

GERAÇÃO DE TRAJECTÓRIAS PARA SISTEMAS DIFERENCIALMENTE PLANOS

Sérgio Loureiro Fraga, João Borges Sousa,
Fernando Lobo Pereira

*Instituto de Sistemas e Robótica - Pólo do Porto,
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Rua
do Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 Porto Portugal, email:
(slfraga,jtasso,flp)@fe.up.pt*

Resumo: Este artigo descreve o problema de geração de trajectórias para sistemas diferencialmente planos e apresenta um método de solução que se baseia nesta propriedade. O método de solução utiliza técnicas de geometria diferencial que tomam partido desta propriedade para gerar trajectórias efectivas para estes sistemas. A exposição é acompanhada de exemplos ilustrativos.

Palavras chave: Geração de trajectórias, sistemas diferencialmente planos, sistemas não lineares

1. INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta uma abordagem para a resolução do problema da especificação, geração e seguimento de trajectórias para uma classe de sistemas mecânicos que requerem elevados níveis de desempenho, tais como veículos autónomos ou semi-autónomos terrestres, aquáticos ou aéreos e que satisfaçam a propriedade de serem diferencialmente planos.

O problema da especificação e geração de trajectórias (Laumond, 1998)(Latombe, 1993) tem um papel fulcral no desempenho global de um sistema de controlo de sistemas mecânicos. A geração de trajectórias deve ter em consideração o comportamento do sistema mecânico. Este é descrito por equações diferenciais o que, de um modo geral, torna difícil relacionar uma trajectória de referência com os controlos que se devem aplicar para minimizar o erro de seguimento. Em suma, não é fácil garantir que a trajectória gerada possa ser na realidade executada pelo sistema através de uma adequada acção de controlo. Na prática, esta dificuldade resulta na saturação dos controladores

e em erros de seguimento excessivos. Um dos maiores desafios para esta classe de problemas tem mesmo sido a determinação de trajectórias para sistemas não lineares com restrições cinemáticas que, pela sua natureza, não restringem o espaço dos estados atingíveis mas que por outro lado não permitem o controlo directo das variáveis de estado (restrições cinemáticas não holonómicas (Murray *et al.*, 1994b)(Isidori, 1989)). Não existe actualmente nenhum método de geração de trajectórias para este problema, existindo somente métodos particulares para classes de sistemas específicos.

Neste artigo apresentar-se-ão soluções para a classe de sistemas denominados por diferencialmente planos e mostrar-se-á a sua aplicação em sistemas mecânicos. Muito resumidamente, nesta classe de sistemas é possível especificar uma trajectória no espaço das saídas de tal modo que o estado e a entrada do sistema vêm definidos algebricamente a partir dessa especificação. Esta abordagem permite planejar o movimento de um corpo rígido, com restrições cinemáticas no seu movimento, como se de um sistema sem restrições

diferenciais se tratasse, o que constitui uma vantagem para o desenvolvimento de trajectórias realizáveis para o sistema.

Para ilustrar a aplicação destas técnicas apresenta-se de seguida uma arquitectura de controlo com três graus de liberdade (Fraga *et al.*, Junho, 2002)(Fraga *et al.*, 2001)(figura 1) para a especificação, geração e seguimento de trajectórias de um veículo submarino operado remotamente (ROV). O veículo tem dois modos de operação: teleoperação e tele-programação. No primeiro modo o piloto do veículo comanda os seus movimentos através de um joystick. No segundo modo o operador invoca comandos de movimento que são transformados em trajectórias a serem seguidas pelo veículo de forma automática.

- **Definição das saídas** do sistema. Este módulo é composto por uma interface com um piloto e é responsável por determinar quais os valores que este pretende para a saída do sistema. Após determinação dos objectivos do piloto (representados como saídas do sistema), o módulo envia referências para o módulo de geração de trajectórias.
- **Geração de trajectórias.** Este módulo tem como objectivo definir uma trajectória realizável para o sistema. A trajectória definida para o estado do sistema deverá ser dimensionada para otimizar algum factor ou variável, de modo a que o desempenho do sistema seja consideravelmente superior em relação ao caso deste módulo não estar presente. A saída deste módulo será uma descrição completa do estado do sistema pretendido bem como a sua entrada.
- **Controlo.** Este módulo é responsável pela execução da trajectória definida pelo módulo de geração de trajectórias. A trajectória foi gerada tendo em consideração o modelo do sistema que se pretende conduzir. Esse modelo não entra em consideração com eventuais perturbações, pelo que, uma das funções deste módulo será de lidar com este facto e estabilizar o sistema em torno da trajectória definida. A saída deste módulo é um sinal de controlo que sobrepor-se-á ao sinal de controlo proveniente da geração de trajectórias, de modo a compensar desvios ou perturbações na estrutura.

