

# *Filtro de Kalman no Seguimento de Movimento em Visão Computacional*

Relatório Interno

*Raquel Ramos Pinho*  
*João Manuel R. S. Tavares*  
*Miguel F. P. Velhote Correia*



Universidade  
do Porto

Faculdade de  
Engenharia

**FEUP**



FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
LOME – Lab. de Óptica e Mecânica Experimental, INEGI – Inst. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial  
INEB – Inst. de Engenharia Biomédica, Laboratório Sinal e Imagem  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 PORTO – PORTUGAL

**Setembro 2005**

## **Resumo**

Este relatório aborda o problema de seguimento de entidades representadas em seqüências de imagens usando Visão Computacional. Para tal utiliza-se um método estocástico, o filtro de *Kalman*, aliado a um método de otimização global, no sentido de obter os melhores conjuntos de correspondências, e portanto garantir a otimização global do seguimento. Nesta metodologia também se inclui um modelo de gestão de entidades seguidas que possibilita avaliar em cada instante se se deve continuar o seguimento de cada entidade considerado no modelo. Deste modo, a abordagem proposta permite lidar com casos de oclusão temporária, desaparecimento definitivo, aparecimento ou reaparecimento de entidades, mantendo um número controlado de entidades seguidas em cada instante, o que reduz o custo computacional associado ao estritamente necessário.

A metodologia proposta é neste trabalho testada e validada em exemplos de seguimento de entidades representadas em imagens sintéticas e reais.

## **Abstract**

This report contemplates feature tracking on image sequences using Computer Vision. To do so a stochastic method is used, the Kalman filter, allied to a global optimization method to obtain the best set of correspondences, and so to guarantee the global optimization of the tracking results. A management model is also included in this methodology to evaluate if each feature's tracking should be continued or not. By doing so, the proposed approach deals with temporary occlusion, permanent disappearance, appearance or reappearance of features, maintaining a controlled number of tracked features in each time instant, which reduces the computer cost to what is strictly necessary.

The proposed methodology is here tested and validated with feature's tracking along synthetic and real image sequences.

## Índice

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>4</b>
<b>2. MÉTODOS ESTOCÁSTICOS .....</b>	<b>5</b>
2.1. FILTRO DE KALMAN.....	6
<b>3. OPTIMIZAÇÃO DAS CORRESPONDÊNCIAS NA MEDIÇÃO.....</b>	<b>7</b>
3.1. ALGORITMO SIMPLEX NA ATRIBUIÇÃO PREVISÕES/MEDIÇÕES .....	8
3.2. DISTÂNCIA DE MAHALANOBIS.....	9
<b>4. PROBLEMA DE OCLUSÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>5. MODELO DE GESTÃO DAS ENTIDADES SEGUIDAS.....</b>	<b>10</b>
<b>6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>11</b>
6.1    EXEMPLOS SINTÉTICOS .....	12
6.2    EXEMPLOS REAIS .....	19
<b>7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO.....</b>	<b>25</b>
<b>8. AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>26</b>
<b>9. BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>26</b>

## Introdução

A análise de movimento de objectos em Visão Computacional tem sido uma área em vasta expansão ao longo dos últimos anos, quer pela diversidade de aplicações, quer pela potenciação de recursos promovidos pelos inúmeros desenvolvimentos tecnológicos. A motivar estes trabalhos também se encontra a crescente necessidade de automatizar computacionalmente processos manuais de análise de movimento, pelo que se têm recorrido cada vez mais à análise de movimento utilizando técnicas de Visão Computacional. A análise de movimento de objectos ao longo de sequências de imagens poderá ser considerada como constituída pelas etapas de detecção, de seguimento e de reconhecimento [Correia, 1995; Aggarwal, 1999; Tavares, 2000; Moeslund, 2001; Wang, 2003; Pinho, 2004].

O seguimento de objectos é uma área de investigação que pode ser abordada considerando diferentes metodologias. Geralmente, o processo de seguimento envolve o emparelhamento de *pixels*, pontos, linhas, áreas, formas ou outra informação visual. Algumas das aplicações práticas, que exemplificam a utilização do seguimento de objectos usando técnicas de Visão Computacional, serão a análise de tráfego automóvel, a previsão das condições atmosféricas através do movimento de nuvens, o estudo do movimento dos lábios para permitir a sua leitura, ou a análise das deformações que objectos sofrem devido à influência de forças externas ou mesmo internas [Correia, 1995; Bro-Nielsen, 1996; Pavlovic, 1997; Tavares, 2000; Ozer, 2002; Pinho, 2004].

As dificuldades inerentes à tarefa de seguimento prendem-se com a complexidade dos objectos a seguir e do ambiente em que os mesmos estão inseridos. Como exemplos de complexidade podem ser citados: o seguimento simultâneo de vários objectos; a divisão dos objectos a seguir em novas entidades ou, pelo contrário, a fusão numa só entidade – variações de topologia; o aparecimento de novos objectos ou, no sentido inverso, o desaparecimento total ou parcial de objectos, por exemplo devido a problemas de oclusão, de ruído alteração das condições de iluminação, da sua saída de cena; etc. [Moeslund, 2001]. Por outro lado, para que se possa seguir o movimento de forma automática deve-se atender a dificuldades adicionais: não existem modelos computacionais perfeitos e, mesmo quando estes são adequados a certas aplicações, são baseados em aproximações da realidade; também existem perturbações que não podem ser controladas nem modeladas deterministicamente; e os dados adquiridos pelos sensores considerados não são perfeitos; etc. Para superar as dificuldades mencionadas os modelos estocásticos têm constituído uma boa alternativa às abordagens determinísticas [Maybeck, 1979]. Os métodos estocásticos mostram-se adequados no manuseamento de dados multivariados e processos não-lineares/não-*Gaussianos*, melhorando significativamente os resultados obtidos por técnicas tradicionais de séries temporais [Isard, 1998; Arulampalam, 2002].

Neste trabalho aborda-se o seguimento de objectos em Visão Computacional através da utilização de modelos estocásticos definidos por um espaço de estados, onde a evolução do sistema é feita por intermédio da inclusão de informação relevante no vector de estados. Essa informação relativa às várias

entidades em movimento, pode ser incorporada de diversas maneiras sob a forma de variáveis de estado (ver por exemplo [Tavares, 1995]); no entanto, a generalidade dos métodos recorre à posição das entidades, possibilitando também a inclusão de características cinemáticas [Correia, 1995; Tavares, 1995]. Para o efeito, neste trabalho as entidades cujo movimento se pretende seguir ao longo de seqüências de imagens são representadas por pontos, e o vector de estados é composto pelas respectivas posições, velocidades e acelerações.

Segundo uma perspectiva *bayesiana* a ideia chave do seguimento de movimento consiste na dicotomia previsão/correção. A previsão contempla, tal como o nome indica, a estimativa do estado do sistema na imagem seguinte. Por outro lado, a correção consiste na actualização dos dados previstos através da eventual inclusão de dados recolhidos *a posteriori* no quadro seguinte num vector de medições [Arulampalam, 2002]. Para que sejam incluídas tais medições é necessário relacionar adequadamente, ou seja emparelhar, os dados medidos de modo a que cada informação recolhida possa ser atribuída à respectiva entidade.

Na abordagem proposta neste trabalho considera-se um filtro de *Kalman* no seguimento de cada ponto<sup>1</sup> que contempla a sua posição, velocidade e aceleração, sendo incorporados, em cada iteração do filtro, dados relativos à posição desse ponto no quadro seguinte da seqüência de imagens. Para proceder à correspondência da posição medida de cada ponto e a previsão feita pelo filtro, é usada uma análise global dos mesmos, no sentido de otimizar o resultado integral do emparelhamento obtido para o sistema modelado.

A referida metodologia permite, ainda, o seguimento de movimento de pontos que poderão desaparecer e voltar a aparecer ao longo da seqüência de imagens. Para gerir o conjunto de pontos cujo movimento se pretende seguir utilizamos um modelo de gestão dos mesmos [Tavares, 1995], que poderá revelar-se particularmente útil em casos de seqüências longas, de muitos pontos a serem seguidos, etc.

Neste relatório serão, também, apresentados os resultados do seguimento de pontos em imagens sintéticas e reais.

## **1. Métodos Estocásticos**

Sob uma perspectiva *bayesiana* o seguimento consiste no cálculo recursivo do grau de certeza associado a cada estado em determinado instante, tendo em consideração os dados obtidos até esse momento. Para tal, é assumido que técnicas de modelação produziram um sistema descritivo, sob a forma de uma equação diferencial estocástica para descrever a propagação de estados – o modelo do sistema.

---

<sup>1</sup> Ainda que ao longo da seqüência de imagens seja utilizado um filtro independente para cada entidade seguida, para simplificar a linguagem utilizada designaremos o conjunto de filtros usados como um todo.

Também se considera que são disponibilizadas medições discretas no tempo (isto segundo uma perspectiva discreta) corrompidas por ruído, e que constituem o modelo de medições. Deste modo, pretende-se combinar as medições obtidas no sistema actual com a informação providenciada pelo modelo, e a descrição estatística das incertezas no sentido de obter estimativas óptimas dos estados do sistema considerado [Maybeck, 1979; Correia, 1995; Tavares, 1995; Pinho, 2005a].

De um modo geral a optimização da estimativa obtida depende do critério utilizado. Neste caso, como se utiliza uma abordagem *bayesiana*, procuram-se meios de propagação da função densidade de probabilidade condicional, restringida pelo processo de medição. No entanto, uma medição da precisão da estimativa também pode ser considerada [Arulampalam, 2002].

Tal como já foi referido na secção anterior, os filtros deste tipo são compostos por duas fases principais: uma de previsão e outra de correcção. A previsão utiliza o sistema do modelo para prever a função de densidade de probabilidade do estado no instante seguinte. Dado que o estado é geralmente sujeito a algumas perturbações, que usualmente são modeladas como ruído aleatório, a previsão poderá contemplar a translação, a deformação e a difusão da função densidade de probabilidade. Por outro lado, a fase de correcção utiliza a medição mais actual de forma a modificar a função densidade de probabilidade prevista. Tal é conseguido pela utilização do teorema de *Bayes*, que consiste no mecanismo de actualização da informação, acerca do estado objectivo, quando são fornecidas informações extra a partir de novos dados [Maybeck, 1979].

