Tensões nos nós - carga distribuída em apoio direto.....	33
Tabela 6 – Dimensionamento dos vários modelos	36
Tabela 7 - Vigas consideradas.....	38
Tabela 8 – Esforço transversal resistente com a limitação à inclinação das escoras.....	40
Tabela 9 - Esforço transversal resistente sem a limitação à inclinação das escoras.....	42
Tabela 10 – Características mecânicas das vigas escolhidas.....	43
Tabela 11 – Características mecânicas das vigas escolhidas.....	43
Tabela 12 – Resultados numéricos e experimentais	45
Tabela 13 - Resultados para as várias malhas estudadas	53
Tabela 14 – Comparação dos diferentes casos.....	56
Tabela 15 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A	60
Tabela 16 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A	61
Tabela 17 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A	62
Tabela 18 – Características mecânicas das vigas escolhidas e resultados da análise	69
Tabela 19 - Características dos materiais.....	76
Tabela 20 - Armadura distribuída horizontal	77
Tabela 21 - Armadura distribuída vertical	77
Tabela 22 – Distribuição das reações entre os três apoios para diferentes modelos (percentagem)..	79
Tabela 23 - Distribuição do peso próprio pelos dois níveis considerados.....	80
Tabela 24 – Dimensionamento das escoras e tirantes horizontais	80
Tabela 25 – Dimensionamento das restantes escoras e tirantes	81
Tabela 26 - Dimensionamento dos tirantes verticais	82
Tabela 27 - Verificação dos nós.....	83

SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

DEC - Departamento de Engenharia Civil

FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

MEF – Método dos Elementos Finitos

MET – Método das Escoras e Tirantes

MCT – Modelos de Campos de Tensões

MCTC – Modelos de Campos de Tensões Contínuos

MCTD – Modelos de Campos de Tensões Descontínuos

MCT – Modelos de Campos de Tensões

MCTC – Modelos de Campos de Tensões Contínuos

MCTD – Modelos de Campos de Tensões Descontínuos

SLS - estado limite de utilização

TLI – Teorema do Limite Inferior

TLS – Teorema do Limite Superior

TP – Teoria da Plasticidade

ULS – Estado Limite Último (Ultimate Limit State)

Letras maiúsculas latinas

A_c - área da secção transversal de betão [m^2]

A_p - área da secção de uma armadura ou de cabos de pré-esforço [cm^2]

A_s - área da secção de uma armadura para betão armado [cm^2]

$A_{s,min}$ - área da secção mínima de armaduras [cm^2]

A_{sw} - área da secção das armaduras de esforço transversal [cm^2]

E_c - módulo de elasticidade tangente na origem, $\sigma_c = 0$, para um betão de massa volúmica normal aos 28 dias de idade [GPa]

E_p - valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de uma armadura de pré-esforço [GPa]

E_s - valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de uma armadura para betão armado [GPa]

M - momento fletor [kN]

M_{Ed} - valor de cálculo do momento fletor actante [kNm]

P - pré-esforço [kN]

V - esforço transversal [kN]

V_{Ed} - valor de cálculo do esforço transversal actante [kN]

Letras minúsculas latinas

a – distância [m]

b - largura total de uma secção transversal, ou largura real do banzo de uma viga em T ou L [m]

b_w - largura da alma de vigas em T, I ou L [m]

d - altura útil de uma secção transversal [m]

d_g - dimensão nominal máxima do agregado [mm]

f_c - tensão de rotura do betão à compressão [MPa]

f_{ck} - valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 d de idade [MPa]

f_p - tensão de rotura à tração do aço das armaduras de pré-esforço [MPa]

f_{pk} - valor característico da tensão de rotura à tração do aço das armaduras de pré-esforço [MPa]

f_y - tensão de cedência à tração do aço das armaduras para betão armado [MPa]

f_{yk} - valor característico da tensão de cedência à tração do aço das armaduras para betão armado [MPa]

h - altura total de uma secção transversal [m]

k - coeficiente; fator [-]

l (ou l ou L) - vão [m]

x - altura do eixo neutro [m]

z - braço do binário das forças interiores [m]

Letras minúsculas gregas

α - ângulo [°]

β - ângulo [°]

ζ - coeficiente de redução/coeficiente de distribuição - coeficiente de redução da resistência do betão fendilhado por esforço transversal [-]

ε_c - extensão do betão à compressão [‰]

ε_{c1} - extensão do betão à compressão correspondente à tensão máxima f_c [‰]

ε_{cu} - extensão última do betão à compressão [‰]

ε_u - extensão do aço da armadura para betão armado ou de pré-esforço correspondente à tensão máxima [‰]

ε_{uk} - valor característico da extensão do aço da armadura para betão armado ou de pré-esforço na carga Máxima [‰]

θ ângulo [°]

ν - coeficiente de Poisson [-]

ρ - massa volúmica do betão seco em estufa [kg/m³]

ρ_l - taxa de armaduras longitudinais [%]

ρ_w - taxa de armaduras de esforço transversal [%]

σ_c - tensão de compressão no betão [MPa]

σ_{cp} - tensão de compressão no betão devida a um esforço normal ou ao pré-esforço [MPa]

σ_{cu} - tensão de compressão no betão correspondente à extensão última em compressão, ϵ_{cu} [MPa]

ϕ - diâmetro de um varão ou de uma bainha de pré-esforço [mm]

1 INTRODUÇÃO

1.1. MÉTODO DAS ESCORAS E TIRANTES

O desenvolvimento de teorias para explicação do comportamento do betão armado teve uma evolução enorme, desde que Hennebique patenteou um processo de fabrico de lajes no fim do século XIX. Os métodos, inicialmente intuitivos, simples, e fundados na prática da engenharia evoluíram para abordagens com base em modelos mecânicos, nomeadamente com a aplicação da Teoria da Elasticidade e da Teoria da Plasticidade (Niketić, 2017). Ritter (1899) introduz uma metodologia mais elaborada, com base na análise seccional, onde considera um estado de tensão linear para o betão tracionado e um não linear para o betão comprimido, desprezando, no entanto, o primeiro. Propõe ainda, por observação da fendilhação a 45 graus numa viga, que um modelo do tipo treliça é formado no interior da mesma, passando as forças de compressão no betão por entre as fendas até serem suspensas pelos estribos. Este modelo foi mais tarde desenvolvido por Mörsch (1908), com uma enorme campanha experimental, estudando ainda o efeito de apoio direto. Combinando os dois modelos, Mörsch (1908) chega à proposta de outro modelo de treliça, o qual previa já uma inclinação variável das escoras, com valores inferiores a 45°, o que, no entanto, não recomendava na aplicação prática. É Kupfer (1964) que nos anos 60 descobre que a redução da inclinação das escoras poderia levar a uma redução da área total de estribos. Leonhardt e Walter (1966) investigaram a aplicação do sistema da treliça para outros modelos não isostáticos, o que levou ao desenvolvimento dos atuais Modelos de Escoras e Tirantes (MET). Esta investigação foi continuada por Schlaich (1982), que popularizou este método ao sistematizá-lo com uma simplificação, para que a análise se fizesse só em regiões onde a hipótese de Navier-Bernoulli não se aplicasse, calculando o resto do membro com recurso às teorias clássicas da Resistência dos Materiais (Fernandez Ruiz e Muttoni, 2007). Finalmente, já mais recentemente, segundo Filip Niketić (2017), Kuchma e Tjhin propõem uma metodologia, propondo uma ferramenta computacional de desenvolvimento de MET (CAST), com o objetivo de determinar o espaço mínimo necessário para as escoras e os nós críticos (Kuchma e Tjhin, 2001).

1.2. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES

O desenvolvimento dos Modelos de Campos de Tensões (MCT) tem uma origem bastante diferente da gênese empírica e experimental dos MET, com formulação teórica fundada na Teoria da Análise Limite (TAL), baseada na aplicação da Teoria da Plasticidade (TP), e que teve origem nos trabalhos de Ingerlsev, Johansen e Gvozdev, sendo este último o primeiro a elaborar em 1936 uma formulação dos conceitos de superfície de cedência e soluções do limite superior e inferior (Niketić, 2017). No entanto, a primeira aplicação da mesma ao betão armado é feita em 1961 por Drucker que desenvolveu dois

campos de tensões para uma mesma viga de betão armado simplesmente apoiada sujeita a uma carga concentrada e uma distribuída (Fernandez Ruiz e Muttoni, 2007). Drucker fez duas formulações: uma baseada no Teorema do Limite Inferior (TLI), em que os resultados estaticamente admissíveis que respeitem as tensões limite dos materiais estão do lado da segurança e outra baseada o Teorema do Limite Superior (TLS), situação inversa, obtendo a solução exata.

Esta formulação inicial dos MCT pressupunha leis constitutivas rígido-plásticas, ou seja, Modelos de Campos de Tensões Descontínuos (MCTD), que eram resolúveis analiticamente. Mais tarde, com o desenvolvimento do cálculo automático, do Método dos Elementos Finitos (MEF) e da análise não linear de estruturas foi possível desenvolver Modelos de Campos de Tensões Contínuos (MCTC), baseados em leis elasto-plásticas¹.

Os campos de tensões foram mais tarde desenvolvidos em Zurique e Copenhaga. Nielsen e Hoang (2011) propõem uma formulação alternativa da teoria em que o corpo livre de uma viga alta é dividido em triângulos com estados de tensão constantes. Na escola suíça destacam-se os nomes de Thürlimann, Müller, Marti e Muttoni. Várias propostas se sucederam com o objetivo de automatizar o processo, nomeadamente com Dorn et al. (1964), Kumar (1977), Xie e Steven (1994), Biondini et al. (1996) e Kostić (2009). Este processo de automatização foi também desenvolvido por Ruiz e Muttoni que desenvolveram um método baseado em MCTC e recurso a um programa com o MEF (Fernandez Ruiz e Muttoni, 2007), com considerações relativas a Estados Limites Últimos (ULS) e Estados Limite de Utilização (SLS). Hoogenboom propõe um método iterativo que usa modelos lineares e não lineares com vista à otimização da geometria e das armaduras de um elemento de betão armado, baseado na fenda máxima admissível em SLS e ULS. Outra ferramenta computacional é proposta por Lourenço e Almeida na sua abordagem de Métodos de Campos de Tensões Adaptativos que propõe diferentes MCT para diferentes níveis de carga (Almeida, 2010).

1.3. TEOREMA DO LIMITE INFERIOR

Tal como foi referido anteriormente, os MCT são fundados na TAL que se baseia em dois teoremas da TP: o Teorema da Região Inferior (TRI) e o Teorema da Região Superior. Segundo o TRI:

*dada uma estrutura e dado um conjunto de forças exteriores que a solicitam, se for possível atribuir à estrutura uma distribuição de tensões que equilibre a solicitação e se em nenhum ponto for excedida a resistência do material, a estrutura é estável*²

Estão aqui consideradas as condições de equilíbrio e a resistência do material, mas não necessariamente a compatibilidade das deformações. O carregamento dado é um limite inferior à carga de colapso da estrutura (*lower bound*), o que significa que fornece soluções do lado da segurança ou por defeito. O TRI trata de estados de tensão estaticamente admissíveis, daí chamar-se também teorema estático (Matos Fernandes, 2015). Deste facto decorre a utilidade prática dos MCT: ainda que não forneçam necessariamente a solução exata, estando garantido o equilíbrio e respeitadas as resistências dos materiais, permitem alcançar uma solução segura. O facto de as soluções estarem do lado da segurança sempre os tornou métodos bem aceites para as situações de dimensionamento. Para que a TP seja aplicada, é necessário garantir, no entanto, uma plasticidade mínima do material. Sendo que o betão é um material frágil, com pouca resistência à tração, independentemente dos resultados obtidos pelos MCT

¹ A distinção entre estes dois tipos de modelos será abordada nos capítulos 2 e 3

² Adaptado da formulação de Matos Fernandes (2015)

para as soluções de armadura, deve sempre garantir-se a existência de uma armadura mínima para garantir essa ductilidade, evitando fendilhação localizada.

1.4. APLICAÇÃO PRÁTICA

O MET e os MCT são métodos semelhantes e que, de certa forma, espelham o mesmo fenómeno físico de forma diferente. Ambos têm as particularidades de incorporarem implicitamente uma tradução gráfica do problema, que é extremamente elucidativa e intuitiva na compreensão do percurso interno dos esforços, e de admitirem alguma liberdade na conceção do projeto e na disposição das armaduras. Podemos afirmar que os MET são a consideração das forças resultantes dos MCT. Daí ser fácil a passagem de um modelo MCT para um MET. Note-se, no entanto, que um MET pode ser interpretado de formas diferentes, levando a diferentes opções de armadura, o que conduz a diferentes MCT. Os MET podem ter diferentes níveis de refinamento conforme seja desejado apurar com mais detalhe a distribuição de tensões numa determinada região da estrutura. Considerando a aplicação prática, ambos os métodos têm a sua vantagem, sendo o MET de aplicação mais simples e rápida, enquanto que os MCT requerem mais tempo e nem sempre se justificam. Uma forma de atenuar isto é utilizar uma combinação dos dois métodos. O desenvolvimento de MCT é particularmente útil para a pormenorização (largura necessária para as escoras, determinação das tensões nos nós e cálculo de amarrações, pelo que pode ser desenvolvido um MET para o conjunto da estrutura e um MCTC local nas zonas críticas da estrutura, baseado na solução final de armadura (Niketić, 2017). Os MCTC são muito úteis em casos mais complexos em que não é fácil intuir o caminho das tensões e em que a análise por cálculo automático da estrutura pode dar pistas que podem depois ser verificadas analiticamente.

1.5. OBJETIVOS, MÉTODO E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

1.5.1. OBJETIVOS

Os MCTD e o MET são atualmente utilizados no dimensionamento de regiões de descontinuidade de elementos de betão armado e pré-esforçado e incorporados em algumas situações nos códigos atuais. Já os MCTC têm a uma utilização restringida a análises de estruturas existentes e complexas, dada a maior morosidade dos processos de cálculo e modelação, não sendo ainda utilizados com frequência em casos de dimensionamento de estruturas novas. Aquilo que se propõe com esta dissertação é investigar a pertinência do alargamento deste tipo de modelos mais avançados ao dimensionamento corrente, especialmente em estruturas com regiões de descontinuidade. Um segundo objetivo é o de comparar os dois métodos e averiguar a possibilidade de existir uma consideração demasiado conservativa das cargas de rotura nas disposições regulamentais atuais.

1.5.2. METODOLOGIA

Sendo que as análises não-lineares implicam que haja uma solução de dimensionamento prévio, a metodologia utilizada foi realizar análises de casos de estudo de forma expedita e robusta, demonstrando a possibilidade da utilização do método de forma iterativa. Com esse objetivo, foram feitas análises com MCTD e com MCTC de um conjunto de estruturas simples, para diferentes formas de carregamento e modos de rotura, algumas teóricas e outras provenientes da bibliografia e que foram sujeitas a ensaios reais. Foi feita uma comparação com as cargas de rotura obtidas em ensaios laboratoriais nos casos em que tal foi possível. Os MCTC foram realizados com o MEF com recurso ao *software Diana*

Finite Element Analysis (DIANA FEA BV, 2017) e previamente afinados no que toca à robustez e estabilidade recorrendo a uma análise de sensibilidade. As limitações inerentes à interface do utilizador deste software levaram ao desenvolvimento de pequenas rotinas, programas e automatismos, que permitiram alguma dose de automatização dos processos, utilizando *scripts* do próprio programa (ficheiros BAT), folhas de cálculo automatizadas e pequenos programas em linguagem *Python* (Raybaut, 2018), assim como modelos em *Ftool* (Martha, 2017)s. Foi por exemplo criado um automatismo para produzir os diagramas de força-deformação de conjunto de modelos a partir do *Diana*, interpretação e tratamento ficheiros de dados e criação dos diagramas de uma única vez. Posteriormente foram aplicados os métodos apresentados a um caso real, como forma de demonstração de uma possível aplicação prática dos mesmos.

1.5.3. ESTRUTURA

A dissertação estrutura-se em 5 capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução. No capítulo 2 é feita uma exposição dos pressupostos teóricos inerentes aos MCTD. Esta exposição é feita recorrendo à análise de exemplos simples e a comparação com resultados de ensaios presentes na bibliografia.

No capítulo 3 faz-se uma apresentação semelhante para os MCTC, recorrendo aos mesmos exemplos, o que permite uma comparação entre os resultados dos dois métodos. Também aqui haverá lugar a comparação com os valores experimentais.

No capítulo 4 faz-se uma aplicação dos métodos apresentados anteriormente a um caso real, com vista à demonstração da sua validade e verificação da segurança do dimensionamento realizado na altura do projeto. O caso de estudo são as vigas-parede da Estação de Tratamento de Águas Residuais (ETAR) de Sobreiras no Porto, já construída, cuja configuração geométrica com apoios pontuais, solicitação elevada e suspensa, aplicação de pré-esforço, e exposição a um meio altamente agressivo a tornam uma estrutura interessante para pôr em prática vários dos modos de rotura estudados no capítulo anterior.

Finalmente no capítulo 5 são retiradas algumas conclusões relativamente à aplicabilidade dos MCTC, tendo em conta os resultados obtidos nas diversas análises e a comparação com os resultados obtidos com os MCTD.

2

MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES DESCONTÍNUOS

2.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar os Modelos de Campos de Tensões Descontínuos (MCTD), através de exemplos simples, de complexidade crescente, estudando neste e no capítulo seguinte os modos de rotura a serem aplicados ao caso de estudo do capítulo 4. Sempre que possível, os resultados serão comparados com ensaios existentes na bibliografia. Discutir-se-ão ainda as diversas metodologias, recomendações, normativas e disposições regulamentares em vigor.

Começa-se por expor as considerações prévias, nomeadamente as leis constitutivas e outras hipóteses e simplificações do método. Os exemplos permitem ilustrar gradualmente os conceitos de transmissão direta de uma força para um apoio e de transmissão de uma força envolvendo suspensão parcial ou total por armadura. Serão apresentadas as tipologias dos campos de tensões para essas situações e analisados os diferentes modos de rotura, nomeadamente as roturas globais por flexão e por corte, e as várias roturas localizadas nos diferentes tipos de nó. Os campos de tensões serão ilustrados graficamente para melhor perceção dos caminhos das forças e para comparação das topologias dos diferentes exemplos.

Neste capítulo, tratando-se de exemplos de estudo, todas as análises serão feitas por recurso a valores médios, quer das resistências dos materiais, quer das ações. No final serão retiradas algumas conclusões relativas às vantagens e desvantagens da aplicação do método.

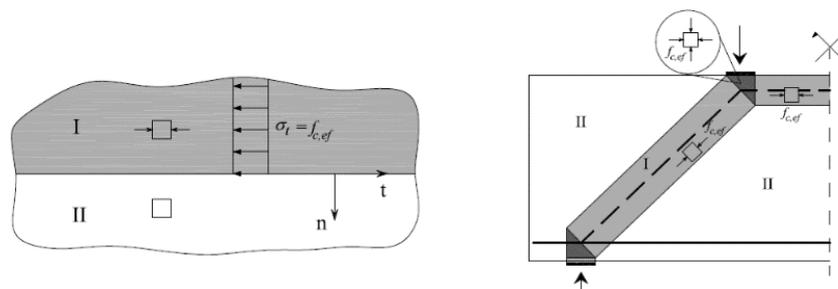


Fig. 1 - Descontinuidade entre zonas comprimidas (I) e zonas sem tensão (II) no betão (Pimentel, 2011)

2.2. LEIS CONSTITUTIVAS E MODOS DE ROTURA

O cálculo através de MCTD, tendo surgido antes dos MCTC, tem solução analítica e isso implica a adoção de um grande número de simplificações. As leis constitutivas a considerar são leis rígido-plásticas, o que implica a assunção de regiões de descontinuidade de tensões (Fig. 1). É por isso que estes se chamam “campos de tensões descontínuos”. Esta hipótese pressupõe uma violação das leis de

compatibilidade de deslocamentos entre estas duas regiões. Para que não sejam violadas as condições de equilíbrio entre as regiões I e II é necessário que seja desprezada a resistência à tração do betão. Estas são soluções possíveis de acordo com o TLI. Portanto, desprezam-se as fases elásticas do betão e do aço e consideram-se leis perfeitamente plásticas, adotando para cada um dos materiais uma resistência plástica equivalente³ (Fig. 2). A escolha da resistência plástica a adotar é um dos pontos mais importantes nos pressupostos deste método. Para o aço é considerada uma resistência plástica com valor igual à tensão de cedência, seja ela de tração ou de compressão. É desprezado o endurecimento existente nesse patamar. Relativamente à resistência à compressão do betão, outro tipo de considerações tem de ser tomado em conta. Este assunto será retomado com mais detalhe na secção 2.3.

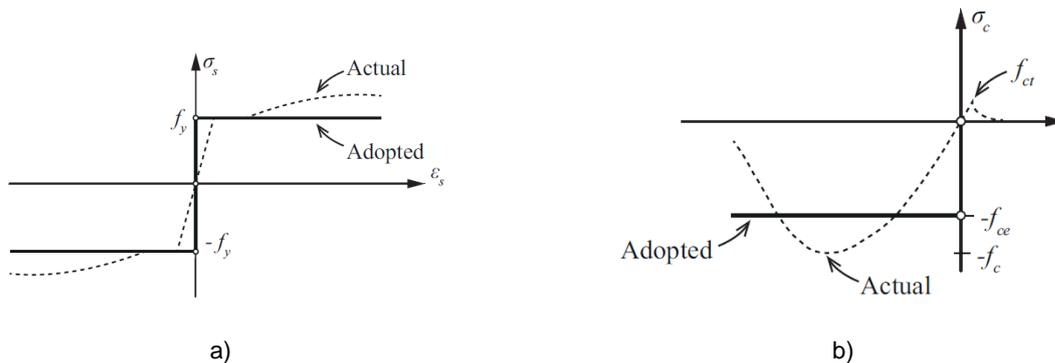


Fig. 2 – Leis constitutivas dos materiais: a) betão b) aço (Niketić, 2017)

De uma forma simplificada, numa estrutura, os seguintes modos de rotura podem ser considerados:

- a) Rotura por flexão;
- b) Rotura por esforço transversor;
 - b1) Esmagamento das escoras;
 - b2) Escorregamento entre fendas;
 - b3) Estricção dos estribos;
- c) Esmagamento dos nós;
- d) Escorregamento da armadura;

No entanto, os modos b2) e b3) não podem ser descritos de forma direta (ou explícita) por este tipo de modelos. Relativamente ao primeiro, sendo desprezada a resistência à tração do betão, o modelo não considera de forma explícita o fenómeno da fendilhação, nomeadamente a direção das fendas e a sua cinemática (abertura e escorregamento). Desta forma, uma rotura por escorregamento ao longo de um conjunto de fendas não é explicitamente reproduzida e tem de ser indiretamente considerada como uma rotura associada ao campo de tensões de compressão por via da adoção de uma resistência reduzida para o betão. Logo, o modelo é incapaz de diferenciar este modo de rotura do modo b1). Também o modo b3) não pode ser descrito nestes modelos, apenas inferido indiretamente. Isto porque a lei constitutiva do aço, tal como visto na secção 2.2, prevê um patamar infinito, não estando prevista uma extensão limite ϵ , e, portanto, a rotura. Estes dois modos de rotura estão assim indiretamente considerados no modo b1), um esmagamento teórico das escoras, estando já incluído na minoração imposta pelo segundo coeficiente de redução (η_ϵ) que será apresentado na secção seguinte (2.3).

³ “Se para um material particular, as deformações plásticas são substancialmente maiores que as deformações elásticas, então as segundas podem ser negligenciadas” (tradução livre). Esta é uma simplificação grande e pode ser unicamente justificada se as extensões totais são muito superiores à extensão limite elástica. Esta simplificação é maior para o caso do betão do que para o caso do aço (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997).

2.3. RESISTÊNCIA PLÁSTICA DO BETÃO

Ao contrário do que acontece no caso do aço, para o qual a aproximação feita no ponto anterior não constitui uma simplificação muito significativa, o betão é um material frágil, pelo que a decisão por uma resistência equivalente tem implicações maiores. A fragilidade do betão é uma característica que é tanto mais relevante quanto mais elevada for a sua classe de resistência (Fig. 3). Este facto deve ser tomado em consideração na adoção de um valor para a resistência plástica, não sendo sempre adotada a tensão de pico na rotura, mas um valor que pode ser inferior a esse (Fig. 4).

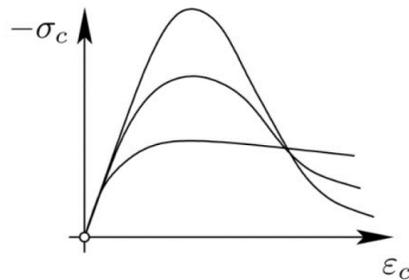


Fig. 3 - Aumento da fragilidade com a classe de resistência do betão (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)

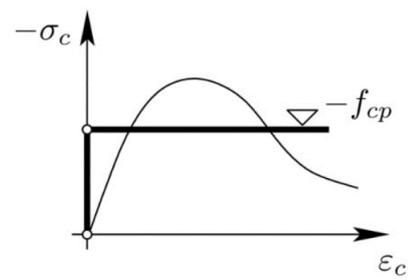


Fig. 4 - Resistência plástica do betão (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)

Para tomar em consideração esta questão, têm sido desenvolvidas ao longo do tempo diferentes propostas, por diferentes autores. Estas são normalmente baseadas em ensaios com condições específicas mais ou menos generalizáveis aos estados de tensão encontrados em elementos estruturais comuns. Os vários autores propõem que se aplique à resistência à compressão normalizada nos ensaios um coeficiente redução (η_f), dando origem a uma resistência plástica equivalente. Este coeficiente é normalmente mais gravoso para classes de resistência mais elevadas, podendo ser unitário para resistências baixas (Fig. 5).

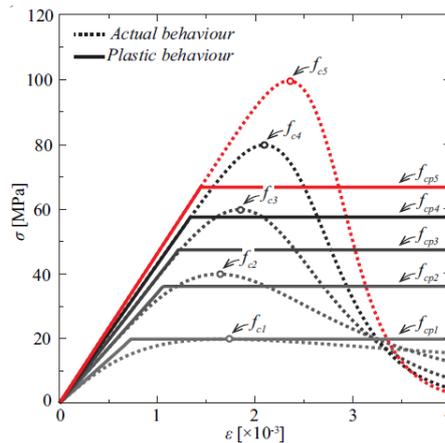


Fig. 5 - Resistência plástica para diferentes classes de resistência (Niketic, 2017)

Existem diversas propostas na bibliografia, tendo havido uma evolução nas mesmas com a evolução dos estudos e ensaios que foram sendo feitos ao longo das últimas décadas. Na Fig. 6 podemos observar uma comparação entre algumas das propostas mais relevantes. Note-se que algumas propostas, como é o caso da de Aurello Muttoni e Bruno Thrülimann (1997) e também do Model Code 2010

(FIB, 2013), que consideram mesmo que, para classes de resistência baixa, o valor do coeficiente deverá ser unitário, o que significa que não há lugar a redução do valor da resistência do betão devido à fragilidade.

$$\bullet \eta_f = \frac{3.2}{\sqrt{f_c}} \text{ (Exner, 1979)}^4 \quad (2.1)$$

$$\bullet \eta_f = \left(\frac{20}{f_c}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.0 \text{ (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997)} \quad (2.2)$$

$$\bullet \eta_f = \frac{5.8}{\sqrt{f_c}} \leq 0.9 \text{ (Zhang e Hsu, 1998)}^5 \quad (2.3)$$

$$\bullet \eta_f = 1 - \frac{f_c}{250} \text{ (IPQ, 2010)} \quad (2.4)$$

$$\bullet \eta_f = \left(\frac{30}{f_c}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.0 \text{ (FIB, 2013)} \quad (2.5)$$

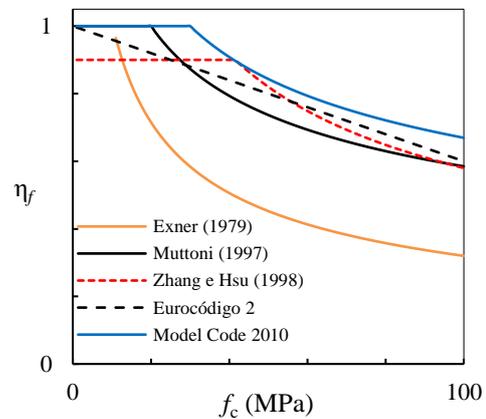


Fig. 6 - Coeficiente de redução da resistência à compressão do betão devida à fragilidade

Paralelamente a este, outro coeficiente de redução deve ainda ser considerado, para tomar em consideração outras questões, nomeadamente a espessura do recobrimento, diâmetro dos estribos, mas sobretudo o estado de fendilhação do betão originado por extensões transversais (η_ϵ). Este é não só o coeficiente mais gravoso, mas também o mais complexo de determinar. Para este coeficiente existem também variadas propostas na bibliografia. Na Fig. 7 apresentam-se algumas das mais relevantes. Nas expressões apresentadas, θ refere-se ao ângulo de inclinação das escoras de betão com a horizontal, ϵ_0 refere-se à tensão de compressão dos ensaios com cilindros, ϵ_1 corresponde à tensão principal de tração e ϵ_3 corresponde à tensão principal de compressão.

Como se pode ver pelas expressões, em algumas propostas o coeficiente, é uma constante enquanto noutras é variável. Isto significa que, no primeiro caso, se considera uma resistência plástica constante em toda a peça e em todos os momentos do carregamento, enquanto que, no segundo, a resistência do betão varia com as extensões ou com o ângulo das escoras do betão. No entanto, para a resolução analítica dos problemas (e, portanto, para aplicação dos MCTD e dos MET) é comum admitir que a resistência plástica do betão é uma constante, sendo que em certas situações é possível não o fazer (ver secção 2.6.5). Sendo assim, a metodologia do EC2 (IPQ, 2010) e ainda a análise de primeiro nível do MC2010, que será a base do próximo EC2 (FIB, 2013), preveem a adoção de um valor fixo para este coeficiente.

⁴ Citado por Nitetić (2017)

⁵ Citado por Pimentel (2011)

- $\eta_\varepsilon = \frac{3.6}{1+2\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_0}} \leq 1$ (Collins, 1978)⁶ (2.6)
- $\eta_\varepsilon = \frac{1}{0.8+170\varepsilon_1} \leq 1$ (Vecchio e Collins, 1986)⁷ (2.7)
- $\eta_\varepsilon = \frac{0.9}{\sqrt{1+250\varepsilon_1}}$ (Belarbi e Hsu, 1995)⁴ (2.8)
- $\eta_\varepsilon = \frac{1}{1.08+81\varepsilon_1}$ (Kaufmann, 1998)⁵ (2.9)
- $\eta_\varepsilon = 0.67-14 \varepsilon_1$ (Zwicky, 2000)⁴ (2.10)
- $\eta_\varepsilon = \frac{1}{0.95+0.15\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$ (Vecchio, 2000)⁸ (2.11)
- $\eta_\varepsilon = 0.5(1+\sin^2 \theta)$ (Hars, 2006)⁴ (2.12)
- $\eta_\varepsilon = \{0.8; 0.6; 1 + 4|\sigma_1|\}$ (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997)⁹ (2.13)
- $\eta_\varepsilon = \{0.8; 0.6; 0.4; 1 + 4|\sigma_1|\}$ (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)¹⁰ (2.14)
- $\eta_\varepsilon = 0.6$ (IPQ, 2010)¹¹ (2.15)
- $\eta_\varepsilon = \left\{0.55; \frac{1}{1.2+55\varepsilon_1} \leq 0.65\right\}$ (FIB, 2013)¹² (2.16)

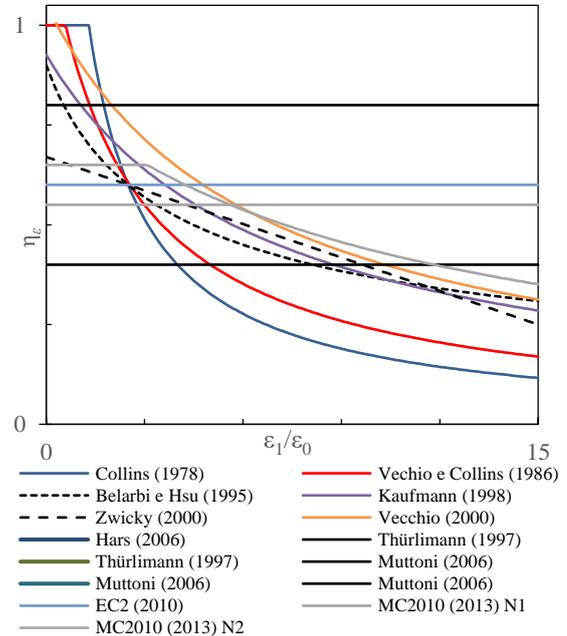


Fig. 7 - Coeficiente relativo às extensões transversais de acordo com diversos autores

Outras propostas consideram uma situação simplificada de compromisso, como é o caso da de Thürlimann et al. (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997), Muttoni e Ruiz (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006). Estas pressupõem um valor fixo para este coeficiente, mas que depende do estado de tensão e direção da armadura transversal. Permitem a resolução analítica com um valor constante, mas que não é único, sendo previamente selecionado num conjunto de valores tabelados. Consideram ainda o efeito favorável do confinamento na resistência à compressão do betão, propriedade que não é considerada noutros métodos. É o mesmo princípio que subjaz ao EC2 (IPQ, 2010) e MC2010 (FIB, 2013) ao permitirem, no caso de análises pelo MET, valores mais elevados desse coeficiente de redução, dependendo do tipo de nó considerado.

⁶ *Compression Field Theory* - citado por Nitetić (2017)

⁷ *Modified Compression Field Theory* - citado por Nitetić (2017)

⁸ *Disturbed Stress Field Model* - citado por Nitetić (2017)

⁹ Valores fixos dependendo da tipologia do carregamento

¹⁰ Valores fixos dependendo da tipologia do carregamento – ver Fig. 8

¹¹ Valor fixo com exceções no caso da verificação da segurança de nós pelo MET

¹² Valor fixo para análise nível 1, segunda expressão para análise de nível 2

TIPO DE SOLICITACIÓN	f_{ce}	APLICACIONES
Hormigón confinado activa o pasivamente sin fisuración	$f_{cp} + 4 \sigma_{lat} $	<ul style="list-style-type: none"> • Compresión triaxial • Confinamiento lateral • Introducción de cargas concentradas
Hormigón sin fisuración en compresión uniaxial	f_{cp}	<ul style="list-style-type: none"> • Compresión simple con armadura de control de fisuración • Columnas, muros, vigas en flexión
Hormigón fisurado con deformación lateral impuesta	$0.8f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> • Muros • Losas • Vigas con deformación lateral
Hormigón fisurado con deformación diagonal impuesta	$0.6f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> • Muros • Losas con torsión importante • Vigas con cortante o torsión
Hormigón fisurado con armadura plastificada en dos direcciones	$0.4f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> • Vigas o muros con armadura longitudinal y cercos plastificados
Hormigón sin control de abertura de fisuras	Teoría de la plasticidad no aplicable	<ul style="list-style-type: none"> • Elementos con armadura mínima insuficiente • Punzonamiento

Fig. 8 – Propostas de coeficientes fixos adaptáveis a diferentes situações de solicitação da peça em que $\eta_\varepsilon = \frac{f_{ce}}{f_{cp}}$ (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)

No entanto, há uma consequência da imposição de uma resistência à compressão constante: ela implica paralelamente a fixação de limites aos valores do ângulo das escoras, pois não é possível garantir a segurança para qualquer valor desse ângulo. Isto é, o valor dos coeficientes é determinado pressupondo uma orientação das escoras de betão que varia dentro de valores pré-determinados, nomeadamente a inclinação máxima de 45° e uma inclinação mínima que, para o valor fixo do coeficiente é determinada em ensaios. Para esta inclinação mínima é considerado, por exemplo no Eurocódigo 2, o valor de 21.80° (IPQ, 2010). Concluindo, a resistência plástica equivalente do betão é determinada pela expressão 2.17.

$$f_{c,eff} = \eta_f \times \eta_\varepsilon \times f_c \tag{2.17}$$

Neste capítulo, para os dois coeficientes de redução serão adotados os valores previstos no Model Code 2010 (nível de análise 1), com a exceção da subsecção 2.6.5, onde adicionalmente se utilizará a proposta de Kaufmann. Conservativamente, não será considerada a contribuição do confinamento do betão, quando tal existir.