Este artigo explora essencialmente o módulo de geração de trajectórias, nomeadamente a abordagem baseada na teoria desenvolvida em torno de sistemas diferencialmente planos. Após a apresentação dos principais resultados conhecidos nesta área, serão discutidos alguns exemplos de sistemas mecânicos que se enquadram nesta classe de sistemas. Apresentar-se-ão também alguns métodos que fazem uso das propriedades de

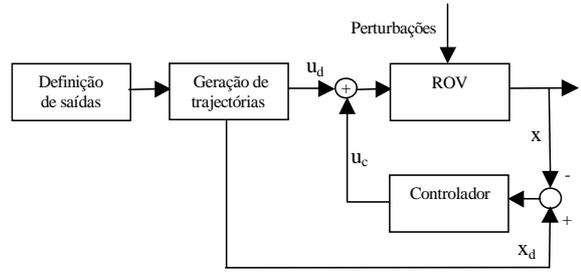


Fig. 1. Arquitectura do sistema de geração de trajectórias

sistemas diferencialmente planos para se gerar trajectórias realizáveis.

2. SISTEMAS DIFERENCIALMENTE PLANOS

Os sistemas diferencialmente planos foram inicialmente introduzidos no contexto da álgebra diferencial. Neste contexto, um sistema é denominado de diferencialmente plano se for possível encontrar um conjunto de variáveis, denominadas por saídas planas, tal que o sistema seja algébrico sobre o campo diferencial gerado pelo conjunto das saídas planas. Dito de outro modo, um sistema é diferencialmente plano se for possível encontrar um vector de saída, de dimensão igual ao de entrada do sistema, tal que o estado e a entrada deste possam ser determinados a partir dessas saídas sem usar a operação de integração. Mais precisamente, se o sistema tem estado $x \in R^n$ e entrada $u \in R^m$, então o sistema é plano se for possível encontrar saídas planas $z \in R^m$ da forma:

$$z = z(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}) \quad (1)$$

tal que

$$\begin{aligned} x &= x(z, \dot{z}, \dots, z^{(q)}) \\ u &= u(z, \dot{z}, \dots, z^{(q)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Deste modo, se se especificar o caminho que se deseja para as saídas planas, o estado do sistema vem definido bem como a entrada a aplicar neste, desde que a trajectória especificada seja diferenciável pelo menos q vezes. Esta abordagem é de elevado interesse no caso das variáveis planas terem significado físico como, por exemplo, as coordenadas de posição de um ponto de um corpo. Neste caso, é possível definir a trajectória desejada para esse ponto, implicando que o estado do sistema e a entrada venham definidos automaticamente. Um exemplo clássico desta situação consiste no estacionamento automático de um carro, onde se torna somente necessário especificar a trajectória do eixo traseiro desejada, para que os sinais de controlo e o estado do sistema venham completamente especificados. Deve ser

notado que as saídas planas de um sistema diferencialmente plano não são uma combinação de variáveis e velocidades do sistema, mas sim um conjunto específico de pontos e ângulos (Martin *et al.*, 1994).

Em sistemas diferencialmente planos, é então possível planear o movimento de um corpo de um modo trivial. É como se se reduzisse o movimento de um robot ao de um ponto sem restrições diferenciais na sua trajectória, o qual pode ser conduzido através de um espaço físico. Tendo em conta que as funções das variáveis planas são completamente livres, as únicas restrições que devem ser cumpridas referem-se somente às condições iniciais e finais da trajectória das variáveis planas e às curvaturas dessa trajectória, ou das ordens superiores da sua derivada. Restrições impostas ao sistema, como, por exemplo, a saturação da actuação, podem ser convertidas para o espaço das saídas planas através (tipicamente) de uma limitação da curvatura da trajectória definida para as saídas planas, ou numa limitação da curvatura de ordens superiores da derivada da trajectória.

2.1 Definição matemática e resultados conhecidos

Para ser possível fazer a ligação entre sistemas diferencialmente planos e sistemas linearizáveis por realimentação, ir-se-á apresentar uma definição matemática para sistemas diferencialmente planos baseada no conceito de diferencial exterior (Murray *et al.*, 1994a). Serão apresentados os resultados mais importantes dada a elevada especificidade da teoria referida. Para ser possível mostrar estas definições e resultados, fazer-se-á uma breve apresentação da teoria relacionada com prolongações.