## **2.1. Filtro de Kalman**

O filtro de *Kalman* assume que a função densidade de probabilidade em cada instante de tempo segue uma distribuição *Gaussiana*. Este filtro permite a estimativa do estado de um sistema de forma a minimizar o quadrado da média do erro [Welch, 1995], tratando-se duma solução óptima para o seguimento, caso sejam satisfeitas algumas restrições: se o ruído tiver uma distribuição *Gaussiana* de parâmetros conhecidos e se a transição de estados representada pelo modelo do sistema for linear [Welch, 1995; Arulampalam, 2002].

Neste filtro, a fase de predição é gerada por intermédio da equação *Chapman-Kolmogorov* e, considerando que se utiliza um processo de *Markov* de primeira ordem, obtém-se:

$$x_t^- = \Phi x_{t-1}^+, \quad (1)$$

onde  $x_{t-1}^+$  corresponde ao vector de variáveis de estado do sistema no instante  $t-1$  posterior à fase de medição desse instante, e  $x_t^-$  corresponde à estimativa para o instante  $t$  antes da medição na imagem associado a esse momento, sendo a sua transição dada por  $\Phi$ . A estimativa para a incerteza associada à previsão do vector  $x_t^-$ , é dada por:

$$P_t^- = \Phi P_{t-1}^+ \Phi^T + Q, \quad (2)$$

onde  $P$  é a matriz de covariância (mais uma vez os índices  $+$  e  $-$  são relativos à incorporação ou não das medições nesta iteração do filtro), e  $Q$  é a matriz de covariância do ruído do processo modelado.

A fase seguinte do filtro de *Kalman* corresponde à correcção das estimativas realizada através da eventual incorporação de novas medições  $u_t$ :

$$\begin{aligned} K_t &= P_t^- H^T [HP_t^- H^T + R_t]^{-1} \\ x_t^+ &= x_t^- + K_t [u_t - Hx_t^-] \quad , \\ P_t^+ &= [I - K_t H] P_t^- \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $K$  é o ganho do filtro que traduz o peso relativo que se deve atribuir às estimativas e medições, sendo o seu valor proporcional à incerteza da estimativa e inversamente proporcional à incerteza da medição. Também, no conjunto de equações (3),  $H$  é a matriz que transforma o sistema de coordenadas do vector de características estimadas no vector de características medido, e  $R_t$  é a matriz de variância medida, figura 1 [Correia, 1995; Tavares, 1995; Arulampalam, 2002; Pinho, 2005a].

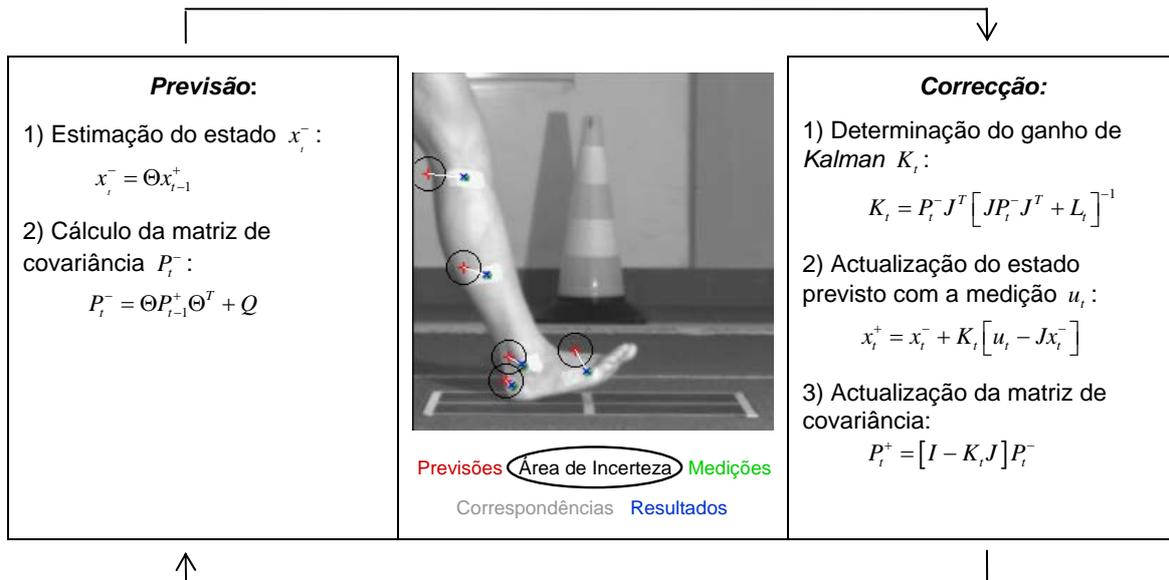


Figura 1. Iteração do filtro de *Kalman* para o instante de tempo  $t$ : os índices  $+$  e  $-$  são relativos à incorporação ou não das medições nesta iteração do filtro;  $\Theta$  relaciona o estado entre dois instantes de tempo consecutivos;  $Q$  modela o ruído do processo;  $J$  é a matriz que transforma o sistema de coordenadas do vector de características estimadas no vector de características medido;  $L_t$  é a matriz de variância das medições.

## 2. Optimização das Correspondências na Medição

Como já foi referido, para fazer a introdução de novas medições na fase de correcção do filtro de *Kalman*, é necessário estabelecer correspondências entre as posições estimadas e as correspondentes novas posições das entidades a seguir. Assim, para cada entidade seguida tem de ser escolhido um dos candidatos ao emparelhamento: o que melhor se aproxima do conjunto de estimativas obtido.

Neste trabalho as entidades seguidas são representados por pontos e as respectivas medições consistem nas suas posições  $(x, y)$ . Pela própria construção do filtro de *Kalman* a área de pesquisa da nova posição encontra-se no plano imagem e é definida por uma elipse. Os eixos dessa elipse, são determinados pelos vectores próprios da matriz reduzida<sup>2</sup> de covariância, os raios são dados pelos valores próprios associados, e o centro corresponde à posição prevista pelo filtro para a entidade em causa [Correia, 1995; Tavares, 1995; Pinho, 2005a]. Caso exista convergência do filtro, estas áreas de pesquisa vão diminuindo com as sucessivas iterações do filtro ao longo do tempo, dado que são obtidas estimativas cada vez mais adequadas, e desta forma, o custo computacional associado à determinação de correspondências entre pontos pode ser cada vez menor [Correia, 1995].

Contudo, esta abordagem poderá apresentar algumas dificuldades inerentes: as medições obtidas poderão não estar contidas no interior da área de pesquisa; isto é, não existe nenhuma entidade candidata ao emparelhamento no interior da respectiva área de pesquisa; ou pelo contrário, a existência de múltiplas entidades candidatas nessa mesma área. Tais dificuldades poderiam ser resolvidas pela inclusão de mais critérios no emparelhamento (por exemplo geométricos como em [Tavares, 1995]). Mas, por outro lado, mesmo quando o emparelhamento é conseguido com êxito no interior da respectiva área de emparelhamento, com esta abordagem usual não há garantia de que se tenha obtido em termos globais, isto é para o sistema como um todo, o melhor conjunto de correspondências.

Assim, neste trabalho pretende-se superar tais dificuldades com ênfase na determinação dos emparelhamentos de uma forma global. Para o fazer, aplica-se um método de optimização global, por exemplo o algoritmo *Simplex*, no sentido de se assegurar a obtenção do melhor conjunto de correspondências possível para todas as entidades envolvidas no seguimento.

### **3.1. Algoritmo Simplex na atribuição previsões/medições**

O algoritmo *Simplex* consiste num procedimento algébrico iterativo que permite a determinação de pelo menos uma solução óptima para cada problema, sendo os conceitos subjacentes à resolução essencialmente geométricos [Hillier, 2001; Press, 2002].

Enquanto método de optimização linear, o algoritmo *Simplex*, pretende optimizar uma função sujeita a algumas restrições. No caso concreto do problema analisado, a função que se pretende minimizar consiste no custo de emparelhamento global do conjunto de previsões das posições dos pontos seguidos e as respectivas medições. Para optimizar as correspondências recorre-se ao algoritmo de atribuição do *Simplex*, mas uma das restrições deste método consiste no facto de a cada previsão corresponder, quando muito, uma única medição, e que a toda a medição corresponderá a um ponto que se pretende seguir. Assim, a formulação do *Simplex* utilizada distingue-se da formulação usual pela

---

<sup>2</sup> A cada entidade seguida está associado um filtro de *Kalman*, pelo que designamos por matriz reduzida de covariância a submatriz da matriz de covariância referente à posição de cada entidade.

inclusão desta restrição [Hillier, 2001]. O caso em que esta restrição não é satisfeita será analisado nas próximas secções.

### 3.2. Distância de Mahalanobis

No processo de optimização de correspondências é necessário pesar a possibilidade de a cada entidade ser atribuída uma das medições recolhidas, e serão estes custos que irão compor a função que se pretende minimizar. Neste trabalho, consideramos o peso, ou o custo do emparelhamento, entre um par de coordenadas previsão/medição como sendo dada pela respectiva distância de *Mahalanobis* [Pinho, 2005a].

A distância de *Mahalanobis* entre dois pontos consiste numa métrica que contempla a diferença entre as características consideradas. Neste caso, a distância de *Mahalanobis* entre um ponto estimado,  $X_E$ , e um ponto medido,  $X_M$ , é definida como a distância euclidiana entre as coordenadas dos pontos normalizada pelas suas variâncias:

$$d_{x_s}^2 = \frac{(X_M - X_E)^T (V_M + V_E)^{-1} (X_M - X_E)}{2}, \quad (4)$$

onde  $V_M$  é a variância associada ao vector de posição da entidade candidata ao emparelhamento, e  $V_E$  é a variância associada à entidade estimada pelo filtro de *Kalman* [Tavares, 1995; Pinho, 2005a].