2.4. TOPOLOGIA DOS CAMPOS DE TENSÕES

Como foi apresentado na secção 2.2, os campos de tensões descontínuos assumem linhas de descontinuidade ao longo das linhas delimitam os campos de tensão, isto é, que separam as regiões comprimidas.

das das regiões sem tensão. Os campos de tensões podem ser campos de compressão ou de tração (neste caso só nas armaduras, sendo que, conforme referido na secção 2.2, a resistência do betão à tração é desprezada) e podem ter diversas topologias. O caso mais simples é o de uma escora prismática, como a que foi apresentada na Fig. 1 (ver secção 2.2). Os limites superior e inferior da escora têm as mesmas dimensões e são perpendiculares ao eixo da mesma. Dentro da área comprimida (I) as tensões principais são todas paralelas, tomando a direção do eixo da escora. Os limites laterais da escora são paralelos ao eixo e as tensões aplicadas nos extremos são constantes. Considerando a largura da escora l e a respetiva espessura e , a tensão na escora é constante e dada por:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{l \times e} \quad (2.18)$$

Tomando em consideração agora o campo de tensões apresentado na Fig. 9 a), os limites inferior e superior já não são perpendiculares à direção das tensões principais, pelo que é necessário que surjam tensões tangenciais. As tensões nos extremos são ainda constantes e os limites superior e inferior têm a mesma dimensão. Este é um campo de tensões em paralelogramo.

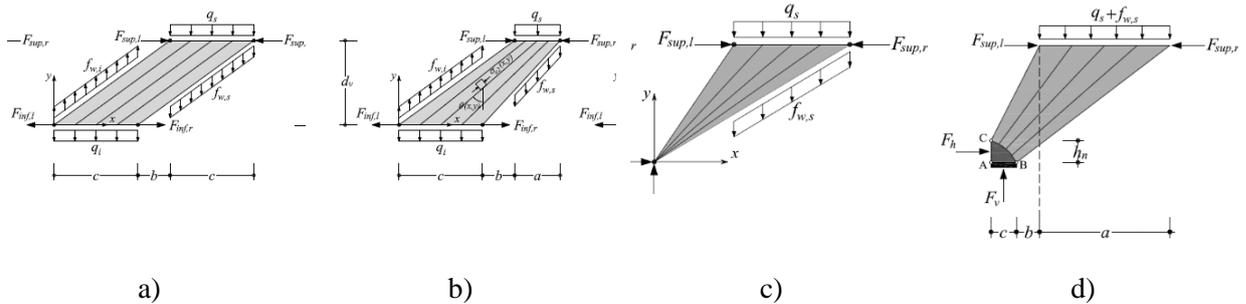


Fig. 9 – Diferentes topologias de campos de tensões (Pimentel, 2011): a) campo de tensões em paralelogramo b) leque centrado com a intersecção fora da estrutura c) leque centrado com intersecção dentro da estrutura d) leque descentrado

As tensões principais continuam a ser paralelas entre si e a ter a direção do eixo da escora. Apesar de terem todas componente horizontal e vertical, a tensão ao longo de uma transversal ao eixo da escora é constante, e é constante também ao longo do eixo da escora. Considerando θ o ângulo das tensões com a horizontal, o valor das tensões numa linha transversal ao eixo da escora pode ser agora obtido em função da medida c :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{l \times e} = \frac{F_c}{c \sin \theta e} \quad (2.19)$$

Esta expressão pode ser reescrita em função da resultante de q , que denominamos V . Sendo que V resulta da projeção vertical da força na escora ($V = F_c \sin \theta$), então,

$$\sigma_c = \frac{V}{c \sin^2 \theta e} = \frac{V}{c e} (1 + \cot^2 \theta) \quad (2.20)$$

Se considerarmos a Fig. 9 b), os limites superior e inferior do campo de tensões já não têm a mesma dimensão, o que implica que as tensões principais no interior do campo de tensões não sejam paralelas. O seu ângulo varia e por isso esta é chamada uma escora em leque. Como os limites laterais da escora se encontraram num ponto (no exterior da estrutura) diz-se que é uma escora em leque centrado. Para que haja equilíbrio (e a resultante da carga superior seja igual à da inferior), as tensões superiores e inferiores têm de ser diferentes ($q_s > q_i$). Isto significa que a tensão ao longo do eixo da escora não seja constante, aumentando gradualmente de baixo para cima, com a variação do valor de c entre o mínimo e o máximo. Sendo que as linhas de ação da escora não são paralelas, o ângulo com a horizontal (θ) não é constante e, portanto, a tensão também não é constante ao longo de uma linha horizontal, porque esta é função de $\cot^2 \theta$ ou $\text{sen}^2 \theta$. Essa variação não é linear. As escoras prismáticas podem assim ser consideradas um caso particular das escoras em leque.

Se o ponto onde os limites da escora se encontram estivesse no interior da estrutura, a escora teria uma forma triangular, tal como apresentado na Fig. 9 c). Como vimos, se a resultante superior tem de equilibrar a inferior, à medida que c diminui, q_i tem de aumentar. Isto significa que a escora triangular teria no nó inferior uma tensão infinita, o que na realidade não existe. Portanto, este tipo de escora é meramente um modelo teórico que não pode ser aplicado, sendo para isso utilizado alternativamente o tipo apresentado seguidamente.

Se agora considerarmos a Fig. 9 d), percebemos que no limite inferior da escora existem tensões com duas direções (horizontal e vertical), o que leva a que as direções principais de tensão na escora não se encontrem todas num ponto. Isto é, a escora não é centrada. Surge assim uma região (ABC) biaxialmente comprimida, normalmente denominada nó. Demonstra-se analiticamente que a fronteira BC não é reta, mas sim uma curva. A posição do centro do leque varia ao longo de uma parábola (Fig. 10a) e as tensões ao longo de uma “corda radial” variam hiperbolicamente (Almeida, 2010). Esta situação surge sempre que há um apoio ou uma carga concentrada, já que estes têm dimensões finitas. A representação triangular do nó na Fig. 1 é, assim uma simplificação.

É possível determinar analiticamente a forma destas curvas (Almeida, 2010), mas na prática há pouca vantagem em fazê-lo. Na realidade aquilo que é importante para a segurança das estruturas é verificar a tensão na zona mais estreita da escora. Sendo assim, é usual é linearizar a fronteira, considerando o nó triangular. A diferença no cálculo é grande e o rigor perdido é mínimo. Uma outra aplicação para este tipo de escora, é, se considerarmos que as duas escoras não têm a mesma espessura. Sendo assim, um dos nós será maior que o outro, o qual terá uma fronteira também curva, mas com a concavidade invertida relativamente ao primeiro (fig. 11b).

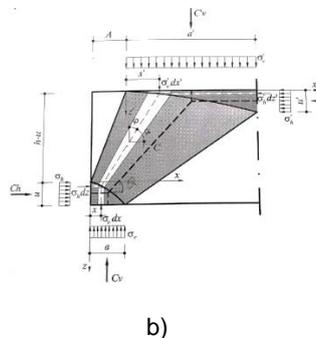
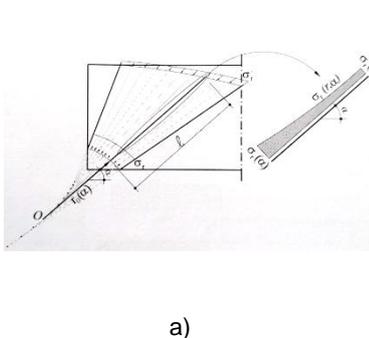


Fig. 10 – Cálculo das tensões no interior de uma escora em leque (Almeida, 2010)

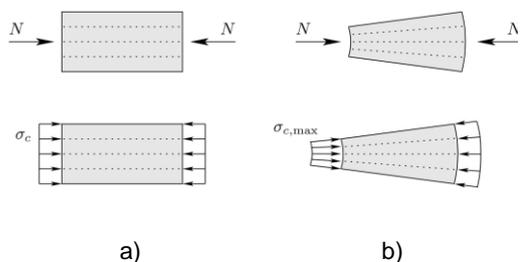


Fig. 11 - Tipologias de escoras: a) prismática b) em leque (Muttoni, Niketić e Fernández Ruiz, 2006)

2.5. VERIFICAÇÃO DOS NÓS

2.5.1. ESMAGAMENTO DO BETÃO

Os nós que surgem no encontro das escoras podem ser de quatro tipos (Fig. 12):

- Nós CCC – nó comprimido sem tirantes (intersecção de 3 escoras ou mais)
- Nós CCT – quando numa das direções existe armadura tracionada
- Nós CTT – quando existe armadura tracionada em duas direções
- Nós TTT – nós onde só existe tração

TIPO	CONCENTRADO	DISTRIBUIDO
CCC		
CCT		
CTT		
TTT		

Fig. 12 - Tipologia possível dos nós (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)

No caso dos nós CCT e CTT, o nó pode ser designado concentrado ou distribuído, conforme a ancoragem das armaduras seja feita após o nó ou no seu interior (ver subsecção 2.5.2). A forma de ancoragem determina a fronteira dos campos de tensões e consequentemente os tipos de nó e de escora. Como apresentado na Fig. 13, a forma de ancoragem das armaduras pode dar origem a um nó concentrado, caso a força que equilibra a tração se encontre exteriormente ao nó, originando-se assim uma escora em leque descentrado (ver secção 2.4) Caso esta seja distribuída, dará origem a uma escora prismática ou em leque centrado e um nó distribuído.

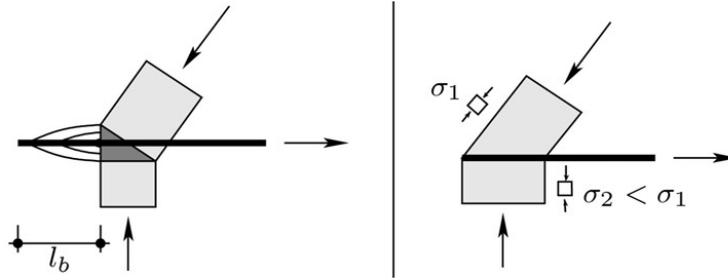


Fig. 13 - Nó concentrado e nó distribuído (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006)

Para a verificação do equilíbrio nos nós é necessário conhecer a distribuição das tensões no interior das escoras. Quando as escoras são prismáticas, é fácil verificar as tensões à entrada do nó, pois estas são constantes. No entanto, no caso de escoras em leque descontínuo, por exemplo, em que a tensão não é uniforme na fronteira entre o nó e a escora, tal verificação é mais complexa (Almeida, 2010). A opção normalmente tomada para simplificação deste problema é considerar uma distribuição uniforme de tensões centrada na escora. Verifica-se assim a tensão não na fronteira do nó, mas sim à entrada do nó, o que é conservativo.

Ao distribuir uniformemente a tensão de forma centrada no nó, admite-se a verificação da tensão média em toda essa dimensão. Sendo que a tensão ao longo da fronteira varia, haverá pontos em que esta é superior a essa tensão média, o que levanta a hipótese de haver pontos em que a resistência do material não é respeitada. No entanto, considera-se que a eventual plastificação de um ponto localizado da escora, não é condição para a rotura da mesma.

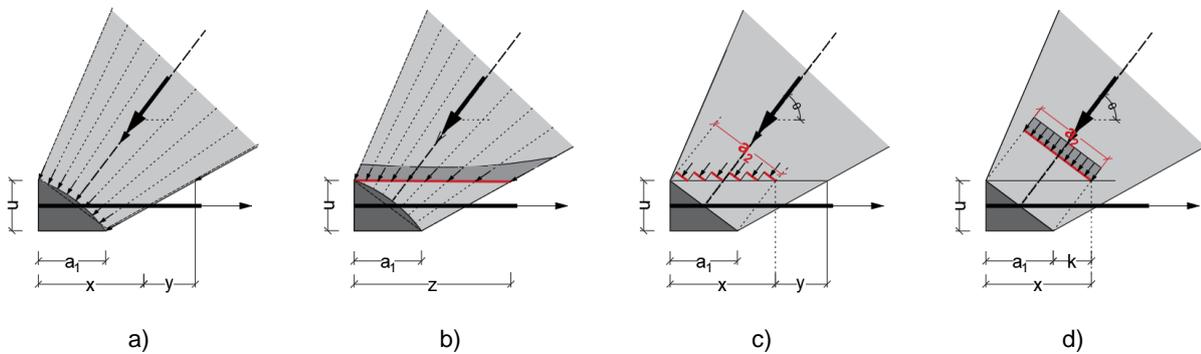


Fig. 14 – Metodologia das escoras em leque à entrada do nó, considerando tensão uniforme centrada na escora

Na Fig. 14 apresenta-se a forma como são consideradas as tensões à entrada do nó. Sendo estas variáveis ao longo da fronteira z (Fig. 14b), em vez de serem determinadas analiticamente, são consideradas uniformes ao longo da menor dimensão (caso mais gravoso) centrada na escora (a_2 , Fig. 14c). Isso implica desprezar o troço y da escora, que na realidade também resiste às tensões atuantes, mas é a única forma de garantir o equilíbrio, para que sejam consideradas tensões constantes. É a mesma consideração feita na Fig. 14d, simplesmente representada de outro modo. A determinação da dimensão a_2 , é possível ser feita por considerações geométricas em função da altura u e do ângulo da escora com a horizontal θ (ver Fig. 14d):

$$\sin \theta = \frac{a_2}{x} \Leftrightarrow a_2 = x \sin \theta \quad (2.21)$$

$$x = a_1 + k \Leftrightarrow a_2 = (a_1 + k) \sin \theta \quad (2.22)$$

$$\tan \theta = \frac{u}{k} \Leftrightarrow k = \frac{u}{\tan \theta} \quad (2.23)$$

$$a_2 = \left(a_1 + \frac{u}{\tan \theta} \right) \sin \theta = a_1 \sin \theta + \frac{u}{\tan \theta} \sin \theta \quad (2.24)$$

$$a_2 = a_1 \sin \theta + u \cos \theta \quad (2.25)$$

É esta a metodologia aplicada nos códigos existentes (Fig. 15b). Sendo que o estado de tensão do betão na zona do nó varia consoante a existência de trações, alterando a sua resistência à compressão, conforme exposto na secção 2.3, os métodos analíticos para a verificação da segurança dos nós propõem a aplicação de diferentes valores para a resistência plástica do betão em cada tipo de nó. Sendo assim, por exemplo, o EC2 (IPQ, 2010) propõe os seguintes valores para o coeficiente η_ε apresentado na expressão 2.17:

- Nós sem trações: $\eta_\varepsilon = k_1 = 1.00$ (Fig. 15a)
- Nós com tração numa direcção: $\eta_\varepsilon = k_2 = 0.85$ (Fig. 15b)
- Nós com tração em duas direcções: $\eta_\varepsilon = k_3 = 0.75$ (Fig. 15c)

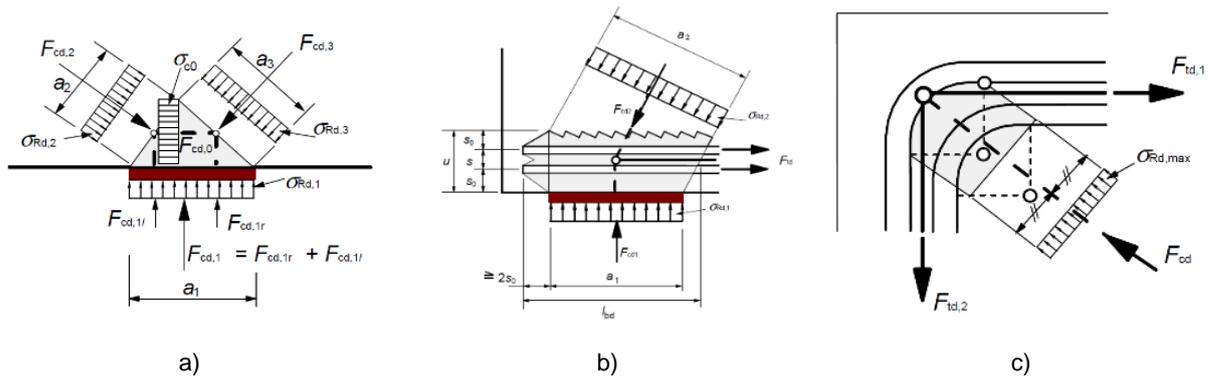


Fig. 15 – Verificação das tensões à entrada de nós (IPQ, 2010): a) CCC b) CCT c) CTT

2.5.2. ANCORAGEM DAS ARMADURAS

Quando existem trações (nós CTT ou CCT), para que o nó esteja em equilíbrio, é necessário que exista uma força que compense o esforço de tração exercido pela armadura. Caso contrário, dá-se o escorregamento da armadura por insuficiente transferência de tensões do aço para o betão. Dois tipos de ancoragem da armadura podem ser considerados: uma ancoragem concentrada ou uma ancoragem por aderência. A primeira implica uma fixação do varão a uma chapa que exercerá uma tensão normal sobre o betão, equilibrando o nó (Fig. 16a). O segundo caso é uma ancoragem por aderência, onde a ação das tensões normais na armadura corresponde uma reação em tensões tangenciais na zona do nó que tem de a igualar para evitar o escorregamento entre o aço e o betão. Este é um modelo teórico, uma vez que hoje em dia já não são usados varões lisos mas rugosos. Na realidade trata-se de um fenómeno de transmissão de tensões normais entre as nervuras do varão e o betão envolvente: um conjunto de amarrações pontuais. No entanto, este modelo, tendo em conta as considerações feitas nos coeficientes aplicados traduz uma aproximação aceitável ao fenómeno e é a base das atuais disposições regulamentares (IPQ, 2010). Analiticamente a determinação do comprimento necessário para

amarração é correntemente realizada com base na seguinte expressão, deduzida igualando a força no varão à força transmitida pelo contacto entre este e o betão ao longo da superfície exterior do mesmo:

$$F_s = F_c \Leftrightarrow \frac{\sigma_s \pi \phi^2}{4} = f_b \pi \phi l_b \Leftrightarrow l_b \geq \frac{\phi \sigma_s}{4 f_b} \quad (2.26)$$

A aplicação deste tipo de método pressupõe sempre a verificação desta hipótese, uma vez que uma amarração insuficiente e conseqüente escorregamento levam a uma redução da carga de rotura, por não se conseguirem atingir as tensões de cedência na armadura longitudinal. Este fenómeno acontece no caso de não ser proporcionado comprimento de amarração suficiente. A tensão tangencial de transferência entre o betão e o aço tem leis constitutivas específicas. É comum adotarem-se leis rígido-plásticas (Fig. 16c).

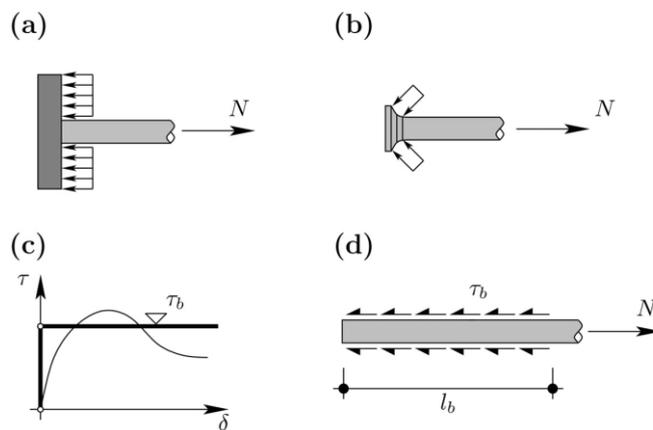


Fig. 16 - Ancoragem das armaduras (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006): a) e b) ancoragens concentradas c) lei constitutiva para a tensão tangencial de aderência d) ancoragem por aderência e comprimento de amarração (l_b)

2.6. EXEMPLOS

Vistos os pressupostos principais da metodologia dos MCTD, neste ponto irão ser analisados alguns casos, de complexidade crescente que exemplificam os conceitos apresentados. Pretende-se avaliar o desempenho dos MCTD com a resistência plástica do betão dada pela expressão 2.17.

2.6.1. CARGA CONCENTRADA EM APOIO DIRETO

Considere-se uma viga alta, simplesmente apoiada, sujeita a duas cargas concentradas, de acordo com a figura Fig. 17. Na Fig. 18 apresenta-se o esquema estrutural da viga e os diagramas de momentos flectores e de esforço transverso, respondendo a um modelo de peça linear.

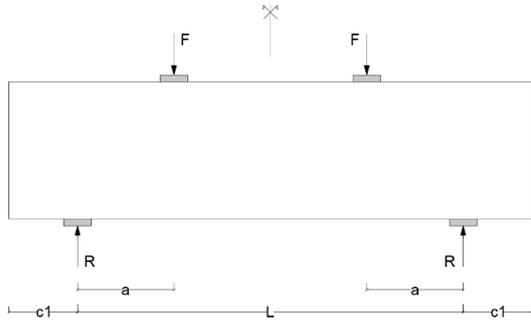


Fig. 17 – Viga simplesmente apoiada sujeita a cargas concentradas

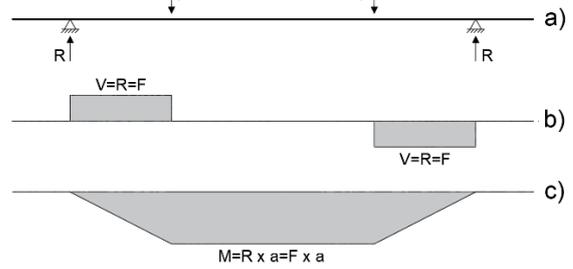


Fig. 18 – Diagramas: a) esquema estrutural b) esforço transverso c) momentos fletores

Em alternativa, podemos representar esta estrutura por um estado plano de tensão. Para isso, e sendo que a configuração geométrica, os carregamentos e os apoios são simétricos, ela pode ser substituída por uma estrutura equivalente simplificada, representando apenas metade da viga e restringindo os deslocamentos horizontais no seu eixo de simetria e os deslocamentos verticais no apoio (Fig. 19).

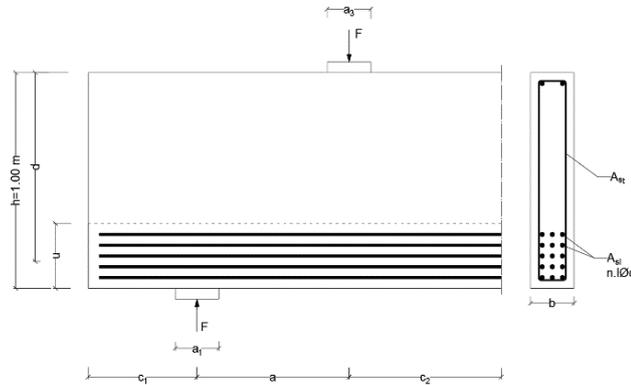


Fig. 19 - Simplificação da estrutura inicial

Se a dimensão a da figura for suficientemente reduzida em relação à altura da viga, pode ser assumido que força aplicada superiormente é conduzida diretamente para o apoio. Aplicando o Método das Escoras e Tirantes, é assim formada uma única escora de compressão (C_2) entre a carga aplicada e a reação de apoio (Fig. 20). A inclinação da escora implica um desvio da direção das forças verticais F e R . Para garantir o equilíbrio estático nos pontos onde esse desvio é feito (pontos A e B) é necessário surgir uma escora (C_1) e um tirante (T) horizontais para anularem as componentes horizontais da força de compressão na escora em ambos os pontos.

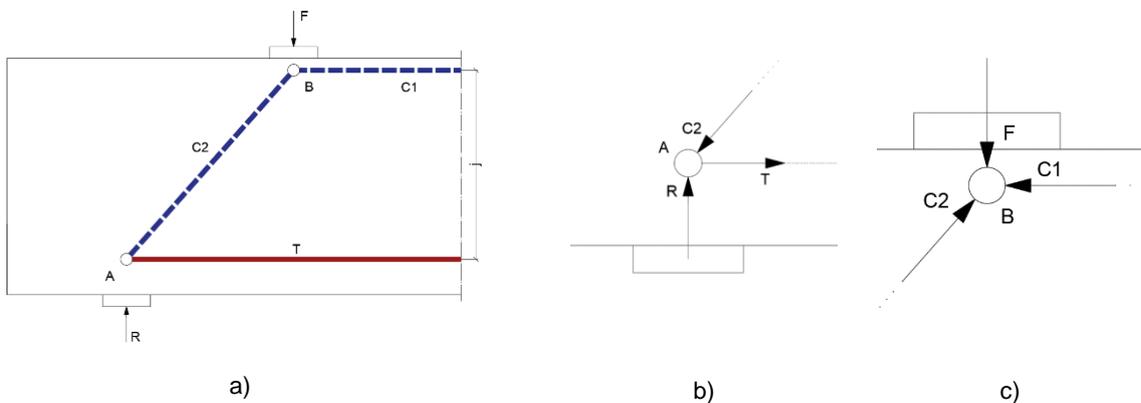


Fig. 20 – MET para carga diretamente apoiada: a) modelo global b) equilíbrio do nó A c) equilíbrio do nó B

Assumindo valores para todos os parâmetros geométricos e dos materiais, é possível determinar a carga que, aplicada em B, leva a estrutura ao colapso. Na Tabela 1 apresentam-se esses parâmetros.

Tabela 1 – Materiais, parâmetros geométricos e características da armadura longitudinal

Materiais		Parâmetros geométricos				Armadura longitudinal	
$\sigma_s=f_y$	500 MPa	h	1.00 m	c ₂	0.70 m	Nº camadas	5
$\sigma_c=f_c$	30 MPa	b	0.20 m	c ₁	0.40 m	Varões/cam	2
f _{ctm}	2.9 MPa	u	0.30 m	a ₁	0.20 m	ϕl	12 mm
recob	3.5 cm	d	0.85 m	a ₃	0.20 m	A _{s,l}	11.31 cm ²
ϕt	8 mm	a	0.70 m			d _{livre} ¹³	9.8 cm

Conhecida a área de aço (A_s), sendo $\sigma_s=f_y$, podemos determinar o valor da força no tirante T e, consequentemente, na escora C_1 ($T=C_1$). Admitindo uma distribuição retangular de tensões e sendo $\sigma_c=f_c$, podemos determinar a altura da escora C_1 (a_4), com a qual podemos determinar o comprimento do braço do momento fletor (j) provocado pelo binário T/C_1 que corresponde ao momento interno da viga a meio vão. Esse momento é conhecido (Fig. 18), podendo ser determinado pela análise global da viga ($M=R.a=F.a$). Conhecendo o momento e o braço é possível determinar a força F (e a reação R) na rotura ($F=R=M/j$). Na Tabela 2 apresentam-se os valores obtidos para os referidos parâmetros.

Tabela 2 – Resultados para carga concentrada em apoio direto

T	565.49	kN
C ₁	565.49	kN
a ₄	0.094	m
j	0.803	m
M	454.02	kNm
F_v	648.59	kN
a ₂	0.348	m
a ₅	0.213	m
C ₂	860.49	kN

Em alternativa, e por mera curiosidade, o momento resistente da secção poderia ainda ser obtido recorrendo ao cálculo da resistência da secção pelas equações de equilíbrio para flexão simples e admitindo a secção fendilhada e uma distribuição de tensões parábola-retângulo, tal como previsto pelo EC2 (Fig. 21), chegando-se a valores muito semelhantes. O resultado apresenta-se na Tabela 3.

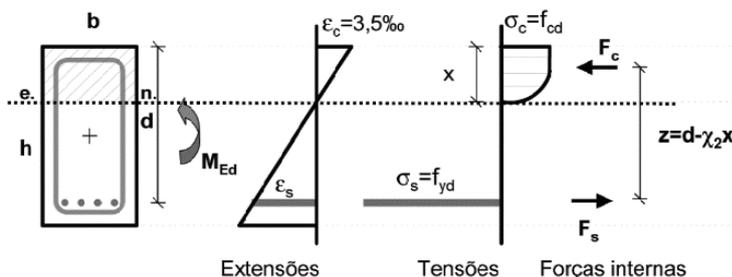


Fig. 21 - Cálculo à rotura de uma secção sujeita a flexão simples fendilhada (Faria e Pimentel, 2017)

¹³ Distância livre entre varões, medida na horizontal na secção transversal recta da peça

Tabela 3 – Resultado do cálculo à flexão do momento resistente

$F_s=F_c$	565.50 kN
ε_c	3.5‰
χ_1	0.810
χ_2	0.416
x	0.1164 m
M	453.30 kNm

O MET está assim completamente calculado. A partir do MET é possível construir o MCTD. Para isso, é necessário determinar alguns parâmetros adicionais, nomeadamente as restantes dimensões dos nós (a_2 e a_5). Sendo o braço do momento interno da viga conhecido (distância entre T e C_1), assim como a , é possível calcular o ângulo da escora com a horizontal (θ). Conhecido o ângulo da escora é possível determinar as duas dimensões em falta ($a_2 = a_1 \cdot \sin \theta + u \cdot \cos \theta$ e $a_5 = a_3 \cdot \sin \theta + a_4 \cdot \cos \theta$). O ângulo da escora permite ainda determinar a intensidade da força de compressão na mesma ($C_2 = \frac{F_v}{\sin \theta}$). Os valores apresentam-se na Tabela 2. É agora possível obter a topologia do campo de tensões e uma geometria simplificada dos nós (Fig. 22). Seguiu-se o exposto na secção 2.4 e considerou-se a fronteira dos nós simplificada como sendo reta.

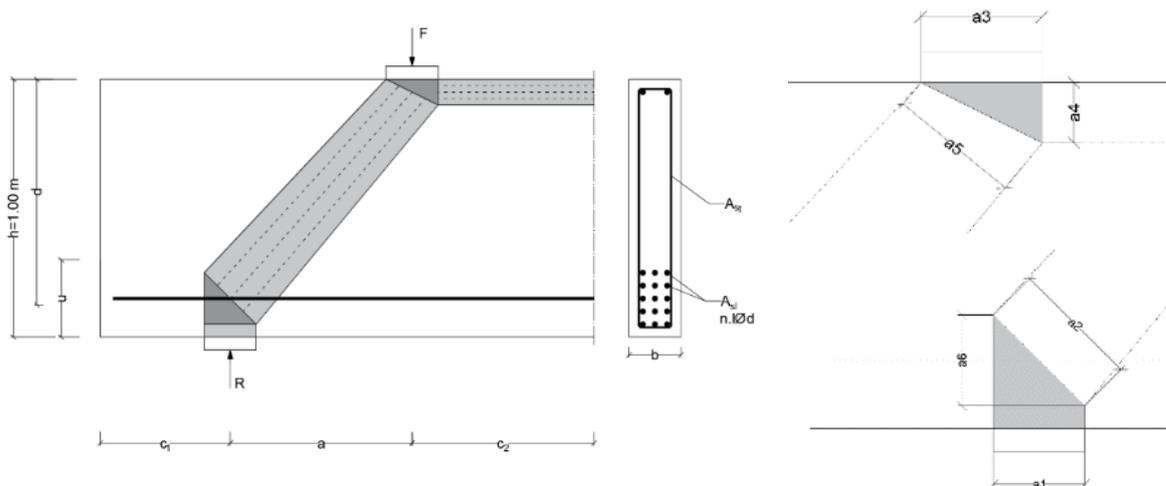


Fig. 22 - Modelo de campos de tensão descontínuos para carga concentrada em apoio direto

Com a geometria dos nós podemos fazer a verificação das tensões atuantes e resistentes nos mesmos. Para tal foi seguida a metodologia apresentada no EC2 (IPQ, 2010) ou do MC2010 (FIB, 2013) em que as tensões são verificadas à entrada dos nós. Para os dois tipos de nós existentes na estrutura, temos de considerar diferentes coeficientes η_ε diferentes, nomeadamente:

$$\eta_\varepsilon = k_2 = 0.85 - \text{Nó A} \quad (2.27)$$

$$\eta_\varepsilon = k_1 = 1.00 - \text{Nó B} \quad (2.28)$$

Seguindo a metodologia proposta pelo MC2010 (FIB, 2013) para os valores da tensão resistente plástica efetiva no betão de acordo com o tipo de nó obtêm-se os valores apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Tensões nos nós - carga concentrada em apoio direto

Nó	fc,eff	Face		Tensão		
Nó A	25.50	Apoio	a ₁	σ ₁	16.21	MPa
		Escora C ₂	a ₂	σ ₂	12.37	MPa
Nó B	30.00	Apoio	a ₃	σ ₃	16.21	MPa
		Escora C ₁	a ₄	σ ₄	30.00	MPa
		Escora C ₂	a ₅	σ ₅	15.25	MPa

Sendo assim, podemos concluir que, em todos os nós, a tensão atuante é inferior à resistente, o que implica que a estrutura esteja em segurança. O cálculo verifica que a tensão em a₄ é exatamente igual à resistente, o que confirma o postulado inicialmente. Isso significa que a rotura está iminente nesta face. Ou seja, a estrutura terá uma rotura por flexão. Está implícita, no entanto, a simplificação de que a distribuição das tensões na escora C₁ é retangular o que não é verdade, sendo esta mais complexa (simplificadamente o modelo parábola retângulo proposto pelo EC2).

2.6.2. CARGA DISTRIBUÍDA

Se, no exemplo anterior, em que a=c₂, substituirmos a carga concentrada por uma carga distribuída com resultante equivalente, nada muda relativamente à carga de rotura (Fig. 23). A resultante desta carga está localizada exatamente no ponto da viga onde se localizava antes a força concentrada, pelo que o modelo de escoras e tirantes é exatamente igual. No entanto, a topologia dos campos de tensões será diferente, assim como a geometria do nó B (Fig. 24).