A definição de sistemas diferencialmente planos é feita no contexto de sistemas Pfaffianos, ou seja, pretender-se-á mostrar que um sistema diferencialmente plano é equivalente a um sistema sem restrições. Informalmente, é possível converter um sistema da forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in R^n, u \in R^m \quad (3)$$

num sistema Pfaffiano, escrevendo-o como um conjunto de 1-formas,

$$I = \{dx_1 - f_1(x, u)dt, \dots, dx_n - f_n(x, u)dt\}. \quad (4)$$

A colecção I é denominada por sistema Pfaffiano sobre $M = R_+ \times R^n \times R^m$, onde R_+ é o espaço da coordenada temporal t . Exemplos de sistemas Pfaffianos podem ser as restrições não holonómicas presentes no movimento de um corpo:

$$\begin{aligned} \omega_i(q)\dot{q} &= 0 \quad i = 1, \dots, k \\ \Rightarrow I &= \text{span}_{C^\infty(M)} \{\omega_1, \dots, \omega_k\}. \end{aligned} \quad (5)$$

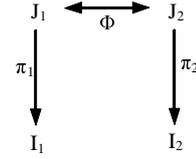


Fig. 2. Equivalência absoluta

Uma solução integral dum sistema Pfaffiano é uma curva $c : R \rightarrow M$ tal que o vector tangente $c'(s)$ é aniquilado pelos 1-formas no sistema Pfaffiano I :

$$\omega(c(s)).c'(s) = 0 \quad \forall \omega \in I.$$

Normalmente é imposta uma condição de independência, que é 1-forma extra τ em que a $c'(s)$ não é permitido que se anule (Murray *et al.*, 1994a)(Murray *et al.*, 1995). Em sistemas de controlo é usual escolher $\tau = dt$ que assegura que o tempo é sempre crescente:

$$dt.c'(s) > 0$$

Um sistema com uma variável independente τ será escrito como (I, τ) .

Os sistemas Pfaffianos podem ser usados para estudar a controlabilidade e propriedades de linearização de sistemas não lineares do mesmo modo que os campos vectoriais. No entanto, neste artigo são apresentados somente os resultados com aplicação directa em sistemas diferencialmente planos.

Uma operação essencial em sistemas Pfaffianos é a **prolongação de Cartan**. A sua definição é apresentada a seguir:

Definição 1. (Prolongação) Seja o sistema Pfaffiano (I, dt) numa variedade M e seja outro sistema Pfaffiano (J, dt) numa variedade N com $M \subset N$ e o difeomorfismo $\pi : N \rightarrow M$, diz-se que J é uma prolongação de I se $I \subset J$ e houver uma correspondência de um para um das curvas solução em J e as curvas solução em I .

A noção de prolongação de Cartan permite a apresentação de equivalência absoluta de sistemas de controlo, sob algum tipo de realimentação dinâmica.

Definição 2. (Equivalência Absoluta) Dois sistemas I_1, I_2 são absolutamente equivalentes se estes tiverem prolongações de Cartan, J_1 e J_2 definidas respectivamente nas variedades N_1 e N_2 , que sejam equivalentes no sentido habitual, isto é, que exista um difeomorfismo $\phi : N_1 \rightarrow N_2$ tal que $\phi^*(J_2) = J_1$. Esta definição é ilustrada na figura 2.

Basicamente, uma prolongação de um sistema de controlo corresponde à inclusão de um sistema de

realimentação. Assim, dado o sistema de controlo $\dot{x} = f(x, u, t)$, a realimentação dinâmica

$$\begin{aligned} \dot{z} &= a(x, z, v, t) \\ u &= b(x, z, v, t) \end{aligned} \quad (6)$$

é denominada por endogénea se z e v poderem ser expressos em função de x, u, t e de um número finito das suas derivadas:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha(x, u, \dots, u^{(l)}, t) \\ v &= \beta(x, u, \dots, u^{(l)}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Uma realimentação endogénea é denominada regular se, para cada valor fixo de x e t , o mapeamento $(z, v) \rightarrow u$ for uma submersão¹. A relação entre prolongações de Cartan e realimentações dinâmicas endogéneas é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 1. (Realimentações endogéneas são prolongações de Cartan) Seja I um sistema de controlo num conjunto aberto $T \times X \times U$ que em coordenadas (t, x, u) é dado por $\dot{x} = f(x, u, t)$. Seja J o sistema de controlo no conjunto aberto $T \times X \times Z \times V$ que é obtido do sistema anterior adicionando uma realimentação dinâmica, endogénea e regular. Assim, J é uma prolongação de Cartan de I .