No caso concreto deste trabalho a variância associada a cada estimativa é dada pelo próprio filtro como sendo a área delimitada pela elipse associada à matriz de variância do erro de previsão. Contudo, não está definida a variância associada a cada medição pelo que se torna necessário obter uma medida que possa traduzir tal variância. Por analogia com a variância para as estimativas, considera-se a variância da medição como sendo obtida através da área de uma elipse. A referida elipse, para cada correspondência, consiste na menor elipse que contém o ponto medido e que preserva os eixos, respectiva proporção e centro da elipse da estimativa (ver figura 2).

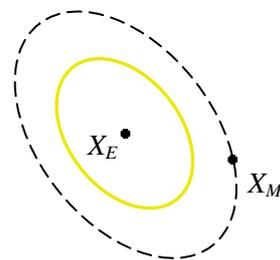


Figura 2. Para cada ponto estimado  $X_E$ , a variância da previsão  $V_E$  do filtro de *Kalman* consiste na área limitada pela elipse associada à matriz de covariância (elipse a traço amarelo). Na abordagem proposta considera-se a variância da medição  $V_M$ , como sendo a área limitada pela elipse que contém o ponto medido  $X_M$  e que preserva o centro, os eixos e a respectiva proporção da anterior (obtendo-se a elipse representada a traço descontinuo).

Pela própria definição os valores da distância de *Mahalanobis* serão tanto menores quanto melhor for o emparelhamento entre as entidades em estudo, daí que se pretenda minimizar a função de custos associada.

### **3. Problema de Oclusão**

Tal como foi formulado o emparelhamento de pontos, na secção anterior, não é permitida a alteração do número de pontos a seguir ao longo da sequência de imagens, já que uma das restrições da atribuição previsões/medições pelo algoritmo *Simplex* de atribuição de correspondências consiste na obrigatoriedade de os emparelhamentos serem sempre feitos entre uma previsão e uma medição. Contudo, casos de oclusão e aparecimento de pontos são frequentes na análise e seguimento de movimento, pelo que tal situação deverá ser ponderada de forma adequada.

Uma técnica para contornar essa restrição consiste na inclusão de variáveis fictícias suficientes de modo a permitir igualar o número de pontos em cada uma das fases (previsão e medição). O custo associado a cada correspondência com pontos fictícios é nulo. Assim, quando o *Simplex* é aplicado, estabelece-se um conjunto de correspondências, e os pontos reais que são atribuídos a um ponto fictício consideram-se desemparelhados [Hillier, 2001].

No caso de um ponto não obter correspondência no conjunto de medições fornecidas, o algoritmo implementado assume a oclusão temporária desse ponto, continuando o seguimento desse ponto através da inclusão no vector de medições dos valores obtidos na fase de previsão do filtro para a entidade correspondente. Contudo, dado que não existem medições que validem a correspondente previsão, é aumentado o grau de incerteza da estimativa. Neste trabalho, consideramos que em tais situações os valores da matriz de covariância do erro de previsão associada ao ponto em causa serão elevados ao quadrado (o que aumenta o grau de incerteza, dado que os valores da matriz mencionada são maiores que um) [Pinho, 2005a].

Se por outro lado, uma medição não obtiver um ponto correspondente no conjunto de previsões feitas pelo filtro, considera-se o dado medido como representativo de uma nova entidade a seguir e inicializa-se o seu seguimento [Pinho, 2005a].

### **4. Modelo de Gestão das Entidades Seguidas**

No seguimento ao longo de sequências de imagens poderá ser útil considerar a oclusão temporária de objectos e até o seu desaparecimento definitivo. Essa necessidade será tanto maior quanto maior o número de entidades seguidas, quanto mais longa a sequência de imagens, quanto maior a urgência na obtenção de resultados, etc., pois o custo computacional envolvido pode ser determinante. Assim, para

reduzir este custo ao mínimo deve-se gerir adequadamente as entidades seguidas com um modelo que contemple as situações mencionadas.

Neste trabalho utilizamos um modelo que associa um nível de confiança a cada entidade seguida [Tavares, 1995]. Para cada entidade, se a mesma se mantiver visível então o seu nível de confiança aumenta até um valor máximo fixo. Se, pelo contrário, essa entidade não estiver visível o nível de confiança que lhe está associado é diminuído de uma unidade até que seja atingido um valor mínimo fixo. Neste caso, considera-se que a entidade desapareceu definitivamente da cena, e cessa-se o seu seguimento. Se, porventura, a mesma entidade reaparecer posteriormente, então o seu seguimento inicializa-se como se de uma nova entidade se tratasse [Tavares, 1995; Pinho, 2005c].

Neste trabalho consideram-se os valores de confiança números inteiros entre 0 e 5, sendo todas as entidades inicializadas com nível de confiança 3 (um nível de confiança intermédio).

## **5. Resultados Experimentais**

Nesta secção serão apresentados alguns dos resultados experimentais obtidos com a metodologia proposta em exemplos sintéticos e reais. Para tal, começar-se-á por descrever a inicialização realizada para as várias componentes do filtro de *Kalman*.

Os resultados foram obtidos pelo modelo de aceleração uniformemente variada, isto é, a matriz de transição de estados baseada no polinómio de *Taylor* que aproxima a posição, velocidade e aceleração de cada um dos pontos seguidos, segundo a abordagem apresentada em [Maybeck, 1979].

A matriz de covariância do ruído do processo pode ser uma matriz diagonal cujas entradas correspondem à maior variabilidade verificada pelo ponto na respectiva direcção ao longo da sequência de imagens [Kohler, 1997]. Neste trabalho, optou-se por não o fazer dado que tal assumpção requer que as imagens fornecidas sejam previamente analisadas, o que poderá não ser possível ou porque a quantidade de pontos e quadros a analisar seja incomportável para uma análise manual, ou então porque para uma análise automática será necessário estabelecer correspondências entre dados, ou mesmo porque o seguimento se pretende em tempo real. Assim, atendendo a que neste trabalho não se fez uma aplicação específica a um determinado grupo de dados que permitisse a aprendizagem do comportamento dos mesmos, recorreu-se à matriz identidade.

Para as imagens utilizadas as medições são recolhidas com um erro mínimo, pelo que se assume que a qualidade das medições não perturba os resultados, e assim consideramos a matriz de variância de medições com entradas diagonais não nulas cujos valores estão compreendidos entre 0 e 0.001.

Deste modo, a região de busca no plano imagem para cada nova posição definida por uma elipse terá eixos semelhantes, pelo que os resultados apresentados neste trabalho visualmente parecem ter regiões de busca circulares.

## 5.1 Exemplos Sintéticos

De seguida, serão apresentados alguns dos resultados experimentais obtidos a partir de imagens construídas de forma sintética. Assim, as imagens consideradas são binárias, e as entidades que se pretendem seguir são os centros de massa das manchas representadas a negro.

Para proceder ao seguimento dos mencionados centros de massa, nas imagens utilizadas são determinados os contornos de cada mancha, e para cada contorno é calculado o respectivo centro de massa.

Em cada imagem de resultados (a que corresponderá uma iteração do filtro) as previsões obtidas serão representadas a vermelho, e a área de incerteza de cada previsão corresponde à área limitada por uma elipse a amarelo. Em cada iteração do filtro, são incorporadas por intermédio do quadro seguinte da sequência as novas medições, que neste caso serão os contornos representados a verde (e cujos centros de massa se pretende seguir – também representados a verde). A correspondência entre os resultados da previsão e as novas medições encontra-se assinalada a branco nas imagens de resultados. A fase seguinte do filtro consiste na correcção dos resultados estimados pela inclusão das novas medições; neste trabalho os resultados das correcções das posições de cada ponto estão representados a azul, figura 3.

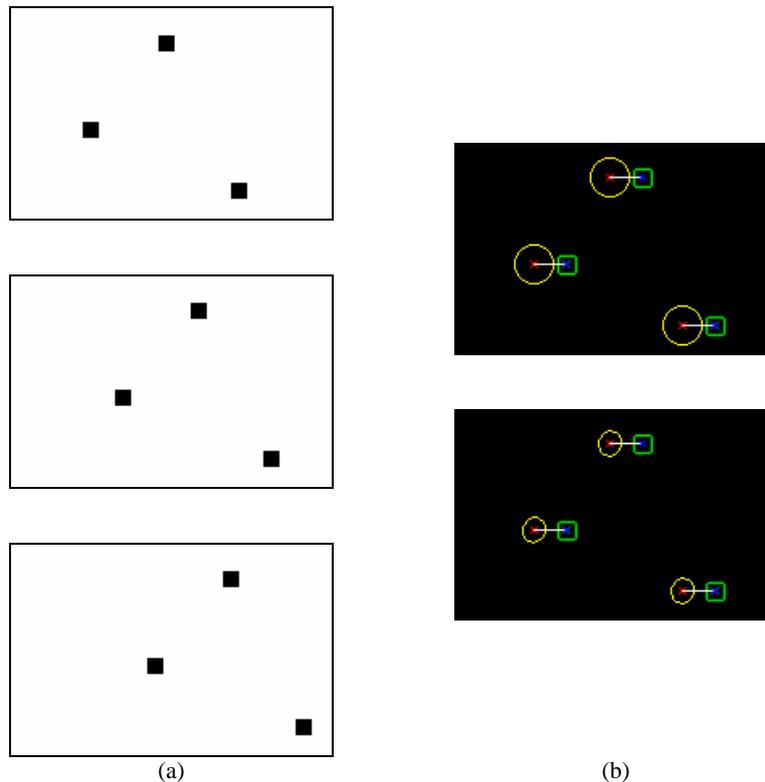


Figura 3. Sequência de imagens sintéticas em que se pretende seguir o centro de massa das manchas representadas (a); Resultados da aplicação do filtro de *Kalman* para as posições onde as previsões são assinaladas a vermelho, a incerteza da previsão a amarelo, as novas medições a verde, a correspondência entre a previsão e o centro de massa do respectivo contorno medido encontra-se representada a branco, e os resultados da correcção do filtro a azul (b).