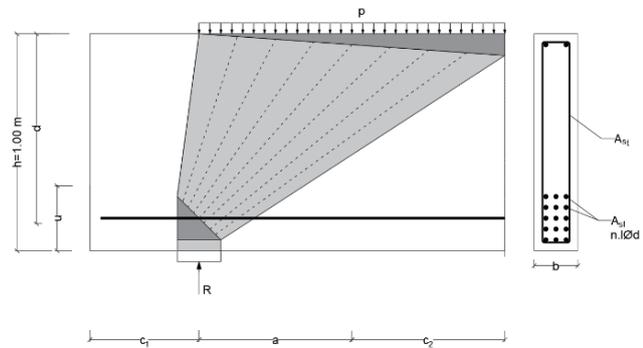
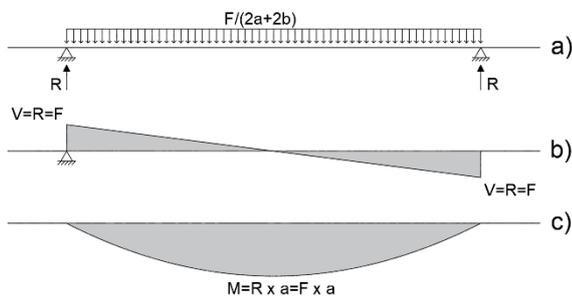


Fig. 23 - Diagramas: a) esquema estrutural b) esforço transverso c) momentos fletores

Fig. 24 - Modelo de campo de tensões para carga distribuída

O único parâmetro que é alterado é a dimensão a₃, que neste caso está compreendida entre o eixo do apoio e o eixo de simetria da viga. Partindo dos mesmos valores do exemplo anterior, obtemos assim para a₃ o valor de 1.30 m. O mesmo procedimento pode ser realizado para determinar as tensões atuantes e resistentes nos nós, conduzindo aos valores apresentados na Tabela 5. Foram omitidos os valores das tensões para o nó A, por estes serem idênticos aos do caso anterior. Naturalmente que uma carga distribuída irá resultar num nó maior, o que por sua vez causa um expectável abaixamento das tensões atuantes e aumento da segurança da estrutura em B.

Tabela 5 - Tensões nos nós - carga distribuída em apoio direto

Nó	$f_{c,eff}$	Face			Tensão		
Nó B	30.00	Apoio	a3	1.300	m	σ_3	2.49 MPa
		Escora C ₁	a4	0.094	m	σ_4	30.00 MPa
		Escora C ₂	a5	1.042	m	σ_5	3.11 MPa

2.6.3. ESTUDO DO EFEITO DE APOIO DIRETO

Foi referido na subsecção 2.6.1 que a distância a entre a carga e a reação de apoio era suficientemente reduzida para que se pudesse considerar que toda a carga era transmitida diretamente do ponto de atuação da força para o apoio. Caso esta distância aumente, haverá um ponto em que o ângulo de inclinação da escora será de tal forma reduzido que será necessário que parte da carga seja suspensa por armadura transversal, de acordo com o estudado por Ritter (1899) e Mörsch (1908). À medida que esta distância aumenta, a parte da carga que é suspensa por essa armadura vai aumentando gradualmente e a parte que é transmitida diretamente ao apoio vai diminuindo. Isto prossegue até a uma determinada distância para a qual toda a carga é suspensa (caso genérico das regiões de continuidade em vigas: modelo de treliça). Entre o caso inicial e este há infinitos casos intermédios em que se sobrepõem dois sistemas de equilíbrio: o inicial (só com a transmissão direta da carga) e o final (só com a suspensão total da mesma na armadura). Se tomarmos um modelo baseado no Método de Escoras e Tirantes como a resultante dos campos de tensão existentes na estrutura, esta configuração pode ser representada por uma estrutura hiperestática (Fig. 25c) em que parte da carga é conduzida diretamente para o apoio através da escora C₂ e parte é suspensa pelo tirante T₃. Considerou-se o tirante T₃ a meia distância entre F e R. Isto é, considera-se que toda a armadura transversal se localiza entre os dois apoios e está distribuída de forma regular.

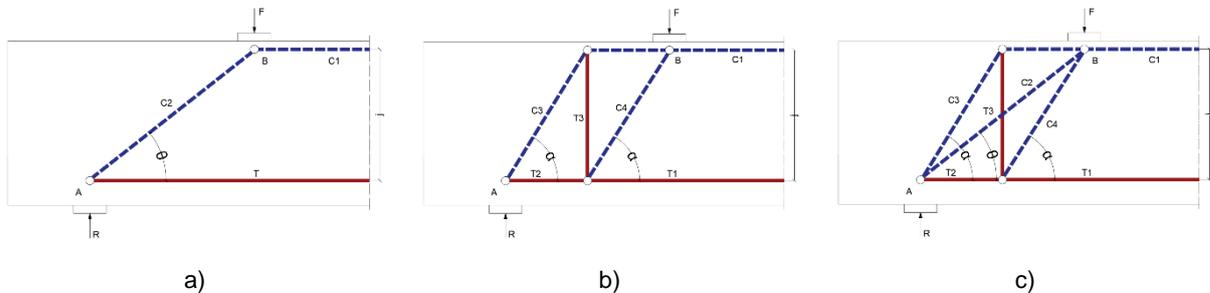


Fig. 25 – Modelo MET de transmissão de cargas: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 - modelo hiperestático

A suspensão da carga nos estribos implica alterações ao modelo de campo de tensões que foi apresentado no caso de apoio direto. Na Fig. 26 vemos os campos de compressões relativos aos dois sistemas apresentados na Fig. 25 (1 e 2) e o campo de trações distribuído relativo à suspensão da carga pela armadura transversal. Na Fig. 27 apresentam-se os MCTD correspondentes e na Fig. 28 apresenta-se a sobreposição do MET com o MCTD.

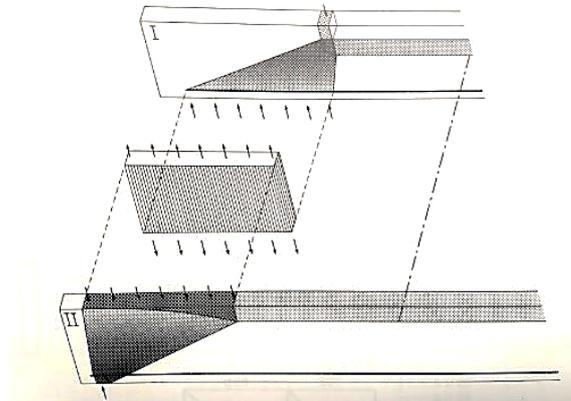


Fig. 26 – Suspensão da carga entre a força e o apoio: campos de compressões no betão (I e II) e campo de tensões na armadura (Muttoni, Thürlimann e Schwartz, 1997)

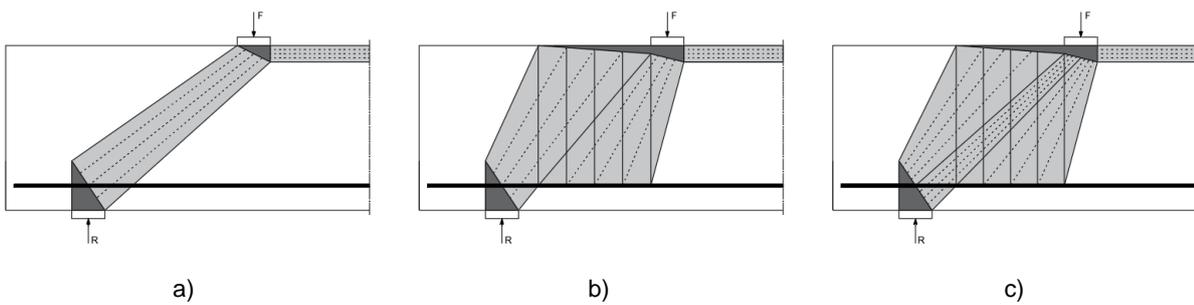


Fig. 27 – Modelo MCTD: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 - modelo hiperstático

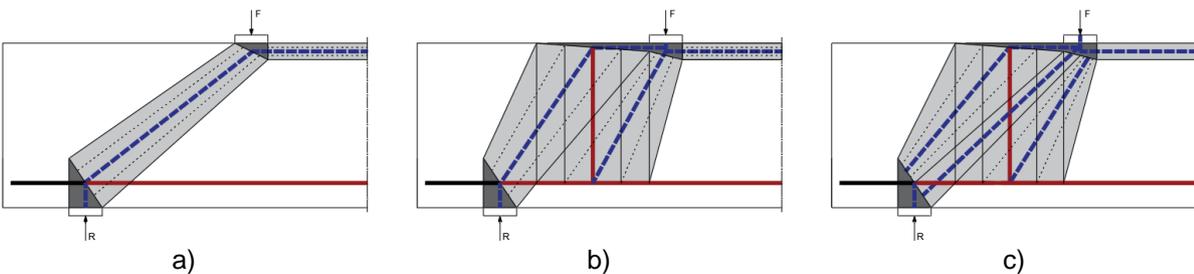


Fig. 28 – Modelo MCTD e MET sobrepostos: a) Modelo 1- carga transmitida diretamente ao apoio b) Modelo 2 – carga totalmente suspensa por estribos c) Modelo 3 – modelo hiperstático

Não sendo possível quantificar de forma rigorosa os limites destes modelos, os códigos estabelecem regras simples. O Eurocódigo 2 (em 6.2.3(8)), por exemplo, propõe valores para a distância a partir da qual se pode considerar haver efeito de apoio direto, nomeadamente (IPQ, 2010):

$$0,5d \leq a_v \leq 2,0d \quad (2.29)$$

sendo a_v a distância entre as faces interiores dos dois apoios e d a altura livre da viga. Para valores de a_v inferiores a $0,5d$ deve considerar-se $a_v = 0,5d$. Sendo este um modelo hiperstático, para a resolução analítica da estrutura, a percentagem da carga total que é suspensa pelos estribos e a percentagem que é transmitida diretamente tem de ser arbitrada previamente. Essas percentagens são definidas através de regras empíricas. Neste caso, pode ser considerada a seguinte percentagem do esforço transversal existente suspensa (EC2):

$$\beta = a_v/2d \quad (2.30)$$

E, conseqüentemente, o restante $(1 - \beta)$ transmitido ao apoio. Se considerarmos a estrutura anterior, fazendo unicamente variar o valor de a , podemos observar como se anula gradualmente o efeito de apoio direto e a sua consequência nos campos de tensões. Considere-se a variação desta grandeza apresentada na Tabela 6. O penúltimo valor (1.70 m corresponde precisamente ao limite considerado pelo EC2 para poder ser considerado o efeito de apoio direto na estrutura. Isto quer dizer que, no último caso, toda a carga tem de ser considerada suspensa pela armadura transversal, aplicando-se, portanto, o modelo isostático 2 da Fig. 25b. É o equivalente a uma região de continuidade. Sendo, para o caso inicial, o valor de a_v (0.50 m) superior a $0.5d$ (0.425 m), de acordo com o EC2, todos os restantes casos podem ser representados pelo modelo hiperstático da Fig.25. Portanto, seguindo essa metodologia, podemos calcular o valor de β para os 5 primeiros casos, sendo este coeficiente de minoração não aplicável no último caso, para o qual $a_v > 2d$. Os modelos MET representados na Fig. 25 podem ser calculados a partir de β , determinando o ângulo das escoras C_3 e C_4 (aqui designado α) para todos os casos apresentados na Tabela 6, sendo:

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{j}{2a}\right) \quad (2.31)$$

Os valores de α são apresentados na Tabela 6. Apresenta-se também o dimensionamento de todas as escoras e tirantes, para os três modelos apresentados na Fig. 25 e ainda as dimensões e tensões nas várias faces dos nós. Os valores apresentados permitem acompanhar como a carga vai sendo gradualmente transmitida de forma direta a indireta, diminuindo gradualmente as forças nas escoras e tirantes do modelo 1 e aumentando as do modelo 2 à medida que aumenta o valor de a . Sendo que o penúltimo caso é precisamente a fronteira considerada pelo regulamento, também permite concluir que, o valor limite do ângulo da escora para que o EC2 (IPQ, 2010) permita a consideração de apoio direto é 22.93° , valor próximo ao limite mínimo imposto pelo mesmo para a inclinação das escoras no cálculo da resistência ao corte do betão ($\cot \theta \leq 2.5$ EC2 - 6.2.3 (2)). A rotura dá-se sempre por flexão. Fez-se variar a área de aço longitudinal, por fora a que a carga de rotura seja aproximadamente constante. Esta varia ligeiramente pois o braço do momento fletor interno também varia.

Tabela 6 – Dimensionamento dos vários modelos

a		0.70	0.95	1.20	1.45	1.70	1.95
av		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
β		0.29	0.44	0.59	0.74	0.88	-
1-β		0.71	0.56	0.41	0.26	0.12	-
θ		48.68	39.27	32.27	26.99	22.93	19.74
α		66.27	58.56	51.62	45.52	40.23	35.67
Modelo 1 (Fig. 28)	Fv1	519.31	401.18	288.28	180.61	78.17	0.00
	T	456.62	490.60	456.62	354.70	184.80	0.00
	C1	456.62	490.60	456.62	354.70	184.80	0.00
	C2	691.51	633.74	540.01	691.51	200.65	0.00
Modelo 2 (Fig. 28)	Fv2	216.38	316.72	411.82	501.70	586.28	646.73
	T1	190.26	387.31	652.32	985.27	1386.00	1802.03
	C1	190.26	387.31	652.32	985.27	1386.00	1802.03
	C3	236.37	371.23	525.34	703.13	907.73	1109.09
	T2	95.13	193.66	326.16	492.64	693.00	901.01
	T3	216.38	316.72	411.82	501.70	586.28	646.73
	C4	236.37	371.23	525.34	703.13	907.73	1109.09
Modelo 3 (Fig. 28)	C1	646.88	877.91	1108.94	1339.97	1570.80	1802.03
	T	646.88	877.91	1108.94	1339.97	1570.80	1802.03
	Fv	735.68	717.89	700.10	682.31	664.45	646.73
Dimensões dos nós	a2	0.348	0.359	0.360	0.358	0.354	0.350
	a4	0.108	0.146	0.185	0.223	0.262	0.300
	a5	0.221	0.240	0.263	0.290	0.319	0.350
Tensões nos nós	σ_1	18.4	17.9	17.5	17.1	16.6	16.2
	σ_2	14.1	15.8	18.2	21.0	24.1	27.4
	σ_3	18.4	17.9	17.5	17.1	16.6	16.2
	σ_4	16.6	15.0	13.3	11.8	10.4	9.2
	σ_5	16.6	15.0	13.3	11.8	10.4	9.2

2.6.4. ESCORREGAMENTO DA ANCORAGEM (NÓ CCT)

O comprimento de amarração de referência é dado pela expressão 2.32 que se obtém igualando a tensão normal na armadura às tensões tangenciais que se desenvolvem no seu perímetro, admitindo uma amarração por aderência (ver subsecção 2.5.2):

$$l_b \geq \frac{\phi \sigma_s}{4f_b} \quad (2.32)$$

Para dimensionamento baseado em valores médios, a tensão de rotura da aderência pode ser dada por:

$$f_b = 2 f_{ct} \quad (2.33)$$

Sendo que $\sigma_s = f_y$, e $f_b = 2.9$ MPa, o comprimento de aderência é, no caso de serem adotados varões de 25 mm de diâmetro, 0.54 m. Isto implica que c_l (Fig. 22) seja igual ou superior a 0.37 m. Tendo admitido para esta variável o valor de 0.40 m está verificado que não ocorre este tipo de rotura.

2.6.5. APLICAÇÃO NA VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS

Como visto nas subsecções 2.6.2 e 2.6.3, as vigas são elementos que apresentam regiões de descontinuidade com escoras em leque e regiões de continuidade, com escoras em paralelogramo. Nos exemplos que vão ser estudados seguidamente, está garantida a segurança nos apoios. A região crítica do campo de tensões é formada por um paralelogramo (ver secção 2.4) e o desempenho dos MCTD irá igualmente ser avaliado com a resistência plástica do betão dada pela expressão 2.17.

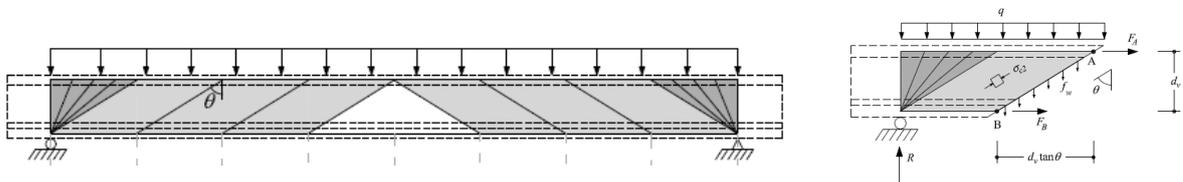


Fig. 29 – Escoras em leque e em paralelogramo numa viga simplesmente apoiada (Pimentel, 2011)

2.6.5.1. Vigas Higgins *et al*

O primeiro exemplo faz parte de uma extensa campanha de ensaios, realizada na Oregon State University por Higgins *et al* (2004), para investigação da resistência ao esforço transverso de vigas em betão armado, das quais uma parte foi reanalisada mais tarde através de métodos numéricos (Pimentel, 2011). O que se propõe fazer é seleccionar duas destas vigas, as quais se diferenciam entre elas unicamente pela quantidade de armadura transversal (uma está no limite da rotura por flexão e outra tem aproximadamente a armadura mínima). Entre estas duas situações valores extremas criaram-se outras vigas teóricas, com quantidades intermédias de armadura de esforço transverso. Pretende-se estudar a carga de rotura de cada uma, através do método dos campos de tensões, e compará-la com os resultados experimentais. Espera-se que, sendo o método dos campos de tensões baseado na teoria do limite inferior, a carga de rotura obtida seja em média inferior à carga obtida experimentalmente.

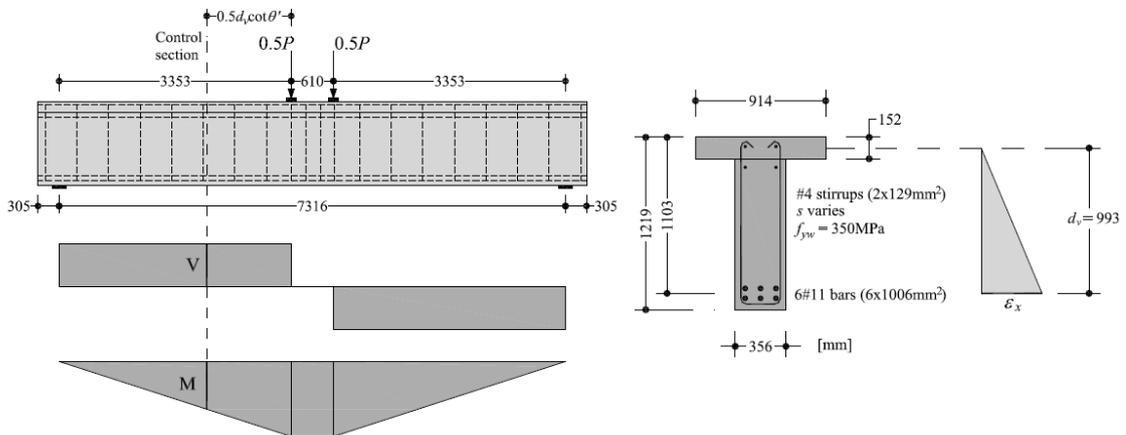


Fig. 30 – Vigas testadas por Higgins *et al* (Pimentel, 2011)

Na Fig. 30 apresenta-se a geometria das vigas e os diagramas de esforços internos (foi desprezado o peso próprio por ser reduzido quando comparado com as cargas aplicadas). Consideraram-se 10 vigas, fazendo-se variar a armadura de esforço transverso de forma gradual entre os dois casos limite referidos (Tabela 7). A resistência à compressão do betão nos ensaios variou ligeiramente de viga para viga, mas foi considerada uma resistência média uniforme com o valor de $f'_c = 27$ MPa. Relativamente à resistência à tração do aço passou-se o mesmo: esta variava e foram considerados os seguintes valores médios: $f_{y,As_t} = 351$ MPa e $f_{y,As_l} = 492$ MPa.

Tabela 7 - Vigas consideradas

Viga n.º	Asw/s
1	4.23
2	4.89
3	5.55
4	6.21
5	6.87
6	7.52
7	8.18
8	8.84
9	9.50
10	10.16

A viga 10, como foi dito teve uma rotura por flexão. A resistência à flexão desta viga foi calculada por meio das equações de equilíbrio para secção fendilhada, tal como apresentado na subsecção 2.6. Obteve-se uma carga de rotura de 922.18 kN.

A resistência ao corte da viga é limitada pelo esforço transverso máximo que as escoras podem suportar antes do esmagamento do betão e pelo correspondente esforço que leva à cedência das armaduras transversais. As correspondentes tensões nos estribos e nas escoras da alma são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{cw} = \frac{F_w}{b_w z \cos \theta} \quad (2.34)$$

$$\sigma_{sw} = \frac{F_{sw}}{\frac{A_{sw}}{s} z \cot \theta} \quad (2.35)$$

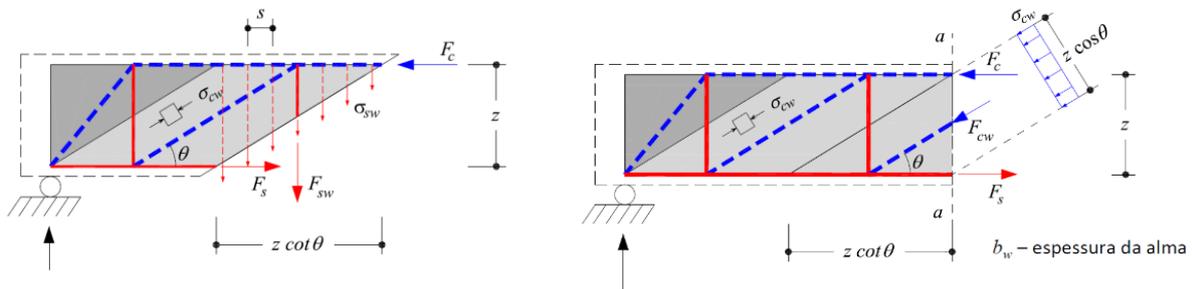


Fig. 31 – Modelo de treliça aplicado à verificação do esforço transverso em regiões de continuidade de vigas (Faria e Pimentel, 2017)

Limitando as tensões à resistência plástica dos dois materiais e relacionando as forças no aço e no betão com o esforço transversal, chegamos às expressões que originam a resistência ao corte das escoras e dos estribos:

$$V_{R,m\acute{a}x} = \frac{b_w d_v \eta_\epsilon \eta_f f_c}{\tan \theta + \cot \theta} \quad (2.36)$$

$$V_{R,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yw} z \cot \theta \quad (2.37)$$

Se for considerado um valor constante para a resistência plástica do betão, então a única incógnita do problema é a inclinação das escoras, sendo que existe uma limitação ao seu valor ($1.0 \leq \cot \theta \leq 2.5$, segundo o EC2). Na Fig. 32 ilustra-se a questão, para o caso da viga 1. Com a diminuição do ângulo das escoras aumenta a resistência dos estribos e reduz a resistência das primeiras. Um ângulo mais baixo permite então economizar estribos e um ângulo mais alto permite economizar espessura da alma. Sendo que a resistência da secção equivale ao menor dos valores da resistência dos estribos e das escoras, então a solução que leva à resistência máxima é correspondente à interseção das duas funções. No entanto, tal como expresso na mesma figura, a localização desse ponto pode violar os limites à inclinação das escoras^{Error! Bookmark not defined.}. Nessa mesma figura é visível que o valor da resistência ao corte da viga nos ensaios apresenta um valor, que implicaria valores da inclinação das escoras inferiores aos permitidos nesses mesmos limites.

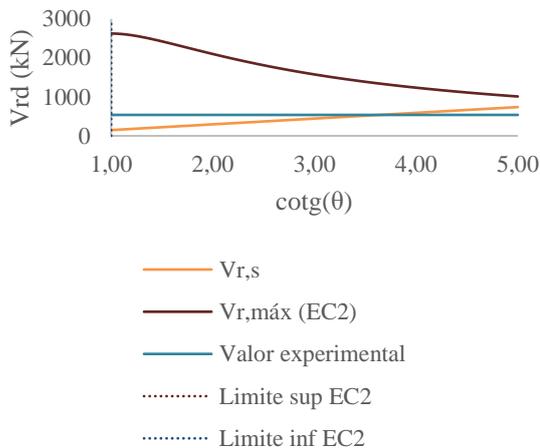


Fig. 32 - Evolução da resistência ao esforço transversal com a inclinação das escoras para a viga 1

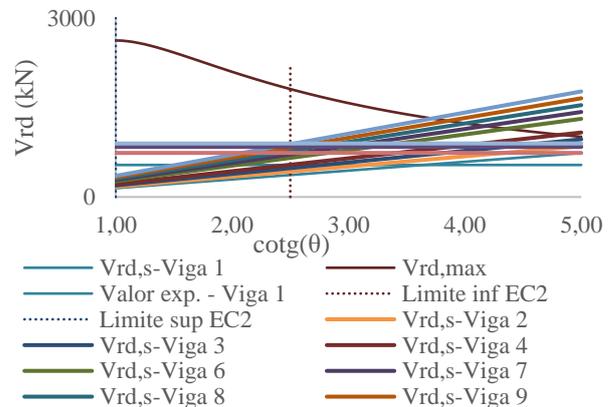


Fig. 33 - Resistência de todas as vigas

Na Fig. 33 observa-se que todas as vigas têm a sua resistência ao corte fora do limite imposto para a inclinação das escoras. Na Tabela 8 apresentam-se os resultados obtidos para todas as vigas. Na Fig. 34 apresenta-se a mesma informação graficamente. Note-se que, na campanha experimental existiam outras três vigas com área de aço transversal intermédia que se apresentam no diagrama, juntamente às duas anteriormente referidas, a título de mera curiosidade. Deduz-se que, em todos os casos, a rotura é imposta pela estrição dos tirantes, já que a área de aço é relativamente reduzida e $V_{r,m\acute{a}x}$ é superior a $V_{rd,s}$. Comparando os resultados de cálculo e os experimentais, podemos verificar que a consideração de uma resistência plástica do betão constante e consequente limitação da inclinação das escoras leva a resultados bastante conservativos.

Tabela 8 – Esforço transversal resistente com a limitação à inclinação das escoras

Viga n.º	Asw/s	Vr,s (cotθ=2.5)	Vr,máx	Experim
1	4.23	369	1810	537
2	4.89	426	1810	-
3	5.55	484	1810	-
4	6.21	541	1810	-
5	6.87	598	1810	-
6	7.52	656	1810	-
7	8.18	713	1810	-
8	8.84	770	1810	-
9	9.50	828	1810	-
10	10.16	885	1810	898

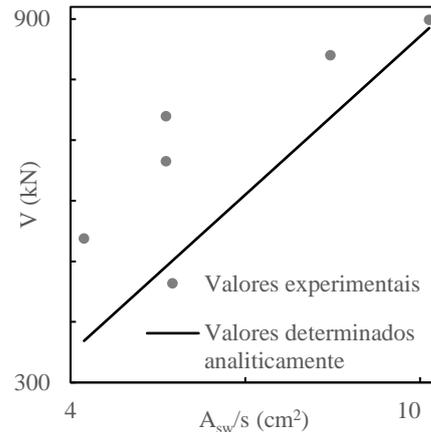


Fig. 34 - Resistência experimental e de cálculo

Foi referido na secção 2.3 que existem casos em que se pode, numa resolução analítica, utilizar valores não constantes para a resistência plástica do betão. Isto é possível quando as tensões são constantes. Isto é, para casos em que o campo de tensões é um paralelogramo (ver secção 2.4) como é o caso de uma região de continuidade de uma viga. É possível, na resolução analítica dos MCT, aplicar uma lei mais elaborada para o coeficiente η_ε , fazendo-o depender das extensões transversais. Utilizando-se para isso uma das propostas expostas na Fig. 7 da secção 2.3. Ao fazer isso, é possível eliminar a limitação à inclinação das escoras, o que pode permitir atingir valores mais elevados da carga de rotura. Se o coeficiente tiver sido bem estimado para o caso específico em estudo, esta é uma solução mais próxima do fenómeno físico real, pelo que deverá aproximar a carga de rotura daquela obtida experimentalmente. Para fazer esta análise será usada a proposta de Kaufmann, apresentada na secção 2.3:

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{1.08 + 81\varepsilon_1} \quad (2.38)$$

O valor da extensão principal ε_1 pode ser obtida através da seguinte expressão, obtida do círculo de Mohr:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \cot^2 \theta \quad (2.39)$$

Assumindo que a extensão média correspondente à tensão máxima de compressão é:

$$\varepsilon_2 = -0.002 \quad (2.40)$$

Então, podemos reescrever a expressão 2.39 da seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x + 0.002) \cot^2 \theta \quad (2.41)$$

A extensão horizontal pode ser obtida com base na expressão seguinte (Pimentel, 2011):

$$\varepsilon_x \approx 0.8 \left(1 - \frac{z_x}{z} \right) \frac{\frac{|M|}{z} + 0,5|V| \cot \theta + 0.5N}{E_s A_s + E_p A_p}, \varepsilon_x \geq 0 \quad (2.42)$$

Na expressão, z_x é a distância vertical entre o ponto onde é considerada a extensão e o centro de gravidade das armaduras de tração. Se considerarmos simplifcadamente o esforço transverso constante e uma variação linear das extensões ao longo da altura da secção e $\varepsilon_x = 0$ no centro do banzo de compressão (Fig. 35), a situação mais gravosa será para $z_x = 0$, que corresponde ao centro de gravidade das armaduras de tração.

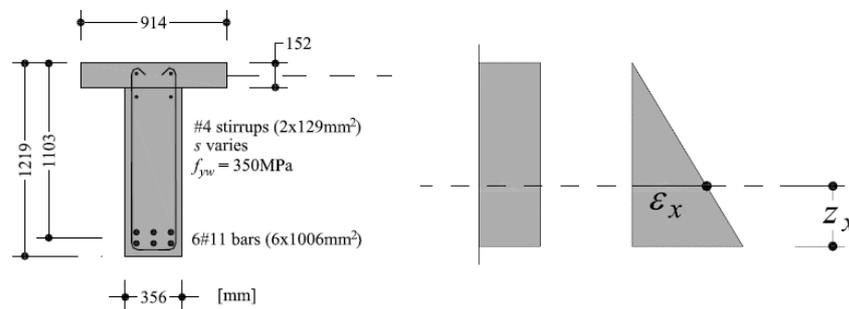


Fig. 35 - Distribuição do esforço transverso (à esquerda) e das extensões (à direita) na secção transversal da viga (Pimentel, 2011)

Não havendo esforço axial (pré-esforço), a expressão pode assim ser simplificada:

$$\varepsilon_x \approx 0.8 \frac{\frac{|M|}{z} + 0,5|V| \cot \theta}{E_s A_s}, \varepsilon_x \geq 0 \quad (2.43)$$

A secção de controlo considerada para avaliar as extensões foi a indicada na Fig. 30 a $0.5 z \cot \theta$ do ponto de aplicação das forças. As extensões dependem assim do esforço transverso (constante) e do momento fletor (que é máximo entre as duas forças aplicadas). Sendo o valor do momento fletor:

$$M = R \cdot b = V \cdot (3.353 - 0.5 z \cot \theta) \quad (2.44)$$

O esforço transverso resistente da armadura de corte e o esforço transverso resistente das escoras dependem da sua inclinação. Mas o esforço resistente das escoras depende também das extensões transversais, que por sua vez dependem dos esforços atuantes. Portanto, o esforço resistente máximo ($V_{r,máx}$) depende do esforço atuante (V, M). O processo é iterativo. É necessário arbitrar valores para a inclinação das escoras e para a força atuante até se conseguir igualar ambos os esforços transversos resistentes entre eles e ao esforço atuante até se obter a $\cot \theta$ final. Alternativamente pode-se arbitrar um valor para ε_x e aplicar a expressão 2.45 para determinar um valor para $\cot \theta$, definir a secção de controlo e utilizar a expressão 2.43 para determinar o valor correto de ε_x que novamente introduzido na expressão 2.45 permite realizar uma nova iteração.

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{-0.46 - 60\varepsilon_x + \sqrt{0.1156 + \frac{44.21f_c}{\rho_y f_{yd}}(\varepsilon_x + 0.002)}}{0.12 + 60\varepsilon_x}} \quad (2.45)$$

Com:

$$\rho_y = \frac{A_{sw}}{sb_w} \quad (2.46)$$

Na Tabela 8 constata-se que a limitação à inclinação das escoras, imposta pelos métodos com valores constantes da resistência plástica do betão levam a resistências ao corte das vigas bastante aquém do obtido experimentalmente. Na Tabela 9 apresentam-se os valores obtidos com o segundo método apresentado, onde há uma clara aproximação dos valores obtidos aos experimentais, especialmente para as vigas com menos armadura de esforço transverso.

Tabela 9 - Esforço transverso resistente sem a limitação à inclinação das escoras

	A_{sw}/s	$\cot\theta$	ε_x	ε_1	$\eta\varepsilon$	$V_{r,s}$	$V_{r,máx}$	Exp
1	4.23	3.62	0.0012	0.043	0.22	535	535	537
2	4.89	3.44	0.0013	0.041	0.23	586	586	-
3	5.55	3.28	0.0014	0.038	0.24	635	635	-
4	6.21	3.15	0.0015	0.037	0.25	682	682	-
5	6.87	3.03	0.0016	0.035	0.26	726	726	-
6	7.52	2.93	0.0017	0.034	0.26	768	768	-
7	8.18	2.83	0.0018	0.032	0.27	808	808	-
8	8.84	2.75	0.0019	0.031	0.28	847	847	-
9	9.50	2.67	0.0020	0.030	0.28	885	885	-
10	10.16	2.60	0.0021	0.030	0.29	921	921	898

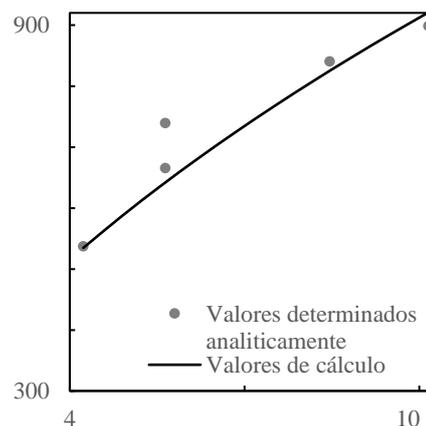


Fig. 36 - Resistência experimental e de cálculo

2.6.5.2. Vigas Walraven *et al*

Uma campanha de ensaios procurou comprovar a fiabilidade das expressões analíticas e também das análises não lineares com base no método dos elementos finitos numa análise da resistência ao corte, comparando uma série de vigas com geometrias idênticas, mas diferente armadura e tipo de betão (Belletti, Esposito e Walraven, 2013). Quis estudar-se a influência da variação da armadura transversal e do tipo de betão no modo de rotura ao corte das vigas, a rotação das escoras de compressão do betão e comparar os diferentes modos de cálculo permitidos pelo Eurocódigo 2 (IPQ, 2010) e pelo FIB Model Code 2010 (FIB, 2013).

Estas vigas foram aqui selecionadas por se encontrarem muito bem documentadas e terem sido alvo de verificação não só experimental, mas também analítica e numérica. Das várias vigas ensaiadas escolheu-se um apenas conjunto suficientemente representativo para o estudo a realizar. Na Fig. 37 apresenta-se a geometria das vigas escolhidas e na Tabela 10 as características mecânicas das mesmas.