Com as definições apresentadas atrás, é agora possível apresentar uma definição para sistemas diferencialmente planos. Esta definição faz uso da noção de sistema trivial $(\{0\}, dt)$ numa variedade M , que corresponde a um sistema sem restrições e com uma condição de independência dt .

Proposição 2. (Sistema diferencialmente plano) Um sistema (I, dt) é diferencialmente plano se e só se este for absolutamente equivalente ao sistema trivial $I_t = (0, dt)$.

Em particular, esta definição (Nieuwstadt *et al.*, 1994) significa que qualquer curva definida no sistema trivial tem uma única correspondente no espaço dos estados e das entradas do sistema original. Este facto permite a geração de trajectórias no espaço do sistema trivial, onde não é necessário ter em consideração qualquer tipo de restrição, e depois elevar essas trajectórias para o seu sistema inicial.

Um sistema linear composto por uma cadeia de integradores, definido como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \quad (8)$$

é um sistema diferencialmente plano, sendo x_1 a sua saída plana. É possível verificar que, dada uma solução para o sistema de controlo completo obtém-se uma curva bem definida para x_1 e, inversamente, dada uma curva $x_1(t)$ é possível encontrar uma única solução para o sistema de controlo completo, através da diferenciação de x_1 .

Todos os sistemas lineares controláveis são equivalentes (através de uma transformação de coordenadas linear) a m (número de saídas do sistema) cadeias de integradores dada pela equação 8, pelo que são também sistemas diferencialmente planos. Com este resultado é possível relacionar o conceito de sistemas diferencialmente planos com sistemas linearizáveis por realimentação. Para maior clarificação, define-se agora linearização por realimentação.

Definição 3. (Linearização por Realimentação) O sistema não linear e invariante no tempo

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (9)$$

é linearizável por realimentação, se existir uma realimentação dinâmica

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha(x, z, v) \\ u &= \beta(x, z, v) \end{aligned} \quad (10)$$

e existirem novas coordenadas $\xi = \phi(x, z)$ e $\eta = \Psi(x, z, v)$ tal que, no novo sistema de coordenadas, o sistema tenha a forma:

$$\dot{\xi} = A\xi + B\eta \quad (11)$$

e o mapeamento ϕ mapeia o sistema para uma vizinhança da origem. Se a dimensão de z for nula então o sistema é denominado por sistema linearizado por realimentação estático.

A forma da equação 11 é a representação normal dos sistemas lineares (de Carvalho, 1993). É uma representação útil quando se pretende dimensionar controladores para sistemas não lineares em torno de pontos de equilíbrio. Assim, qualquer sistema que seja passível de ser linearizado por realimentação, é representável através de m cadeias de integradores, já que todos os sistemas lineares têm essa característica. Pelo exposto anteriormente, é então possível concluir que qualquer sistema linearizável por realimentação é um sistema diferencialmente plano, pois pode ser colocado na forma de uma cadeia de integradores, cujas saídas planas são as próprias saídas das cadeias de integradores.

¹ Uma submersão é um mapeamento $f : M \rightarrow N$ quando $\dim M \geq \dim N$, e o Jacobiano é sobrejectivo para todos os pontos x em M .

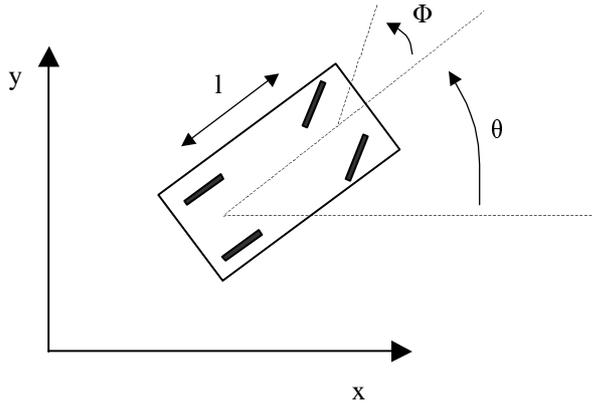


Fig. 3. Modelo cinemático de um carro

2.2 Exemplos

Para melhor compreensão dos conceitos referentes a sistemas diferencialmente planos vão-se agora apresentar alguns exemplos deste tipo de sistema.