Considere-se então para o exemplo seguinte um conjunto de quatro manchas cujos centros se pretendem seguir ao longo de 12 quadros, designados pelos pontos A, B, C e D, figura 4. Os pontos A e B movimentam-se uniformemente ao longo da sequência de imagens segundo uma translação horizontal de 5 *pixels* em cada instante. Por outro lado, os pontos C e D sofrem uma rotação de 8° no sentido dos ponteiros do relógio em torno da origem, localizada no vértice superior esquerdo da imagem, ao longo dos primeiros 8 quadros. Depois, esses mesmos pontos permanecem imóveis num quadro, após o que invertem o sentido da rotação (atender às medições indicadas a verde na figura 5). Analisando o movimento seguido pelos pontos designados por A e B, pode-se notar que o filtro rapidamente reconhece o movimento e a partir da 3ª iteração já existe uma sobreposição das previsões, medições e correcções, ou seja o filtro convergiu adequadamente. Também o movimento dos pontos C e D ao longo das primeiras iterações é uniforme, contudo nota-se que as previsões não coincidem exactamente com os pontos medidos, tal como nos casos dos pontos anteriores, ainda que a discrepância não seja significativa. Na 8ª iteração do filtro, estes pontos imobilizam-se mas o filtro continua a pressupor o movimento uniforme verificado até então, pelo que as previsões (a vermelho) distam bastante dos valores medidos (a verde). Nas iterações seguintes, o filtro “reaprende” o movimento destes pontos até que à 11ª iteração, as previsões e medições são quase coincidentes. Note-se que a aproximação do movimento registado por estes pontos resulta do modelo cinemático utilizado, que contempla o seguimento de movimento rectilíneo uniformemente variado, assim, neste caso, poder-se-iam obter melhores resultados caso se utilizasse um modelo cinemático para movimento circular uniforme ou se a amostragem fosse mais fina.

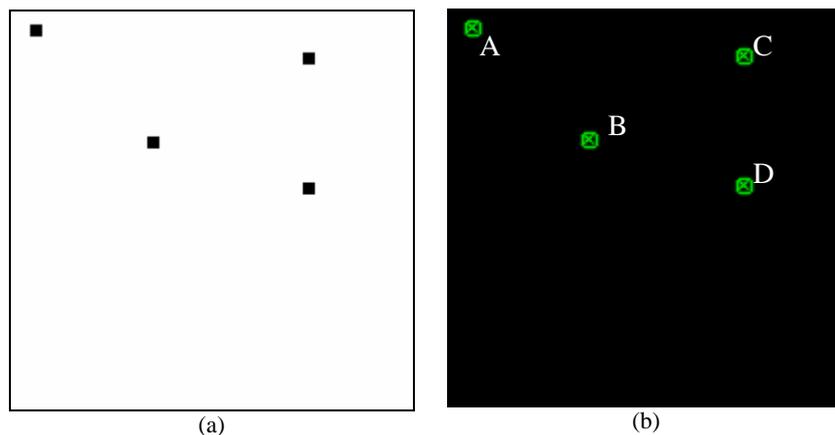


Figura 4. Primeira imagem da sequência analisada no primeiro exemplo (a), e respectivos contornos e centros de massa (b). Os centros de massa (representados por uma cruz) constituirão os pontos a serem seguidos e serão designados por A, B, C e D, respectivamente.

Analisando as elipses representadas ao longo da sequência da figura 5 pode-se notar que estas tendem a diminuir de área, o que demonstra que o erro associado às previsões tende a diminuir ao longo da referida sequência

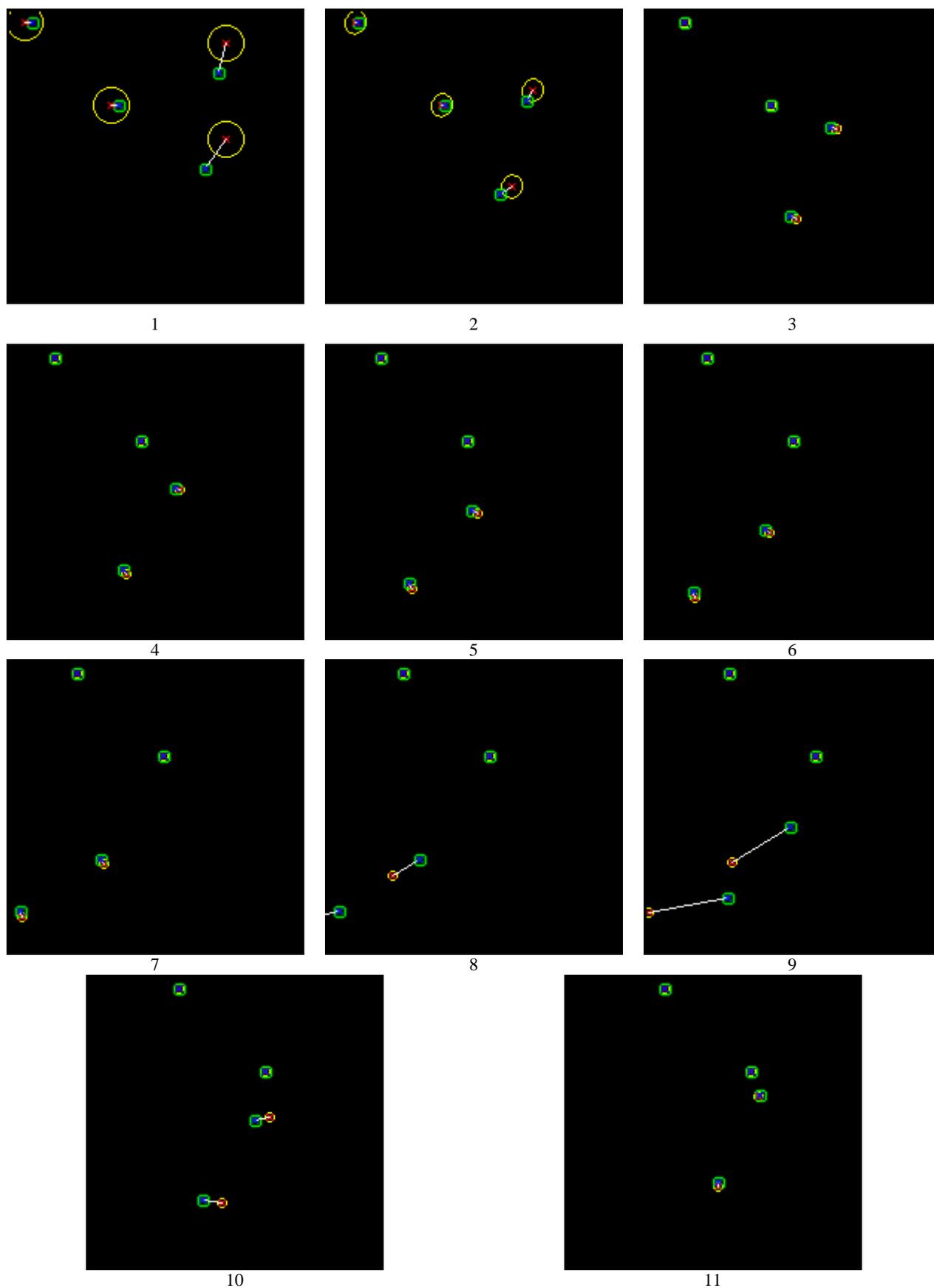


Figura 5. Resultados do filtro de *Kalman* quando os pontos A e B se movem uniformemente e os pontos C e D sofrem uma rotação nas primeiras 7 iterações do filtro, no quadro 8 estes pontos permanecem imóveis e nos instantes seguintes invertem o sentido da rotação.

Pela forma pré-determinada como o filtro usado foi inicializado, isto é, pelo facto da matriz de covariância do erro ter sido inicializada de forma diagonal com todas as suas entradas não-nulas iguais a 5, a área das primeiras elipses já não é suficientemente abrangente para albergar todas as medições em causa. Contudo, o filtro de *Kalman* conforme foi implementado supera facilmente os problemas associados à incorporação de novos dados na fase de medição. De facto, até quando os pontos C e D rompem o movimento uniforme na 8ª iteração e depois invertem o movimento de rotação na iteração seguinte (altura em que se dá a maior discrepância entre as previsões e medições), o filtro mantém-se capaz de assimilar os novos dados de forma correcta.

Até ao momento, referiu-se ao filtro de *Kalman* utilizado como um todo, mas conforme mencionado anteriormente, para cada entidade seguida, neste caso para cada um dos pontos A, B, C e D, é utilizado um filtro independente. Assim, comprova-se que ainda que se tenha dois pares de pontos com o mesmo movimento, os resultados de uns não influenciam os resultados dos outros, o que permite que cada ponto possa seguir uma rota de forma uniforme ou não, sem perturbar o seguimento dos restantes pontos.

Para o exemplo seguinte, considere-se uma sequência composta por 7 quadros, que contem dois pontos E e F, ambos com movimento uniforme, que se pretendem seguir, figura 6. O ponto E move-se em cada instante na diagonal: 15 *pixels* para a direita e 7 *pixels* para baixo. Por sua vez, o ponto F também se move na diagonal mas apenas em 10 *pixels* para cima e para a direita, figura 7.

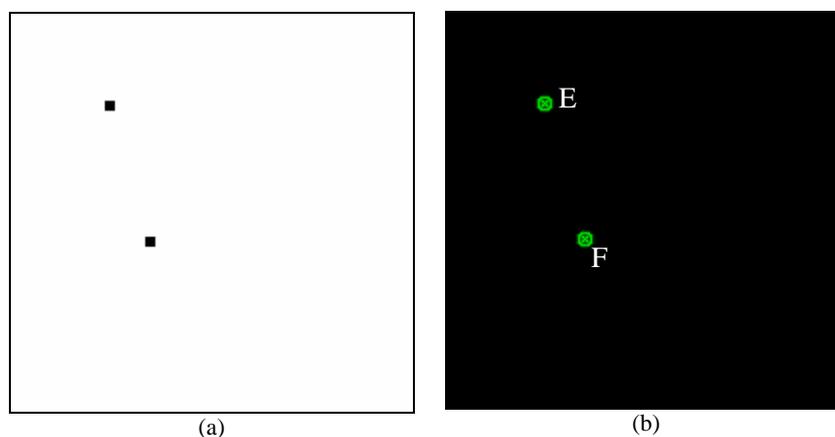


Figura 6. Primeira imagem da sequência analisada no segundo exemplo (a), e respectivos contornos e centros de massa (b). Os centros de massa (representados por uma cruz) constituirão os pontos a serem seguidos e serão designados por E e F.