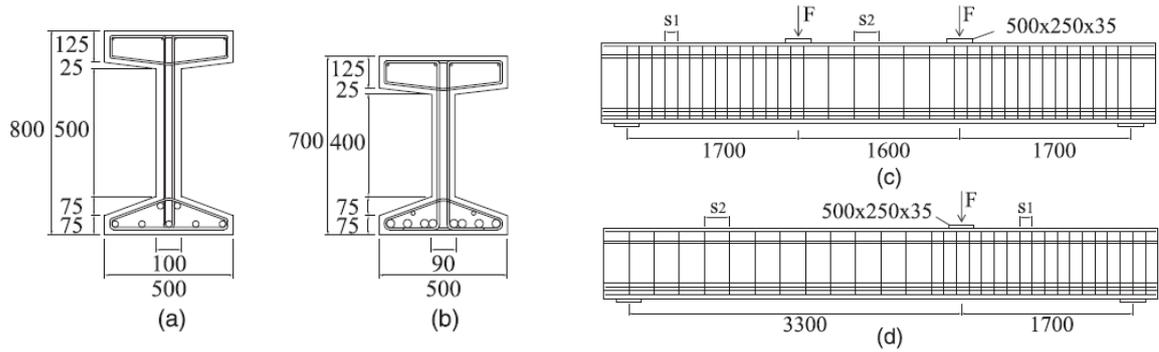


Fig. 37 – Geometria das vigas estudadas (Belletti, Esposito e Walraven, 2013)

Tabela 10 – Características mecânicas das vigas escolhidas

Viga	Betão					Armadura longitudinal							
	z	bw	Ac	f _c	f _{c,η_f}	Asl1			Asl2			Asl,tot	f _{yl}
						n	Φ	Asl	n	Φ	Asl		
GD30L	0.70	0.10	0.180	17.20	17.20	5	25	24.54	-	-	0.00	24.54	560
GD30M	0.70	0.10	0.180	18.20	18.20	5	25	24.54	-	-	0.00	24.54	560
GD30H	0.68	0.10	0.180	19.70	19.70	5	25	24.54	2	25	9.82	34.36	560
GD90L	0.60	0.09	0.166	83.00	59.12	6	25	29.45	2	20	6.28	35.74	540
GD90M	0.60	0.09	0.166	83.90	59.55	6	32	48.25	2	16	4.02	52.28	504
GD90H	0.60	0.09	0.166	84.80	59.98	8	32	64.34	-	-	0.00	64.34	504

Tabela 11 – Características mecânicas das vigas escolhidas

Viga	Armadura transversal								
	Ast	Ast1		Ast2		ρ _w (%)	w	f _{yt}	
		s1	Ast1	s2	Ast2				
GD30L	2 8	0.236	4.26	0.236	4.26	0.426	0.139	560	
GD30M	2 10	0.177	8.87	0.236	6.66	0.887	0.296	608	
GD30H	2 10	0.108	14.54	0.236	6.66	1.454	0.449	608	
GD90L	2 8	0.165	6.09	0.300	3.35	0.677	0.062	540	
GD90M	2 12	0.165	13.71	0.300	7.54	1.523	0.145	567	
GD90H	2 12	0.095	23.81	0.200	11.31	2.646	0.250	567	

Aplicando a mesma metodologia que foi apresentada na subsecção anterior, chegamos à conclusão de que há situações diferentes desse caso. Para as vigas GD30L, GD90M e GD90H, existe uma solução dentro dos limites da inclinação das escoras impostos pelos métodos de primeiro nível. A carga de rotura prevista por este modelo é obtida com a inclinação das escoras para a qual a resistência dos estribos e das escoras é igual. Quando a intersecção dos dois valores está fora do limite imposto ($1.0 \leq \cot \theta \leq 2.5$), então a carga de rotura é definida pelo menor dos dois valores ($V_{r,máx}$ e $V_{r,s}$).

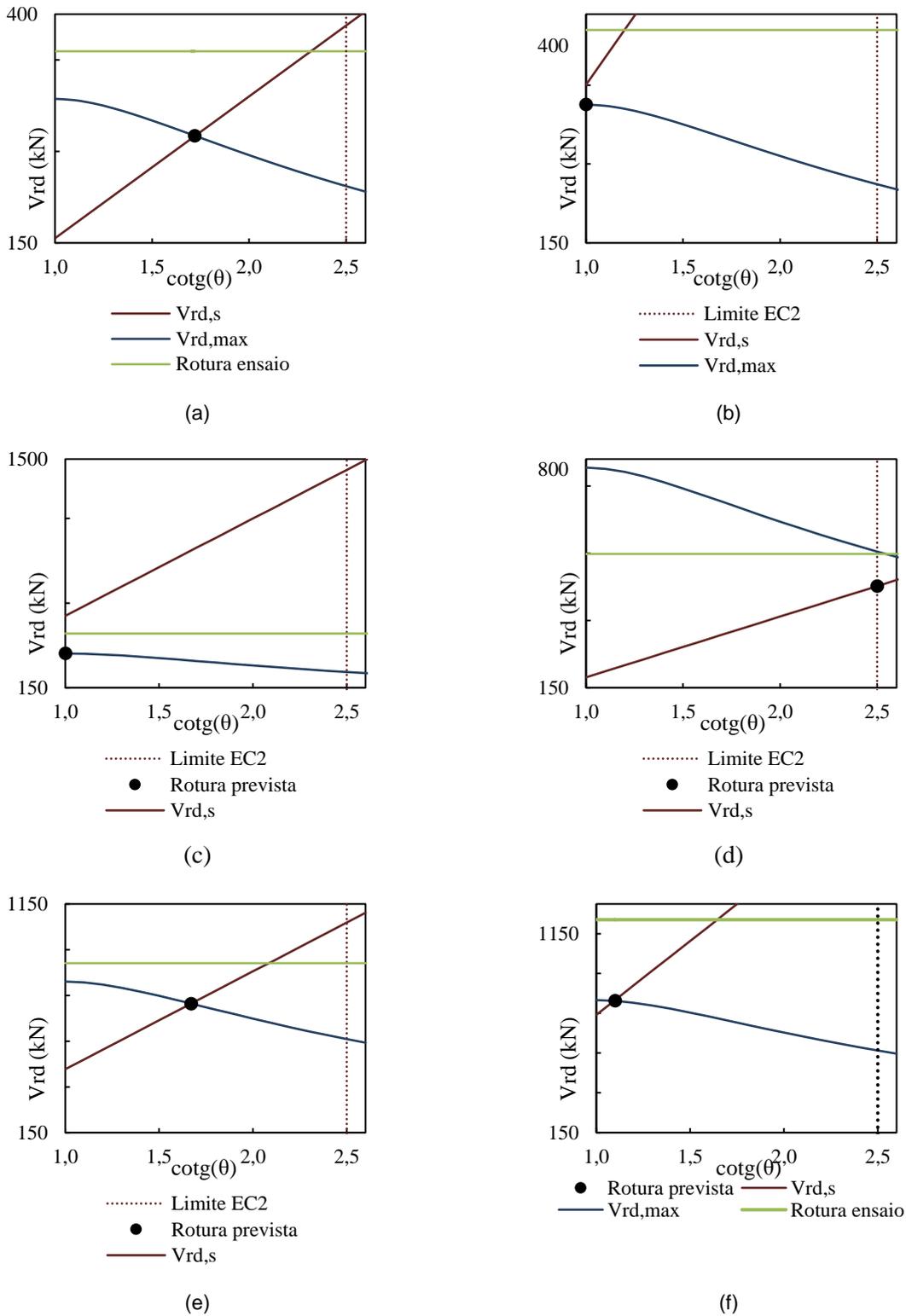


Fig. 38 - Evolução da resistência ao corte do betão e armadura com a inclinação das escoras: a) GDL30L b) GDL30M c) GDL30H d) GDL90L e) GDL90M f) GDL90H

Podemos observar que há três em que existe solução dentro dos limites da inclinação das escoras (GD30L, GD90M e GD90H). Observa-se ainda que há dois casos em que a solução é imposta pelo

limite inferior e um caso em que esta é imposta pelo limite superior. Neste caso (GDL90L), podemos ainda aplicar o segundo método de cálculo e usar um coeficiente η_{fc} função das extensões transversais, removendo assim as limitações à inclinação das escoras. Aplicando o segundo método, contudo, obtém-se uma inclinação das escoras superior ao obtido com os métodos de análise de primeiro nível, pelo que não há vantagem na utilização do segundo método referido. Na Tabela 12 apresentam-se os valores obtidos, e ainda os resultados experimentais relativos à inclinação das escoras.

Tabela 12 – Resultados numéricos e experimentais

Viga	cot(θ)	$V_{r,s}$	$V_{r,m\acute{a}x}$	η_{ϵ}	$V_{u,exp}$	θ_{anal}	θ_{exp}
GD30L	1.72	267	267	0.66	360	30	28
GD30M	1.00	351	325	0.79	420	45	37
GD30H	1.00	575	352	0.88	470	45	40
GD90L	2.50	452	452	0.36	548	22	22
GD90M	1.67	715	714	0.57	891	31	27
GD90H	1.10	814	813	0.67	1221	42	36

2.7. CONCLUSÕES

A aplicação dos modelos MCTD e MET aos casos mais simples permitiu verificar os princípios que estão na base dos mesmos e demonstrar que estes são conservativos face aos ensaios utilizados. Em ambos os métodos, à exceção das situações de cargas em apoio direto, verificou-se que há uma liberdade adicional na sua construção, nomeadamente a inclinação das escoras de betão. Esta liberdade permite optar entre dimensionar a estrutura para almas mais estreitas ou para menor quantidade de aço. Por outro lado, essa liberdade abre dúvidas relativamente ao facto de se estar perante a solução mais otimizada ou mais próxima do comportamento real da estrutura. A utilização de MCTD com leis para a resistência plástica do betão variável, permitiu nos casos de regiões de continuidade, levantar o limite à inclinação das escoras, imposto com os métodos tradicionais. Assim, nesses casos, é possível explorar uma gama de soluções não permitidas com os métodos com resistência à compressão do betão constante, o que se torna uma vantagem. No entanto, essa vantagem não pode ser aplicada com este método no caso de regiões de descontinuidade que é o principal objeto deste método. Por outro lado, conclui-se também, que o desenvolvimento com rigor dos MCTD pode tornar-se muito moroso, pois as soluções analíticas são por vezes complexas e a construção dos campos de tensões tem também alguma complexidade em termos geométricos, nem sempre sendo justificável. Este torna-se assim, muitas vezes, desnecessário, dado que em muitas situações de dimensionamento pode ser satisfatório atender ao que se passa nas secções críticas da estrutura, sendo na prática aplicado o MET e verificados os nós de forma simplificada.

3

MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES CONTÍNUOS

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os Modelos de Campos de Tensões Contínuos (MCTC), relacionando-os com os descontínuos (MCTD), e expõem-se as hipóteses prévias ao seu estabelecimento, apresentando mais uma vez os modos de rotura possíveis a serem aplicados no caso de estudo do capítulo 4. Para tal, será utilizada a mesma metodologia do capítulo anterior e também os mesmos exemplos. Haverá a particularidade de os resultados poderem ser comparados com os obtidos com o método anterior (MCTD).

A estrutura do capítulo é em tudo semelhante, iniciando-se com a apresentação das leis constitutivas e pressupostos do método, sendo depois exposta a análise prévia de sensibilidade para afinar os parâmetros que irão reger as análises numéricas. Novamente, para além de calculados os exemplos, serão também apresentadas as respetivas topologias dos campos de tensão. Isso permitirá a comparação entre casos, mas também entre métodos.

Tal como no capítulo anterior, tratando-se de casos de estudo, todas as análises serão feitas por recurso a valores médios, quer das resistências dos materiais, quer das ações. Finalmente, são tiradas algumas conclusões com respeito ao método e às suas virtualidades, comparando este método com o do capítulo anterior. Procura-se retirar algumas conclusões relativamente ao seu rigor e segurança, mas também à robustez e estabilidade da sua aplicação, com vista a uma possível aplicação a casos reais.

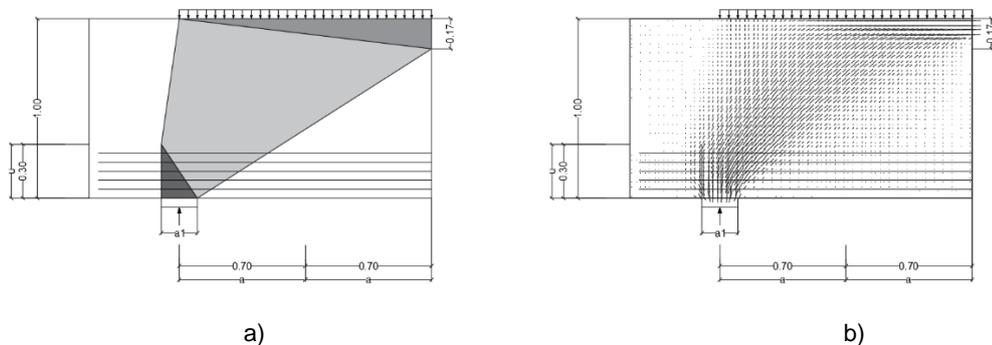


Fig. 39 - Modelos de campos de tensões: a) descontínuos b) contínuos

3.2. LEIS CONSTITUTIVAS E MODOS DE ROTURA

Os modelos de campos de tensões contínuos baseiam-se nos mesmos princípios dos modelos de campos de tensões descontínuos, com a diferença de os primeiros assumirem leis constitutivas elasto-plásticas para os materiais. Pelo facto de serem usadas leis elasto-plásticas, em vez de existirem regiões com tensões uniformes e regiões não tensionadas, não existe descontinuidade de tensões, daí a designação de "campos de tensões contínuos" (Fig. 39). Isto permite verificar as condições de compatibilidade, algo que não acontecia nos MCTD. Por isso, e de acordo com a TP, como ambas as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfeitas, então as soluções obtidas são teoricamente exatas.

Está também implicada a impossibilidade de calcular estes modelos de forma analítica. Eles impõem a utilização de meios computacionais, como por exemplo, o recurso a uma análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Este tipo de análise deverá fornecer resultados que, ainda que próximos dos obtidos pelos modelos de campos de tensões descontínuos, deverão ser, ainda assim, mais próximos da realidade. Neste capítulo será feita uma apresentação deste tipo de modelos, através da análise das estruturas apresentadas no capítulo anterior. Serão para isso, utilizados modelos pelo MEF no *software* de cálculo estrutural *Diana Finite Element Analysis 10.2* (DIANA FEA BV, 2017). Serão feitas análises não lineares até à rotura e comparados os resultados com os obtidos pelo método anterior.

As leis constitutivas consideradas foram: uma lei elástica-perfeitamente plástica para o aço (sem endurecimento no patamar de cedência¹⁴) e uma lei elástica-perfeitamente plástica para o betão (Fig. 40). Mantém-se, de forma geral, as considerações relativas à resistência plástica do betão apresentadas no capítulo anterior. É desprezada a resistência à tração¹⁵ e considerada uma resistência plástica equivalente à compressão, tendo como base o valor obtido nos provetes cúbicos afetado dos dois coeficientes de redução já apresentados (para ter em conta a fragilidade e a influência das trações transversais no aço).

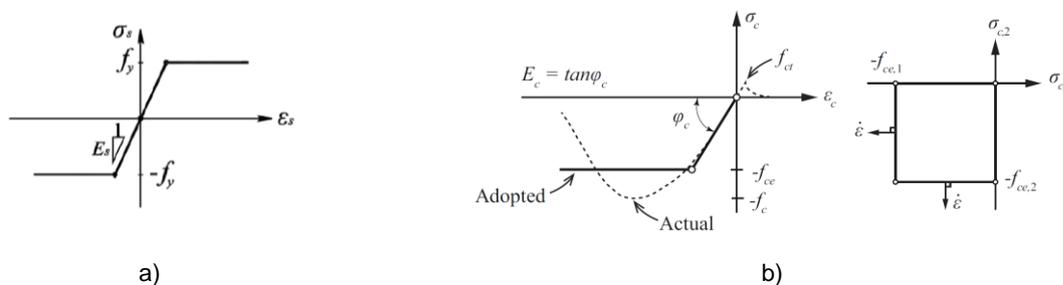


Fig. 40 - Leis constitutivas: a) diagrama tensão-deformação do aço (Muttoni, Niketic e Fernández Ruiz, 2006) b) diagrama tensão-deformação e superfície de rotura adotados para o betão (Niketic, 2017)

Relativamente aos modos de rotura, mantêm-se as considerações feitas sobre o assunto relativamente aos MCTD na subsecção 2.2. Estes modelos pressupõem um patamar infinito para o aço (tal como acontecia no capítulo anterior), pelo que o fenómeno de rotura das escoras por estricção dos estribos também não é considerado pelo programa de cálculo. Isto é, o aço deforma-se infinitamente. A rotura do aço tem de ser interpretada posteriormente, com base nas extensões obtidas e de acordo com a re-

¹⁴ Este pode ser negligenciado no caso do uso de modelos de campos de tensões para dimensionamento, tendo uma contribuição considerável quando se quer analisar a resistência última de estruturas existentes (Niketic, 2017, p. 53)

¹⁵ Superfície de cedência de Mohr-Coloumb com critério de tensão máxima nula (*zero tensile tension cut-off*)

sistência deste. Sendo desprezada a resistência à tração do betão, este modelo também não considera o fenómeno da fendilhação, pelo que o escorregamento entre fendas nas escoras comprimidas de betão é um modo de rotura igualmente indistinguível do esmagamento do betão das mesmas e da estricção dos estribos. Há assim um só modo de rotura por corte nas escoras, somado à rotura por flexão, rotura por esmagamento dos nós e escorregamento da armadura.

3.3. RESISTÊNCIA PLÁSTICA DO BETÃO

Relativamente ao primeiro coeficiente (η_f), adotou-se a mesma lei do capítulo anterior (MC2010). No entanto, uma das vantagens dos campos de tensão descontínuos é que, sendo calculados por via numérica, permitem refinar a estimativa da resistência plástica à compressão do betão, nomeadamente no que toca ao segundo coeficiente (Niketić, 2017). Enquanto que no cálculo analítico era necessário impor um valor fixo para este (estimado de forma empírica através de ensaios), método proposto na atual versão do Eurocódigo 2, o cálculo automático permite a utilização de modelos mais elaborados, nomeadamente, leis em que ele é função das extensões principais no betão¹⁶ (segundo nível de análise do MC2010). Na bibliografia há uma série de propostas por diferentes autores e que foram sendo testadas e calibradas experimentalmente (ver subsecção 2.3). Para o presente estudo, foi considerada a proposta de Kaufmann (1998)¹⁷.

A vantagem deste tipo de lei é que, sendo a resistência à compressão do betão função das extensões transversais de tração, não há necessidade de limitar o ângulo de inclinação das escoras, tal como implicam os métodos que usam valores fixos para a resistência plástica (IPQ, 2010). Note-se, no entanto, que estas leis não preveem o aumento da resistência à compressão do betão por aplicação de compressões transversais. Isto é, o efeito do confinamento é desprezado (Niketić, 2017). Esta é uma abordagem do lado da segurança. Na Fig. 41 apresentam-se os dois modelos utilizados para os dois coeficientes de redução da resistência à compressão do betão (*softened compressive strenght*).

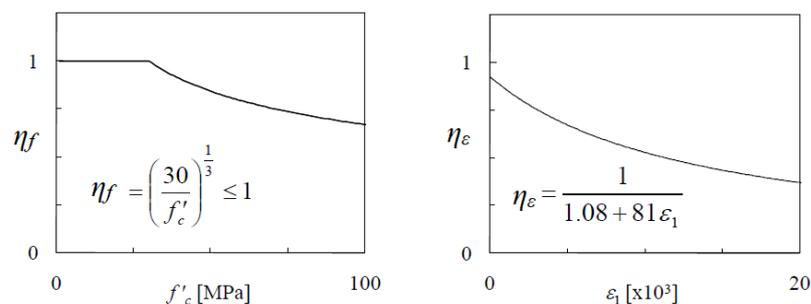


Fig. 41 - Coeficientes de redução η_f e η_ϵ utilizados para a resistência à compressão do betão (Pimentel, 2011)

Admite-se coincidência entre as tensões e as extensões principais. Para que isso aconteça, é introduzido no programa de cálculo um modelo fictício de fendas rotativas¹⁸. O peso próprio das estruturas, por ser pouco relevante, foi desprezado em todos os exemplos deste capítulo. É assumida uma ligação perfeita entre aço e betão, o que significa que ambos os materiais têm a mesma extensão na direção

¹⁶ Total Strain Crack Model – lateral cracking reduction behaviour

¹⁷ Citado por Pimentel (2011)

¹⁸ Total Strain Rotating Crack Model

dos varões (não há escorregamento), exceto para um dos exemplos onde se testará precisamente a capacidade de o modelo replicar uma rotura por escorregamento das armaduras (subsecção 3.5.5). Para o betão foi considerado o módulo de elasticidade secante e o seu valor é considerado independente do estado de extensão transversal (Fernandez Ruiz e Muttoni, 2007). Foi considerado ainda um coeficiente de Poisson nulo (betão fendilhado).

Foram elaborados modelos estruturais em estados planos de tensão. O betão foi modelado com elementos finitos de diversas dimensões e tipos (ver secção 3.4). As armaduras podem ser modeladas como barras ou grelhas. As grelhas têm área nas direções respetivas, numa ou duas direções. As armaduras longitudinais foram modeladas como barras (uma por cada nível de armadura com a área equivalente) e as armaduras transversais como grelhas planas sem resistência ao corte.

3.4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Antes de proceder ao estudo dos vários modos de rotura foi elaborada uma análise sensibilidade, para determinar a influência do tamanho, forma e orientação dos elementos finitos na fiabilidade dos resultados e na estabilidade e rapidez do cálculo, com vista a escolher a malha a utilizar nas análises subsequentes. Sendo que os modelos de campos de tensões contínuos se baseiam em análises numéricas não lineares pelo Método dos Elementos Finitos, foi importante elaborar uma análise de sensibilidade, com vista a perceber de que forma a configuração da malha tem influência nos resultados e decidir qual o tipo de malha a utilizar nas análises. Para isso foi feito um estudo paramétrico, modelando com malhas diferentes uma das estruturas que serão analisadas posteriormente em maior detalhe (viga Walraven GD30L). A escolha da malha a utilizar implicou considerações sobre os seguintes aspetos:

- Forma dos elementos finitos (número de lados: triangulares, quadrangulares, etc.)
- Número de nós (3, 4, 8, etc.)
- Orientação da malha (com ou sem orientação preferencial e qual)
- Tamanho dos elementos finitos (e sua respetiva relação com as dimensões da estrutura, representatividade do material e o tipo de análise em causa)
- Método de integração utilizado (*Newton-Raphson*, *Secante*, etc.)
- Tipo de integração utilizada (normal ou reduzida)
- Utilização ou não do método do arco
- Número máximo de iterações até à convergência
- Número máximo de incrementos de carga
- Dimensão dos incrementos de carga
- Critério de convergência (força, deslocamento ou energia)

A forma dos elementos finitos e o número de nós tem relevância na escolha da malha para elaborar as análises. Procurou-se utilizar elementos finitos o mais simples possível, por forma a tornar a análise mais ligeira e robusta, mas também se teve em consideração alguma experimentação para averiguar possíveis vantagens na utilização de elementos finitos mais complexos. Os elementos triangulares têm a vantagem de possuírem um único ponto de Gauss e assim permitem um cálculo mais simplificado e

imediatamente das tensões e deformações. Por outro lado, um maior número de nós permite um maior refinamento da análise.

Segundo Niketić (2017) a orientação dos elementos finitos tem uma implicação sensível na carga última da estrutura. As malhas triangulares têm uma orientação preferencial ditada pelas hipotenusas. Caso o ângulo da hipotenusa seja próximo do ângulo das tensões principais, tende a haver maior concentração das tensões de compressão, ativando-se só dois nós, levando a uma carga de rotura inferior, enquanto que se estes forem perpendiculares, há a tendência para o espalhamento das tensões sobre uma área maior, ativando três nós e obtendo-se uma carga de rotura superior (Fig. 42). O autor aconselha então que se evite a utilização de malhas com uma orientação preferencial dos elementos. Ao usar-se malhas triangulares deve-se alternar a orientação dos triângulos, ou usar uma malha com orientação aleatória. Esta questão veio a confirmar-se mais tarde (ver Fig. 43) quando se fizeram experiências com malha triangular (o DIANA não permite alternar a orientação dos triângulos).

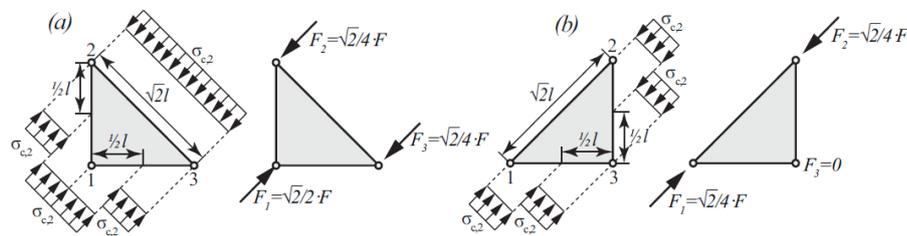


Fig. 42 - Derivação das forças nodais para elementos finitos triangulares com a hipotenusa paralela e perpendicular à tensão principal (Niketić, 2017)

O tamanho dos elementos finitos a utilizar é importante por duas razões: por um lado, o número total de elementos finitos tem influência no tempo de cálculo da estrutura, pelo que se pretende que estes sejam em menor número possível. Ou seja, que tenham a maior dimensão possível. Por outro, não sendo o betão um material homogéneo, não tem sentido usar elementos finitos com tamanhos demasiado reduzidos, por deixarem de ser representativos do material. O tamanho depende também do tipo de análise a efetuar. Isto é, se se pretende estudar a rotura global das escoras ou uma rotura específica de uma determinada face de um nó, o tamanho dos elementos finitos deve ser diferente. Não havendo propriamente consenso relativamente a um valor para o tamanho dos elementos finitos a utilizar, considera-se na bibliografia geralmente uma dimensão representativa que seja cerca de 3 vezes o tamanho do agregado. No entanto, as condições estruturais (geometria da peça) devem também ser consideradas, indicando os estudos existentes em cilindros valores de 2 vezes e meia o diâmetro do mesmo. Outro valor de referência seria, por exemplo, um tamanho igual à espessura da alma. Niketić recomenda o uso de um tamanho igual ao espaçamento entre estribos (2017). Segundo este autor, embora seja uma boa estratégia usar um refinamento da malha para zonas críticas da estrutura, nem sempre a localização das zonas críticas é evidente, e por isso o mais seguro é aplicar malhas uniformes. Procurou-se encontrar uma solução que tomasse em consideração todas estas recomendações.

Foram utilizados os métodos de integração de *Newton-Raphson* regular e o método *Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno (BFGS Quasi-Newton (Secant) iteration method)*. Foram ensaiadas malhas com recurso a integração reduzida e normal. Foi aplicado o método do arco para facilitar a convergência. Niketić (2017) recomenda (após a modelação de uma base de dados de 315 elementos) a utilização de um número máximo de iterações igual a 250. Esta recomendação foi tomada em consideração. O número de incrementos de carga é importante, na medida em que permite descrever com maior ou menor

resolução a evolução das deformações até à rotura, e ainda verificar se de facto se atinge a rotura de forma inequívoca. Daí se ter considerado impor um mínimo de 10 a 20 incrementos até à rotura, acrescentado de um número idêntico de passos durante a fase de plastificação da estrutura. A dimensão dos incrementos de carga foi encontrada em função deste número de incrementos e da carga de rotura, sendo eventualmente ajustada tendo em consideração a necessidade de obter convergência rápida e robustez do cálculo. O critério de convergência tem também de ser imposto, podendo este ser dado em força, deslocamento ou energia, tendo ainda de ser estabelecidos os valores para o erro de convergência e de divergência. O critério de convergência utilizado foi baseado em energia interna, com uma tolerância de convergência de 1×10^{-4} e uma tolerância de divergência de 1×10^4 .

Sendo que algumas das estruturas a estudar são estruturas isostáticas (vigas simplesmente apoiadas), o valor das reações de apoio nestas estruturas é conhecido. Este pode ser diretamente introduzido no modelo obtendo-se reações de apoio nulas. Torna-se indiferente a localização dos apoios no modelo, desde que se garanta o equilíbrio geral da estrutura. No entanto, foram feitas experiências considerando diferentes localizações para os mesmos, e concluiu-se que, devido ao método ser numérico e não analítico, diferentes cargas de rotura foram obtidas para as diferentes posições, ainda que com valores relativamente próximos. Isto explica-se, devido a resíduos no cálculo que são acumulados durante os vários incrementos de carga. Para haver coerência com a aplicação posterior do modelo a estruturas hiperestáticas, resolveu introduzir-se o apoio no ponto exato onde se localiza a resultante da reação.

Tendo em conta todos os aspetos referidos, foram consideradas quatro configurações de malha:

- Malha triangular com vários tamanhos de elemento finito: aberta, intermédia e refinada
- Malha quadrada aberta com elementos de 4 nós e integração normal
- Malha quadrada aberta com elementos de 4 nós com integração reduzida
- Malha quadrada aberta com elementos de 8 nós com integração normal

Estas malhas foram sujeitas a várias análises não lineares até à rotura, variando o número total de incrementos de carga, a escala dos incrementos, o número máximo de iterações para convergência e o método iterativo. Foi estudada a rapidez, facilidade de convergência e robustez das várias malhas, para além do rigor na determinação da carga de rotura.

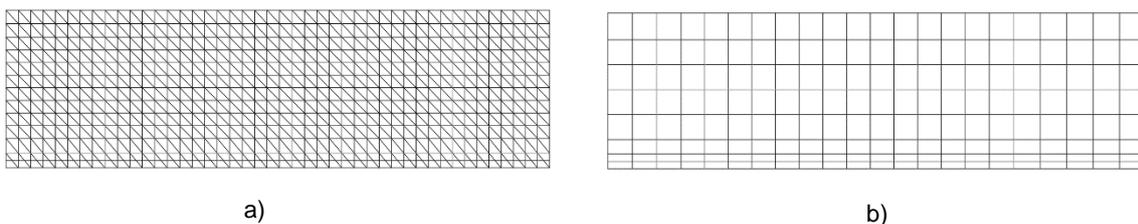


Fig. 43 - Dois dos tipos de malha estudados: a) triangular aberta b) retangular

Na Tabela 13 apresentam-se os resultados obtidos para as cargas de rotura de cada tipo de malha, incluindo o número de incrementos de carga e o número de iterações até ser atingido o incremento correspondente à rotura. O estudo paramétrico permitiu retirar algumas conclusões úteis à realização das análises subsequentes:

- Relativamente à facilidade de obtenção de resultados e robustez, as malhas com as quais foi mais fácil chegar a uma solução com muitos incrementos de carga convergidos foram: a malha triangular mais aberta, a quadrada com elementos de 4 nós e a quadrada com elementos de 8

nós. Relativamente às restantes malhas triangulares, foi possível chegar sem muita dificuldade a resultados numa delas, sendo que nas restantes os resultados foram satisfatórios, ainda que com vários passos não convergidos. Relativamente à malha de 4 nós com aplicação de integração reduzida não foi possível chegar a resultados satisfatórios no que toca à carga de rotura, pois havia demasiadas não convergências até mesmo divergência.

- Relativamente aos valores da carga de rotura, concluiu-se que todos os modelos deram valores máximos de carga abaixo do valor experimental. Concluiu-se ainda que a malha que deu origem a valores máximos da carga, e, portanto, mais próximos dos valores experimentais foi a malha triangular mais aberta.
- Relativamente à dimensão da malha concluiu-se que, quanto mais apertada, mais baixo o valor máximo da carga, o que está de acordo com o referido por Niketić (2017, p. 53). A malha triangular mais apertada dá origem a valores próximos das malhas quadradas. As malhas quadradas deram origem ao mesmo valor na rotura e a diagramas de campos de tensões muito semelhantes.
- De forma geral foram obtidos bons resultados com cerca de 50 incrementos de carga. Apesar de se ter em consideração a recomendação de Niketić, a maioria das análises chegava à convergência ao fim de menos de 50 a 100 iterações. Certas vezes verificou-se que o programa, apesar de convergir, começava a fazer reduções muito drásticas da carga que não correspondiam à redução de carga normal após rotura, mas antes a uma descarga progressiva. Estas situações foram raras, sendo normalmente evitadas aumentando o tamanho dos incrementos de carga.

Tabela 13 - Resultados para as várias malhas estudadas

	Triangular					Quadrada 4 nós		Quadra- da 8 nós	Valor ex- perimental
	Média					I.norm	I.reduz		
	Grossa	M0	M1	M2	Refinada				
Força (kN)	353	327	329	314	278	284	-	256	360
N.º increm	15	13	65	61	59	22	-	13	
N.º iter	143	101	195	198	123	124	-	45	

Após os vários ensaios, a escolha da malha a utilizar foi feita com base nos critérios aqui apresentados, dos quais a robustez foi o mais relevante. Isto porque se deseja um método genérico, que possa ser aplicado a um variado tipo de estruturas, sendo essencial que este fosse capaz de convergir facilmente, com alguma rapidez, e que fosse independente da estrutura em causa. A malha escolhida foi a malha quadrangular de 4 nós com integração normal e o método de integração *Newton-Raphson* regular. Foi obtida bastante robustez e rapidez de convergência.

Escolhido o tipo de malha foram modeladas as mesmas estruturas já estudadas e efetuadas as análises não lineares. Estudaram-se os modos de rotura do capítulo anterior, tendo por base os mesmos exemplos. Isto permitiu comparar os dois métodos e tirar conclusões relativas à fiabilidade das hipóteses estabelecidas no primeiro.

Sendo que, tal como referido na subsecção 3.1, a malha deve ser representativa não só do material a estudar, mas também do tipo de rotura, considerou-se que, para a análise da rotura nos nós, a malha deveria ser refinada. Neste sentido, utilizaram-se elementos com dimensão mais reduzida.

3.5. EXEMPLOS

3.5.1. CARGA CONCENTRADA EM APOIO DIRETO

Para o primeiro caso de estudo – rotura por flexão – o valor obtido para a carga de rotura (644,00 kN) é inferior mas muito próximo do determinado analiticamente, quer pelo método das escoras e tirantes (648,59 kN), quer pelo cálculo à flexão (648,94 kN). Isto demonstra a grande fiabilidade do método, especialmente para o caso dos modos de rotura por flexão, que são os mais relevantes em dimensionamento, por representarem geralmente uma rotura dúctil. A Fig. 45 apresenta o diagrama de forças-deformações para este caso (assinalado ainda o valor de cálculo pelo MCTD), assim como o correspondente campo de tensões. No primeiro verifica-se que a rotura é claramente de flexão, pois há uma estabilização das deformações na carga máxima, com um claro patamar horizontal. O campo de tensões apresenta a escora horizontal totalmente comprimida, sendo que o valor da tensão só é máximo nos elementos finitos junto à face superior da viga, dado que o diagrama de tensões na escora não é retangular. Pode-se observar ainda que toda a área de betão abaixo da mesma se encontra sem tensão, o equivale a betão fendilhado. Podemos observar também claramente a escora inclinada de apoio direto entre a carga e o apoio, assim como o desvio das compressões dessa mesma escora na região onde se localiza a armadura de tração. Confirma-se o esquema apresentado no capítulo anterior relativo ao campo de tensões descontínuo e correspondente modelo de escoras e tirantes. Na Fig. 45c apresenta-se a sobreposição do MCTC com o MCTC, onde se observa uma grande semelhança entre os dois. A tensão de cedência no betão será igual a $f_{c,eff}$, que não é constante no caso dos campos de tensão contínuos. Assim, a plastificação dos elementos finitos dar-se-á para extensões de compressão que são função desse valor. No limite, a extensão de compressão correspondente à plastificação dos elementos finitos é igual a

$$\varepsilon = \frac{f_c}{E} = \frac{30}{30000} = 0.001 \quad (3.1)$$

Portanto, podemos afirmar que todos os elementos finitos que estejam sujeitos a uma extensão de compressão igual ou superior a este valor (em valor absoluto) se encontram plastificados, tal como se ilustra na Fig. 44, podendo haver elementos que plastificam para valores inferiores (azul e vermelho)

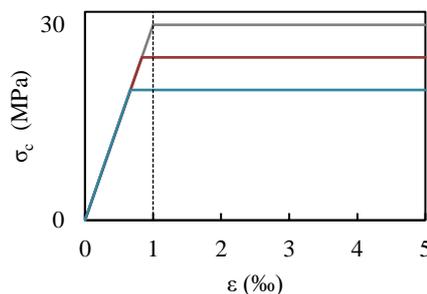


Fig. 44 - Extensão de plastificação para diferentes valores de $f_{c,eff}$

Na Fig. 45d apresenta-se um mapa com os elementos finitos com extensão de compressão superior a esse valor. Podendo também haver outros elementos finitos que plastificaram para valores inferiores da extensão de compressão, este diagrama é ilustrativo das regiões plastificadas.

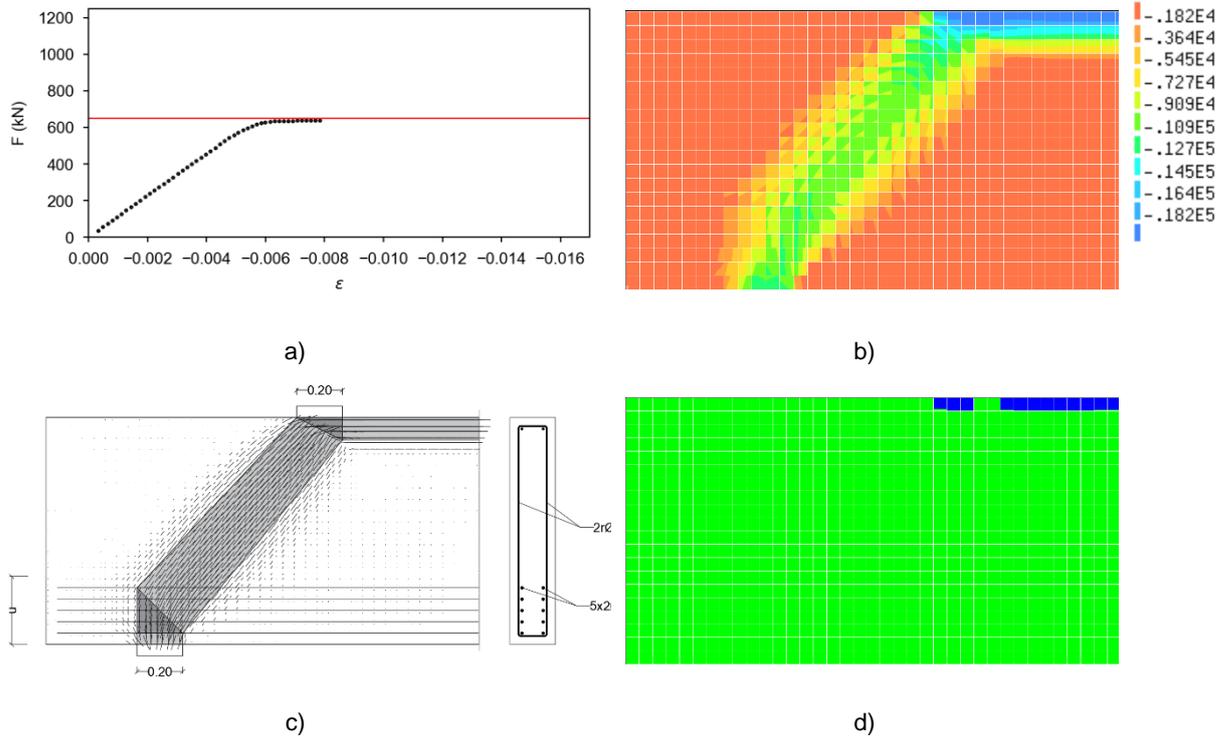


Fig. 45 – Carga concentrada: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

3.5.2. CARGA DISTRIBUÍDA

No caso com a carga distribuída, obteve-se uma carga de rotura inferior, mas muito próxima do valor analítico (646 kN para 649 kN) o que demonstra mais uma vez a convergência deste método com o método analítico, no caso da rotura por flexão. O principal interesse deste caso, foi comparar a topologia do campo de tensões obtido para uma carga distribuída com o obtido para uma carga concentrada (Fig. 46). Note-se que se procurou uma configuração da estrutura propositadamente de forma a que a carga concentrada corresponda à força resultante da carga distribuída. Daí não ser de estranhar que os valores da carga de rotura de ambos os casos sejam muito próximos (640 kN para o caso 1). A diferença existente deve-se unicamente a aproximações do processo numérico. Tem ainda interesse, mais uma vez, comparar o MCTD com o MCTC e verificar a semelhança entre os dois.

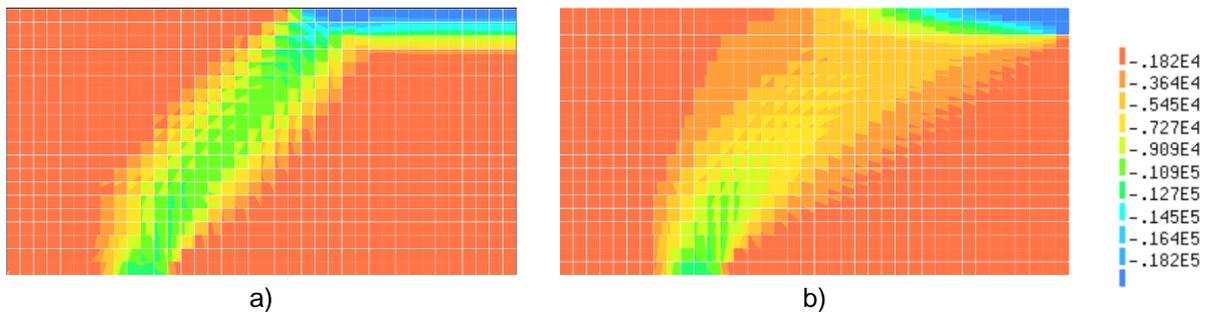


Fig. 46 - Comparação dos MCTC para carga concentrada (a) e distribuída (b)

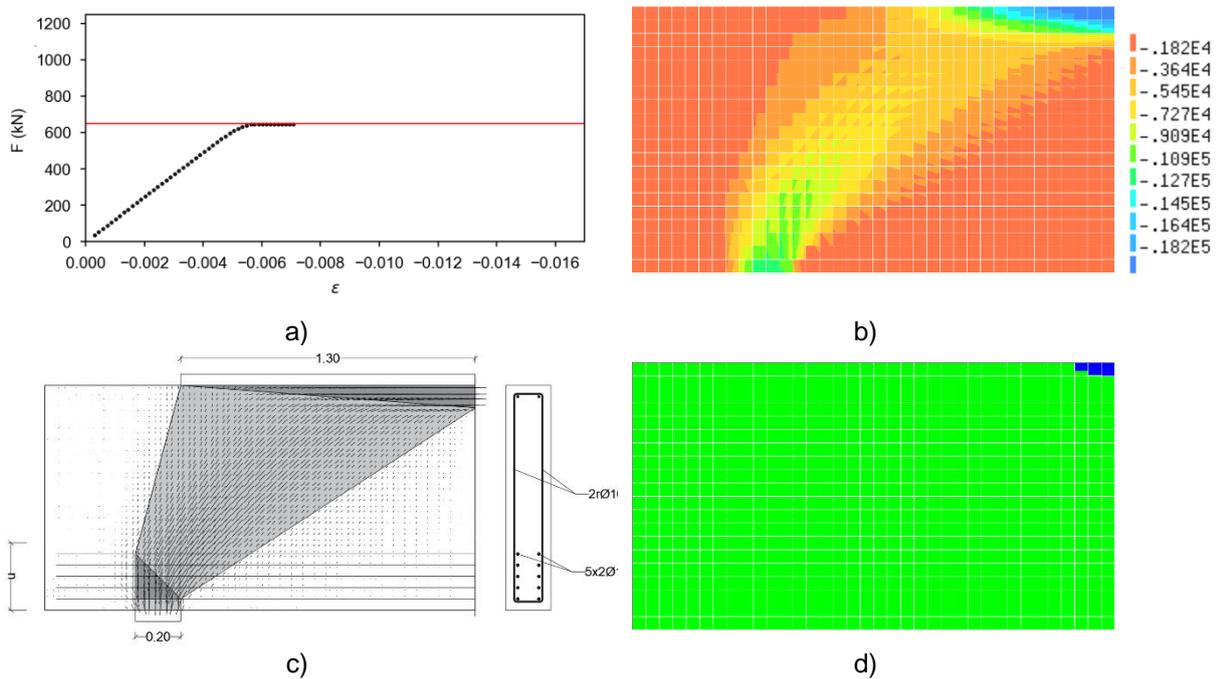


Fig. 47 –Carga distribuída: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

3.5.3. ESTUDO DO EFEITO DE APOIO DIRETO

No capítulo anterior foi feito um estudo sobre o efeito de apoio direto, para cargas próximas do apoio. O mesmo estudo foi feito com os MCTC e obtiveram-se sempre cargas de rotura muito próximas (

Tabela 14) às obtidas analiticamente (todas correspondentes a roturas por flexão). Observa-se que a carga de rotura não é igual para todos estes casos, havendo ligeiras variações se devem à variação do braço do momento fletor interno (ver subsecção 2.6.3).

Tabela 14 – Comparação dos diferentes casos

a	MCTC	MCTD	$\sigma_{Asl,m\acute{a}x}$	$\sigma_{Ast,m\acute{a}x}$
0.70	730	736	316	500
0.95	711	718	498	500
1.20	692	700	500	500
1.45	673	682	500	500
1.70	664	664	500	500
1.95	635	647	500	500

Das Fig. 48 até à Fig. 53 (campos de tensões e tensões de tração na armadura transversal) é observável a forma como os campos de tensões se alteram à medida que a carga passa de apoio direto a apoio indireto e como vai aumentando a sollicitação dos estribos. Percebe-se que, quanto maior a parte da carga que é suspensa maiores são as deformações na viga. Este efeito é visível nos diagramas de tensões-deformações (Fig. 54).

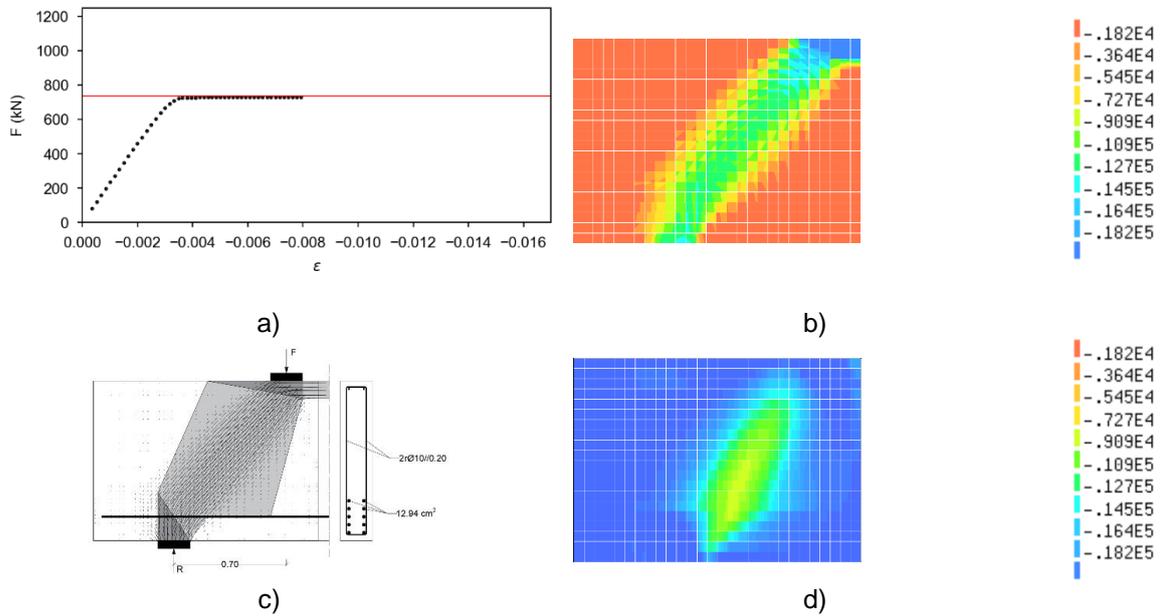


Fig. 48 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=0.70$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

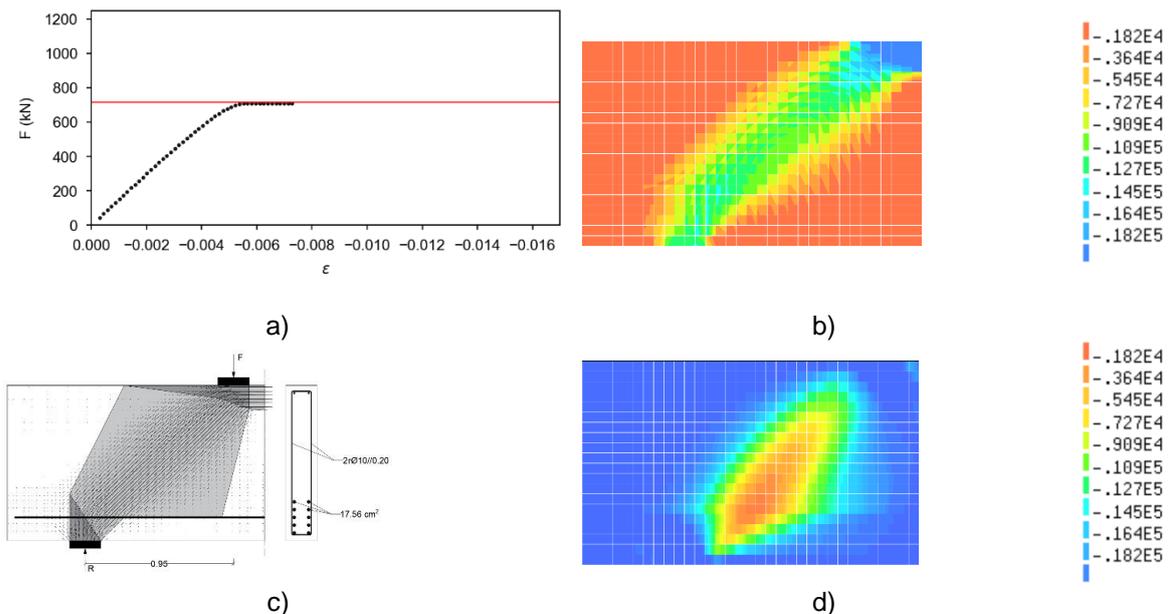


Fig. 49 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=0.95$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

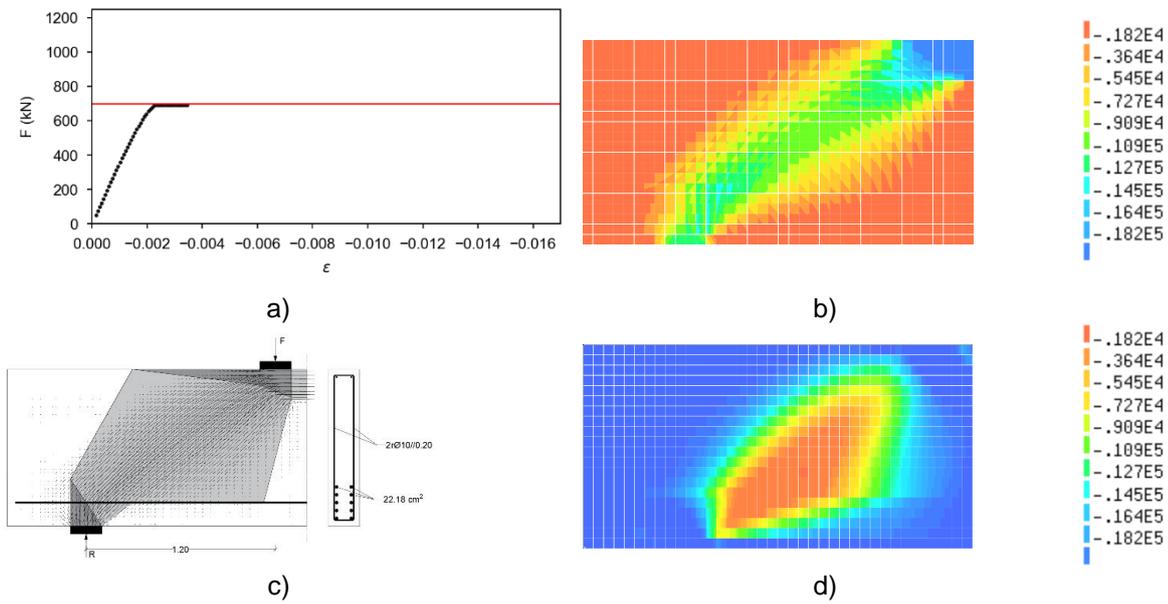


Fig. 50 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=1.20$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

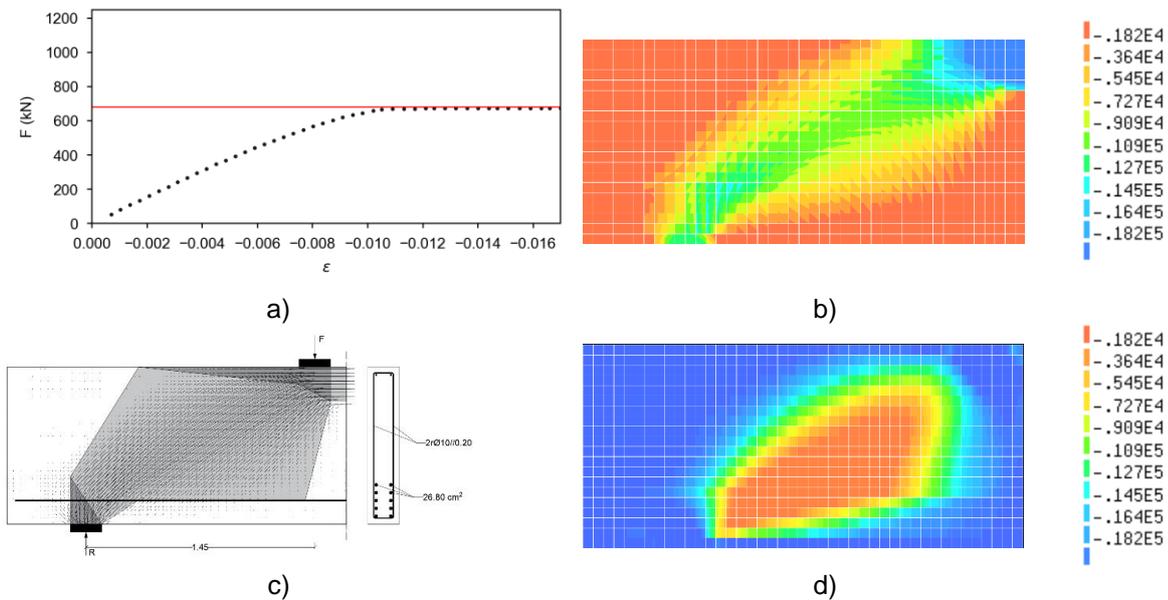


Fig. 51 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=1.45$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

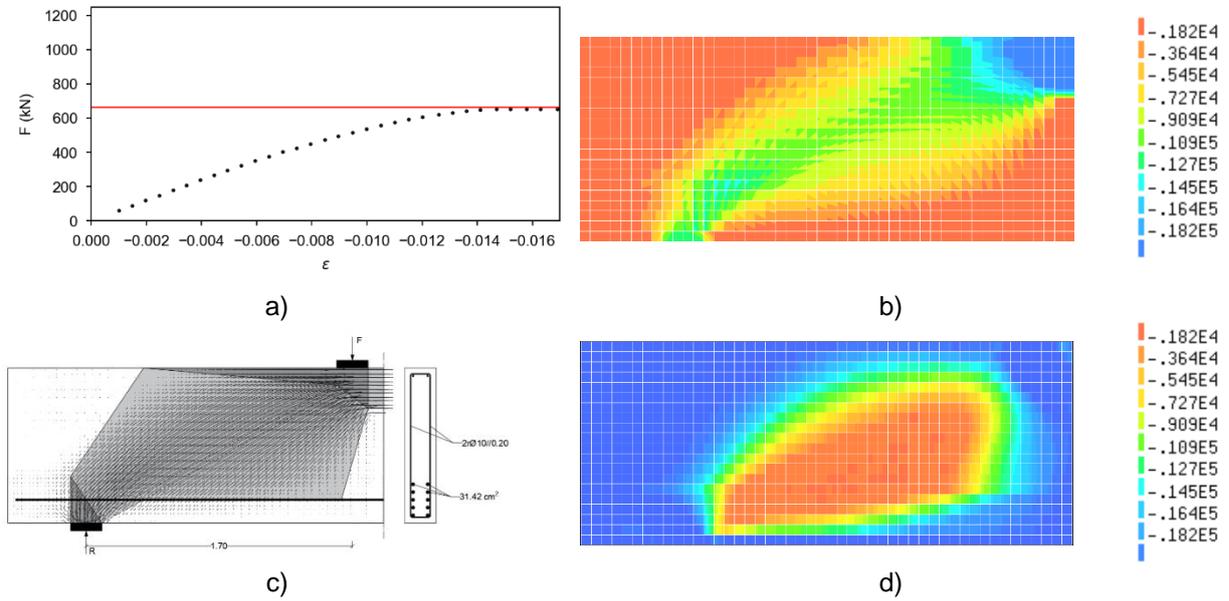


Fig. 52 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=1.70$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

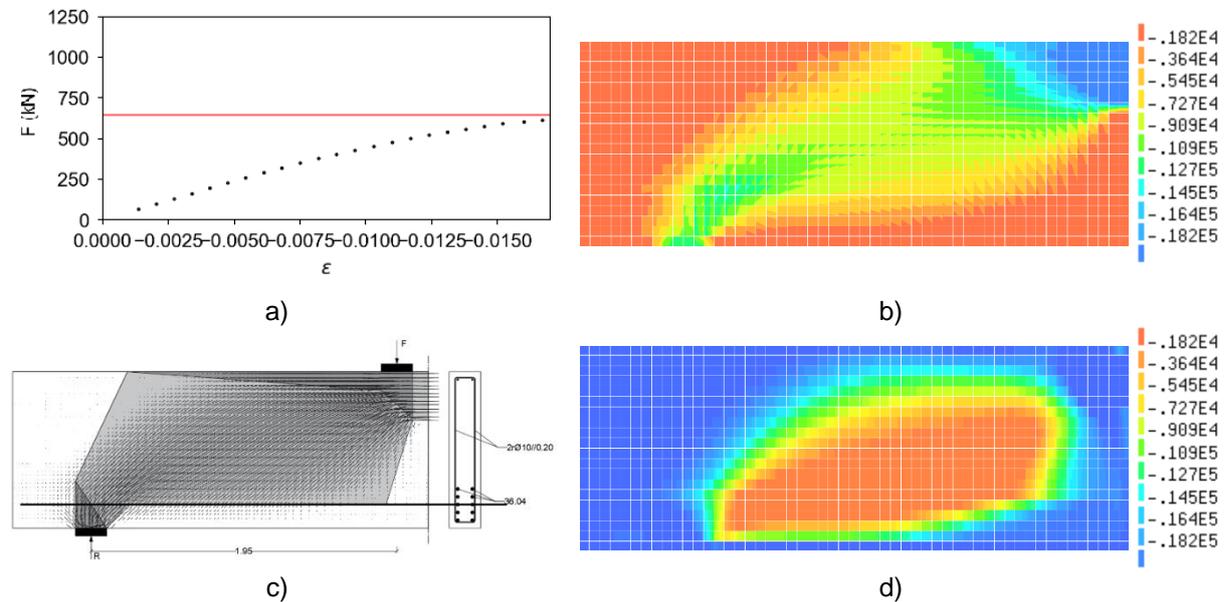


Fig. 53 – Estudo do efeito de apoio direto ($a=1.95$ m): a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) tensões nas armaduras transversais

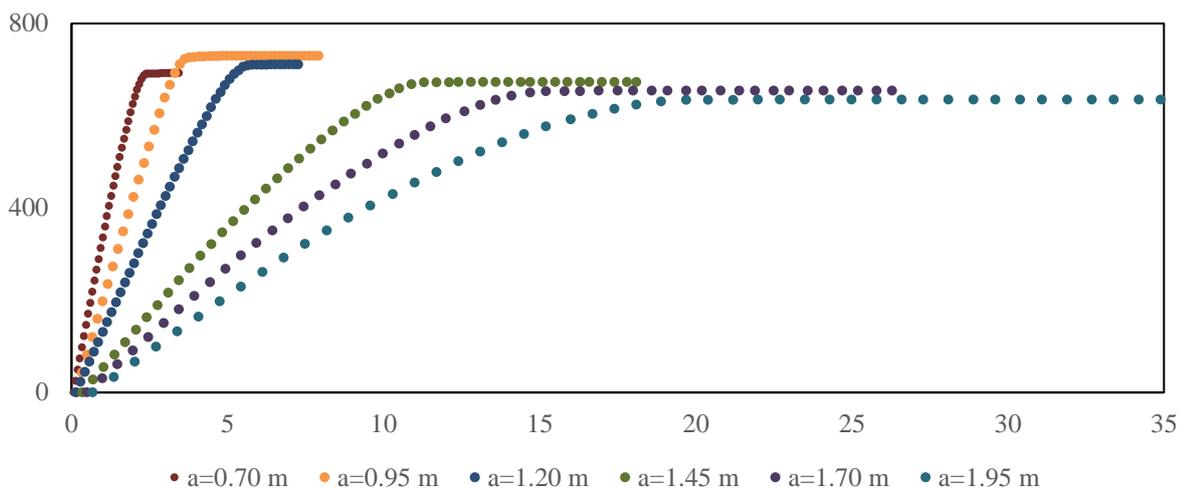


Fig. 54 - Comparação dos vários casos de afastamento progressivo da carga do apoio

3.5.4. ESMAGAMENTO DOS NÓS

Fazendo variar os parâmetros geométricos da estrutura é possível forçar uma rotura localizada nos nós, nas faces desejadas. Isto foi feito, com vista a demonstrar a aplicação do método e a comparação entre MCTD e MCTC e tirar conclusões relativas à tensão de compressão no betão a considerar e testar os parâmetros regulamentares para a mesma. Para este estudo o tamanho dos elementos finitos foi reduzido para captar melhor o detalhe do esmagamento.

Se a rotura se der no nó A, esta pode ter como causa o esmagamento da face do nó em contacto com o apoio ou da face em contacto com a escora inclinada. Dando-se a rotura no nó B, esta pode dar-se na face em contacto com o apoio, na face da escora inclinada, ou na face da escora horizontal. Nos pontos seguintes, iremos analisar estes vários casos de rotura separadamente. Para evitar que se desse rotura por flexão, foi necessário considerar uma armadura longitudinal superior à necessária, pelo que esse foi um dos parâmetros alterados em todas as análises. O cálculo da rotura nos nós foi feito de acordo com o apresentado na subsecção 2.6.1 para a verificação das tensões nos mesmos.

3.5.4.1. Nó A – esmagamento no apoio

Para obter a rotura relativa ao primeiro dos casos enunciados (esmagamento do nó A na face relativa ao apoio), foi necessário reduzir a dimensão do apoio ($a_1=0.12$ m), mantendo a do outro apoio. Foi considerada uma armadura longitudinal constituída por 5 níveis, cada um com 3 varões de 12 mm (16.96 cm²). Com o MCTD foi obtida uma carga de rotura de 612 kN. As tensões em todas as faces dos nós, calculadas pela metodologia apresentada no capítulo 2 são apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A

Nó	f _{c,eff}	Face				Tensão		
Nó A	25.50	Apoio	a ₁	0.180	m	σ ₁	25.50	MPa
		Escora C ₂	a ₂	0.334	m	σ ₂	14.20	MPa
Nó B	30.00	Apoio	a ₃	0.200	m	σ ₃	15.30	MPa
		Escora C ₁	a ₄	0.141	m	σ ₄	30.00	MPa
		Escora C ₂	a ₅	0.243	m	σ ₅	12.58	MPa

A mesma estrutura foi posteriormente calculada recorrendo aos MCTC. Na Fig. 55 mostra-se o diagrama de tensões-deformações, o campo de tensões e ainda as extensões de compressão com uma escala que ilustra os elementos finitos que estão seguramente plastificados, pois têm extensões superiores a 1‰. Como explicado anteriormente, este é o valor da extensão correspondente ao patamar de cedência do betão para o valor máximo da resistência à compressão. Pode-se observar que a zona do apoio inferior está completamente plastificada (o apoio corresponde a dois elementos finitos) enquanto que a do apoio superior só plastificou parcialmente (três em quatro elementos). A carga de rotura obtida com o MCTC foi de 789 kN, inferior ao valor obtido pelo MCTD, que se provou conservativo.

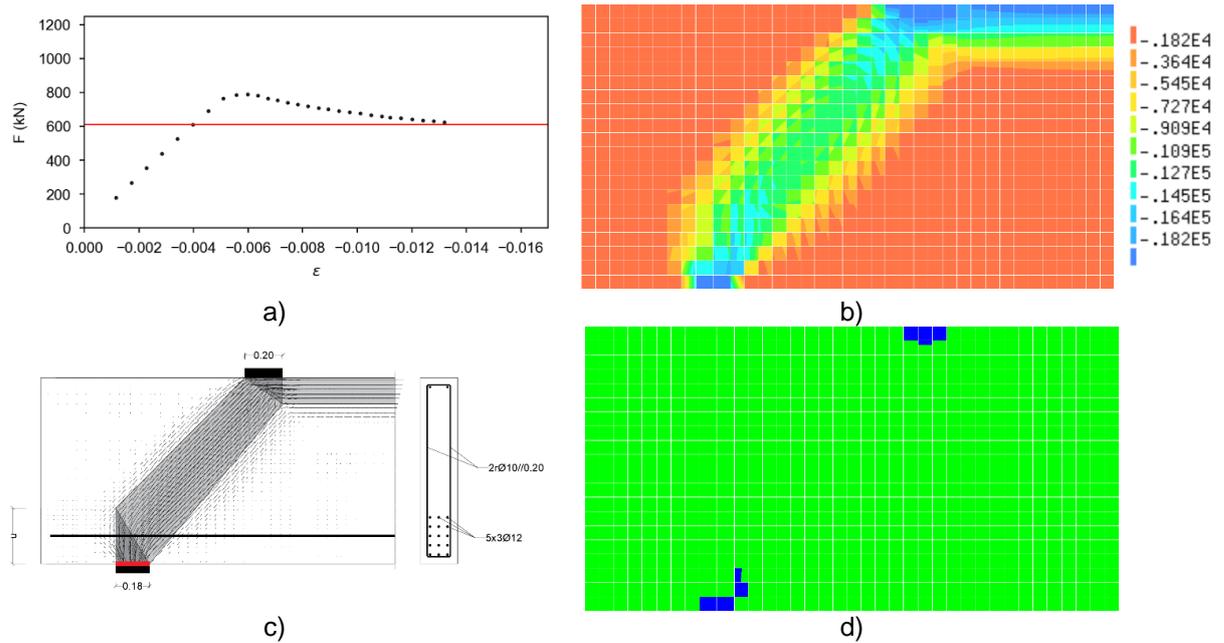


Fig. 55 –Rotura por esmagamento do nó CCT na face do apoio: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

3.5.4.2. Nó A - esmagamento na escora

Para conseguir forçar a rotura na face da escora do nó A, foi considerada uma armadura longitudinal constituída por 1 nível com 3 varões de 25 mm (14.73 cm²). O valor da carga de rotura obtida foi de 877 kN. Na Tabela 16 apresenta-se o cálculo das tensões nos nós.

Tabela 16 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A

Nó	fc,eff	Face			Tensão			
Nó A	25.50	Apoio	a ₁	0.200	m	σ ₁	21.93	MPa
		Escora C ₂	a ₂	0.219	m	σ ₂	25.50	MPa
Nó B	30.00	Apoio	a ₃	0.200	m	σ ₃	21.93	MPa
		Escora C ₁	a ₄	0.123	m	σ ₄	30.00	MPa
		Escora C ₂	a ₅	0.233	m	σ ₅	18.82	MPa

Para este caso, o valor da carga de rotura obtida no *software* de cálculo foi de 728 kN, valor inferior ao obtido pelo MCTD, sendo desta vez o cálculo pelo MCTC conservativo relativamente ao cálculo pelo MCTD. Pelo MCTD o coeficiente η_ϵ será de aproximadamente 0.71, enquanto que no MCTD este era de 0.85. No diagrama de extensões de compressão (Fig. 56d) podemos observar que há uma linha vertical de elementos finitos plastificados que interrompe a escora junto ao apoio. O método preconizado no EC2 não está, neste caso, do lado da segurança. É de notar que esta rotura se dá na vertical e não na direção perpendicular à escora inclinada, tal como é verificada a rotura no MET/MCTD.

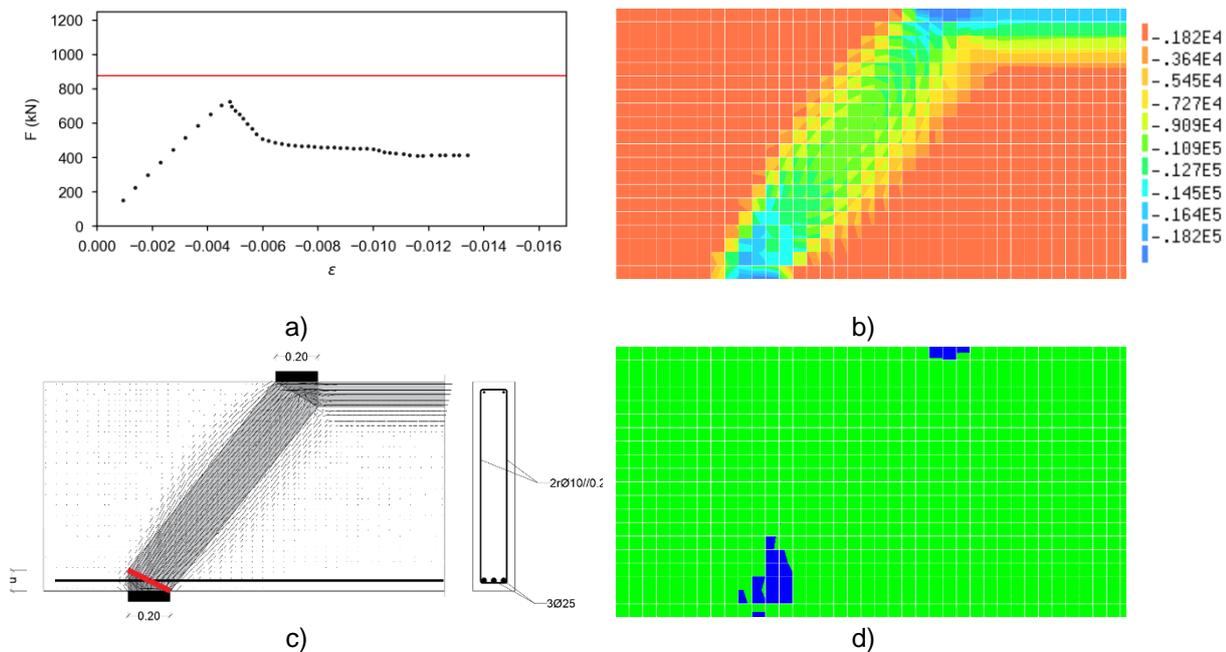


Fig. 56 – Rotura por esmagamento do nó CCT na face da escora:
 a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

3.5.4.3. Nó B - esmagamento no apoio

Para forçar uma rotura na face do apoio do nó B foi necessário reduzir a sua largura ($a_3=0.15$ m), obtendo-se uma carga de rotura de 900 kN. A armadura longitudinal considerada foi semelhante à do primeiro caso.