Um sistema Lagrangiano totalmente actuado com a forma:

$$M(x, \dot{x})\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + K(x) = F, \quad (12)$$

em que x representa o estado do sistema e $F = \dim x$ representa a actuação, é um sistema diferencialmente plano. Isto acontece porque, conforme se pode analisar pela equação anterior, é possível determinar todas as variáveis de estado e F a partir das saídas planas x . Sistemas que não sejam totalmente actuados podem ser aproximados a sistemas totalmente actuados. Um exemplo desta situação é o veículo subaquático comandado remotamente (ROV) existente no Laboratório de Sistemas e Tecnologia Subaquática (LSTS). Este veículo, apesar de ter somente 4 actuadores, tem duas variáveis de estado (roll e pitch) que são estáveis, dada a distância entre o ponto de aplicação da força de impulsão e do peso ser muito maior que zero, e são pouco perturbadas pelos actuadores do veículo (Fraga, 2002). Assim, a abordagem será gerar trajectórias que minimizem o esforço de actuação no roll e pitch provocados pelos propulsores do veículo. A acção dos propulsores nestas variáveis são consideradas perturbações e por isso há necessidade de as minimizar. Esta solução permitirá manter estas variáveis dentro de uma gama de variação reduzida implicando uma melhoria do desempenho de missões de inspecção subaquática.

Outro sistema que se enquadra na classe de sistemas diferencialmente planos é o exemplo do carro cinemático que se representa na figura 3 (considerando que às rodas é permitido rolar mas não deslizar):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta \cdot \cos \phi \cdot v_1 & (13) \\ \dot{y} &= \sin \theta \cdot \cos \phi \cdot v_1 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{l} \cdot \sin \phi \cdot v_1 \\ \dot{\phi} &= v_2 \end{aligned}$$

em que (x, y) representa as coordenadas do ponto intermédio do eixo traseiro, θ é o ângulo entre a horizontal e o carro, ϕ é o ângulo de condução das rodas dianteiras, v_1 é a velocidade das rodas dianteiras, v_2 é a velocidade do ângulo de condução e l é a distância entre o eixo dianteiro e traseiro. Este sistema é diferencialmente plano sendo as suas saídas planas (x, y) a posição do eixo traseiro. Através da especificação destas variáveis e suas derivadas até à ordem 2 todas as outras variáveis de estado e entrada (θ, ϕ, v_1, v_2) vêm definidas em função dessa especificação. Conforme é possível observar neste exemplo, a determinação das saídas planas é feita pela análise das equações do sistema e não através de um método bem estabelecido. Em (Murray *et al.*, 1995), é possível encontrar um conjunto de sistemas em que já são conhecidas as suas saídas planas e em (Fraga, 2002) são apresentados dois exemplos em que se mostra que duas classes de veículos subaquáticos são sistemas diferencialmente planos.

3. MÉTODOS PARA A GERAÇÃO DE TRAJECTÓRIAS

O problema que se pretende resolver consiste em, dada a trajectória das variáveis planas, encontrar uma trajectória para as variáveis de estado e entrada do sistema num horizonte de tempo finito $[t_0, t_f]$. As trajectórias definidas para as variáveis planas serão aproximadas por polinómios para possibilitar o cálculo simbólico da sua derivada, permitindo assim melhorar o desempenho computacional.

3.1 Condução ponto-a-ponto

O problema de geração de trajectórias mais simples é o que trata de levar o estado do sistema de um ponto a outro do espaço de estados. Isto acontece porque é fornecido o estado inicial e o final pretendido para dois instantes de tempo distintos. Suponha-se que se pretende guiar o sistema de $x(t_0) = x_0$ para $x(t_1) = x_1$. Assumindo que as entradas do sistema, e suas derivadas são especificadas para t_0 e t_1 , então é possível determinar o valor das saídas planas do sistema, e suas derivadas, no instante inicial e final (equação 1). Após determinação dos valores iniciais e finais das saídas planas é possível parametrizá-las para o intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Assim, tem-se que:

$$z_i(t) = \sum_j A_{ij} \phi_j(t) \quad (14)$$

onde $\phi_j(t)$ representa uma base de funções que, através de uma combinação linear dada por meio da matriz A , permite-nos obter o valor das saídas planas. Para se obter os coeficientes A_{ij} é necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} z_i(t_0) &= \sum_j A_{ij} \phi_j(t_0) \\ z_i^{(l)}(t_0) &= \sum_j A_{ij} \phi_j^{(l)}(t_0) \\ z_i(t_f) &= \sum_j A_{ij} \phi_j(t_f) \\ z_i^{(l)}(t_f) &= \sum_j A_{ij} \phi_j^{(l)}(t_f). \end{aligned} \quad (15)$$