Tal como no exemplo anterior, o erro do filtro vai diminuindo à medida que é feito o seguimento, e ao fim da terceira iteração a posição dos pontos é prevista quase exactamente, e a correspondente área de pesquisa para o emparelhamento é reduzida relativamente ao deslocamento existente. Contudo, o interesse da análise deste exemplo consiste na ocorrência de sobreposição dos pontos no quadro 5 (a que corresponde a 4ª iteração do filtro). Nestes casos, conforme referido

anteriormente, o filtro atribui o único ponto medido a um dos pontos (no exemplo é atribuído ao ponto F). Assim, no vector de medições as coordenadas correspondentes ao ponto E, serão as previsões determinadas pelo filtro na fase anterior, mas com um grau de incerteza mais elevado que o precedente, o que vai afectar a área delimitada pela elipse no quadro seguinte. E se a entidade seguida reaparece, como acontece no quadro 6 deste exemplo, o seguimento prossegue usualmente. Neste caso, como o movimento em análise é rectilíneo e uniforme o filtro continua a fazer boas estimativas do deslocamento dos pontos seguidos e as previsões coincidem com as medições obtidas, e a área delimitada pelas elipses volta a diminuir.

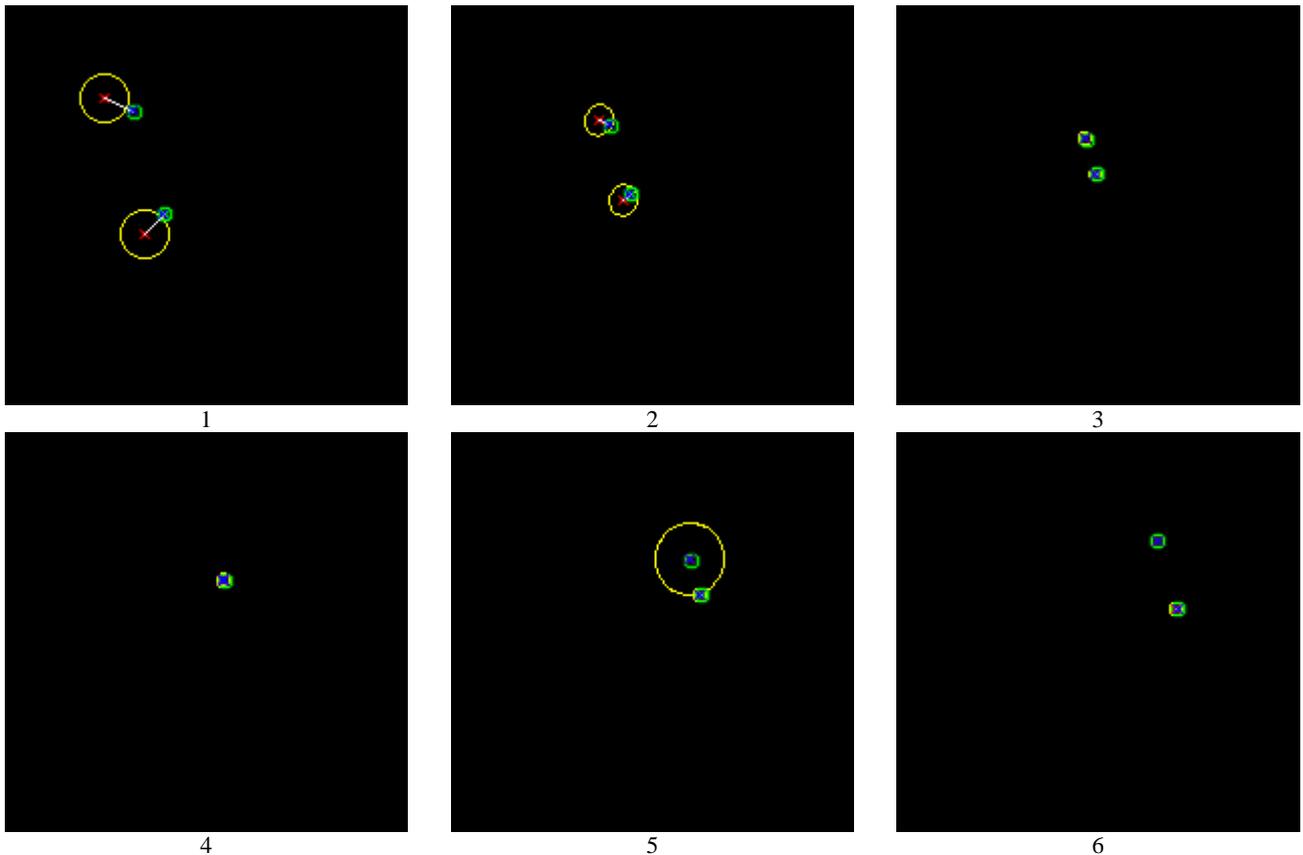


Figura 7. Seguimento dos pontos E e F que se movem uniformemente, mas onde ocorre oclusão de um dos pontos na quarta iteração do filtro de Kalman.

Os dois exemplos experimentais anteriores são compostos por um número reduzido de pontos com movimento uniforme. Para o terceiro exemplo sintético, considere-se um conjunto de 28 pontos com movimento aleatório ao longo de 5 quadros, figura 8. Para facilitar a análise das imagens apresentadas, as elipses correspondentes à área de incerteza de cada previsão foram omitidas, dado que o seu comportamento é em tudo semelhante ao verificado nos exemplos anteriores.

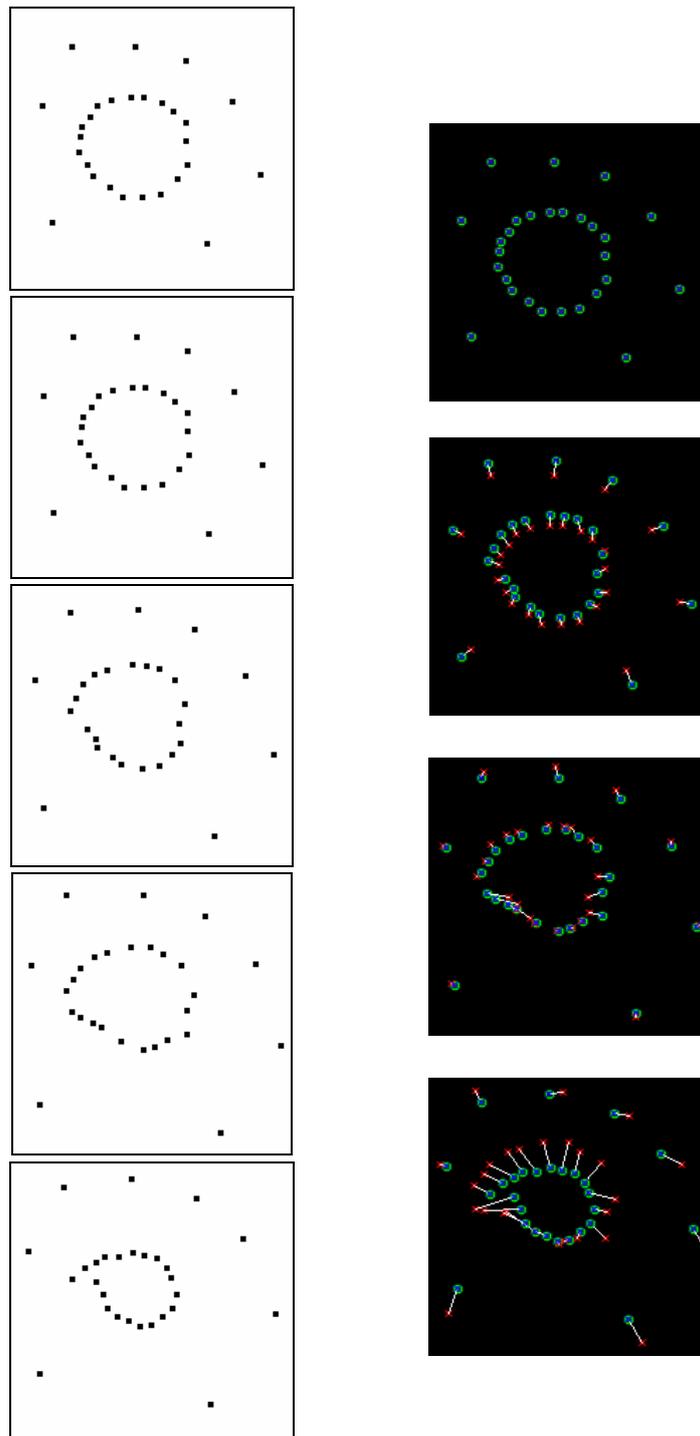


Figura 8. Seguimento de 28 pontos que se movem ao longo de uma sequência de 5 quadros.

Para o exemplo que se segue, considere a sequência sintética de imagens representada na figura 9. No primeiro quadro apenas estão representados os pontos B, C e D, mas no quadro seguinte inicia-se o seguimento de dois novos pontos, A e E. Nos quadros subsequentes, os pontos seguidos aparecem e desaparecem aleatoriamente. Neste exemplo pode-se verificar que a área de incerteza associada a entidades mesuráveis decresce com o seguimento, mas que se as mesmas deixam de estar visíveis então a sua incerteza aumenta, até que após um determinado intervalo de tempo o seu seguimento cessa (tal como acontece ao ponto E no décimo quadro).