Tabela 17 – Tensões nas faces dos nós para o esmagamento na face do apoio do nó A

Nó	$f_{c,eff}$	Face				Tensão	
Nó A	25.50	Apoio	a_1	0.200	m	σ_1	22.50 MPa
		Escora C ₂	a_2	0.349	m	σ_2	17.32 MPa
Nó B	30.00	Apoio	a_3	0.150	m	σ_3	30.00 MPa
		Escora C ₁	a_4	0.141	m	σ_4	30.00 MPa
		Escora C ₂	a_5	0.206	m	σ_5	22.91 MPa

Para este caso, a carga de rotura obtida pelo MCTC foi de 841 kN, um pouco inferior ao valor de rotura obtido pelo MCTD. Podemos verificar no diagrama de extensões de compressão (Fig. 57d) que o apoio está completamente plastificado (corresponde a três elementos finitos). Observa-se no campo de tensões e no diagrama das extensões de compressão do betão que o apoio superior está completamente plastificado.

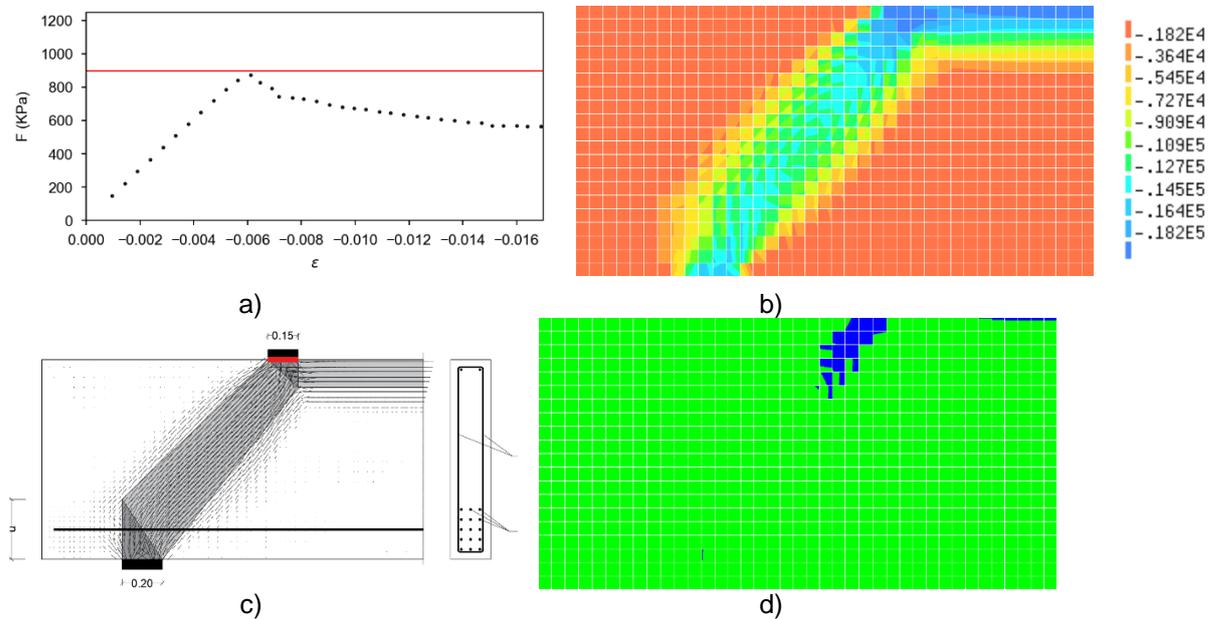


Fig. 57 – Rotura por esmagamento do nó CCC na face do apoio: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC e face de rotura d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

3.5.4.4. Nó B - esmagamento nas escoras

Estes dois casos de rotura (face do nó B para a escora horizontal e para a escora inclinada) não foram possíveis ser forçados. Relativamente à face da escora horizontal, o método de cálculo à partida já pressupõe uma tensão atuante na escora igual à tensão resistente. Quanto à rotura na face da escora inclinada, verificou-se que, sendo a tensão resistente constante nos MCTD, a tensão nesta face nunca excede as restantes, dado que a_5 é sempre superior a a_3 . Logo, a correspondente tensão na primeira face é superior à primeira.

3.5.5. ESCORREGAMENTO DA ANCORAGEM (NÓ CCT)

Em todos os casos anteriores, os modelos utilizados pressupunham uma compatibilidade de deslocamentos entre o aço e o betão. No entanto, como foi apresentado na subsecção 2.2, um dos modos de rotura possíveis com relevância quando se estuda a aplicação destes modelos é o escorregamento da armadura na ancoragem. No caso do exemplo apresentado, seria junto ao nó A. Como foi já referido na subsecção 2.6.4, os casos apresentados pressupõem suficiente espaço junto a este nó para que a amarração se dê. Isto é, para que as tensões na armadura longitudinal sejam completamente transmitidas para o betão e, portanto, não haja escorregamento.

Uma vez que a verificação do escorregamento na ancoragem é indispensável na aplicação de MCT, é desejável demonstrar que os modelos criados são capazes de traduzir este fenómeno físico. Para traduzir esta hipótese de rotura no modelo numérico é necessário que esta compatibilidade de deslocamentos seja condicionada por algum tipo de lei. Por forma a garantir a facilidade de aplicação do método, optou-se por usar uma lei simples, em que a tensão tangencial máxima, que define o limite do escorregamento é constante relativamente ao deslocamento relativo entre o betão e o aço (Fig. 58).

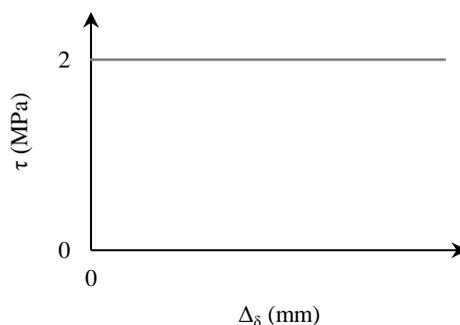


Fig. 58 - Lei usada para o modelo *bond slip* (tensão tangencial / deslocamento relativo entre o aço e o betão)

A lei apresentada foi introduzida, como um modelo *bond slip*. O software possui já 6 leis tipo que podem ser manipuladas para o que se deseja. Foi escolhido o modelo 3 (*multilinear*) e ajustado, sendo que a tensão de escorregamento é, tal como apresentado na subsecção 2.6.4, igual a $2f_{ct}$ e para a amarração de varões de 25 mm de diâmetro, o comprimento de amarração necessário é 0.54 m. É necessário introduzir no programa o perímetro total dos varões que cada barra representa. Tendo em conta a geometria dos campos de tensão e do nó, este comprimento é medido de modo diferente de acordo com o nível de armadura em questão. Isto é, o comprimento de amarração necessário para cada nível é diferente, sendo que por simplificação é conservativamente considerado o comprimento medido a partir do início do apoio (Fig. 59), correspondente ao início da amarração no nível mais desfavorável (o inferior). Mas na figura nota-se que, nos níveis superiores, a amarração começa um pouco antes. Essa diferença é tomada em conta no modelo numérico mas não no MCTD.

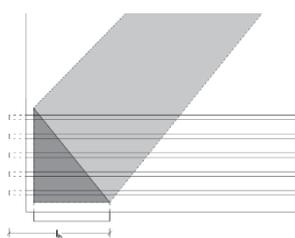


Fig. 59 – Alteração do modelo para forçar a rotura por escorregamento e comprimento de amarração considerado nos MCTD

Para contornar esta diferença entre os dois métodos, foi usada uma solução com apenas um nível de armaduras. Para testar a resposta do modelo a este modo de rotura, para além de se introduzir um modelo de *bond slip*, reduziu-se o comprimento de amarração disponível, por forma a forçar o escorregamento dos varões (Fig. 59). Sendo este um modelo meramente teórico, por forma a exemplificar de forma mais evidente o fenómeno decidiu-se baixar a tensão de escorregamento para 2.0 MPa. A carga de rotura obtida foi 569 kN.

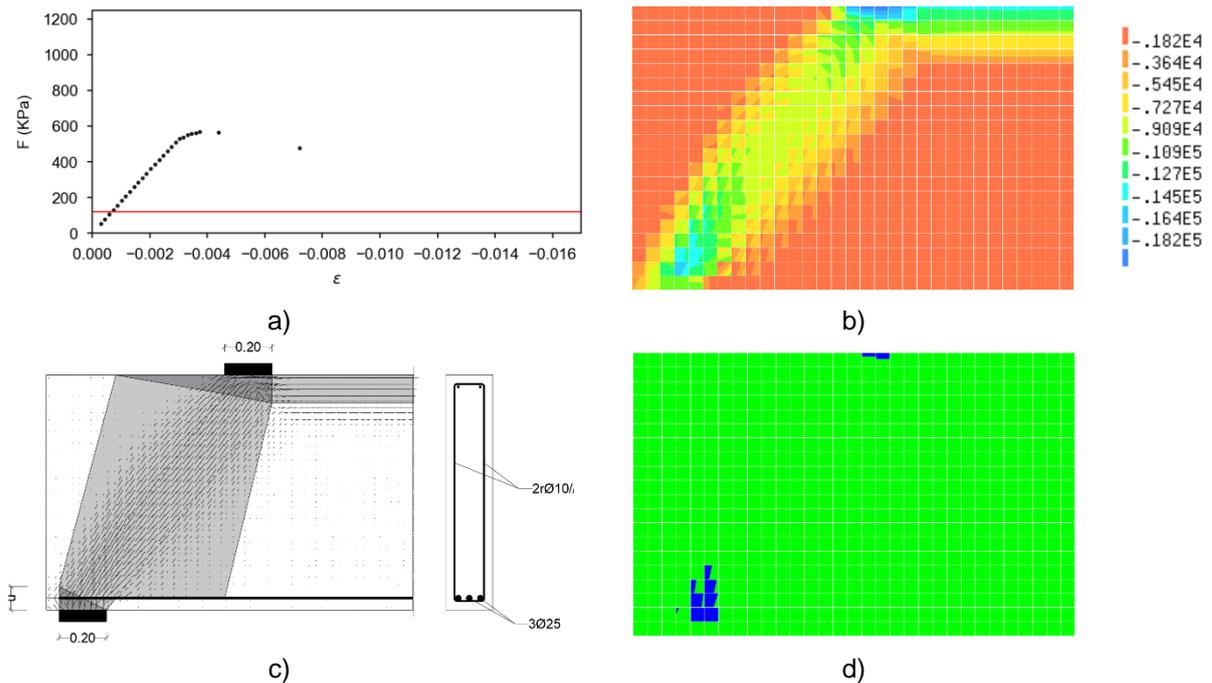


Fig. 60 – Rotura por escorregamento da armadura: a) diagrama de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) b) MCTC c) sobreposição do MCTD com o MCTC d) extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

Pelos MCTD podemos calcular igualmente a carga de rotura da estrutura nestas condições. Se considerarmos a amarração a iniciar-se no suporte, o comprimento de amarração disponível é:

$$l_{b,disp} = 0,20 \text{ m} \quad (3.2)$$

Pela expressão 2.32,

$$\sigma_s = \frac{l_b 4 f_b}{\phi} = 64 \text{ MPa} \quad (3.3)$$

Com a tensão no aço calcula-se a força correspondente:

$$F = A_s \sigma_s = 94.23 \text{ kN} \quad (3.4)$$

Este valor é bastante inferior ao obtido pelo MCTC.

3.6. APLICAÇÃO NA VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS

3.6.1.1. Vigas Higgins *et al*

Para testar todos os pressupostos e modos de rotura anteriormente expostos, as vigas ensaiadas por Higgins *et al* (2004) apresentadas na subsecção 2.6.5.1, foram modeladas e ensaiadas. As vigas foram modeladas considerando a simetria (só se modelou metade da viga) e foram utilizados elementos finitos com as dimensões 0.10x0.10 m. Na Fig. 62 apresentam-se os diagramas de tensões-deformações obtidos para os sucessivos incrementos de carga até à rotura.

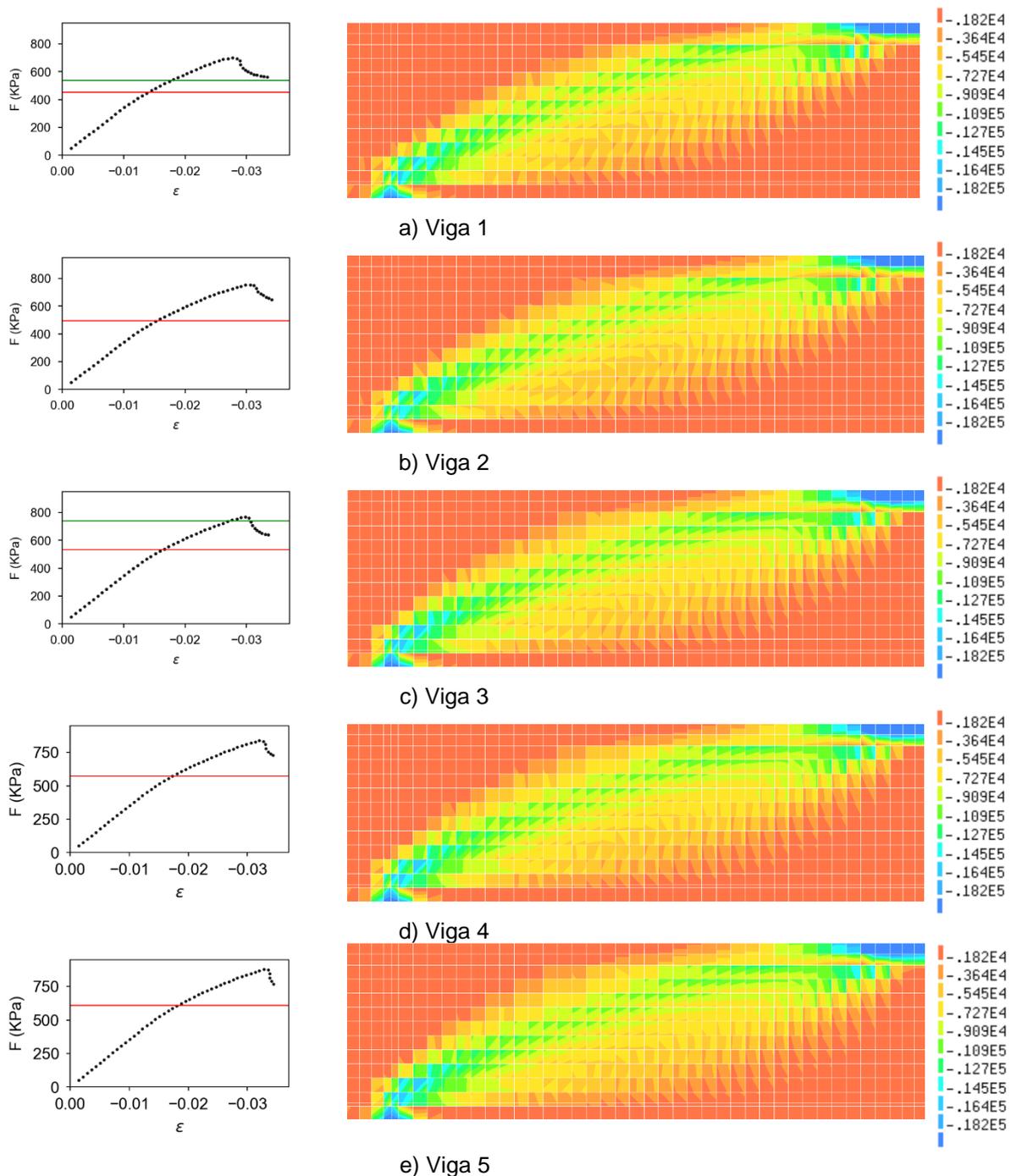


Fig. 61 - Diagramas de tensões-deformações, carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e dos ensaios (linha verde), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰) das vigas 1 a 5

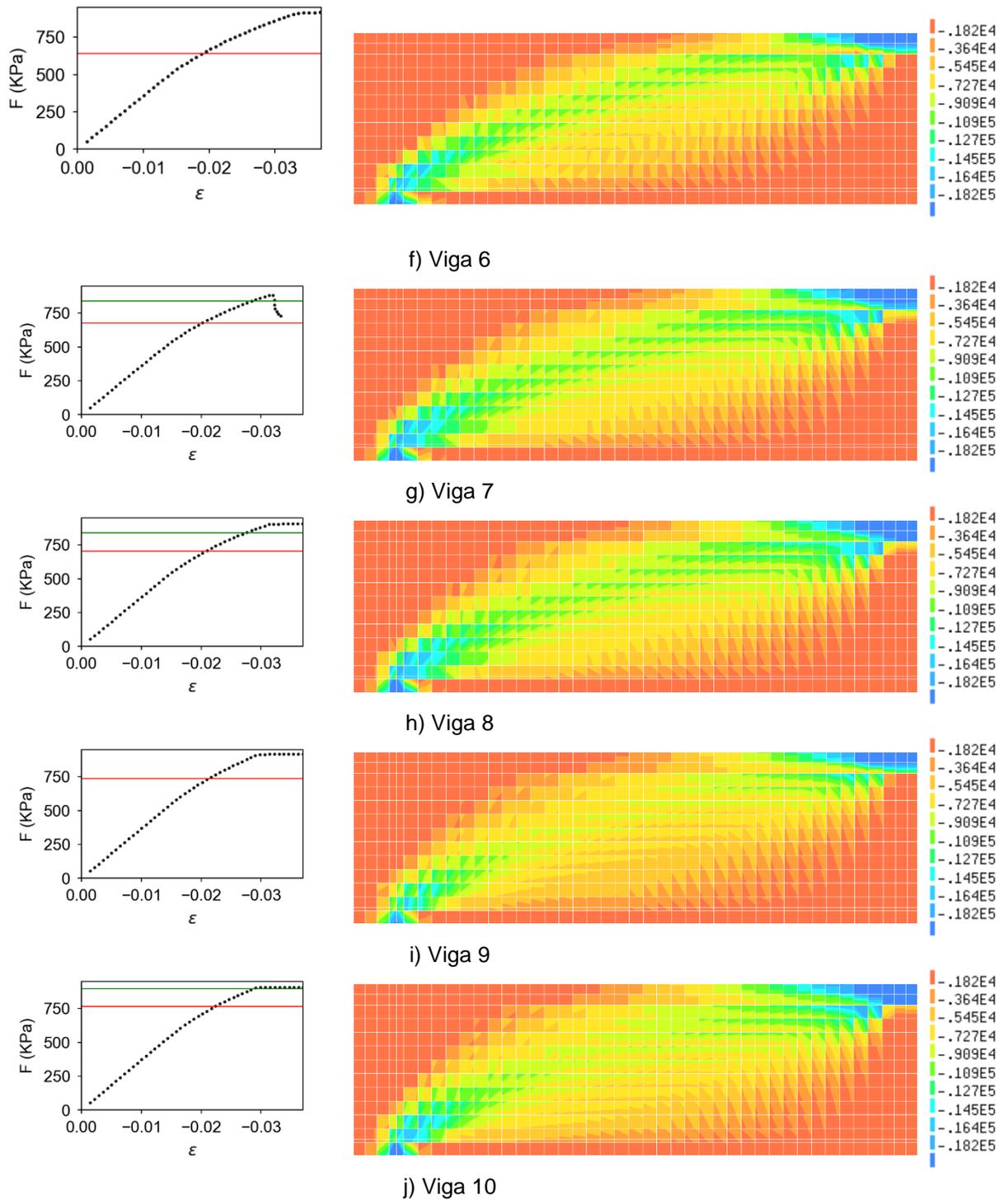


Fig. 62 - Diagramas de tensões-deformações, carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e dos ensaios (linha verde), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1%) das vigas 5 a 10

Na Fig. 63 apresenta-se uma relação normalizada entre a resistência ao corte de cada viga e a respetiva taxa de armadura transversal, incluindo os resultados experimentais. Note-se que o betão das vigas testadas não tem exatamente a mesma resistência da usada no cálculo numérico, já que foi usado um valor médio para o mesmo. Verifica-se que, até certo limite, a carga de rotura aumenta de forma apro-

ximadamente proporcional ao aumento de área de armadura transversal. No entanto, a partir de uma determinada área de aço da armadura transversal, a rotura passa a dar-se não por compressão das escoras, mas por flexão, o que significa que o aumento da área de armadura transversal não produz alteração na carga de rotura que se mantém constante. Ambas as verificações eram expectáveis. No entanto, concluiu-se que o modelo sobreavaliou a capacidade de carga das vigas relativamente aos resultados dos ensaios e dos MCTD. Pode-se verificar na Fig. 62, a diferença entre a carga de rotura numérica e a experimental. Note-se, no entanto, que só há correspondência entre as vigas realmente ensaiadas e as analisadas numericamente no caso da viga 1 e da viga 10, já que as restantes são teóricas, fazendo variar a quantidade de armadura transversal de forma regular entre essas duas e não coincide com as ensaiadas. Há, no entanto, grande proximidade entre a quantidade de área de aço das vigas ensaiadas e das vigas 3, 7 e 8. Em consequência da sobreavaliação da resistência, a rotura por flexão passou a dar-se a partir da viga 6 e não na viga 10, como aconteceu nos ensaios.

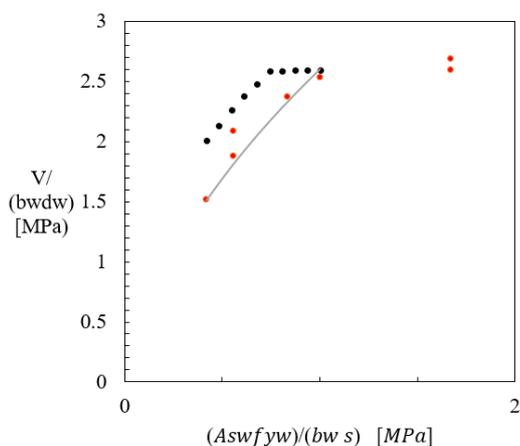


Fig. 63 – Efeito da armadura de corte na resistência: a preto resultados numéricos, a vermelho MCTC e a linha cinza MCTD

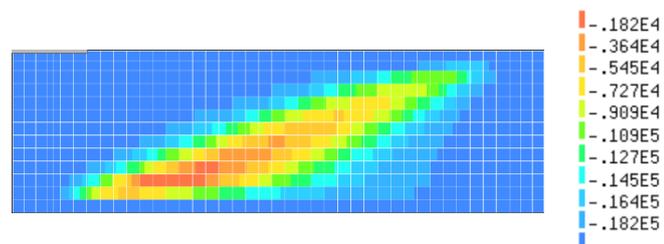


Fig. 64 - Extensões de tração na armadura transversal da viga 3 para uma carga de 736 kN

Como já referido na subsecção 3.2 há alguns modos de rotura que o modelo não distingue da rotura por esmagamento das escoras. Um desses modos é a estrição dos estribos, uma vez que, no modelo, o aço tem, a partir de uma certa extensão, um comportamento plástico, com patamar infinito e, portanto, não rompe. As 10 vigas estudadas encontram-se no limite da aplicabilidade destes métodos, porque têm uma área de aço transversal bastante reduzida. Pode dar-se o caso de haver rotura por estrição dos estribos. A análise do relatório dos ensaios não permitiu esclarecer esta questão (Higgins *et al.*, 2004). Na Fig. 64 podemos observar as extensões de tração na viga 3 para uma carga aproximada à carga de rotura da viga ensaiada (736 kN) com área de aço muito semelhante. A extensão máxima no aço é de 14.96%. A extensão para a carga de rotura é de 21.20%.

3.6.1.2. Vigas Walraven et al

As vigas estudadas por Walraven et al (2013) foram igualmente modeladas, neste caso com elementos finitos de dimensão igual a 0.125x0.125 m. No caso das vigas GDL30 foi considerada a simetria na modelação e no caso das vigas GDL90 esta não existe. Foi feita uma simplificação da secção, discretizando a região onde há variação linear da espessura do banzo.

Os resultados obtidos apresentam-se na Tabela 18 e os diagramas na Fig. 66. Pode-se observar que, neste caso, não houve sobrestimativa das cargas de rotura, estando estas sempre abaixo dos valores experimentais, à exceção de um caso onde este valor foi ligeiramente superior. Na Fig. 67 podemos observar a comparação entre os valores experimentais e numéricos para a carga de rotura e na Fig. 68 o mesmo, mas com valores normalizados. Verifica-se alguma diferença face aos ensaios e MCTD no caso da viga GD90H.

Tabela 18 – Características mecânicas das vigas escolhidas e resultados da análise

Viga	Armadura transversal								Resultados				
	Ast		Ast1		Ast2		ρ (%)	w	fyt	Carga rotura (kN)		CR norm (ad)	
	s1	Ast1	s2	Ast2	num	exp				exp	num		
GD30L	2	8	0.236	4.26	0.236	4.26	0.426	0.139	560	285	360	0.299	0.237
GD30M	2	10	0.177	8.87	0.236	6.66	0.887	0.296	608	333	420	0.330	0.261
GD30H	2	10	0.108	14.54	0.236	6.66	1.454	0.449	608	432	470	0.353	0.325
GD90L	2	8	0.165	6.09	0.300	3.35	0.677	0.062	540	572	548	0.172	0.179
GD90M	2	12	0.165	13.71	0.300	7.54	1.523	0.145	567	818	891	0.277	0.255
GD90H	2	12	0.095	23.81	0.200	11.31	2.646	0.250	567	898	1221	0.377	0.277

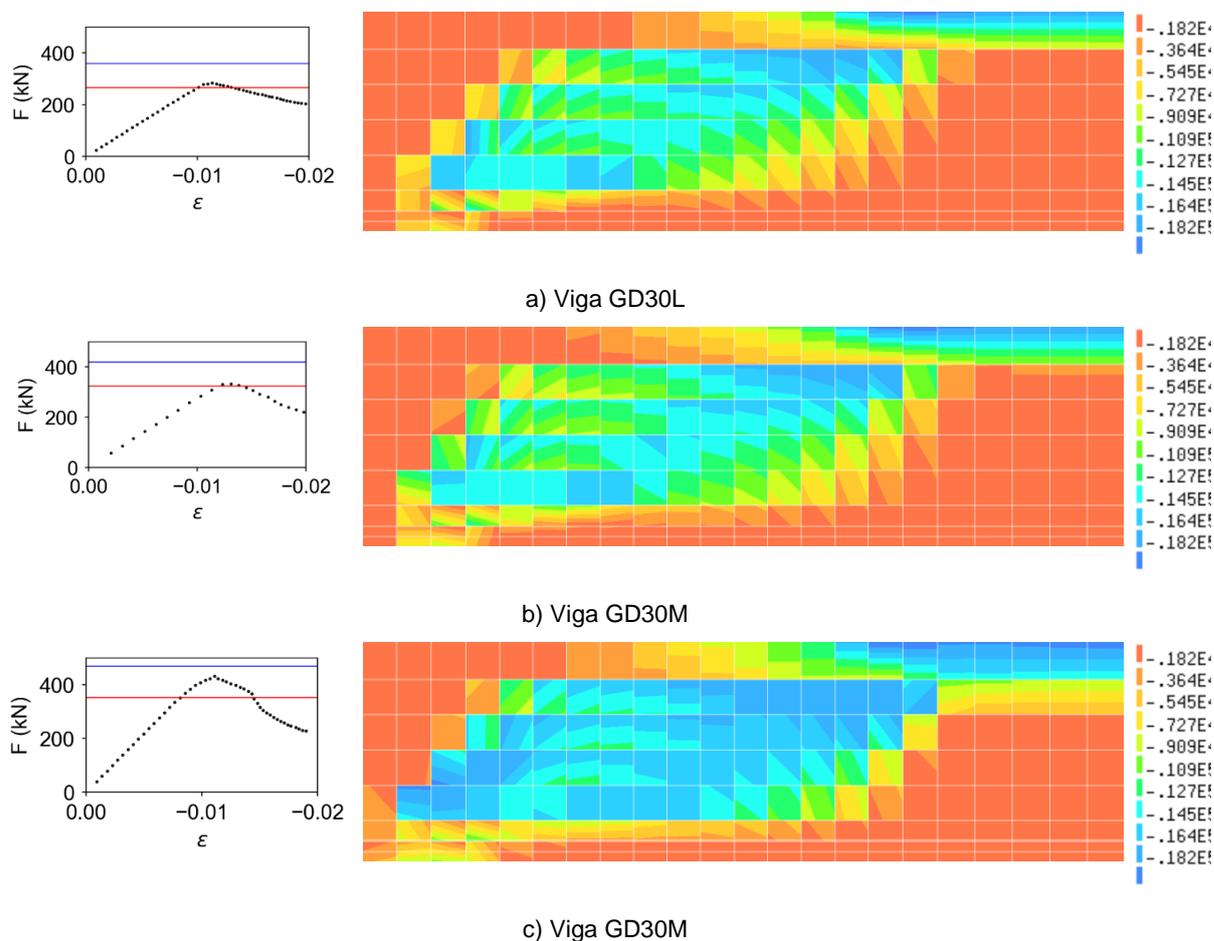


Fig. 65 - Diagramas de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e do ensaio (linha azul), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1‰)

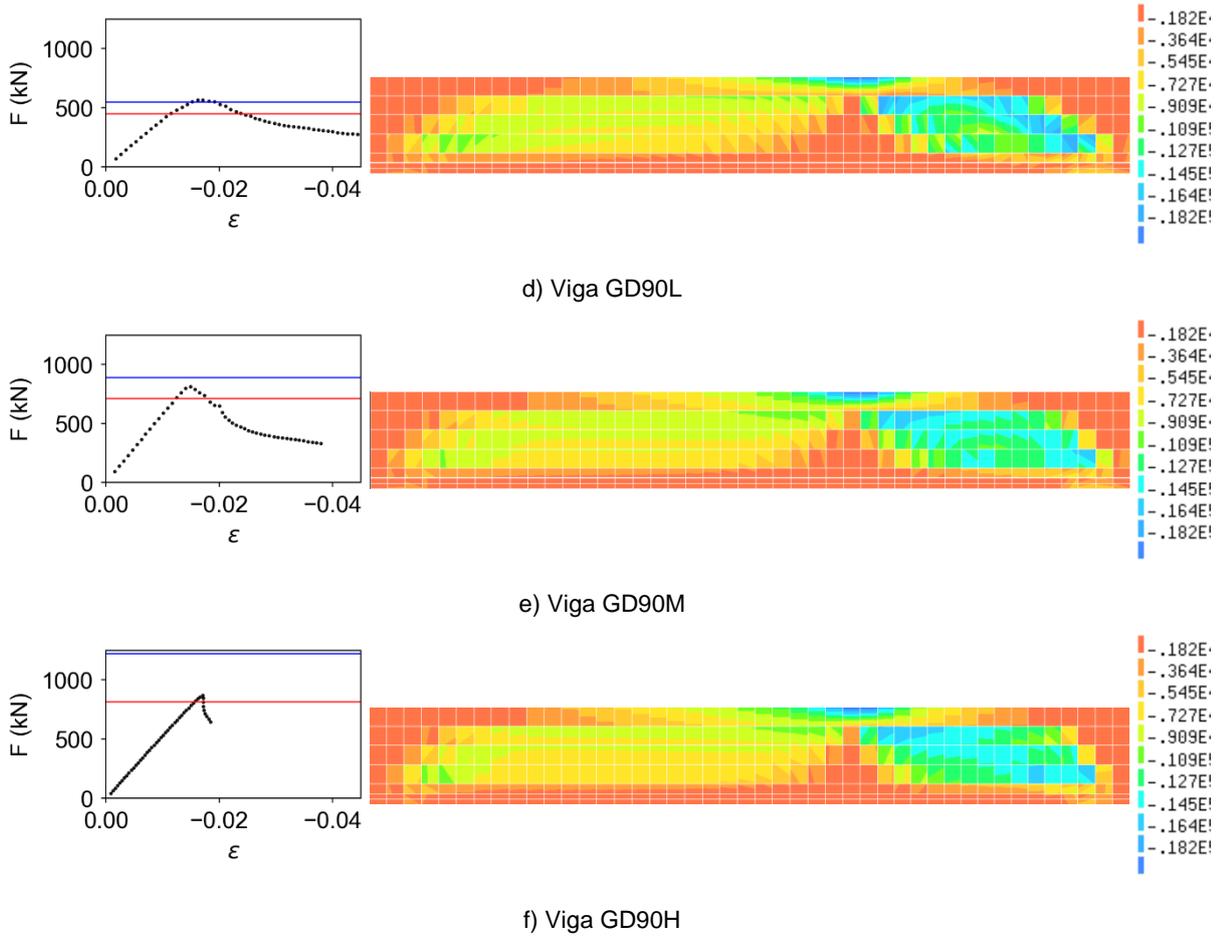


Fig. 66 - Diagramas de tensões-deformações e carga de rotura do MCTD respetivo (linha vermelha) e do ensaio (linha azul), MCTC, sobreposição do MCTD com o MCTC e extensões de compressão (acima e abaixo de 1%)

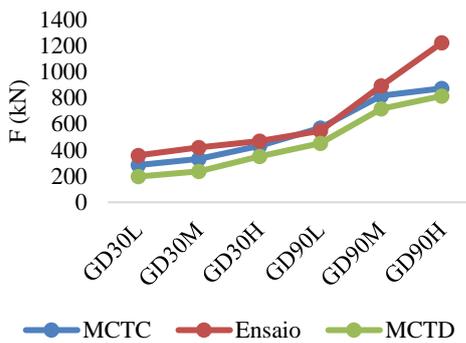


Fig. 67 - Comparação dos resultados experimentais e numéricos

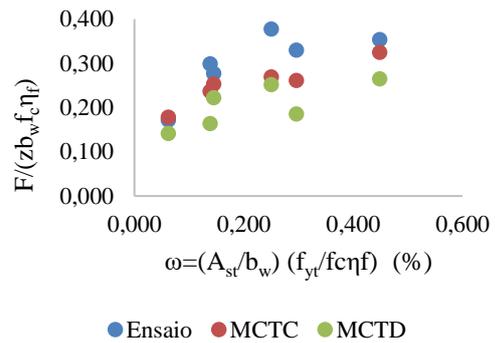


Fig. 68 – Comparação dos resultados normalizados

3.7. CONCLUSÕES

Os MCTC, ainda que contendo algumas simplificações relativamente a outro tipo de métodos de cálculo existentes, são mais realistas do que os anteriores. Como vantagem relativa aos MCTD e ao MET, têm o facto de ser mais rápido e, por originar soluções teoricamente exatas, dar uma resposta fechada, reduzindo a dúvida quanto ao modelo adequado a utilizar de entre os vários possíveis. É o caso da inclinação das escoras no betão e o posicionamento dos tirantes e escoras em modelos hipers-táticos. Demonstrou-se que a capacidade de fazer depender a resistência plástica do betão às extensões transversais permite que este modelo se configure como um melhoramento dos anteriores, removendo uma limitação e aproximando-se mais da realidade dos fenómenos físicos em estudo, sendo no entanto, conservativo em algumas situações. Este fator, aliado à utilização do regime plástico da estrutura na rotura, tendo em conta a redistribuição interna dos esforços, permite melhor exploração dos limites dos materiais no processo de dimensionamento.

4

ANÁLISE DAS VIGAS-PAREDE DA ETAR DE SOBREIRAS

4.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é demonstrar a utilidade prática dos MCT a um caso real, nomeadamente as vigas-parede da Estação de Tratamento de Águas Residuais (ETAR) de Sobreiras, localizada na cidade do Porto. A razão da escolha deste caso de estudo foi por se tratar de uma estrutura laminar complexa, com cargas elevadas, suspensas, exposta a um meio extremamente agressivo, com exigências de controlo da fendilhação elevadas e com aplicação de pré-esforço.

A estrutura será previamente apresentada, será descrita como foi feita a sua análise pelos dois métodos expostos nos capítulos anteriores e serão apuradas as diferenças relativas às cargas últimas consideradas no dimensionamento (análise linear) e em outras análises existentes na bibliografia (Pimentel, 2004). Finalmente comparar-se-ão os modelos obtidos por ambos os métodos, retirando conclusões quanto aos mesmos.

4.2. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

A ETAR de Sobreiras é um complexo com vários edifícios, localizado na zona sudoeste da cidade, junto ao rio Douro, dos quais o corpo principal tem uma estrutura relativamente complexa, tendo o seu projeto sido alvo de estudo na FEUP (Pimentel, 2004). Dada a escassez de terrenos, o edifício principal com os tanques foi construído em dois pisos, o que exigiu a elevação de todo um piso de órgãos e reservatórios. Tem ainda a característica de ser parcialmente enterrada, inserindo-se numa zona verde, com cobertura ajardinada.

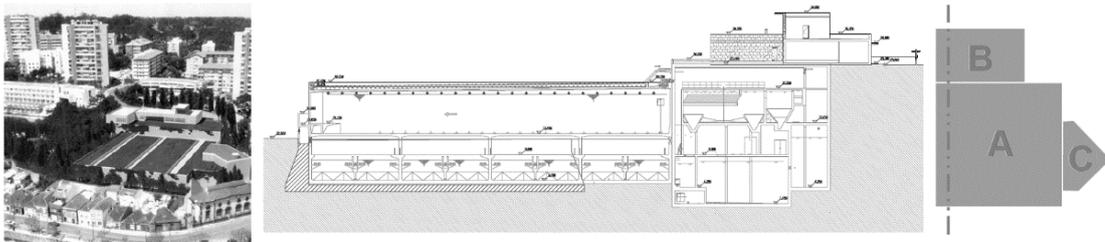


Fig. 69 – ETAR de Sobreiras: vista aérea, corte pelos corpos A e B e planta esquemática (Pimentel, 2004)

Estudar-se-á o corpo principal (corpo A na Fig. 69), que tem aproximadamente as dimensões 46x61 m², com dois pisos, tendo 4 reservatórios no piso inferior (direção Este-Oeste) e 6 no piso superior, orientados na direção perpendicular (Norte-Sul). O piso superior é suportado pelas paredes divisórias dos reservatórios, vigas-parede em betão armado, contínuas, com 0,50 m de espessura, 7.5 m de altura, e com 4 vãos de cerca de 15 metros. Estas paredes suportam a laje de fundo dos reservatórios que está suspensa na zona inferior das mesmas (tendo cerca de 10 metros de vão) e ainda a laje de cobertura ajardinada. Ao longo da mesma parede e na ligação com a laje de fundo existe uma nervura com 1.0 m de espessura e 0.95 m de altura para reforçar a zona de ligação da laje à parede. Estas vigas-parede são apoiadas em lâminas de 3 m de comprimento e 0.50 m de espessura que, por sua vez são apoiadas pelas paredes divisórias dos reservatórios do piso inferior. Dado que os reservatórios superiores e inferiores têm direções perpendiculares, este apoio é feito de forma localizada, o que levou ao reforço da mesma criando esquadros de reforço nestes pontos (Pimentel, 2004).

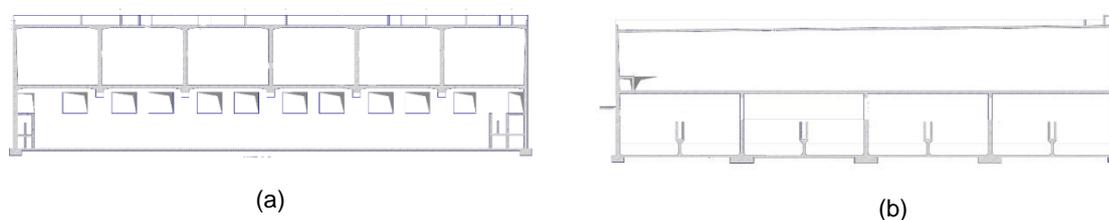


Fig. 70 – Cortes pelas vigas-parede: a) perpendicular ao desenvolvimento b) paralelo ao desenvolvimento

Como foi referido, esta é uma estrutura de dimensionamento complexo, por várias razões: possui cargas elevadas e suspensas, tem zonas de apoio bastante reduzidas, o meio é extremamente agressivo e acresce-se ainda a existência de aberturas junto aos apoios extremos, em zonas fundamentais na transmissão de tensões, o que confere uma dificuldade adicional ao dimensionamento estrutural. Tendo em conta a exigência das cargas suspensas e a agressividade do meio, a estrutura foi sujeita a pré-esforço. Tal como apresentado na Fig. 71 e na Fig. 72, o apoio das vigas-parede é feito por meio de esquadros, por forma a aumentar a largura disponível do nó que se forma nesta zona. O meio é altamente agressivo, obrigando a uma exigência maior em relação ao controlo da fendilhação (estado limite de fendilhação muito severo, $w_k = 0.2$ mm), especialmente face ao elevado monolitismo da obra, que leva a relevantes deformações impedidas.



Fig. 71 - Vista do apoio das vigas-parede: a) lâminas do piso inferior b) pormenor dos esquadros de reforço

4.3. AÇÕES CONSIDERADAS

Estas vigas parede estão solicitadas essencialmente pelas seguintes cargas: o impulso hidrostático do fluido, a carga da laje suspensa que suporta os 7.40 m de fluido (ambas cargas suspensas) e ainda o

peso das terras sobre a laje de cobertura. Neste caso, ao contrário do que se passava no capítulo anterior, o peso próprio da estrutura não é desprezável e terá de ser considerado. Para quantificação do peso próprio dos fluídos foi utilizado o valor proposto pelo Quadro A.10 do EC1 para “lama com mais de 50% em volume de água” (IPQ, 2009), nomeadamente $10,8 \text{ kN/m}^3$. Considerou-se a pior situação, isto é, o reservatório cheio (7.40 m de altura de lamas). Para o peso do solo na laje de cobertura foi considerada a situação mais desfavorável, isto é, terra molhada e tomado o valor aconselhado no ponto 4.2.1 das Tabelas Técnicas (Brasão Farinha e Correia dos Reis, 1993), nomeadamente $17,0 \text{ kN/m}^3$. Foi considerada a altura das terras 1.30 m. A solicitação do pré-esforço resulta de uma solução de 3 cordões auto-embainhados de 0.6” por face e por metro, ao que corresponde 960 kN/m , se for considerada uma força a tempo infinito de 160 kN/cordão . O mesmo procedimento foi aplicado aos restantes elementos (lajes e nervura).

Tratando-se de um caso de aplicação real, e contrariando o apresentado nos capítulos anteriores, o exemplo apresentado neste capítulo foi calculado utilizando, para as resistências dos materiais e módulos de deformabilidade, os valores de cálculo. As ações foram introduzidas nos seus valores característicos e os coeficientes de segurança serão considerados posteriormente na interpretação do fator de carga obtido. Os dados relativos à geometria, armaduras e pré-esforço foram obtidos diretamente do projeto de estruturas (Newton Consultores de Engenharia, 2000) e do projeto de aplicação de pré-esforço (Newton Consultores de Engenharia Lda., 2001).

4.4. HIPÓTESES ADOTADAS PARA OS MODELOS

Tendo em conta que o impulso hidrostático sobre as vigas-parede é simétrico, foi considerado um estado plano de tensão e, portanto, um modelo estrutural bidimensional para o estudo da parede. Foram aplicadas as mesmas considerações do capítulo anterior (elementos finitos de 4 nós com integração regular), sendo a dimensão dos elementos finitos ajustada à escala desta estrutura (elementos com cerca de 0.50 m de lado, salvo situações excecionais). Para ter em conta o efeito de encastramento parcial das lajes de cobertura e de fundo nas vigas-parede, estas foram modeladas numa faixa de 3m de espessura na direção perpendicular ao plano da viga-parede. O peso próprio da restante laje foi adicionado ao peso de fluido que foi inserido como carga distribuída na parede, descontado da faixa de laje que foi efetivamente modelada. Foi considerada a espessura média das lajes. As lâminas e paredes de apoio do piso inferior foram modeladas em toda a sua altura, com vista a uma interpretação correta da distribuição das reações entre os apoios (Fig. 72).

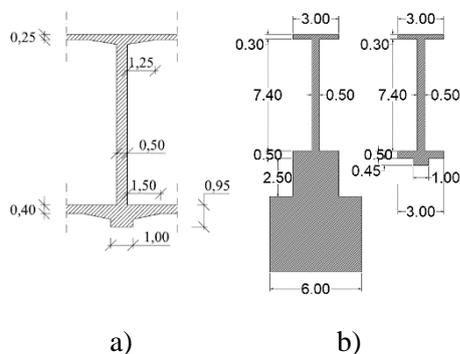


Fig. 72 – Geometria: a) real (Pimentel, 2004) b) considerada

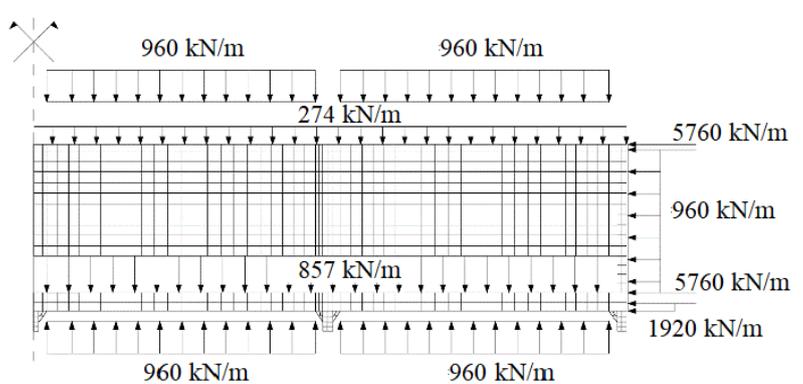


Fig. 73 - Ações adotadas

Sendo estas paredes aproximadamente simétricas, foi considerada essa simetria na modelação tendo sido unicamente modelada meia viga-parede. As condições de apoio consideradas foram: apoios simples verticais nas paredes de apoio e apoios simples horizontais no eixo de simetria da parede (Fig. 74).

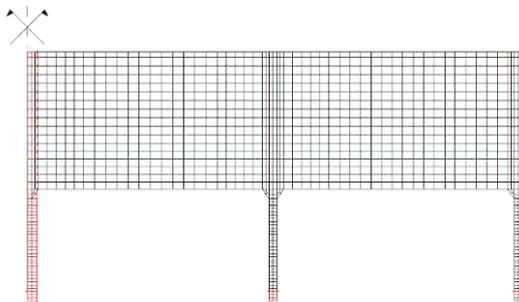


Fig. 74 – Malha de elementos finitos e condições de apoio consideradas

As características dos materiais utilizados apresentam-se na Tabela 19.

Tabela 19 - Características dos materiais

Betão		Aço	
Classe	C30/37	Classe	A500
f_{ck}	30 MPa	f_{syk}	500 MPa
f_{cd}	20 MPa	f_{syd}	435 MPa
ρ	2.5 ton/m ³		

4.5. ARMADURAS

Tendo em conta a distribuição da área de aço, as armaduras foram consideradas como armaduras distribuídas à exceção das armaduras dos esquadros que foram modeladas como elementos de barra. A distribuição da armadura é apresentada na Fig. 75.

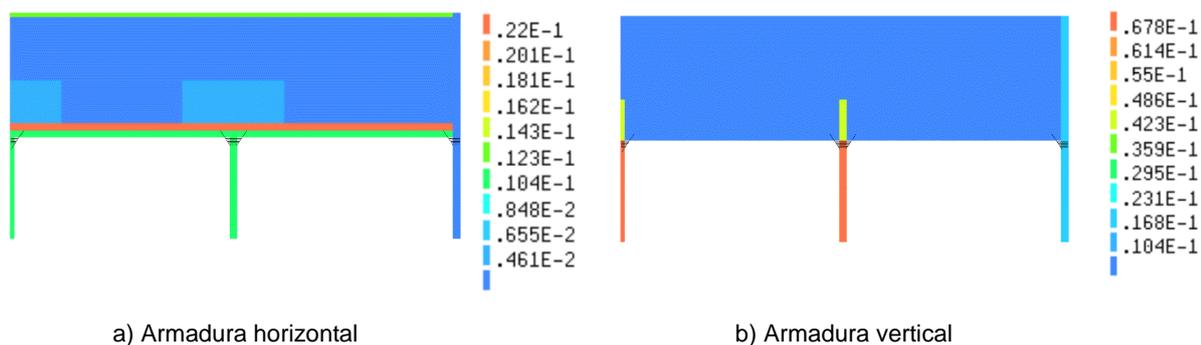


Fig. 75 - Localização da armadura distribuída no modelo de elementos finitos

É considerada uma armadura geral em malha quadrada de $\phi 16//0.10$ na da parede, com um reforço na zona dos apoios centrais de $\phi 20//0.10$. Nos apoios centrais foram considerados 16 varões de 40 mm de diâmetro de comprimento que foram projetados para absorver parte das elevadas compressões no betão em serviço, atenuando o efeito da fluência. Nas lajes foi considerada a armadura existente ao longo da considerada largura de influência da parede (3,00 m). Na Tabela 20 apresenta-se com mais detalhe a armadura horizontal considerada e na Tabela 21 a correspondente armadura vertical. É importante salientar que nem toda a armadura existente em projeto foi considerada. Alguma foi desprezada, por se

tratar de armadura com a função específica de cintar o betão. Esta é uma consideração do lado da segurança.

Tabela 20 - Armadura distribuída horizontal

	n	diam	esp	Ai	larg	Atot
Parede corrente	2	16	0.10	40.21	40.21	40.21
Parede Reforço	2	20	0.10	62.83	62.83	62.83
Laje de fundo-Parede corrente	8	25	-	39.27	0.50	78.54
	40	16	-	80.42	0.50	160.85
Laje de fundo-Parede reforço	8	25	-	39.27	0.50	78.54
	40	16	-	80.42	0.50	160.85
Laje de fundo/varões 40 mm	8	25	-	39.27	0.50	78.54
	40	16	-	80.42	0.50	160.85
Nervura-Parede corrente	11	25	-	54.00	0.45	119.99
Nervura-Parede reforço	11	25	-	54.00	0.45	119.99
Nervura/varões 40 mm	11	25	-	54.00	0.45	119.99
Varões 40 mm	2	20	0.10	62.83	62.83	62.83
Pilares	12	12	0.125	108.57	108.57	108.57
Laje de cobertura				37.70	0.30	125.66
Parede de topo	2	16	0.150	26.81	26.81	26.81
Esquadros	6	12	1.00	6.79	6.79	6.79

Tabela 21 - Armadura distribuída vertical

	n	diam	esp	Ai	larginf	Aii	larg	As/s	As/s tot
Parede corrente	2	16	0.10					40.21	40.21
Parede Reforço	2	20	0.10					62.83	62.83
Laje de fundo-Parede corrente	2	12	0.10					22.62	62.83
	2	16	0.10					40.21	
Laje de fundo-Parede reforço	2	12	0.10					22.62	85.45
	2	20	0.10					62.83	
Laje de fundo/varões 36 mm	16	40	-	201.06			0.50	402.12	464.96
	2	20	0.10	62.83				62.83	
Nervura-Parede corrente	2	12	0.10					22.62	62.83
	2	16	0.10					40.21	
Nervura-Parede reforço	2	12	0.10					22.62	85.45
	2	20	0.10					62.83	
Nervura/varões 36 mm	16	40	-	201.06			0.50	402.12	464.96
	2	20	0.10	62.83				62.83	
Varões 36mm	16	40	-	201.06			0.50	402.12	464.96
	2	20	0.10	62.83				62.83	
Pilares	54	20	-	169.65			0.50	339.29	741.42
	16	40	-	201.06			0.50	402.12	
Laje de cobertura	2	16	0.10					40.21	40.21
Parede de topo	2	16	0.125	32.17	3.00	96.51	0.50	193.02	193.02
Esquadros	8	25	-					39.27	39.27

É importante referir que este modelo, sendo um modelo de estado plano de tensão, não é o modelo adequado para analisar roturas nos esquadros ou nas paredes na direção perpendicular à estrutura. Isso exigiria um modelo 3D. Por isso, e porque as zonas dos esquadros, lajes, nervura e paredes nessa dire-

ção estão sujeitas a estribos que lhes conferem confinamento, não parece razoável aplicar o mesmo princípio à resistência plástica do betão no que toca à sua redução devida a extensões transversais. Sendo assim, em todos estes elementos este coeficiente foi considerado unitário. Note-se que, devido ao confinamento existente em algumas dessas regiões, esta é uma metodologia do lado da segurança.

4.6. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES DESCONTÍNUOS

Para a definição do MCTD da estrutura iremos partir da construção de um MET. Tal como referido na subsecção 1.4, os MET podem ser alvo de refinamentos sucessivos à medida que se pretende apurar com mais rigor a distribuição de tensões de uma determinada região da estrutura. Iremos começar pelo modelo mais simples, utilizado com frequência no dimensionamento de vigas-parede contínuas.

4.6.1. MET MAIS SIMPLES PARA DIMENSIONAMENTO

As cargas distribuídas aplicadas superiormente (laje de cobertura e terras) e as suspensas (líquidos e laje de fundo) são discretizadas o mínimo possível, nomeadamente em duas cargas concentradas por vão (Fig. 76). A primeira incógnita do problema é o valor de “a” na figura. Isto é, a localização das escoras e tirantes do nível superior (neste primeiro modelo as escoras e tirantes horizontais estão ao mesmo nível).

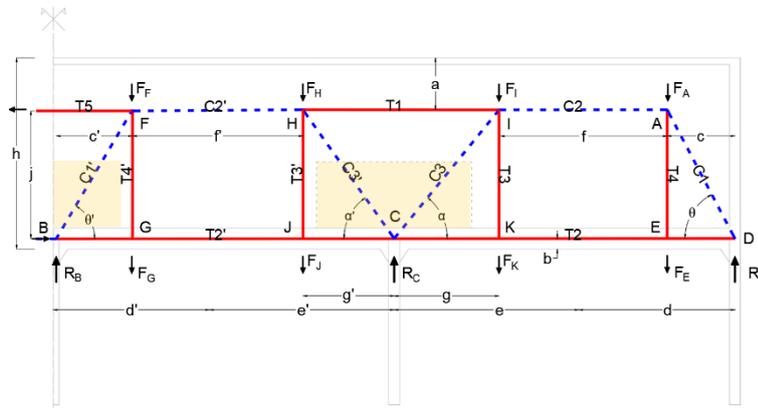


Fig. 76 - MET simples para dimensionamento

Do mesmo género é a incógnita “b”. O valor destas duas incógnitas define o braço dos momentos a meio vão e nos apoios e por consequência o valor das forças nas escoras e tirantes horizontais. Sendo que esses dois alinhamentos definem a localização das forças resultantes da tensão no aço e no betão, a decisão da sua localização condiciona a área de betão ou aço mobilizável. Reduzir o valor destas incógnitas permite aumentar o braço do momento, mas reduz o valor das forças mobilizáveis, se for mantida a geometria armaduras. O problema é resolúvel de forma iterativa. O braço arbitrado permite verificar o equilíbrio. Havendo equilíbrio, a solução é segura (TLI). No entanto, poderá ser possível encontrar uma solução mais otimizada. Considerou-se nesta fase, o alinhamento superior centrado na região não reforçada da parede (zona a sombreado na figura) e o alinhamento inferior centrado na altura que inclui a laje e a nervura. Podemos assim determinar o braço do momento “j”:

$$j = h - a - b \quad (4.1)$$

Conhecendo unicamente os esforços na estrutura, e arbitrando o braço, determinam-se automaticamente as forças nos tirantes e escoras horizontais. Isto permite imediatamente dimensionar o aço e verificar as escoras (normalmente não condicionantes).

Existem muitas formas de obter os esforços na viga-parede, para o seu dimensionamento. O mais comum é elas serem retiradas de um modelo global. Ainda assim é preciso considerar se estas devem ser obtidas de uma análise linear elástica ou de uma análise não linear. Ainda pode ser considerada uma terceira opção muito comum em dimensionamento, em que as reações de uma análise elástica são alvo de uma redistribuição arbitrária de momentos, a partir de valores fixados nos códigos ou regras de boa prática. O modelo mais simples (viga em continuidade com 4 vãos) com valores unitários para as reações e momentos apresenta-se na Fig. 77¹⁹.

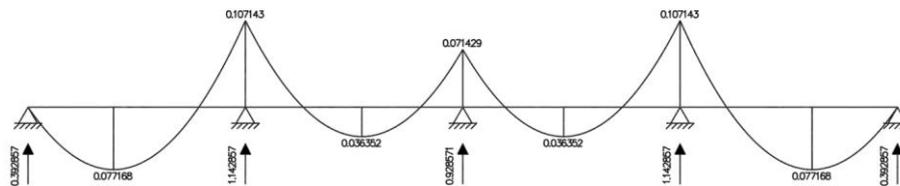


Fig. 77 - Distribuição das reações de apoio e momentos numa análise elástica da estrutura

Sendo a estrutura simétrica, esta pode ser simplificada (Fig. 78). A reação central é dividida em dois e os restantes esforços mantêm-se.

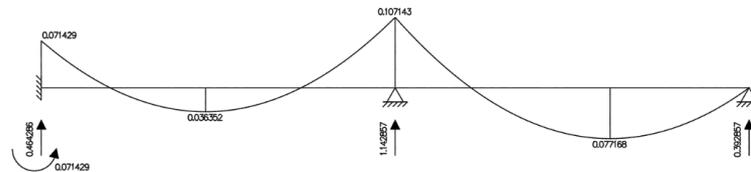


Fig. 78 - Distribuição das reações de apoio e momentos numa análise elástica da estrutura – simplificação

Por outro lado, utilizando o modelo criado no *software DIANA*, podemos obter as reações para duas situações diferentes: uma análise elástica ou uma análise não linear na rotura. Foram obtidas as reações para os três casos. Os resultados apresentam-se na Tabela 22. Podemos observar uma relativa diferença. O modelo do *DIANA* tem em consideração, na obtenção das reações, a rigidez específica de cada apoio que é dada pelas paredes em que são apoiadas. Especificamente em relação ao nó D, a parede de topo confere a este apoio uma rigidez consideravelmente mais elevada que em C, o que implica que a reação neste apoio se torne superior à reação em B baixando a reação em C e mantendo-se a reação em B. No caso da análise não linear, a diferença é ainda mais considerável, onde quase se inverte a proporção entre a reação em C e em D e em que a reação em B é bastante reduzida.

Tabela 22 – Distribuição das reações entre os três apoios para diferentes modelos (percentagem)

Nó	Modelo elástico simples	Modelo DIANA elástico	Modelo DIANA ANL
B	23	26	26
C	57	51	52
D	20	23	22

¹⁹ Os valores apresentados têm que ser multiplicados pela carga distribuída total (q) e pelo vão (L) no caso das reações e por qL^2 no caso dos momentos

Sendo que o desenvolvimento de um modelo de campo de tensões descontínuo depende, como já referido da distribuição das reações na estrutura, que distribuição devemos escolher? Admitindo uma situação comum de dimensionamento, a análise não linear provavelmente não se efectuará, pelo que parece mais usual uma solução algures entre os restantes dois modelos. Considerar-se-á, por simplificação o modelo elástico simples.

Uma última consideração é necessária: o peso próprio da estrutura por ser relevante deve ser considerado. Como colocá-lo no modelo? Em rigor deveria uma carga distribuída localizada no centro de gravidade, mas dado tratar-se de um modelo simplificado irá colocar-se este dividido entre o alinhamento superior e o alinhamento inferior, colocando o peso da laje de cobertura no alinhamento superior, o da nervura e laje de fundo no alinhamento inferior e dividindo a parede pelos dois níveis em função da dimensão “a” considerada (Tabela 23):

Tabela 23 - Distribuição do peso próprio pelos dois níveis considerados

Nível	Elemento	Altura (m)	Largura (m)	PP (kN/m)	Total
q _{Sup}	Laje superior	0.30	10.00	75.00	126.25
	Parede cima	4.10	0.50	51.25	
	Parede baixo	3.30	0.50	41.25	
q _{inf}	Laje inferior	0.50	10.00	125.00	177.50
	Nervura	0.45	1.00	11.25	

Na Tabela 24 apresenta-se então o dimensionamento. Verificou-se que, para o valor escolhido de a, a área de aço disponível no tirante T1 não é suficiente (por uma diferença pequena). Verificar a segurança implicaria aumentar o valor de a, considerando assim parte da armadura da zona de reforço e reduzindo conseqüentemente o braço do momento, o que implicaria aumentar a força e, portanto, também a área de aço requerida. E sendo que a zona de reforço tem muito mais aço que a zona corrente, essa verificação seria facilmente feita para um valor de a ligeiramente superior. Também se poderia considerar um braço um pouco maior, reduzindo “a”, que facilmente verificaria. Para além disso, no dimensionamento pelos MCTD não é considerado o pré-esforço horizontal existente que funciona como uma armadura. Verifica-se também que, tal como é comum, as escoras horizontais estão em segurança por uma margem muito grande.

Tabela 24 – Dimensionamento das escoras e tirantes horizontais

Dimensões (m)	Esforços (kN)	Escoras				Tirantes					
		Forças (kN)	Ac (cm ²)		Forças (kN)	As (cm ²)					
			Req	Disp.		Req	Disp.				
h	8.65	M _B	32583	C2	6043	0.30	2.35	T1	8391	192.98	189.00
a	2.35	M _C	48875	C2'	2847	0.14	2.35	T2	6043	139.00	173.69
b	0.475	M [*] _{BC}	16583					T2'	2847	65.48	173.69
j	5.825	M [*] _{CD}	35202					T5	5594	128.65	189.00

No entanto, as inclinações das restantes escoras, são ainda incógnitas, e essas são necessárias para ser possível fazer a verificação dos nós. As incógnitas c e c' (e respetivas inclinações das escoras) não dependem de considerações geométricas, mas somente da distribuição das reações dos apoios. Para que o nó A esteja em equilíbrio, a única força que pode equilibrar as ações exteriores é a força de compressão da escora C1, pois é a única que possui componente vertical ascendente. Essa componente

vertical é igual à força de reação em B. Isto quer dizer que, fixados “a” e “b” (o braço dos momentos), então “c”, portanto, a inclinação da escora C1 é determinada pelo valor da reação em B.

$$C1_y = F_A + F_E = R_D = C_1 \text{sen}\theta \quad (4.2)$$

Por outras palavras, a reação em D é igual à soma das forças aplicadas em A e em E, que por sua vez é, cada uma delas, função de “c” da seguinte forma: $F = 2cq$. Então, se

$$F_A = q_{sup} \times 2c \quad (4.3)$$

$$F_B = q_{inf} \times 2c \quad (4.4)$$

$$R_D = F_A + F_E = 2c(q_1 + q_2) \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

Finalmente, obtemos “c” em função das ações externas e das reações pela seguinte expressão:

$$c = \frac{R_B}{2(q_1 + q_2)} \quad (4.7)$$

Sendo que a reação em B é, por sua vez, também função das ações exteriores, representando uma determinada percentagem x do total das mesmas, $R_B = (q_1 + q_2)2Lx$, então podemos reescrever a expressão 4.7 da seguinte forma:

$$c = Lx \quad (4.8)$$

Portanto, “c” é unicamente função do vão e da percentagem da ação que é resistida no apoio B. O mesmo raciocínio pode ser aplicado do lado oposto, pois a existência do tirante T5 e da força de compressão proveniente do outro lado da estrutura (simetria), sendo forças horizontais, não influenciam o equilíbrio na direção vertical. Da análise elástica, conhecemos o valor de x , logo, podemos determinar o valor de c , pela expressão 4.8. Sendo que as forças no tirante têm de estar centradas na força distribuída que representam, então, todas as características geométricas podem ser obtidas:

$$d = 2c \quad (4.9) \quad f = c + \frac{e}{2} \quad (4.10) \quad \theta = \text{arctg}\left(\frac{j}{c}\right) \quad (4.11)$$

$$e = L - d \quad (4.12) \quad g = e/2 \quad (4.13) \quad \alpha = \text{arctg}\left(\frac{j}{g}\right) \quad (4.14)$$

Com toda a geometria definida, incluindo os ângulos das escoras, é possível finalmente calcular as restantes forças do modelo, por equilíbrio de nós.

Tabela 25 – Dimensionamento das restantes escoras e tirantes

Ações		Reações		Dimensões (m)				Forças (kN)			
$q_{k,sup}$ (kN/m)	400	L (m)	15.35	c	3.02	c'	3.56	FA	3 254	FF	3 846
$q_{k,inf}$ (kN/m)	1 035	RB (kN)	13 799	d	6.03	d'	7.13	FE	8 422	FG	9 953
γ_d	1.35	RC (kN)	33 961	e	9.32	e'	8.22	FI	5 029	FH	4 438
$q_{Ed,sup}$ (kN/m)	540	RD (kN)	11 676	f	7.68	f'	5.89	FK	13 016	FJ	11 484
$q_{Ed,inf}$ (kN/m)	1 397	xB	23%	g	4.66	g'	4.11	C1	13 148	C1'	16 176
$q_{Ed,tot}$ (kN/m)	1 936	xC	57%	θ	62.63	θ'	58.54	C3	23 106	C3'	19 487
P_{tot} (kN)	59 442	xD	20%	α	51.34	α'	54.78				

Com todo o modelo calculado podemos verificar ainda os tirantes verticais. Não se verificarão as escoras inclinadas, pois isto será automaticamente feito na verificação dos nós. Na Tabela 26 apresenta-se o resultado do dimensionamento dos restantes tirantes. Todos têm armadura suficiente. Por simplificação considerou-se que a área de aço existente em torno dos tirantes T3 e T3' seria a área da parede corrente, pelo que esta verificação está feita do lado da segurança. Note-se que para além da armadura ordinária existe ainda armadura de pré-esforço que também auxilia a suspensão da carga e não é considerado neste cálculo pelo MCTD.

Tabela 26 - Dimensionamento dos tirantes verticais

	Forças (kN)	As (cm ²)	
		Req	Disp.
T3	13 016	299.36	374.77
T4	8 422	193.70	242.49
T3'	11 484	264.14	330.67
T4'	9 953	228.92	286.59

4.6.2. VERIFICAÇÃO DOS NÓS

A fase final do dimensionamento pelo MET consiste na verificação dos nós. Caso considerássemos unicamente o MET, só seriam admissíveis forças concentradas e cada escora teria uma largura constante (escoras prismáticas). Essa largura seria a largura mínima admissível na entrada no nó. No entanto, as ações existentes são forças distribuídas e a sua conversão em forças concentradas teve como único propósito utilizar o MET para auxiliar a resolução dos campos de tensões e construção do MCTD. A consideração das forças distribuídas, tal como visto na subsecção 2.6.2, leva ao facto de que as escoras passam a ser leques e, conseqüentemente a sua largura aumenta. Isto é particularmente útil no caso da verificação dos nós, já que é a largura da escora na zona do nó que condiciona a verificação de segurança da estrutura. Os nós devem ser verificados na zona mais desfavorável. Relativamente à espessura, a zona mais desfavorável é a zona da parede pois é a mais estreita (fora das lajes e da nervura). Relativamente à largura será a zona onde esta for menor, logo junto aos nós inferiores. Ou seja, na zona da nervura e da laje.

A existência dos esquadros permite um aumento da largura do apoio e conseqüentemente um desalinhamento entre o nó do apoio da escora e o eixo do pilar. A força tem de ser desviada dentro do esquadro para ir de encontro ao eixo do pilar. Na Fig. 79 apresenta-se uma possibilidade de um modelo de equilíbrio para esse desvio. Outros seriam admissíveis. Como vimos na subsecção 2.3, a tensão dentro de uma escora em leque não é constante. A verificação dos nós pelo MCTD, como foi visto implica, para se considerar uma tensão constante, que esta esteja na linha de ação da escora e a largura considerada tem de ser centrada (Fig. 80). Isto reduz um pouco a largura a considerar para a verificação do nó. Nesta estrutura, o MCTD só nos permite verificar a segurança dos nós com a largura da escora junto ao apoio, mas com a espessura da parede. Esta é uma verificação muito conservativa. Na zona do nó junto à fronteira com a laje, a escora tem um aumento de espessura considerável. É pouco credível assumir que toda essa largura estará disponível para ser ativada pela escora, mas a primeira hipótese também parece pouco realista. Esta é uma situação em que o MCTD se mostra bastante limitado.

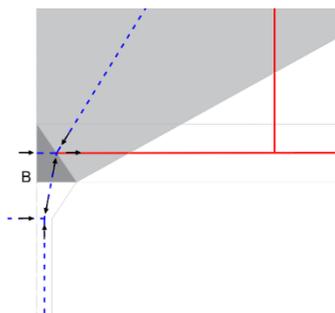


Fig. 79 – Desvio da força da escora no esquadro

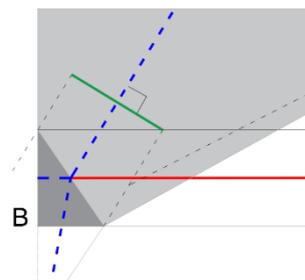


Fig. 80 - Largura centrada na escora para consideração das tensões como uniformes

Na Tabela 27 apresentam-se os resultados para a verificação dos nós. Note-se que o alargamento das escoras é função da inclinação de C1 e, portanto, da largura da escora horizontal C2/C2'. Essa largura é, por sua vez, função da medida arbitrada para o braço do momento (j), logo poderia ser superior ou inferior com outro braço arbitrado. Conclui-se que pelo MCTD nenhum dos nós verifica a segurança. Como foi referido, esta verificação é muito conservativa, dada a geometria concreta da estrutura. Este é, precisamente por isso um bom exemplo para recurso a métodos de análise mais complexos, como é o caso dos MCTC.

Tabela 27 - Verificação dos nós

Nó	Escora	Largura da escora				Esp. esc. (m)	Força (kN)	Tensão atuante			
		u (m)	a1 (m)	Ang (°)	a2 (m)			$\frac{\sigma_{Ed}}{MET}$ (MPa)	Tipo de nó	k1 (EC2)	σ_{Rd} (MPa)
B	C1'	0.95	0.65	59	1.15	0.50	16176	28	CCT	0.85	17
C	C3'	0.95	0.65	55	1.15	0.50	19487	34	CCT	0.85	17
C	C3	0.95	0.65	51	1.15	0.50	23106	40	CCT	0.85	17
D	C1	0.95	0.90	63	1.26	0.50	13148	21	CCT	0.85	17

4.6.3. REFINAMENTO DO MET

Como foi referido, o MET apresentado era o mais simples. Os MET podem ser refinados sucessivamente, sempre que se quer apurar com mais detalhe o comportamento da estrutura. Isto pode ser útil em certas situações. Na Fig. 81 apresenta-se uma hipótese de um modelo mais refinado do comportamento da estrutura. Este segundo modelo tem a vantagem de, ao desalinhar as escoras e tirantes horizontais superiores, permitir que estes sejam ajustados em função dos momentos existentes em cada tramo ou apoio.

A resolução analítica de um modelo semelhantemente refinado de viga alta contínua é apresentada por Lourenço, Almeida e Boia (2011), no entanto para uma viga com apenas dois vãos e simétricos. A sua resolução implica a resolução de uma expressão não linear, para a obtenção dos três ângulos das escoras inclinadas. Neste caso, embora haja também simetria, ainda assim há sete ângulos a determinar. Sendo todos estes modelos baseados no TLI, a sua resolução não iria conduzir a uma solução mais segura, mas sim eventualmente a uma solução mais próxima da rotura, ainda que do lado da segurança. Permitira, portanto, otimizar a solução. Tal como os próprios autores referem, mesmo nesse exem-

plo mais simples, a consideração do modelo mais simples, apresentado na subsecção 4.6.1, é uma hipótese aceitável.

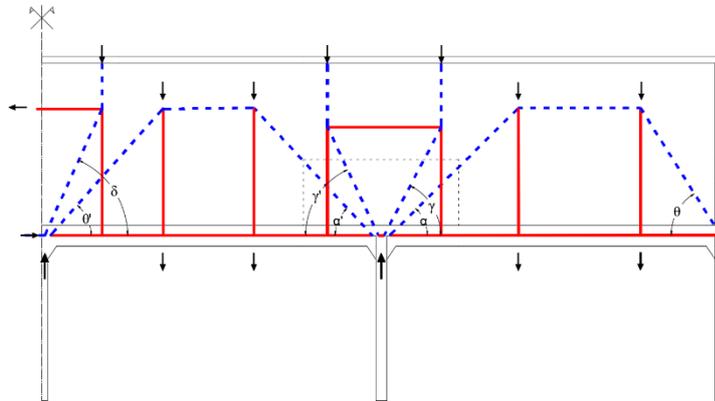


Fig. 81 - MET refinado

4.7. MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES CONTÍNUOS

O modelo de campo de tensões contínuo foi calculado com os pressupostos apresentados nos capítulos anteriores, tendo-se obtido uma grande robustez e rapidez no cálculo. Uma análise elástica prévia permitiu verificar o mesmo. Para a análise não linear, com vista ao incremento das cargas, uma opção teve de ser tomada como esta incrementação seria realizada. Tendo em conta o processo construtivo da estrutura e também a diferença entre os coeficientes de segurança das diferentes ações (IPQ, 2009), optou-se por considerar três casos de carga que seriam aplicados sucessivamente:

1. **Caso de Carga 1 (LC1):** Peso próprio + Pré-esforço – incrementados só até o fator de carga ser 1, sem o método do arco (para o fator ser exatamente 1)
2. **Caso de Carga 2 (LC2):** Peso das terras + Líquidos (igual ao anterior)
3. **Caso de Carga 3 (LC3):** PP+Terras+Líquido - incrementado até à rotura

Portanto, se considerarmos o peso das terras e os líquidos como cargas permanentes, a segurança está garantida numa análise não linear, assim que, no caso de carga LC3, se atinja um fator de carga igual a 0.35, o que corresponde a um fator de carga global de 1.35. Corrida a análise, obteve-se o diagrama apresentado na Fig. 82, que é relativa unicamente ao último caso de carga (LC3). O valor máximo de um fator de carga global de 2.44. Portanto, a estrutura está segura por grande margem, no que toca aos modos de rotura considerados nesta análise e possíveis com este método e modelos considerados.

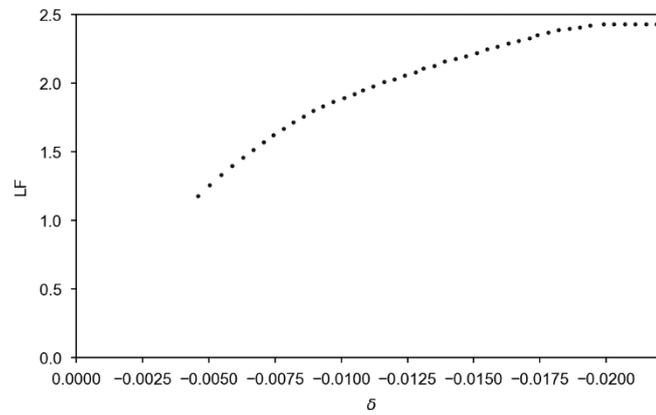


Fig. 82 - Diagrama de carga-deslocamento

Na Fig. 83 apresenta-se o MCTC para alguns passos da análise não linear e na Fig. 84 apresenta-se o MCTC final na rotura.

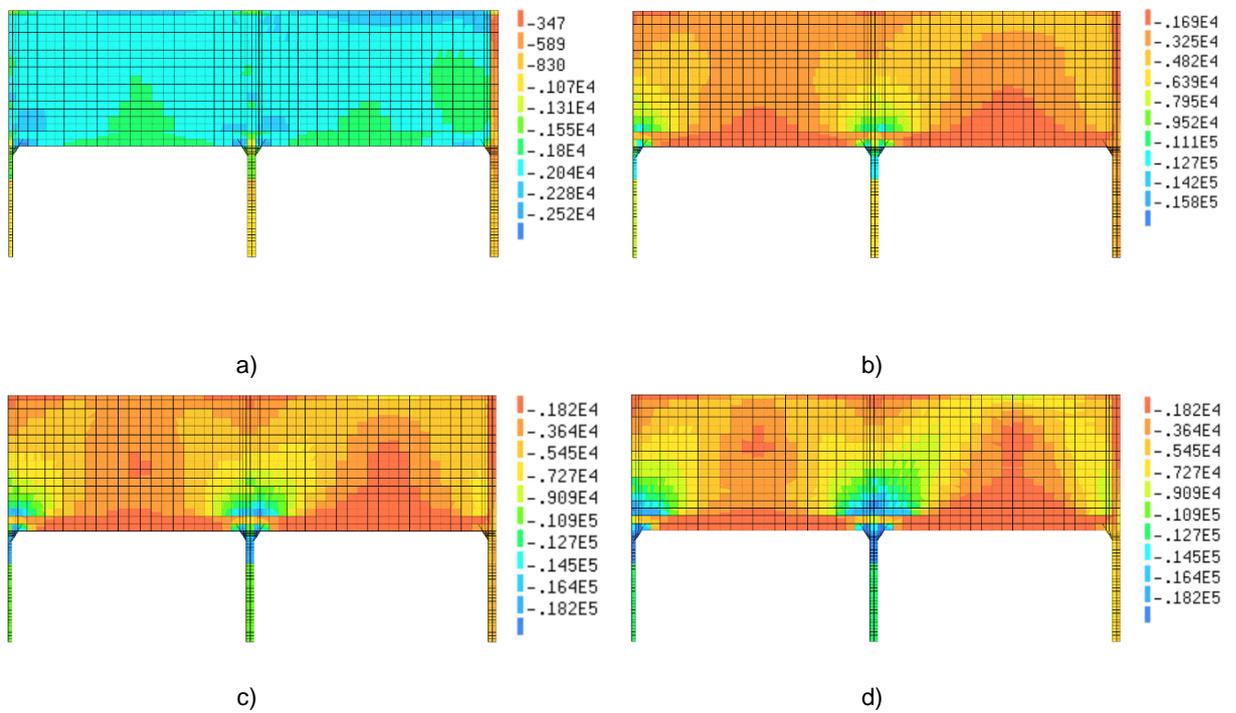


Fig. 83 - MCTC para passos sucessivos da análise: a) no fim do LC1 b) no fim do LC2 c) para um fator de carga 0.5 (LC3) d) para um fator de carga 1 (LC3)

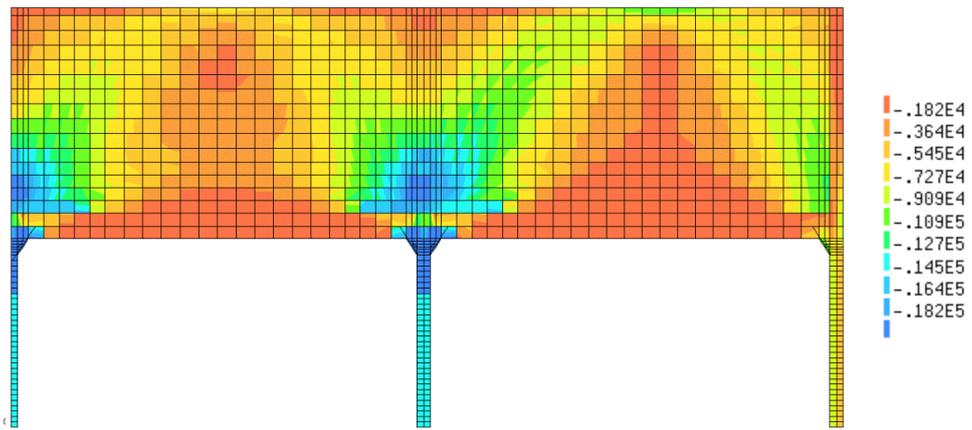


Fig. 84 – MCTC na rotura (FC=2.44)

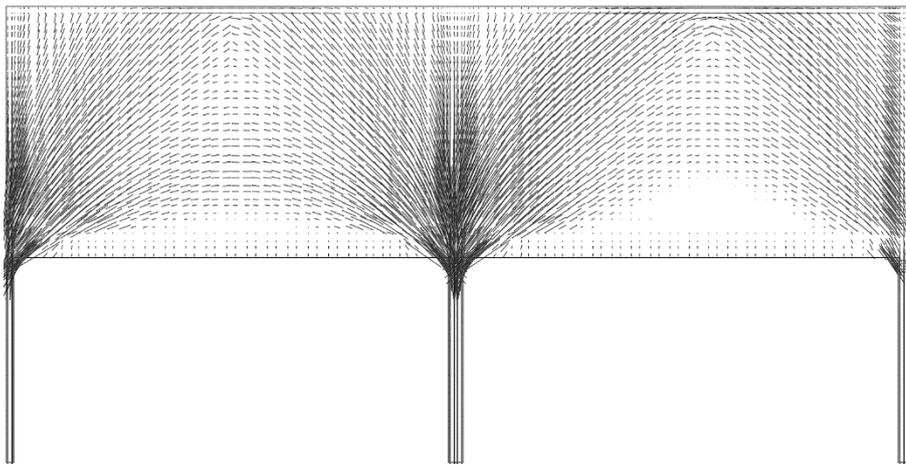


Fig. 85 – MCTC: direções das extensões principais de compressão na rotura (FC=2.44)

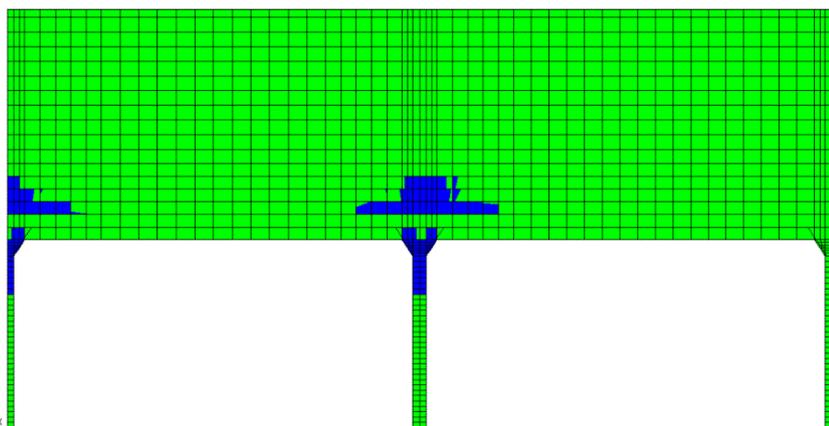


Fig. 86 – Elementos finitos plastificados, com extensão principal de compressão é superior a f_{cd}/E_{cd} na rotura

A Fig. 84, e particularmente a Fig. 86, permitem perceber que a rotura se está a dar nos nós central e intermédio numa linha imediatamente acima da zona da laje e da nervura. A Fig. 86 permite perceber

que elementos finitos já estão certamente plastificados, por terem atingido compressões superiores aquelas que implicam tensões no patamar de f_{cd} . Tal como referido no capítulo anterior, pode haver outros elementos já plastificados, pois a resistência à compressão neste modelo pode ser reduzida por efeito das extensões transversais. Na Fig. 87 apresenta-se a deformada da estrutura na rotura, onde é visível o traccionamento dos elementos da parede, especialmente na zona inferior, na região próxima da laje.

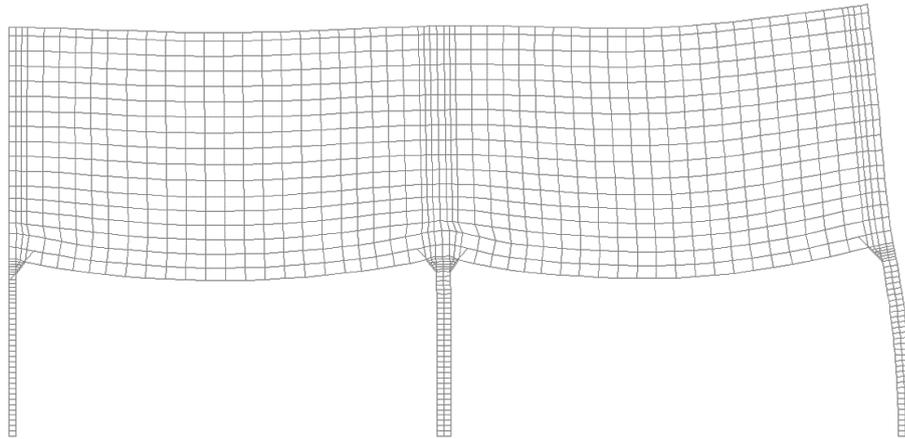


Fig. 87 - Deformada da estrutura na rotura

4.8. MODELO SEM PRÉ-ESFORÇO

Foi ainda feita uma análise do modelo retirando as cargas equivalentes ao pré-esforço para estudar a sua contribuição na verificação da segurança do modelo. Na

Fig. 25 apresenta-se o diagrama de carga-deslocamento. Conclui-se que o fator de carga baixou para 2.2. As deformações parecem evidenciar-se na zona inferior da parede na zona de suspensão da laje.

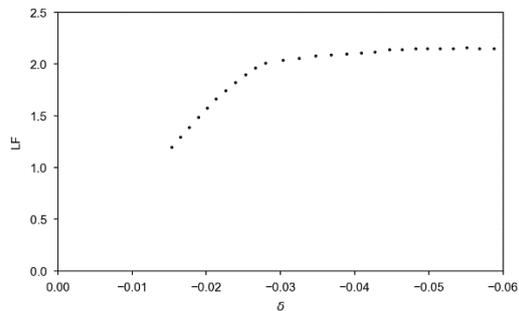


Fig. 88 - Diagrama de carga-deslocamento

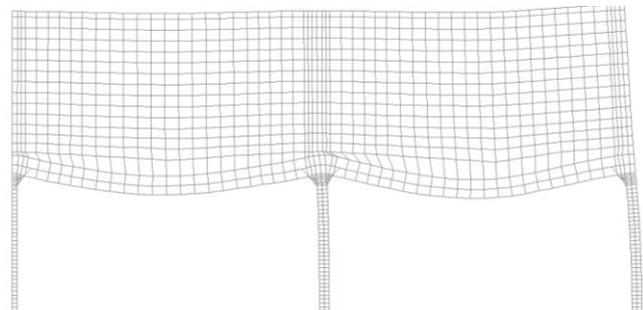


Fig. 89 - Deformada do modelo sem pré-esforço

4.9. COMPARAÇÃO DOS DOIS MÉTODOS

É possível ajustar o MCTD ao MCTC, nomeadamente naquilo que se refere às variáveis arbitradas na construção do primeiro: a altura do braço dos momentos (j) e a distribuição das reações pelos apoios (x). A forma mais rigorosa de o fazer é obter por um lado as reações de apoio no modelo de elementos finitos, e por outro, diagramas da distribuição das tensões ao longo da altura da parede nos pontos de momentos máximos (nos apoios a meio vão). A partir dessas tensões é possível obter as resultantes para cada um dos elementos e a sua localização nesse alinhamento, o que nos dá a posição mais rigorosa das escoras e dos tirantes.

É preciso, para comparações entre os dois métodos, atentar a dois pontos: por um lado o MCTD não tem em conta o pré-esforço, pelo que este deve ser retirado dos valores obtidos no MCTC. Por outro, não é possível fazer uma comparação dos valores das forças, visto que a rotura só é atingida no MCTC para um fator de carga muito superior ao coeficiente de segurança considerado no dimensionamento. Na

Fig. 25 apresentam-se os diagramas de forças ao longo da altura do meio vão no betão para cada vão. Na Fig. 91 apresentam-se os diagramas de forças ao longo da altura da parede nas zonas do apoio esquerdo e central. A área destes gráficos dá a resultante das forças e a localização dessa resultante é a localização da escora ou tirante respetivo. Na Fig. 92 apresenta-se a sobreposição dos dois modelos.

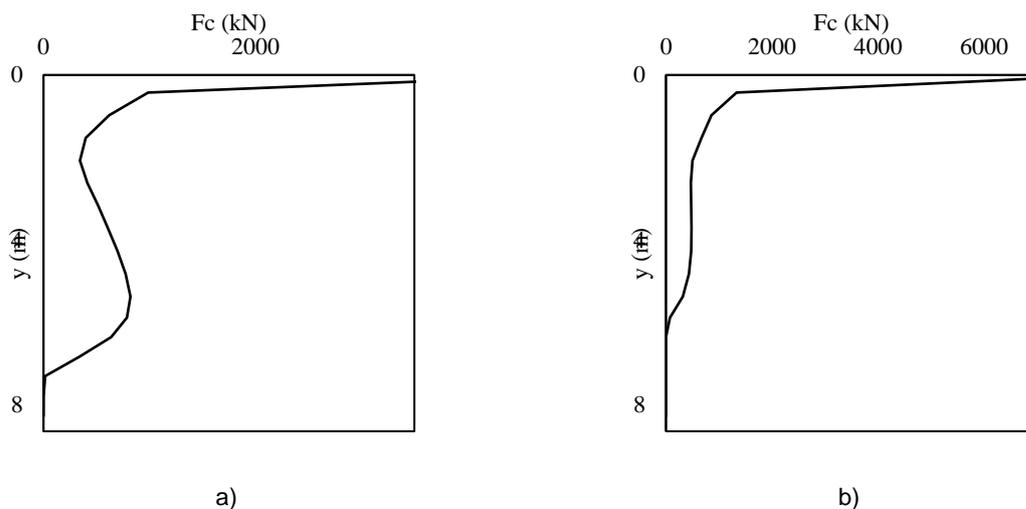


Fig. 90 - Diagramas de forças no betão ao longo de alinhamentos verticais: a) meio-vão da esquerda b) meio vão da direita

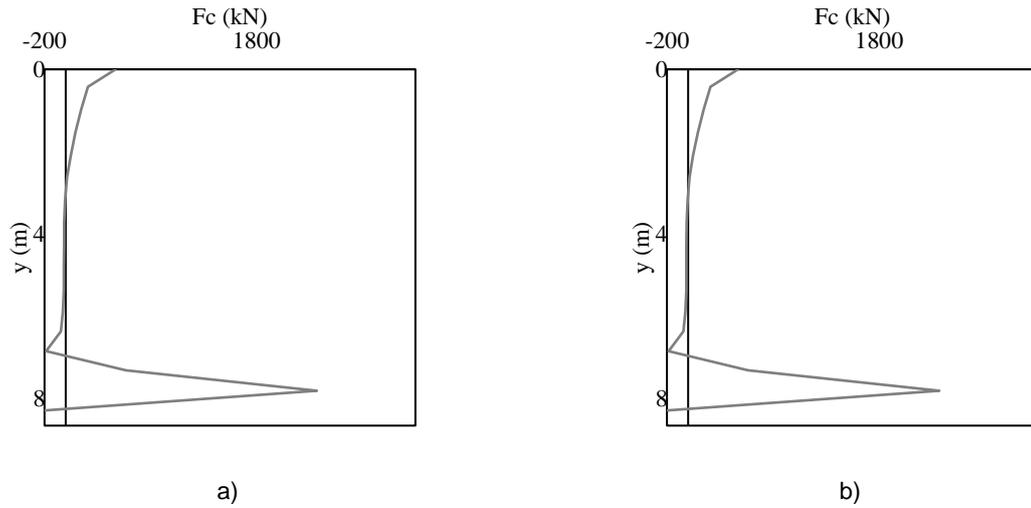


Fig. 91 - Diagramas de tensões na armadura ao longo de alinhamentos verticais: a) apoio da esquerda (B) b) apoio da direita (D)

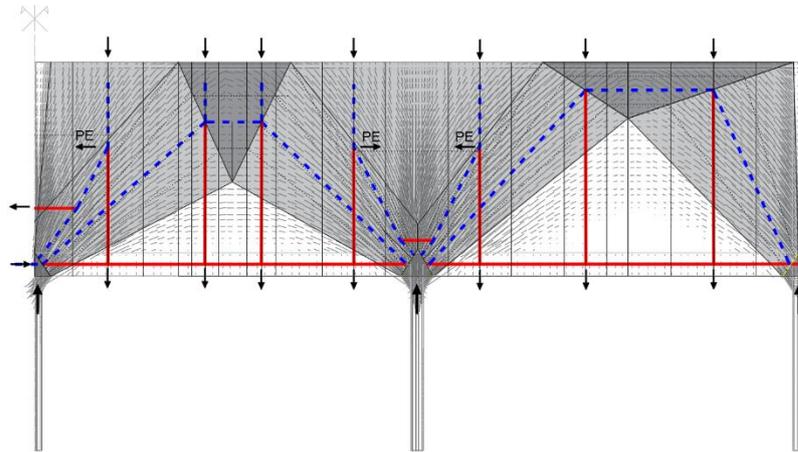


Fig. 92 - Sobreposição do MCTD com o MCTC

É também possível ainda extrair um diagrama com as tensões principais ao longo da linha horizontal imediatamente acima da laje, para observar a evolução das tensões de compressão nesta zona de rotura no último passo de carga (Fig. 93).

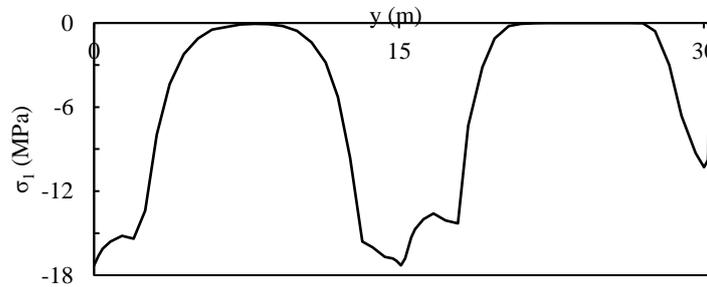


Fig. 93 - Tensões principais ao longo de uma linha horizontal imediatamente acima da laje

4.10. CONCLUSÕES

O caso de estudo permitiu ensaiar a utilização desta ferramenta num caso real. Os modelos mostraram-se bastante fiáveis, permitindo uma leitura clara dos caminhos das tensões no interior da estrutura e originando resultados realistas, do lado da segurança, e semelhantes aos apresentados noutras análises presentes na bibliografia. A aplicação deste tipo de metodologia, com recurso a cálculo não linear, implica que o dimensionamento seja feito de forma iterativa, processo que é tanto mais prático quanto mais rápido for o processo de cálculo conseguido. Tendo os modelos, também no caso deste capítulo, sido calculados com bastante rapidez e convergência, parece-nos que a aplicação ao dimensionamento dependeria apenas de uma maior agilização do processo de reintrodução de soluções possíveis de armadura para proceder posteriormente ao cálculo.

5 CONCLUSÕES

No estudo realizado, os MCTD mostraram-se um método bastante intuitivo, com o qual foi possível fazer analogias a sistemas mecânicos mais simples, ilustrando de forma clara o desenvolvimento das tensões e os caminhos das forças dentro das estruturas. Usados em conjunto com o MET, estes permitiram uma compreensão do funcionamento das mesmas na rotura, sendo mais aproximados à realidade do que o segundo, mas de mais difícil leitura. A aplicação destes modelos aos casos mais simples do capítulo 2, permitiu verificar os princípios que estão na base dos mesmos e demonstrar que estes são conservativos face aos ensaios utilizados. Em ambos os métodos, à exceção das situações de cargas em apoio direto, verificou-se que há uma liberdade adicional na sua construção, nomeadamente a inclinação das escoras de betão. Esta liberdade permite optar entre dimensionar a estrutura para almas mais estreitas ou para menor quantidade de aço. Por outro lado, essa liberdade abre dúvidas relativamente ao facto de se estar perante a solução mais otimizada ou mais próxima do comportamento real da estrutura.

A utilização de MCTD com leis para a resistência plástica do betão variável, permitiu nos casos de regiões de continuidade, levantar o limite à inclinação das escoras, imposto com os métodos tradicionais. Assim, nesses casos, é possível explorar uma gama de soluções não permitidas com os métodos com resistência à compressão do betão constante, o que se torna uma vantagem. No entanto, essa vantagem não pode ser aplicada com este método no caso de regiões de descontinuidade que é o principal objeto deste método. Por outro lado, conclui-se também, que o desenvolvimento com rigor dos MCTD pode tornar-se muito moroso, pois as soluções analíticas são por vezes complexas e a construção dos campos de tensões tem também alguma complexidade em termos geométricos, nem sempre sendo justificável. Este torna-se assim, muitas vezes, desnecessário, dado que em muitas situações de dimensionamento pode ser satisfatório atender ao que se passa nas secções críticas da estrutura, sendo na prática aplicado o MET e verificados os nós de forma simplificada.

Os MCTC, ainda que contendo algumas simplificações relativamente a outro tipo de métodos de cálculo existentes, são mais realistas do que os anteriores. Como vantagem relativa aos MCTD e ao MET, têm o facto de ser mais rápido e, por originar soluções teoricamente exatas, dar uma resposta fechada, reduzindo a dúvida quanto ao modelo adequado a utilizar de entre os vários possíveis. É o caso da inclinação das escoras no betão e o posicionamento dos tirantes e escoras em modelos hipers-táticos. Demonstrou-se que a capacidade de fazer depender a resistência plástica do betão às extensões

transversais permite que este modelo se configure como um melhoramento dos anteriores, removendo uma limitação e aproximando-se mais da realidade dos fenómenos físicos em estudo, sendo no entanto, conservativo em algumas situações. Este fator, aliado à utilização do regime plástico da estrutura na rotura, tendo em conta a redistribuição interna dos esforços, permite melhor exploração dos limites dos materiais no processo de dimensionamento.

Os casos estudados nos capítulos 2 e 3 permitiram ensaiar os modos de rotura necessários pelos dois métodos, testando a aproximação dos resultados obtidos com os MCTC e os MCTD, antes de os aplicar a um caso prático. Concluiu-se que se conseguem obter modelos com uma relativa rapidez de cálculo e bastante convergência, dada a simplificação das leis constitutivas e outros pressupostos adotados. Este é um ponto favorável no que toca à consideração da sua utilização na prática do dimensionamento de estruturas. Conclui-se também que houve uma grande proximidade nas cargas de rotura, especialmente nas roturas globais da estrutura, havendo uma maior disparidade no caso das roturas pontuais dos nós, fenómenos mais difíceis de ilustrar com esta metodologia.

O caso de estudo do capítulo 4 permitiu ensaiar a utilização desta ferramenta num caso real. Os modelos mostraram-se bastante fiáveis, permitindo uma leitura clara dos caminhos das tensões no interior da estrutura e originando resultados realistas, do lado da segurança, e semelhantes aos apresentados noutras análises presentes na bibliografia. A aplicação deste tipo de metodologia, com recurso a cálculo não linear, implica que o dimensionamento seja feito de forma iterativa, processo que é tanto mais prático quanto mais rápido for o processo de cálculo conseguido. Tendo os modelos, também no caso deste capítulo, sido calculados com bastante rapidez e convergência, parece-nos que a aplicação ao dimensionamento dependeria apenas de uma maior agilização do processo de reintrodução de soluções possíveis de armadura para proceder posteriormente ao cálculo.

Sendo um método ainda muito reservado a círculos restritos, de aplicação académica ou só em casos de análise de estruturas existentes com uma complexidade elevada, é ainda bastante considerável a morosidade dos processos de modelação e análise dos programas de cálculo existentes quando comparáveis com as soluções de cálculo linear elástico, onde a interface com o utilizador e a integração com as metodologias BIM está mais desenvolvida. A evolução dos códigos no sentido da aceitação futura deste método como verificação de segurança (FIB, 2013) permitem antever que estes serão uma realidade quotidiana proximamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, João Carlos De Oliveira Fernandes De - Adaptive stress field models for structural concrete. Lisboa : UTL - Instituto Superior Técnico, 2010
- BELARBI, A.; HSU, C. T. T. - Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension-compression. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*. 92:5 (1995) 562–573.
- BELLETTI, Beatrice; ESPOSITO, Rita; WALRAVEN, Joost - Shear Capacity of Normal, Lightweight, and High-Strength Concrete Beams according to Model Code 2010. II: Experimental Results versus Nonlinear Finite Element Program Results. *Journal of Structural Engineering*. . ISSN 0733-9445. 139:9 (2013) 1600–1607. doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000743.
- BELLETTI, Beatrice; ESPOSITO, Rita; WALRAVEN, Joost - Shear capacity of normal, lightweight & high-strength concrete beams according to MC2010. Part I. *Journal of Structural Engineering*. . ISSN 0733-9445. 139:September (2013) 1593–1599. doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000742.
- BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; MALERBA, P. - Ricerca di Modelli Strut-and-Tie Mediante Programazione Lineare
- BRASÃO FARINHA, J. S.; CORREIA DOS REIS, A. - Tabelas Técnicas
- COLLINS, M. P. - Towards a Rational Theory for RC Members in Shear. *Journal of the Structural Division ASCE*. 104:4 (1978) 219–231.
- DIANA FEA BV - DIANA User's Manual - Release 10.2. Delft. 2017).
- DORN, W. S.; GOMORY, R. E.; GREENBERG, H. J. - Automatic Design of Optimal Structures. *Journal de Mécanique*. 3:1964) 25–52.
- EXNER, H. - On the Effectiveness Factor in Plastic Analysis of Concrete. IABSE reports of the working commissions. Zürich. 29:1979) 35–42.
- FARIA, Rui; PIMENTEL, Mário - Transparências das aulas teóricas da disciplina de Estruturas de Betão 1 MIEC. Porto : FEUP, 2017
- FERNANDEZ RUIZ, Miguel; MUTTONI, Aurelio - On development of suitable stress fields for structural concrete. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*. 38800 INTERNATIONAL WAY, COUNTRY CLUB DRIVE, PO BOX 9094, FARMINGTON HILLS, MI 48333-9094 USA. . ISSN 0889-3241. 104:4 (2007) 495–502.
- FIB - FIB Model code for concrete structures 2010. Berlin. 2013) XXXI, 402 p.-XXXI, 402 p.
- HARS, E. - Zum Querkraftwiderstand von Stahl-und Spannbetonträgern mit dünnen Stegen. [S.l.] : EPFL, 2006
- HIGGINS, C. *et al.* - Assessment methodology for diagonally cracked reinforced concrete deck girders - Final Report SPR 350, SR 500-091. [S.l.] : Oregon Department of Transportation (ODOT) and Federal Highway Administration (FHWA), 2004
- IPQ - Eurocódigo 1 - Acções em estruturas - Parte 1-1 Acções Gerais - Pesos volúmicos, pesos próprios sobrecargas em edifícios. Caparica : [s.n.]
- IPQ - Eurocódigo - Bases para o projecto de estruturas. Caparica : [s.n.]
- IPQ - Eurocódigo 2 : projecto de estruturas de betão Parte 1-1 regras gerais e regras para edifícios. Caparica : IPQ, 2010
- KAUFMANN, W. - Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces. [S.l.] : Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1998

- KOSTIC, N. - Topologie des champs de contraintes pour le dimensionnement des structures en béton armé. [S.l.] : EPFL, 2009
- KUCHMA, Daniel A.; TJHIN, Tjen N. - CAST (Computer Aided Strut-and-Tie) Design Tool. 109:7 (2001).
- KUMAR, P. - Optimal Force Transmission in Reinforced Concrete Deep Beams. Computers & Structures. 8:1977) 223–229.
- KUPFER, H. - Erweiterung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit. Comité Euro-International du Béton (CEB), Bulletin d'Information. 40 (1964) 44–57.
- LEONHARDT, Fritz; WALTHER, R. - Wandartige Träger. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Wilhelm Ernst & Sohn. 178:159 (1966).
- LOURENÇO, Miguel; ALMEIDA, João F.; BOIA, Rui - Design examples for strut-and-tie models - Example 4: Continuous deep beam. Lausanne : [s.n.]
- MARTHA, Luiz Fernando - Ftool - Two-dimensional Frame Analysis Tool v4.00.00. 2017).
- MATOS FERNANDES, Manuel De - Mecânica dos solos 2 - introdução à engenharia geotécnica. Coleção Manuais. Porto. 2ª Edição:2015).
- MÖRSCH, Emil - Der Eisenbetonbau - Seine Theorie und Anwendung. 376 (1908).
- MUTTONI, Aurelio; NIKETIC, Filip; FERNÁNDEZ RUIZ, Miguel - Dimensionamiento y verificación del hormigón estructural mediante el método de los campos de tensiones. Hormigón y Acero. 242 (2006) 10.
- MUTTONI, Aurelio; THÜRLIMANN, Bruno; SCHWARTZ, Joseph - Design of Concrete Structures with Stress Fields. [S.l.] : Birkhäuser Basel, 1997
- NEWTON CONSULTORES DE ENGENHARIA, Lda. - Projeto de Estruturas e Fundações - ETAR de Sobreiras. Porto : [s.n.]
- NEWTON CONSULTORES DE ENGENHARIA LDA. - Projeto de Aplicação de Pré-Esforço - ETAR de Sobreiras. Porto : [s.n.]
- NIELSEN, M. P.; HOANG, L. C. - Limit Analysis and Concrete Plasticity. 3rd. ed. Boca Raton, USA : CRC Press, 2011
- NIKETIĆ, Filip - Development of a consistent approach for design and assessment of structural concrete members using stress fields and strut-and-tie models. Lausanne : EPFL, 2017
- PIMENTEL, Mário Jorge Seixas - Modelação e análise de estruturas laminares de betão: Possibilidades e desafios. Porto : FEUP, 2004
- PIMENTEL, Mário Jorge Seixas - Numerical modelling for safety examination of existing concrete bridges. Porto : [s. n.], 2011
- RAYBAUT, Pierre - Spider 3.2.6 - The Scientific PYthon Development EnviRonment. 2018).
- RITTER, Wilhelm - Die Bauweise Hennebique. Schweizerische Bauzeitung. 1899) 41–149.
- VECCHIO, F. J. - Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation. ASCE Journal of Structural Engineering. 126:8 (2000) 1070–1077.
- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. - The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI STRUCTURAL JOURNAL. 91:4 (1986) 423–433.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. - Optimal Design of Multiple Load Case Structures Using an Evolutionary Procedure. Engineering Computation. 11:1994) 295–302.

ZHANG, L. X.; HSU, T. T. C. - Behaviour and Analysis of 100MPa Concrete Membrane Elements

ZWICKY, D. - Bruchversuche an ausgebauten Brückenträgern. Zürich : [s.n.]