Para que este sistema tenha solução, é necessário que a base de funções ϕ_j (normalmente estas funções são polinómios) tenha dimensão suficiente, ou seja, $j \in [1..2(l+1)]$. Se a dimensão do estado do sistema for n e a dimensão das entradas for m , então existem $2(m(l+1))$ coeficientes A_{ij} para determinar. Assim, o problema de seguimento ponto a ponto reduz-se à resolução de um sistema linear com $2(m(l+1))$ incógnitas. Neste problema pode-se sobreparametrizar as saídas planas do sistema de modo a ser possível obter um grau de liberdade extra. Com esta sobreparametrização, não só conseguir-se-á guiar o sistema de um ponto inicial para outro ponto final, como também minimizar uma função custo que se pretenda implementar para o sistema.

Exemplo 1. Considere-se um sistema com duas saídas planas z_1 e z_2 , isto é $i = 1, 2$ logo $m = 2$. Se forem necessárias 3 derivadas das saídas planas para se determinar o estado do sistema (equação 2) serão necessários 8 polinómios (de grau entre 0 e 7) para se obter a solução da equação 15. Isto acontece porque fica-se com um sistema de 8 equações com 8 incógnitas para cada saída plana, permitindo assim obter os 16 coeficientes a_{ij} .

Após determinação dos coeficientes A_{ij} , é necessário calcular um número suficiente de pontos das variáveis de estado e de entrada do sistema, a partir da trajectória parametrizada e usando a equação 2 (figura 4). Quanto maior for o número de pontos calculados para as variáveis de estado e de entrada do sistema, no intervalo $[t_0, t_1]$, melhor será o desempenho deste. Isto acontece porque consegue-se determinar com maior frequência as entradas adequadas a aplicar ao sistema, conseguindo-se assim uma melhor execução da trajectória planeada para as saídas planas. A determinação das variáveis de estado e de entrada

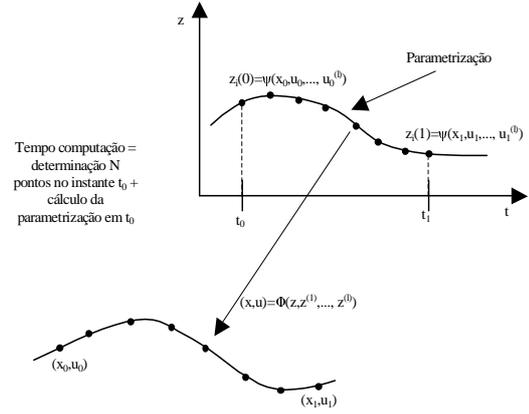


Fig. 4. Problema de condução ponto a ponto

do sistema resulta, normalmente, da resolução de um sistema de equações não lineares.

Em (Nieuwstadt, 1997), são apresentados alguns resultados experimentais usando esta técnica, e conclui-se que o tempo computacional para calcular o estado e entrada, a partir das saídas planas do sistema, é superior ao tempo que leva a determinar os parâmetros da equação 15, mesmo que se tenham expressões simbólicas relacionando as saídas planas com os estados e entradas do sistema. Usando este resultado, pode-se concluir que o factor que tem maior influência no tempo de cálculo da trajectória do sistema é o número de pontos (x, u) a determinar a partir das saídas planas do sistema. Notar que aqui refere-se ao tempo de cálculo da trajectória como sendo o tempo necessário para determinar a parametrização das saídas planas mais a determinação dos N pontos (x, u) . Assim, para se realizar a condução de um ponto do espaço de estados para outro é necessário despender esse tempo de computação antes de se dar início à execução da trajectória, que será tanto maior quanto maior for a precisão especificada para a execução da trajectória desejada.