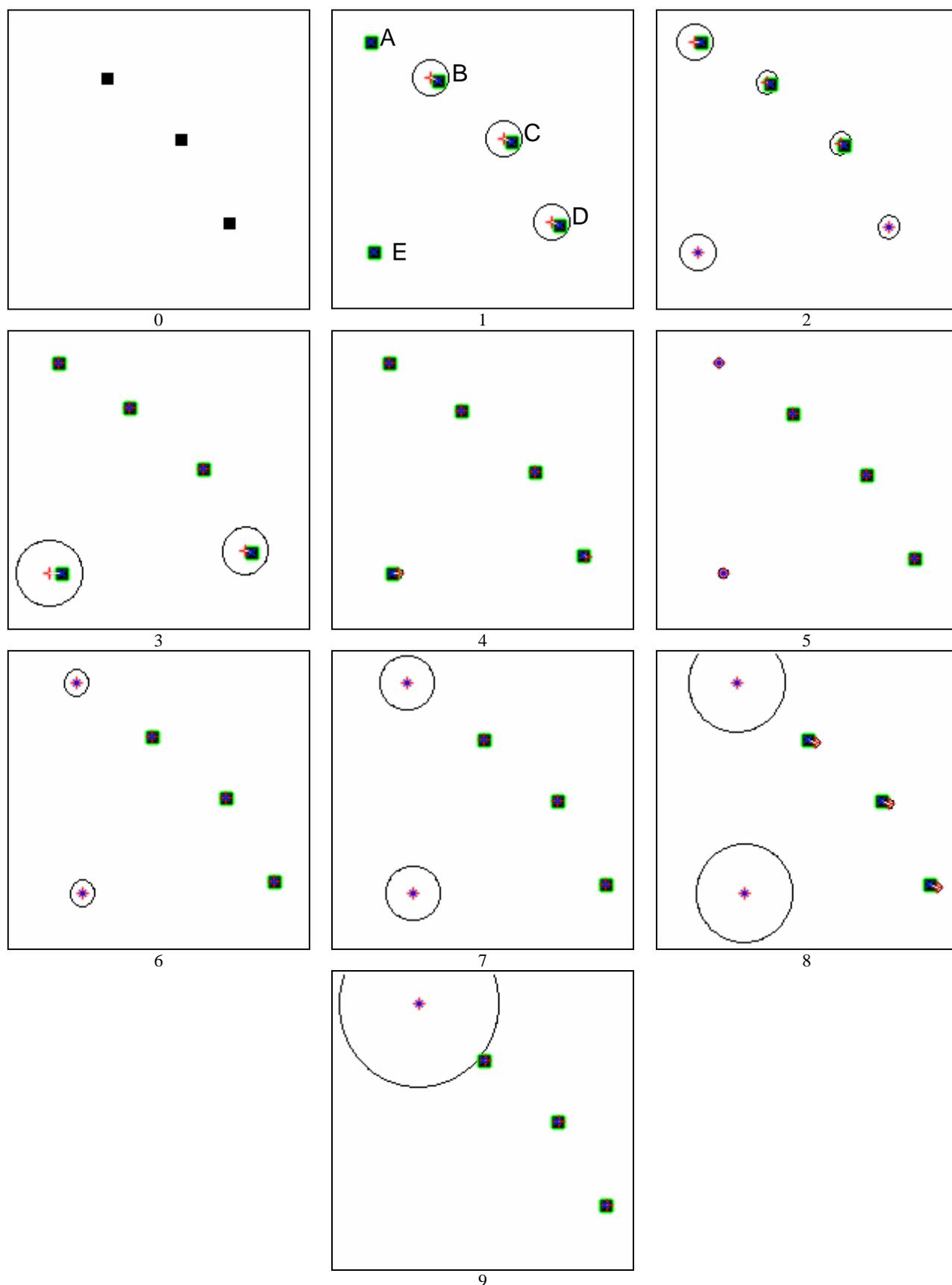


Figura 9. Seguimento dos pontos A-E numa sequência de 10 imagens: 0 – 1º quadro original; 1..9 – Resultados do filtro de *Kalman* cujas áreas de pesquisa são representadas por elipses a traço contínuo, as previsões estão assinaladas por + e as posições corrigidas por x.

O nível de confiança associado ao seguimento anterior, ou seja o factor utilizado na gestão das entidades seguidas no exemplo apresentado na figura 9, encontra-se indicado na tabela 1.

Tabela 1. Nível de confiança associada a cada entidade pelo modelo de gestão do seguimento no exemplo da figura 9.

Quadros \ Pontos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	-	3	4	5	5	4	3	2	1	0
B	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
C	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
D	3	4	3	4	5	5	5	5	5	5
E	-	3	2	3	4	3	2	1	0	-

## 5.2 Exemplos Reais

Os exemplos que se seguem foram obtidos considerando-se seqüências de imagens reais, e a representação de resultados é idêntica à que se utilizou para os exemplos sintéticos, com excepção da elipse de incerteza da previsão, agora assinalada a preto.

Uma das aplicações da análise de movimento poderá consistir no diagnóstico clínico da marcha [Pinho, 2005b]. Assim para o primeiro caso real considera-se uma seqüência com esse intuito. Esta seqüência é constituída por 7 quadros nos quais se pretende seguir o movimento de 6 marcas aplicadas sobre a perna de um indivíduo, figura 10. Estas imagens foram adquiridas com uma câmara de alta velocidade com uma taxa de aquisição de 200 quadros/segundo, e têm dimensões  $256 \times 256 \text{ pixels}^2$ . Todos os marcadores seguidos são iguais, e são compostos por um rectângulo branco que contém um círculo preto. Com o filtro de *Kalman* são seguidos os centros dos círculos negros, o que no plano imagem corresponde ao centro de uma mancha de aproximadamente  $3 \times 3 \text{ pixels}^2$ . No primeiro quadro apenas 5 marcadores estão visíveis (marcas numeradas de 1 a 5 na figura 11), mas nos 5 quadros seguintes todas as posições das marcas são mesuráveis. No último quadro um dos marcadores é oculto pelo braço do indivíduo.

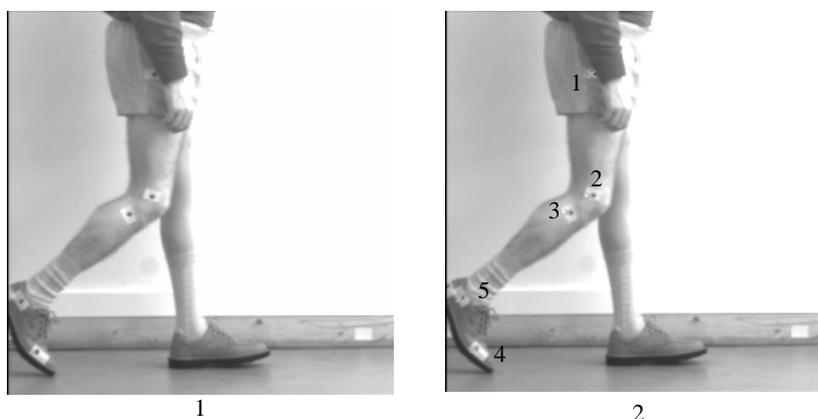


Figura 10. Seguimento de 6 marcas colocadas sobre a perna de um indivíduo: 1 – quadro inicial original; 2 – 1º quadro com as medições assinaladas com um x e os 5 marcadores visíveis numerados.

Analisando os resultados numéricos obtidos com o filtro de *Kalman* para o exemplo anterior, verifica-se que ainda que o movimento seguido não seja linear, o erro entre as estimativas do filtro e as medições introduzidas é sempre menor do que 3.35 *pixels* (obtido pela marca 2 quando  $t = 2$ ), mas o erro médio em cada marca é de 1.2 *pixels* (tabela 2 e 3). Mais, o filtro obtém melhores resultados ao longo do tempo (por exemplo para  $t = 5$  todas as estimativas estão a menos de um *pixel* da medida correcta), mas como o movimento humano não é linear este resultado não é geral (basta notar que no quadro seguinte,  $t = 6$ , 2 marcadores ultrapassam a distância de 1 *pixel*).

É ainda de salientar que se optou por não apresentar os resultados o filtro relativos à velocidade e aceleração das marcas seguidas, ainda que esses dados possam ter interesse para a análise do movimento em questão.

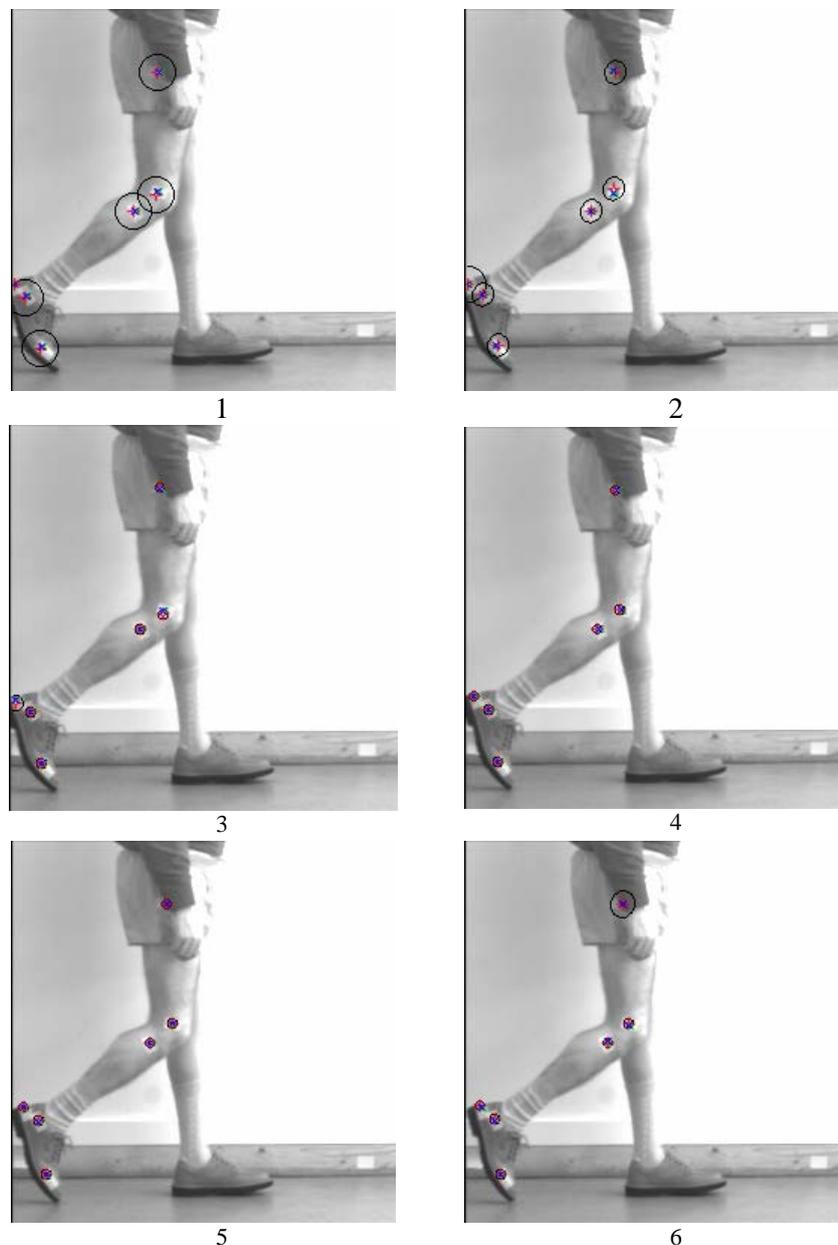


Figura 11. Seguimento de 6 marcadores colocados sobre a perna de um indivíduo.

Tabela 2. Coordenadas iniciais,  $x_0^+$ , dos marcadores indicados na figura 11.

Marca (M)	$x_0^+$
1	(97, 42)
2	(96,124)
3	(81,135)
4	(19, 227)
5	(9, 193)
6	Invisível

Tabela 3. Alguns dos resultados numéricos obtidos com o filtro de *Kalman* na figura 11, onde  $x_t^-$  e  $x_t^+$  são as coordenadas das marcas antes e depois da incorporação de novas medições,  $u_t$ .

(M)	$x_t^-$	$u_t$	$x_t^+$	$\ x_t^- - u_t\ ^2$
$t = 1$				
1	(97, 42)	(99, 42)	(98.99926, 42)	2
2	(96, 124)	(98, 122)	(97.99844, 122.0006)	2.8284271
3	(81, 135)	(83, 135)	(82.99896, 135)	2
4	(19, 227)	(21, 226)	(20.99907, 226.0001)	2.236068
5	(9, 193)	(11, 192)	(10.999, 192.00006)	2.236068
6	(2, 184)	(2, 184)	(2, 184)	0
$t = 2$				
1	(100.2233, 42)	(99, 42)	(99.00073, 41.99997)	1.223297
2	(99.20157, 120.7561)	(100, 124)	(99.9991, 123.9985)	3.340705
3	(84.2228, 135)	(85, 135)	(84.99935, 135)	0.777199
4	(22.21279, 225.3777)	(21, 225)	(21.00089, 225.0001)	1.270253
5	(12.21267, 191.3777)	(13, 191)	(12.99936, 191)	0.873219
6	(2, 184)	(3, 184)	(2.999376, 184)	1
$t = 3$				
1	(99.12166, 41.99604)	(100, 42)	(99.99885, 42.00002)	0.878351
2	(101.9982, 125.7629)	(102, 123)	(101.9999, 123.003)	2.762902
3	(86.92361, 135.0025)	(87, 135)	(86.99986, 135)	0.076433
4	(21.09856, 224.0096)	(22, 225)	(21.99855, 224.9996)	1.339177
5	(14.89981, 190.0159)	(15, 190)	(14.99982, 190)	0.101453
6	(4.032567, 184)	(5, 182)	(4.9989, 182.0041)	2.221695
$t = 4$				
1	(100.8049, 42.00287)	(102, 42)	(101.9984, 42.00004)	1.195056
2	(103.9608, 122.5672)	(105, 123)	(104.9971, 122.9995)	1.125711
3	(88.98359, 135.0008)	(90, 135)	(89.99806, 135)	1.016411
4	(22.81575, 224.8055)	(23, 224)	(22.99967, 224.0003)	0.826329
5	(16.97465, 189.0001)	(17, 189)	(16.99995, 189)	0.025352
6	(6.757982, 180.2642)	(7, 180)	(6.999671, 180.0007)	0.358264
$t = 5$				
1	(103.7289, 42.00473)	Invisível	(103.7289, 42.00473)	Não Definido
2	(107.7459, 122.8897)	(107, 123)	(107.0021, 122.9999)	0.75403
3	(92.76708, 135.0037)	(93, 135)	(92.99956, 135)	0.232947
4	(23.95067, 223.1724)	(24, 224)	(23.99994, 223.9997)	0.82909
5	(18.99389, 187.9996)	(19, 188)	(18.99999, 188)	0.006124
6	(8.923403, 178.0337)	(9, 179)	(8.999914, 178.9973)	0.96934
$t = 6$				
1	(105.4594, 42.00933)	Invisível	(105.4594, 42.00933)	Não Definido
2	(109.1801, 122.977)	(110, 124)	(109.9977, 123.9989)	1.311062
3	(95.94833, 135.0015)	(95, 135)	(95.00181, 135)	0.948327
4	(24.99998, 223.8256)	(25, 223)	(24.99998, 223.0003)	0.825623
5	(20.9986, 186.9999)	(21, 187)	(21, 187)	0.001403
6	(10.99899, 177.7933)	(12, 179)	(11.99867, 178.9967)	1.567859

Analisando a região de incerteza de cada previsão nota-se, conforme esperado, que as áreas das elipses (inicialmente com  $452.4 \text{ pixels}^2$ ) tendem a diminuir para um valor mínimo de aproximadamente  $28.3 \text{ pixels}^2$  para todos os marcadores nos quadros 4 e 5 da figura 11. Caso uma marca deixe de estar visível,

então a incerteza que lhe está associada aumenta, como é o caso do marcador 1 no quadro 6, cuja incerteza aumenta até  $226.2 \text{ pixels}^2$ . Por outro lado, caso apareça uma nova marca o seu seguimento será inicializado de forma análoga.

No próximo exemplo seguem-se 5 marcas colocadas sobre uma perna de um indivíduo, figura 12. As marcas utilizadas são similares às do caso anterior, e as imagens capturadas têm as mesmas dimensões.

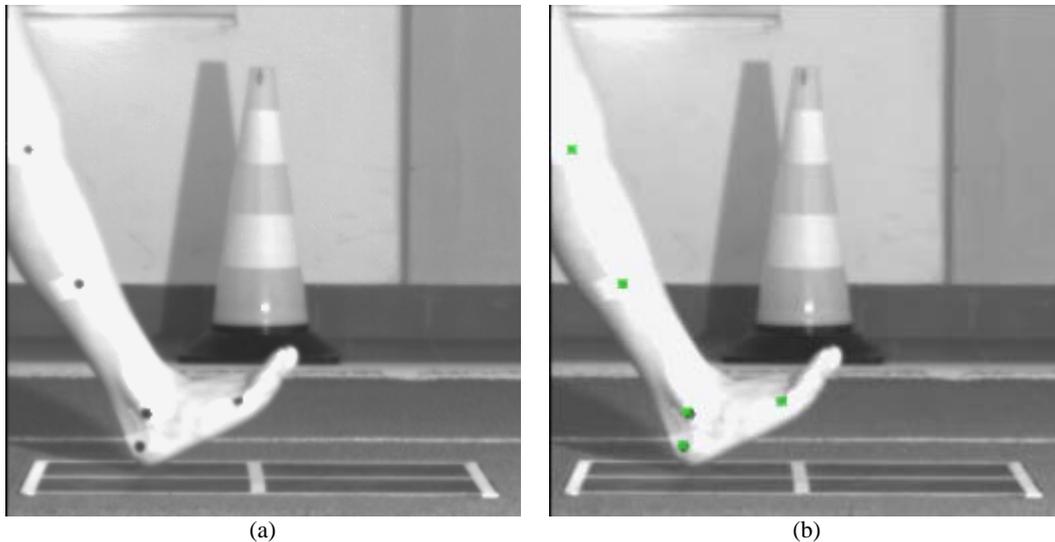


Figura 12. Seguimento de 5 marcas colocadas num membro de um indivíduo no quadro original (a), e com as medições assinaladas (b).

Neste caso consideraram-se 5 quadros retirados de uma sequência, em intervalos de 10 (escolheram-se estes intervalos para aumentar o deslocamento entre iterações do filtro de *Kalman*, e mantendo os valores da variância usualmente utilizados, analisar o caso em que as medições recolhidas são exteriores às elipses de covariância de posição. Analisando os resultados apresentados na figura 13, nota-se que a abordagem utilizada permite o seguimento de entidades mesmo quando as medições recolhidas são exteriores à região de busca definida por defeito, o que permite a correcta inclusão de novos dados. Este resultado poderá comprovar a robustez da abordagem proposta em alguns casos de movimento não-linear.

Para o último exemplo, considere-se o seguimento de indivíduos num sistema de segurança de um centro comercial, figura 14 (imagens obtidas de [EC-Funded-CAVIAR-project, 2004]).

Neste conjunto de imagens seguem-se os indivíduos a partir da posição da parte inferior da cabeça (pescoço). Nos primeiros 8 quadros, 3 indivíduos são seguidos, mas no décimo quadro inicia-se o seguimento de mais uma pessoa. No 12º quadro uma das pessoas entra numa loja e portanto o modelo de gestão das entidades seguidas cessa o seu seguimento ao 16º quadro. Caso o indivíduo tivesse saído da loja de forma suficientemente rápida, então o modelo teria preservado os seus dados, mas neste caso, o seu seguimento deverá ser inicializado quando o indivíduo sair da loja. Assim se verifica que o modelo de gestão utilizado pode restringir o número de entidades seguidas, e portanto pode ser reduzido o custo computacional do seguimento.

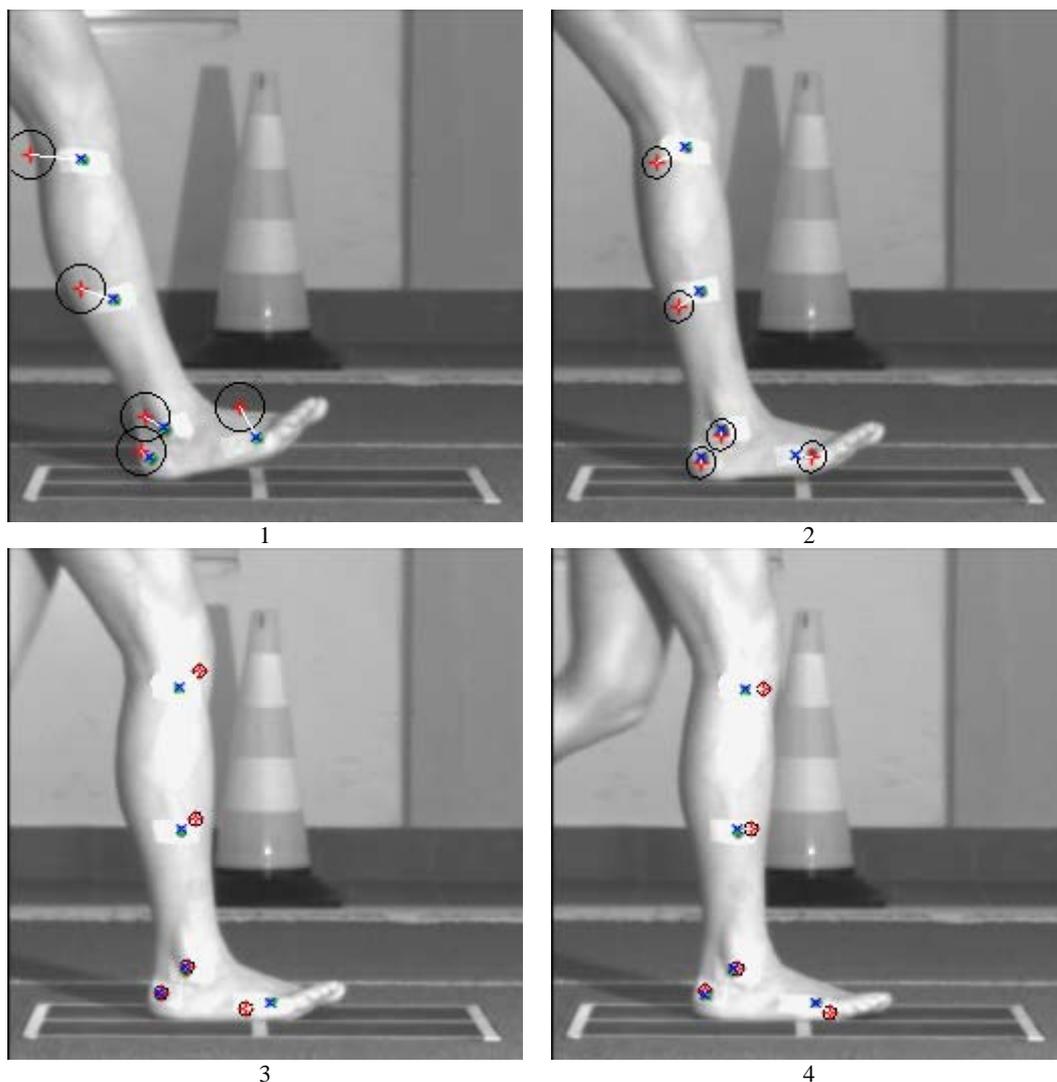


Figura 13. Seguimento de 5 marcas em 5 quadros não-consecutivos retirados de uma sequência de imagens verificando-se a robustez da abordagem proposta mesmo quando a área das elipses de covariância de posição não contém as medições.



(Continua)



Figura 14. Seguimento de indivíduos num centro comercial: o modelo de gestão de entidades seguidas permite a análise de movimento em longas seqüências de imagens.

## 6. Conclusões e Perspectivas de Trabalho Futuro

Neste relatório fez-se uma breve introdução aos métodos estocásticos, nomeadamente ao filtro de *Kalman*, utilizado neste trabalho em conjunto com métodos de optimização global e com a distância de *Mabalanobis* para seguir o movimento de entidades em sequências de imagens.

O seguimento de objectos com o filtro de *Kalman* e um método de optimização global facilita o estabelecimento de correspondências entre as estimativas obtidas pelo filtro e as medições consideradas em cada iteração. Deste modo, o emparelhamento de dados é possível mesmo que as áreas de pesquisa determinadas pelas elipses associadas à variância do filtro de *Kalman* para a posição das entidades seguidas o não permitam, sendo para além disso garantido que em termos globais se obtém o melhor conjunto de correspondências para o sistema modelado.

No que concerne os resultados obtidos, nota-se que o filtro de *Kalman* com a optimização de correspondências tal como implementado neste trabalho, é um estimador robusto do movimento.

Para gerir situações de elevados números de entidades seguidas em longas sequências de imagens, neste trabalho também se utilizou um modelo de gestão de entidades que atribui um nível de confiança a cada entidade seguida, determina a continuação do seguimento dessa entidade ou invalida o mesmo caso a entidade tenha desaparecido da cena ou esteja oculta por mais do que um determinado número de instantes temporais pré-definido.

De facto, a metodologia proposta para o seguimento revela-se capaz de resistir adequadamente a casos de oclusão, assim como permite o movimento aleatório de entidades, e o seguimento de um conjunto de cerca de 30 pontos é conseguido muito rapidamente.

A metodologia proposta foi testada em sequências de imagens sintéticas e reais, tendo-se verificado que mesmo em casos de movimento não linear (como de movimento humano) a abordagem utilizada é robusta. Contudo, no caso do movimento humano a aplicabilidade desta abordagem deverá ser ampliada para os casos de seguimento sem a utilização de marcadores.

No sentido de melhorar os resultados obtidos, poderá ainda ser considerada nesta abordagem a escolha automática dos modelos cinemáticos mais adequados a cada tipo de movimento (por exemplo circular). Também, no sentido de aproximar melhor as medições nos casos de movimento não linear, poderão ser considerados outros filtros estocásticos, como por exemplo filtros de partículas ou o filtro de *Kalman Unscented*.

Também, para gerir as entidades seguidas poderá ser considerado um modelo mais versátil que permita, por exemplo, que os níveis de confiança de cada entidade sejam adequadamente afectados pela confiança dos emparelhamentos obtidos.

Eventualmente, este trabalho poderá evoluir para o desenvolvimento de uma aplicação específica de análise de movimento que permita, por exemplo, o diagnóstico clínico da marcha.

## 7. Agradecimentos

O primeiro autor agradece a bolsa de doutoramento concedida pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do programa POSI, sob a referência SFRH/BD/12834/2003.

Este trabalho foi parcialmente realizado no âmbito do projecto “Segmentação, Seguimento e Análise de Movimento de Objectos Deformáveis (2D/3D) usando Princípios Físicos” com a referência POSC/EEA-SRI/55386/2004, suportado financeiramente pela FCT.

## 8. Bibliografia

[Aggarwal, 1999]

J. Aggarwal, Q. Cai, Human Motion Analysis: A Review, *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 73, pp. 428/440 (1999).

[Arulampalam, 2002]

M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 174/188 (2002).

[Bro-Nielsen, 1996]

M. Bro-Nielsen, Surgery Simulation using Fast Finite Elements, *VBC'96 4th International Conference in Visualization in Biomedical Computing*, Hamburg, Germany (1996).

[CAVIAR, 2004]

EC-Funded-CAVIAR-project, I. 2001-37540, OneShopOneWait1cor.mpg, <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CAVIAR/> (2004).

[Correia, 1995]

M. Correia, Dissertação de Mestrado: Análise de Movimento em Sequências de Imagens, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (1995).

[Hillier, 2001]

F. Hillier, G. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill International Editions (2001).

[Isard, 1998]

M. Isard, A. Blake, Condensation - Conditional Density Propagation of Visual Tracking, *International Journal on Computer Vision*, pp. 5/28 (1998).

[J Wang, 2003]

J. Wang, S. Singh, Video Analysis of Human Dynamics - A Survey, *Real-time Imaging Journal*, vol. 9, pp. 320/345 (2003).

[Kohler, 1997]

M. Kohler, Using the Kalman Filter to track Human Interactive Motion - Modelling and Initialization of the Kalman Filter for Translational Motion, University of Dortmund, Germany (1997).

[Maybeck, 1979]

P. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 141, Mathematics In Science and Engineering (1979).

[Moeslund, 2001]

T. Moeslund, E. Granum, A Survey of Computer Vision-Based Human Motion Capture, *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 81, pp. 231/268 (2001).

[Ozer, 2002]

L. Ozer, W. Wolf, Real-time posture and activity recognition, *Proceedings Workshop on Motion and Video Computing*, pp. 133/138 (2002).

[Pavlovic, 1997]

V. I. Pavlovic, R. Sharma, T. S. Huang, Visual Interpretation of Hand Gestures for Human-Computer Interaction: A Review, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 19, pp. 677/695 (1997).

[Pinho, 2005a]

R. Pinho, J. Tavares, M. Correia, Seguimento de Objectos em Visão Computacional usando Métodos Estocásticos, *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005*, Granada, Spain (2005a).

[Pinho, 2005b]

R. Pinho, J. Tavares, M. Correia, Human Movement Tracking and Analysis with Kalman Filtering and Global Optimization Techniques, *II International Conference On Computational Bioengineering*, Lisbon, Portugal (2005b).

[Pinho, 2005c]

R. Pinho, J. Tavares, M. Correia, A Movement Tracking Management Model with Kalman Filtering, Global Optimization Techniques and Mahalanobis Distance, *ICCMSE 2005 - International Conference on Computational Methods in Science and Engineering*, Loutraki, Greece (2005c).

[Pinho, 2004]

R. Pinho, J. Tavares, M. Correia, Introdução à Análise de Movimento por Visão Computacional, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (2004).

[Press, 2002]

W. Press, S. Teukolsky, B. Flannery, W. Vetterling, *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2002).

[Tavares, 1995]

J. Tavares, Dissertação de Mestrado: Obtenção de Estrutura Tridimensional a partir de Movimento de Câmara, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (1995).

[Tavares, 2000]

J. Tavares, Tese de Doutoramento: Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (2000).

[Welch, 1995]

G. Welch, G. Bishop, An Introduction to Kalman Filter, University of North Carolina at Chapel Hill (1995).