A título de exemplo, na figura 5 são apresentadas as trajectórias parametrizadas definidas para o caso de se pretender conduzir o ROV referido na secção 2.2, cujo modelo dinâmico (Fraga, 2002)(Gomes, 2002) é semelhante ao que se apresenta na equação 12, do ponto $(x, y, z, \phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ no instante $t_0 = 0s$ para o ponto $(x, y, z, \phi, \theta, \psi) = (10, 0, 5, 0, 0, 0)$ no instante $t_f = 20s$. As variáveis xyz correspondem à posição inercial do centro de massa do veículo enquanto que $\phi\theta\psi$ representam a orientação do veículo face a um referencial inercial. Para estes pontos definiu-se que a velocidade inicial e final do veículo é igual a zero. Na figura 5 só são apresentadas as variáveis xz pois as restantes são todas iguais a zero.

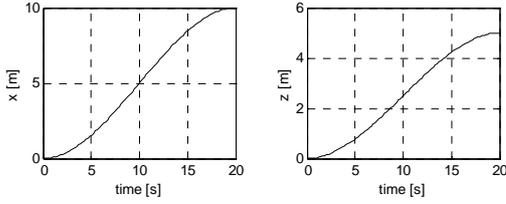


Fig. 5. Parametrização das saídas planas

3.2 Trajectórias Aproximadas pelo Método dos Mínimos Quadrados

Agora será abordada a questão de geração de trajectórias no caso das saídas planas coincidirem com as variáveis que se pretende fazer seguimento, isto é, em vez de se definir um ponto inicial e final entre os quais se pretende que o estado de sistema evolua, e definir a partir destes pontos uma parametrização para as saídas planas (condução ponto a ponto), especifica-se uma trajectória completa para as saídas planas. Apesar de se definir uma trajectória completa para as saídas planas entre dois instantes de tempo, parametriza-se mesmo assim as saídas planas do mesmo modo que no caso da condução ponto a ponto. Isto acontece porque a determinação do estado e entrada do sistema requerem a diferenciação das saídas planas até algumas ordens de grandeza (equação 2), pelo que a parametrização das saídas planas através de polinómios facilita essa diferenciação. Se por um lado facilita a diferenciação das saídas planas, permitindo um processo computacional eficiente em termos de tempo despendido, a parametrização realizada degrada a trajectória definida inicialmente. Muitas vezes seria possível definir e seguir uma trajectória mais próxima da definida, mas por razões de implementação dos algoritmos de geração de trajectórias permite-se uma relaxação na definição da trajectória, em favor da eficiência computacional. No entanto, deve também ser considerado o caso da trajectória não ser realizável devido a impedimentos na actuação, nomeadamente a saturação dos actuadores. Neste caso, a aproximação da trajectória definida por polinómios vai permitir uma suavização da trajectória definida inicialmente, possibilitando assim uma melhoria no desempenho do sistema.

A parametrização das saídas planas é obtida recorrendo a um problema de mínimos quadrados, que tenderá a aproximar a parametrização com a trajectória desejada para as saídas planas:

$$\min_A \int_{t_0}^{t_1} (z_d(s) - A\phi(s))^T * W(s) * (z_d(s) - A\phi(s)) ds \quad (16)$$

A_{ij} representa o coeficiente da função base ϕ_j na saída plana i , $\phi(t)$ representa o vector de funções base para o instante t , z_d representa o valor desejado para as saídas planas do sistema e $W(t)$ é uma matriz de pesos variável no tempo. A solução para o problema anterior tem a seguinte

forma:

$$A = M^{-1}L \quad (17)$$

em que

$$M_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \phi_i(s)W_{ij}(s)\phi_j(s)ds$$

$$L_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \phi_i(s)W_{ij}(s)z_{dj}(s)ds. \quad (18)$$

Deve-se notar que o problema é desacoplado relativamente às diferentes saídas planas do sistema, já que é possível calcular os coeficientes A para cada saída plana separadamente. O cálculo de M^{-1} é realizado somente uma vez o que torna o cálculo da parametrização mais eficiente. Após determinação desta parametrização procede-se do mesmo modo que na condução ponto a ponto, no que se refere à determinação das variáveis de estado e de entrada do sistema. Todos as considerações mantêm-se, nomeadamente as referentes ao número de pontos a considerar para implementar a trajectória.

É possível usar esta formulação do problema para gerar trajectórias que minimizem o esforço de actuação. Esta situação é útil para o veículo subaquático mencionado na secção 2.2, no caso de se pretender aproximar o modelo de seis graus de liberdade para outro totalmente actuado e de ordem quatro (Fraga, 2002). Esta aproximação permitirá desprezar o comportamento das variáveis de roll e pitch, por haver pouca actuação nestas, e tornar possível o uso das propriedades dos sistemas diferencialmente planos. A abordagem realizada consiste na geração de trajectórias usando a equação 16 mas com uma parcela adicional que consiste num factor que minimize o esforço de actuação:

$$\min_A \int_{t_0}^{t_1} (z_d(s) - A\phi(s))^T * (z_d(s) - A\phi(s)) + \lambda(K^2 + M^2)ds \quad (19)$$

em que as variáveis K, M representam o esforço de actuação nas variáveis de estado de roll e pitch. O parâmetro λ especifica uma solução de compromisso entre o seguimento da trajectória e a minimização do esforço de actuação. Quanto maior for o valor de λ menor será o esforço de actuação mas pior será o seguimento da trajectória definida.

4. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma abordagem para o problema de geração de trajectórias para sistemas mecânicos. Foi mostrada a importância de uma correcta geração de trajectória para o bom desempenho de um sistema de controlo. A arquitectura

da geração de trajectórias é composta por três módulos: 1) especificação da saída; 2) geração de trajectórias; 3) controlo. As principais vantagens desta arquitectura residem na modularidade da implementação (desenvolvimento de três módulos separadamente onde futuros melhoramentos podem ser facilmente incorporados) (Varaiya, 1997) e na possibilidade de separação do projecto não linear (definição de uma trajectória a seguir pelo sistema) e o projecto linear (controlo do sistema em torno de uma trajectória).

O principal foco deste artigo foi a exploração das propriedades de sistemas diferencialmente planos para a geração de trajectórias realizáveis. Foram mostrados os principais resultados relacionados com sistemas diferencialmente planos no que se refere ao controlo de sistemas não lineares. A vantagem do uso das saídas diferencialmente planas, quando disponíveis, é que o problema de geração de trajectórias é reduzido a um de carácter algébrico em vez de um problema de programação dinâmica. Esta área de trabalho enquadra-se nos projectos que se encontram a decorrer (Pereira, 2001) (Gomes, 2002)(Fraga, 2002) no Laboratório de Sistemas e Tecnologias Subaquáticas (LSTS) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP), em particular nos projectos de controlo de veículos subaquático autónomos e semi-autónomos existentes nesse laboratório.

5. AGRADECIMENTOS

Este material é baseado no trabalho financiado pelo Programa PRAXIS XXI - Medida 3.1b) (projecto IES) e pelo Ministério da Defesa, Portugal. Sérgio Fraga foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) e pelo Fundo Social Europeu.

REFERÊNCIAS

de Carvalho, J. L. Martins (1993). *Dynamical Systems and Automatic Control*. Prentice Hall.

Fraga, Sérgio Loureiro (2002). Geração de trajectórias - aplicação a veículos subaquáticos. Master's thesis. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Fraga, Sérgio Loureiro, João Borges Sousa and Fernando Lobo Pereira (Junho, 2002). A framework for the automation of a remotely operated vehicle. In: *10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*.

Fraga, Sérgio Loureiro, João Sousa, Anouck Girard and Alfredo Martins (2001). An automated maneuver control framework for

a remotely operated vehicle. In: *MTS/IEEE Oceans 2001*. IEEE.

Gomes, Rui Manuel Ferreira (2002). Modelização e controlo de veículos subaquáticos. Master's thesis. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Isidori, Alberto (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer.

Latombe, Jean-Claude (1993). *Robot Motion Planning*. KAP.

Laumond, Jean-Paul (1998). *Robot Motion Planning and Control*. Springer.

Martin, Philippe, Santosh Devasia and Brad Paden (1994). A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft. In: *Conference on Decision and Control*.

Murray, Richard, Muruhan Rathinam and Willem Sluis (1995). Differential flatness of mechanical control systems: A catalog of prototype systems. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*.

Murray, Richard, William Shadwick, Willen Sluis and Philippe Martin (1994a). Workshop on exterior differential systems and nonlinear control theory. In: *33rd IEEE Conference on Decision and Control*.

Murray, Richard, Zexiang Li and S. Sastry (1994b). *Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.

Nieuwstadt, M. Van, M. Rathinam and R. Murray (1994). Differential flatness and absolute equivalence. In: *Conference on Decision and Control*.

Nieuwstadt, Michiel J. Van (1997). Trajectory Generation for Nonlinear Control Systems. PhD thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California.

Pereira, Fernando Lobo (2001). Control design for autonomous vehicles: A dynamic optimization perspective. In: *Fundamental Issues in Control*. Vol. 7. European Journal of Control.

Varaiya, Pravin (1997). Towards a layered view of control. In: *36th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE.