

Análise Dinâmica e Controlo de Braços em Manipuladores Robóticos

Dissertação submetida com vista à obtenção do grau de Doutor
em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Abílio Joaquim Gomes de Oliveira Azenha

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

**Análise Dinâmica e Controlo de Forças
em Manipuladores Robóticos**

Dissertação submetida à Faculdade de
Engenharia da Universidade do Porto,
com vista à obtenção do grau de Doutor.

1998

Abílio Joaquim Gomes de Oliveira Azenha

Agradecimentos

Ao meu distinto orientador Prof. Doutor José António Tenreiro Machado, por toda a atenção dispensada, sugestões e ideias transferidas e por todo o trabalho e paciência que teve comigo. À Prof. Doutora Alexandra Galhano, porque também me soube encorajar nas ocasiões de maiores dificuldades. À minha família, especialmente aos meus pais Joaquim e Maria da Conceição, por todo o apoio e carinho que manifestam em mim.

Desejo, também, agradecer o apoio financeiro que obtive através de uma Bolsa de Doutoramento da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) agora denominada Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Programa Praxis XXI. Também tive o apoio monetário para participação em Conferências Internacionais nos Estados Unidos da América da Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento e da Fundação Calouste Gulbenkian.

RESUMO

Os manipuladores robóticos são sistemas constituídos por diversos elos interligados por eixos lineares ou rotacionais. Estes sistemas mecânicos exibem fenómenos cinemáticos, estáticos e dinâmicos complexos o que torna difícil a sua análise e o seu controlo. Estes factos levaram a que até recentemente a utilização de robots estivesse confinada a tarefas que exigissem pouca interacção com o ambiente (*e.g.* pintura e soldadura). Por esta razão, nos últimos anos tem-se assistido a alguma investigação sobre a modelização e o controlo de manipuladores para tarefas em que é requerido um controlo da força de contacto com o ambiente (*e.g.* polimento e montagem). A perspectiva clássica de controlo de manipuladores robóticos considera a configuração (*i.e.* a posição) e as derivadas temporais (*i.e.* a velocidade e a aceleração) da estrutura mecânica do robot. Todavia, muitas das tarefas solicitadas a este tipo de sistemas não são compatíveis com essa filosofia. De facto, as actividades que requerem um controlo de força/binário não são possíveis de controlar em posição e vice versa. Esta situação levou ao desenvolvimento de algoritmos com vista ao controlo das variáveis posição e força/binário de acordo com as solicitações das tarefas a executar. Assim, emergiram os conceitos de controlo de impedância, controlo híbrido posição/força e, de uma forma mais geral, o controlo de força. Nesta ordem de ideias, este trabalho estuda a técnica de “controlo híbrido posição/força” (CH) com “efeitos de segunda ordem” tais como os atritos não lineares (nos eixos e no ambiente de trabalho), as folgas (na estrutura mecânica) e as flexibilidades nas juntas, que se revelam de importância fundamental para um controlo preciso e estável das forças de interacção. Analisam-se as respostas temporal e em frequência do sistema para vários controladores de posição/força para vários parâmetros dos controladores e do sistema robot/ambiente. Compara-se o comportamento do sistema clássico (*i.e.* com a inversa da matriz Jacobiano) *versus* o cálculo através de uma matriz pseudo-inversa. Em todos os casos analisa-se a zona de estabilidade do sistema em função dos parâmetros da superfície restrição. Calculam-se as respostas (com duas modelizações distintas da superfície restrição) quando se adopta uma estratégia de controlo por multifrequência. Analisa-se o comportamento do CH durante a ocorrência de impacto para vários esquemas de transição (do controlo de posição para o controlo de força) da estrutura do controlador. Por último, estuda-se de uma forma sucinta a adopção de controladores de ordem fraccionária, nas malhas de posição e de força, em alternativa aos sistemas de estrutura variável usados ao longo do trabalho.

ABSTRACT

Robotic manipulators are systems made from various links interconnected by prismatic or rotational joints. These mechanical systems exhibit complex kinematic, static and dynamic phenomena that lead to a difficult analysis and control. These facts lead that till recently the use of robots was restricted to tasks needing a reduced interaction with the environment (*e.g.* painting and welding). Due to this reason, in the last years a considerable research has been done on the area of manipulator modelling and control for tasks in which it is required a contact force with the environment (*e.g.* deburring and assembly). The classical perspective for manipulator control considers the configuration (*i.e.* the position) and the time derivatives (*i.e.* the velocity and the acceleration) of the robot mechanical structure. Nevertheless, many of the tasks demanded to this type of systems are not compatible with this philosophy. In fact, the actions that require a force/torque control are not possible to control in position and *vice versa*. This situation motivated the development of algorithms establishing a compromise between position and force/torque control according with the task requirements. By this way, it evolved the impedance control, hybrid position/force control and, in a more general form, the force control concepts. In this line of thought, this work studies the hybrid position/force control (HC) technique with “second order dynamic effects” such as nonlinear friction (in the joints and in the environment), backlash (in the mechanical structure) and flexibilities at the joints. These dynamic phenomena reveal to be of fundamental importance for a precise and stable control of the interaction forces. These effects are analysed in terms of time and closed-loop frequency responses for several position/force controllers and different robot/environment parameters. Moreover, the behaviour of the standard (*i.e.* with the inverse Jacobian matrix) system *versus* the pseudo-inverse modification are also compared. For all cases, the system stability locus in terms of the constraint surface parameters (for two distinct dynamical models) is studied and the system responses, when a multirate control strategy is adopted, is calculated. In particular the HC performance during the occurrence of impacts for several transition schemes (from position to force control) of the controller structure is studied. Finally, briefly, the adoption of fractional-order controllers, in the position and force loops, in alternative to the variable structure controllers used throughout the work is also analysed.

RÉSUMÉ

Les manipulateurs robotiques sont constitués de plusieurs anneaux donc la liaison est accomplie par des axes linéaires ou rotationnels. Les phénomènes cinématiques, statiques et dynamiques de ces systèmes mécaniques sont assez complexes, ce qui rend leur analyse et leur contrôle une tâche difficile. C'est pourquoi leur utilisation était fort limitée dans le passé, voire peinture, soudure, etc. La recherche développée depuis quelques années sur la modélisation et le contrôle de manipulateurs robotiques prend en compte des situations où le contrôle de force permet de toucher l'ambiance et, par conséquent, accomplir des actions de polissage et d'assemblage. Du point de vue classique, le contrôle de manipulateurs robotiques prend en compte la configuration de sa structure, c'est-à-dire la position, et ses dérivées dans le temps, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération. Pourtant, cette approche n'est pas efficace dans plusieurs situations. En effet, ce n'est pas possible d'accomplir un contrôle en position en des activités qui ont, simultanément, besoin d'un contrôle de force/couple, et *vice versa*. Des algorithmes permettant le contrôle des variables de position aussi bien que de force/couple ont été développés pour des situations bien spécifiques. Ainsi, sont apparus le contrôle d'impédance, le contrôle hybride de position/force et, plus généralement, le contrôle de force. Ce travail prend en compte le contrôle hybride de position/force (CH) avec des effets de second ordre comme les frottements non linéaires, soit dans les axes soit dans l'ambiance, les relâches, dans la structure mécanique, et les flexibilités aux axes, donc l'importance est fondamentale pour un contrôle avec précision et stabilité des forces d'interaction. Les réponses temporelles et en fréquence du système sont analysées dans le cas de plusieurs contrôleurs de position/force et en considérant plusieurs paramètres, soit du contrôleur lui-même, soit du système robot/ambiance. Le système classique, avec le calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne, est comparé avec le calcul par une matrice pseudo-inverse. La région de stabilité du système est analysée, dans tous les cas, en fonction des paramètres de la surface de restriction. Les réponses sont aussi calculées avec deux modélisations de la surface de restriction en adoptant une stratégie de multifréquence. L'accomplissement du CH est analysé pendant l'impact pour plusieurs schémas de transition entre le contrôle de position et le contrôle de force de la structure du contrôleur. Une étude de contrôleur d'ordre fractionnaire, dans les mailles de position et de force, comme alternative aux systèmes de structure variable utilisés est aussi exploitée.

ÍNDICE:

Agradecimentos	i
Índice.....	v

1 Introdução 1.1

2 Modelização de fenómenos de atrito, folgas e flexibilidades 2.1

2.1 Introdução	2.1
2.1.1 Atritos	2.2
2.1.2 Folgas	2.8
2.1.3 Flexibilidades	2.10
2.2 Considerações sobre o atrito deslizamento-paragem	2.11
2.2.1 O efeito de Dahl.....	2.14
2.2.2 O tempo de residência	2.14
2.2.3 Atraso e repetibilidade do atrito	2.15
2.3 Modelização de fenómenos de folgas.....	2.16
2.3.1 As equações do sistema motor, engrenagem e carga	2.17
2.3.2 Sistema em malha fechada	2.19
2.3.3 Modelização da folga através de considerações dinâmicas <i>versus</i> cinemáticas	2.21
2.4 Modelização de fenómenos de flexibilidades.....	2.23
2.5 Conclusões.....	2.25

3 Controlo de sistemas com atritos, folgas e flexibilidades 3.1

3.1 Introdução	3.2
3.1.1 Controladores de estrutura variável	3.2
3.1.2 O método da função descritiva	3.3
3.2 Os controladores de estrutura variável	3.4
3.3 Estudo de sistemas não lineares através da função descritiva.....	3.5
3.3.1 Conceitos gerais	3.6
3.3.2 A FD dos controladores	3.8
3.3.3 A FD dos sistemas não lineares	3.12
3.3.3.1 Sistemas com atrito	3.13
3.3.3.2 Sistemas com folgas	3.17
3.3.3.3 Sistemas com flexibilidade.....	3.23
3.3.4 Algumas considerações relativas aos resultados obtidos através da FD	3.24
3.4 Simulação de sistemas com um gdl em controlo de posição	3.26
3.4.1 Sistemas com atrito	3.26
3.4.2 Sistemas com folgas	3.27
3.4.3 Sistemas com flexibilidade.....	3.28
3.5 Controlo de posição do robot 2R com atrito, folgas e flexibilidade nos eixos	3.28
3.5.1 Robot com atrito nos eixos.....	3.30
3.5.2 Robot com folgas nos eixos.....	3.32

3.5.3 Robot com flexibilidade nos eixos	3.32
3.6 Conclusões.....	3.34

4 Análise dinâmica do controlo híbrido posição/força de robots 4.1

4.1 Introdução	4.2
4.2 Descrição matemática do robot e do ambiente.....	4.5
4.3 Descrição do controlador híbrido posição/força.....	4.9
4.4 Resposta temporal do sistema com vários controladores de posição e de força	4.11
4.5 Resposta em frequência do sistema e a correcção da pseudo-inversa.....	4.20
4.5.1 Comportamento do CH através da respectiva resposta em frequência.....	4.20
4.5.2 Comportamento do sistema para valores variáveis dos parâme- tros da superfície restrição e da frequência do controlador	4.25
4.5.3 Comportamento do CH perto e longe de pontos singulares	4.29
4.6 Zonas de estabilidade em função dos parâmetros da superfície restrição... 4.38	
4.7 Aspectos relacionados com a modelização da superfície restrição e com a adopção de uma estratégia de amostragem por multifrequência	4.41
4.8 Controlo de robots com fenómenos dinâmicos não lineares nas juntas.....	4.45
4.9 A ocorrência de impacto	4.47
4.9.1 O algoritmo de transição	4.48
4.9.2 A trajectória.....	4.49
4.9.3 Desempenho dinâmico com impacto.....	4.50
4.9.4 Estabilidade <i>versus</i> geometria da superfície e velocidade de impacto.....	4.54
4.10 Sistema com controladores de ordem fraccionária	4.56
4.10.1 Algoritmos de ordem fraccionária.....	4.56
4.10.2 Experiências.....	4.58
4.10.2.1 Robots ideais.....	4.58
4.10.2.2 Robots com atrito não linear.....	4.59
4.10.2.3 Robots com folga dinâmica	4.60
4.10.2.4 Robots com juntas flexíveis	4.62
4.11 Conclusões.....	4.62
Apêndice 4.A: Determinação da matriz pseudo-inversa $(SJ)^+$	4.64
1 Definição de matriz pseudo-inversa e teorema da unicidade	4.64
2 O método de decomposição em valores singulares.....	4.65
3 Determinação de $(SJ)^+$ através do método anterior	4.67
4 Propriedades da matriz $(SJ)^+(SJ)$	4.69

5 Aplicação da função descritiva na análise cinemática e dinâmica de sistemas com robots rígidos e ideais 5.1

5.1 Introdução	5.2
5.2 Utilização da FD no estudo da cinemática directa do robot 2R.....	5.3
5.3 Estudo da FD do controlo híbrido posição/força do robot 2R.....	5.11
5.3.1 A FD do bloco estática de força	5.14
5.3.2 A FD do bloco cinemática de posição.....	5.15
5.3.3 A FD do bloco robot 2R/ambiente.....	5.16
5.4 Viabilidade do estudo da estabilidade do CH através do diagrama de Nyquist multivariável.....	5.18

5.5 Linearização do CH	5.22
5.6 Resposta em frequência em malha fechada analítica do CH com o robot 2R	5.26
5.7 Conclusões.....	5.32
Apêndice 5.A: Determinação da FD do bloco de controlo de força	5.34
Apêndice 5.B: Determinação da FD do sub-bloco de interacção com o ambiente	5.39
Apêndice 5.C: Determinação da linearização do bloco de estática de força...	5.44
Apêndice 5.D: Determinação da linearização do sub-bloco de interacção com o ambiente.....	5.46
Apêndice 5.E: Determinação dos blocos F_1 e F_2 para cálculo da resposta em frequência analítica	5.48

6 Conclusão 6.1

Bibliografia	B.1
--------------------	-----

1 Introdução

Os manipuladores robóticos são sistemas constituídos por diversos elos interligados por eixos lineares ou rotacionais. Estes sistemas mecânicos exibem fenómenos cinemáticos, estáticos e dinâmicos complexos o que torna difícil a sua análise e o seu controlo. Estes factos levaram a que até recentemente a utilização de robots estivesse confinada a tarefas que exigissem pouca interacção com o ambiente (*e.g.* pintura, soldadura, etc.). Por esta razão, nos últimos anos tem-se assistido a alguma investigação sobre a modelização e o controlo de manipuladores para tarefas em que é requerido um controlo da força de contacto com o ambiente (polimento, montagem, etc.).

A perspectiva clássica de controlo de manipuladores robóticos considera a configuração (*i.e.* a posição) e as derivadas temporais (*i.e.* a velocidade e a aceleração) da estrutura mecânica do robot. Todavia, muitas das tarefas solicitadas a este tipo de sistemas não são compatíveis com essa filosofia. De facto, as actividades que requerem um controlo de força/binário não são possíveis de controlar em posição e vice versa. Esta situação levou ao desenvolvimento de algoritmos com vista ao controlo das variáveis posição e força/binário de acordo com as solicitações das tarefas a executar. Assim, emergiram os conceitos de controlo de impedância, controlo híbrido posição/força e, de uma forma mais geral, o controlo de força.

As estratégias de controlo de posição são adequadas para tarefas tais como transferência de materiais, pintura ou soldadura por pontos onde o manipulador não interaccua significativamente com objectos no espaço de trabalho. No entanto, tarefas tais

como montagem, polimento e rebarbagem que envolvem um contacto, são melhor conduzidas através do controlo das forças de interacção entre o manipulador e o ambiente.

As restrições impostas pelo meio ambiente ao manipulador, nomeadamente ao seu movimento, fazem com que este desenvolva uma acomodação (compliance) por forma a adaptar a sua estrutura às imposições externas. O contacto entre o órgão terminal e o meio ambiente pode ser:

- suave – quando pode ser modelizado através de uma mola, um amortecedor, uma massa e/ou um momento de inércia;
- duro – quando é modelizado através de uma relação matemática não linear, isto é, quando a restrição é descrita como uma inequação ou uma igualdade sempre que ocorre algum contacto entre o órgão terminal e o seu meio ambiente.

O fenómeno de acomodação do robot pode ser controlado pelo método da impedância ou pelo algoritmo híbrido de posição/força.

O controlo de impedância tem por objectivo o controlo da posição e da força através do ajuste da impedância mecânica do órgão terminal de acordo com as forças externas geradas por contacto com o ambiente. O controlo de impedância pode ser subdividido nos métodos de impedância activa e de impedância passiva. No primeiro caso, a impedância desejada do órgão terminal é conseguida através do controlo dos actuadores das juntas usando uma realimentação baseada em medidas da posição, da velocidade e da força de contacto. No segundo caso, a impedância mecânica do órgão terminal é conseguida apenas através do uso de dispositivos mecânicos passivos tais como molas e amortecedores.

Por outro lado, o controlo híbrido usa dois anéis distintos de realimentação: um anel para o controlo de posição e outro anel para o controlo de força. Neste método, as direcções segundo as quais é controlada a posição e as restantes direcções segundo as quais é controlada a força são determinadas para uma dada tarefa. Assim, as solicitações aos actuadores das juntas correspondem à sobreposição das componentes de controlo da posição e da força.

As técnicas de “controlo de impedância” e de “controlo híbrido” encontram-se ainda numa fase de desenvolvimento, razão pela qual é necessária uma investigação mais profunda sobre os fenómenos envolvidos. Por outro lado, têm sido menosprezados “efeitos de segunda ordem” tais como os atritos não lineares (nos eixos e no ambiente de trabalho), as folgas (na estrutura mecânica) e as flexibilidades nas juntas, que se revelam de importância fundamental para um controlo preciso e estável das forças de interacção.

Nesta ordem de ideias, no capítulo 2 com base nos conceitos introduzidos apresentam-se algumas considerações necessárias à modelização dos atritos presentes em sistemas robóticos. É estudado também o efeito das folgas nas engrenagens de manipuladores e o processo para o seu eventual “atenuamento” e a modelização dos fenómenos de flexibilidades. A maior dificuldade que existe na modelização matemática dos atritos deve-se a estes serem dependentes de muitos factores como sejam o tipo de materiais em contacto, a temperatura, a humidade do ambiente de trabalho e muitos outros factores que variam de sistema para sistema. A fim de evitar uma grande complexidade, têm-se adoptado modelos muito simples (nomeadamente a formulação de uma força em função da velocidade relativa entre as duas superfícies em contacto) para os atritos. Esta técnica tem mostrado resultados interessantes, mas para cada tipo de sistema é necessário medir ou estimar os valores dos parâmetros do modelo. Por outro lado, num robot existem muito frequentemente engrenagens compostas por rodas dentadas e/ou roldanas sujeitas ao fenómeno das folgas, isto é, à existência de intervalos nos quais a transmissão de energia entre dois componentes consecutivos é interrompida. No entanto, devido aos princípios da conservação de energia e do momento cinético/angular, pode-se determinar o efeito das folgas e avaliar as suas consequências. O estudo das folgas em engrenagens de manipuladores é de primordial importância pois afectam a exactidão do controlo seja de posição seja de força, bem como a ocorrência de instabilidades. Por último, existem problemas de controlo nos sistemas com flexibilidades devido ao chamado efeito de não-colocação, ou seja, devido ao sensor não medir a posição do actuador, mas sim a posição do elemento a ele acoplado. O facto de nos robots industriais clássicos o accionamento não ser directo, devido à existência de mecanismos de transmissão, torna importante estudar os efeitos da flexibilidade nas juntas. Este fenómeno é usualmente modelizado por uma mola que interliga o eixo do motor com o eixo da junta do robot.

No capítulo 3 estudam-se os controladores de estrutura variável (CEVs) adoptados e expõe-se o método da Função Descritiva (FD) utilizado na previsão de ciclos limite em sistemas não lineares. Apresentam-se os resultados para sistemas não lineares com um grau de liberdade (gdl) em sistemas de controlo de posição. Com base neste estudo, generalizam-se os conceitos a sistemas com um maior número de gdl. Os CEVs (Variable Structure Controllers) têm vindo a ser objecto de interesse devido a possuírem propriedades boas, nomeadamente, revelarem elevada robustez, necessitarem de um baixo peso computacional e não requerem o conhecimento de um modelo do sistema a controlar. Os elementos

principais de um CEV são a superfície de deslizamento (sliding surface) e a acção de controlo (control effort). Um CEV caracteriza-se por levar o sistema a controlar até ao seu ponto final de equilíbrio com uma dinâmica que é traduzida no plano de fase pela chamada superfície de deslizamento. Devido à existência de descontinuidades à saída do bloco de acção de controlo, devido ao CEV ser implementado como um sistema discreto e/ou a descontinuidades provocadas no próprio bloco, existe o fenómeno do aparecimento de uma oscilação de alta frequência (chattering) no sistema global. Este estudo utiliza a FD, já que se trata de um método relativamente simples, ainda pouco suficientemente explorado na caracterização de sistemas dinâmicos não lineares nomeadamente sistemas MIMO (multiple-input-multiple-output). Deve ainda apontar-se que existe uma diferença qualitativa na análise de sistemas não lineares quando cinemáticos ou quando dinâmicos: nos primeiros a FD só depende da amplitude dos sinais, enquanto que nos segundos aquela depende simultaneamente da frequência e da amplitude.

No capítulo 4 apresentam-se a descrição do sistema robot/ambiente e do controlador híbrido posição/força (CH) e a resposta temporal do sistema para vários controladores de posição e de força. Também se estuda a resposta em frequência em malha fechada do sistema para vários parâmetros dos controladores e do sistema robot/ambiente e compara-se o comportamento do sistema clássico com uma modificação através de uma matriz pseudo-inversa. Analisa-se a zona de estabilidade do sistema em função dos parâmetros da superfície restrição e calculam-se as respostas do sistema com duas modelizações distintas da superfície restrição e quando se adopta um controlo por multifrequência. Estudam-se as respostas para robots com atritos não lineares, com folgas e com flexibilidades nas juntas e considera-se o fenómeno de impacto do robot com a superfície restrição. Em particular, analisa-se o comportamento do CH durante a ocorrência de impacto quando se varia a transição (*i.e.* do controlo de posição para o controlo de força) da estrutura do controlador em rampa e em degrau. Estuda-se de uma forma sucinta a adopção de controladores de ordem fraccionária, nas malhas de posição e de força, em alternativa aos sistemas de estrutura variável.

No capítulo 5 apresentam-se algumas considerações sobre a utilização da FD no estudo da cinemática directa de robots, estuda-se a FD do sistema de CH e apresenta-se o trabalho de viabilidade da utilização do traçado de Nyquist multivariável para verificar a estabilidade do CH. Por outro lado, estuda-se a linearização do CH tendo como ponto de partida a FD do sistema. Também se apresenta a determinação analítica da resposta em

frequência em malha fechada do CH tendo como base a linearização do sistema respectivo apresentado no capítulo 4, através da técnica de análise de sistemas não lineares pelo método da FD. A filosofia presente no capítulo 5 pode ser caracterizada pela dedução de expressões matemáticas capazes de caracterizar aspectos importantes do desempenho dos sistemas robóticos e pela sua validação através da execução de experiências práticas. As ferramentas matemáticas utilizadas são a FD e a linearização usando diagramas de blocos. Deste modo, é possível estudar, por exemplo, a influência da frequência de amostragem dos controladores dos anéis do CH perto de um ponto de funcionamento com ciclo limite ou determinar analiticamente a resposta em frequência do mesmo.

Por último, no capítulo 6 apontam-se as principais conclusões do estudo e as perspectivas de desenvolvimentos futuros.

2 Modelização de fenómenos de atrito, folgas e flexibilidades

Este capítulo debruça-se sobre o estudo de fenómenos de atritos, folgas e flexibilidades presentes na estrutura mecânica de numerosos sistemas. Assim, começa-se por apresentar uma panorâmica dos trabalhos realizados nos últimos anos sobre estes problemas. De seguida, trata-se a forma de modelizar os fenómenos e de conseguir o seu teste na perspectiva de sistemas controlo.

Nesta ordem de ideias, na secção 2.1 faz-se uma introdução ao tema deste capítulo através de uma resenha bibliográfica. Com base nos conceitos introduzidos, na secção 2.2, apresentam-se algumas considerações necessárias à modelização dos atritos presentes em sistemas robóticos. Na secção 2.3 é estudado o efeito das folgas nas engrenagens de manipuladores e o processo para o seu eventual “atenuamento”. Na secção 2.4 estuda-se a modelização dos fenómenos de flexibilidades. Por último, na secção 2.5, esboçam-se as conclusões mais relevantes decorrentes do estudo efectuado neste capítulo.

2.1 Introdução

Nesta secção apresentam-se os conceitos fundamentais necessários ao estudo dos fenómenos de atrito, folgas e flexibilidades.

2.1.1 Atritos

A maior dificuldade que existe na modelização matemática dos atritos deve-se a estes serem dependentes de muitos factores como sejam o tipo de materiais em contacto, a temperatura, a humidade do ambiente de trabalho e muitos outros factores que variam de sistema para sistema. A fim de evitar uma grande complexidade, têm-se adoptado modelos muito simples (nomeadamente a formulação de uma força em função da velocidade relativa entre as duas superfícies em contacto) para os atritos. Esta técnica tem mostrado resultados interessantes, mas para cada tipo de sistema é necessário medir ou estimar os valores dos parâmetros do modelo.

De entre todos os tipos de atritos que se observaram nos robots, o atrito de Coulomb parece ser o mais importante. Neste caso, a força de atrito entre duas superfícies em contacto é considerada como sendo um sinal em degrau positivo no primeiro quadrante e o seu simétrico no terceiro quadrante. Neste modelo a força de atrito é uma função da velocidade relativa entre as duas superfícies. Além disso, para o caso de se verificar uma velocidade relativa nula, existe um segundo efeito, o atrito estático (stiction), que, em geral, é superior ao atrito para velocidades não nulas. Dentro do atrito de Coulomb existem ainda várias aproximações possíveis, nomeadamente as formas exponencial, linear (viscoso), etc. À combinação atrito estático com o atrito para velocidades não nulas costuma-se denominar atrito deslizamento-paragem (stick-slip). Um aspecto importante que os atritos introduzem consiste na sua natureza ‘descontínua’ quando se modelizam da forma indicada, pois as equações dinâmicas adquirem um teor também ‘descontínuo’ em dados instantes das simulações e, por isso, é necessário tratar adequadamente esse facto.

Em 1983, Luh *et al.* projectaram e fabricaram duas juntas de um robot industrial para incluírem a capacidade da aquisição de sinais de binário através de extensómetros. Os sistemas de controlo propostos reduziram os binários efectivos de atrito das juntas de um modo notável. Este resultado deveu-se à existência de um controlador eficiente com os respectivos ganhos sintonizados experimentalmente. Deste modo, conseguiu-se quase anular os efeitos do atrito, através do ajuste dos ganhos do controlador, mas o algoritmo é muito sensível ao ajuste dos ganhos e a variações dos parâmetros.

No trabalho de Walrath (1984) é estudado o problema dos efeitos do atrito na bússola de veículos aéreos para sistemas de seguimento de rotas e foi desenvolvido um

compensador adaptativo em tempo real. A sua implementação é baseada numa análise experimental dos fenómenos, na qual foi identificado o carácter altamente não-linear do atrito. Os resultados obtidos com este controlador adaptativo foram encorajadores para a investigação subsequente, pois revelam que o atrito tem propriedades capazes de serem modelizadas com aproveitamento para o desenvolvimento do sistema de controlo.

Em 1985, Kuntze e Jacubasch realizaram um sistema robótico para cortar peças de metal com formas irregulares e requerendo muita precisão. O problema principal devido aos fenómenos não-lineares existentes nas juntas do manipulador consiste no atrito deslizamento-paragem (ver adiante mais pormenores). A par deste facto, existem também folgas nas engrenagens das juntas. No entanto, verificou-se experimentalmente que, para o sistema em questão, o atrito é o fenómeno que influencia mais significativamente o comportamento do sistema no que diz respeito à ocorrência de ciclos limite. Para ultrapassar os problemas dos ciclos limites recorre-se ao cálculo numérico da função descritiva (Atherton, 1975) deste tipo de atrito. Depois, utiliza-se a técnica de injeção de um sinal de oscilação de alta frequência (dithering) num ponto do controlador com vista ao cancelamento das perturbações. Deste modo, consegue-se modificar a função descritiva do atrito de tal forma que os ciclos limites são eliminados.

Em 1988, Armstrong fez um estudo sobre o atrito presente num mecanismo controlado por um servomotor de corrente contínua (com escovas) accionando uma engrenagem. Através deste trabalho chegou-se à conclusão que o comportamento dominante do atrito pode ser descrito pelo modelo de atrito de Coulomb mais um atrito viscoso. É também identificada uma dependência do atrito com a posição e com a velocidade.

No trabalho de Gogoussis e Donath (1988) mostrou-se que, para modelizar robots para aplicações requerendo uma elevada precisão onde a dinâmica tem um peso significativo, é importante incluir os efeitos do atrito de Coulomb nos rolamentos e nas transmissões. É mostrado que o atrito pode ser relacionado com as coordenadas das juntas e com as suas primeira e segunda derivadas temporais.

Em 1991 Haessig, Jr. e Friedland elaboraram um trabalho sobre a modelização e a simulação do atrito no qual, entre outras contribuições, apresentam dois novos modelos para o atrito não-linear do tipo deslizamento-paragem (stick-slip). O movimento deslizamento-paragem (DP) é caracterizado por um ciclo periódico alternado de movimento com paragem, e é governado por quatro fenómenos:

- A dinâmica ‘mola-massa’ do sistema;
- O atrito não-linear a baixas velocidades;
- A interdependência do atrito estático com o ‘tempo de residência’ que é definido como sendo o intervalo de tempo durante o qual as superfícies estão fixas com respeito ao contacto.
- O tempo de atraso entre a transmissão de uma mudança no estado do sistema e a mudança correspondente no atrito.

Os dois novos modelos propostos para o atrito DP chamam-se modelo de pêlos (bristle model) e modelo de integrador de reinicialização (reset integrator model). O primeiro representa o atrito como a interação de muitos pêlos flexíveis localizados aleatoriamente. O segundo modelo é menos complicado e, por isso, é mais eficiente computacionalmente. Baseia-se no uso de um integrador da velocidade relativa através do qual se obtém a quantidade de movimento do objecto a controlar e também num bloco que reinicializa o integrador no caso dessa velocidade ser reduzida. No entanto, retém as características que o fazem ser aceitável para simulações onde é desejado um grau de exactidão elevado.

Southward *et al.* (1991) desenvolveram um compensador não-linear de força para o atrito DP. Esta compensação destina-se a complementar uma lei de controlo proporcional e diferencial (PD) aplicada a um robot com um grau de liberdade. A escolha de uma força de compensação descontínua deve-se ao facto de ser necessário que a referência seja um ponto de equilíbrio (único) do sistema. Mostrou-se, por simulação e experimentalmente, que o sistema era estável. A implementação desta lei de controlo não-linear é relativamente simples para sistemas com 1 gdl e a sua realização pode ser conseguida utilizando apenas medições de posição. Não é necessário o conhecimento da força de deslizamento (slipping force), mas é requerida a estimação do valor máximo das forças de atrito estático.

No trabalho de Tachi *et al.* (1991) estuda-se o controlo de impedância de um manipulador sem utilizar sensores de força. Os atritos viscoso e de Coulomb nas juntas são estimados através de uma técnica de identificação de sistemas. Este método tem como vantagem principal o movimento do robot ser controlado através da mesma impedância de referência tanto no espaço livre como no restringido (por objectos muito rígidos). Posteriormente, em 1992, Dupont estuda o efeito do atrito de Coulomb na existência e na unicidade da solução da dinâmica directa para sistemas com atrito de Coulomb. Dupont

mostra que os problemas de existência e de unicidade existem mesmo para um sistema com 1 gdl e, de seguida, deriva as condições sob as quais ocorrem tais problemas. Dupont desenvolve um método gráfico que indica o número de soluções associadas a cada valor do binário de entrada e deriva uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da solução. Os coeficientes de atrito que não satisfazem esta condição são muito elevados em comparação com as amplitudes típicas do atrito interno dos robots. Trata-se de um resultado importante, porque indica que em muitos casos práticos a existência e unicidade da dinâmica directa não é necessariamente um problema a combater.

É também interessante o trabalho de Newman *et al.* (1992) no qual se estuda o efeito do atrito de Coulomb nas engrenagens de um robot utilizado em operações espaciais. O atrito de Coulomb presente em transmissões e rolamentos comuns induz níveis inaceitáveis da aceleração do órgão terminal. Estas acelerações não são atenuadas adequadamente por um algoritmo de controlo clássico, pelo que os robots para trabalhos em micro-gravidade requerem estruturas especiais a fim de apresentarem baixos níveis de atrito.

Gomes e Chrétien (1992) apontam que as perturbações internas de um controlador de junta de um robot (do qual é um exemplo o atrito), constituem importantes fontes de não-linearidade. Este facto torna difícil o desenvolvimento de leis de controlo com um nível de precisão elevado. Destas perturbações, a mais importante é o binário de atrito; no entanto, não existe um consenso acerca do modelo matemático que melhor se aproxima da realidade. Os objectivos atingidos com este trabalho foram:

- Obtenção de um modelo dinâmico de uma junta accionada por um motor e seu teste através de resultados experimentais;
- Uso do modelo do atrito para mostrar a possibilidade de construção de mecanismos de compensação;
- Cálculo da expressão da dinâmica não-linear através da análise do comportamento dos pólos do sistema, o que torna possível o projecto de leis de controlo.

Dupont (1993) tratou o efeito do atrito no problema da dinâmica directa. Desta feita, o trabalho discute a solução numérica das equações da dinâmica directa de um robot de n gdl's com atrito. Estuda-se também a modelização e a identificação experimental do atrito. Mostra-se que a inclusão do atrito de Coulomb nas equações dinâmicas introduz duas dificuldades na solução da dinâmica directa. Estas dificuldades são:

- As equações diferenciais são descontínuas nos termos derivativos de maior ordem;

- A dependência deste tipo de atrito com a carga é uma causa das equações serem implícitas nas acelerações das juntas.

Alexander e Maddocks (1993) estudaram o movimento dominado pelo atrito de um corpo rígido num plano horizontal em situações onde a interacção precisa do atrito com o corpo não pode ser determinada. Consequentemente, tem de ser encontrado o conjunto completo de movimentos correspondente a todas as distribuições possíveis do atrito. Estes investigadores mostraram que se a região de contacto entre o corpo e o plano que serve de suporte tem uma ou duas componentes, então o conjunto de todos os movimentos possíveis coincide com outro conjunto de movimentos. Este conjunto é o que é originado pelas distribuições do atrito entre dois pontos na vizinhança da região de contacto. Estes problemas de dois pontos podem ser resolvidos analiticamente enquanto que, para formulações anteriores, o suporte de um objecto por uma superfície com atrito é reduzido a um problema de três pontos de contacto (*tripods*), o qual não tem uma solução analítica.

Em 1994, Newman e Zhang propuseram uma nova formulação para o desenvolvimento de controladores de sistema com atrito a fim de se atingir um controlo de impedância com elevado desempenho e uma boa estabilidade. Embora a largura de banda do controlador resultante não seja superior à das técnicas alternativas, esta nova formulação melhora significativamente o desempenho quando o atrito de Coulomb está presente no sistema. Por outro lado, a técnica proposta requer uma escolha criteriosa da impedância desejada, pois o sistema pode tornar-se instável e os compensadores por realimentação serem não causais. Os resultados deste trabalho mostram que a técnica é bem sucedida na rejeição de perturbações de forças de atrito internas e que o robot mantém uma impedância passiva (*i.e.* sem geração de forças activas) no ponto de contacto.

Cai e Song (1994) desenvolveram dois novos compensadores não-lineares para estes sistemas: um para a regulação de posição (velocidade final nula) e o outro para o seguimento de trajectórias (velocidade final não nula) de robots rígidos com atrito de Coulomb nas juntas. Não é necessário conhecer com exactidão os modelos do atrito para o projecto dos controladores. Os controladores propostos melhoram não apenas a exactidão de posicionamento, mas também a suavidade de movimento. Mais ainda, o controlador de seguimento é também robusto com respeito a uma estimação pouco exacta dos parâmetros do manipulador.

No trabalho de Hu (1994) estuda-se o controlo de posição de um servo-sistema contendo atrito. Neste trabalho escolhe-se um modelo de atrito diferente do de Coulomb,

com a divisão em atrito estático e dinâmico, o que se revela apropriado para desenvolver uma lei de controlo que compensa os efeitos do atrito. O modelo de atrito adoptado evitou o aparecimento de ciclos limite de baixa frequência.

Por seu lado, Liu (1994) apresenta um trabalho sobre a compensação dos efeitos do atrito não-linear do tipo Coulomb para o seguimento de trajectórias. É aplicado um controlo iterativo por aprendizagem do tipo PD, que incorpora uma realimentação estabilizadora da dinâmica do manipulador compensadora do atrito. O controlador iterativo com aprendizagem gera uma sequência de funções de binário, usado em antecipação, as quais compensam gradualmente o atrito nas juntas através de repetidos ensaios de uma dada trajectória.

Glosser e Newman (1994) implementaram um controlador de admitância natural (*i.e.* um controlador da interacção com o ambiente de trabalho que garante a estabilidade do sistema para qualquer tipo de ambiente passivo) num robot industrial. O esquema implementado mostrou oferecer um elevado desempenho e uma boa rejeição do efeito provocado pelos atritos. Isto é conseguido através da modelização aproximada da dinâmica do sistema em malha aberta. Deste modo, pode ser derivada uma lei de realimentação de força que tenta preservar a passividade da dinâmica do sistema.

No estudo de de Wit *et al.* (1995) é proposto um modelo de atrito baseado em pêlos (bristles). Os resultados obtidos revelam uma grande semelhança com os dados experimentais pois o modelo capta muitas das propriedades do atrito que são observadas experimentalmente e expostas na secção 2.2. A zona de fronteira entre duas superfícies é modelizada como um contacto entre pêlos. Por razões de simplicidade, os pêlos de uma das superfícies são supostos como sendo rígidos, isto é, que não se deflectem. O mecanismo de geração da força de atrito entre as superfícies será então traduzido pela deflexão dos pêlos, de tal modo que se a força for suficientemente elevada, então alguns deles começam a deslizar. O fenómeno é altamente aleatório devido às formas irregulares das superfícies pelo que o modelo é baseado no comportamento médio dos pêlos, tal como acontece no trabalho de Haessig e Friedland (1991).

2.1.2 Folgas

Num robot existem muito frequentemente engrenagens compostas por rodas dentadas e/ou roldanas sujeitas ao fenómeno das folgas, isto é, à existência de intervalos nos quais a

transmissão de energia entre dois componentes consecutivos é interrompida. No entanto, devido aos princípios da conservação de energia e do momento cinético/angular, pode-se determinar o efeito das folgas e avaliar as suas consequências.

O estudo das folgas em engrenagens de manipuladores é de primordial importância pois afectam a exactidão do controlo seja de posição seja de força, bem como a ocorrência de instabilidades.

Allan e Levy (1980) descrevem um método para estimar o binário mínimo de pré-carga em rodas dentadas com molas anti-folga num sistema de controlo de posição, a fim de se obter uma resposta satisfatória ao degrau. O uso de um binário mínimo de pré-carga reduz o atrito e o desgaste nos dentes das engrenagens. Neste trabalho mostra-se que são suficientes binários de pré-carga inferiores aos empregues tradicionalmente para estabilizar o sistema de controlo.

Luh *et al.* (1983) analisam através da função descritiva a estabilidade e a existência de ciclos limite para um robot industrial. Estas oscilações podem ser removidas pela inserção de circuitos de compensação por avanço de fase. De facto, o traçado da função descritiva do sistema não-linear constituído por uma junta do robot auxilia o projecto de controladores que eliminem as instabilidades originadas pelas folgas das juntas. Os resultados obtidos através desta técnica mostraram ser prometedores, especialmente para frequências médias e elevadas. Eventualmente, para frequências baixas de ciclos limites, este processo não tem tão bons resultados devido a piorar a estabilidade do sistema (Kuntze e Jacubasch, 1985).

Dagalakis e Myers (1985) desenvolveram uma técnica para um ajuste preciso das folgas nas engrenagens das articulações de um robot industrial. Esta técnica consiste em injectar no actuador de uma junta sob teste sinais de excitação aleatórios e de largura de banda limitada e monitorizar o comportamento do eixo através de um acelerómetro. De seguida, é medida uma função de coerência que é utilizada no ajuste da folga da engrenagem de modo a minimizar o seu efeito da não-linearidade. Foram efectuados testes nos eixos de um robot, tanto em carga como em *vazio*, para diferentes posições em regime permanente. Os resultados mostram que esta técnica pode ser usada tanto para o ajuste das engrenagens das juntas como para a inspecção periódica e automática do seu estado de conservação. A função de coerência baseia-se no facto de existir um valor óptimo do ajuste da folga: para valores grandes o sistema torna-se obviamente inaceitável e para valores

pequenos o atrito de Coulomb torna-se dominante. Deste modo, existe um valor intermédio para o valor da folga que otimiza o comportamento do sistema. Relativamente à intervenção humana, o “método computacional” é mais fiável, pois não depende de erros de avaliação como ocorre com o “método humano”.

Stepanenko e Sankar (1986) analisam a influência das folgas nos actuadores de robots com transmissões elásticas. A função descritiva permite estudar os ciclos limites de alta frequência existentes nos actuadores e, deste modo, prever a frequência e a amplitude das oscilações com uma exactidão satisfatória.

Choi e Noah (1989) abordam também a resposta periódica em regime permanente de uma junta de robot com folgas e com uma rigidez finita. O procedimento utilizado é derivado a partir das condições fronteira nos pontos de contacto e da resolução das equações algébricas não-lineares correspondentes, através do estabelecimento do tempo de duração do contacto como um parâmetro. Este método tem a vantagem, em relação a métodos numéricos, de ter soluções exactas e de necessitar de um menor tempo de cálculo.

Chang e Jiang (1993) formulam a dinâmica de um robot com irregularidades a nível das juntas, para prever a exactidão e a precisão de posicionamento em operações de alta velocidade. Através da utilização de métodos de linearização Gaussianos (por meio de equações de propagação de média e de covariância do sistema), são obtidas a exactidão e a precisão operacionais do braço. Através de simulações (utilizando a técnica estatística de Monte Carlo) os autores concluem que existe um compromisso entre a viscosidade do lubrificante das juntas, a rapidez da resposta e o erro mínimo de posicionamento de um robot.

Por último refira-se também Tao e Kokotovic (1993, 1995a e 1995b) que estudam o modelo cinemático de uma ligação com folga. O mecanismo da folga (um caso particular da histerese) é tratado nestes trabalhos como um fenómeno puramente cinemático. Estes investigadores utilizam um controlo adaptativo para construir algoritmos robustos e estáveis em sistemas com folgas através do cálculo da cinemática inversa da folga. No caso do mecanismo (cinemático) da folga ser identificado com exactidão a resposta em regime permanente do sistema tem erro nulo; no caso disso não se verificar, o erro é limitado mantendo-se o sistema estável. Em contrapartida, não é efectuado qualquer estudo ao nível dos fenómenos dinâmicos existentes nas folgas.

2.1.3 Flexibilidades

Existem problemas de controlo nos sistemas com flexibilidades devido ao chamado efeito de não-colocação, ou seja, devido ao sensor não medir a posição do actuador, mas sim a posição do elemento a ele acoplado. O facto de nos robots industriais clássicos o accionamento não ser directo, devido à existência de mecanismos de transmissão, torna-se importante estudar os efeitos da flexibilidade nas juntas. Este fenómeno é usualmente modelizado por uma mola que interliga o eixo do motor com o eixo da junta do robot.

Jankowski e ElMaraghy (1992) propuseram um controlo híbrido de posição/força para robots com juntas rígidas ou com juntas flexíveis, tendo em conta o atrito na superfície de restrição (*i.e.* o ambiente de trabalho). O controlador utiliza a dinâmica inversa na forma analítica sendo por isso muito pesado em termos computacionais. Além disso, utiliza observadores para obter os sinais (*e.g.* para obter as derivadas das posições das juntas do robot) não directamente medidos o que agrava o problema.

Readman (1994) modeliza a dinâmica dos robots com juntas flexíveis utilizando a teoria da perturbação singular (*i.e.* decompondo o sistema em duas partes: a dinâmica *lenta* e a dinâmica *rápida*). É também apresentada a resposta em frequência dos robots controlados em malha fechada e em malha aberta, bem como os valores da rigidez das juntas para o robot PUMA 560.

Ochier *et al.* (1995) descrevem um programa de geração automática (em linguagem simbólica) das equações dinâmicas e das equações cinemáticas de robots com juntas flexíveis. Assim, a partir destas equações poderão vir a desenvolver-se controladores adequados.

De Luca (1995) considera os problemas de controlo de robots com algumas juntas rígidas e com as restantes flexíveis. O sistema proposto utiliza a dinâmica inversa do robot e consequentemente o seu desacoplamento e a sua linearização através de uma realimentação dinâmica.

Ailon e Lozano (1996) apresentam um algoritmo com controladores-observadores para robots com juntas flexíveis, sendo um sistema dos mais eficientes em termos computacionais proposto até à presente data. A estabilidade é provada através da teoria de Liapounov.

Rocco *et al.* (1996) estudam um controlo de força explícito (*i.e.* onde a entrada do sistema é uma referência de força) para robots industriais em contacto com superfícies rígidas onde consideram flexibilidade e o atrito viscoso nas juntas. Os autores sugerem que a acção integral é melhor para o controlo do sistema à medida que a rigidez do ambiente aumenta. No entanto, fica subentendido que o controlador PID é adequado para todos os valores da rigidez do ambiente porque a acção derivativa utilizada assegura a estabilidade do sistema.

Por seu lado, Song e Cai (1996) propuseram um controlador de posição/força de robots com juntas flexíveis e com atrito na superfície de restrição. Este controlador não necessita de conhecer todos os parâmetros físicos do sistema, mas só é apropriado para entradas “suaves” (*i.e.* com sinais que tenham derivadas finitas) e com vários sensores nas juntas, nos motores e no pulso (sensor de força).

Por último, Ge (1996) apresentou um trabalho sobre o controlo adaptativo de robots com juntas flexíveis, onde a lei de adaptação dos parâmetros é deduzida através do método da perturbação singular. Os resultados de simulações levam à caracterização do sistema de controlo como tendo saídas suaves e limitadas. Uma análise matemática do sistema mostra este ser estável para todos os robots com ligações (elos) rígidos e em que os seus parâmetros físicos podem não ser exactamente conhecidos.

2.2 Considerações sobre o atrito deslizamento-paragem

Nesta secção vai-se abordar a modelização e a simulação do atrito deslizamento-paragem (DP) presente nos robots. Devido a não existir um tratamento totalmente rigoroso, em geral, este atrito é visto de certa maneira como um fenómeno menos importante. Todavia, este atrito é responsável por muitos problemas associados ao controlo e à falta de exactidão dos sistemas electromecânicos. Por outro lado, este atrito pode ser utilizado para proporcionar um amortecimento a todas as frequências, mesmo para aquelas que se situam acima da largura de banda do sistema de controlo. O atrito DP (stick-slip) é representado como uma força que é uma função não-linear da velocidade relativa de dois corpos em contacto. A nível microscópico, a superfície de cada corpo pode ser imaginada como consistindo num conjunto de rugosidades que é interposto contra uma série de irregularidades da outra superfície (Figura 2.1).

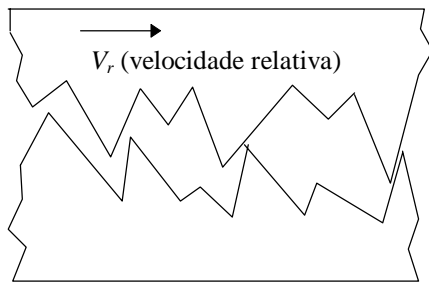


Figura 2.1

Vista microscópica do sistema físico que está por detrás do fenómeno de atrito.

A altura (média) das rugosidades, o grau de interpenetração e a distância média entre os “picos” depende das características físicas dos materiais e do meio lubrificante.

A representação elementar do atrito, como função de uma única variável constituída pela velocidade relativa V_r entre as duas superfícies em contacto, é mostrada na Figura 2.2a. Este modelo compreende o atrito estático (a faixa na origem das coordenadas), o atrito cinético (ou de Coulomb) que é constante com a velocidade e o atrito viscoso (proporcional à velocidade). Este último é compreendido pelas partes de atrito viscoso negativo (perto da origem) e viscoso positivo (para velocidades elevadas). Assim, o atrito de Coulomb é meramente um caso particular de atrito, altamente não-linear no ponto $V_r = 0$.

A descontinuidade na origem não é realista fisicamente, porque nesse ponto a força de atrito é dependente da posição. Além disso, também não é aceitável para se utilizar em simulação, pois introduz problemas numéricos. Uma abordagem para tornejar a descontinuidade tem sido a aproximação desta por uma região linear como se mostra na Figura 2.2b. Esta aproximação é usualmente conhecida como o “modelo de atrito DP clássico”.

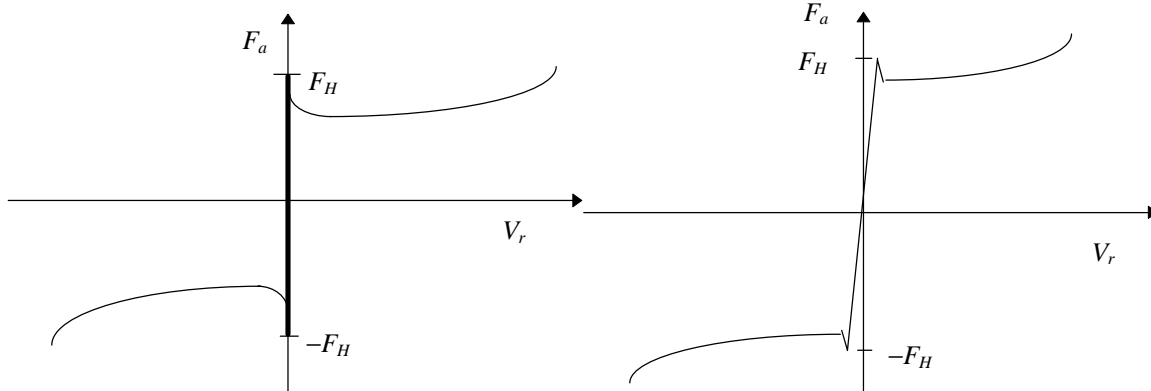


Figura 2.2a

Modelo do atrito DP mais vulgarizado.

Figura 2.2b

Aproximação do atrito DP na origem.

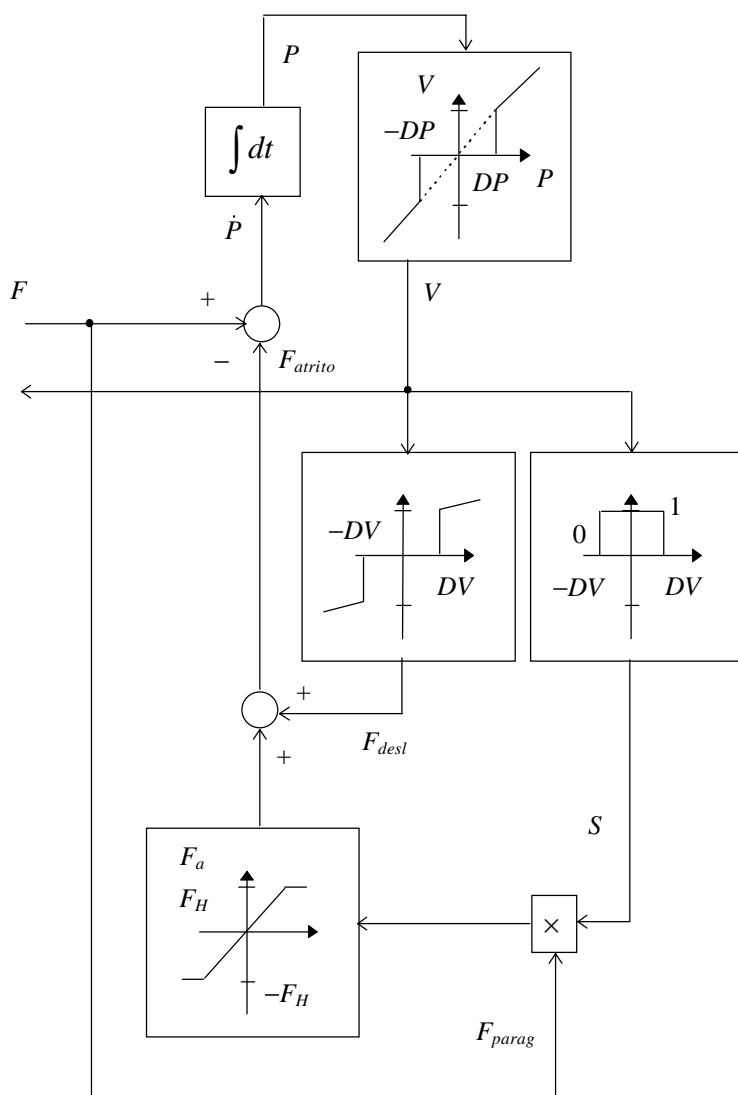


Figura 2.2c

Modelo para simulação de uma massa sujeita a atrito DP (Karnopp, 1985).

No entanto, este modelo revela limitações, pois permite que o corpo sofra acelerações para o caso das forças aplicadas serem inferiores à força de atrito estático (stiction) de pico F_H . Portanto, com este modelo não se pode prever, com grande exactidão, ciclos limite ou outros efeitos associados a paragem (sticking). Por outro lado, o declive muito acentuado em redor do ponto $V_r = 0$ pode requerer passos de tempo de integração muito pequenos e conduzir a dificuldades numéricas.

Devido a estas limitações foram efectuados alguns melhoramentos ao modelo de atrito clássico por vários investigadores. De entre as diferentes contribuições são de realçar os modelos de Karnopp (1985), representado na Figura 2.2c, e o de Dahl (descrito na subsecção seguinte).

2.2.1 O efeito de Dahl

Dahl (1968) estudou experimentalmente o atrito para pequenas rotações de rolamentos e concluiu que uma junção em atrito estático se comporta como uma mola. Isto é, a força é uma função linear do deslocamento, até um deslocamento (força) crítico no qual ocorre o deslizamento (break-away). Deste modo, para pequenas forças de controlo, um sistema constituído por duas peças (A e B) em contacto pode ser modelizado como se mostra na Figura 2.3.

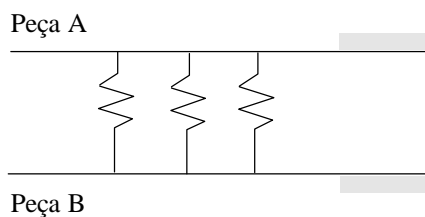


Figura 2.3

Contacto idealizado entre duas superfícies sujeitas a atrito estático.

2.2.2 O tempo de residência

Através de estudos experimentais (Armstrong-Hélouvry, 1991) conclui-se que quanto maior for o tempo de residência (dwell time) da força aplicada a uma peça com atrito, maior é a força de atrito estático, até um limite assintótico. O tempo de residência define-se

como sendo o intervalo de tempo que a força aplicada demora desde zero até atingir a força de atrito estático mantendo-se a velocidade relativa nula entre as peças em contacto físico. A força de atrito estático depende do tempo de residência como se mostra na Figura 2.4.

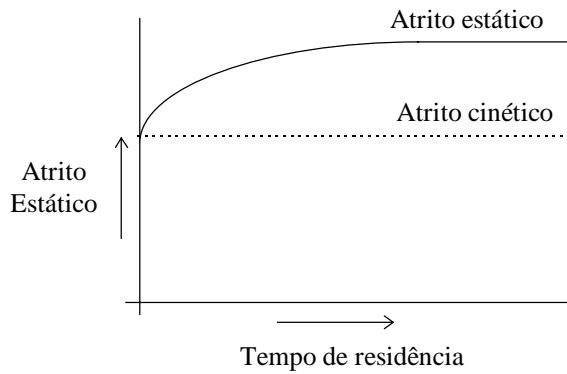


Figura 2.4

O atrito estático como uma função do tempo de residência.

2.2.3 Atraso e repetibilidade do atrito

Verifica-se experimentalmente que existe um tempo de atraso entre o nível da força aplicada a um sistema com atrito e a mudança de estado do sistema. Isto é, se em dado instante se aplicar uma força diferente a força de atrito só se modifica passado algum tempo (tempo de atraso). Este fenómeno deve-se ao efeito de Stribeck, o qual corresponde ao atrito viscoso negativo perto da origem (Figura 2.2a-b). Para ilustrar este fenómeno considere-se a Figura 2.5.

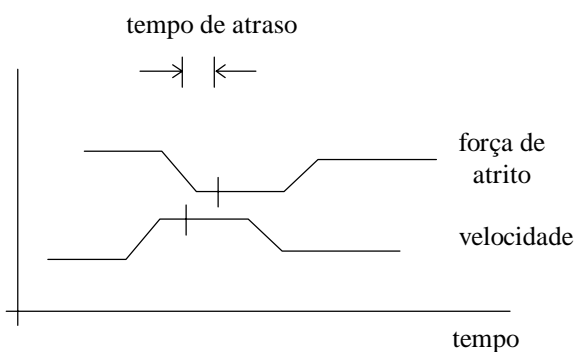


Figura 2.5

Relação temporal entre uma mudança na velocidade e a mudança correspondente no atrito.

Por outro lado, verifica-se, experimentalmente (Armstrong-Hélouvy, 1991) que o atrito é um fenómeno caracterizado por uma elevada repetibilidade. Consequentemente, o atrito deve ser modelizado em função da velocidade e da posição quando se pretende uma elevada exactidão.

2.3 Modelização de fenómenos de folgas

Quando está presente o fenómeno de folgas ('backlash' ou 'clearance') na engrenagem de um servomecanismo, o comportamento do sistema é não linear e pode resultar um ciclo limite pelo que o sistema não é o mais adequado para ser utilizado num controlo muito preciso de posição.

Um método frequentemente usado para diminuir os efeitos das folgas consiste em *partir* a roda dentada de comando em duas e utilizar uma mola de união, de tal modo que não se verifica uma perda de movimento (Figura 2.6).

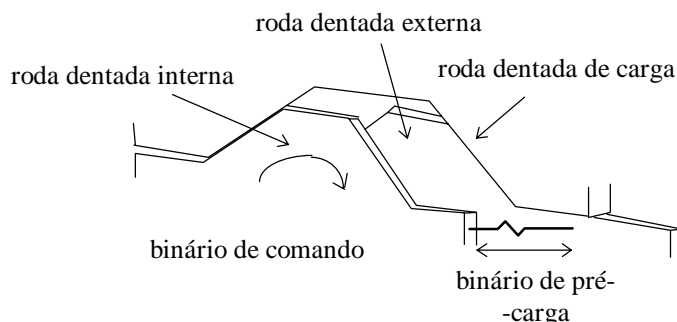


Figura 2.6

Rodas dentadas com molas.

Para este método ser bem sucedido a carga imposta pela mola deve manter as rodas dentadas continuamente em contacto com a roda dentada de carga. Todavia, podem ocorrer forças de atrito elevadas entre os dentes das rodas dentadas e, por consequência, pode verificar-se um desgaste considerável no mecanismo.

Nas subsecções seguintes mostra-se que o binário de pré-carga (Figura 2.6) pode ser reduzido para níveis inferiores aos usuais mantendo uma resposta satisfatória. Nesta ordem de ideias, é descrito um método para obter os valores do binário de pré-carga adequado para sistemas de controlo de posição.

2.3.1 As equações do sistema motor, engrenagem e carga

Considere-se um sistema composto por um motor e uma carga ligados através de uma engrenagem.

Quando a roda dentada ligada ao actuador está em contacto com a roda dentada de carga, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{J_M}{J_M + J_L}(T_M + T_L) = J_M \ddot{\theta}_M \\ \frac{J_L}{J_M + J_L}(T_M + T_L) = J_L \ddot{\theta}_L \\ \theta_L = \theta_M \end{cases} \quad (2.1)$$

onde os parâmetro J_M , T_M e θ_M são, respectivamente, a inércia do motor e da roda dentada de entrada, o binário do motor e o movimento angular do veio do motor (referidos ao veio de saída). Os parâmetros J_L , T_L e θ_L são, respectivamente, a inércia da carga e das rodas dentadas de saída, o binário de carga e o movimento angular do veio da carga (referidos ao veio de saída).

Quando a roda dentada de controlo passa através da zona de folga obtém-se:

$$\begin{cases} T_M - T_{pr} - K^*(\theta_L - \theta_M) = J_M \ddot{\theta}_M \\ T_L + T_{pr} + K^*(\theta_L - \theta_M) = J_L \ddot{\theta}_L \end{cases} \quad (2.2)$$

onde o parâmetro T_{pr} é o binário da mola de pré-carga e K^* é a constante de elasticidade da mola de pré-carga (referida ao veio de saída).

As condições seguintes determinam que conjunto de equações é aplicável em determinado momento.

1) *Condições de binário:* a partir da Figura 2.7 pode ser observado que:

$$T_M + T_C - T_{pr} = J_M \ddot{\theta}_M \quad (2.3a)$$

$$T_L - T_C + T_{pr} = J_L \ddot{\theta}_L \quad (2.3b)$$

onde o parâmetro T_C é o binário de reacção nos limites da folga.

Para o contacto se manter deverá verificar-se $T_C \geq 0$. Por outro lado, para que haja perda de contacto tem que verificar-se:

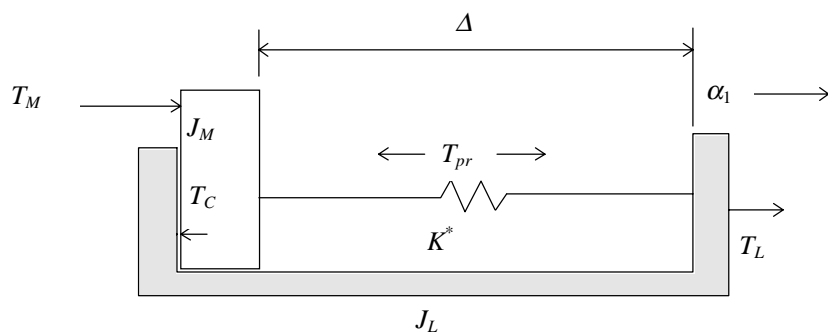


Figura 2.7

Movimento linear equivalente ao do sistema rotacional.

$$\left[\frac{J_L}{J_L + J_M} T_M - \frac{J_M}{J_L + J_M} T_L \right] > T_{pr} \quad (2.4)$$

De um modo semelhante, no lado oposto do espaço da roda dentada, a perda de contacto ocorre se se verificar:

$$\left[\frac{J_L}{J_L + J_M} T_M - \frac{J_M}{J_L + J_M} T_L \right] > T_{pr} + K^* \Delta \quad (2.5)$$

onde o parâmetro Δ é o ângulo de folga.

2) *Condições Angulares*: a condição $|\theta_L - \theta_M| < \Delta/2$ é suficiente para definir a posição do dente da roda dentada do motor como estando na zona de folga.

3) *Condições Fronteira*: de modo a estabelecer equações fronteira para as equações de movimento supõe-se que as colisões das engrenagens são inelásticas. Deste modo, pela lei da conservação do momento obtém-se:

$$\dot{\theta}_L = \frac{J_M}{J_M + J_L} \dot{\theta}_M + \frac{J_L}{J_M + J_L} \dot{\theta}_L \quad (2.6)$$

onde $\dot{\theta}_L$ é a velocidade da carga imediatamente depois da colisão e $\dot{\theta}_M$ e $\dot{\theta}_L$ são, respectivamente, a velocidade do motor e a velocidade da carga imediatamente antes da colisão.

2.3.2 Sistema em malha fechada

Nesta subsecção é considerado um sistema de controlo com uma realimentação unitária, e com uma dupla integração K/s^2 e um sistema de avanço de fase $(1+\alpha sT)/\alpha(1+sT)$ no caminho directo. Este sistema está representado esquematicamente na Figura 2.8.

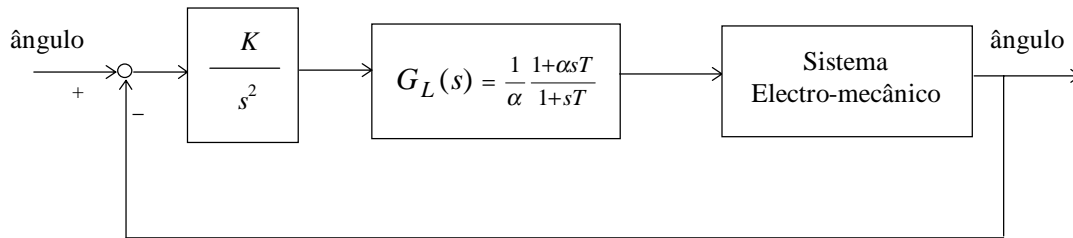


Figura 2.8

O sistema de controlo em malha fechada.

A função de transferência em malha fechada (FTMF) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1 + \alpha Ts}{\frac{\alpha T}{K} J_x s^3 + \frac{\alpha}{K} J_x s^2 + \alpha Ts + 1} \quad (2.7a)$$

$$J_x = J_M + J_L \quad (2.7b)$$

Definindo uma constante de tempo:

$$T_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha T}{K} J_x} \quad (2.8a)$$

e escolhendo

$$\alpha T = x_1 T_0 \quad (2.8b)$$

$$T = \frac{T_0}{x_2} \quad (2.8c)$$

resulta:

$$K = \frac{\alpha J_x}{x_2 T_0^2} \quad (2.8d)$$

$$\alpha = x_1 x_2 \quad (2.8e)$$

onde os parâmetros x_1 e x_2 são constantes. A FTMF vem então da forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1 + x_1 (sT_0)}{(sT_0)^3 + x_2 (sT_0)^2 + x_1 (sT_0) + 1} \quad (2.9)$$

A largura de banda B do sistema pode ser definida pela condição:

$$\text{Arg(FTMF)} = -90^\circ = \arctan \left\{ \frac{\omega^3 T_0^3 (1 - x_1 x_2)}{1 + \omega^2 T_0^2 (x_1^2 - x_2) - \omega^4 T_0^4 x_1} \right\} \quad (2.10a)$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2}{4\pi^2 B^2 x_1}} \quad (2.10b)$$

Considerando uma inércia $J_M = 1 \text{ Nms}^2$ e fazendo $x_1 = 2.466$ e $x_2 = 2.433$, resulta em valores realizáveis e satisfatórios para os parâmetros α e T .

Considerando também que o ângulo de folga tem pouca influência na largura de banda, os parâmetros variáveis do sistema são então reduzidos aos seguintes:

- i) a largura de banda B
- ii) a razão de inércias J_I/J_M
- iii) o ângulo de folga Δ

Logo, pode ser feito um estudo generalizado do valor do binário óptimo de pré-carga da forma como é afectado por estes três parâmetros.

2.3.3 Modelização da folga através de considerações dinâmicas *versus* cinemáticas

Nesta secção analisa-se um sistema com folga dinâmica e a sua contrapartida com folga cinemática.

Considere-se o sistema consistindo em duas massas sujeitas a folga dinâmica (Azenha e Machado, 1996d):

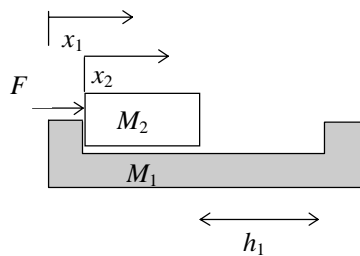


Figura 2.9

Sistema com duas massas e folga.

Uma colisão entre as massas M_1 e M_2 ocorre quando $x_1 = x_2$ ou $x_2 = h_1 + x_1$. Nesse caso podem-se calcular as velocidades das massas M_1 e M_2 depois do impacto (\dot{x}'_1 e \dot{x}'_2 , respectivamente) aplicando a lei de Newton:

$$\dot{x}'_{12} = -\varepsilon \dot{x}_{12}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.11)$$

onde $x_{12} = x_1 - x_2$ e ε é o coeficiente de restituição. Por outro lado, através do princípio da conservação da quantidade de movimento obtém-se:

$$M_1 \dot{x}'_1 + M_2 \dot{x}'_2 = M_1 \dot{x}_1 + M_2 \dot{x}_2 \quad (2.12)$$

Das duas equações anteriores vem:

$$\begin{cases} \dot{x}'_1 = \frac{\dot{x}_1(M_1 - \varepsilon M_2) + \dot{x}_2(1 + \varepsilon)M_2}{M_1 + M_2} \\ \dot{x}'_2 = \frac{M_1(1 + \varepsilon)\dot{x}_1 + (M_2 - \varepsilon M_1)\dot{x}_2}{M_1 + M_2} \end{cases} \quad (2.13)$$

A variação de energia depois do impacto (suposto instantâneo) ΔE_C vem:

$$\Delta E_C = \frac{M_1 M_2 (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2(M_1 + M_2)} \quad (2.14)$$

ou, em termos relativos,

$$\frac{\Delta E_C}{E_C} = \frac{M_1 M_2 (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{(M_1 + M_2)(M_1 \dot{x}_1^2 + M_2 \dot{x}_2^2)} \quad (2.15)$$

Note-se que a função anterior tem o seu valor mínimo para $M_1 = M_2 = M$, $\varepsilon = 0$:

$$\left. \frac{\Delta E_C}{E_C} \right|_{\min} = -\frac{1}{2} + \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \quad (2.16)$$

O gráfico de ΔE_C em função da constante de elasticidade dos materiais tem a forma da Figura 2.10.

Analisando a Figura 2.10 observa-se que a variação de energia após o choque é nula para $\varepsilon = 1$ e tem o seu valor mínimo para $\varepsilon = 0$.

A abordagem clássica à modelização do fenómeno da folga, ou seja, a sua formulação cinemática (Tao e Kokotovic, 1993) considera o diagrama de blocos da Figura 2.11.

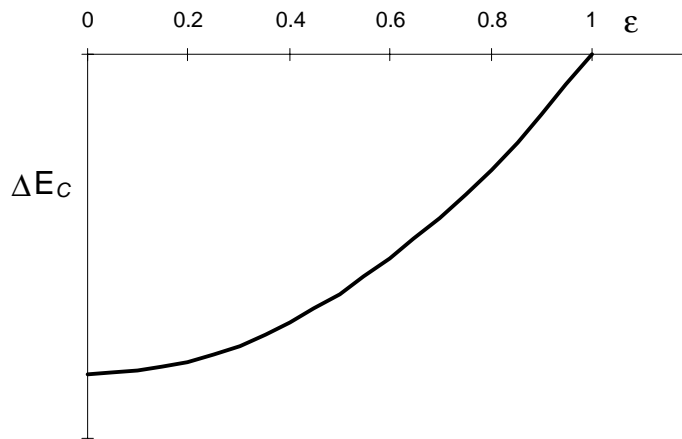


Figura 2.10

Gráfico da variação de energia ΔE_C em função da constante de elasticidade ϵ .

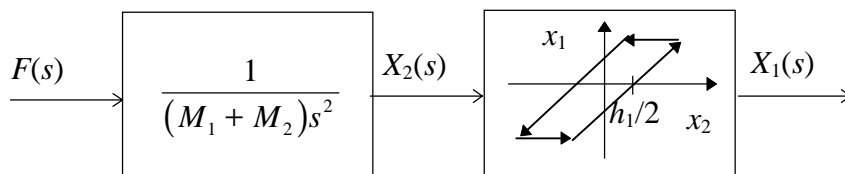


Figura 2.11

Diagrama de blocos do modelo de folga cinemática.

Consequentemente, este modelo de folga tem em conta a geometria no que diz respeito à abertura h_1 , mas despreza o efeito da dinâmica do impacto.

2.4 Modelização de fenómenos de flexibilidades

Nesta secção apresenta-se o modelo utilizado nas experiências para sistemas robóticos com juntas flexíveis.

O modelo completo de um robot com n gdl e n juntas flexíveis é dado pela seguinte equação (Readman, 1994):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ -\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde a dimensão das matrizes é $n \times n$ e a dos vectores é $n \times 1$. Na Figura seguinte apresenta-se graficamente o significado das variáveis de estado:

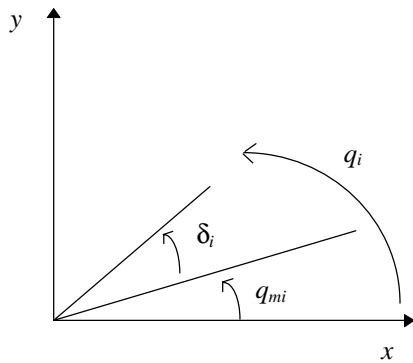


Figura 2.12

Representação gráfica das variáveis de estado de uma junta rotacional e flexível de robot.

Os vectores \mathbf{q} e \mathbf{q}_m representam, respectivamente, as coordenadas generalizadas das ligações e as dos motores ao passo que o vector $\delta = \mathbf{q} - \mathbf{q}_m$ corresponde à deflexão.

Uma simplificação no modelo consiste em fazer $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{N}_{21} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \mathbf{0}$ pelo que o modelo fica totalmente desacoplado.

O modelo simplificado do robot com juntas flexíveis utilizando as variáveis de estado \mathbf{q} e \mathbf{q}_m é traduzido pelas equações:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{B}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m (\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{K}_m (\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.18b)$$

onde \mathbf{J}_m , \mathbf{B}_m e \mathbf{K}_m são, respectivamente, as matrizes diagonais (de dimensão $n \times n$) das inércias dos motores e das transmissões, amortecimento e rigidez.

Nesta ordem de ideias, a Figura seguinte representa um robot com 1 gdl e com a junta flexível o qual será estudado no capítulo seguinte.

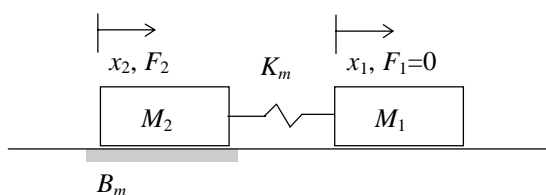


Figura 2.13

Modelo desacoplado com 1 gdl das juntas flexíveis.

2.5 Conclusões

Neste capítulo estudaram-se os modelos que descrevem matematicamente os fenómenos de atrito, folgas e flexibilidades presentes em sistemas robóticos. O objectivo fundamental destes modelos consiste em traduzir de um modo simples, eficiente em termos de cálculo numérico e o mais próximo possível da realidade física os fenómenos em termos das suas variáveis.

Estudou-se o fenómeno de atrito com os seus componentes mais importante como são o atrito viscoso, de Coulomb e estático. Analisou-se a eficiência em termos de simulação numérica do atrito, sendo considerada como apropriada de momento a abordagem introduzida por Karnopp (1985), pelo que será utilizada nos capítulos posteriores.

As características das folgas foram também estudadas nomeadamente através da transferência de energia (folga dinâmica) como do modo geométrico clássico (folga cinemática).

Por último, a flexibilidade foi modelizada através de uma mola e de um eventual coeficiente de amortecimento associados ao mecanismo de transmissão de força/binário.

3 Controlo de sistemas com atritos, folgas e flexibilidades

Neste capítulo estuda-se o comportamento de sistemas mecânicos com atritos, folgas e flexibilidades, sob acção de controladores PID e de controladores de estrutura variável (CEVs). Um objectivo fundamental deste estudo é analisar a ocorrência de ciclos limite e as condições necessárias à sua eliminação. Começa-se por investigar o desempenho de sistemas simples (*e.g.* com 1 gdl) e, de seguida, a sua complexidade, nomeadamente no número de gdl, é progressivamente alargada de modo a mostrar a eficiência das ferramentas de trabalho.

Nesta ordem de ideias, na secção 3.1 faz-se uma introdução ao estado da arte incluindo uma resenha bibliográfica aos temas abordados neste capítulo. De seguida, na secção 3.2 estuda-se os CEVs adoptados e na secção 3.3 expõe-se o método da função descritiva (FD) utilizado na previsão de ciclos limite em sistemas não lineares. Na secção 3.4 apresentam-se os resultados para sistemas não lineares com um gdl em sistemas de controlo de posição. Com base neste estudo, na secção 3.5 generalizam-se os conceitos a sistemas com um maior número de gdl. Por último, na secção 3.6 termina-se o capítulo com um síntese das principais conclusões que decorrem do estudo efectuado.

3.1 Introdução

Nesta secção começa-se por introduzir os fundamentos dos controladores de estrutura variável (CEVs) adoptados. Numa segunda fase, o método de análise de ciclos limite em sistemas realimentados não lineares através da função descritiva (FD) é apresentado.

3.1.1 Controladores de Estrutura Variável

Os CEVs (Variable Structure Controllers) têm vindo a ser objecto de interesse devido a possuírem propriedades boas, nomeadamente, revelarem elevada robustez, necessitarem de um baixo peso computacional e não requerem o conhecimento de um modelo do sistema a controlar. Os elementos principais de um CEV são a superfície de deslizamento (sliding surface) e a acção de controlo (control effort) como se verá na secção seguinte. Um CEV caracteriza-se por levar o sistema a controlar até ao seu ponto final de equilíbrio com uma dinâmica que é traduzida no plano de fase pela chamada superfície de deslizamento. Devido à existência de descontinuidades à saída do bloco de acção de controlo, devido ao CEV ser implementado como um sistema discreto e/ou a descontinuidades provocadas no próprio bloco, existe o fenómeno do aparecimento de uma oscilação de alta frequência (chattering) no sistema global. A sua introdução na teoria de controlo automático é atribuída a Utkin (1977) e a sua aplicação ao controlo de posição de sistemas robóticos deve-se a Young (1978). Posteriormente, Machado e de Carvalho (1988) propuseram um CEV “suave” com uma superfície de deslizamento de segunda ordem e uma acção de controlo do tipo PI, mais adequadas ao controlo de robots devido ao tipo de dinâmica envolvida.

Venkataraman e Gulati (1993) aplicaram os controladores de deslizamento terminal (terminal sliders) ao controlo de robots (algoritmos de concepção comparável aos CEVs), que atingem um erro nulo num intervalo de tempo finito. Os CEVs atingem um erro nulo assintoticamente mas são mais robustos e colocam menores exigências em termos de cálculo.

Blom e de Jager (1996) projectaram um CEV de segunda ordem, com superfície de deslizamento do tipo passa-banda, com uma robustez relativamente a erros dos parâmetros do sistema superior à de um algoritmo clássico PD. A sua sintonia é realizada através de métodos empíricos.

Denker e Ohnishi (1996) propuseram um CEV para robots, com a eliminação da frequência de oscilação (chattering) e uma diminuição do binário de controlo das juntas. Este algoritmo (SLIMSOC-Sliding Mode Self-Organising Controller) utiliza uma tabela de desempenho baseada em regras lógicas e na função da superfície de deslizamento e respectiva derivada temporal.

Zhao e Utkin (1996) estudaram a simulação e o controlo adaptativo de sistemas com CEVs em regime de deslizamento pois a abordagem clássica é pouco eficiente na presença da frequência de oscilação num sistema rígido podendo ocorrer problemas numéricos e, assim, ser difícil gerar os sinais adequados.

3.1.2 O Método da Função Descritiva

O método da FD, aplicado na análise de sistemas não lineares em malha fechada, faz parte da teoria de controlo moderno (Truxal, 1955; Ogata, 1970). Este estudo utiliza a FD, já que se trata de um método relativamente simples, ainda pouco suficientemente explorado na caracterização de sistemas dinâmicos não lineares nomeadamente sistemas MIMO (multiple-input-multiple-output). Deve ainda apontar-se que existe uma diferença qualitativa na análise de sistemas não lineares quando cinemáticos ou quando dinâmicos: nos primeiros a FD só depende da amplitude dos sinais, enquanto que nos segundos aquela depende simultaneamente da frequência e da amplitude.

Neste sentido, podem referir-se os trabalhos de Atherton (1975) e de Cox (1987) que constituem um importante contributo para a síntese de sistemas de controlo através da FD. Estas obras apresentam uma panorâmica do método da FD e comparam-no com outros métodos de análise de sistemas não lineares. Cox (1987) mostra que outros métodos (*e.g.* balanceamento harmónico e método da margem de ganho dependente da amplitude) são equivalentes à FD no caso de ocorrência de ciclos limite.

Nassirharand e Taylor (1991) estudaram a generalização do método da FD para sistemas MIMO não lineares; no entanto a carga computacional exigida pelos algoritmos coloca fortes limitações para o seu cálculo em tempo real actual, pelo que na prática, só é aplicável em sistemas de pequena dimensão e baixa complexidade, onde os sinais de entrada apresentem diferentes frequências.

Mais recentemente, Patra e Singh (1996) desenvolveram um procedimento gráfico sistemático para a previsão de ciclos limite em sistemas não lineares bidimensionais. Este

algoritmo utiliza a FD dos elementos não lineares do sistema e considera dois subsistemas internos SISO (single-input-single-output) na análise da estrutura interna.

3.2 Os Controladores de Estrutura Variável

Nesta secção estuda-se a FD de alguns CEVs desenvolvidos e aplicados neste trabalho.

Na Figura seguinte apresenta-se o diagrama de um CEV geral com os dois blocos principais: superfície de deslizamento (σ) e acção de controlo (τ).

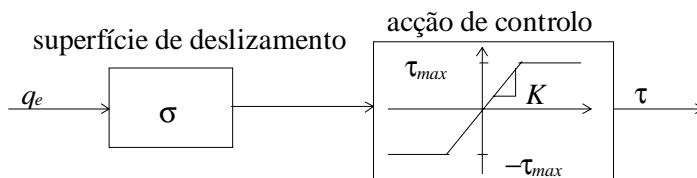


Figura 3.1

O diagrama de blocos de um CEV.

Para um CEV que adopte um modelo de primeira ordem (MPO) na superfície de deslizamento existem duas possibilidades de realizar a equação diferencial correspondente: utilizar o sinal do erro e a sua derivada (*i.e.* uma expressão do tipo Proporcional e Diferencial – PD) ou recorrer ao sinal do erro e o seu integral (*i.e.* uma expressão do tipo Proporcional e Integral – PI)

Para o caso do algoritmo CEV-MPO-PD resulta:

$$\sigma = \dot{q}_e + cq_e \quad (3.1)$$

Para o algoritmo CEV-MPO-PI resulta:

$$\sigma = q_e + c \int q_e dt \quad (3.2)$$

O parâmetro c é o valor próprio, q_e é a entrada do CEV e σ é a saída.

Alternativamente pode adoptar-se um CEV com modelo de segunda ordem (MSO). Também neste caso existem várias possibilidades de estabelecer a equação diferencial: utilizar o sinal do erro e as suas primeira e segunda derivadas (*i.e.* uma expressão do tipo PDD²) ou recorrer ao erro, o seu integral e a sua derivada (*i.e.* uma expressão do tipo PID).

Para o algoritmo CEV-MSO-PDD² resulta:

$$\sigma = \ddot{q}_e + 2\xi\omega_n\dot{q}_e + \omega_n^2 q_e \quad (3.3)$$

Para o CEV-MSO-PID obtém-se:

$$\sigma = \dot{q}_e + 2\xi\omega_n q_e + \omega_n^2 \int q_e dt \quad (3.4)$$

O parâmetro ξ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência natural.

O segundo bloco é constituído pela acção de controlo. Uma expressão usada frequentemente para este bloco é dada por:

$$\tau = \begin{cases} \tau_{max} & , \sigma \geq \tau_{max} / K \\ K\sigma & , |\sigma| < \tau_{max} / K \\ -\tau_{max} & , \sigma \leq -\tau_{max} / K \end{cases} \quad (3.5)$$

Por outras palavras, trata-se de um bloco do tipo “saturação”.

3.3 Estudo de sistemas não lineares através da função Descritiva

Nesta secção apresenta-se o método da FD e explora-se a sua aplicação no estudo de sistemas em malha fechada com as não-linearidades introduzidas no capítulo anterior.

3.3.1 Conceitos Gerais

É conhecido que muitas relações entre grandezas físicas são não-lineares, embora muitas vezes, estas sejam aproximadas por equações lineares, principalmente devido a simplificações matemáticas. Estas simplificações podem ser satisfatórias se as soluções resultantes estiverem de acordo com os resultados experimentais. De facto, Cox (1987) demonstrou que é este o caso quando os sistemas não-lineares são aproximados por uma FD onde os ciclos limite podem ser previstos com exactidão razoável. Deve ser notado que o método da FD não é a única possibilidade para a previsão de ciclos limite, existindo outros métodos tais como o estudo do conteúdo harmónico e o de margem de ganho dependente da amplitude. No entanto, na condição de ocorrência de um ciclo limite todos os métodos são equivalentes ao da FD (Cox, 1987). Nesta ordem de ideias, de seguida, introduzem-se os conceitos fundamentais do método de análise pela FD.

Suponha-se que a entrada de um elemento não-linear é sinusoidal. A saída desse elemento não é, em geral, sinusoidal. Considere-se que a saída é periódica com o mesmo período da entrada, contendo harmónicos de ordem superior, em adição à componente harmónica fundamental. Na análise da FD, considera-se que apenas a componente harmónica fundamental da saída é significativa. Tal consideração é muitas vezes válida uma vez que os harmónicos de maior ordem na saída de um elemento não-linear são usualmente de menor amplitude que a do harmónico fundamental. Por outro lado, um grande número de sistemas de controlo são do tipo “filtro passa-baixo” resultando que os harmónicos de maior ordem ficam ainda mais atenuados.

A FD (ou FD sinusoidal) de um elemento não-linear pode ser definida como a razão complexa das componentes harmónicas fundamentais da saída $Y_1 e^{j\Phi_1}$ e da entrada $a e^{j\theta}$, isto é:

$$N = \frac{Y_1}{a} \angle \Phi_1 \quad (3.6)$$

onde o símbolo N representa a FD, a é a amplitude da sinusóide de entrada e Y_1 e Φ_1 são a amplitude e a fase da componente harmónica fundamental da saída, respectivamente. Várias FDs de elementos não-lineares simples podem ser encontrados em Atherton (1975).

Em geral, a FD pode ser calculada a partir da expressão:

$$N(a, \omega) = \frac{2}{aT} \int_{t_1}^{T+t_1} y(\omega t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.7)$$

onde ω é a frequência angular dos sinais da entrada e da saída e $T = 2\pi/\omega$.

Uma vez calculada, a FD pode ser usada na análise de estabilidade de um sistema de controlo não-linear. Considere-se o controlador básico representado na Figura seguinte onde o bloco N denota a FD do elemento não-linear e G a Função de Transferência do algoritmo linear.

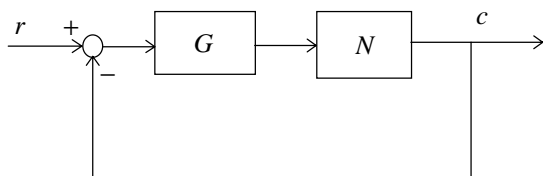


Figura 3.2

Sistema de controlo não linear.

Se os harmónicos de maior ordem forem suficientemente atenuados, N pode ser tratada como um ganho variável (real ou complexo) obtendo-se para o sistema em malha fechada:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)} \quad (3.8)$$

A equação característica é:

$$1 + NG(j\omega) = 0 \quad (3.9)$$

ou

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N} \quad (3.10)$$

No caso de se verificar esta equação o sistema exhibe um ciclo limite que poderá ser estável ou instável de acordo com uma análise gráfica ou matemática/gráfica (Atherton, 1975).

3.3.2 A \mathcal{D} dos controladores

Nesta subsecção apresentam-se as FDs dos controladores utilizados neste estudo. Para a superfície de deslizamento consideram-se os quatro casos indicados (MPO-PD, MPO-PI, MSO-PDD², MSO-PID) e para a acção de controlo o bloco “saturação”. A FD para o CEV-MPO-PD é dada por:

$$\begin{aligned}
 N(a, \omega) &= K(c + j\omega), \quad \text{para } a \leq \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{c^2 + \omega^2}} \\
 N(a, \omega) &= \frac{2Kc\phi_1}{\pi} - \frac{K\sqrt{4\pi^2 + c^2T^2}}{\pi T} \sin(2\phi_1) \cos(\phi_2) + \\
 &+ \frac{4\tau_{max}}{\pi a} \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + j \left[\frac{4K\phi_1}{T} + \frac{K\sqrt{4\pi^2 + c^2T^2}}{\pi T} \sin(2\phi_1) \sin(\phi_2) + \right. \\
 &\left. + \frac{4\tau_{max}}{\pi a} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \right], \quad \text{para } a > \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{c^2 + \omega^2}} \\
 \phi_1 &= \arcsin\left(\frac{\tau_{max}T}{aK\sqrt{4\pi^2 + c^2T^2}}\right), \quad \phi_2 = \arctan\left(\frac{2\pi}{cT}\right), \\
 q_e &= a \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A FD para o CEV-MPO-PI é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 N(a, \omega) &= K\left(1 + \frac{c}{j\omega}\right), \quad \text{para } a \leq \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{1 + \frac{c^2}{\omega^2}}} \\
 N(a, \omega) &= \frac{2\alpha K\sqrt{c^2 + \omega^2} \cos\phi}{\pi\omega} - \frac{K\sqrt{c^2 + \omega^2} \sin(2\alpha) \cos\phi}{\pi\omega} + \\
 &+ \frac{4\tau_{max} \cos\alpha \cos\phi}{\pi a} + j \left[\frac{K\sqrt{c^2 + \omega^2} \sin(2\alpha) \sin\phi}{\pi\omega} - \right.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\left. -\frac{2\alpha K\sqrt{c^2 + \omega^2} \sin \phi}{\pi\omega} - \frac{4\tau_{max} \cos \alpha \sin \phi}{\pi a} \right], \text{ para } a > \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{1 + \frac{c^2}{\omega^2}}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\tau_{max}}{aK\sqrt{1 + \frac{c^2}{\omega^2}}}, \quad \phi = \arctan \frac{c}{\omega}$$

Para o CEV-MSO-PDD² a FD vem:

$$N(a, \omega) = K[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\omega\xi\omega_n], \quad a \leq \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2]}}$$

$$N(a, \omega) = \frac{2(T^2\omega_n^2 - 4\pi^2)K}{\pi T^2} \operatorname{sgn}(a\xi\omega_n\alpha)\phi_1 +$$

$$+ \frac{K\sqrt{\alpha}}{\pi T^2} \sin(2\phi_1) \sin(\phi_2) - \frac{4\tau_{max}}{\pi a} \sin(\phi_2) \cos(\phi_1) +$$

$$+ j \left[8 \operatorname{sgn}(a\alpha) \frac{K\xi\omega_n}{T} \phi_1 - \frac{K\sqrt{\alpha}}{\pi T^2} \sin(2\phi_1) \cos(\phi_2) + \frac{4\tau_{max}}{\pi a} \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \right], \quad (3.13)$$

$$a > \frac{\tau_{max}}{K\sqrt{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2]}}$$

$$\alpha = 16\pi^4 + 8\pi^2 T^2 \omega_n^2 (2\xi^2 - 1) + T^4 \omega_n^4,$$

$$\beta = 16\pi^4 a^2 K^2 + 8\pi^2 a^2 K^2 T^2 \omega_n^2 (2\xi^2 - 1) + T^2 (a^2 K^2 \omega_n^2 - \tau_{max}^2)$$

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{T^2 \tau_{max}}{\sqrt{\beta}} \right), \quad \phi_2 = \arctan \left(\frac{4\pi^2 - T^2 \omega_n^2}{4\pi T \xi \omega_n} \right),$$

$$\omega = 2\pi / T$$

Por último, para o CEV-MSO-PID a expressão da FD resulta:

$$N(a, \omega) = \begin{cases} K \left[2\xi\omega_n + j \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega} \right) \right], & a \leq a_{\max} \\ N_{PD}(a, \omega), & a > a_{\max}, \omega \geq \omega_n \\ N_{PI}(a, \omega), & a > a_{\max}, \omega < \omega_n \end{cases}$$

$$a_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{K \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega} \right)^2}}$$

$$N_{PD}(a, \omega) = -\frac{k_1 \sin(2\alpha) \cos \phi}{\pi\omega} - \frac{(2\alpha - \pi)k_1 \cos \phi}{\pi\omega} + \frac{4\tau_{\max} \sin \alpha \cos \phi}{\pi a} +$$

$$+ j \left[-\frac{k_1 \sin(2\alpha) \sin \phi}{\pi\omega} - \frac{(2\alpha - \pi)k_1 \sin \phi}{\pi\omega} + \frac{4\tau_{\max} \sin \alpha \sin \phi}{\pi a} \right],$$

$$k_1 = K \sqrt{4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}, \quad (3.14)$$

$$\phi = \arctan \frac{\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}}{2\xi\omega_n}, \quad \alpha = \arccos \frac{\tau_{\max}}{aK \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega} \right)^2}}$$

$$N_{PI}(a, \omega) = -\frac{k_1 \sin(2\alpha) \cos \phi}{\pi\omega} + \frac{2\alpha k_1 \cos \phi}{\pi\omega} + \frac{4\tau_{\max} \cos \alpha \cos \phi}{\pi a} -$$

$$- j \left[-\frac{k_1 \sin(2\alpha) \sin \phi}{\pi\omega} + \frac{2\alpha k_1 \sin \phi}{\pi\omega} + \frac{4\tau_{\max} \cos \alpha \sin \phi}{\pi a} \right],$$

$$k_1 = K \sqrt{4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2},$$

$$\phi = \arctan \frac{\frac{\omega_n^2}{\omega} - \omega}{2\xi\omega_n}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\tau_{\max}}{aK \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega} \right)^2}}$$

Os gráficos seguintes mostram as FDs $[N(a, \omega)]$ dos CEVs anteriores no plano de Nyquist para $K = 10$, $\tau_{\max} = 10$ e $c = 2.5 \text{ s}^{-1}$ (para os MPOs) ou $\xi = 2.5$ e $\omega_n = 10 \text{ rad s}^{-1}$ (para os MSOs).

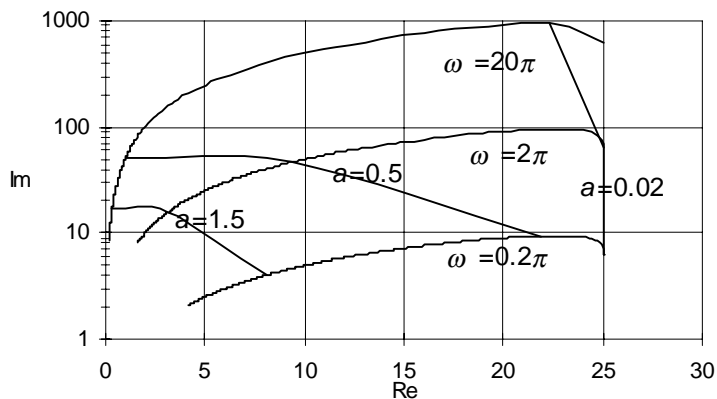


Figura 3.3

A FD $[N(a, \omega)]$ de um CEV-MPO-PD ($K = 10$, $\tau_{max} = 10$, $c = 2.5 \text{ s}^{-1}$).

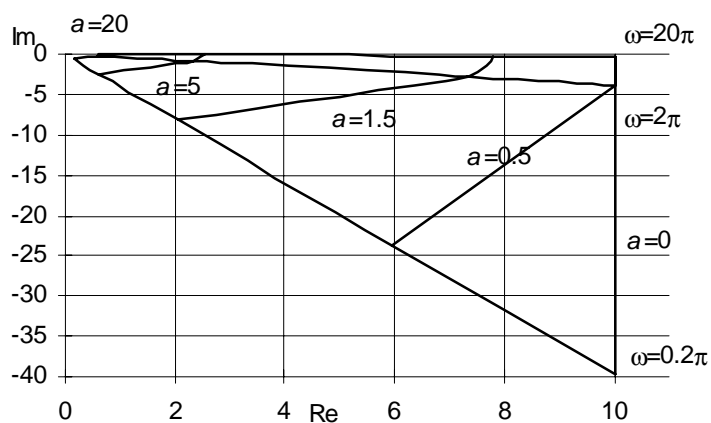


Figura 3.4

A FD $[N(a, \omega)]$ de um CEV-MPO-PI ($K = 10$, $\tau_{max} = 10$, $c = 2.5 \text{ s}^{-1}$).

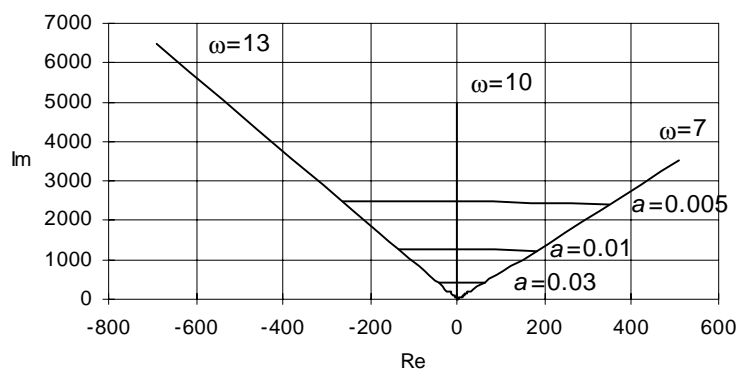


Figura 3.5

A FD $[N(a, \omega)]$ de um CEV-MSO-PDD² ($K = 10$, $\tau_{max} = 10$, $\xi = 2.5$ e $\omega_n = 10 \text{ rad s}^{-1}$).

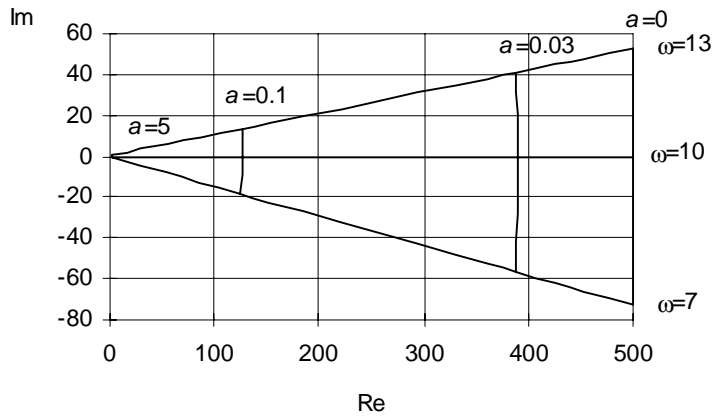


Figura 3.6

A FD $[N(a, \omega)]$ de um CEV-MSO-PID ($K = 10$, $\tau_{max} = 10$, $\xi = 2.5$ e $\omega_n = 10 \text{ rad s}^{-1}$).

O desempenho destes controladores será posteriormente comparado com o de um controlador PID clássico:

$$\tau = K_D \dot{q}_e + K_P q_e + K_I \int q_e dt \quad (3.15)$$

Neste caso a FD será simplesmente a sua resposta em frequência, uma vez que esta não depende da amplitude a de entrada, ou seja, o controlador comporta-se como um sistema dinâmico linear:

$$N_{PID}(\omega) = K_P + j \left(K_D \omega - \frac{K_I}{\omega} \right) \quad (3.16)$$

3.3.3 A D dos sistemas não lineares

Nesta subsecção apresenta-se a FD e o conteúdo harmónico do sinal de saída para os sistemas não lineares referidos no capítulo dois.

3.3.3.1 Sistemas com atrito

Considere-se um sistema composto por uma massa M , movendo-se num plano horizontal, sob o efeito de um atrito de Coulomb (K) mais atrito viscoso (B), conforme indicado nas Figuras seguintes.

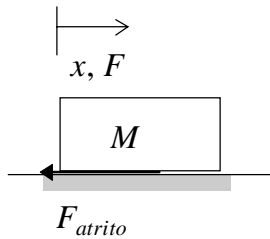


Figura 3.7

Sistema massa com atrito não linear.

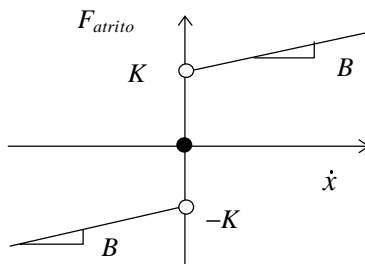


Figura 3.8

Modelo do atrito de Coulomb e viscoso.

A resposta de posição em regime permanente $x(t)$, a uma força de entrada sinusoidal $F = a \cos(\omega t)$, vem:

$$x(t) = \begin{cases} \alpha_1 \sin(\omega t + \phi) + k_1 + k_2 e^{-\frac{B}{M}t} - \frac{K}{B}t, & \dot{x} > 0 \\ \alpha_1 \sin(\omega t + \phi) + k_3 + k_4 e^{-\frac{B}{M}t} + \frac{K}{B}t, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Os parâmetros ϕ , k_1 , k_2 , k_3 e k_4 não podem ser calculados analiticamente pelo que a FD tem de ser determinada numericamente.

Considere-se, por exemplo, o sistema massa-atrito com parâmetros $M = 9 \text{ Kg}$, $B = 0.5 \text{ Ns/m}$, $K = 5 \text{ N}$. Neste caso, a Figura 3.9 mostra a função $-1/N(a,\omega)$ no plano de Nyquist para vários valores de a e de ω .

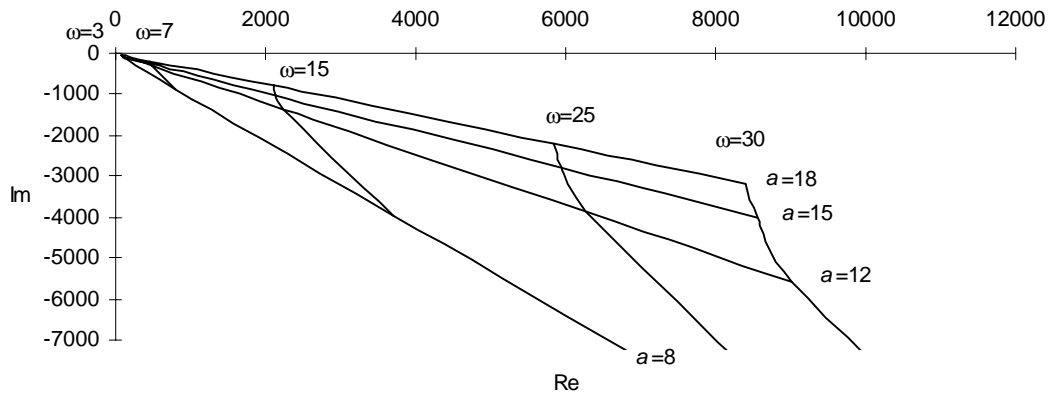


Figura 3.9

Função $-1/N(a,\omega)$ para sistema massa-atrito de Coloumb e viscoso ($M = 9 \text{ Kg}$, $B = 0.5 \text{ Ns/m}$, $K = 5 \text{ N}$).

A Figura 3.10 representa o conteúdo harmónico c_i do sinal de saída $x(t)$ do sistema, isto é:

$$F(t) = a \cos(\omega t) \tag{3.18a}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cos(i\omega t + \phi_i) \tag{3.18b}$$

$$c_i = \left| \frac{X_i}{a} \right|, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3.18c}$$

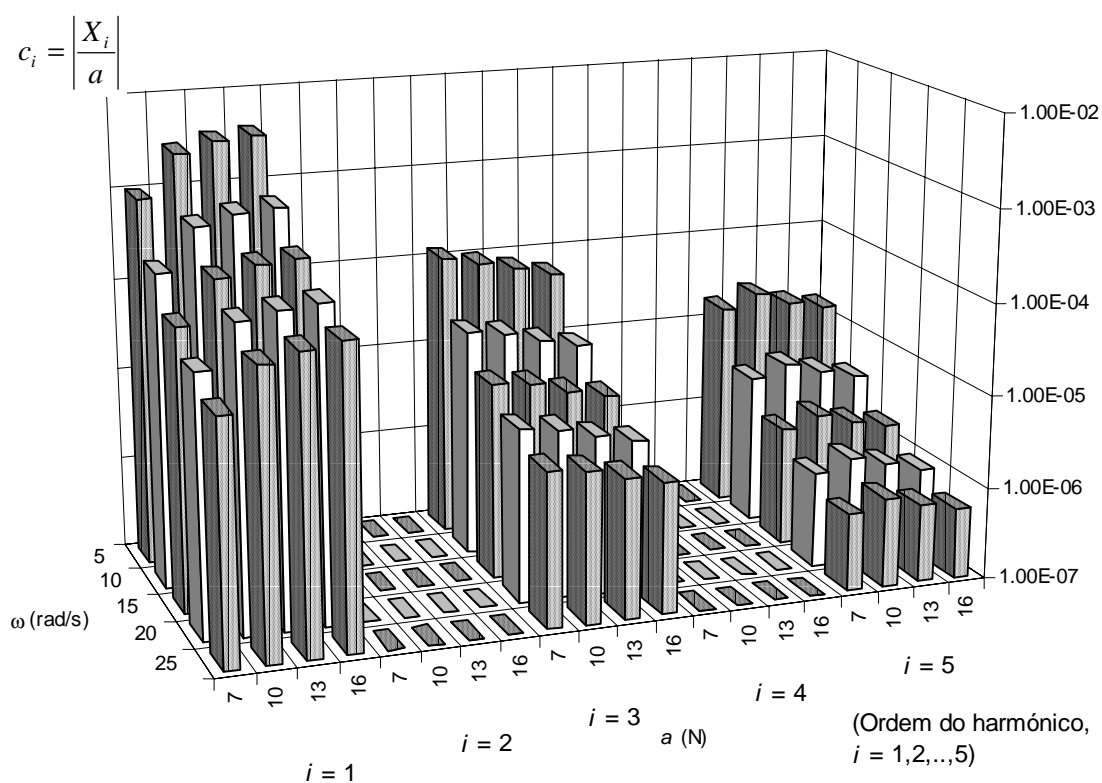


Figura 3.10

Conteúdo harmónico c_i da resposta $x(t)$ do sistema massa-atrito à entrada $F(t)$ ($M = 9$ Kg, $B = 0.5$ Ns/m, $K = 5$ N).

Como se pode observar, a resposta do sistema apresenta simetria de meia-onda em regime permanente e os harmónicos perdem rapidamente significado quando a sua ordem aumenta.

Para um modelo de atrito tendo em linha de conta o atrito estático, e com os parâmetros $F_H = 6$ N e $DV = 0.0025$ m/s (modelo de Karnopp, 1985) as Figuras 3.11 e 3.12 mostram, respectivamente, o traçado de Nyquist e o conteúdo harmónico de $x(t)$.

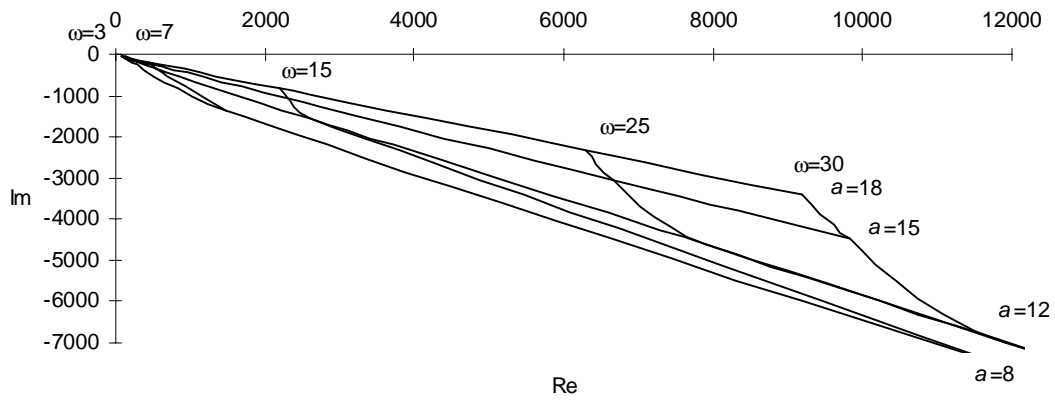


Figura 3.11

Função $-1/N(a, \omega)$ para sistema massa-atrito de Karnopp (1985) ($M = 9$ Kg, $B = 0.5$ Ns/m, $K = 5$ N, $F_H = 6$ N, $DV = 0.0025$ m/s).

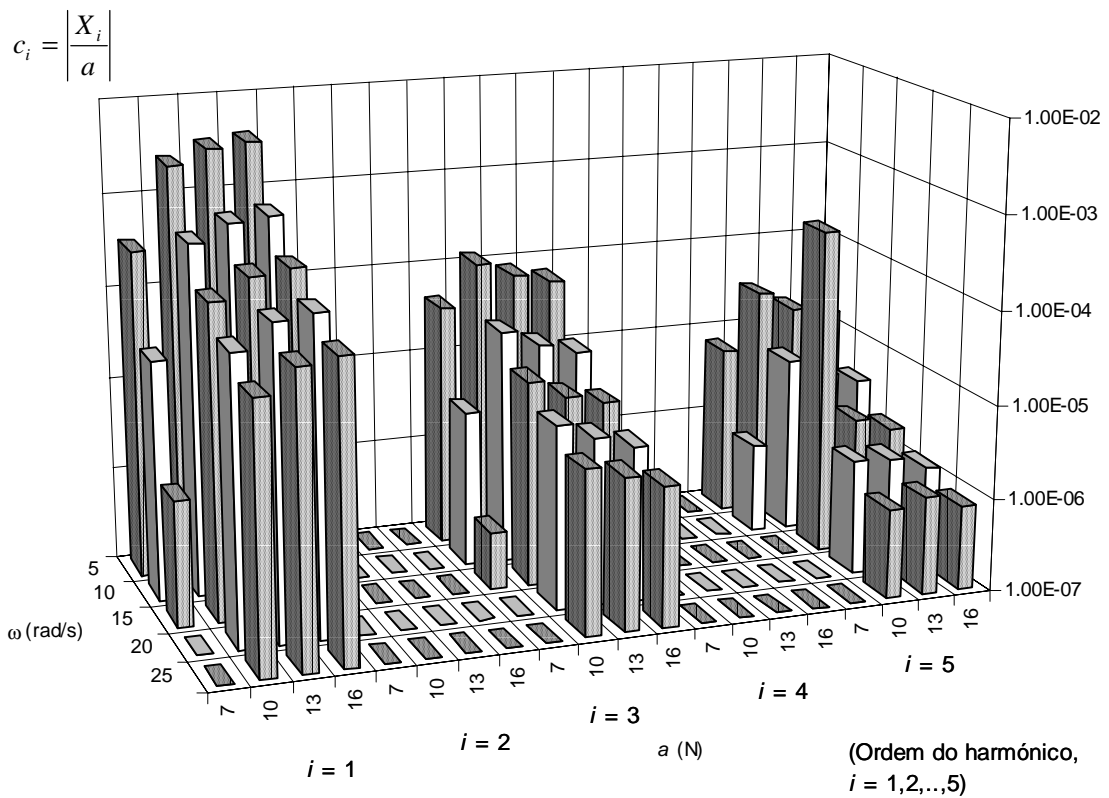


Figura 3.12

Conteúdo harmónico c_i da resposta $x(t)$ do sistema massa-atrito à entrada $F(t)$ ($M = 9$ Kg, $B = 0.5$ Ns/m, $K = 5$ N, $F_H = 6$ N, $DV = 0.0025$ m/s).

Como se pode observar, a resposta tem também simetria de meia-onda, mas para baixas frequências e pequenas amplitudes a resposta é nula.

A expressão analítica de $-1/N(a, \omega)$ para este sistema (obtida numericamente) é aproximadamente dada por:

$$-\frac{1}{N_{avrio}} = \frac{a^{3/2} M \omega^2}{(a - 1.037 F_H - 2.130 MDV \omega)^{3/2}} \left[33.89 \left(\frac{K}{K+a} \right)^2 - 10.97 \left(\frac{K}{K+a} \right) + 1 \right] - j \frac{a^{3/2} \left[0.5275 \left(\frac{K}{K+a} \right) M \omega^2 + B \omega \right]}{(a - 1.037 F_H - 2.130 MDV \omega)^{3/2}} \left[18.987 \left(\frac{K}{K+a} \right)^2 - 4.6374 \left(\frac{K}{K+a} \right) + 1 \right], \quad (3.19)$$

$$a > 1.037 F_H - 2.130 MDV \omega,$$

$+\infty - j\infty$, para os restantes valores dos parâmetros.

3.3.3.2 Sistemas com folgas

Considere-se um sistema composto por duas massas M_1 e M_2 sujeitas a uma folga dinâmica h_1 .

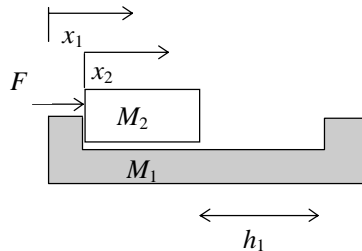


Figura 3.13

Sistema com duas massas e folga.

Para este sistema encontrou-se a função $-1/N(a, \omega)$ numericamente. A entrada $F(t) = a \cos(\omega t)$ foi aplicada à massa M_2 e a posição de saída x_1 foi observada. Para os parâmetros $M_1 = 8$ Kg, $M_2 = 1$ Kg, $\varepsilon = 0.2$, $h_1 = 0.00018$ m as Figuras 3.14 e 3.15 mostram, respectivamente, $-1/N(a, \omega)$ no plano de Nyquist e o conteúdo harmónico de $x(t)$ para vários valores de a e de ω .

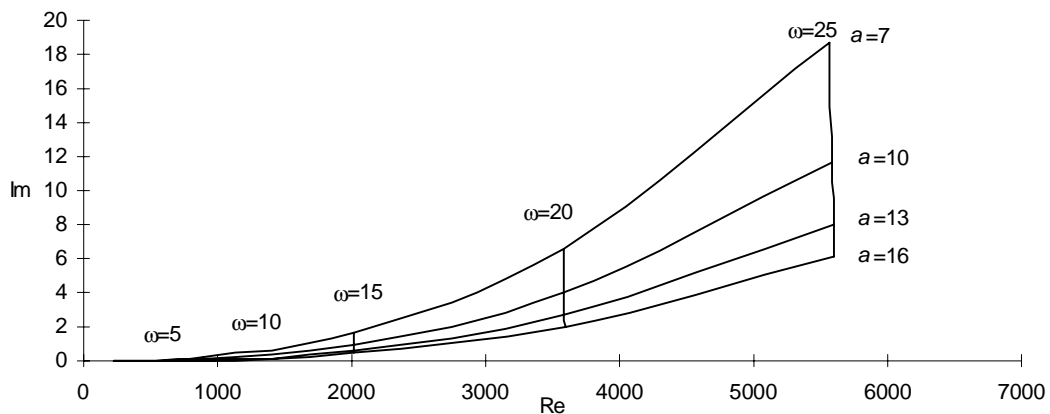


Figura 3.14

Função $-1/N(a, \omega)$ para sistema massas com folga dinâmica ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.2$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$).

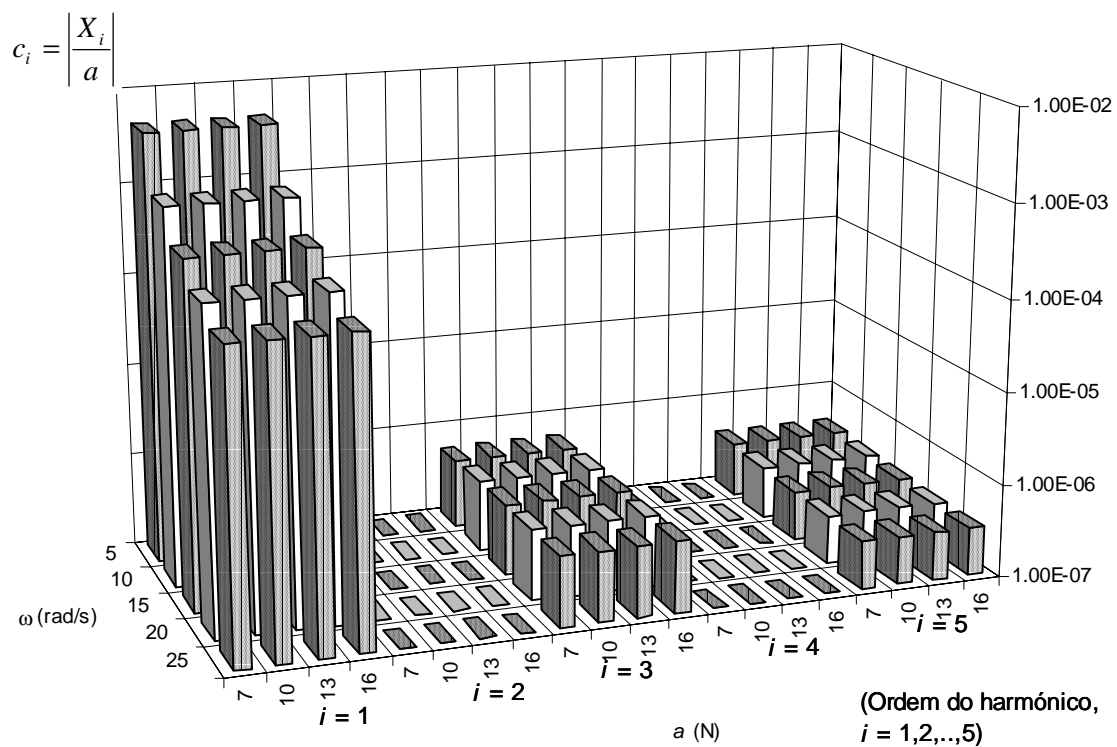


Figura 3.15

Conteúdo harmónico c_i da resposta $x(t)$ do sistema massas com folga dinâmica à entrada $F(t)$ ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.2$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$).

Para analisar o comportamento do sistema em função do coeficiente de restituição, ϵ , as Figuras 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19 apresentam, respectivamente, $-1/N(a,\omega)$ no plano de Nyquist e o conteúdo harmónico de $x(t)$ para vários valores de a e de ω , nos casos de $\epsilon = 0.5$ e de $\epsilon = 0.8$.

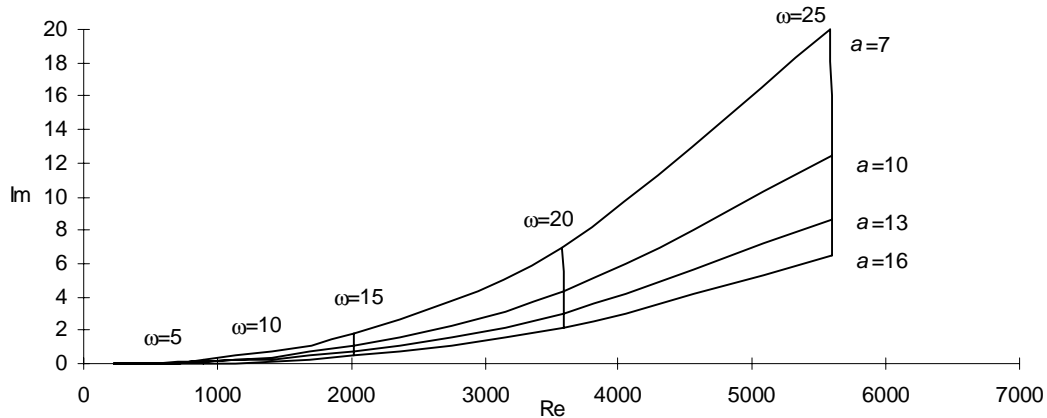


Figura 3.16

Função $-1/N(a,\omega)$ para sistema massas com folga dinâmica ($M_1 = 8$ Kg, $M_2 = 1$ Kg, $\epsilon = 0.5$, $h_1 = 0.00018$ m).

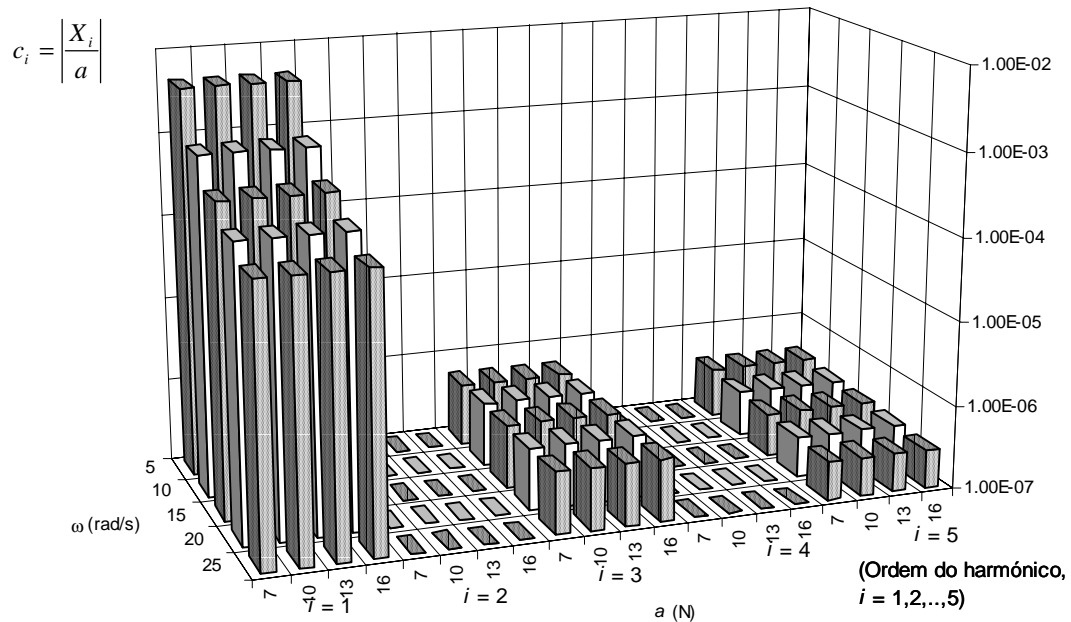


Figura 3.17

Conteúdo harmónico c_i da resposta $x(t)$ do sistema massas com folga dinâmica à entrada $F(t)$ ($M_1 = 8$ Kg, $M_2 = 1$ Kg, $\epsilon = 0.5$, $h_1 = 0.00018$ m).

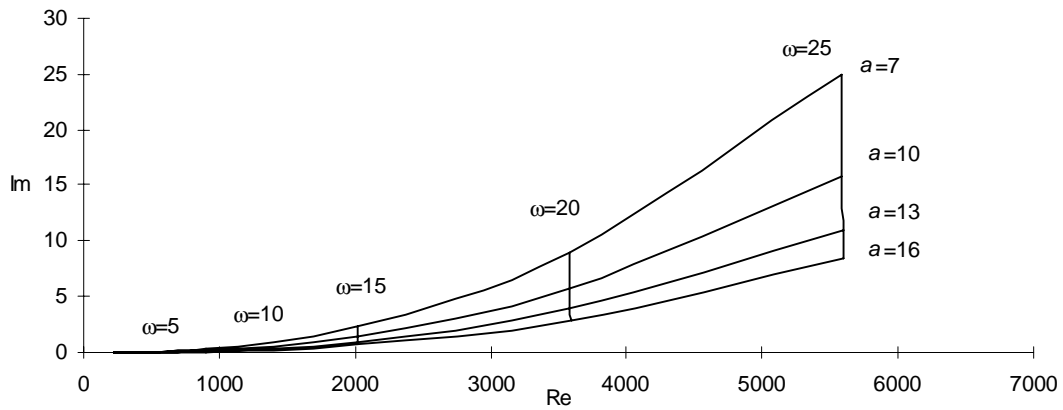


Figura 3.19

Função $-1/N(a, \omega)$ para sistema massas com folga dinâmica ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.8$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$).

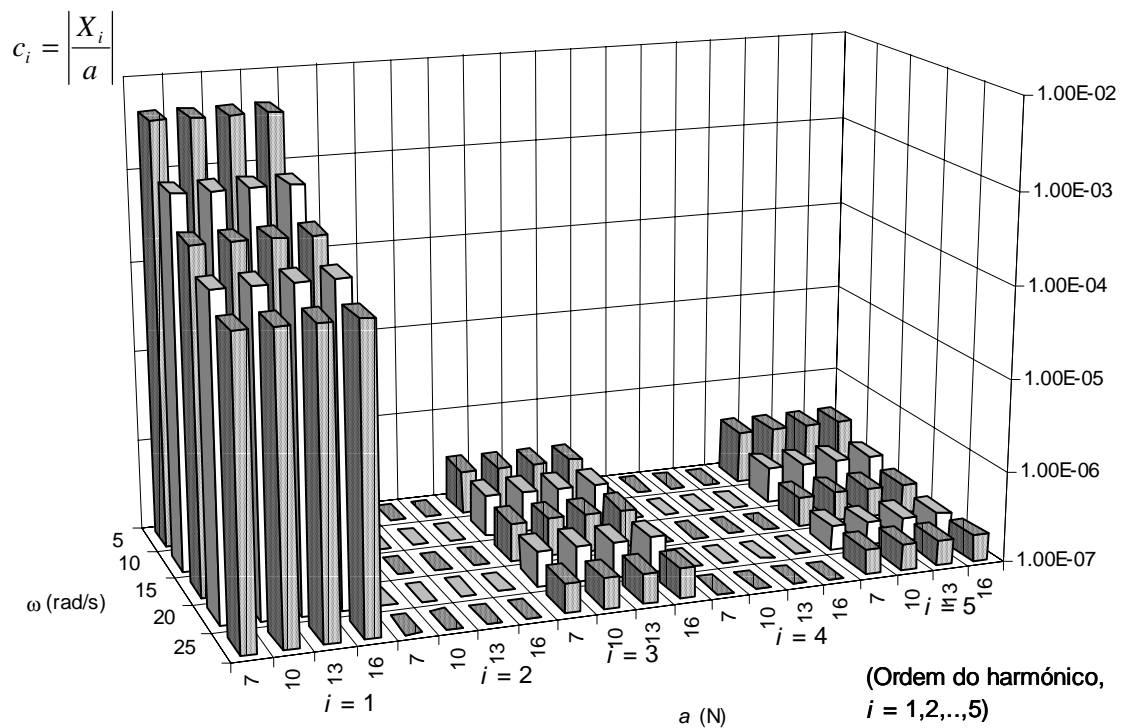


Figura 3.20

Conteúdo harmónico c_i da resposta $x(t)$ do sistema massas com folga dinâmica à entrada $F(t)$ ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.8$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$).

A resposta do sistema apresenta, mais uma vez, simetria de meia-onda em regime permanente e os harmónicos perdem rapidamente significado quando a sua ordem aumenta.

No entanto, para valores de ε perto da unidade e à medida que os valores da folga h_1 aumentam o sistema tem um comportamento ‘caótico’, porque os harmónicos de ordem superior apresentam um valor significativo.

A expressão analítica de $-1/N(a,\omega)$ obtida através de dados experimentais vem aproximadamente:

$$-\frac{1}{N_{folgas}} = (M_1 + M_2)\omega^2 \frac{(1 + 12.72\varepsilon h_1)(1 + 5.369ah_1)}{(1 + 73.91h_1 + 771.0h_1^2)} + j0.0113(M_1 + M_2)\omega^4 \frac{(a + 9.747)^{3/2}}{a^{3/2}} \frac{(h_1 + 5.749h_1^2)}{1 - 0.2469\varepsilon + 0.5157\varepsilon^2}, \quad (3.20)$$

$$a \geq 0.5h_1M_2\omega^2, \varepsilon \leq 0.9,$$

$$-\frac{1}{N_{folgas}} = (M_1 + M_2)\omega^2 \frac{(1 + 12.72\varepsilon h_1)(1 + 5.369ah_1)}{(1 + 73.91h_1 + 771.0h_1^2)} + j\infty,$$

$$a < 0.5h_1M_2\omega^2, \varepsilon \leq 0.9$$

A expressão anterior não tem significado para $\varepsilon > 0.9$ uma vez que a resposta $x(t)$ nunca atinge um regime permanente sendo, de facto, muito irregular, quase ‘caótica’.

Para concluir esta subsecção vai-se comparar o gráfico de $-1/N$ para dois tipos distintos de abordagem relativa a este sistema, isto é, considerando a folga entrando em linha de conta com a dinâmica do choque ou como um fenómeno puramente cinemático.

Considere-se o modelo do sistema com folga cinemática da Figura 3.21.

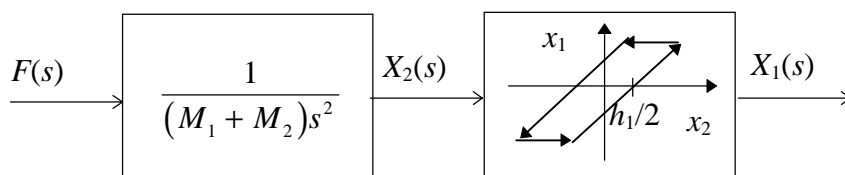


Figura 3.21

Diagrama de blocos do modelo de folga cinemática.

A partir da FD da folga cinemática calculada por Atherton (1975) obtém-se para $-1/N$ a expressão:

$$-\frac{1}{N_{folgas}} = (M_1 + M_2)\omega^2 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - j \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1 + f_1 \left(\frac{\bar{a} - h_1}{\bar{a}} \right)}{2} \\ \alpha_2 = \frac{h_1 (h_1 - 2\bar{a})}{\bar{a}^2 \pi} \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\bar{a} = \frac{a}{(M_1 + M_2)\omega^2} \quad (3.23)$$

$$f_1(\rho) = \begin{cases} 1 & , \rho \geq 1 \\ \frac{1}{\pi} [2\alpha + \sin(2\alpha)] & , |\rho| < 1 \\ -1 & \rho \leq -1 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\alpha = \arcsin(\rho) \quad (3.25)$$

onde $\rho \in \Re$ é o argumento da função f_1 .

A Figura 3.22 compara a função $-1/N$ dos sistemas com folga dinâmica e com folga cinemática, no traçado de Nyquist, para $M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.2$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$ e $a = 16 \text{ N}$.

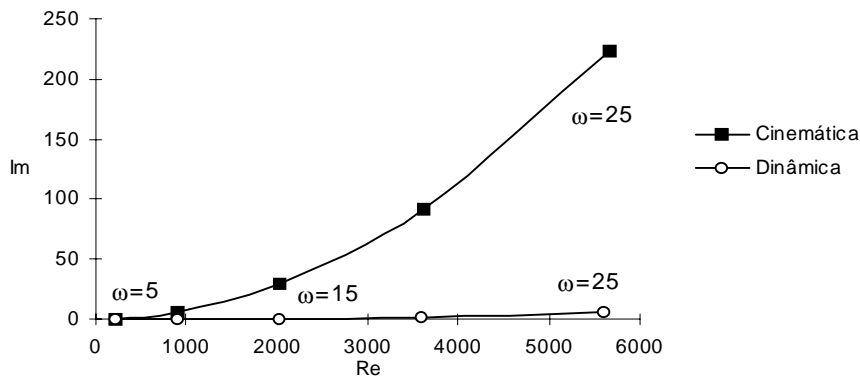


Figura 3.22

Traçado de Nyquist da função $-1/N$ do sistema com folgas dinâmica e cinemática ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $\varepsilon = 0.2$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$, $a = 16 \text{ N}$).

Como se pode observar, o modelo do sistema com folgas pode conduzir a gráficos distintos, consoante o modelo utilizado.

3.3.3.3 Sistemas com flexibilidade

Considere-se o modelo desacoplado de juntas flexíveis:

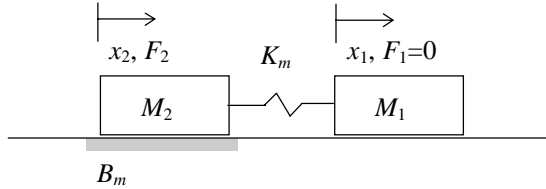


Figura 3.23

Modelo desacoplado de juntas flexíveis.

onde M_2 representa a massa do actuador, M_1 a do sistema a controlar, B_m é um coeficiente de atrito viscoso actuando em M_2 e K_m é a constante de elasticidade do sistema de transmissão.

Para este sistema a função $-1/N(\omega)$ é dada pela seguinte expressão:

$$-\frac{1}{N(\omega)} = (M_1 + M_2)\omega^2 - \frac{M_1 M_2}{K_m}\omega^4 + j\left(\frac{M_1 B_m}{K_m}\omega^3 - B_m \omega\right) \quad (3.26)$$

Dado que se trata de um sistema linear esta expressão corresponde à função de transferência.. Por exemplo, para os parâmetros: $M_1 = 8$ Kg, $M_2 = 1$ Kg, $K_m = 2 \times 10^7$ N/m e $B_m = 10^4$ Ns/m, a Figura 3.24 mostra o correspondente traçado de Nyquist.

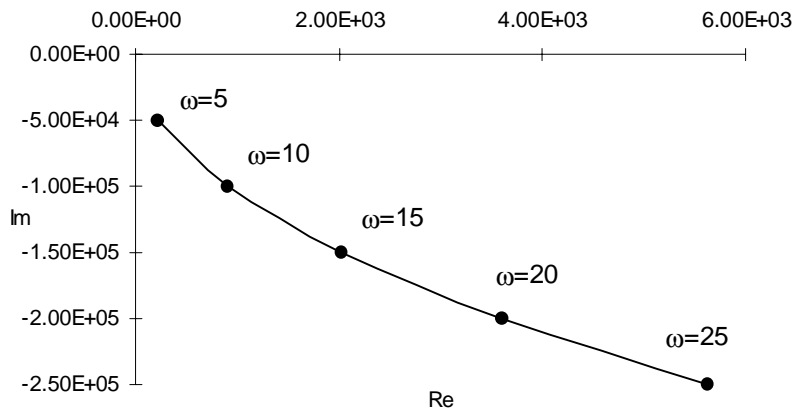
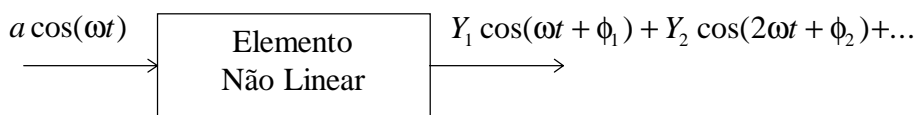


Figura 3.24

Função $-1/N(\omega)$ para sistema de duas massas com flexibilidade ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $K_m = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$, $B_m = 10^4 \text{ Ns/m}$).

3.3.4 Algumas considerações relativas aos resultados obtidos através da \mathfrak{D}

A motivação que levou à utilização da FD no estudo das subsecções anteriores é que este método está pouco explorado para sistemas dinâmicos não lineares. Deste modo estudaram-se os sistemas CEVs e massas com atrito, folgas e flexibilidades através deste método. A Figura 3.25 representa o significado matemático da noção de FD de um elemento não linear dinâmico ou estático.



Elemento Não Linear:

- sem armazenamento de energia $\Leftrightarrow N = N(a)$
- com armazenamento de energia $\Leftrightarrow N = N(a, \omega)$

Figura 3.25

Significado matemático da FD de um elemento não linear.

Um sistema de controlo em malha fechada com controlador representado pela sua FD (N) e com uma planta linear dada por $G(j\omega)$ tem a seguinte equação característica:

$$1 + NG(j\omega) = 0 \Leftrightarrow G(j\omega) = -1/N \quad (3.27)$$

O esquema com vista à caracterização dos ciclos limite encontra-se exemplificado na Figura 3.26.

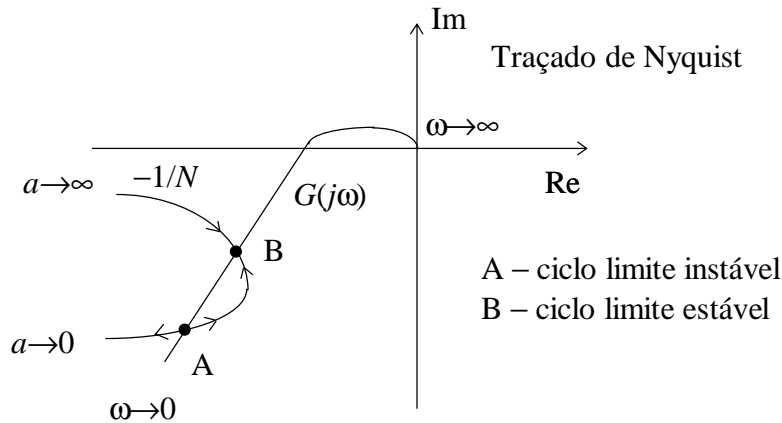


Figura 3.26

Aplicação da FD na caracterização de ciclos limite no traçado de Nyquist.

A abordagem utilizada no estudo de sistemas com atritos, folgas e flexibilidades foi a de utilizar a função $-1/N$ dos sistemas a controlar e a FD (N) dos controladores. Deste modo, como os sistemas podem ser aproximados por um de segunda ordem (por terem uma dinâmica dominada por uma massa) resulta uma atenuação dos harmónicos com frequência superior à fundamental. Também, se estudou o conteúdo harmónico dos sinais de saída, o que confirmou esta hipótese. A única excepção vem para o sistema de duas massas com folga dinâmica, e perto da unidade e folga h_1 elevada, pois a saída deixa de ter simetria de meia onda. Nesse caso, os harmónicos de maior ordem que a fundamental têm uma amplitude que não é desprezável, tornando assim o método da FD pouco credível.

Nesta ordem de ideias, pode ser elaborada uma análise qualitativa e quantitativa em relação aos resultados obtidos com a FD dos controladores e da função $-1/N$ dos sistemas a controlar. Assim, se existir uma intersecção (no traçado de Nyquist) entre a FD do controlador e a função $-1/N$ do sistema poderá ocorrer um ciclo limite estável conforme se estudará nas secções seguintes.

3.4 Simulação de sistemas com um gdl em controlo de posição

Nesta secção apresentam-se várias experiências de controlo de posição de sistemas com atritos, folgas e flexibilidades com vista a comprovar os resultados obtidos através do método da FD em situações de ocorrência de ciclos limite estáveis.

3.4.1 Sistemas com atrito

Considere-se o sistema composto por uma massa ($M = 9 \text{ Kg}$) com atrito viscoso ($B = 0.5 \text{ Ns/m}$) e de Coulomb ($K = 5 \text{ N}$) controlado por um algoritmo PID ($K_p = 2000$, $K_D = 130$, $K_I = 44250$). Neste caso a resposta em frequência do controlador intersecta a função $-1/N$ do bloco não linear no ponto $a = 13 \text{ N}$ e $\omega = 15 \text{ rad/s}$.

A Figura 3.27 mostra a evolução temporal da posição, $x(t)$, e da saída do controlador PID, $F(t)$.

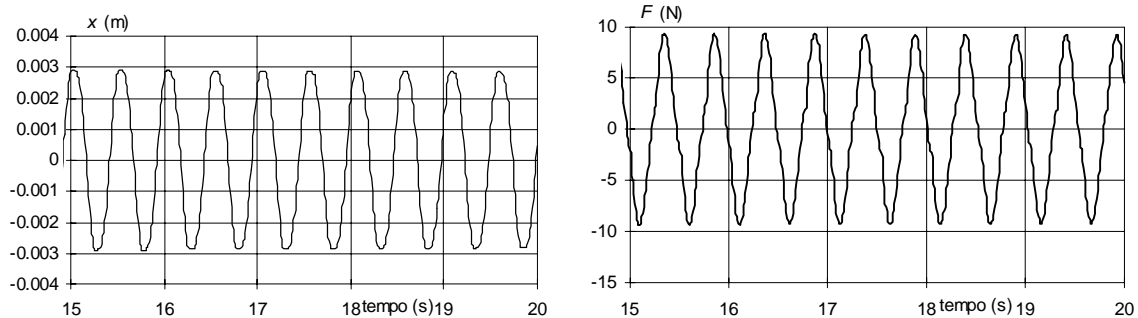


Figura 3.27

Evolução temporal a posição, $x(t)$, e da saída do controlador PID, $F(t)$ ($M = 9 \text{ Kg}$, $B = 0.5 \text{ Ns/m}$, $K = 5 \text{ N}$, $K_p = 2000$, $K_D = 130$, $K_I = 44250$).

A frequência da oscilação de $x(t)$ é muito próxima da prevista ao passo que a sua amplitude tem um erro apreciável. Isto deve-se ao facto de as duas curvas, G e $-1/N$, se intersectarem quase perpendicularmente para as frequências e quase tangencialmente para as amplitudes. Como o método da FD é um método aproximado, quanto mais próximo da perpendicularidade for a intersecção das curvas maior é a precisão.

Introduzindo um atrito estático com $F_H = 6 \text{ N}$ e $DV = 0.0025 \text{ m/s}$ (no modelo de simulação de Karnopp) a saída, $x(t)$, vem a divergir, ou seja, o sistema torna-se instável. Se

isto vem de acordo ou não com o método da FD é muito difícil de analisar, pois para não linearidades que tenham FD independente da frequência ainda existem métodos analíticos para resolver este problema (Atherton, 1975; Ogata, 1970). No entanto para este caso só através do método tentativa-erro consegue-se concluir da estabilidade/instabilidade do ciclo limite.

3.4.2 Sistemas com folgas

Considere-se o sistema composto por duas massas ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$) com folga ($h_1 = 0.00018 \text{ m}$ e $\varepsilon = 0.5$) controlado por um algoritmo PID ($K_P = 2020$, $K_D = 100$, $K_I = 22492$). Para os parâmetros adoptados $-1/N$ e $G(j\omega)$ intersectam-se no ponto $a = 13 \text{ N}$ e $\omega = 15 \text{ rad/s}$.

A Figura 3.28 apresenta o gráfico da evolução temporal da posição, $x_1(t)$, e da saída do controlador PID, $F_2(t)$.

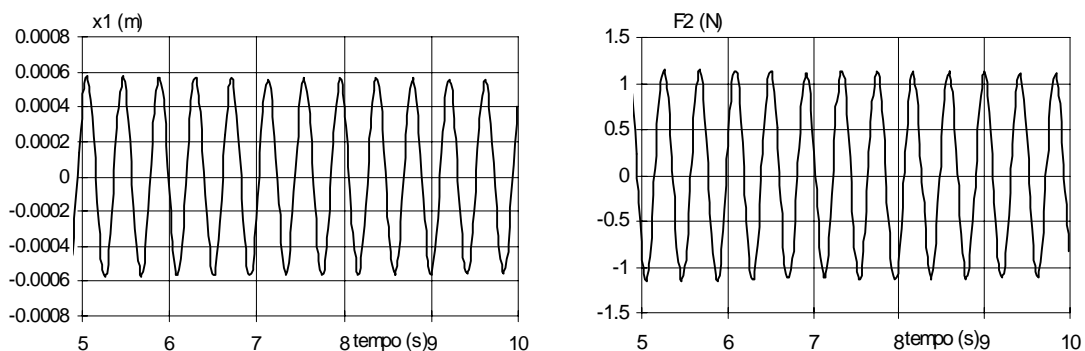


Figura 3.28

Evolução temporal a posição, $x_1(t)$, e da saída do controlador PID, $F_2(t)$ ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $h_1 = 0.00018 \text{ m}$, $\varepsilon = 0.5$, $K_P = 2020$, $K_D = 100$, $K_I = 22492$).

Como se pode verificar, a frequência da oscilação é muito próxima da prevista ao passo que a amplitude tem um certo erro.

3.4.3 Sistemas com flexibilidade

Considere-se o sistema composto por duas massas ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$) interligadas por uma mola ($K_m = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$) com coeficiente de amortecimento ($B_m = 10^4 \text{ Ns/m}$) controlado através de um algoritmo um PID ($K_P = 2025$, $K_D = 95$, $K_I = 2271165$). Os parâmetros do controlador foram calculados para a resposta em frequência deste intersectar a função $-1/N$ do bloco com flexibilidade no ponto de frequência $\omega = 15 \text{ rad/s}$. A Figura 3.29 apresenta o gráfico da evolução temporal da posição, $x_1(t)$, e da saída do controlador PID, $F_2(t)$.

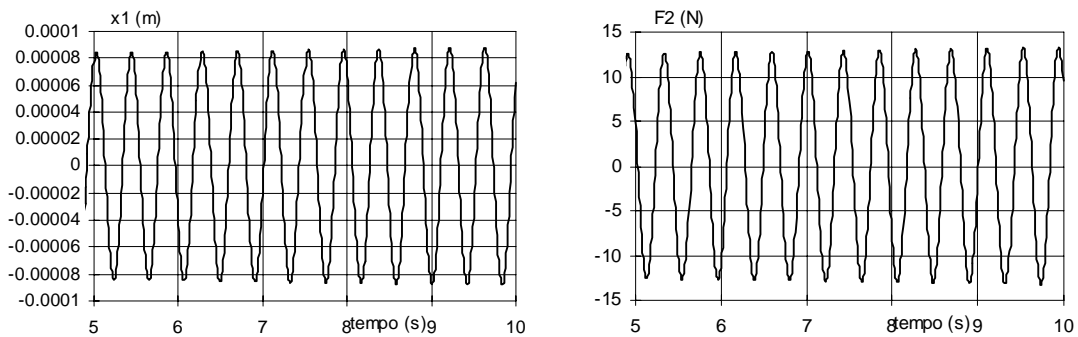


Figura 3.29

Evolução temporal a posição, $x_1(t)$, e da saída do controlador PID, $F_2(t)$ ($M_1 = 8 \text{ Kg}$, $M_2 = 1 \text{ Kg}$, $K_m = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$, $B_m = 10^4 \text{ Ns/m}$, $K_P = 2025$, $K_D = 95$, $K_I = 2271165$).

A frequência da oscilação é muito próxima da prevista, enquanto que a amplitude não pôde ser prevista, porque as respostas em frequência dos dois sistemas lineares são independentes da amplitude.

3.5 Controlo de posição do robot 2R com atrito, folgas e flexibilidade nos eixos

Nesta secção apresentam-se várias experiências do robot 2R com não linearidades (atrito e folgas) e flexibilidade nas juntas. A aplicação desse procedimento a robots de maior número de gdl (*e.g.* o robot Stanford), (Yoshikawa, 1990) é análoga e testes já efectuados conduzem a conclusões idênticas.

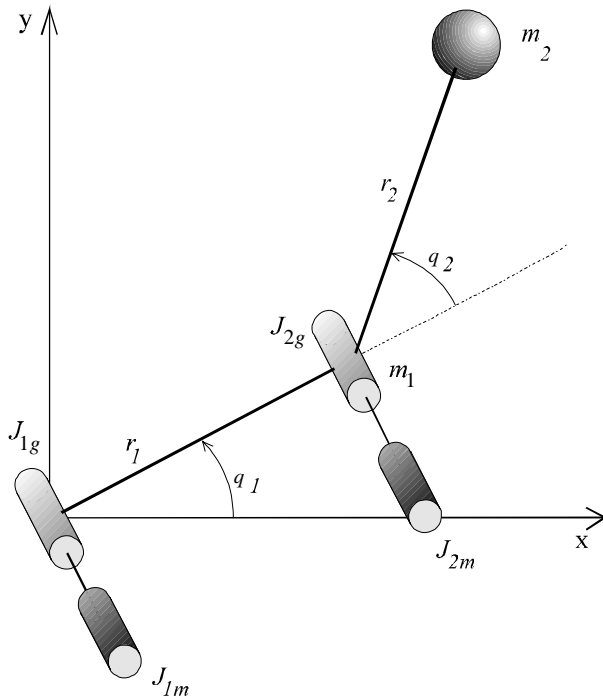


Figura 3.30
O robot 2R ideal.

Nesta ordem de ideias, a dinâmica de um robot ideal com n juntas rígidas e n ligações rígidas é dada pela seguinte expressão (Asada e Slotine, 1986):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.28)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o vector dos binários de entrada, de dimensão $n \times 1$, \mathbf{q} é o vector das coordenadas das juntas, de dimensão $n \times 1$, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é a matriz de inércia, de dimensão $n \times n$, $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é o vector dos termos centrífugos/Coriolis, de dimensão $n \times 1$ e $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é o vector dos efeitos gravitacionais, de dimensão $n \times 1$.

Para o manipulador 2R ideal (*i.e.* sem apresentar quaisquer fenómenos adicionais nos eixos), (Figura 3.30) a dinâmica é dada pelas expressões:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + & m_2r_2^2 + m_2r_1r_2C_2 \\ +2m_2r_1r_2C_2 + J_{1m} + J_{1g} & \\ m_2r_2^2 + m_2r_1r_2C_2 & m_2r_2^2 + J_{2m} + J_{2g} \end{bmatrix} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{q}_2^2 - 2m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.29b)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g(m_1 r_1 C_1 + m_2 r_1 C_1 + m_2 r_2 C_{12}) \\ g m_2 r_2 C_{12} \end{bmatrix} \quad (3.29c)$$

onde $C_i = \cos(q_i)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$, $S_i = \sin(q_i)$.

Os valores numéricos utilizados para o robot 2R estão indicados na Tabela 3.1.

i	m_i (Kg)	r_i (m)	J_{im} (Kgm ²)	J_{ig} (Kgm ²)
1	0.5	1.0	1.0	4.0
2	6.25	0.8	1.0	4.0

Tabela 3.1 Parâmetros do robot 2R.

As aproximações usadas para calcular a FD de cada junta do robot 2R são:

- apenas se consideram os efeitos inerciais da dinâmica;
- apenas se considera a parte constante dos elementos diagonais da matriz de inércia.

Consequentemente, as juntas são consideradas ‘desacopladas’, e é possível calcular as FDs individuais separadamente para cada articulação.

3.5.1 Robot com atrito nos eixos

Nesta subsecção apresenta-se a simulação do robot 2R com atrito nas juntas controlado por PIDs descentralizados (isto é, com um controlador por junta). Considera-se o modelo de atrito de Coulomb mais viscoso (logo com $F_H = 0$ Nm, $DV = 0$ rad/s) em cada junta do robot com os parâmetros indicados na Tabela 3.2.

Junta i	K_i (Nm)	B_i (Nms/rad)
1	5	0.5
2	5	0.5

Tabela 3.2 Parâmetros do atrito não linear nos eixos do robot 2R.

Com este tipo de atrito a FD do robot 2R pode ser obtida aproximadamente como se referiu anteriormente, isto é, considerando as inércias $J_{11} = 15.75 \text{ Kgm}^2$ e $J_{22} = 9 \text{ Kgm}^2$ para calcular $-1/N$ para as articulações 1 e 2. Esta função é do mesmo tipo da calculada para o sistema massa-atrito da secção anterior, adaptando apenas as grandezas e as variáveis para sistemas em movimento rotacional. Assim, a função $-1/N$ para o eixo 1 é análoga à para o eixo 2 que está representada na secção anterior. Deste modo, calculou-se as constantes dos controladores PID de modo a ocasionarem ciclos limite ($a = 13 \text{ Nm}$, $\omega = 15 \text{ rad/s}$) no sistema ($K_{P1} = 6462$, $K_{D1} = 2300$, $K_{I1} = 621180$ para o eixo 1 e $K_{P2} = 3695$, $K_{D2} = 2000$, $K_{I2} = 509385$ para o eixo 2). A Figura 3.31 representa a evolução temporal das coordenadas das juntas q_1 e q_2 , bem como os binários (τ_1 e τ_2) respectivos para este sistema.

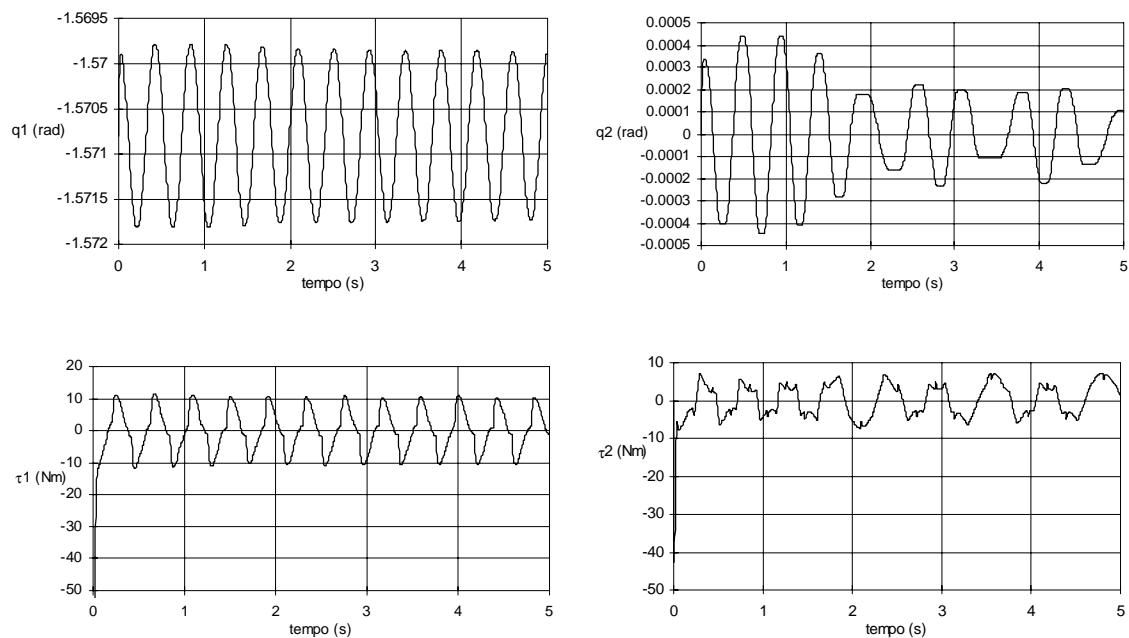


Figura 3.31

Evolução temporal das variáveis do robot 2R em situação de ciclo limite ($K_{P1} = 6462$, $K_{D1} = 2300$, $K_{I1} = 621180$, $K_{P2} = 3695$, $K_{D2} = 2000$, $K_{I2} = 509385$).

Como se pode observar nos gráficos anteriores, a frequência de oscilação foi prevista com significativa exactidão, embora q_2 não tenha um comportamento regular que se possa considerar exactamente como um ciclo limite estável. Introduzindo atrito estático ($F_H = 6 \text{ Nm}$, $DV = 0.0025 \text{ rad/s}$) e mantendo os restantes parâmetros os ciclos limite de ambas as articulações tornam-se instáveis.

3.5.2 Robot com folgas nos eixos

Nesta subsecção apresentam-se os resultados obtidos na simulação do robot 2R com folgas nas juntas, controlado através de PIDs descentralizados. Assim, considere-se o modelo de folga dinâmica aplicado a cada junta do robot, com os parâmetros da Tabela 3.3.

Junta i	ε_i	h_{1i} (rad)
1	0.5	0.00018
2	0.5	0.00018

Tabela 3.3 Parâmetros da folga dinâmica nos eixos do robot 2R.

A FD do robot 2R com este tipo de folga pode ser obtida aproximadamente adoptando os valores $J_{11} = 14.75 \text{ Kgm}^2$, $J_{1m} = 1 \text{ Kgm}^2$, $J_{22} = 8 \text{ Kgm}^2$ e $J_{2m} = 1 \text{ Kgm}^2$. Estes valores são utilizados para o efeito resultando numa função $-1/N$ para cada eixo. Esta função é igual à calculada para o sistema massas com folga dinâmica da secção anterior, adaptando apenas as grandezas e as variáveis para sistemas em movimento rotacional. Assim, a função $-1/N$ para o eixo 1 é análoga à para o eixo 2 e esta já está representada na secção anterior. Deste modo, calculou-se as constantes dos controladores PID de modo a ocasionarem ciclos limite ($a = 13 \text{ Nm}$, $\omega = 15 \text{ rad/s}$) no sistema ($K_{P1} = 3531$, $K_{D1} = 20000$, $K_{I1} = 4499961$ para o eixo 1 e $K_{P2} = 2018$, $K_{D2} = 2000$, $K_{I2} = 449973$ para o eixo 2).

A Figura 3.32 representa a evolução temporal das coordenadas das juntas q_1 e q_2 , bem como os binários nos eixos (τ_1 e τ_2) do robot respectivos para este sistema.

A frequência de oscilação de q_1 foi prevista com significativa exactidão, enquanto que para q_2 e para os binários resulta um ciclo limite à frequência do controlador ($f_c = 10 \text{ kHz}$).

3.5.3 Robot com flexibilidade nos eixos

Nesta subsecção apresenta-se a simulação do robot 2R com juntas flexíveis e controladas por PIDs. Assim, considere-se o modelo de massas com flexibilidade aplicado a cada junta do robot, com os parâmetros da Tabela 3.4.

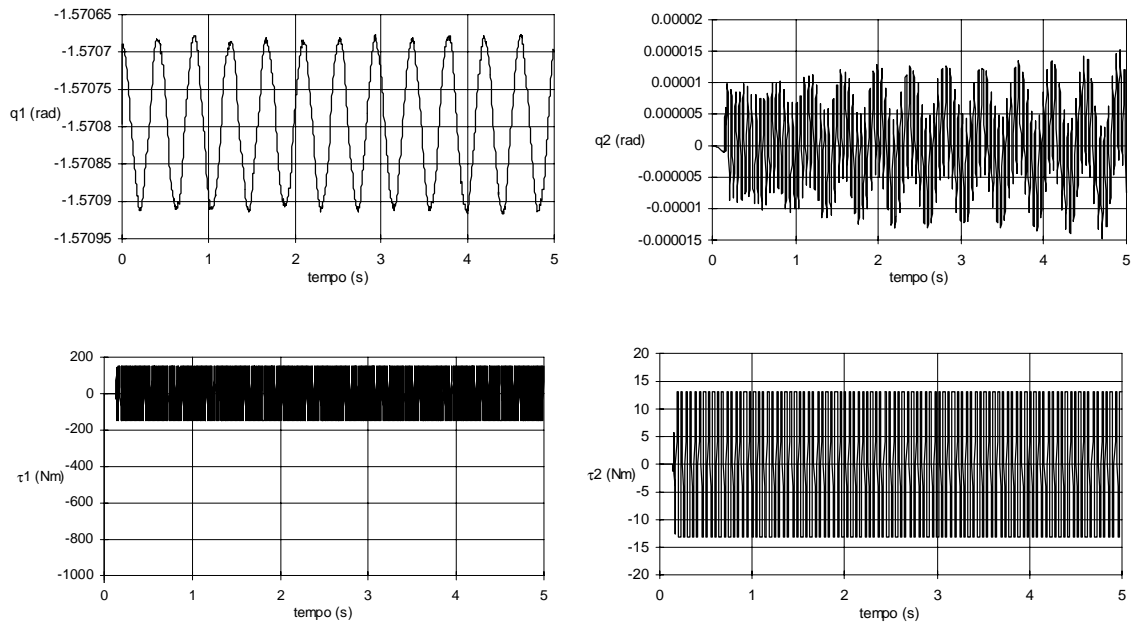


Figura 3.32

Evolução temporal das variáveis do robot 2R em situação de ciclo limite ($K_{P1} = 3531$, $K_{D1} = 20000$, $K_{I1} = 4499961$, $K_{P2} = 2018$, $K_{D2} = 2000$, $K_{I2} = 449973$).

Junta i	B_{mi} (Nms/rad)	K_{mi} (Nm/rad)
1	10^4	2×10^7
2	10^4	2×10^7

Tabela 3.4 Parâmetros das juntas flexíveis do robot 2R.

A FD (neste caso, simplesmente a função de transferência) do robot 2R com flexibilidade pode ser obtida com os parâmetros $J_{11} = 14.75 \text{ Kgm}^2$, $J_{1m} = 1 \text{ Kgm}^2$, $J_{22} = 8 \text{ Kgm}^2$ e $J_{2m} = 1 \text{ Kgm}^2$. Estes valores são utilizados para o efeito resultando numa função $-1/N$ para cada eixo. Esta função é igual à calculada para o sistema massas com flexibilidade da secção anterior, adaptando apenas as grandezas e as variáveis para sistemas em movimento rotacional. Assim, a função $-1/N$ para o eixo 1 é análoga à para o eixo 2 estando esta já está representada na secção anterior. Deste modo, calculou-se as constantes dos controladores PID de modo a ocasionarem ciclos limite ($\omega = 15 \text{ rad/s}$) no sistema ($K_{P1} = 3544$, $K_{D1} = 15000$, $K_{I1} = 5624625$ para o eixo 1 e $K_{P2} = 2025$, $K_{D2} = 15000$, $K_{I2} = 5624805$ para o eixo 2).

A Figura 3.33 representa a evolução temporal das coordenadas das juntas q_1 e q_2 , bem como os binários nos eixos (τ_1 e τ_2) do robot respectivos para este sistema.

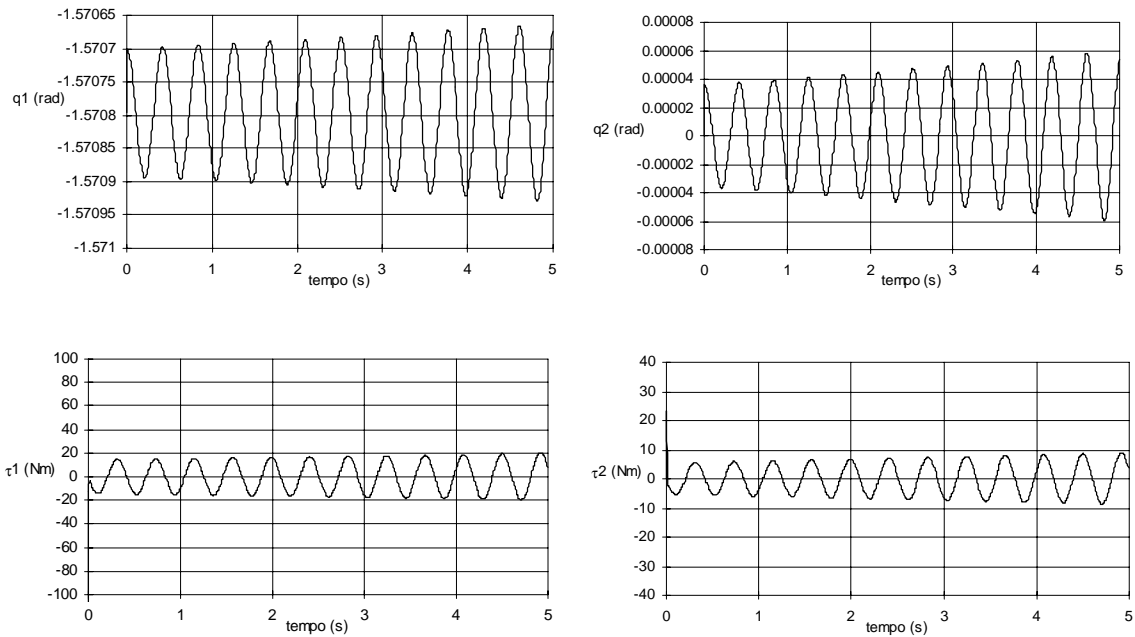


Figura 3.33

Evolução temporal das variáveis do robot 2R em situação de ciclo limite ($K_{P1} = 3544$, $K_{D1} = 15000$, $K_{I1} = 5624625$, $K_{P2} = 2025$, $K_{D2} = 15000$, $K_{I2} = 5624805$).

Como se pode observar a partir dos gráficos, a frequência de oscilação foi prevista com uma exactidão significativa. No entanto, o sistema encontra-se muito perto da instabilidade, pois é muito difícil de encontrar um ciclo limite estável para este sistema pelo método de tentativa-erro.

3.6 Conclusões

Neste capítulo estudou-se, através do método da FD, o controlo de sistemas robóticos com não linearidades nas juntas (atritos e folgas) e flexibilidades. Os controladores apresentados foram CEVs e PIDs, tendo-se calculado as FDs dos CEVs definidos neste trabalho. Calculou-se, também, a FD e o conteúdo harmónico da resposta à entrada sinusoidal dos sistemas não lineares apresentados. Verificou-se que os sistemas massa com atrito não linear e de duas massas com folga são inerentemente não lineares, enquanto que o sistema de duas massas com flexibilidade de 1 gdl é um sistema linear apesar de o de 2 gdl ou superior não ser devido ao acoplamento dinâmico. Os sistemas foram controlados com PIDs sintonizados a partir do raciocínio do método da FD e os

resultados foram coerentes com a previsão, sendo o sistema mais difícil de controlar o com folga dinâmica com coeficiente de restituição elevado.

Neste capítulo, não foram totalmente explorados os CEVs por se entender ser desnecessário. No entanto, serão utilizados nos capítulos seguintes onde se empregará também os resultados obtidos da sua FD na análise de estabilidade de sistemas robóticos mais complexos.

4 Análise dinâmica do controlo híbrido posição/força de robots

Neste capítulo estuda-se o controlo híbrido posição/força de manipuladores robóticos. Este algoritmo de controlo é necessário em trabalhos que envolvam um controlo de posição segundo certas direcções do espaço de trabalho e um controlo da força de contacto entre o órgão terminal do robot e a superfície restrição nas restantes direcções. Como exemplos de aplicação podem apontar-se a rebarbagem, a montagem, a soldadura por pontos, a moagem, o seguimento de contornos de peças em processos de fabrico e outros. Para os subcontroladores de posição e de força são adoptados sistemas de estrutura variável devido à sua grande robustez nomeadamente face aos controladores lineares convencionais. No tocante à superfície restrição, esta é modelizada, no contacto, por um sistema mola-massa-amortecedor ou, alternativamente, por duas molas e um amortecedor.

Nesta ordem de ideias, na secção 4.1 faz-se uma resenha bibliográfica dos principais artigos existentes nesta área. Nas secções 4.2 e 4.3 apresentam-se, respectivamente, a descrição do sistema robot/ambiente e do controlador híbrido posição/força. Na secção 4.4 apresenta-se a resposta temporal do sistema para vários controladores de posição e de força. De seguida, na secção 4.5 estuda-se a resposta em frequência do sistema para vários parâmetros dos controladores e do sistema robot/ambiente e compara-se o comportamento do sistema clássico com uma modificação através de uma matriz pseudo-inversa. Na secção 4.6 analisa-se a zona de estabilidade do sistema em função dos parâmetros da superfície restrição. Na secção 4.7 calculam-se as respostas do sistema com duas modelizações distintas da superfície restrição e quando se adopta um controlo por multifrequência. Na

secção 4.8 estudam-se as respostas para robots com atritos não lineares, com folgas e com flexibilidades nas juntas. Na secção 4.9 considera-se o fenómeno de impacto do robot com a superfície restrição. Na secção 4.10 estuda-se de uma forma abreviada a adopção de controladores de ordem fraccionária nas malhas de posição e de força em alternativa aos sistemas de estrutura variável. Por último, na secção 4.11, apresentam-se as conclusões principais que decorrem dos estudos efectuados.

4.1 Introdução

No princípio dos anos oitenta foram publicados os primeiros trabalhos sobre o controlo de movimento acomodativo (compliant) de manipuladores robóticos. Um trabalho que marcou o aparecimento de uma nova geração de algoritmos de controlo de posição/força é o artigo de Raibert e Craig (1981). Nesse estudo com um robot RP demonstra-se que é exequível o controlo, estável e *desacoplado* de posição e de força, com manipuladores robóticos. Pela mesma altura foi também publicado um trabalho de Mason (1981) que apresentou um estudo formal sobre casos de manipulação envolvendo movimentos acomodativos. As tarefas são definidas como consistindo em restrições naturais (impostas pela geometria do meio ambiente) e restrições artificiais (originadas pelos objectivos do controlo).

Em 1985, Zhang e Paul reduziram a carga computacional do controlo híbrido posição/força (CH) diminuindo o número de operações efectuadas em tempo real. O algoritmo foi conseguido fazendo algumas simplificações no CH de modo ao controlo ser efectuado no espaço operacional, não necessitando assim de realizar os cálculos da cinemática directa de um modo separado, isto é, fazendo o produto de várias matrizes algebricamente de uma só vez. Além disso, se as entradas (posição e força) forem conhecidas previamente, é possível reduzir ainda mais o peso computacional, pois vários cálculos podem ser realizados de antemão (off-line).

Em 1987 Hollerbach e outros investigadores (1988) implementaram o CH num robot de actuação directa (direct-drive) com juntas rotacionais e verificaram que existiam problemas de estabilidade. Estes problemas foram estudados e chegou-se à conclusão que eram originados pelas transformações cinemáticas efectuadas no algoritmo de CH e que não apareciam no robot RP adoptado por Raibert e Craig (1981). Posteriormente, em 1989, Zhang estudou mais profundamente o problema utilizando o modelo de espaço de estados

do sistema global. Zhang verificou a existência de zonas estáveis/instáveis de funcionamento que dependiam do ponto de funcionamento do robot 2R. Estes problemas foram resolvidos por Fisher *et al.* (1992a, 1992b, 1992c), substituindo parte da transformação cinemática, na malha de controlo de posição do CH, por uma transformação estável. Este algoritmo utiliza a técnica de pseudo-inversão de matrizes (Doty *et al.*, 1993) e foi provado ser sempre estável para qualquer ponto de funcionamento e para qualquer manipulador.

Abbati-Marescotti *et al.* (1990) publicaram também um trabalho no qual propuseram uma modificação do CH através da qual toda a parte de controlo de posição é reestruturada. Esta estratégia proporciona uma formulação correcta das tarefas pois a proposta inicial de Mason (1981) tinha problemas de inconsistência dimensional na transformação cinemática de coordenadas. Deste modo, é conseguida uma consistência dimensional através de um filtro ‘cinestático’, isto é, adoptando os modelos cinemático e a estático do sistema na malha de controlo de posição do CH.

Existem vários trabalhos que focam as vantagens e os inconvenientes dos vários tipos de controlo acomodativo de robots, dos quais o CH é um caso particular. Nesta perspectiva, devem referir-se os estudos de Khatib (1987) em que se abordam os algoritmos de controlo de força de manipuladores robóticos no espaço das tarefas de uma forma generalizada. Deve também mencionar-se Whitney (1987) que faz uma resenha dos principais algoritmos de controlo acomodativo apresentados até à altura. Paralelamente ao controlo explícito de força (isto é, onde é utilizado um sinal de referência de força) e desenvolveu-se também o controlo de impedância (Hogan, 1985; Pelletier e Doyon, 1994; Liu e Goldenberg, 1994). Neste segundo tipo de algoritmo pretende-se controlar a relação dinâmica entre a posição do órgão terminal do braço e a força por este exercida no ambiente através da sua impedância mecânica.

Mais recentemente, na década de noventa, foram publicados vários trabalhos que estudam em pormenor o CH e os vários tipos de controlo acomodativo. Desta forma, a seguir são referidas algumas contribuições importantes no que respeita à investigação realizada nesta área. Jankowski e ElMaraghy (1992) estudaram o desempenho do CH, para robots rígidos e para robots com juntas flexíveis, tendo em conta a existência de atrito na superfície restrição. O controlador utiliza a dinâmica inversa do robot e observadores de estado para obter outros sinais complementares dos medidos pelos sensores (*i.e.* força no pulso e velocidades e posições das articulações e veios dos motores). Estes investigadores

utilizam um algoritmo que é comutado de acordo com o ponto de funcionamento do sistema, isto é, dependendo do atrito estático e de deslizamento-paragem.

Em 1993, Volpe e Khosla analisaram o “estado da arte” do controlo explícito de força, baseado em posição e em força, e compararam a estabilidade dos diversos algoritmos propostos tomando em conta o tipo de controlador e o modelo do ambiente. Estes investigadores chegaram à conclusão que a acção integral, no controlador de força explícito, é muito importante porque permite um bom seguimento de trajectórias de força. Por seu lado, Paromtchik *et al.* (1994) desenvolveram um CH com um CEV na malha de controlo de força, sendo todo o controlo levado a cabo nas coordenadas do espaço das tarefas. O controlador permite atingir e mantém o sistema nas hipersuperfícies de comutação que consistem em variáveis internas do controlador de força. A estabilidade do sistema e a existência do modo de deslizamento são demonstradas através do segundo método de Liapounov.

Volpe e Khosla (1994) estudaram as exigências computacionais, em termos de hardware/software, na implementação de estratégias de controlo de força (explícitas e de impedância). Os resultados obtidos demonstram a importância da consideração completa dos detalhes de implementação necessários para o controlo de força de manipuladores robóticos. As conclusões revelam que a acção integral no controlador tem um papel importante pois filtra o ruído do sinal de força e que a rotina de interrupção, para serviço desse sinal, deve ser eficiente a fim de possibilitar frequências de amostragem superiores. De um modo geral, as técnicas de controlo acomodativo de robots têm um melhor desempenho com sinais dos sensores contendo pouco ruído e quando processados rapidamente.

Kwan (1995) desenvolveu um CH considerando a dinâmica dos actuadores e usando uma abordagem mista (adaptativa/estrutura variável). Esta estratégia permite que, quando o sistema está no modo de deslizamento, os erros de força, de posição e de velocidade se aproximem de zero independentemente da incerteza dos parâmetros do modelo do sistema. Deste modo, o método apresentado é robusto relativamente às incertezas paramétricas presentes no sistema. Verifica-se que a consideração da dinâmica dos actuadores é fundamental no regime transitório sendo, contudo, desprezável em regime permanente.

Abou-El-Ela (1995) propôs o controlo adaptativo de braços em movimento acomodativo utilizando algumas simplificações no modelo do sistema, nomeadamente tendo em conta as propriedades específicas das tarefas de contacto e que facilitam a adopção de

controlo de força (entre os quais o CH). As simplificações utilizadas consistem no desacoplamento da dinâmica do robot em relação às suas coordenadas generalizadas, permitindo assim o desenvolvimento de controladores descentralizados.

No trabalho de Sabanovic *et al.* (1996) são explorados algoritmos de controlo acomodativo de estrutura variável sem a existência de frequência de oscilação (chattering). Estuda-se o controlo de posição, de impedância e de força considerando a dinâmica dos actuadores. A superfície de deslizamento é definida de um modo específico para cada modo distinto de controlo (isto é, para o seguimento de posição, para o controlo de impedância e para o controlo de força) mantendo-se o controlador o mesmo em todos os casos.

Siciliano e Villani (1996a) realizaram um controlador de posição/força de robots com preponderância da acção de controlo de força sobre a acção de posição. A superfície de restrição é modelizada por uma mola ideal. O controlo do movimento ao longo das direcções do espaço das tarefas não restringidas é assegurado e, no caso de o modelo dinâmico não ser conhecido, com exactidão, o esquema é adaptativo em relação aos parâmetros da dinâmica. Posteriormente Siciliano e Villani (1996b) adoptaram o mesmo modelo para a superfície restrição sem ser necessário obter as medidas das velocidades das juntas. Esta possibilidade deve-se ao facto das velocidades serem obtidas numericamente, através de um filtro, a partir da saída dos codificadores ópticos que realizam a transdução da posição das articulações. Este algoritmo, considerado também um controlador posição/força, utiliza um subcontrolador PID de posição/força.

Deste modo, pode concluir-se que os algoritmos de controlo de posição/força estão a ser objectivo de intensa investigação, faltando no entanto trabalhos com experiências práticas que demonstrem a utilidade destes trabalhos na vida real. Note-se também que, sob o ponto de vista teórico, este problema está ainda numa fase embrionária.

4.2 Descrição matemática do robot e do ambiente

Nesta secção apresentam-se os modelos dinâmicos do robot e da superfície restrição (*i.e.* do ambiente).

A equação dinâmica de um robot ideal, com n articulações, interactuando com o ambiente é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} \quad (4.1)$$

Nesta expressão $\boldsymbol{\tau}$ é o vector, de dimensão $n \times 1$, dos binários de entrada, \mathbf{q} é o vector, de dimensão $n \times 1$, das coordenadas generalizadas, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é a matriz de inércia, de dimensão $n \times n$, $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é o vector dos termos centrífugos/Coriolis, de dimensão $n \times 1$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é o vector dos efeitos gravitacionais, de dimensão $n \times 1$, $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$ é a matriz transposta do Jacobiano, de dimensão $n \times m$ e \mathbf{F} é o vector da força que o ambiente exerce no órgão terminal do robot, de dimensão $m \times 1$. O parâmetro m representa a dimensão do espaço de trabalho e pode estar compreendida entre 1 e 6 pois é possível englobar em \mathbf{F} os momentos exercidos pelo ambiente no órgão terminal do robot. Neste estudo adopta-se como sistema ‘protótipo’ um robot 2R e uma superfície restrição oblíqua com uma inclinação segundo o ângulo θ indicado na Figura 4.1.

A dinâmica do robot é dada por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + & m_2r_2^2 + m_2r_1r_2C_2 \\ +2m_2r_1r_2C_2 + J_{1m} + J_{1g} & \\ m_2r_2^2 + m_2r_1r_2C_2 & m_2r_2^2 + J_{2m} + J_{2g} \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2r_1r_2S_2\dot{q}_2^2 - 2m_2r_1r_2S_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ m_2r_1r_2S_2\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g(m_1r_1C_1 + m_2r_1C_1 + m_2r_2C_{12}) \\ gm_2r_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -r_1S_1 - r_2S_{12} & r_1C_1 + r_2C_{12} \\ -r_2S_{12} & r_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (4.2d)$$

onde $C_i = \cos(q_i)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$, $S_i = \sin(q_i)$, $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$.

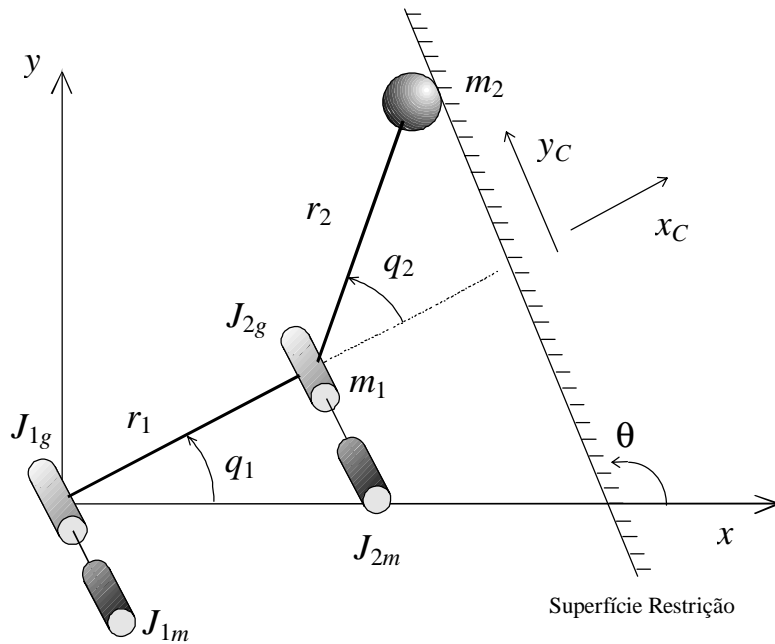


Figura 4.1

O robot 2R ideal e a superfície restrição.

Os valores numéricos utilizados para o robot 2R ideal estão indicados na Tabela 4.1.

i	m_i (Kg)	r_i (m)	J_{im} (Kgm ²)	J_{ig} (Kgm ²)
1	0.5	1.0	1.0	4.0
2	6.25	0.8	1.0	4.0

Tabela 4.1 Os parâmetros do robot 2R ideal.

O contacto do robot com a superfície restrição é modelizado por três parâmetros: a massa M da superfície no ponto de contacto, o amortecimento B e a constante de elasticidade K de acordo com a equação diferencial (4.3). Na Figura 4.2a) representa-se o sistema mecânico correspondente a este modelo. Alternativamente será adoptado um segundo modelo (Fig. 4.2b) com dois graus de liberdade com duas molas e um coeficiente de amortecimento segundo a expressão (4.5). Nas experiências considera-se que o robot está sempre em contacto com o ambiente após a ocorrência do impacto.

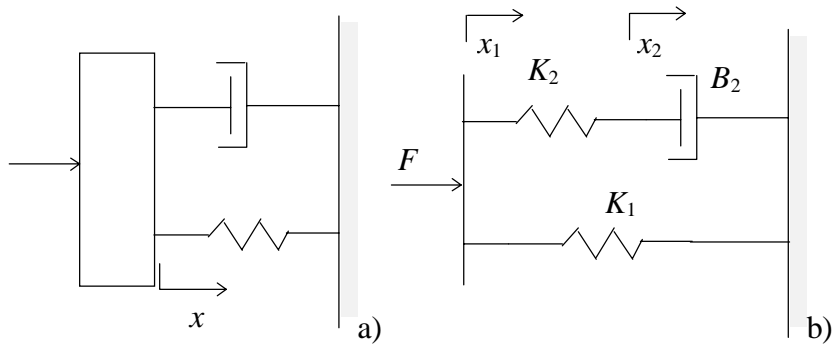


Figura 4.2

Modelos alternativos da superfície restrição.

O sistema de coordenadas Cartesiano utilizado no espaço das tarefas está representado na Figura 4.3.

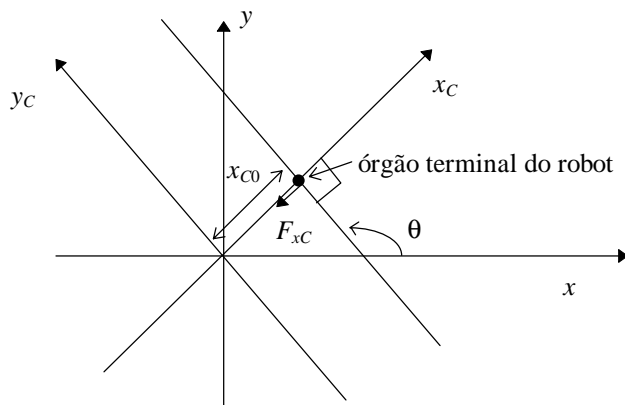


Figura 4.3

Sistema de coordenadas no espaço das tarefas.

Nesta ordem de ideias, o sistema robot/ambiente é descrito pelas equações:

$$F_{x_c} = M\ddot{x}_c + B\dot{x}_c + K(x_c - x_{c0}) \quad (4.3)$$

$$x_{c0} = r_1 \sin(\theta - q_{10}) + r_2 \sin(\theta - q_{10} - q_{20}) \quad (4.4a)$$

$$x_c = r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \quad (4.4b)$$

$$\dot{x}_c = -r_1 \dot{q}_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(\theta - q_1 - q_2) \quad (4.4c)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c = & -r_1 \ddot{q}_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos(\theta - q_1 - q_2) - \\ & -r_1 \dot{q}_1^2 \sin(\theta - q_1) - r_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.4d)$$

$$F_x = -F_{x_c} \sin(\theta) \quad (4.4e)$$

$$F_y = F_{x_c} \cos(\theta) \quad (4.4f)$$

$$F_{x_c} = K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2) \quad (4.5a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_2 (x_1 - x_2)}{B_2} \quad (4.5b)$$

$$x_1 = x_c - x_{c0} \quad (4.5c)$$

A variável q_{i0} representa o valor de q_i ($i = 1, 2$) para $t = 0$ s supondo que o sistema está em repouso (isto é, que o robot está em contacto com a superfície restrição e que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

4.3 Descrição do controlador híbrido posição/força

Nesta secção apresenta-se a estrutura geral do algoritmo de CH de acordo com o diagrama de blocos do CH da Figura 4.4.

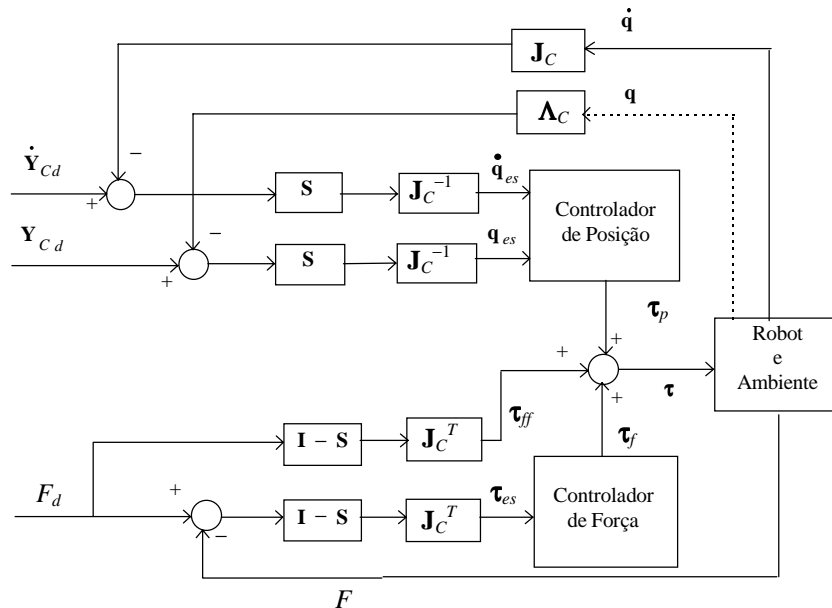


Figura 4.4

Diagrama de blocos do CH.

Para o manipulador adoptado neste capítulo (*i.e.* o robot 2R) as transformações cinemáticas consistem nas equações (4.6). A matriz \mathbf{I} é a matriz identidade (de dimensão

$n \times n$) e a matriz de selecção \mathbf{S} é uma matriz diagonal (de dimensão $n \times n$) com elementos iguais a um nas direcções controladas em posição e zeros nas direcções controladas em força.

Nas experiências com o robot 2R vem $n = 2$ e pretende-se controlar a força segundo a direcção de x_C e a posição na direcção de y_C . Assim resultam as expressões:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{J}_C^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{j_{C11}j_{C22} - j_{C12}j_{C21}} \begin{bmatrix} j_{C22} & -j_{C12} \\ -j_{C21} & j_{C11} \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{J}_C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -r_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) & -r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \\ r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) & r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \end{bmatrix} \quad (4.6c)$$

$$\det[\mathbf{J}_C(\mathbf{q})] = r_1 r_2 \sin(q_2) \quad (4.6d)$$

$$\Lambda_C: \begin{cases} x_C = r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \\ y_C = r_1 \cos(\theta - q_1) + r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \end{cases} \quad (4.6e)$$

$$\mathbf{F} = F_{x_C} \quad (4.6f)$$

$$\mathbf{J}_C^T(\mathbf{q})(\mathbf{I} - \mathbf{S}) = \begin{bmatrix} -r_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) & 0 \\ -r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6g)$$

$$\mathbf{J}_C^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{S} = \frac{1}{r_1 r_2 \sin(q_2)} \begin{bmatrix} 0 & r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \\ 0 & -r_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \end{bmatrix} \quad (4.6h)$$

Quando $x_{C0} < 0$ tem que se ter em atenção o seguinte procedimento na implementação do algoritmo apresentado:

- Para visualizar a evolução temporal da força F , fazer $F \rightarrow -F$;
- Fazer $F_R \rightarrow -F_R$ (referência de força);
- Na dinâmica [*i.e.* na parte $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$] não alterar nada.

Devido à instabilidade do CH, verificada por An e Hollerbach (1987b), a transformação cinemática $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}$ pode ser substituída por uma formulação adoptando a *pseudo-inversa* (ver Apêndice 4.A), conforme proposto por Fisher e Mujtaba (1992a):

$$(\mathbf{S}\mathbf{J}_c)^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \\ 0 & \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\beta = r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \quad (4.7b)$$

$$\gamma = r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \quad (4.7c)$$

onde o índice superior + significa a operação de pseudo-inversão.

4.4 Resposta temporal do sistema com vários controladores de posição e de força

Nesta secção são apresentadas várias simulações do CH com vista a analisar o seu desempenho e a comparar alguns tipos de controladores de posição. Neste sentido, o sistema robot 2R/ambiente é simulado através do método de integração numérica de Runge-Kutta de ordem quatro (Chapra e Canale, 1990) a uma frequência de 100 kHz e o controlador híbrido adopta uma frequência de 10 kHz. Os sinais de referência aplicados tanto na entrada de posição (y_c) como na entrada de força (F) são degraus, respectivamente de 0.1 m e de 1 N e os parâmetros da superfície restrição são $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m e $K = 100$ N/m.

Numa primeira simulação não se considera a correcção da pseudo-inversa. O controlador de força consiste num CEV com a estrutura indicada na Figura 4.5. Os parâmetros da superfície de deslizamento do controlador de força utilizado nesta secção são $c_{Fi} = 0.25 \text{ s}^{-1}$ ($i = 1, 2$).

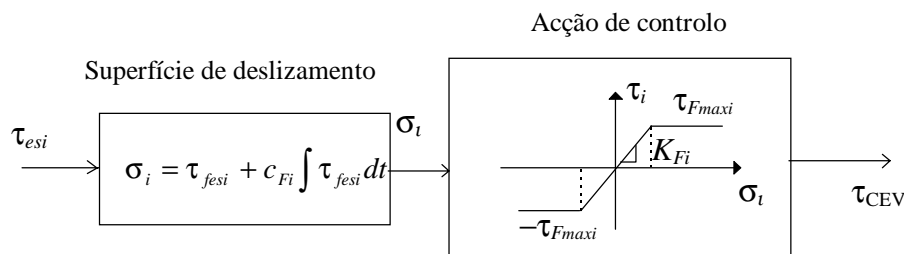


Figura 4.5

Diagrama de blocos do CEV utilizado no controlo de força.

Para o controlador de posição adopta-se o esquema indicado na Figura 4.6. Os parâmetros da superfície de deslizamento do controlador de posição são $c_{pi} = 2.5 \text{ s}^{-1}$ ($i = 1, 2$).

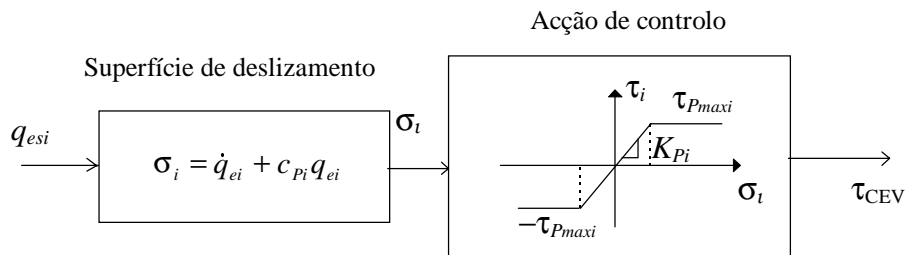


Figura 4.6

Diagrama de blocos do CEV utilizado no controlo de posição.

Na Tabela 4.2 mostram-se os valores numéricos do bloco de acção de controlo utilizados nesta secção. O ponto de funcionamento do robot e da superfície restrição é dado por $\theta = q_{10} = q_{20} = \pi/2$.

Eixo i	K_{Pi}	K_{Fi}	τ_{Pmaxi}	τ_{Fmaxi}
1	10,000	100	1,000	1,000
2	10,000	100	500	500

Tabela 4.2

Os valores numéricos do bloco de acção de controlo utilizados nesta secção.

Para uma entrada de força nula e uma entrada de posição $y_c(t) = y_{c0} + 0.1h(t-3)$ m, onde y_{c0} significa o valor de y_c para $t = 0$ s e $h(t)$ é o degrau unitário de Heavyside, obtém-se os gráficos da Figura 4.7.

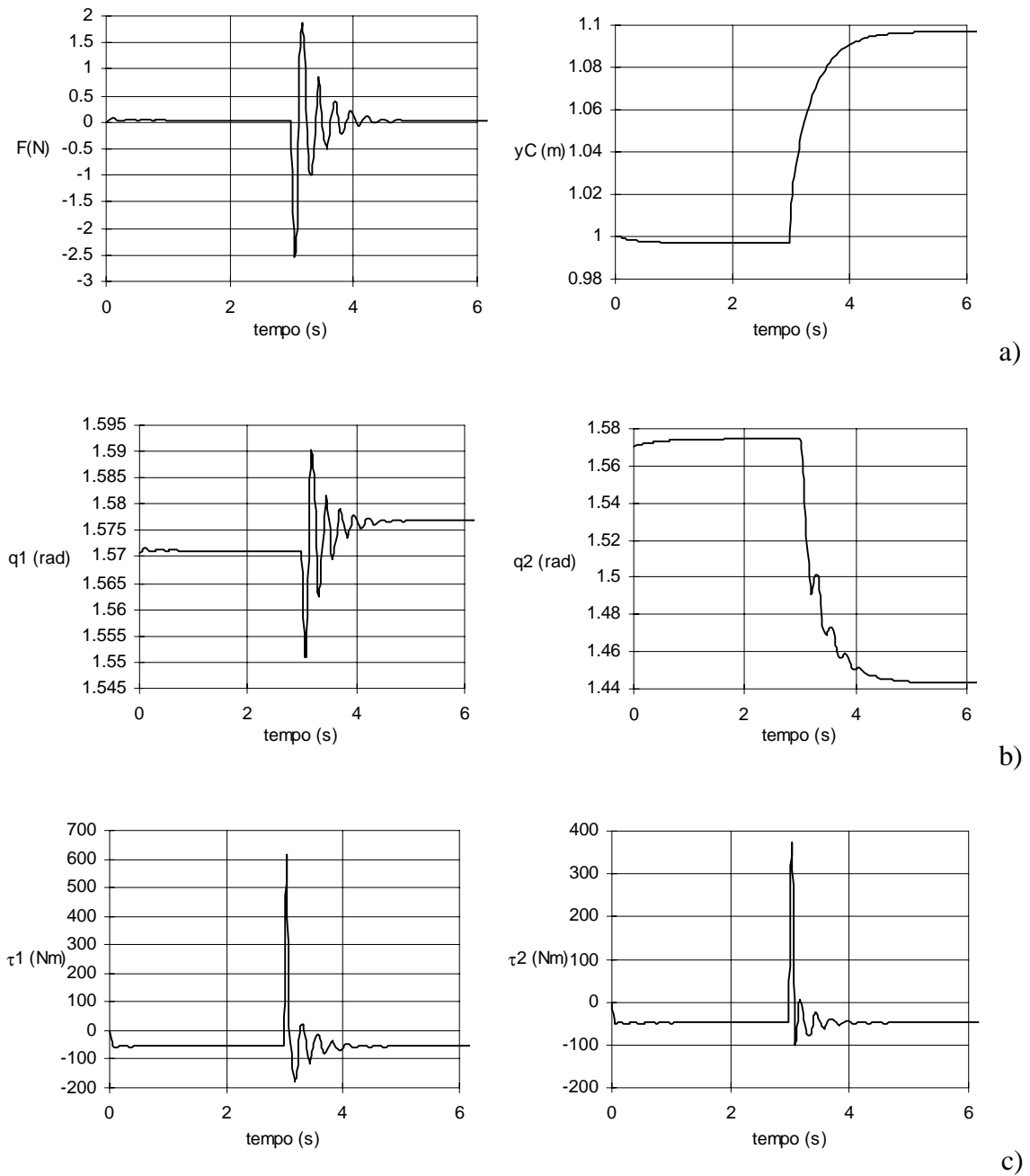


Figura 4.7

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de posição ($\theta = q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

Para uma referência de posição constante $y_C = y_{C0}$ e uma entrada de força $F(t) = h(t-3)$ N, obtém-se os gráficos da Figura 4.8.

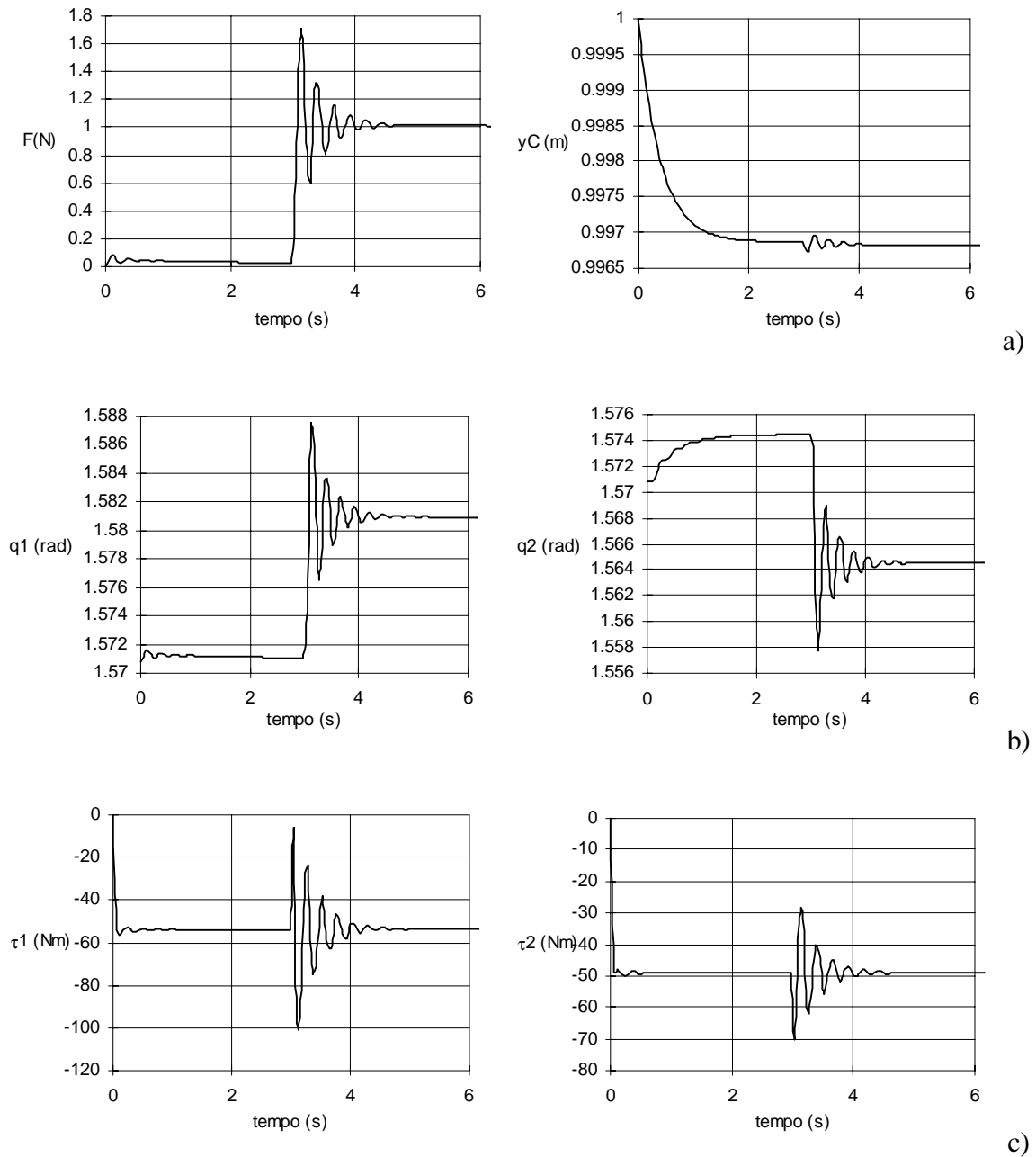


Figura 4.8

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de força ($\theta = q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

Numa segunda simulação modifica-se ligeiramente o controlador de posição adoptando-se o esquema representado na Figura 4.9.

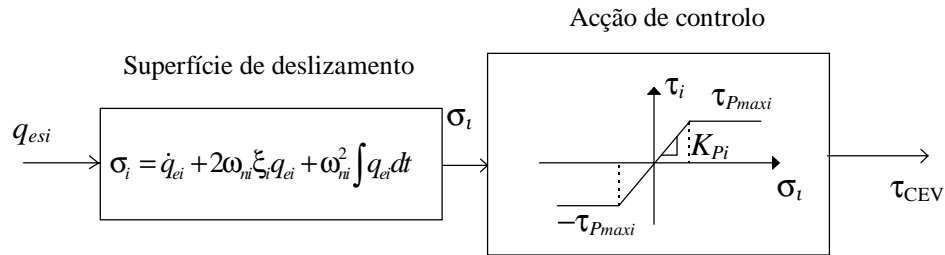


Figura 4.9

Diagrama de blocos do CEV utilizado no controlo de posição para a segunda simulação.

Neste caso trata-se de uma superfície de deslizamento de segunda ordem com acção integral. Esta estratégia não altera a estabilidade do sistema e reduz o erro em regime permanente da posição, como se verá pelos resultados desta segunda simulação. Assim, nesta experiência só se altera a superfície de deslizamento deixando os demais parâmetros inalterados. Os valores de $\omega_{ni} = 7.91 \text{ rads}^{-1}$ ($i = 1, 2$) e $\xi_i = 1.74$ ($i = 1, 2$) foram escolhidos de modo a que o valor próprio dominante permaneça 2.5 s^{-1} , ou seja, igual ao valor da primeira simulação.

As Figuras 4.10 e 4.11 mostram, respectivamente, os resultados da simulação para a entrada de degrau de posição e para a entrada de degrau de força.

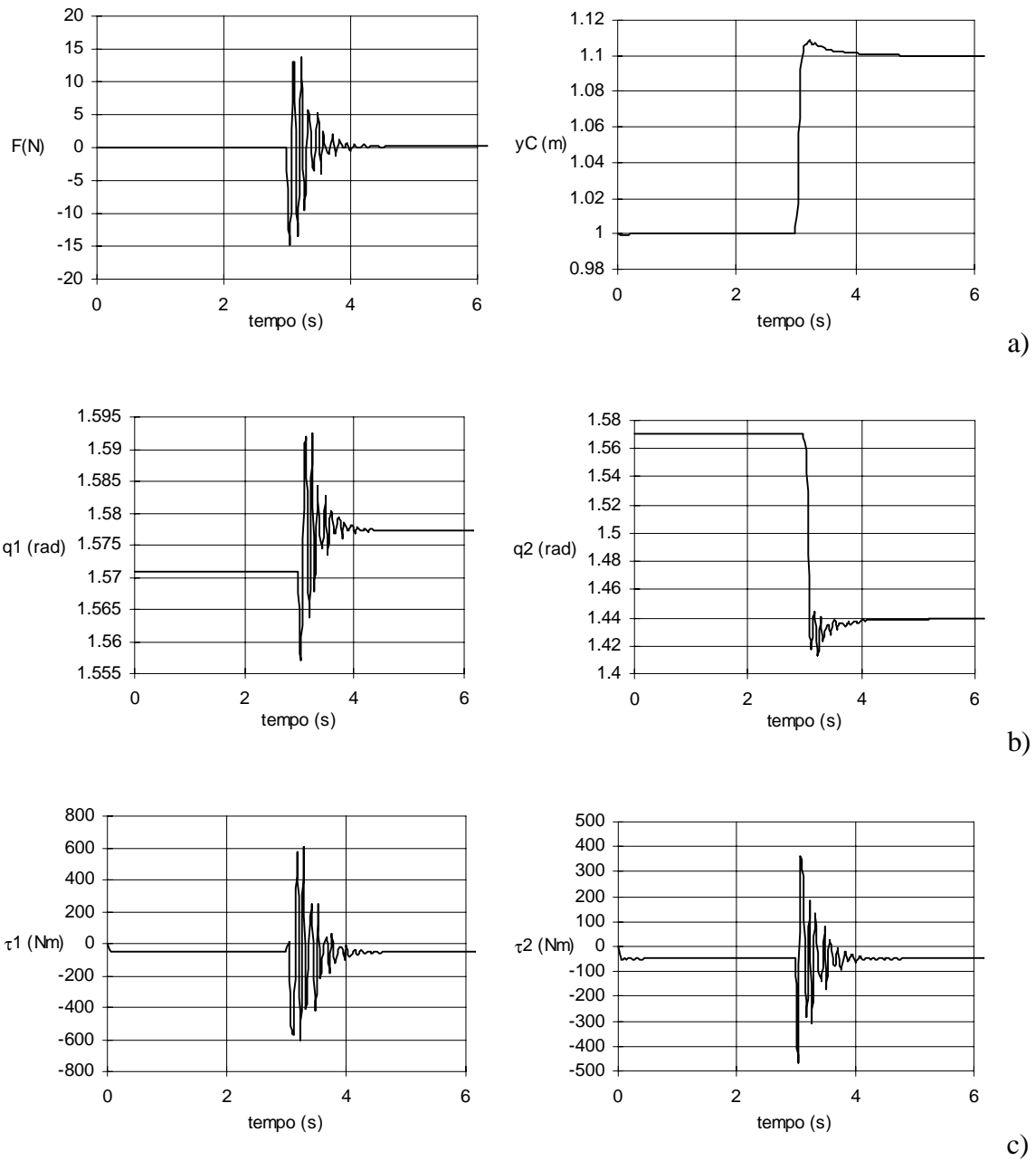


Figura 4.10

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de posição ($\theta = q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

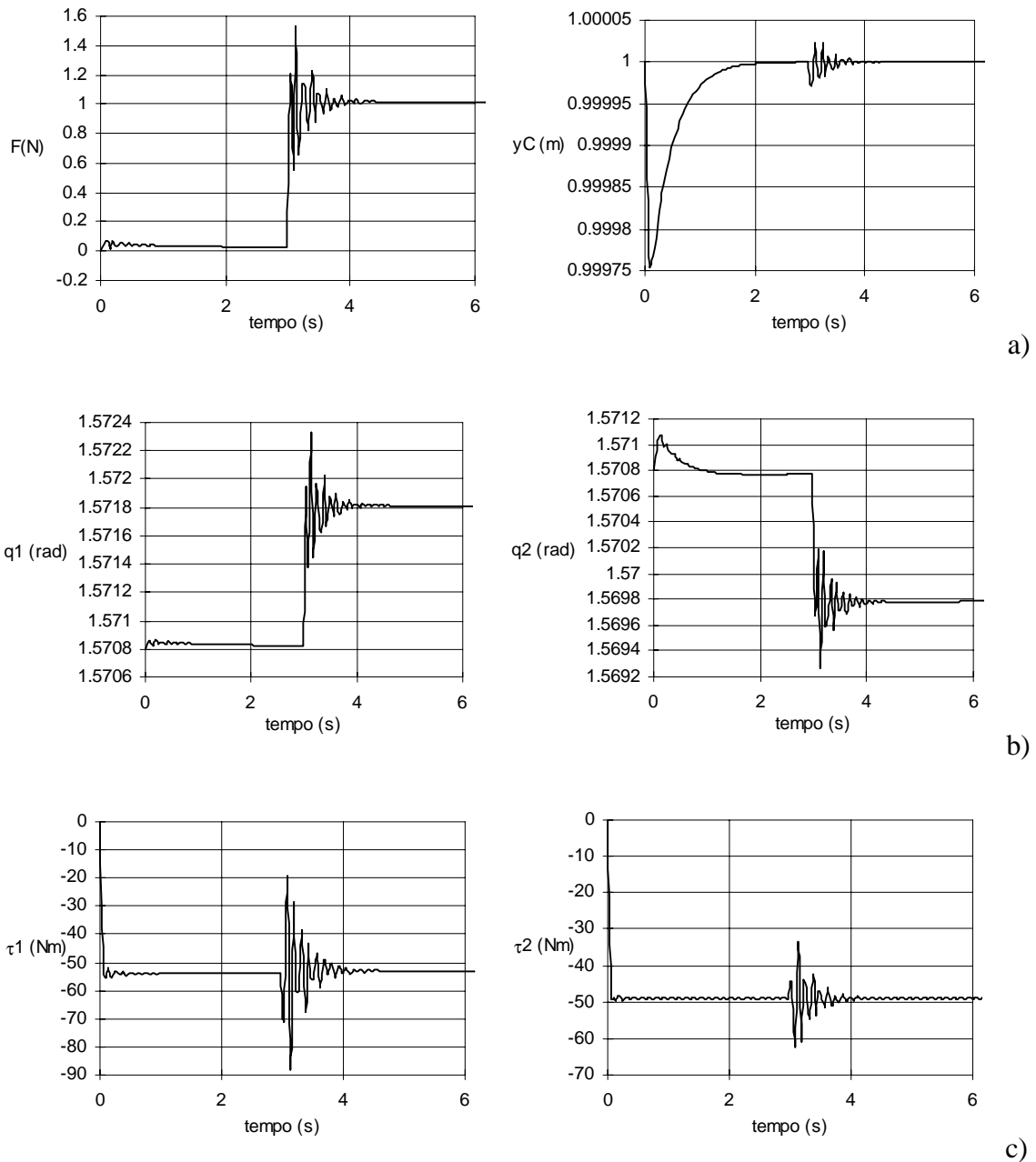


Figura 4.11

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de força ($\theta = q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $M = 0 \text{ Kg}$, $B = 1 \text{ Ns/m}$, $K = 100 \text{ N/m}$): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

Numa terceira simulação adopta-se um novo ponto de funcionamento do robot e da superfície restrição (isto é, adopta-se $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$) mantendo o CEV de posição da primeira simulação (Figura 4.6)

As Figuras 4.12 e 4.13 mostram, respectivamente, a resposta do sistema à entrada de posição em degrau e à entrada degrau de força referidos anteriormente. Este ponto de funcionamento vai ser utilizado também em secções posteriores.

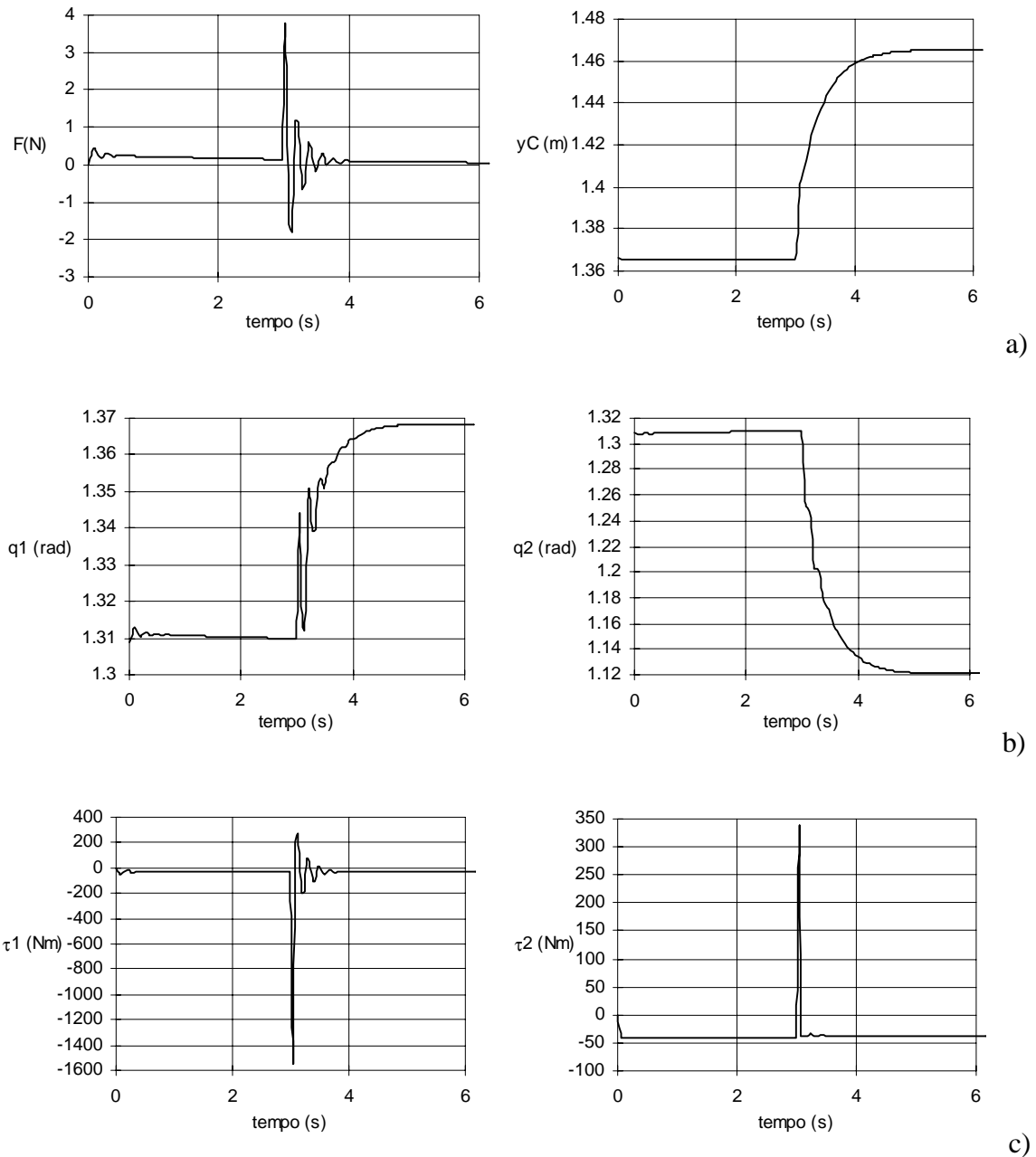


Figura 4.12

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de posição ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $M = 0 \text{ Kg}$, $B = 1 \text{ Ns/m}$, $K = 100 \text{ N/m}$): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

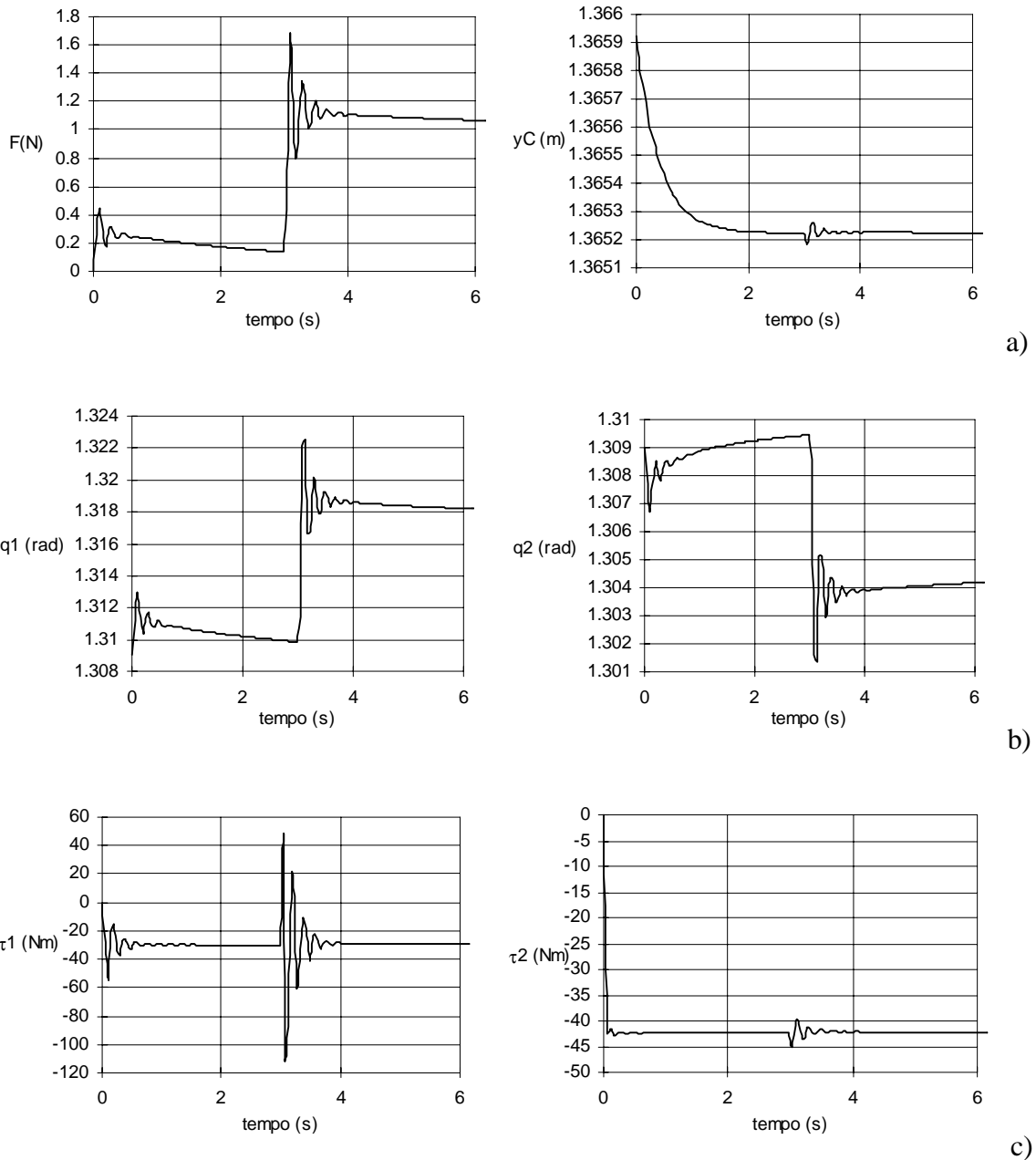


Figura 4.13

Resposta temporal do CH para uma entrada de degrau de força ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m): a) Força e posição; b) Posições angulares do robot; c) Binários nas juntas.

Como se pode verificar pelos resultados desta secção, o sistema é robusto relativamente ao ponto de funcionamento e o controlador de posição com acção integral reduz acentuadamente o erro de posição em regime permanente.

4.5 Resposta em frequência do sistema e a correcção da pseudo-inversa

Neste parágrafo analisa-se o comportamento dinâmico através da resposta em frequência em malha fechada do CH. Assim, na subsecção 4.5.1 estuda-se o comportamento do sistema para pontos de funcionamento distintos de forma a verificar a sua robustez. Na subsecção 4.5.2 apresenta-se a resposta em frequência em função de valores diferentes da massa e da mola da superfície restrição. Por último, na subsecção 4.5.3, estuda-se o CH perto de pontos singulares com a formulação da matriz inversa clássica e com a reformulação da matriz pseudo-inversa do anel de controlo de posição.

4.5.1 Comportamento do CH através da respectiva resposta em frequência

A resposta em frequência é obtida através de dois métodos: excitando o sistema com um sinal exponencial ou, alternativamente, por injeção de sinusóides nas entradas e observação das saídas. Decidiu-se utilizar a resposta em frequência na análise de um sistema não linear pois são muito limitadas as ferramentas de estudo deste tipo de sistemas. No entanto, como se trata de um sistema em malha fechada, e como estes sistemas muitas vezes apresentam um certo grau de linearidade, optou-se por verificar o seu comportamento para pequenos sinais de entrada através da sua resposta em frequência.

Para excitar o sistema aplica-se o sinal de entrada $x_i(t)$ (4.8), onde A é a amplitude da exponencial e λ é a sua constante de tempo (Figura 4.14). A partir de $x_o(t)$ pode-se obter a resposta em frequência do sistema. Este método é mais rápido do que o método de injeção de frequências, mas em geral é menos exacto.

$$x_i(t) = A(1 - e^{-\lambda t})h(t) \quad (4.8)$$

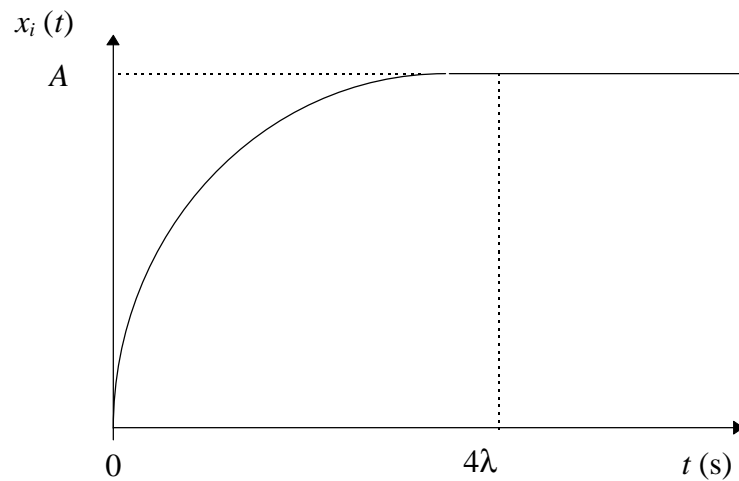


Figura 4.14

Evolução temporal do sinal de entrada $x_i(t)$.

A transformada de Fourier vem (4.9):

$$X_i(j\omega) = A \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + \lambda} \right) \quad (4.9)$$

Para calcular a função de transferência para o sistema é necessário que as saídas do sistema estabilizem ao fim de t_f segundos, sendo-lhe depois somado o sinal auxiliar $Ch(t-t_f)$, onde C é o valor da saída respectiva para $t = t_f$. Deste modo, a transformada de Fourier da saída é dada por (4.10):

$$X_o(j\omega) = \int_0^{t_f} x_o(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{C}{j\omega} e^{-j\omega t_f} \quad (4.10)$$

Então, a resposta em frequência (r.f.), $H(j\omega)$, é obtida através de (4.11):

$$H(j\omega) = \frac{|X_o(j\omega)|}{|X_i(j\omega)|} \quad (4.11)$$

O cálculo do integral na equação (4.10) é realizado numericamente, à frequência de amostragem da saída de 1 kHz, utilizando uma constante de tempo do sinal exponencial

com o valor $\lambda = 100 \text{ s}^{-1}$. Foram testadas várias regras de integração numérica (Nakamura, 1991) entre as quais a regra de Simpson 1/3 a 1 kHz e a 10 kHz e a de Newton-Cotes 7 a 1 kHz sendo a primeira a que deu melhores resultados.

Como os sinais das saídas são amostrados a 1 kHz, a máxima frequência à qual se consegue determinar numericamente é de 50 Hz devido à existência do fenómeno de corrupção espectral (aliasing) introduzida pela amostragem. Apesar desta limitação, no teste por injeção de sinusóides verifica-se que a máxima frequência de trabalho que o sistema suporta sem ocorrerem instabilidades é de cerca de 10 Hz. Logo, a frequência de amostragem é suficientemente elevada para se poder determinar a resposta em frequência do sistema por aplicação de exponenciais nas entradas na zona de frequências de funcionamento estável do CH.

Apesar do sistema ser não linear, confirma-se que, na zona de funcionamento estável (*i.e.* $f \in [0, 10]$ Hz), o CH tem um comportamento aproximadamente linear. Esta propriedade deve-se ao facto do sistema não-linear realimentados por controladores serem robustos. Deste modo, dentro de uma certa margem de exactidão, a resposta em frequência não depende das amplitudes das exponenciais ou das amplitudes das sinusóides de excitação de entrada. Esta propriedade foi verificada experimentalmente por simulação.

Um outro pormenor a realçar tem a ver com as condições iniciais das variáveis do CH. De facto, não se aplica o sinal exponencial às entradas no instante inicial de simulação, mas somente passados três segundos. Esta estratégia tem o objectivo de deixar o sistema encontrar um estado de equilíbrio antes do sinal de entrada ser aplicado. A resposta em frequência obtida por este método é suficientemente fiável e permite rápida execução, especialmente para baixas frequências, em comparação com o segundo método onde é necessário um tempo de simulação muito superior.

Nesta secção utilizam-se CEVs adoptados na secção anterior. A acção de controlo é dada na Tabela 4.2 e a superfície de deslizamento do CEV, da malha de controlo de posição, é o que tem a acção derivativa e proporcional com $c_{Pi} = 2.5 \text{ s}^{-1}$ ($i = 1,2$). O CEV da malha de controlo de força consiste nas acções proporcional e integral na superfície de deslizamento com $c_{Fi} = 0.25 \text{ s}^{-1}$ ($i = 1,2$).

Num primeiro exemplo de cálculo da resposta em frequência do CH considere-se o ponto de funcionamento $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100 \text{ N/m}$, $B = 1 \text{ Ns/m}$ e $M = 0 \text{ Kg}$ sem se utilizar a correcção da pseudo-inversa no algoritmo de controlo. Além disso, utiliza-

-se $t_f = 20$ s, pois ao fim deste tempo as saídas (y_C e F) do CH estabilizam dentro de uma margem de erro aceitável. A frequência do controlador é de $f_c = 10$ kHz. Neste exemplo utilizam-se os dois métodos de excitação para comparar a sua eficácia.

Na Figura 4.15 apresenta-se as resposta em frequência obtidas através da injeção de sinusóides nas entradas (y_{Cd} e F_d). O parâmetro a , na Figura 4.15, é o valor da amplitude da sinusóide.

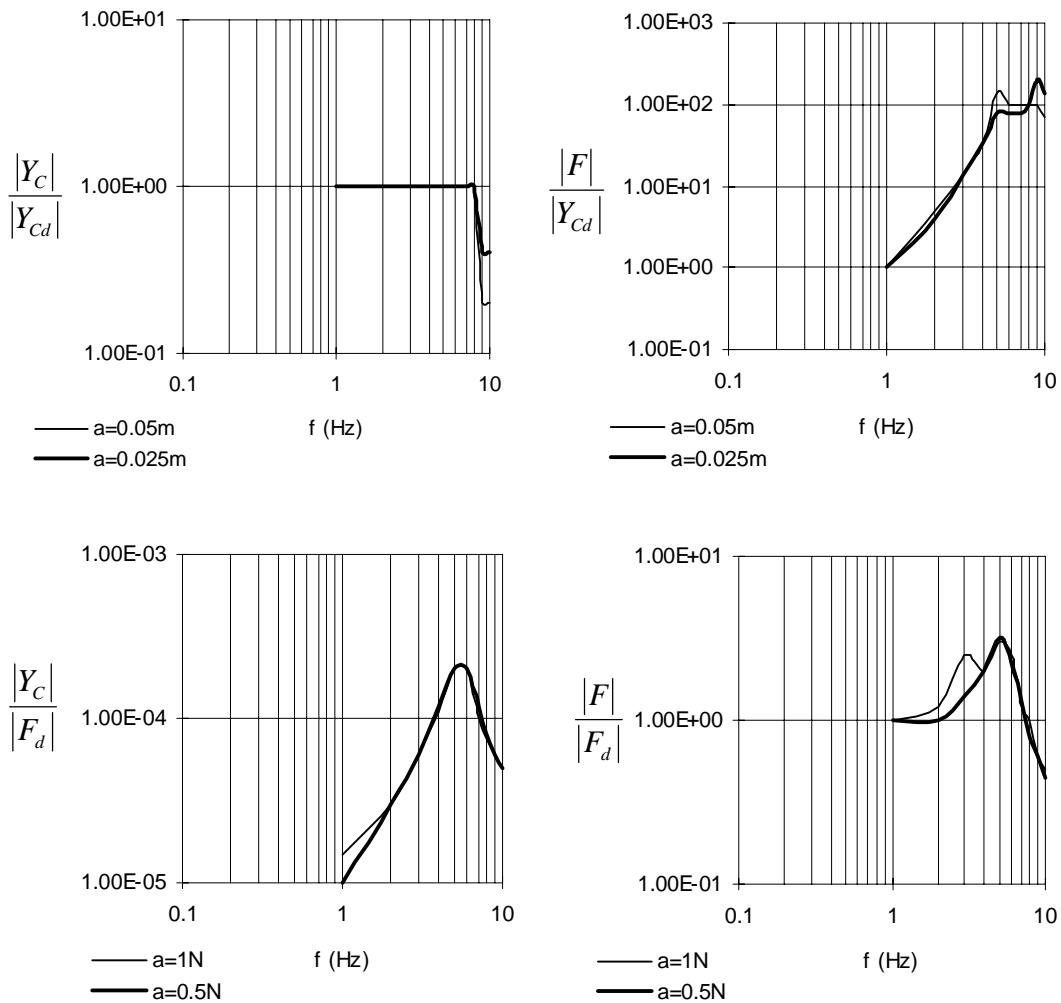


Figura 4.15

Resposta em frequência em malha fechada do CH obtida através da injeção de sinusóides ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m).

Na Figura 4.16 mostra-se a resposta em frequência obtida através do método de injeção de exponenciais. Note-se que consegue-se obter facilmente a resposta em

frequência para baixas frequências, ou seja, para $f < 1$ Hz. O valor apresentado em legenda em cada gráfico é a amplitude da exponencial A .

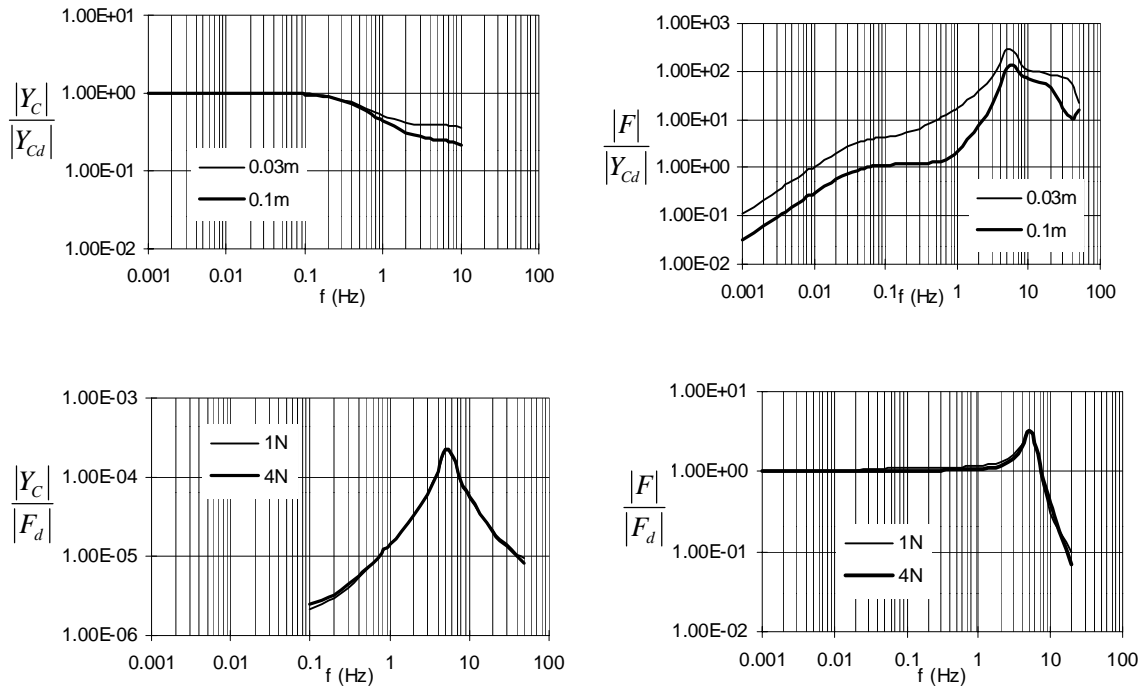


Figura 4.16

Resposta em frequência em malha fechada do CH obtida através da injeção de exponenciais ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $M = 0$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $K = 100$ N/m).

Verifica-se que a resposta em frequência obtida através da utilização de exponenciais é credível dentro de uma margem de erro aceitável.

Vamos estudar agora um segundo ponto de funcionamento: $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0$ Kg. Na Figura 4.17 apresenta-se a resposta em frequência do CH, obtida através da injeção de exponenciais.

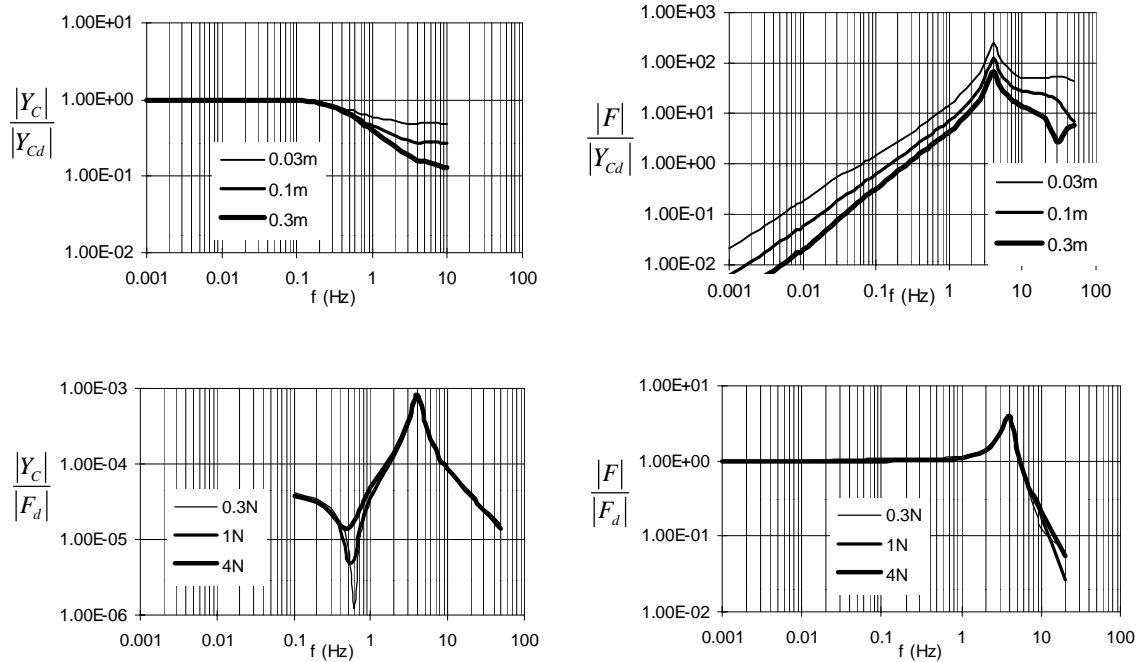


Figura 4.17

Resposta em frequência em malha fechada do CH obtida através da injeção de exponenciais ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0$ Kg).

Verifica-se, em conclusão, que o CH apresenta boas propriedades de robustez e de linearidade. A frequência superior de corte do sistema para a superfície restrição adoptada é cerca de $f = 4$ Hz.

4.5.2 Comportamento do sistema para valores variáveis dos parâmetros da superfície restrição e da frequência do controlador

De seguida estuda-se o comportamento do CH face à variação da massa M da superfície restrição. Assim, na Figura 4.18 apresenta-se a resposta em frequência do sistema para $M = 0.1$ Kg. De notar a ressonância que aparece a frequência mais elevada do que a encontrada anteriormente para $M = 0$ Kg. Simulando novamente o CH para $M = 0.15$ Kg verifica-se que o sistema diverge. Um factor de estabilização do sistema consiste na constante de amortecimento da superfície restrição B . Verifica-se que à medida que B aumenta o sistema apresenta melhor estabilidade, embora seja mais lento na resposta a solicitações de força. O parâmetro K (mola da superfície restrição) tem pouca influência na

estabilidade do sistema, pelo que o CH estudado é robusto face a variações deste parâmetro.

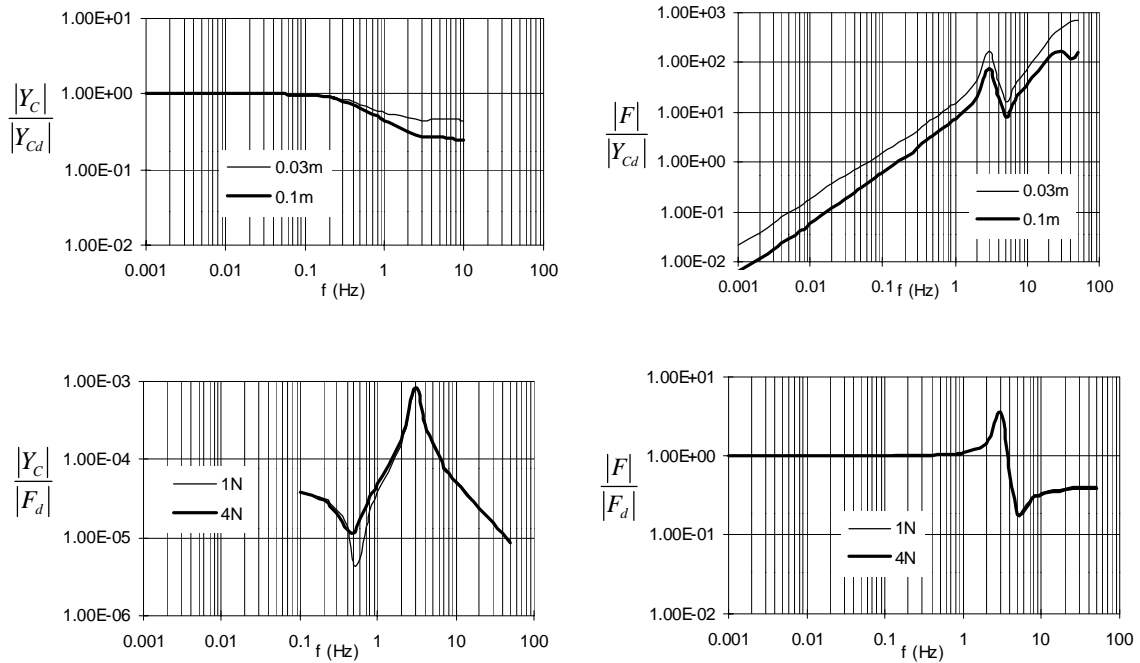


Figura 4.18

Resposta em frequência em malha fechada do CH obtida através da injeção de exponenciais ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0.1$ Kg), $f_c = 10$ kHz.

De seguida, considera-se $M = 0$ Kg e estuda-se o comportamento da resposta em frequência do CH a variações de K (mola da superfície restrição). Assim, nas Figuras 4.19 e 4.20 mostram-se respectivamente as respostas em frequência para $K = 1,000$ N/m e $K = 10,000$ N/m, mantendo os restantes parâmetros do CH.

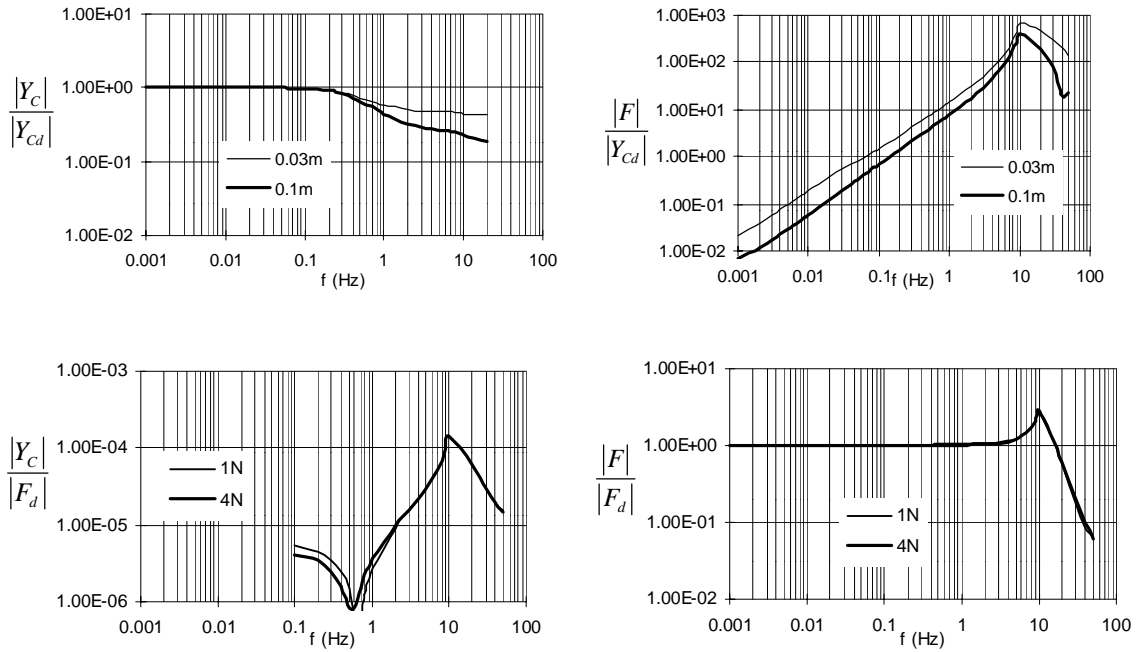


Figura 4.19

Resposta em frequência em malha fechada do CH ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 1000$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0$ Kg), $f_c = 10$ kHz.

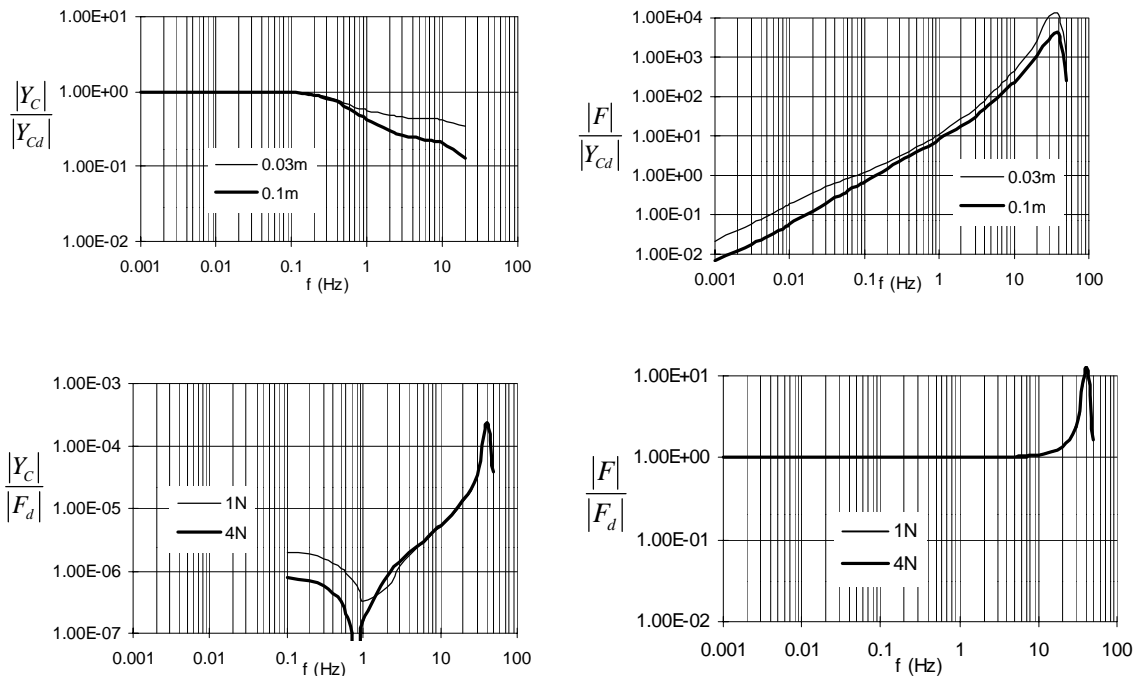


Figura 4.20

Resposta em frequência em malha fechada do CH ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 10000$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0$ Kg), $f_c = 10$ kHz.

Das Figuras 4.19 e 4.20, conclui-se que o aumento do valor da constante de elasticidade da mola da superfície restrição se traduz no aumento da frequência de ressonância do sistema de CH.

Nesta secção analisa-se também, através da resposta em frequência, a influência da frequência do controlador f_c no desempenho do CH. Para o efeito, utilizam-se como parâmetros da superfície restrição $K = 1,000$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0$ Kg. Como se tem adoptado até agora $f_c = 10$ kHz, para efeitos de comparação nas Figuras 4.21 e 4.22 adoptam-se, respectivamente, $f_c = 1$ kHz e $f_c = 500$ Hz.

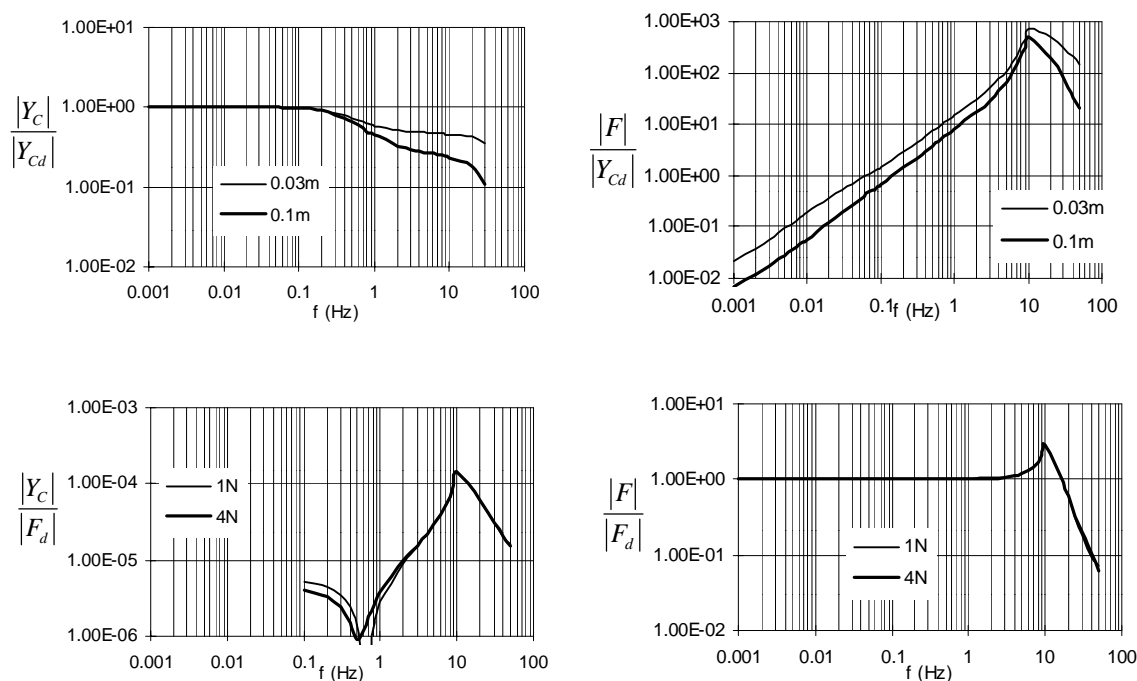


Figura 4.21

Resposta em frequência em malha fechada do CH ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 1000$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

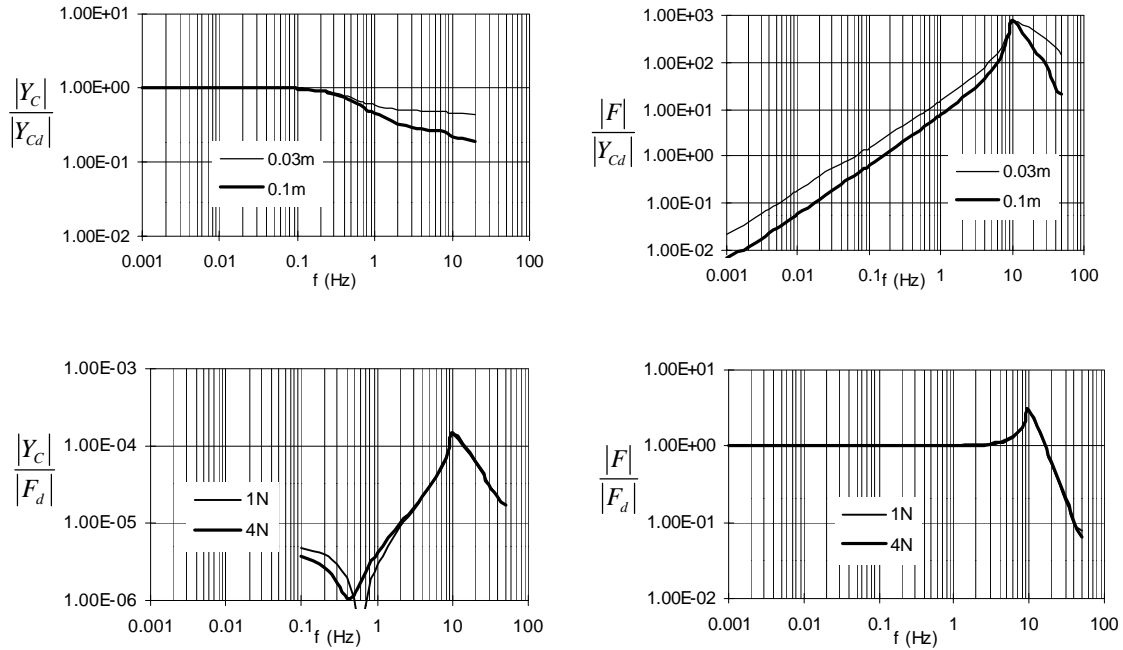


Figura 4.22

Resposta em frequência em malha fechada do CH ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = \pi/2$, $K = 1000$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0$ Kg), $f_c = 500$ Hz.

Das Figuras 4.21 e 4.22 não se observam diferenças significativas. Consta-se que a frequência do controlador é insuficiente tornando deste modo o sistema instável quando f_c desce para baixo de 500 Hz.

4.5.3 Comportamento do CH perto e longe de pontos singulares

De seguida comparam-se as respostas em frequência do sistema, para o algoritmo original e usando a formulação da pseudo-inversa. Neste sentido, as Figuras 4.23 e 4.24 mostram as respostas em frequência do sistema, com a inversa clássica e com a formulação através da pseudo-inversa, para os sinais de entrada $\delta y_{cd} = 0.005$ m e $\delta F_d = 0.1$ N, com os parâmetros $K = 400$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0.03$ Kg e para dois pontos de funcionamento distintos ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$ e $\theta = \pi/2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = 5\pi/36$).

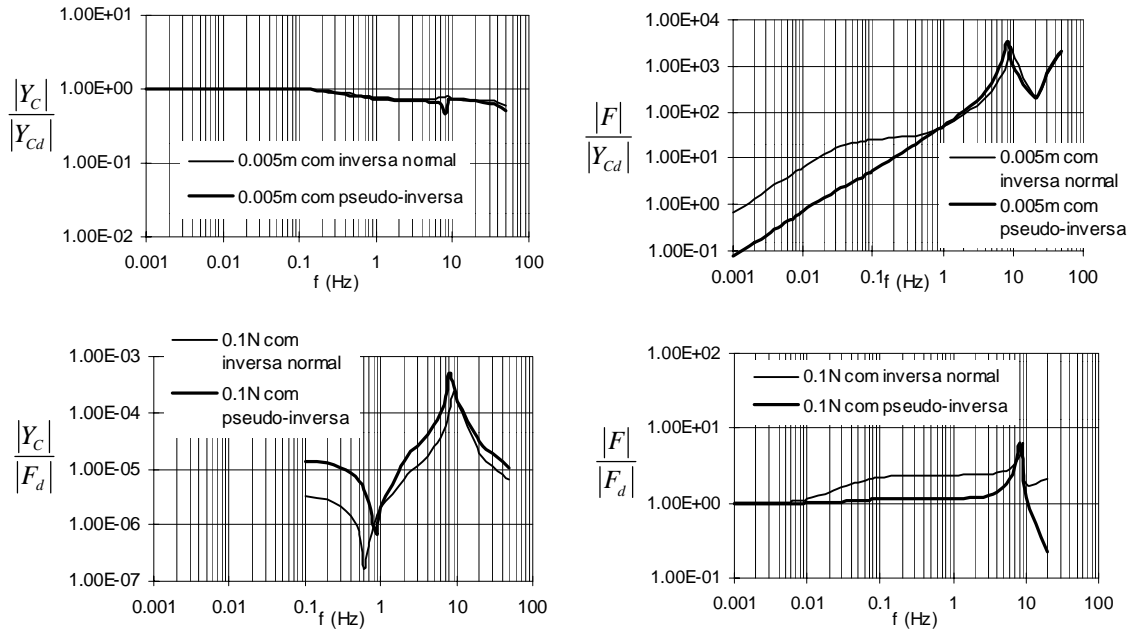


Figura 4.23

Resposta em frequência em malha fechada do sistema, com a inversa clássica e com a formulação da pseudo-inversa, no ponto de funcionamento $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$ e $K = 400$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0.03$ Kg, $f_c = 1$ kHz.

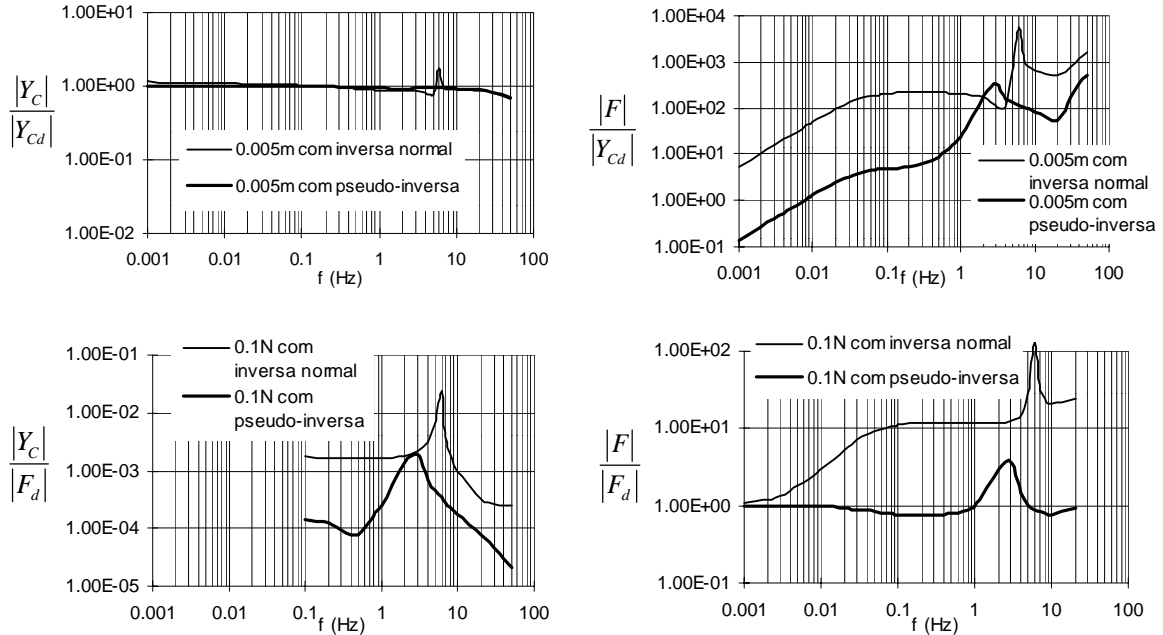


Figura 4.24

Resposta em frequência em malha fechada do sistema, com a inversa clássica e com a formulação da pseudo-inversa, no ponto de funcionamento $\theta = \pi/2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = 5\pi/36$ e $K = 400$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0.03$ Kg, $f_c = 1$ kHz.

Conclui-se que as respostas em frequência são aproximadamente idênticas para pontos de funcionamento longe de configurações singulares (Figura 4.23). Por outro lado, na vizinhança de pontos singulares (Figura 4.24) a formulação através da pseudo-inversa (p.i.) conduz a desempenhos superiores. Por exemplo, para um terceiro ponto de funcionamento $\{\theta = \pi/2, q_{10} = 0, q_{20} = 4\pi/36\}$ a formulação através da p.i. é capaz de estabilizar o sistema em contraste com a abordagem tradicional onde se obtém um sistema instável.

De seguida analisa-se a estabilidade do sistema através de um vasto conjunto de experiências que testa o espaço de trabalho. Nesta perspectiva, as Figuras 4.25 a 4.32 apresentam o lugar geométrico da estabilidade do sistema no espaço de trabalho para $B = 0.5$ e $B = 0.3$, para as configurações cinemáticas de “cotovelo para cima” e “cotovelo para baixo” e para o cálculo da matriz inversa usando as formulações clássica e da pseudo-inversa. As experiências foram efectuadas com:

$$y_{cd} = y_{c0} = r_1 \cos(\theta - q_{10}) + r_2 \cos(\theta - q_{10} - q_{20}) \quad (4.12a)$$

$$F_d = 1 \text{ N} \quad (4.12b)$$

$$\theta = \pi/2 \quad (4.12c)$$

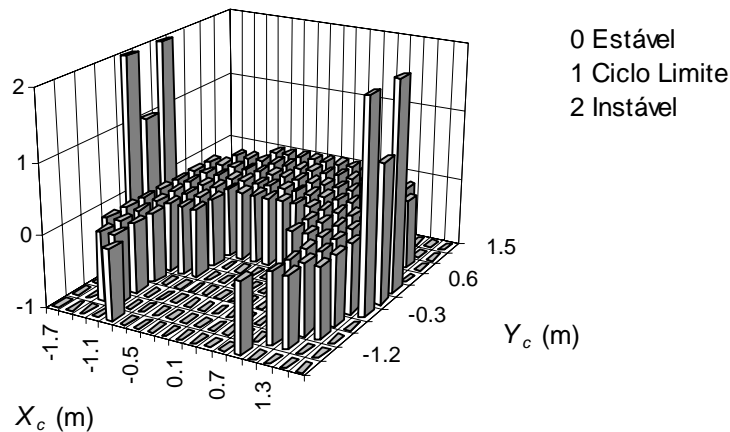


Figura 4.25

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a inversa clássica ($B = 0.5$ Ns/m, configuração “cotovelo para cima”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

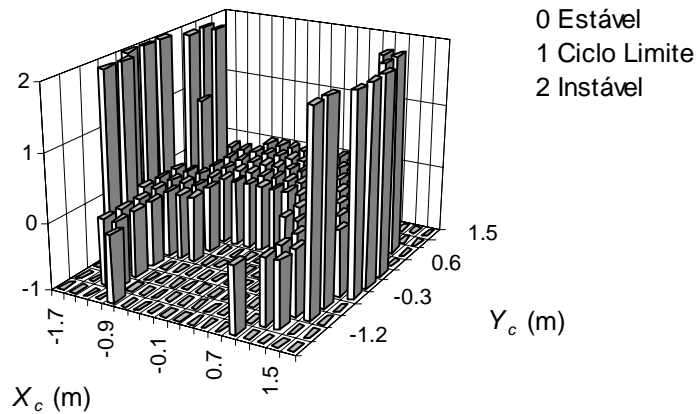


Figura 4.26

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a inversa clássica ($B = 0.3$ Ns/m, configuração “cotovelo para cima”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

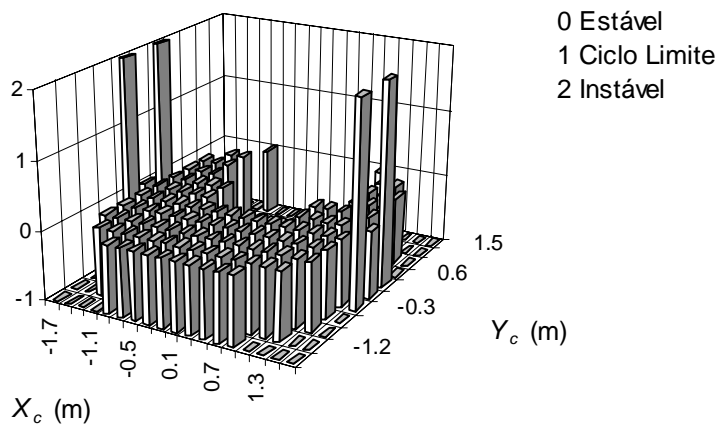


Figura 4.27

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a inversa clássica ($B = 0.5$ Ns/m, configuração “cotovelo para baixo”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

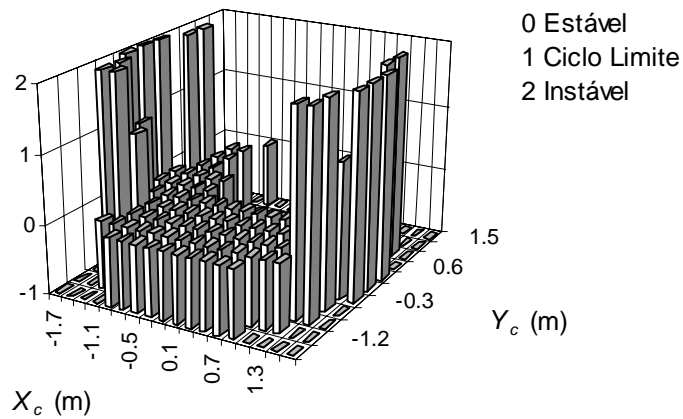


Figura 4.28

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a inversa clássica ($B = 0.3$ Ns/m, configuração “cotovelo para baixo”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

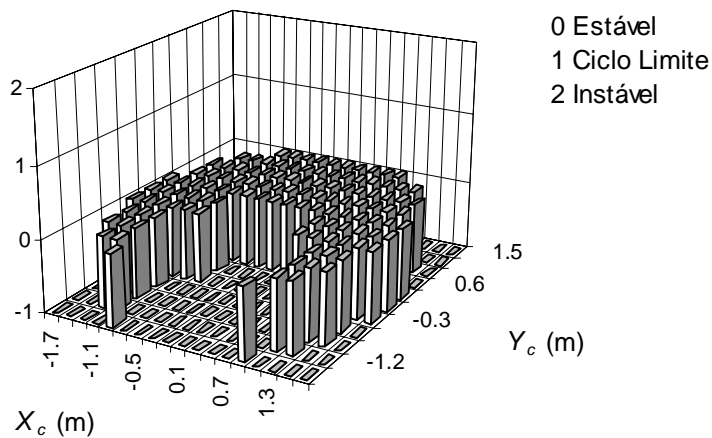


Figura 4.29

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a formulação da pseudo-inversa ($B = 0.5$ Ns/m, configuração “cotovelo para cima”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

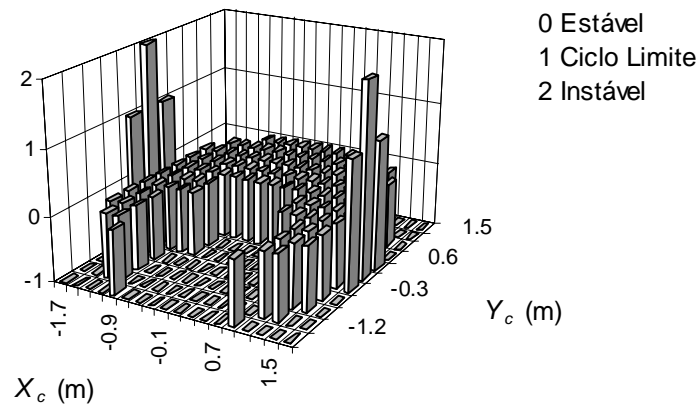


Figura 4.30

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a formulação da pseudo-inversa ($B = 0.3$ Ns/m, configuração “cotovelo para cima”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

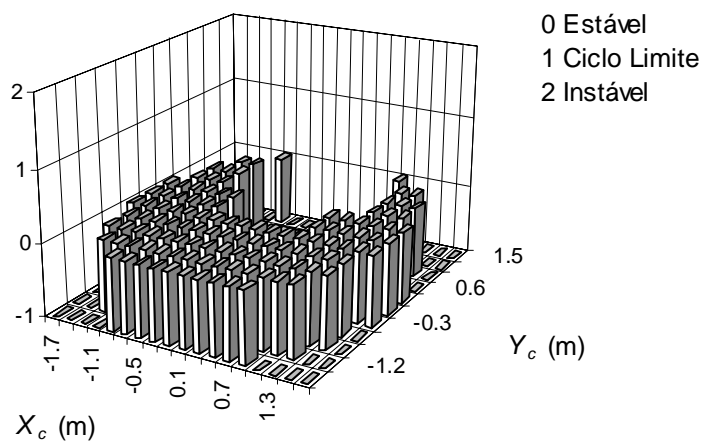


Figura 4.31

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a formulação da pseudo-inversa ($B = 0.5$ Ns/m, configuração “cotovelo para baixo”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

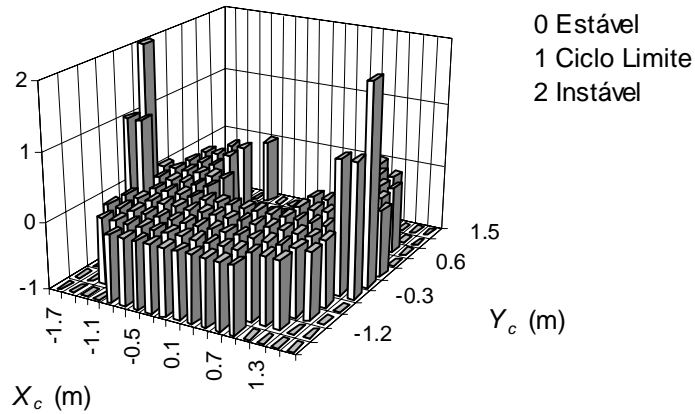


Figura 4.32

Lugar geométrico de estabilidade do espaço de trabalho para o sistema usando a formulação da pseudo-inversa ($B = 0.3$ Ns/m, configuração “cotovelo para baixo”, $F_d = 1$ N, $\theta = \pi/2$, $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg), $f_c = 1$ kHz.

Conclui-se que o sistema tem tendência para ser instável para valores baixos de B , enquanto que o tipo de configuração (*i.e.* “cotovelo para cima” ou “cotovelo para baixo”) têm uma influência pouco significativa. Além disso, o algoritmo de controlo que adopta a p.i. é superior ao que usa a inversa clássica pois é capaz de estabilizar o sistema na vizinhança de pontos singulares.

De seguida compara-se a resposta temporal do sistema perto de pontos singulares, para a superfície restrição com a perturbação em rampa representada na Figura 4.33.

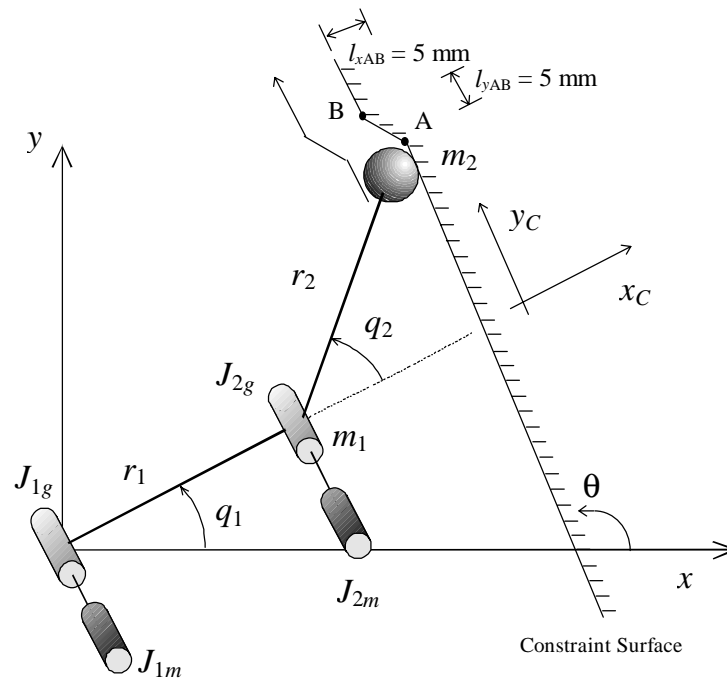


Figura 4.33

O robot 2R e a superfície restrição com uma perturbação em forma de rampa.

Nas Figuras 4.34 e 4.35 mostram-se as respostas, respectivamente, para os sistemas com as formulações da inversa clássica e da pseudo-inversa com $\theta = \pi/2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = 5\pi/36$, $B = 5 \text{ Ns/m}$, $y_{ec} = y_{cd} - y_c$ e $F_d = 1 \text{ N}$. O controlador de posição adopta um CEV com acção integral na superfície restrição como já explicado anteriormente na secção 4.4, para testar o sistema com um erro de posição pouco significativo em regime permanente. Em ambas as experiências o órgão terminal do robot descreve uma trajetória passando pelos pontos A para B nos instantes de tempo $t_A = 3 \text{ s}$ e $t_B = 4.5 \text{ s}$.

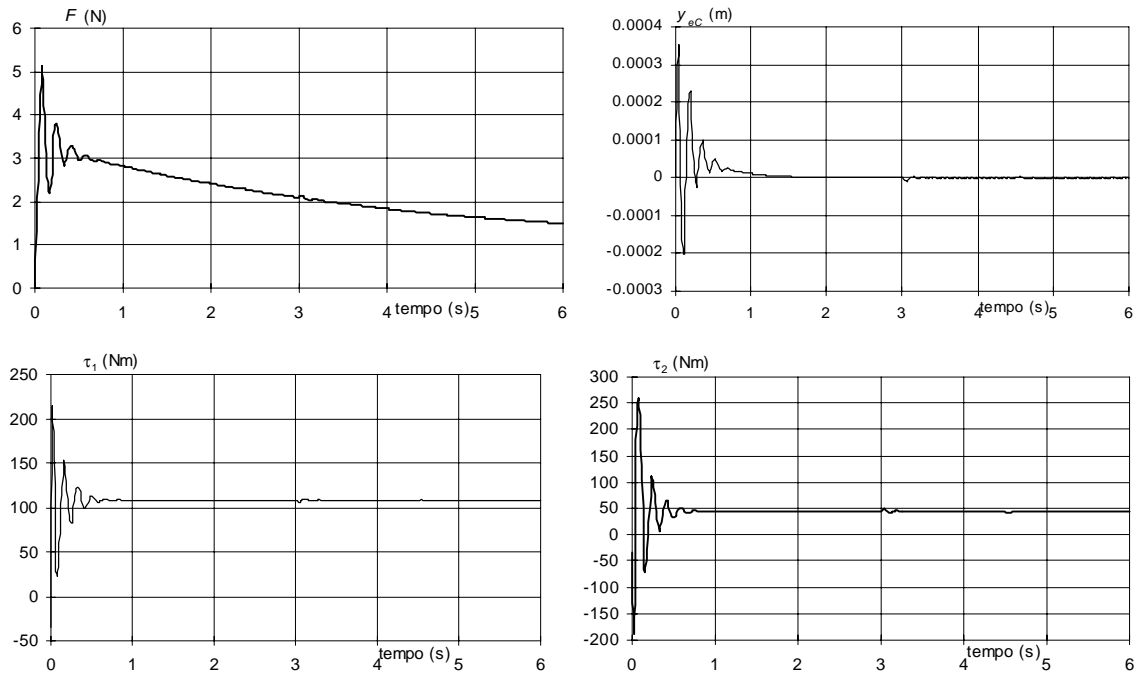


Figura 4.34

Respostas temporais para a superfície restrição com a perturbação em forma de rampa e o algoritmo clássico de cálculo da inversa, $t_A = 3$ s e $t_B = 4.5$ s ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = 5\pi/36$ e $K = 400$ N/m, $B = 5$ Ns/m, $M = 0.03$ Kg).

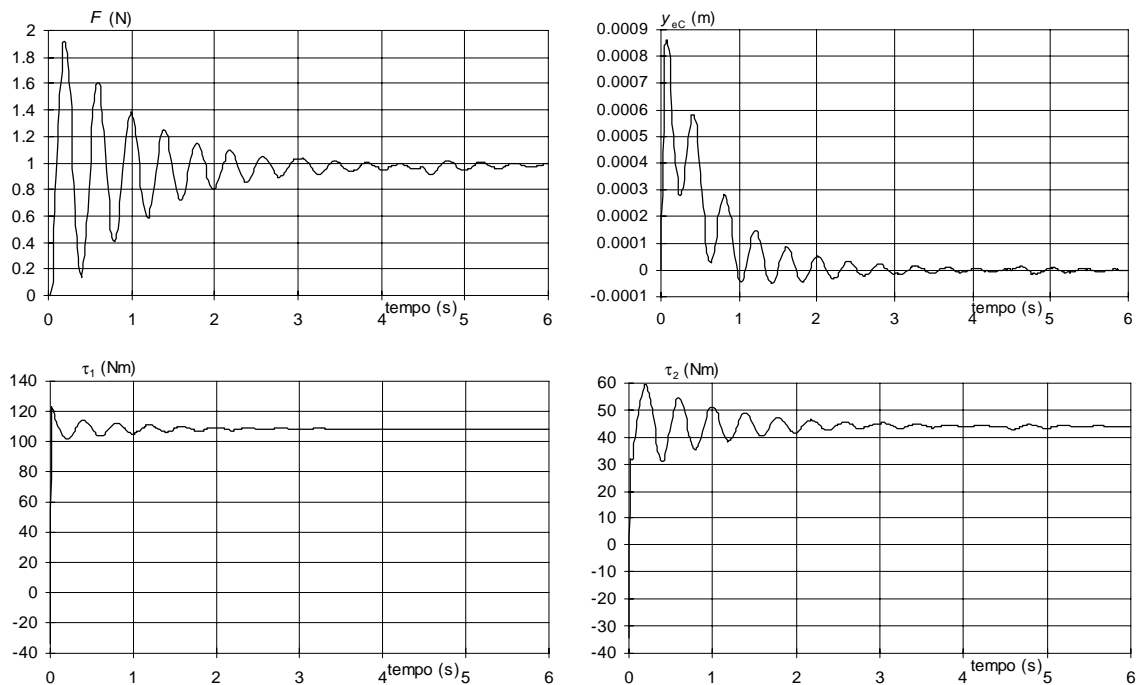


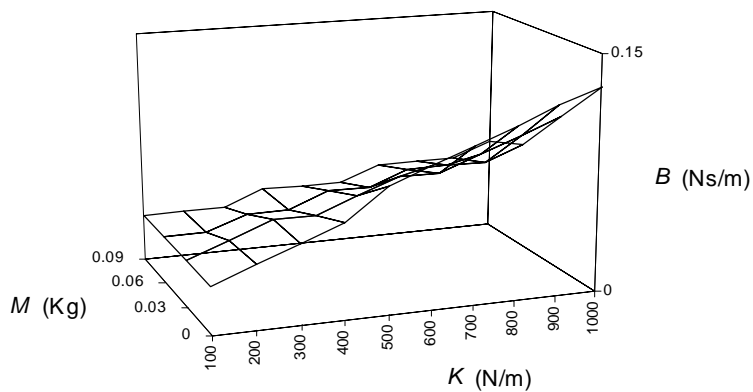
Figura 4.35

Respostas temporais para a superfície restrição com a perturbação em forma de rampa e o algoritmo de pseudo-inversa, $t_A = 3$ s e $t_B = 4.5$ s ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = 5\pi/36$ e $K = 400$ N/m, $B = 5$ Ns/m, $M = 0.03$ Kg).

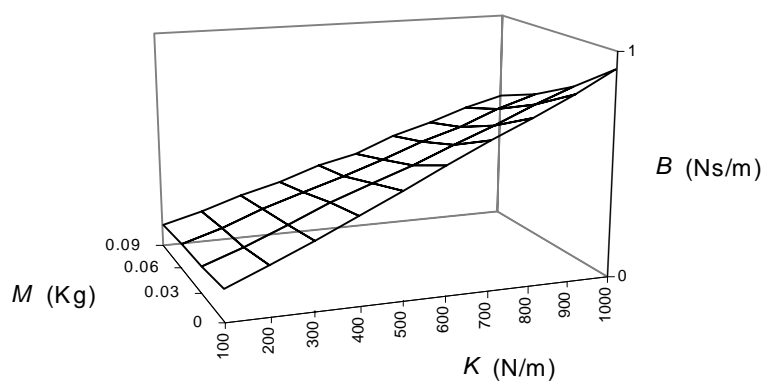
O sistema que adopta a pseudo-inversa apresenta respostas superiores, nomeadamente o erro de força e os binários transitórios requeridos são menores. Em contrapartida, o sistema com a pseudo-inversa revela uma maior sobrelevação do erro de posição.

4.6 Zonas de estabilidade em função dos parâmetros da superfície restrição

Nesta secção estuda-se o desempenho do controlador sob diferentes condições de funcionamento. A Figura 4.36 apresenta os gráficos dos parâmetros da superfície restrição de segunda ordem para duas condições de funcionamento distintas $\{\theta, q_{10}, q_{20}\}$ que originam um ciclo limite quando o sistema é controlado através dos CEVs da secção 4.4 de primeira ordem.



a)



b)

Figura 4.36

Lugar geométrico dos parâmetros da superfície restrição que levam à ocorrência de ciclos limite ($f_c = 1$ kHz): a) $\theta = \pi/2, q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$; b) $\theta = 3\pi/2, q_{10} = \pi/2, q_{20} = -\pi/4$.

Conclui-se que no caso de se alterar o ponto de funcionamento, os limites de estabilidade, no que diz respeito aos parâmetros da superfície restrição, podem variar significativamente. Mais ainda, o sistema torna-se estável/instável se B é superior/inferior aos limites indicados na Figura 4.36.

As expressões aproximadas para os limites de estabilidade mostrados na Figura 4.36, obtidas através de um método numérico aproximado vêm:

$$B = 54.6 \times 10^{-6} K - 0.265 M + 0.0393 \quad (4.13a)$$

$$B = 69.8 \times 10^{-6} K - 1.45 M + 0.105 \quad (4.13b)$$

Nas Figuras 4.37 e 4.38 mostram-se as amplitudes da posição dos ciclos limite (a_p) e as suas frequências (f) para as experiências anteriores. As expressões numéricas aproximadas correspondentes são:

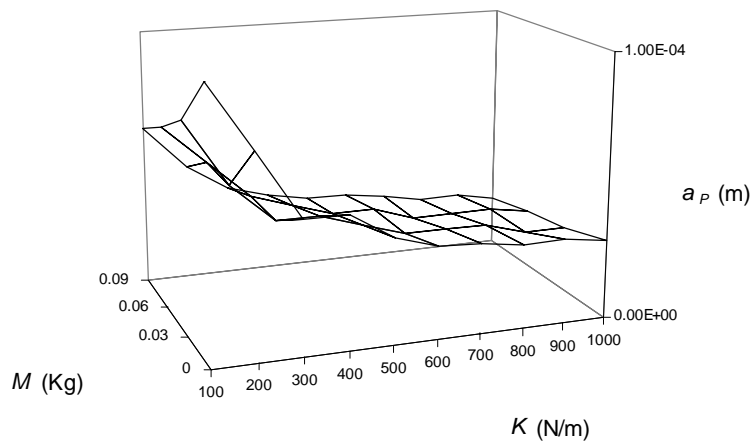
$$a_p = \frac{0.238K + 0.699M - 0.707}{(4.95K + 1.01M + 1.19)^2} \quad (4.14a)$$

$$f = 0.01K - 31.9M + 5.52 \quad (4.14b)$$

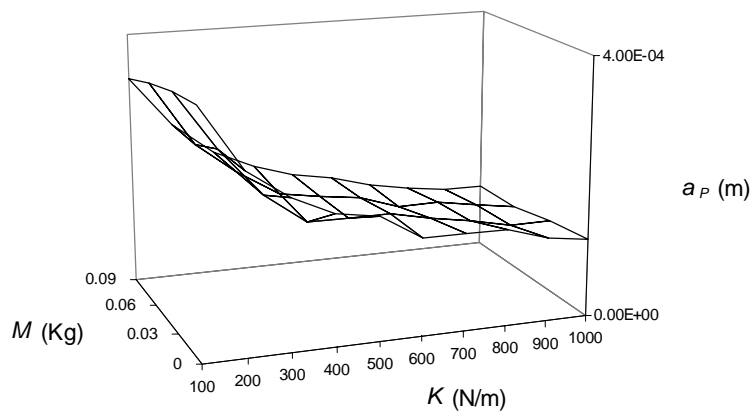
e

$$a_p = \frac{1.10K + 0.994M - 2.93}{(4.87K + 0.903M + 2.87)^2} \quad (4.15a)$$

$$f = 0.00772K - 15.4M + 4.14 \quad (4.15b)$$



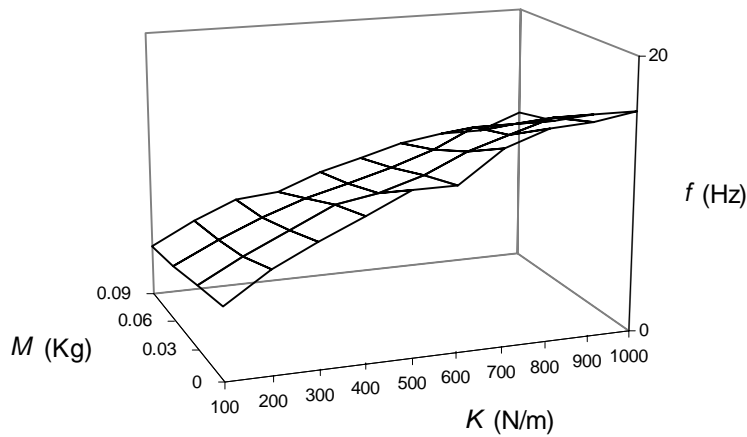
a)



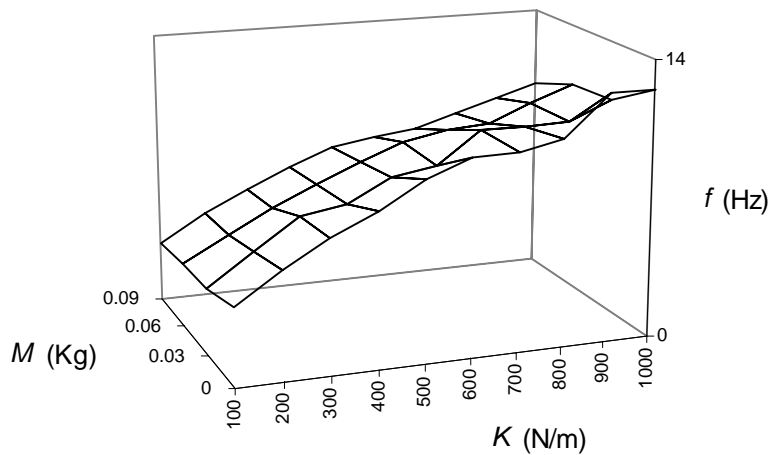
b)

Figura 4.37

Amplitude da oscilação da posição (a_P) para o caso de ocorrência de ciclo limite ($f_c = 1$ kHz): a) $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$; b) $\theta = 3\pi/2$, $q_{10} = \pi/2$, $q_{20} = -\pi/4$.



a)



b)

Figura 4.38

Frequência de oscilação (f) para o caso de ocorrência de ciclo limite ($f_c = 1$ kHz):

a) $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$; b) $\theta = 3\pi/2$, $q_{10} = \pi/2$, $q_{20} = -\pi/4$.

Em conclusão, o parâmetro B tem um papel fundamental na estabilidade do sistema que, por seu lado, pode variar significativamente com o ponto de funcionamento.

4.7 Aspectos relacionados com a modelização da superfície restrição e com a adoção de uma estratégia de amostragem por multifrequência

Nesta secção apresenta-se a resposta em frequência do CH quando se modeliza a superfície restrição como um sistema de segunda ordem ou, alternativamente como um sistema de primeira ordem com dois graus de liberdade. As expressões relativas às duas

alternativas foram apresentadas na secção 4.2. Apresentam-se também os resultados conseguidos quando se adopta um esquema de multifrequência para a amostragem nos subcontroladores de posição e de força.

Tendo em vista a comparação das respostas do sistema, quando se adopta modelos de segunda ou de primeira ordem, os parâmetros da superfície restrição são escolhidos de acordo com os seguintes critérios:

- Ganhos idênticos a baixas frequências;
- Frequências superiores de corte iguais.

Nas Figuras 4.39 e 4.40 mostram-se as respostas em frequência do sistema para o modelo de superfície de segunda ordem (com parâmetros $K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$) e para o modelo alternativo de primeira ordem (com parâmetros $K_1 = 400$ N/m, $K_2 = 20,000$ N/m, $B_2 = 3.40$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$). Em ambos os casos adopta-se o esquema da inversa clássica.

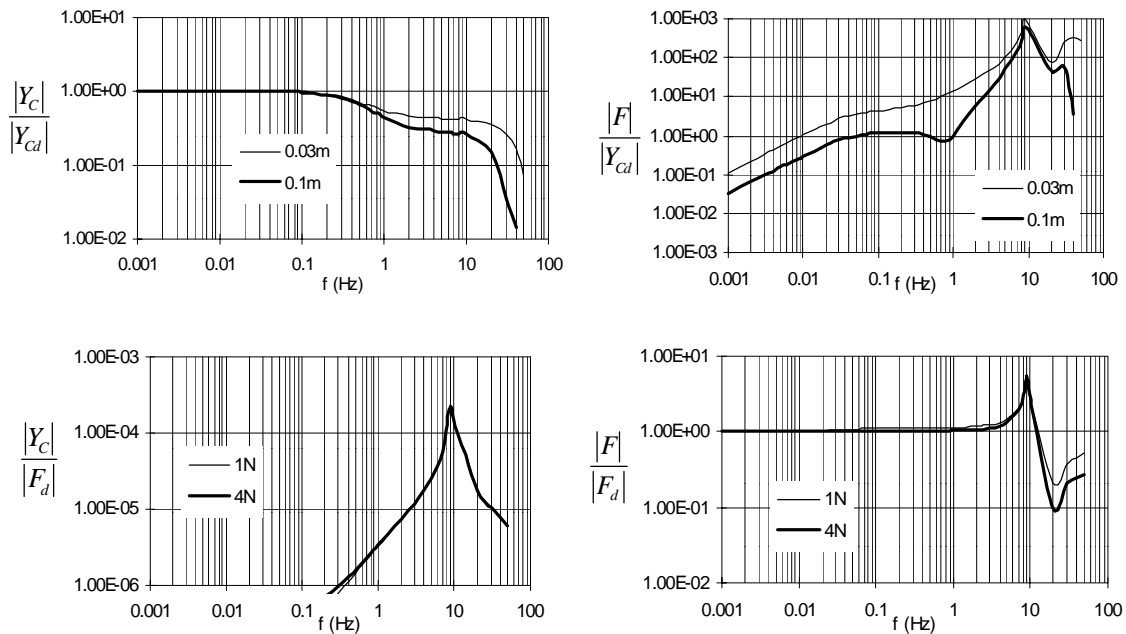


Figure 4.39

Resposta em frequência em malha fechada para o sistema com superfície restrição de segunda ordem ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$).

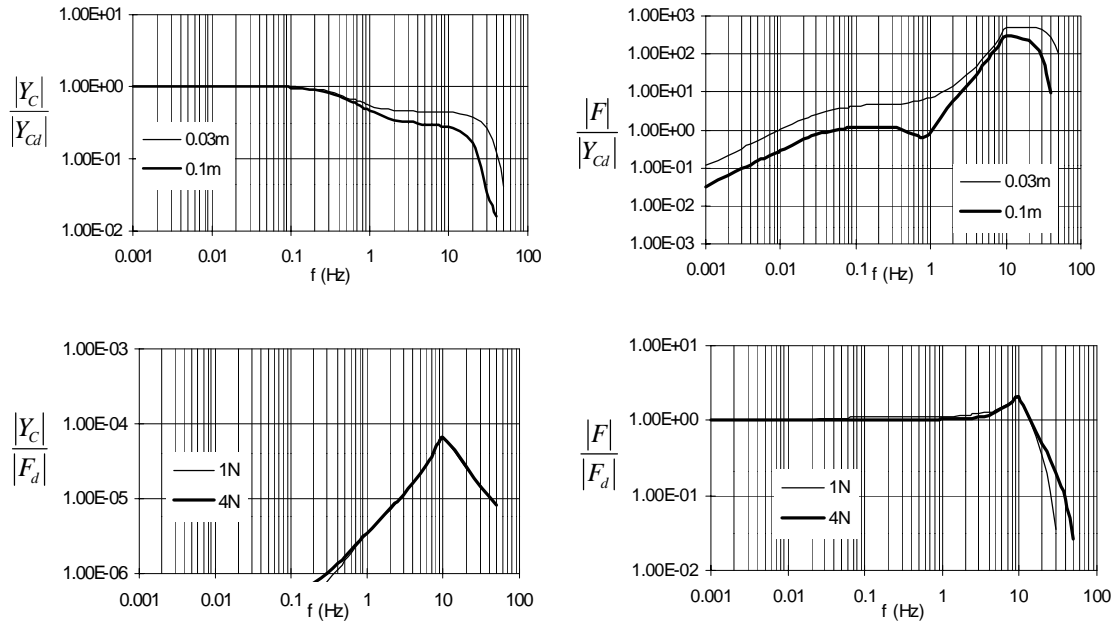


Figure 4.40

Resposta em frequência em malha fechada para o sistema com superfície restrição de primeira ordem ($K_1 = 400$ N/m, $K_2 = 20,000$ N/m, $B_2 = 3.40$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$).

Como se pode observar a partir destes resultados, o sistema é robusto para modelos diferentes do ambiente, apresenta boas propriedades de linearidade e a interacção entre as variáveis de posição e de força é reduzida.

Nesta secção estuda-se também o efeito na estabilidade do sistema quando se adoptam frequências de amostragem distintas nos anéis de posição e de força (*i.e.* f_P e f_F , respectivamente). Assim, a Figura 4.41 mostra o lugar geométrico do limite de estabilidade *versus* o amortecimento B para uma estratégia de controlo por multifrequência para o mesmo ponto de funcionamento ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$) e os parâmetros da superfície restrição de segunda ordem $M = 0.03$ Kg, $K = 400$ N/m.

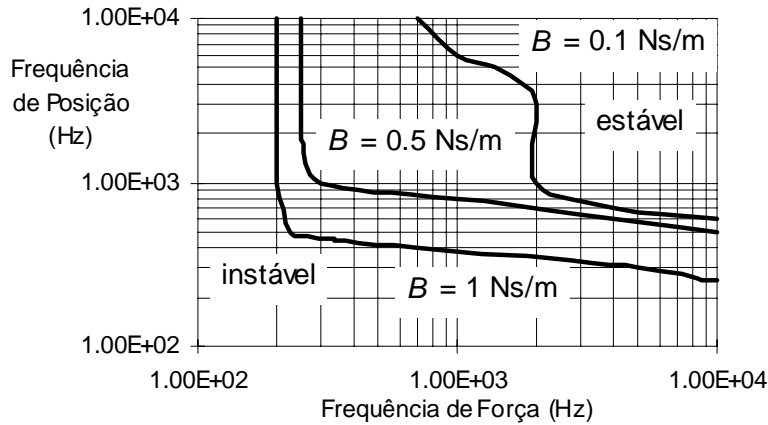


Figura 4.41

Lugar geométrico de estabilidade para o esquema de multifrequência quando $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $M = 0.03$ Kg, $K = 400$ N/m.

Conclui-se que o anel de posição requer uma frequência superior à do anel de força para valores elevados de B , enquanto que se verifica a situação inversa para pequenos valores de B . Além disso, constata-se que o comportamento do sistema modifica-se significativamente com o coeficiente de amortecimento B . Para valores elevados de B existe pouca variação com o ponto de funcionamento $\{\theta, q_{10}, q_{20}\}$. Além disso, para os valores numéricos adoptados verifica-se que o CH é estável para frequências de amostragem superiores a $f_p = f_F = 500$ Hz.

O esquema de multifrequência permite uma gestão mais eficiente dos recursos computacionais enquanto mantém um bom desempenho. De facto, para o robot 2R, a carga computacional total (L_T) imposta pelo algoritmo de multifrequência (ver Tabela 4.3) é:

$$L_T = \begin{cases} (4L_S + 16L_M + 16L_A) + \frac{f_F}{f_P}(4L_M + 3L_A), & \text{se } f_F \leq f_P \\ (2L_S + 7L_M + 8L_A) + \frac{f_P}{f_F}(2L_S + 13L_M + 11L_A), & \text{se } f_F > f_P \end{cases} \quad (4.16)$$

onde L_S , L_M e L_A representam respectivamente as cargas das operações *sin/cos*, *mult/div* e *adição*. Consequentemente, para $f_F \neq f_P$ obtém-se uma “aceleração” que pode melhorar a relação carga computacional global *versus* desempenho dinâmico.

<i>Operações</i>	<i>sin/cos</i>	<i>mult/div</i>	<i>adição</i>
Anel de Posição	2	13	11
Anel de Força	0	4	3
Termos Comuns	2	3	5
Total	4	20	19

Tabela 4.3

Peso computacional imposto pelos anéis de controlo híbrido posição/força para o robot 2R.

4.8 Controlo de robots com fenómenos dinâmicos não lineares nas juntas

Nesta secção analisa-se o desempenho do CEV híbrido de posição/força para robots com atritos não lineares, folgas e flexibilidades nas juntas. O modelo da superfície restrição utilizado nas experiências consiste no modelo de segunda ordem com os parâmetros $K = 400$ N/m, $B = 1$ Ns/m, $M = 0.03$ Kg. Os controladores adoptam valores numéricos idênticos aos do início deste capítulo (com um CEV de primeira ordem no anel de controlo de posição e com $f_c = 1$ kHz), para o ponto de funcionamento $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$.

Na Figura 4.42 mostra-se a resposta em frequência do sistema com atrito viscoso (B_i) e de Coulomb (K_i) nas juntas ($i = 1, 2$) do robot 2R.

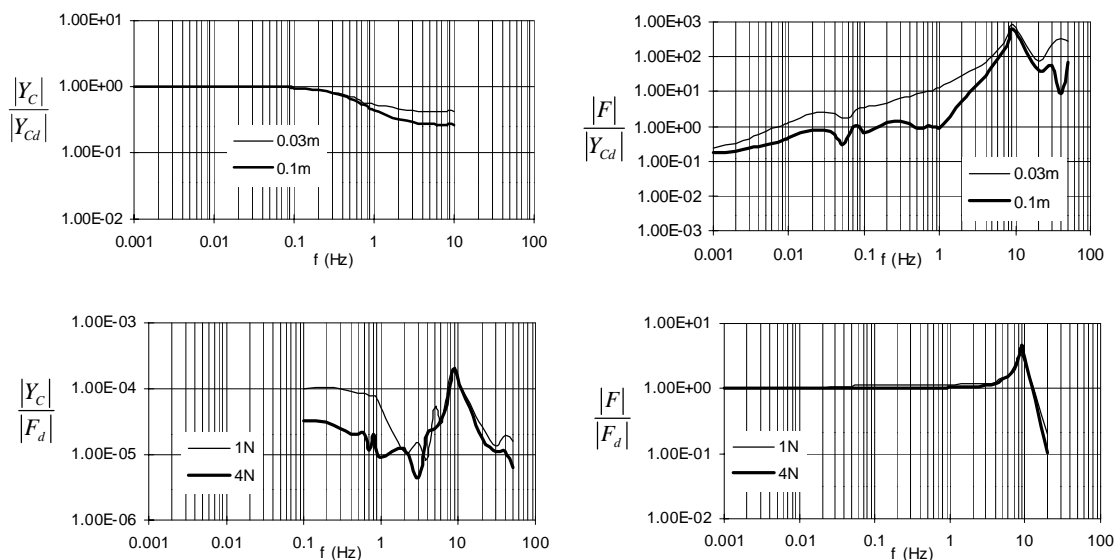


Figura 4.42

Resposta em frequência em malha fechada do CEV híbrido posição/força ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, robot de juntas com atrito, $B_i = 0.5$ Nms/rad, $K_i = 5$ Nm).

Por seu lado, a Figura 4.43 apresenta a resposta em frequência do sistema com folgas ($\varepsilon_i = 0.5$, $h_i = 0.00018$ rad) nas juntas ($i = 1, 2$) do robot 2R.

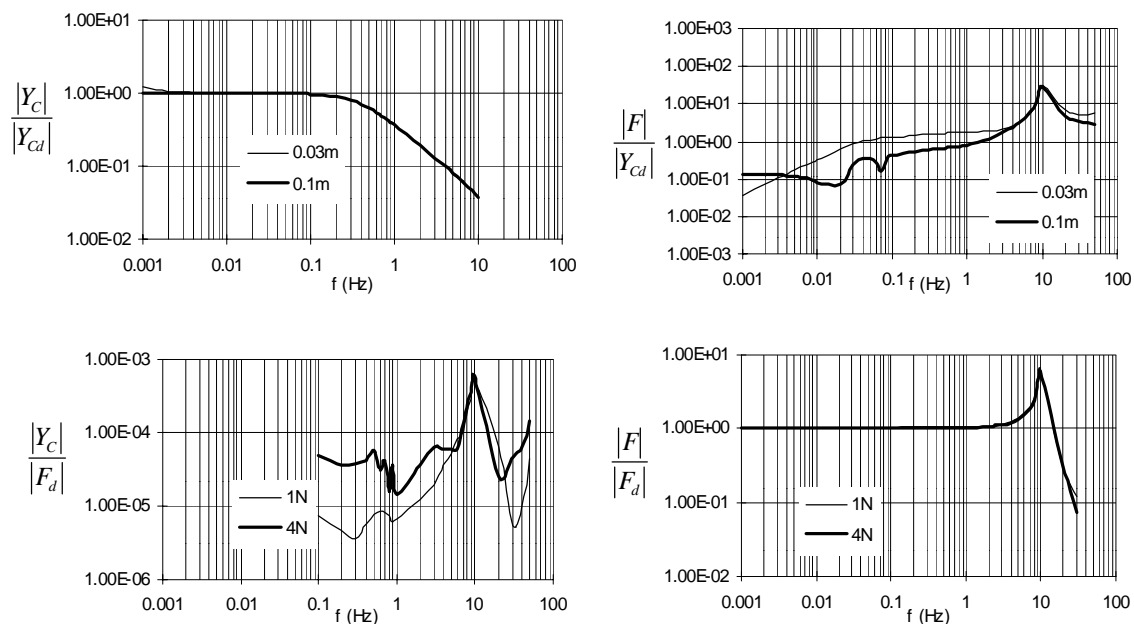


Figura 4.43

Resposta em frequência em malha fechada do CEV híbrido posição/força ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, robot de juntas com folgas, $\varepsilon_i = 0.5$, $h_i = 0.00018$ rad).

Por último, a Figura 4.44 mostra a resposta em frequência do sistema com flexibilidades ($K_{im} = 2 \times 10^7$ Nm/rad, $B_{im} = 10^4$ Nms/rad) nas juntas ($i = 1, 2$) do robot 2R.

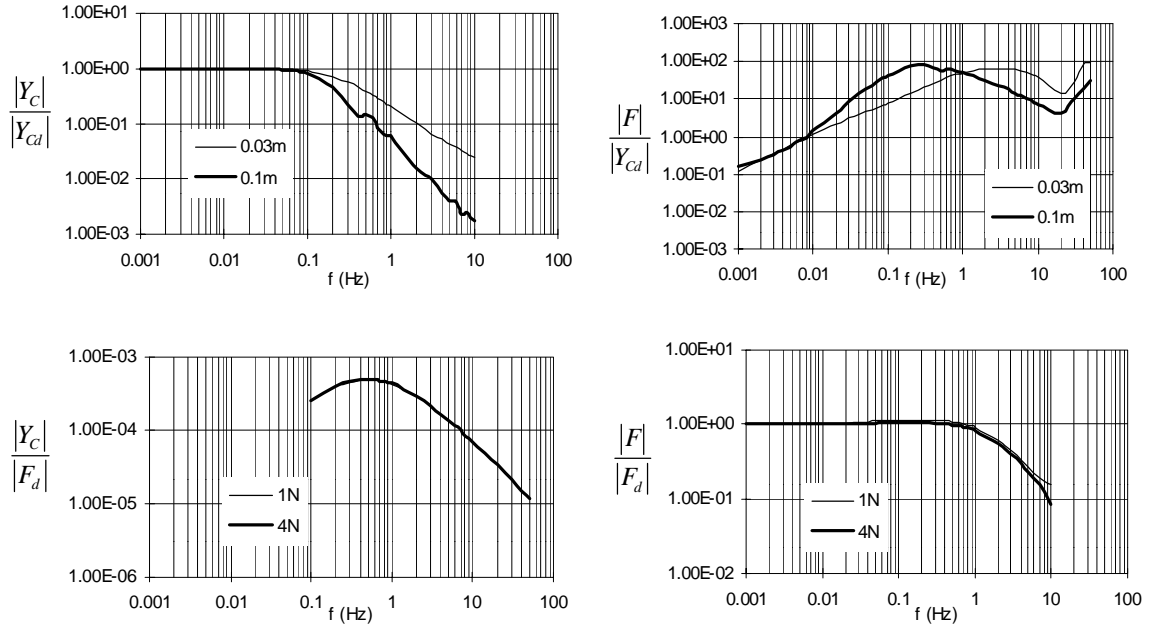


Figura 4.44

Resposta em frequência em malha fechada do CEV híbrido posição/força ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, robot de juntas com flexibilidades, $K_{im} = 2 \times 10^7$ Nm/rad, $B_{im} = 10^4$ Nms/rad).

A partir destes três conjuntos de gráficos conclui-se que o sistema é afectado consideravelmente pelo tipo de não linearidade nas juntas. Além disso, os casos do controlo de robots tendo juntas com folga ou com flexibilidade são os mais difíceis de estabilizar.

4.9 A ocorrência de impacto

Na Figura 4.45 apresenta-se novamente a estrutura do algoritmo de controlo híbrido posição/força está representada onde \mathbf{I} é a matriz identidade (de dimensão $n \times n$) e \mathbf{S} é a matriz selecção (de dimensão $n \times n$) com elementos diagonais iguais a um/zero nas direcções controladas em posição/força. Mais uma vez, considera-se que a coordenada y_C/x_C é controlada em posição/força no espaço restringido e o elemento s_{11} pode variar entre zero e um de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{J}_C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -r_1 C_{\theta_1} - r_2 C_{\theta_{12}} & -r_2 C_{\theta_{12}} \\ r_1 S_{\theta_1} + r_2 S_{\theta_{12}} & r_2 S_{\theta_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{\Lambda}_C: \begin{cases} x_C = r_1 S_{\theta_1} + r_2 S_{\theta_{12}} \\ y_C = r_1 C_{\theta_1} + r_2 C_{\theta_{12}} \end{cases} \quad (4.17c)$$

onde $C_{\theta_1} = \cos(\theta - q_1)$, $C_{\theta_{12}} = \cos(\theta - q_1 - q_2)$, $S_{\theta_1} = \sin(\theta - q_1)$ e $S_{\theta_{12}} = \sin(\theta - q_1 - q_2)$.

Nas subsecções seguintes apresenta-se uma estratégia para controlar o sistema durante o espaço de tempo que medeia entre o não contacto e o contacto com a superfície restrição. A superfície restrição é modelizada como um plano oblíquo ou como uma sinusóide espacial. Apresentam-se também resultados de simulações de possíveis estruturas de trabalho em termos de ambiente e de variação temporal do elemento s_{11} da matriz selecção.

4.9.1 O algoritmo de transição

Para o sistema da Figura 4.45 “comutar” o controlo de uma direcção de posição para força é necessário mudar o elemento s_{11} , da matriz selecção \mathbf{S} , de $s_{11} = 1$ para $s_{11} = 0$. Nesta subsecção investiga-se o desempenho para vários tipos de evolução temporal de s_{11} , isto é, não apenas para uma evolução em degrau unitário mas também como uma transição em rampa. Com esta heurística espera-se que a evolução em rampa de s_{11} origine respostas mais suaves do que as obtidas com transições instantâneas, em degrau. Além disso, se a transição não se aplicar no instante apropriado podem-se obter resultados inferiores pelo que se deve conjugar a transição com um planeamento de trajectórias adequado como será explicado de seguida.

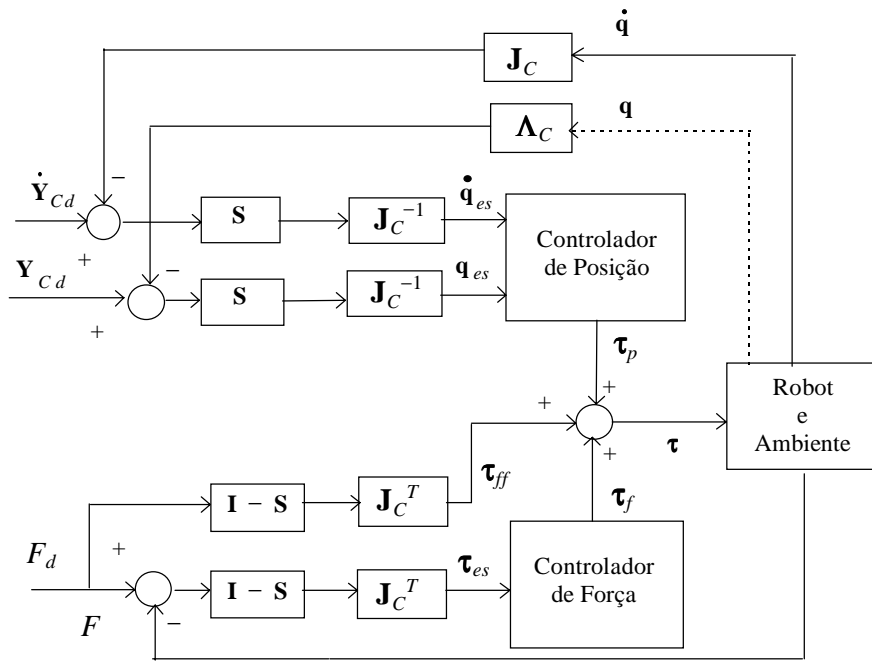


Figura 4.45

Diagrama de blocos do algoritmo de controlo híbrido posição/força.

4.9.2 A trajetória

De modo a testar o desempenho do sistema considere-se a trajetória e o ambiente restrição representados na Figura 4.46.

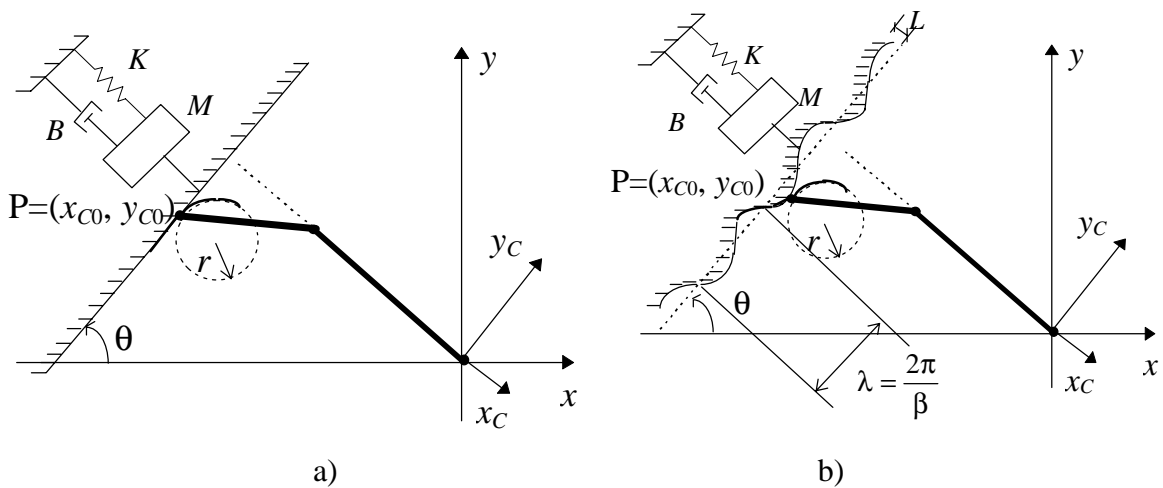


Figura 4.46

Trajectoria de teste do robot para a transição movimento no espaço livre \rightarrow impacto \rightarrow movimento restringido com superfície restrição com forma: a) Plana; b) Sinusóide (espacial).

No espaço livre o órgão terminal do robot descreve uma trajectória circular, com raio r e velocidade v_f , tangente à superfície restrição em $P = (x_{c0}, y_{c0})$ que é o ponto de referência para o impacto. Uma vez em contacto a garra do robot deverá seguir a superfície.

Nas experiências são consideradas dois tipos de superfícies: um plano (Figura 4.46a) e uma sinusóide espacial (Figura 4.46b), onde L e $1/\beta$ são a amplitude e o comprimento de onda da sinusóide, respectivamente.

Em ambos os casos, o contacto é modelizado como um sistema dinâmico linear:

$$F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx \quad (4.18)$$

onde F é a força de contacto e M , B e K são a massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

A frequência de amostragem do controlador é $f_c = 1$ kHz e os parâmetros por defeito da superfície restrição são $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m e $K = 400$ N/m. A força de contacto desejada é considerada como sendo constante e igual a $F_d = 1$ N em todas as experiências.

4.9.3 Desempenho dinâmico com impacto

Nesta subsecção apresentam-se as respostas temporais do sistema para variações de s_{11} em degrau e em rampa. Nestas experiências emprega-se um CEV no anel de posição com acção integral na superfície de deslizamento σ , de modo a testar o sistema para um erro de trajectória não desprezável. Para se comparar os resultados mantém-se o mesmo pólo dominante de σ . O CEV de força e os parâmetros de todos os CEVs são os mesmos da secção 4.4.

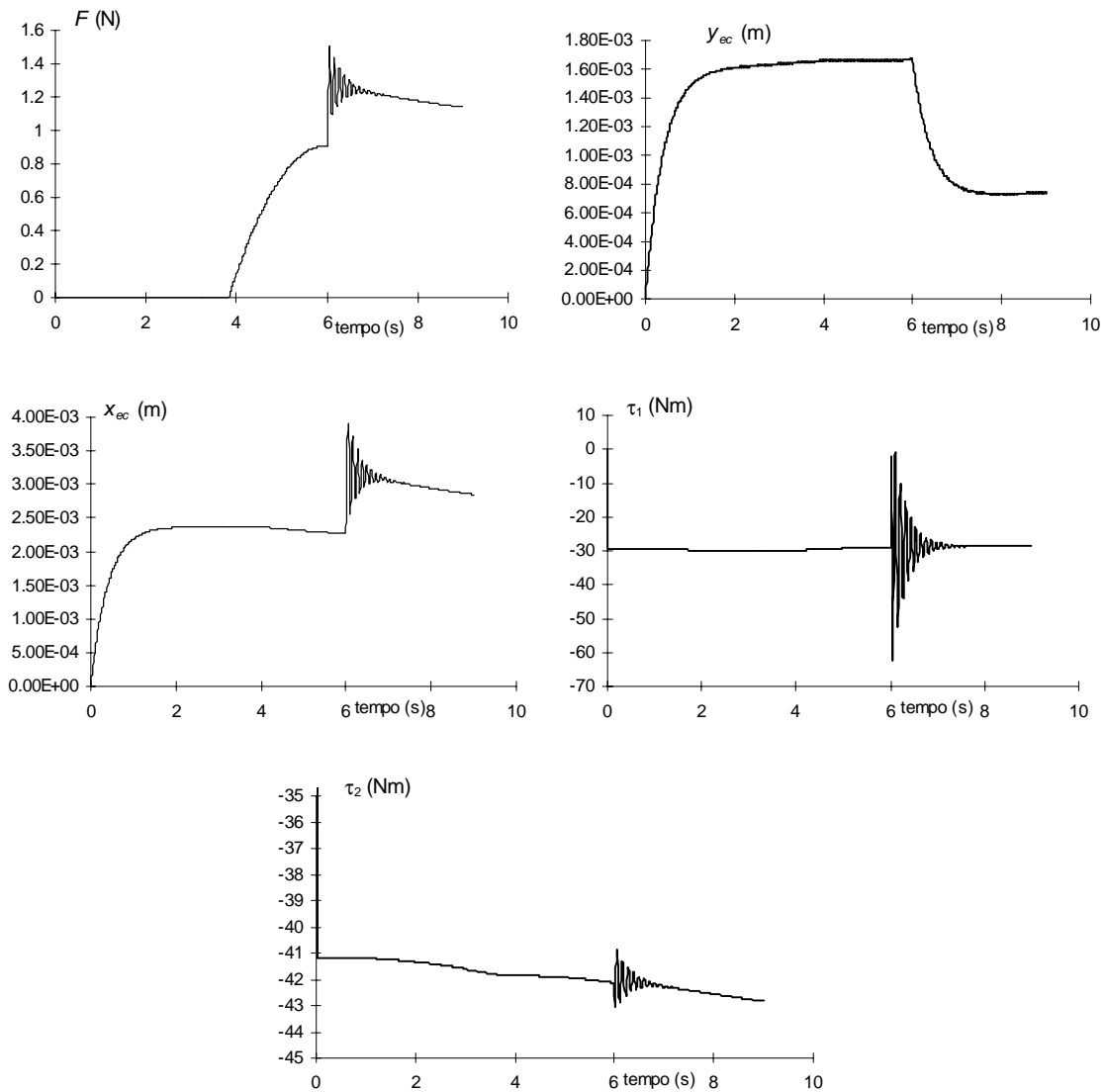


Figura 4.47

Respostas temporais do sistema para uma variação do elemento de selecção s_{11} em degrau em $t = 6$ s. Impacto em $t = 3.84$ s ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$).

Os parâmetros da trajectória desejada e do ponto de funcionamento P usados nesta subsecção são $r = 80$ mm, $v_f = 9$ mm/s, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$ e $\theta = \pi/2$.

A Figura 4.47 representa as respostas temporais do sistema para uma variação temporal em degrau aplicada em $t = 6$ s onde $y_{ec} = y_{Cd} - y_C$ e $x_{ec} = x_{Cd} - x_C$ são os erros das coordenada Cartesianas. Por outro lado, a Figura 4.48 representa as respostas temporais do sistema para uma variação temporal em rampa aplicada desde $t = 3$ s até $t = 6$ s.

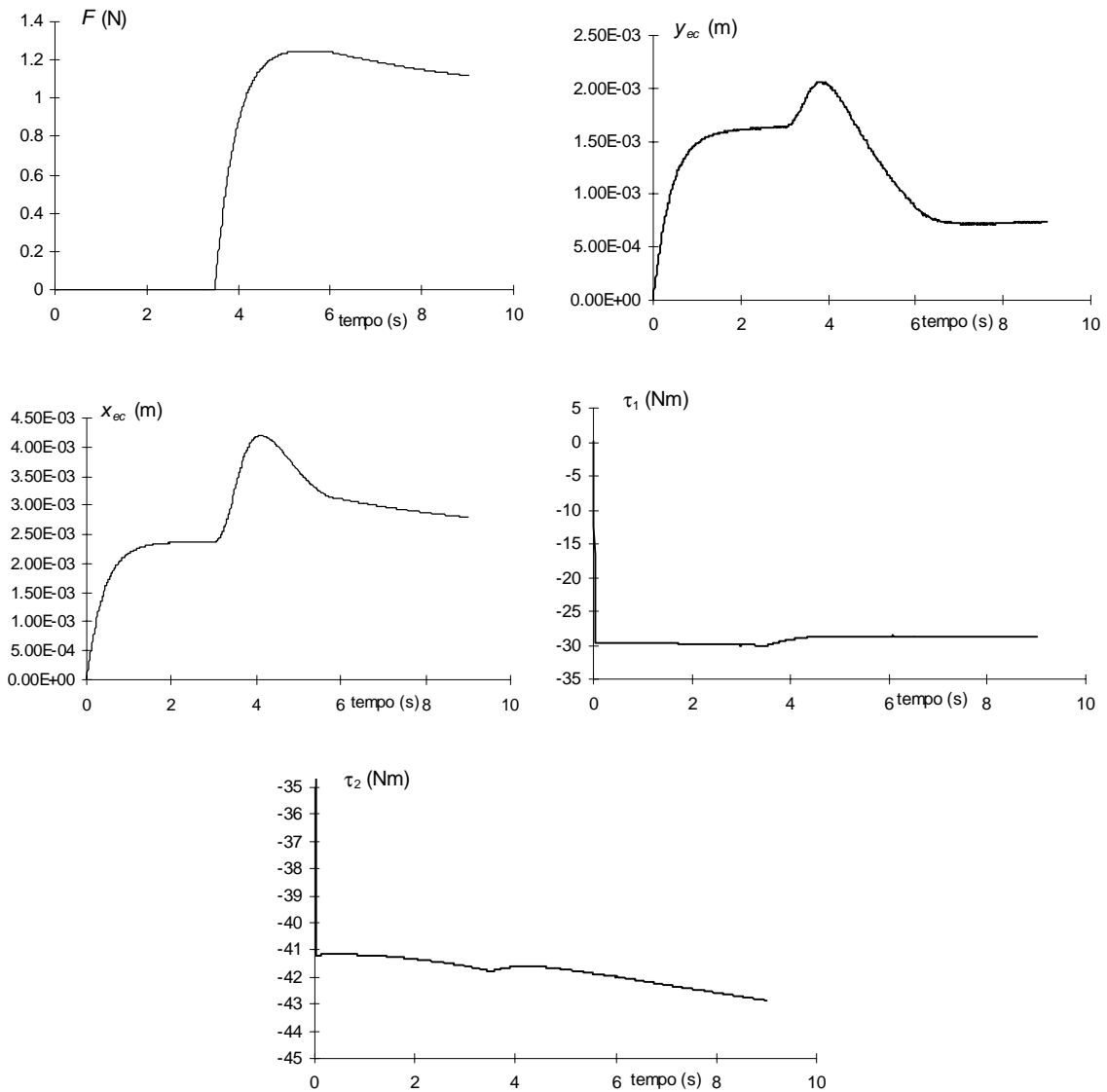


Figura 4.48

Respostas temporais do sistema para uma variação do elemento de selecção s_{11} em rampa entre $t = 3$ s e $t = 6$ s. Impacto em $t = 3.49$ s ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$).

Destas duas experiências conclui-se que a variação em rampa de s_{11} conduz a respostas do sistema mais suaves e a um melhoramento da robustez do sistema, nomeadamente para a “perturbação” representada pelo impacto. De modo a comparar o efeito da variação em rampa as Figuras 4.49 e 4.50 apresentam a resposta do sistema para uma transição em rampa de s_{11} desde $t = 4$ s até $t = 6$ s e uma variação de s_{11} em degrau no instante $t = 3$ s, respectivamente. Como se pode verificar na Figura 4.49, o comportamento do sistema é ainda bom apesar da ocorrência de um impacto antes da comutação do controlo de posição

para força. Uma maior inclinação da rampa de transição de s_{11} é também bem aceite mesmo se a rampa se aproximar de um degrau e o impacto ocorrer muito tarde. Por último, da Figura 4.50 conclui-se, uma vez mais, que o sistema revela uma elevada sensibilidade no caso de se adoptar uma variação de s_{11} em degrau.

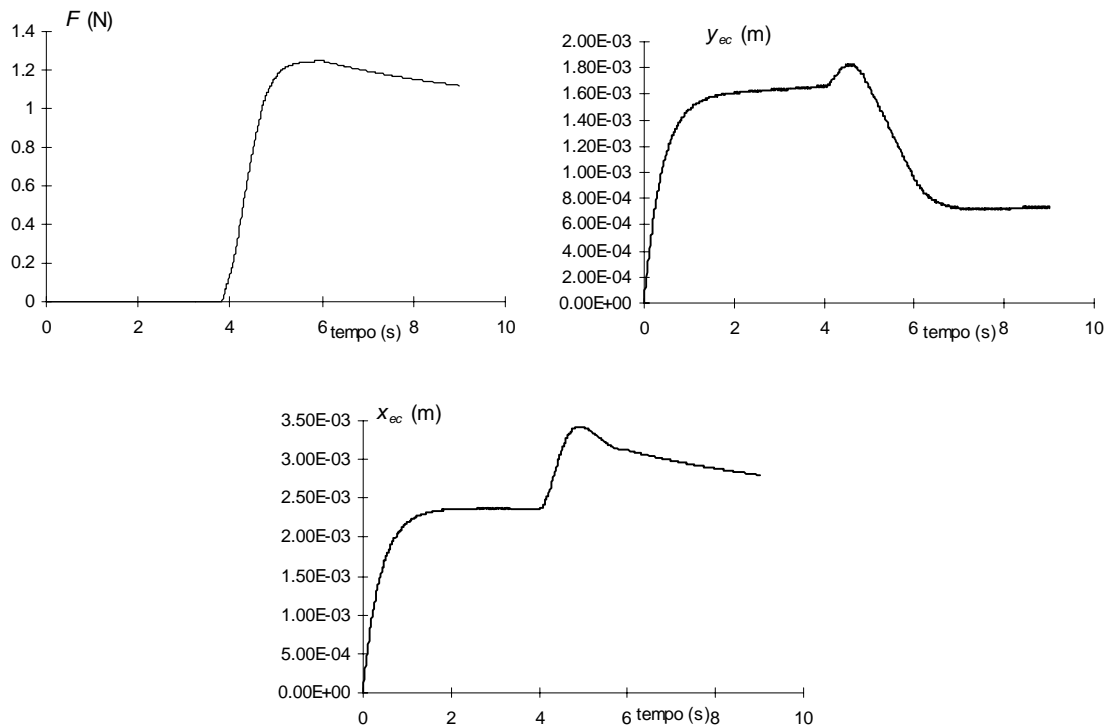


Figura 4.49

Respostas temporais do sistema para uma variação do elemento de selecção s_{11} em rampa entre $t = 4$ s e $t = 6$ s. Impacto em $t = 3.84$ s ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$).

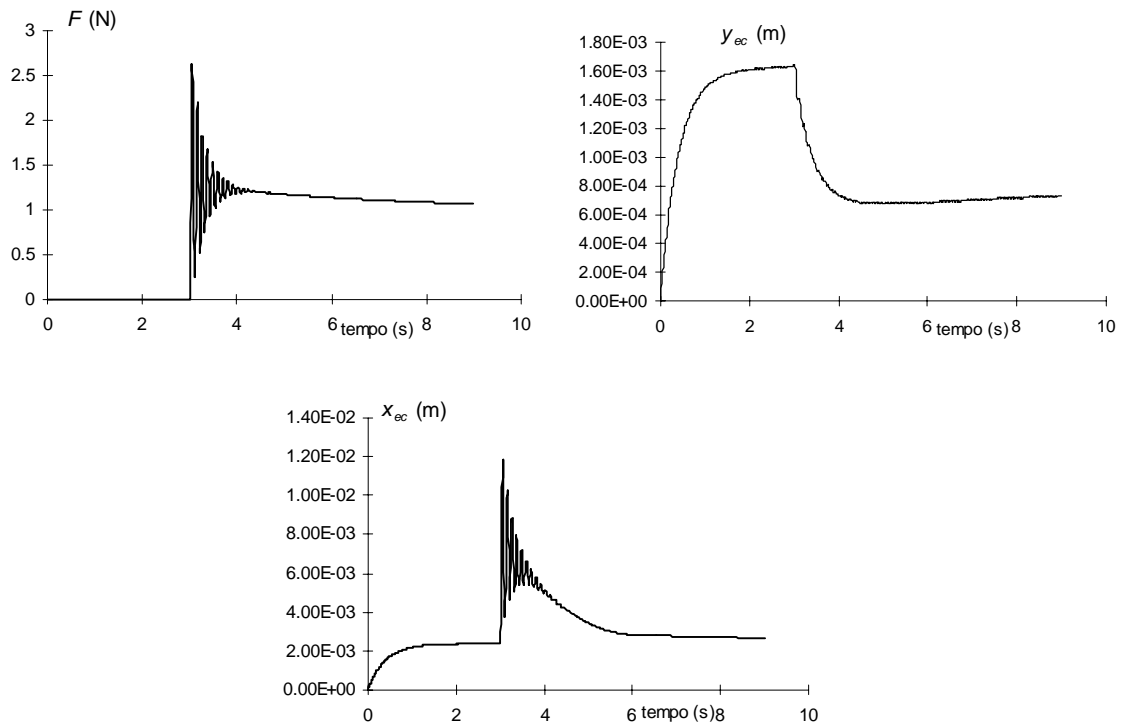


Figura 4.50

Respostas temporais do sistema para uma variação do elemento de selecção s_{11} em degrau em $t = 3$ s. Impacto em $t = 3.02$ s ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$).

4.9.4 Estabilidade *versus* geometria da superfície e velocidade de impacto

Nesta subsecção estuda-se a influência da geometria da superfície restrição e da sua dinâmica na estabilidade do sistema. Assim, analisa-se a estabilidade do sistema para diferentes valores de β e de L da superfície restrição com a forma de uma sinusóide espacial e para vários valores do coeficiente de amortecimento B .

Emprega-se um CEV de posição com acção integral de modo a testar o sistema com um erro de trajetória desprezável. O ponto de funcionamento P mantém-se idêntico ao anterior, isto é, considera-se $r = 80$ mm, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$, $\theta = \pi/2$ e s_{11} tem uma variação em degrau para $t = 6$ s.

A Figura 4.51 mostra o lugar de estabilidade $B(\beta, L)$ para $v_f = 6$ mm/s. O sistema torna-se instável para pequenos valores de B , para elevados valores de L ou para valores elevados de β . Repetindo as experiências para outros valores de v_f conclui-se que quanto

maior for a velocidade de aproximação, e de impacto, v_f maior deverá ser B de forma a conseguir-se um sistema estável.

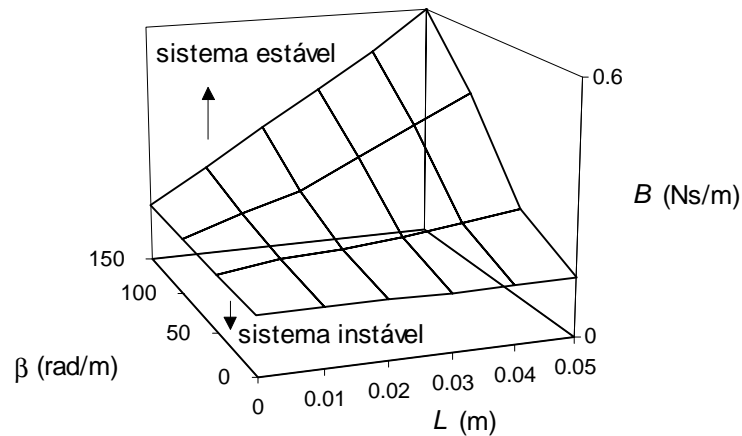


Figura 4.51

Lugar dos limites de estabilidade para uma superfície restrição sinusoidal como uma função da frequência espacial (β) e da amplitude (L) para uma velocidade do órgão terminal $v_f = 6 \text{ mm/s}$ ($M = 0.03 \text{ Kg}$, $K = 400 \text{ N/m}$, $\theta = \pi/2$, $q_{1C0} = q_{2C0} = 15\pi/36$).

No que diz respeito ao problema do impacto, obtém-se resultados semelhantes tanto para as superfícies restrição planas como sinusoidais. Por exemplo, a Figura 4.52 apresenta as respostas temporais para um impacto em $t = 6.00 \text{ s}$, $v_f = 6 \text{ mm/s}$, $\beta = 150 \text{ rad/m}$, $L = 0.01 \text{ m}$ e $B = 1 \text{ Ns/m}$. Uma vez mais, a transição *mais comum* em degrau de s_{11} origina desempenhos pobres durante os impactos.

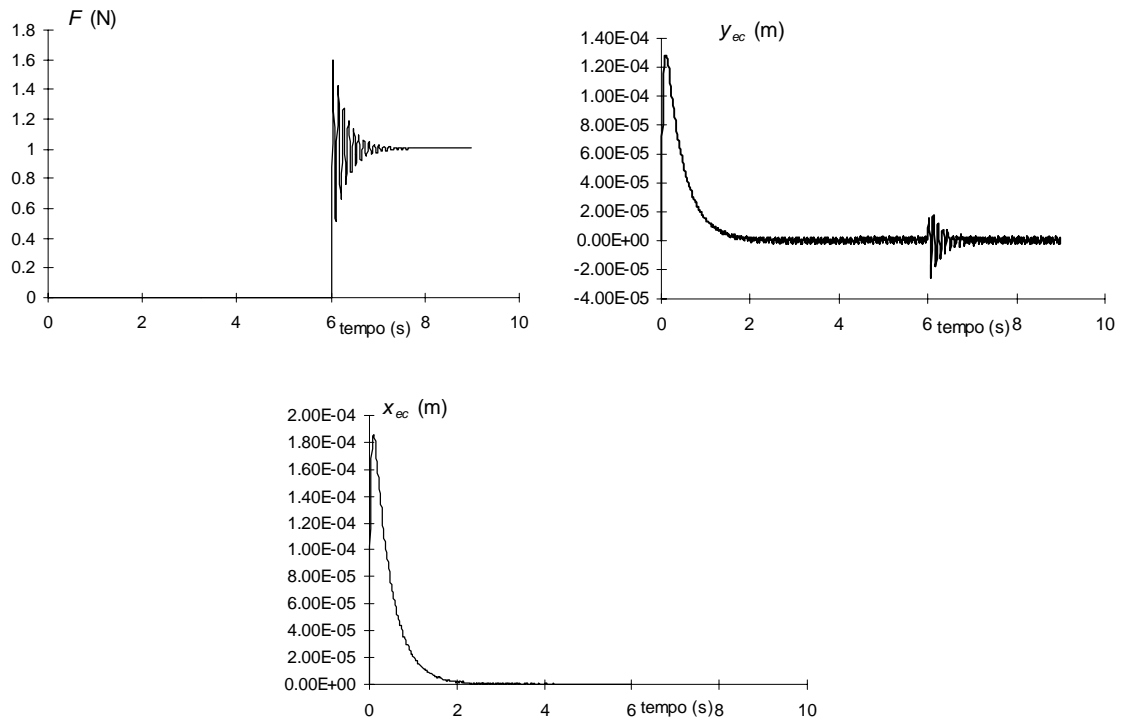


Figura 4.52

Respostas temporais do sistema para uma variação do elemento de selecção s_{11} em degrau em $t = 6$ s. Impacto em $t = 6.00$ s ($K = 400$ N/m, $M = 0.03$ Kg, $B = 1$ Ns/m, $\theta = \pi/2$, $q_{1c0} = q_{2c0} = 15\pi/36$).

4.10 Sistema com controladores de ordem fraccionária

Esta secção estuda o controlo posição/força de manipuladores robóticos usando algoritmos de ordem fraccionária. A aplicação de derivadas e integrais fraccionários (DIFs) está ainda numa fase de investigação, mas o progresso recente nas áreas do caos e dos fractais revela aspectos promissores para desenvolvimentos futuros (Oldham e Spanier, 1974; Samko *et al.*, 1993; Miller e Ross, 1993; Machado, 1995c; Machado e Azenha, 1998).

4.10.1 Algoritmos de ordem fraccionária

Nesta subsecção apresentam-se os controladores com DIFs, nos anéis de controlo de posição e de força.

A definição matemática de uma derivada ou de um integral de ordem fraccionária tem sido objecto de abordagens diferentes. Por exemplo, uma definição ‘directa’ baseada no conceito de diferencial fraccionário de ordem α $\Delta_h^\alpha x(t)$, é devida a Letnikov (1868) e conduz à expressão para $D^\alpha x(t)$, a derivada fraccionária de ordem α :

$$D^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\alpha x(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh) \right] \quad (4.19a)$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (4.19b)$$

onde Γ é a função Gama e h é o incremento de tempo. Deste modo, para um algoritmo de controlo de tempo discreto, com período de amostragem T , esta fórmula pode ser aproximada através de uma série truncada de ordem r , resultando a equação seguinte no domínio z :

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx \left\{ \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)z^{-k}}{k!\Gamma(\alpha - k + 1)} \right\} X(z) \quad (4.20)$$

Para se obterem boas aproximações é necessário tomar um número elevado de termos e um período de amostragem pequeno em (4.20).

A Tabela 4.4 mostra os valores numéricos dos controladores DIFs adoptados neste estudo. Estes parâmetros foram sintonizados experimentalmente e representam um compromisso entre regimes transitórios rápidos e sobrelevações pouco significativas. Os índices inferiores P ou F significam os anéis de posição ou de força e o parâmetro K significa uma constante de ganho que é multiplicada pela série de DIFs truncada.

Eixo i	K_{Pi}	K_{Fi}	α_{Pi}	α_{Fi}	r_{Pi}	r_{Fi}
1	10^5	10^3	1/2	-1/5	17	17
2	10^5	10^3	1/2	-1/5	17	17

Tabela 4.4

Valores numéricos dos controladores com DIFs.

4.10.2 Experiências

De modo a comparar o desempenho dos algoritmos com FDIs repetem-se as experiências realizadas anteriormente com CEVs. Nas experiências, estudam-se as respostas do sistema para $\theta = \pi/2$ e o ponto de funcionamento inicial $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, onde q_{i0} significa $q_i(t = 0 \text{ s})$, $i = 1, 2$. Aplica-se uma referência de força em degrau para $t = 0 \text{ s}$ (*i.e.* $F_d = 1 \text{ N}$) e uma entrada de posição com incremento nulo (*i.e.* $y_{cd} = y_{c0} \text{ m}$). Os parâmetros da superfície restrição são $M = 0.03 \text{ Kg}$, $B = 1 \text{ Ns/m}$ e $K = 400 \text{ N/m}$, sendo a frequência de amostragem do controlador $f_c = 1 \text{ kHz}$.

Foi também comparado, embora não totalmente explorado, o sistema com os dois algoritmos para pontos perto de singularidades. Neste caso, os CEVs mostraram ter um desempenho superior aos com DIFs. No entanto, vislumbra-se uma aplicação promissora para os algoritmos com DIFs nos sistemas robóticos de controlo de força.

4.10.2.1 Robots ideais

Nesta subsecção comparam-se as respostas do sistema para o robot 2R ideal sob a acção de algoritmos com DIFs e com CEVs (Figuras 4.53 e 4.54). Como se pode observar o esquema com DIFs conduz a um desempenho superior.

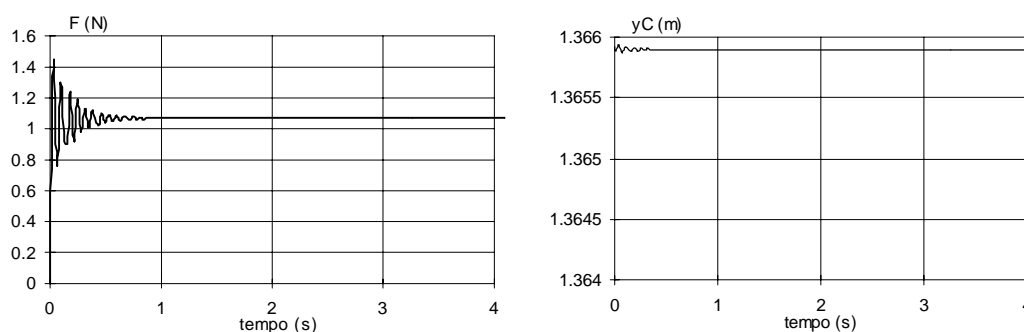


Figura 4.53

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com DIFs.

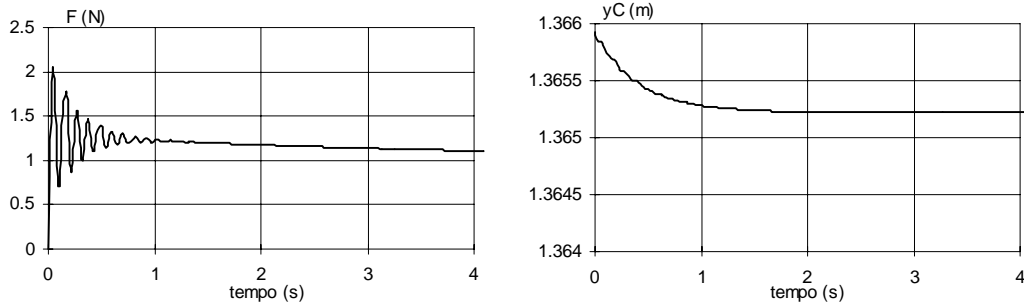


Figura 4.54

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com CEVs.

4.10.2.2 Robots com atrito não linear

Nesta subsecção estudam-se as respostas temporais do sistema para o robot 2R com atrito não linear nas juntas. Os parâmetros do modelo do atrito de Karnopp são os mesmos que os utilizados na secção 4.8.

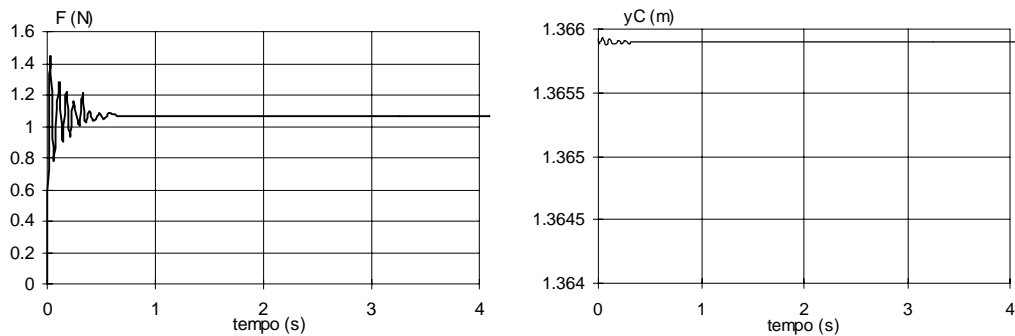


Figura 4.55

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com DIFs e atrito nas juntas (com $\alpha_F = -1/5$).

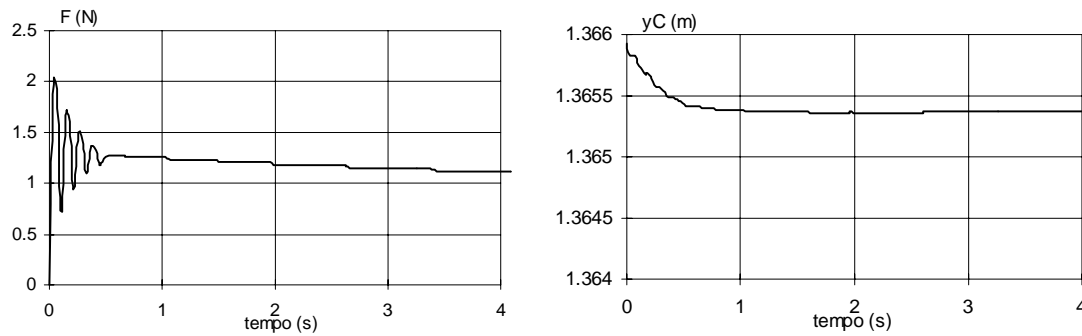


Figura 4.56

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com CEVs e atrito nas juntas.

Comparando as respostas com DIFs (Figura 4.55) com as do esquema com CEVs (Figura 4.56) conclui-se, uma vez mais, que o desempenho do algoritmo de ordem fraccionária é superior.

4.10.2.3 Robots com folga dinâmica

Nesta secção analisam-se as respostas do sistema para o robot 2R com folga dinâmica nas juntas. Os parâmetros do modelo da folga dinâmica são os mesmos que os utilizados na secção 4.8.

Eixo i	K_{Pi}	K_{Fi}	α_{Pi}	α_{Fi}	r_{Pi}	r_{Fi}
1	5000	50	1/2	1/5	17	17
2	5000	50	1/2	1/5	17	17

Tabela 4.5

Valores numéricos dos controladores com DIFs com a nova sintonia.

A Figura 4.57 mostra as respostas do sistema para o esquema com DIFs (com os parâmetros da Tabela 4.4). Devido às respostas instáveis o algoritmo foi sintonizado, de novo, tendo agora uma acção derivativa fraccionária (ver Tabela 4.5). As respostas com os novos DIFs (Figura 4.58) são algo superiores à do esquema com CEVs (Figura 4.59), porque têm um erro em regime permanente e um tempo de estabelecimento menores. Sintonizando de novo os CEVs com ($i = 1, 2$) $K_{Pi} = 5000$ e $K_{Fi} = 500$, obtém-se uma

resposta semelhante à da Figura 4.58, mas com um erro de força menor e um erro de posição maior, ambos em regime permanente.

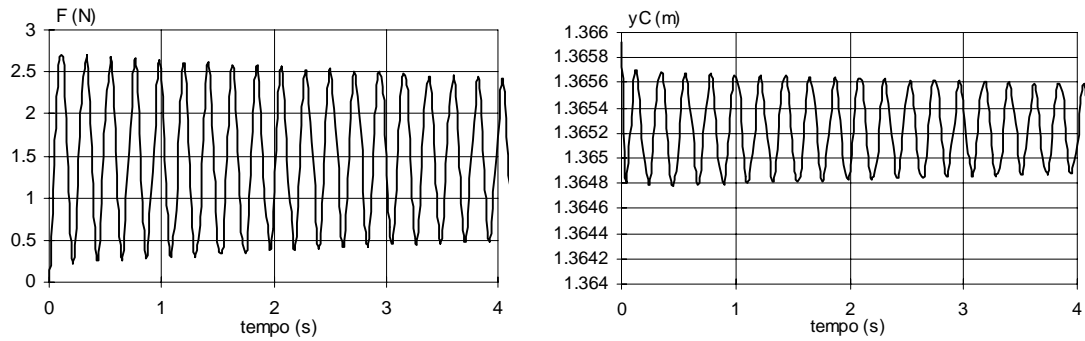


Figura 4.57

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com DIFs e folgas nas juntas (com $\alpha_F = -1/5$, Tabela 4.4).

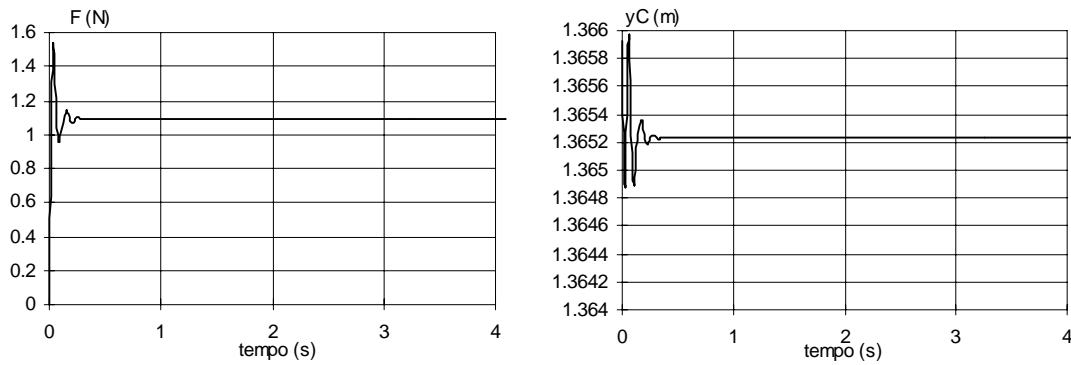


Figura 4.58

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo sintonizado de novo com DIFs e folgas nas juntas (com $\alpha_F = 1/5$, Tabela 4.5).

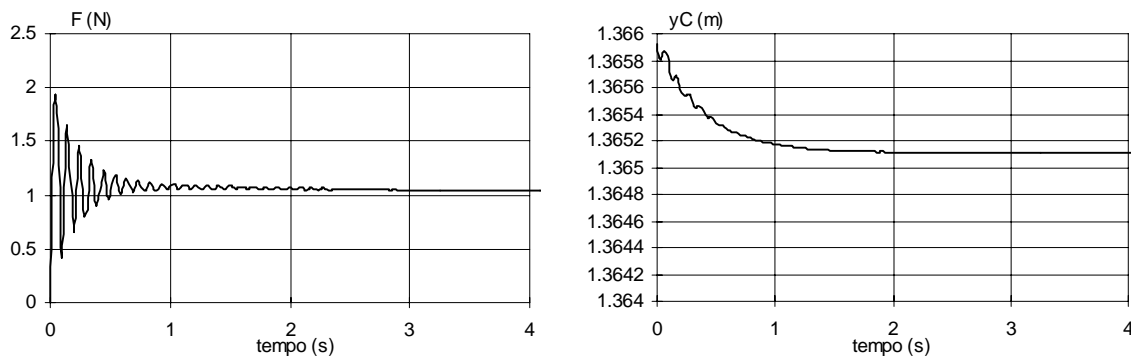


Figura 4.59

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com CEVs e folgas nas juntas.

4.10.2.4 Robots com juntas flexíveis

Nesta subsecção estudam-se as respostas do sistema para o robot 2R com juntas flexíveis. Os parâmetros do modelo das juntas flexíveis são os mesmos que os utilizados na secção 4.8.

A Figura 4.60 mostra as respostas do sistema com DIFs constatando-se de novo que são superiores ao esquema com CEVs (Figura 4.61).

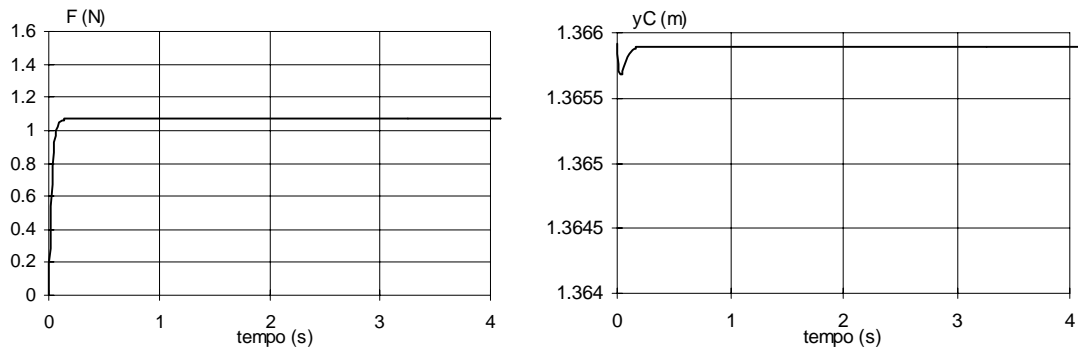


Figura 4.60

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com DIFs e juntas flexíveis (com $\alpha_F = -1/5$).

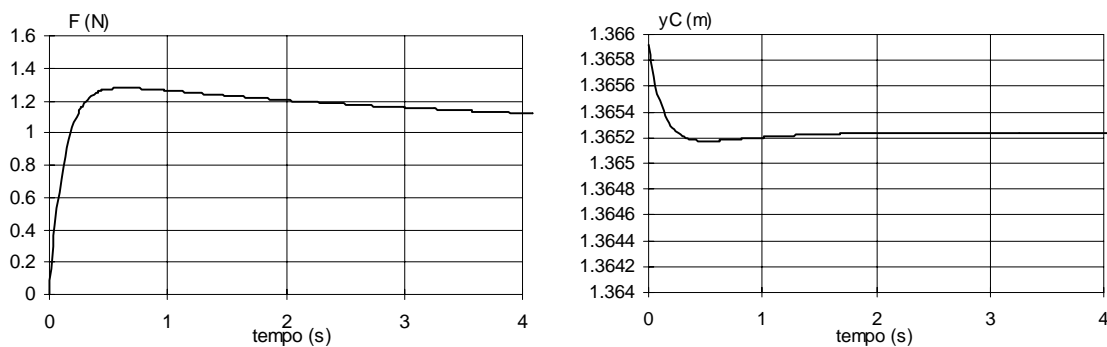


Figura 4.61

Respostas temporais para o robot 2R com o algoritmo com CEVs e juntas flexíveis.

4.11 Conclusões

Neste capítulo estudou-se a dinâmica do sistema CH através da resposta temporal e da resposta em frequência em malha fechada. Em primeiro lugar apresentou-se uma resenha bibliográfica sobre os trabalhos mais importantes publicados neste tópico. De seguida, descreveu-se a dinâmica do robot e do ambiente, bem como o controlador híbrido

posição/força (CH). Este capítulo termina com uma análise detalhada das propriedades dinâmicas do CH, pois calculam-se respostas temporais e em frequência, condições fronteira de estabilidade, frequência dos controladores e robots com não linearidades a nível das juntas.

Conclui-se que os parâmetros da superfície restrição tem um papel fundamental na estabilidade do sistema. A constante de amortecimento torna o sistema tanto mais estável quanto maior for o seu valor. Por seu lado, a massa tem um papel ‘desestabilizador’, isto é, torna o sistema tanto menos estável quanto maior for o seu valor. A constante de elasticidade afecta principalmente a frequência de ressonância do sistema. O tipo de controlador seja da malha de controlo de posição seja da malha de controlo de força tem também um papel importante no desempenho do sistema. Foram adoptados controladores do tipo CEV, porque são robustos, não necessitam de um modelo matemático do sistema a controlar e requerem pouca capacidade de cálculo, o que os torna apropriados para uma utilização em tempo-real. Em particular, um controlador que revelou muito bom desempenho é o CEV do anel de posição com acção integral, pois reduz o erro em regime permanente da posição sem prejudicar a resposta transitória.

Este capítulo estudou também o controlo de manipuladores no caso de uma transição do espaço livre para um movimento restringido. O sistema considerado inclui um robot 2R, um CEV híbrido posição/força e uma superfície restrição com dinâmica modelizada através de um conjunto massa-amortecedor-mola tanto para uma geometria plana como para uma geometria com a forma de uma sinusóide espacial. Os resultados mostraram que, para uma transição em degrau da matriz selecção, podem ocorrer desempenhos pouco satisfatórios. Por outro lado, para uma variação suave na matriz de selecção posição/força obtêm-se respostas adequadas, nomeadamente durante os fenómenos de impacto.

Por último, este capítulo apresentou o projecto e a implementação de controladores com DIFs para o CH de robots. Foram empregues respostas temporais na caracterização do comportamento do sistema com alguns tipos de fenómenos não lineares na juntas. Foi investigado e comparado o comportamento do sistema com algoritmos de CEVs e de DIFs. Os resultados mostraram que os algoritmos adoptando DIFs têm um bom desempenho, embora o problema das folgas dinâmicas se revele de tratamento difícil.

Apêndice 4.A

Determinação da matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+$

Neste apêndice apresenta-se a teoria elementar das matrizes pseudo-inversas e determina-se a matriz pseudo-inversa (única) de $(\mathbf{S}\mathbf{J})$. No final demonstram-se, também, as propriedades da matriz projecção $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})$.

1 Definição de matriz pseudo-inversa e Teorema da Unicidade

Nesta secção definem-se as propriedades a que deve obedecer uma matriz para ser considerada matriz pseudo-inversa e, tendo em conta essas propriedades, demonstra-se que aquela é única. Nesta ordem de ideias, considere-se uma matriz real finita de dimensão $m \times n$ \mathbf{A} ; então a matriz \mathbf{A}^+ , de dimensão $n \times m$, é a matriz pseudo-inversa de \mathbf{A} se as quatro condições seguintes forem todas satisfeitas (propriedades de Moore-Penrose):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}=\mathbf{A} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^+ \tag{A.2}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T=\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \tag{A.3}$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T=\mathbf{A}^+\mathbf{A} \tag{A.4}$$

De seguida, apresenta-se o Teorema da Unicidade da matriz \mathbf{A}^+ . Assim, considerem-se duas quaisquer matrizes que satisfaçam as equações (A.1 -A.4), \mathbf{A}_1^+ e \mathbf{A}_2^+ . Então, vem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ &= \mathbf{A}_1^+ \mathbf{A} \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{A}_2^+ = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_1^+{}^T \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}_2^+{}^T \mathbf{A}^T = \\
&= (\mathbf{A} \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A})^T \mathbf{A}_1^+{}^T \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}_2^+{}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}_1^+ \mathbf{A})^T = \\
&= \mathbf{A}^T \mathbf{A}_2^+{}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_1^+{}^T \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}_2^+{}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_1^+{}^T \mathbf{A}^T = \\
&= \mathbf{A}^T \mathbf{A}_2^+{}^T \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}_1^+{}^T \mathbf{A}^T = \\
&= \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{A}_1^+ = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

o que prova a unicidade de \mathbf{A}^+ .

2 O método de decomposição em valores singulares

Nesta secção, apresenta-se o método de decomposição em valores singulares de qualquer matriz finita real \mathbf{A} de dimensão $m \times n$. Este método obedece ao Teorema da Unicidade e é de utilização obrigatória para determinar a matriz pseudo-inversa respectiva sempre que a ordem da matriz seja $r < \min(m, n)$.

Suponha-se que se tem a matriz \mathbf{A} referida. Então $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é uma matriz não negativa cujos valores próprios [i.e. as soluções de $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0$] são números reais não negativos. Sejam os valores próprios designados por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$). Faça-se, também

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n) \tag{A.6}$$

Obviamente obtém-se $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m, n)} \geq 0$. Pode-se, agora, exprimir a matriz \mathbf{A} como o produto de três matrizes:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \tag{A.7}$$

onde \mathbf{U} é uma matriz ortogonal de dimensão $m \times m$, \mathbf{V} é uma matriz ortogonal de dimensão $n \times n$, e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ definida por

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_n \end{bmatrix} & \text{se } m \geq n \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_m \end{bmatrix} & \text{se } m < n \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

O lado direito da equação (A.7) chama-se a decomposição em valores singulares e σ_i [$i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$] chamam-se valores singulares. O número de valores singulares diferentes de zero é designado por:

$$r = \text{Ordem}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

Uma vez que \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes ortogonais, estas satisfazem as condições:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.10})$$

De seguida, obtêm-se as matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} . Assim, define-se uma matriz diagonal Σ_r , usando r valores singulares diferentes de zero, através da expressão:

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Esta é a matriz principal de Σ . Sejam, respectivamente, \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i os vectores da i -ésima coluna das matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} e sejam

$$\mathbf{U}_r = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r] \quad (\text{A.12})$$

e

$$\mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r] \quad (\text{A.13})$$

Então, da equação (A.7) obtém-se:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_r \boldsymbol{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^T \quad (\text{A.14})$$

Também, pela equação (A.10) obtém-se:

$$\mathbf{U}_r^T \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_r \quad (\text{A.15})$$

e

$$\mathbf{V}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r \quad (\text{A.16})$$

Então, \mathbf{A}^+ é dada por:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T \quad (\text{A.17})$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}^+$ é a matriz de dimensão $n \times m$ definida por

$$\boldsymbol{\Sigma}^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \sigma_2^{-1} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \sigma_r^{-1} \\ \hline & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

Note-se que $\boldsymbol{\Sigma}^+$ é a matriz pseudo-inversa de $\boldsymbol{\Sigma}$.

3 Determinação de $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+$ através do método anterior

Nesta secção calcula-se a matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+$ utilizando o método apresentado anteriormente.

Para iniciar o cálculo da matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+$ define-se a matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}\mathbf{J}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\
\begin{cases} a = -r_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \\ b = -r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \\ c = r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \\ d = r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \end{cases} & \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Então, a matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^T(\mathbf{S}\mathbf{J})$ e os valores singulares de $(\mathbf{S}\mathbf{J})$ vêm:

$$(\mathbf{S}\mathbf{J})^T(\mathbf{S}\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$\det[\lambda \mathbf{I}_2 - (\mathbf{S}\mathbf{J})^T(\mathbf{S}\mathbf{J})] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = c^2 + d^2$$

A matriz \mathbf{V}_r é obtida através dos versores dos vectores próprios obtidos através dos valores singulares de $(\mathbf{S}\mathbf{J})$, resultando:

$$\mathbf{V}_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{c}{d} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

A matriz \mathbf{U}_r é obtida através da expressão:

$$\mathbf{U}_r = (\mathbf{S}\mathbf{J})\mathbf{V}_r\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} = (\mathbf{S}\mathbf{J})\mathbf{V}_r \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sgn}(d) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Pelas propriedades de ortogonalidade de \mathbf{U} e de \mathbf{V} , calculam-se estas matrizes, resultando:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \text{sgn}(d) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{c}{d} & 1 \\ 1 & -\frac{c}{d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, a matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+$ vem:

$$(\mathbf{S}\mathbf{J})^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\mathbf{U}^T = \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

4 Propriedades da matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})$

Nesta secção verificam-se as propriedades correspondentes a qualquer matriz projecção, pois demonstra-se (Fisher e Mujtaba, 1992b) que $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})$ é uma matriz projecção.

Para concluir o estudo da secção anterior, prova-se que a matriz $(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})$ é simétrica e idempotente, como deve ser qualquer matriz projecção. Assim, através dos cálculos seguintes obtém-se:

$$(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J}) = \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$[(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})][(\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})] = \frac{1}{(c^2 + d^2)^2} \begin{bmatrix} c^2(c^2 + d^2) & cd(c^2 + d^2) \\ cd(c^2 + d^2) & d^2(c^2 + d^2) \end{bmatrix} = (\mathbf{S}\mathbf{J})^+(\mathbf{S}\mathbf{J})$$

Pelo que se conclui que a matriz anterior possui as propriedades das matrizes projecção.

5 Aplicação da função descritiva na análise cinemática e dinâmica de sistemas com robots rígidos e ideais

O controlo híbrido posição/força (CH) de robots tem vindo a ser estudado ao longo dos últimos anos, mas não se tem chegado a conclusões práticas importantes. Isto deve-se ao facto de que a sua origem não tem uma fundamentação teórica rigorosa, no entanto tem-se conseguido obter bons resultados em aplicações específicas deste algoritmo, como é exemplo o capítulo anterior. Deste modo, este capítulo pretende estudar o CH através da sua função descritiva (FD) e, desta forma, verificar a importância dos seus parâmetros (nomeadamente a frequência de amostragem e tipo dos controladores dos anéis de posição e de força) na estabilidade. Como o algoritmo de CH é muito complexo para ser detalhado em expressões matemáticas que traduzem a sua FD, recorre-se depois à sua linearização que leva a expressões mais curtas e mais simples de analisar. Por seu lado, também se verifica que têm um grau de exactidão razoável para a maioria das aplicações, porque em geral a amplitude da variação das coordenadas generalizadas do robot é pequena.

Nesta ordem de ideias, na secção 5.1 faz-se uma introdução ao tema deste capítulo. Depois, na secção 5.2, apresentam-se algumas considerações sobre a utilização da FD no estudo da cinemática directa de robots. Na secção seguinte (secção 5.3) estuda-se a FD do sistema de CH. Na secção 5.4 apresenta-se o trabalho de viabilidade da utilização do traçado de Nyquist multivariável para verificar a estabilidade do CH. Por outro lado, na secção 5.5 estuda-se a linearização do CH tendo como ponto de partida a FD do sistema. Na secção 5.6 apresenta-se a determinação analítica da resposta em frequência em malha fechada do CH

tendo como base a linearização do sistema respectivo. Finalmente, na secção 5.7, apresentam-se as conclusões principais que decorrem do estudo do capítulo.

5.1 Introdução

A filosofia presente neste capítulo pode ser caracterizada pela dedução de expressões matemáticas capazes de caracterizar aspectos importantes do desempenho dos sistemas robóticos e pela sua validação através da execução de experiências práticas. As ferramentas matemáticas utilizadas são a FD e a linearização usando diagramas de blocos. Deste modo, é possível estudar por exemplo a influência da frequência de amostragem dos controladores dos anéis do CH perto de um ponto de funcionamento com ciclo limite ou determinar analiticamente a resposta em frequência do mesmo.

A bibliografia existente até ao momento sobre este tema é predominantemente da co-autoria do candidato (Machado e Azenha, 1997; Azenha e Machado, 1997c), pois não se encontraram abordagens ao estudo do CH que utilizassem a FD anteriormente. A motivação que levou a esta iniciativa foi o domínio desta técnica de análise de sistemas não lineares, a existência de problemas de estabilidade bem conhecidos (An e Hollerbach, 1987b) e a falta de ferramentas existentes para a sua sistematização.

Deste modo, começa-se por utilizar a FD a um sistema robótico simples como é o caso do estudo da cinemática directa do robot 2R. Isto leva à descoberta de equações matemáticas exactas, o que já não acontece no caso do CH com robot 2R, porque só se consegue obter expressões aproximadas e à custa da utilização de funções de Bessel. No entanto, como em geral é suficiente estudar o funcionamento do CH em torno de variações “pequenas” do ponto de funcionamento, é reduzida a complexidade dessas equações através da linearização do sistema utilizando as expressões obtidas com a técnica da FD. Obtendo, assim, a linearização do CH com robot 2R (note-se que o método é aplicável a qualquer sistema robótico CH), chega-se ao ponto de partida para estudar pormenores tais como a influência da frequência de amostragem dos controladores. Por outro lado, também se estudou a resposta em frequência em malha fechada analítica do CH com robot 2R através da linearização total do mesmo e do cálculo da função de transferência respectiva, tendo os resultados sido concordantes com os obtidos através de simulação. Para finalizar, note-se que se teve de recorrer a técnicas de análise de sistemas de controlo multivariáveis, *i.e.* com mais de uma entrada ou saída. Isto deve-se ao facto do CH necessitar da existência de pelo menos uma direcção do espaço de

trabalho Cartesiano controlada em força e de outra em posição. Resultam, assim, pelos menos dois graus de liberdade requeridos mínimos para o robot e respectivo sistema de controlo.

5.2 Utilização da \mathbf{D} no estudo da cinemática directa do robot 2R

Nesta secção aplica-se o método de análise da FD ao sistema robot 2R, no que diz respeito à sua cinemática directa. Assim, para as entradas que são as coordenadas generalizadas do robot 2R, q_1 e q_2 , com variação temporal sinusoidal, obtém-se o primeiro harmónico e o valor médio das saídas no espaço Cartesiano, x e y através do cálculo da sua FD. Para o efeito, considere-se a Figura 5.1 onde estão representadas graficamente as variáveis enunciadas para o sistema robot 2R em controlo de posição.

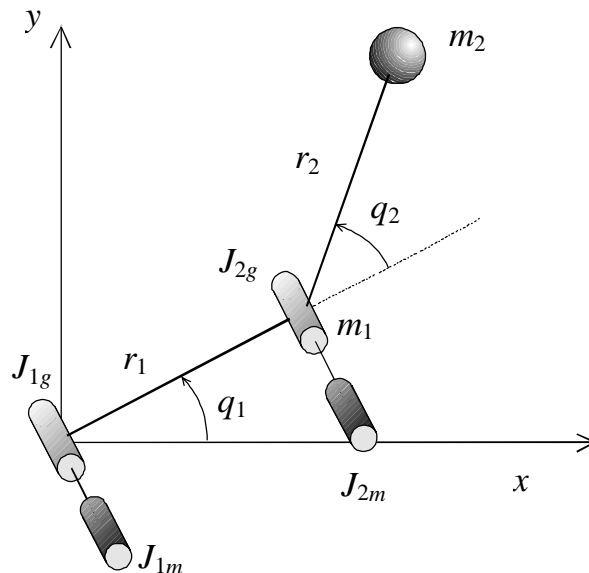


Figura 5.1

O robot 2R no espaço livre.

Nesta ordem de ideias as entradas do sistema são as coordenadas q_1 e q_2 com variação sinusoidal dadas por:

$$q_1 = q_{10} + Q_1 \sin(\omega t) \quad (5.1a)$$

$$q_2 = q_{20} + Q_2 \sin(\omega t + \phi) \quad (5.1b)$$

onde q_{10} e q_{20} são os valores médios de q_1 e q_2 respectivamente, Q_1 e Q_2 são as amplitudes da variação sinusoidal respectivas, ω é a frequência angular da oscilação (considera-se que as frequências são iguais, por razões de simplicidade) e ϕ é o desfasamento entre a oscilação da junta um e da dois. Tendo em consideração as manipulações algébricas seguintes, obtém-se então a FD do sistema (que é, neste caso, independente da frequência):

$$q_1 + q_2 = q_{120} + Q_{12} \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.2a)$$

$$Q_{12} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \cos(\phi)} \quad (5.2b)$$

$$\alpha = \arctan 2[Q_1 + Q_2 \cos(\phi), Q_2 \sin(\phi)] \quad (5.2c)$$

onde $\arctan 2(x, y)$ representa o ângulo compreendido entre $-\pi$ e π das coordenadas polares relativamente às suas coordenadas Cartesianas x e y e $q_{120} = q_{10} + q_{20}$. Utilizando as funções de Bessel, *i.e.* por $J_n(x)$ entende-se a função de ordem n no ponto x , obtém-se:

$$\begin{aligned} \cos(q_1 + q_2) &= \cos[q_{10} + q_{20} + Q_1 \sin(\omega t) + Q_2 \sin(\omega t + \phi)] = \\ &= \cos(q_{120}) \cos[Q_{12} \sin(\omega t + \alpha)] - \sin(q_{120}) \sin[Q_{12} \sin(\omega t + \alpha)] \approx \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} &\approx C_{120} J_0(Q_{12}) - 2S_{120} J_1(Q_{12}) \sin(\omega t + \alpha) \\ \sin(q_1 + q_2) &\approx S_{120} J_0(Q_{12}) + 2C_{120} J_1(Q_{12}) \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (5.3b)$$

onde $C_{120} = \cos(q_{10} + q_{20})$ e $S_{120} = \sin(q_{10} + q_{20})$. Estas duas últimas expressões levam à possibilidade de calcular o valor médio e primeiro harmónico exactos da resposta x, y tendo como entradas q_1 e q_2 :

$$\begin{cases} x = r_1 \cos(q_1) + r_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y = r_1 \sin(q_1) + r_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (5.4a)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \hat{x}_{12} \sin(\omega t + \alpha_x) \\ y = y_0 + \hat{y}_{12} \sin(\omega t + \alpha_y) \end{cases} \quad (5.4b)$$

resultando para os valores médios e primeiros harmónicos:

$$\begin{cases} x_0 = r_1 C_{10} J_0(Q_1) + r_2 C_{120} J_0(Q_{12}) \\ y_0 = r_1 S_{10} J_0(Q_1) + r_2 S_{120} J_0(Q_{12}) \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{12} = \sqrt{[-2r_1 S_{10} J_1(Q_1)]^2 + [-2r_2 S_{120} J_1(Q_{12})]^2 + 2[-2r_1 S_{10} J_1(Q_1)][-2r_2 S_{120} J_1(Q_{12})] \cos(\alpha)} \\ \alpha_x = \arctan 2[-2r_1 S_{10} J_1(Q_1) - 2r_2 S_{120} J_1(Q_{12}) \cos(\alpha), -2r_2 S_{120} J_1(Q_{12}) \sin(\alpha)] \end{cases} \quad (5.5b)$$

$$\begin{cases} \hat{y}_{12} = \sqrt{[2r_1 C_{10} J_1(Q_1)]^2 + [2r_2 C_{120} J_1(Q_{12})]^2 + 2[2r_1 C_{10} J_1(Q_1)][2r_2 C_{120} J_1(Q_{12})] \cos(\alpha)} \\ \alpha_y = \arctan 2[2r_1 C_{10} J_1(Q_1) + 2r_2 C_{120} J_1(Q_{12}) \cos(\alpha), 2r_2 C_{120} J_1(Q_{12}) \sin(\alpha)] \end{cases} \quad (5.5c)$$

onde $C_{10} = \cos(q_{10})$ e $S_{10} = \sin(q_{10})$.

De seguida, apresentam-se alguns gráficos que mostram as amplitudes de x e de y em função de Q_1 e de Q_2 para vários valores de ϕ , q_{10} e q_{20} . Note-se que não é necessário as saídas x e y serem aproximadamente sinusoidais para as expressões anteriores serem exactas. De facto, verifica-se que as saídas podem não ser sinusoidais, mas sim periódicas de período $2\pi/\omega$ e a respectiva FD não depende de ω , mas só de q_{10} , q_{20} , Q_1 , Q_2 e ϕ .

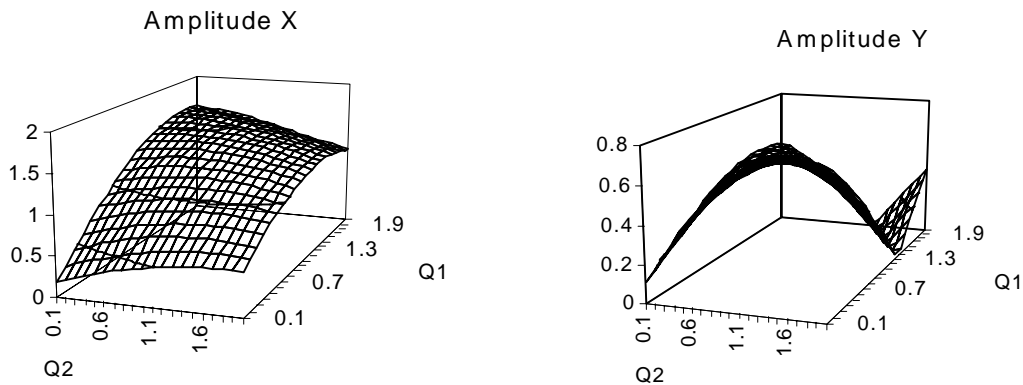


Figura 5.2

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $\phi = 0$.

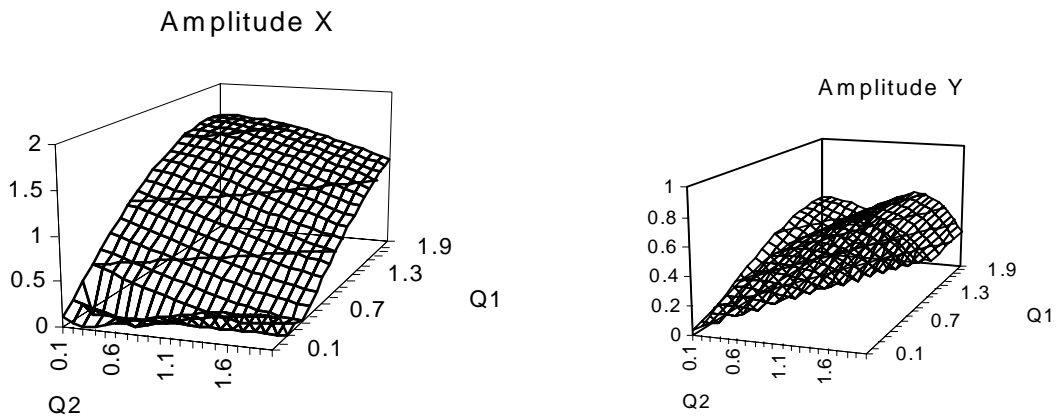


Figura 5.3

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = \pi.$$

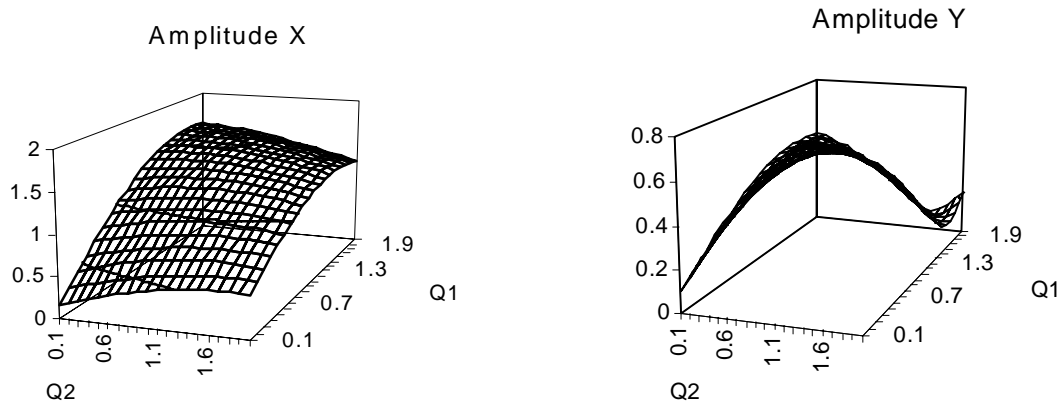


Figura 5.4

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = \pi/4.$$

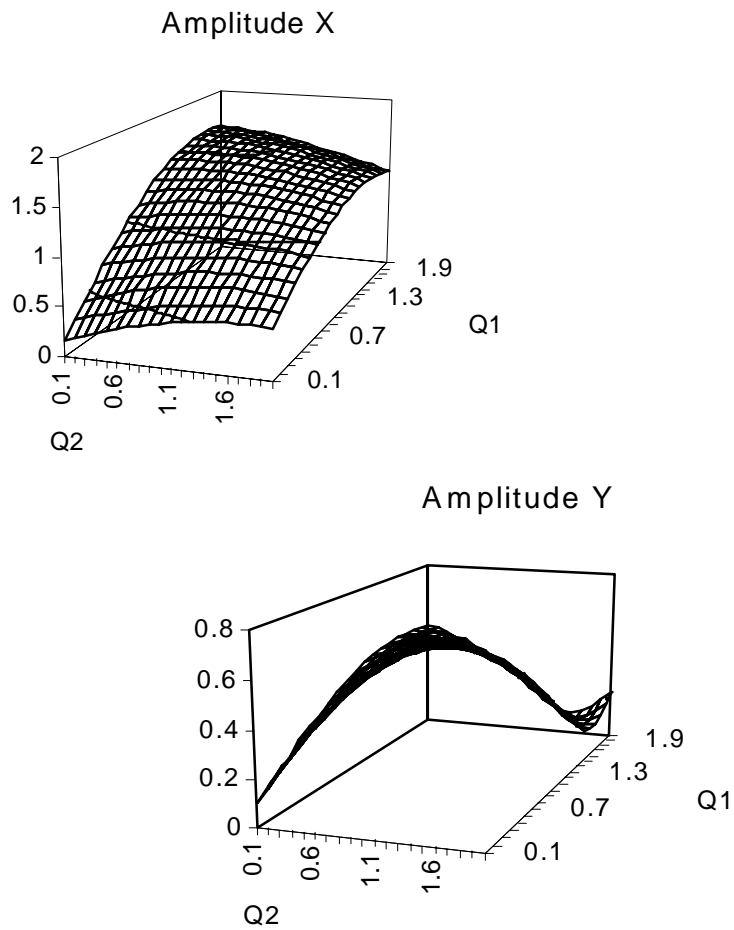


Figura 5.5

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = -\pi/4.$$

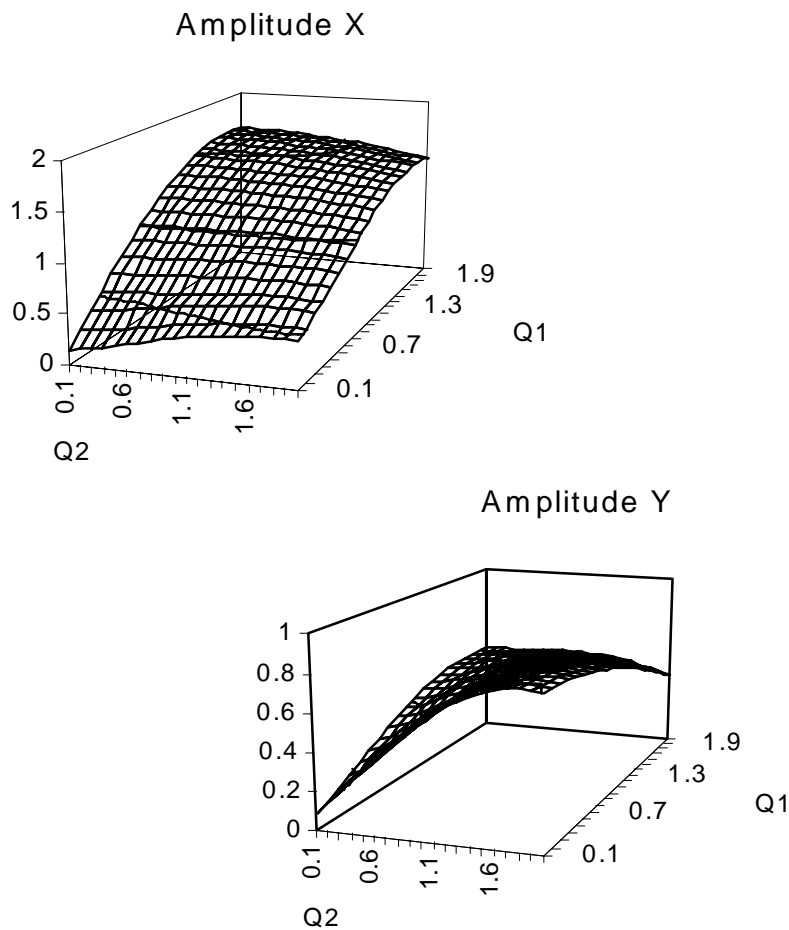


Figura 5.6

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = \pi/2.$$

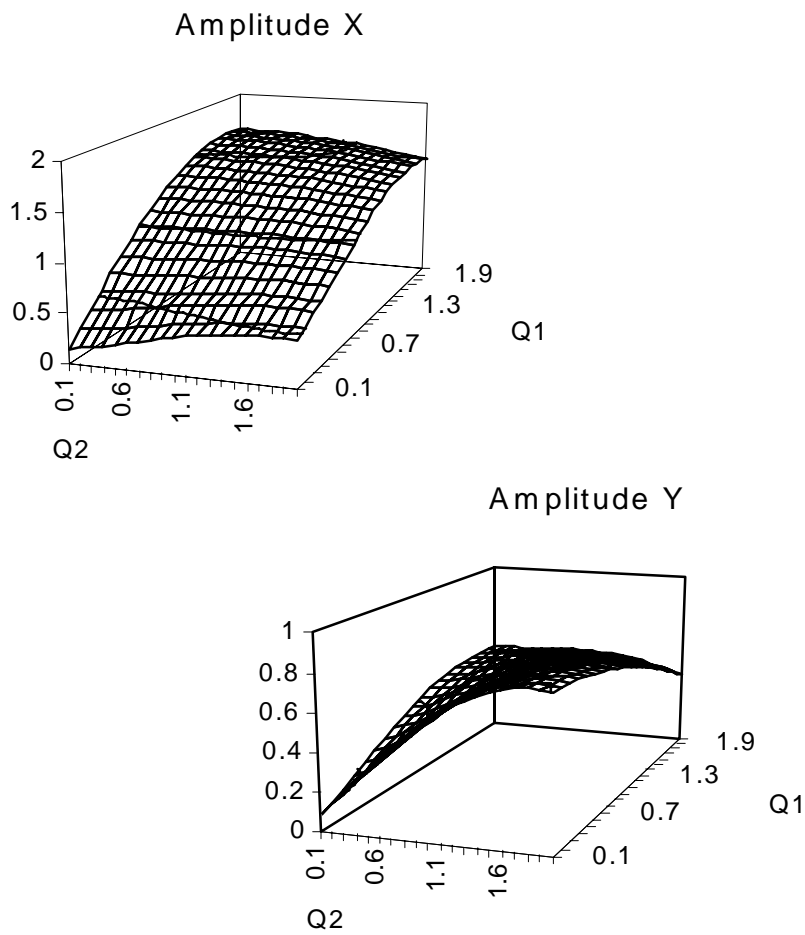


Figura 5.7

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = -\pi/2.$$

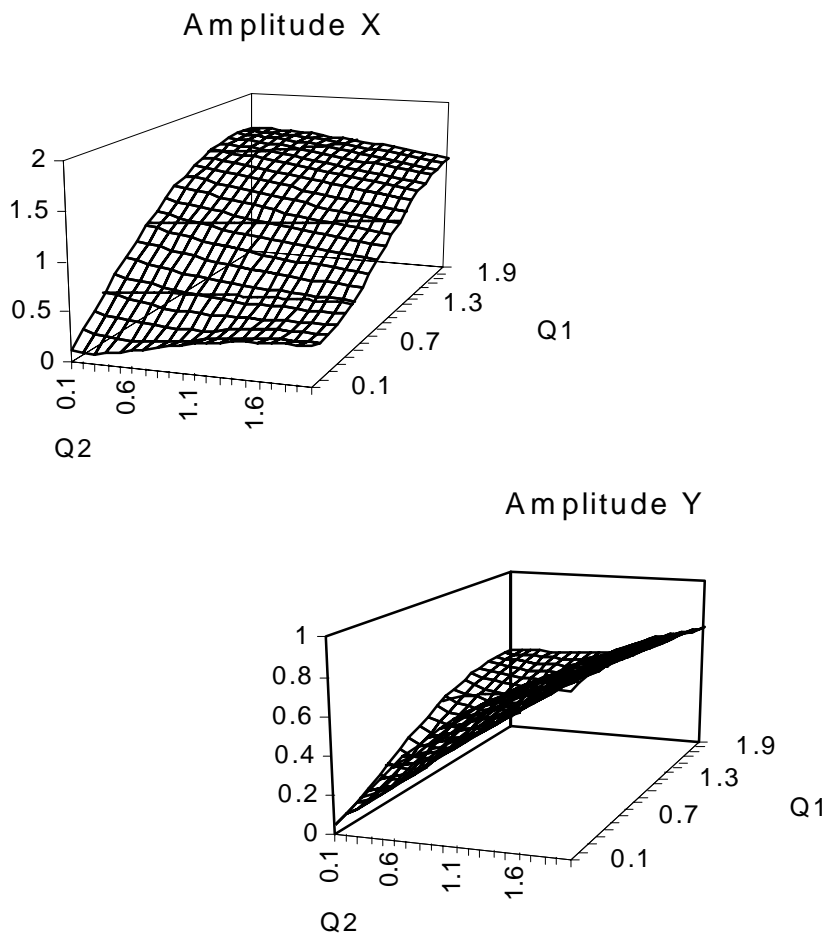


Figura 5.8

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = 3\pi/4.$$

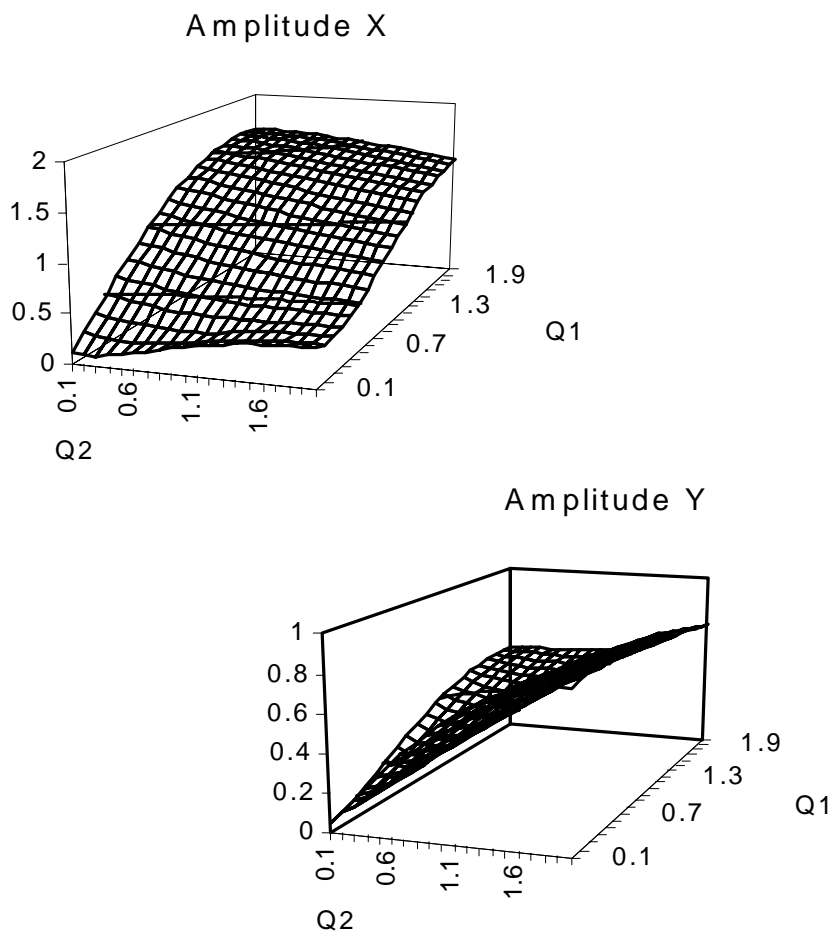


Figura 5.9

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 15\pi/36, \phi = -3\pi/4.$$

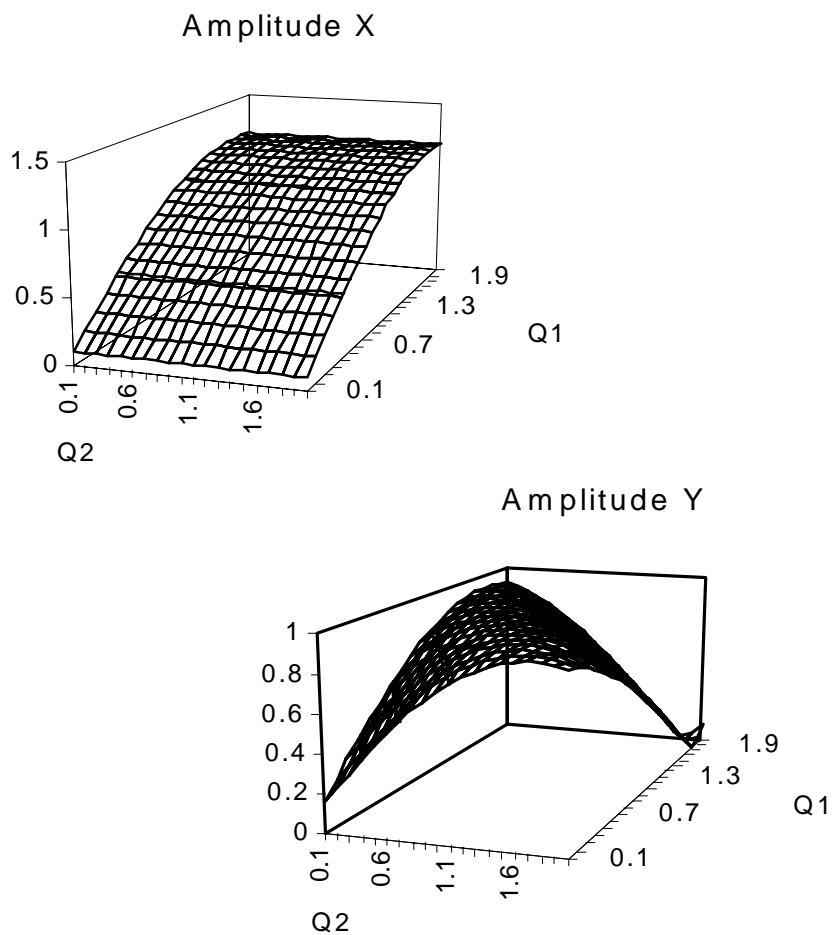


Figura 5.10

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = \pi/2, \phi = 0.$$

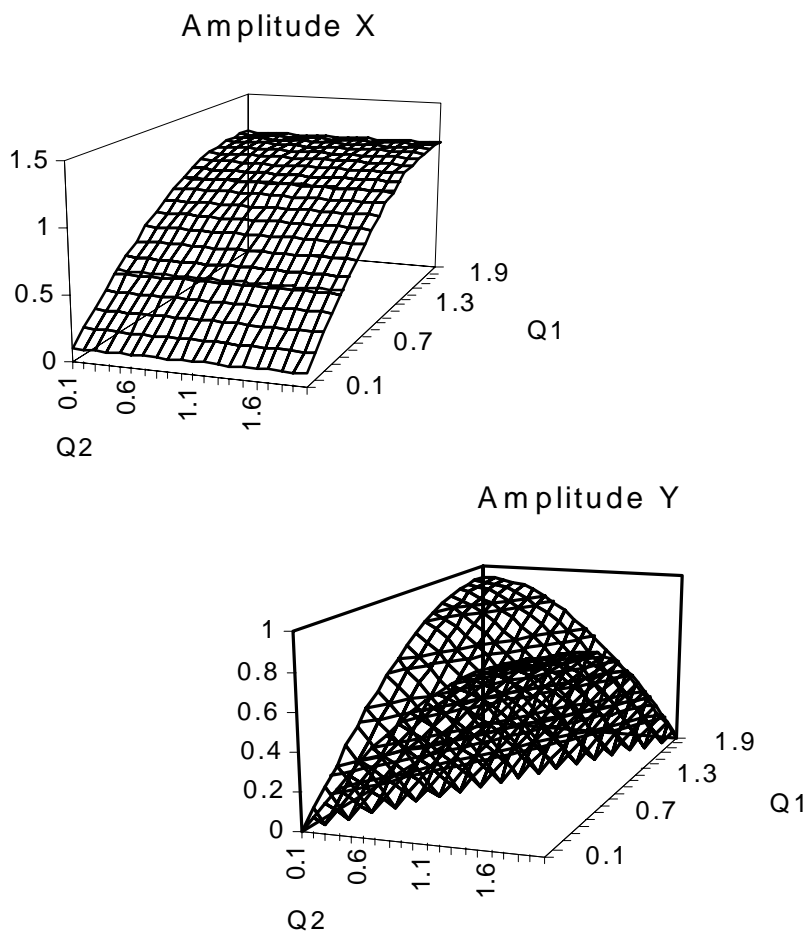


Figura 5.11

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = \pi/2, \phi = \pi.$$

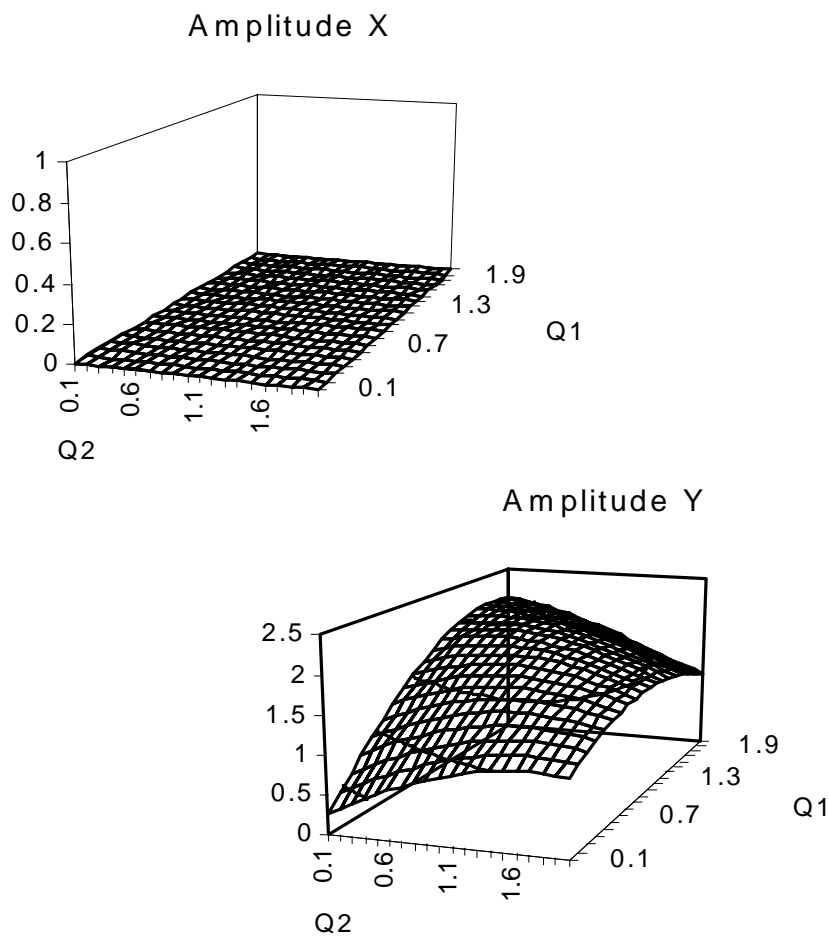


Figura 5.12

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 0, \phi = 0.$$

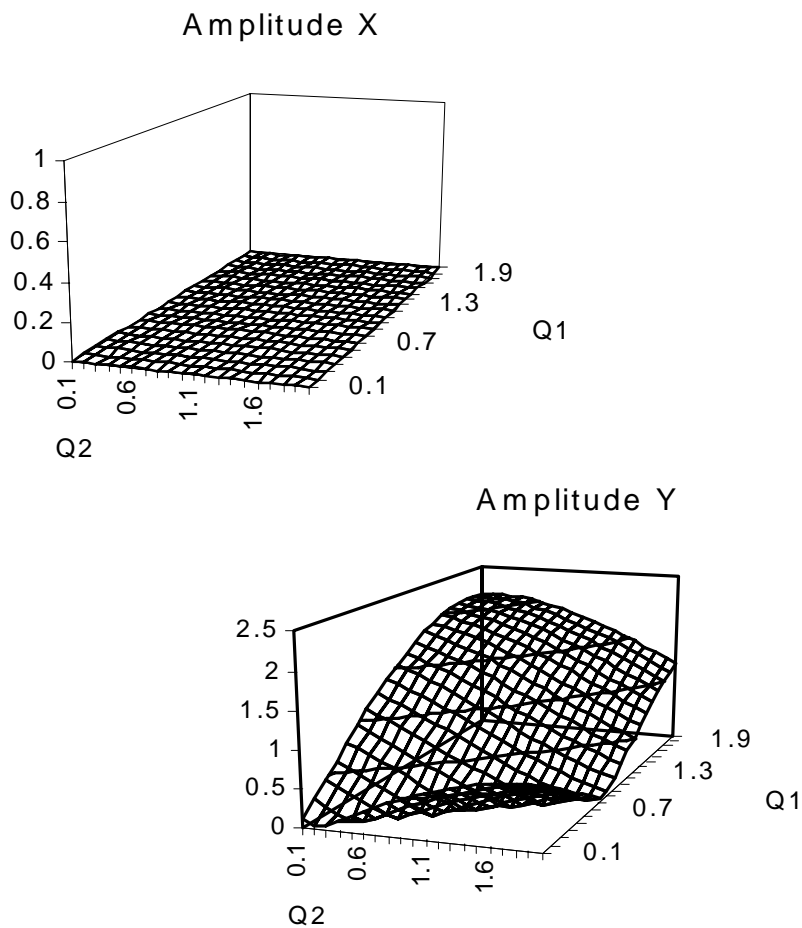


Figura 5.13

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = q_{20} = 0, \phi = \pi.$$

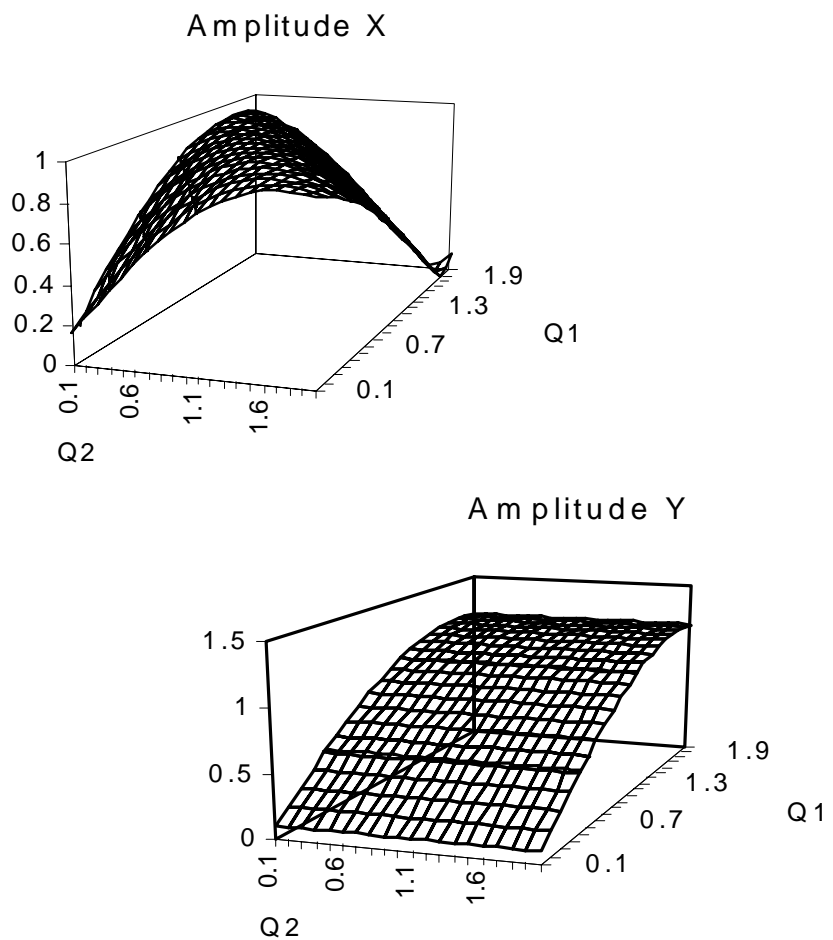


Figura 5.14

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = 0, q_{20} = \pi/2, \phi = 0.$$

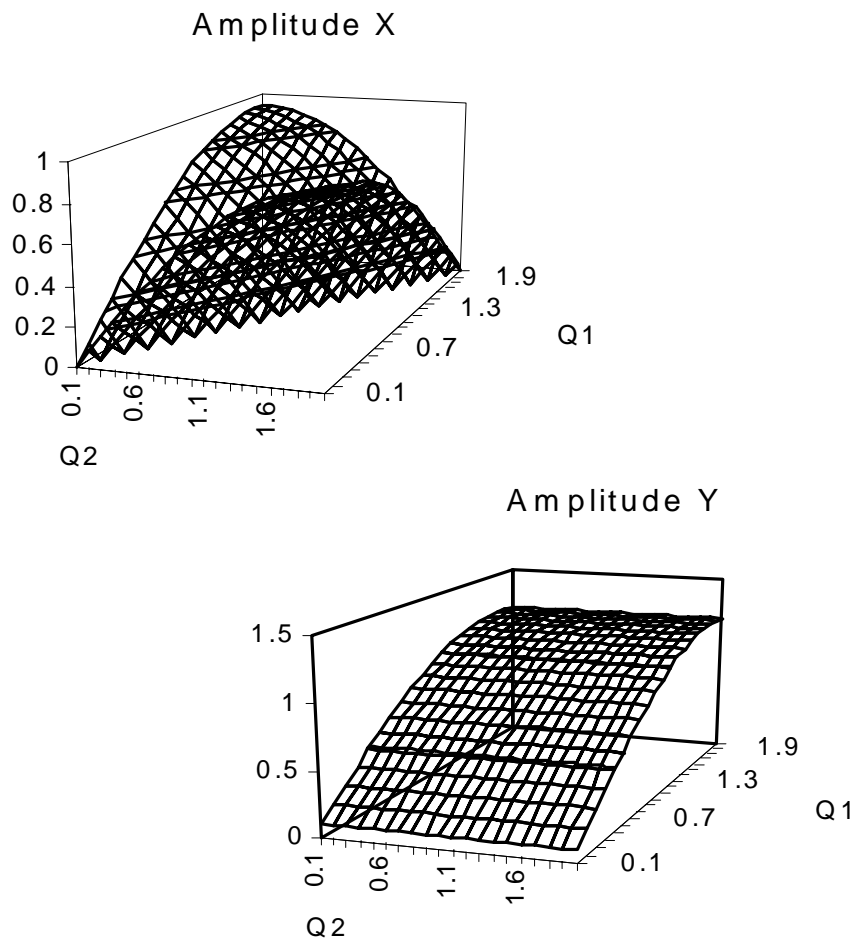


Figura 5.15

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = 0, q_{20} = \pi/2, \phi = \pi.$$

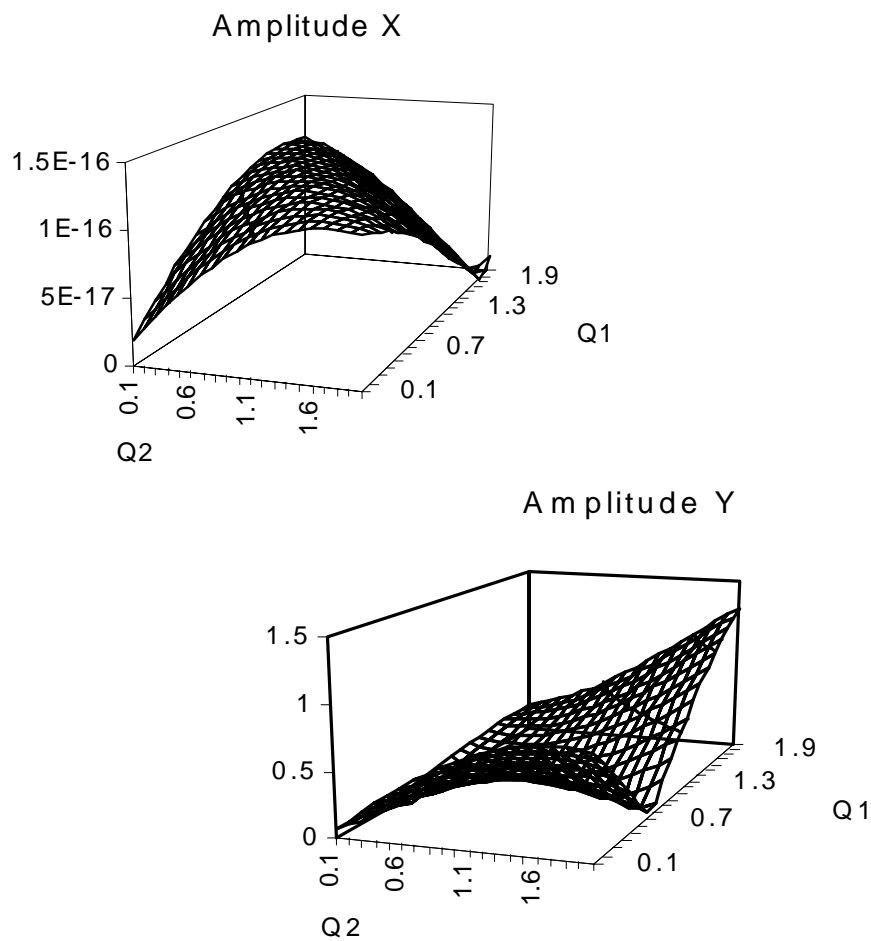


Figura 5.16

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R:

$$q_{10} = 0, q_{20} = \pi, \phi = 0.$$

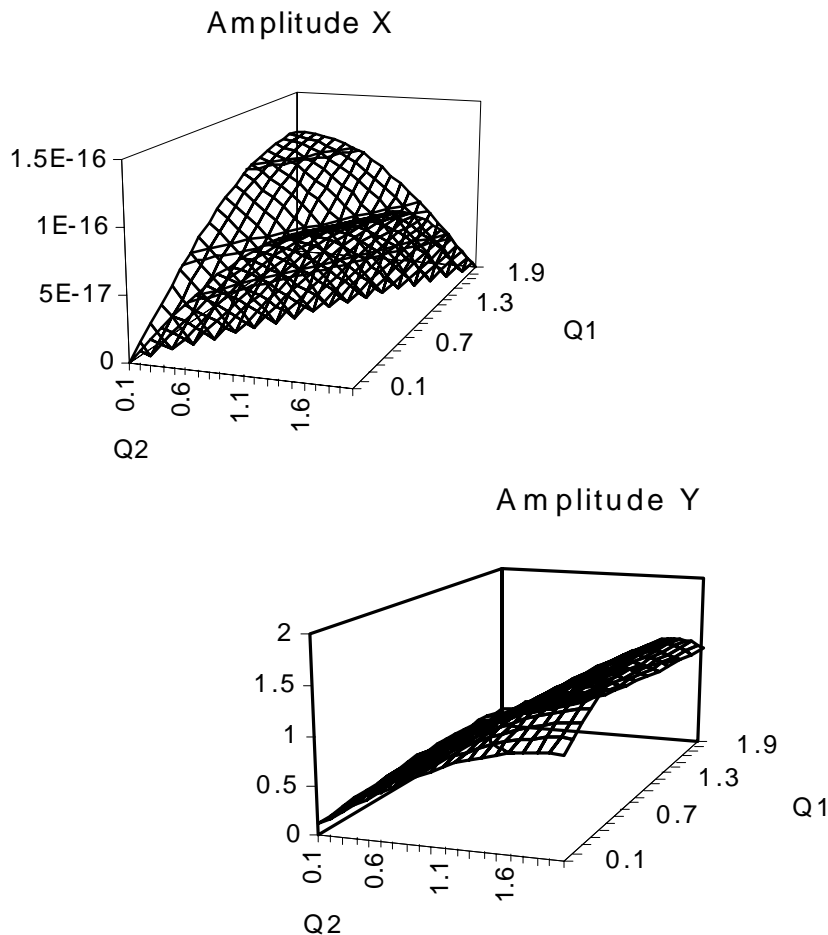


Figura 5.17

Gráficos das amplitudes do primeiros harmónicos da cinemática directa (x e y) do robot 2R: $q_{10} = 0$, $q_{20} = \pi$, $\phi = \pi$.

Como se pode observar nos gráficos anteriores, a FD da cinemática directa do robot 2R depende do ponto de funcionamento (q_{10} , q_{20}) e do desfasamento entre as entradas sinusoidais (q_1 , q_2). No entanto, consegue-se determinar analiticamente e de forma exacta os primeiros harmónicos da resposta temporal e seguindo um raciocínio análogo pode-se encontrar também a expressão exacta para os harmónicos de ordem superior.

5.3 Estudo da \mathcal{D} do controlo h íbrido posição/força do robot 2R

Nesta secção apresenta-se o cálculo analítico da FD do CH com robot 2R. Este procedimento é importante porque possibilita a previsão de ocorrência de ciclos limite e a

análise da estabilidade do sistema para uma sua dada configuração. Considere-se, então, que o estado do sistema pode ser dado pelas seguintes expressões para q_1, q_2 :

$$q_1 = q_{10} + Q_1 \cos(\omega t) \quad (5.6a)$$

$$q_2 = q_{20} + Q_2 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.6b)$$

isto é, um ponto de funcionamento (q_{10}, q_{20}) , uma oscilação com primeiro harmónico (Q_1, Q_2) e um desfasamento entre as oscilações das duas juntas ϕ . Note-se que considerou-se uma mesma frequência de oscilação ω para as juntas um e dois do robot 2R. Mais tarde vai-se verificar a validade desta hipótese através de todas as simulações realizadas, uma vez que os ciclos limites estáveis que se encontram neste sistema são sempre de amplitude pequena e de frequências ω iguais para as duas juntas.

A FD do sistema é levada a cabo através de cinco blocos distintos (Figura 5.18): a cinemática de posição, a estática de força, os controladores de posição, os controladores de força e o conjunto robot/ambiente. Como é óbvio, a FD correspondente a dois blocos não lineares em cascata não é igual ao produto das suas respectivas FDs. No entanto, partiu-se da hipótese (validada posteriormente pelas experiências) de que se cometiam erros pequenos nesta aproximação, porque os ciclos limite encontrados são sempre de pequena amplitude. A FD correspondente à cinemática de posição é compreendida por duas relativas aos dois eixos do robot 2R e são acopladas no que respeita às entradas q_1 e q_2 . O mesmo se passa com a FD da estática de força e do robot, embora os controladores se forem descentralizados tenham uma FD desacoplada.

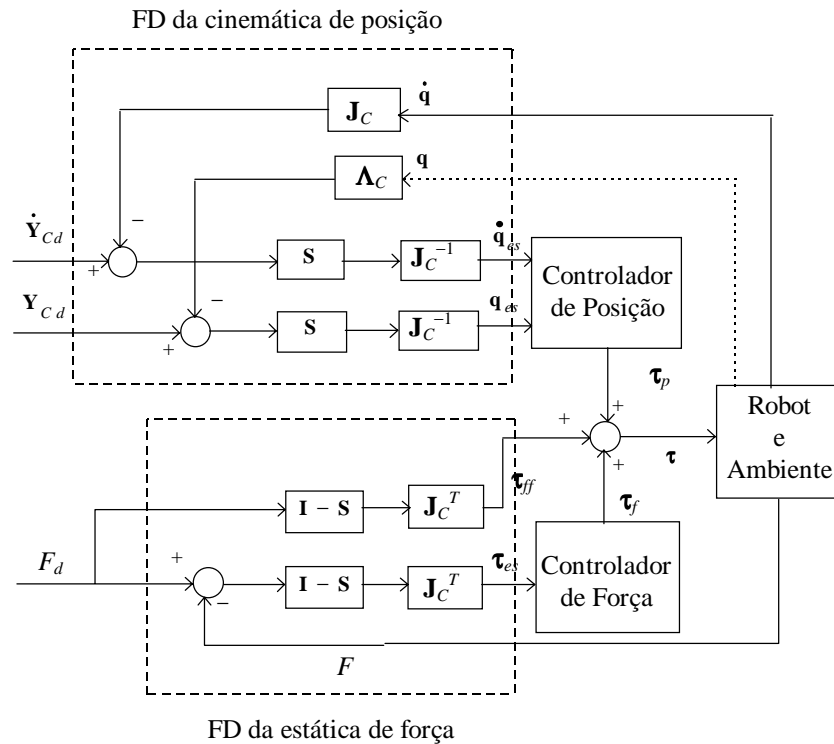


Figura 5.18

Diagrama de blocos para cálculo da FD do CH.

As FDs relativas a cada controlador por eixo e por anel foram já apresentadas no capítulo três. Assim, de seguida analisam-se as FDs da cinemática de posição, da estática de força e do robot/ambiente. Para as calcular é necessário considerar as seguintes expressões:

$$q_1 + q_2 = q_{120} + Q_{12} \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.7a)$$

$$Q_{12} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \cos(\phi)} \quad (5.7b)$$

$$\alpha = \arctan 2[Q_1 + Q_2 \cos(\phi), Q_2 \sin(\phi)] \quad (5.7c)$$

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = Ql_{12} \sin(\omega t + \alpha l_{12}) \quad (5.7d)$$

$$Ql_{12} = \sqrt{(-Q_1\omega)^2 + (-Q_2\omega)^2 + 2(-Q_1\omega)(-Q_2\omega)\cos(\phi)} \quad (5.7e)$$

$$\alpha l_{12} = \arctan 2[-Q_1\omega - Q_2\omega \cos(\phi), -Q_2\omega \sin(\phi)] \quad (5.7f)$$

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = Qll_{12} \cos(\omega t + \alpha ll_{12}) \quad (5.7g)$$

$$Qll_{12} = \sqrt{(-Q_1\omega^2)^2 + (-Q_2\omega^2)^2 + 2(-Q_1\omega^2)(-Q_2\omega^2)\cos(\phi)} \quad (5.7h)$$

$$\alpha ll_{12} = \arctan 2[-Q_1\omega^2 - Q_2\omega^2 \cos(\phi), -Q_2\omega^2 \sin(\phi)] \quad (5.7i)$$

Por outro lado, é também necessário utilizar as seguintes equações que empregam funções de Bessel:

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos(2\theta) + 2J_4(x) \cos(4\theta) + \dots \quad (5.8a)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2J_1(x) \sin(\theta) + 2J_3(x) \cos(3\theta) + 2J_5(x) \cos(5\theta) + \dots \quad (5.8b)$$

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos(2\theta) + 2J_4(x) \cos(4\theta) - 2J_6(x) \cos(6\theta) + \dots \quad (5.8c)$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2J_1(x) \sin(\theta) - 2J_3(x) \cos(3\theta) + 2J_5(x) \cos(5\theta) - \dots \quad (5.8d)$$

Note-se que as funções de Bessel de ordem n no ponto x , $J_n(x)$, decrescem rapidamente de valor à medida que se aumenta a ordem. Deste modo, as expressões anteriores têm uma aproximação razoável com poucos harmônicos calculados. De seguida apresentam-se as expressões onde é necessário aplicar estas funções de Bessel (truncaram-se as séries a partir da sexta ordem):

$$\begin{aligned} \sin(\theta - q_1) &= \sin[\theta - q_{10} - Q_1 \cos(\omega t)] = \sin(\theta - q_{10}) \cos[Q_1 \cos(\omega t)] - \\ &- \cos(\theta - q_{10}) \sin[Q_1 \cos(\omega t)] \cong \sin(\theta - q_{10}) [J_0(Q_1) - 2J_2(Q_1) \cos(2\omega t) + 2J_4(Q_1) \cos(4\omega t)] - \\ &- \cos(\theta - q_{10}) [2J_1(Q_1) \cos(\omega t) - 2J_3(Q_1) \cos(3\omega t) + 2J_5(Q_1) \cos(5\omega t)] \quad (5.9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - q_1 - q_2) &= \sin[\theta - q_{120} - Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] = \sin(\theta - q_{120}) \cos[Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] - \\ &- \cos(\theta - q_{120}) \sin[Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] \cong \\ &\cong \sin(\theta - q_{120}) [J_0(Q_{12}) - 2J_2(Q_{12}) \cos(2\omega t + 2\alpha) + 2J_4(Q_{12}) \cos(4\omega t + 4\alpha)] - \\ &- \cos(\theta - q_{120}) [2J_1(Q_{12}) \cos(\omega t + \alpha) - 2J_3(Q_{12}) \cos(3\omega t + 3\alpha) + 2J_5(Q_{12}) \cos(5\omega t + 5\alpha)] \quad (5.9b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - q_1) &= \cos[\theta - q_{10} - Q_1 \cos(\omega t)] = \cos(\theta - q_{10}) \cos[Q_1 \cos(\omega t)] + \\ &+ \sin(\theta - q_{10}) \sin[Q_1 \cos(\omega t)] \cong \cos(\theta - q_{10}) [J_0(Q_1) - 2J_2(Q_1) \cos(2\omega t) + 2J_4(Q_1) \cos(4\omega t)] + \\ &+ \sin(\theta - q_{10}) [2J_1(Q_1) \cos(\omega t) - 2J_3(Q_1) \cos(3\omega t) + 2J_5(Q_1) \cos(5\omega t)] \quad (5.9c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - q_1 - q_2) &= \cos[\theta - q_{120} - Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] = \cos(\theta - q_{120}) \cos[Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] + \\ &+ \sin(\theta - q_{120}) \sin[Q_{12} \cos(\omega t + \alpha)] \cong \\ &\cong \cos(\theta - q_{120}) [J_0(Q_{12}) - 2J_2(Q_{12}) \cos(2\omega t + 2\alpha) + 2J_4(Q_{12}) \cos(4\omega t + 4\alpha)] + \\ &+ \sin(\theta - q_{120}) [2J_1(Q_{12}) \cos(\omega t + \alpha) - 2J_3(Q_{12}) \cos(3\omega t + 3\alpha) + 2J_5(Q_{12}) \cos(5\omega t + 5\alpha)] \quad (5.9d) \end{aligned}$$

Partindo destas últimas expressões calculam-se, então, de uma forma aproximada, porque se truncaram as séries que incluem as funções de Bessel, as FDs dos blocos referidos anteriormente. Mesmo assim, teve-se de recorrer a um programa de álgebra para computador para as determinar devido à elevada complexidade das expressões que são necessárias para manipular algebricamente.

5.3.1 A \mathcal{D} do bloco estática de força

Nesta subsecção determinam-se as duas FDs relativas aos dois eixos do robot 2R e à parte de controlo de força. Assim, considere-se $F_d = 0$ N vindo, em notação vectorial, a expressão do bloco correspondente:

$$\begin{bmatrix} [r_1 \cos(\theta - q_1) + r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2)]F \\ [r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2)]F \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde a força F é por sua vez, como vimos no capítulo anterior, função de θ , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 , x_{c0} , M , B e K . Considera-se aqui também que a matriz \mathbf{S} é dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

ou seja, a direcção y_c é controlada em posição e a direcção x_c é controlada em força.

No Apêndice 5.A apresenta-se a respectiva FD para os dois eixos do robot 2R. A sua aplicação permite obter erros pequenos principalmente para amplitudes Q_1 e Q_2 baixas, porque comparou-se os valores com a FD numérica (*i.e.* por simulação) e esta é muito próxima do valor exacto.

5.3.2 A \mathcal{D} do bloco cinemática de posição

Nesta subsecção apresenta-se o cálculo da FD do bloco de cinemática de posição com a inversa clássica e com a modificação da matriz pseudo-inversa. Assim, para a formulação original (ou seja, com a inversa clássica), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_C^{-1} \mathbf{S} \begin{bmatrix} x_{eC} \\ y_{eC} \end{bmatrix} &= \frac{1}{r_1 r_2 \sin(q_2)} \left[\begin{aligned} &\frac{r_2^2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_2 - q_{10} - q_{20}) + \frac{r_1 r_2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_2 - q_{10}) - \\ &-\frac{r_2^2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_2 - q_{10} - q_{20}) - \frac{r_1 r_2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_2 - q_{10}) - \\ &-\frac{r_1 r_2}{2} \cos(2\theta - 2q_1 - q_2) - \frac{r_2^2}{2} \cos(2\theta - 2q_1 - 2q_2) + \frac{r_2^2}{2} \cos(q_1 + q_2 - q_{10} - q_{20}) + \\ &-\frac{r_1 r_2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_2 - q_{10}) - \frac{r_1^2}{2} \cos(2\theta - q_1 - q_{10}) + r_1 r_2 \cos(2\theta - 2q_1 - q_2) + \\ &+\frac{r_1 r_2}{2} \cos(q_1 + q_2 - q_{10}) - \frac{r_1 r_2}{2} \cos(q_2) + \frac{r_2^2}{2} \\ &+\frac{r_2^2}{2} \cos(2\theta - 2q_1 - 2q_2) + \frac{r_1^2}{2} \cos(2\theta - 2q_1) - \frac{r_2^2}{2} \cos(q_1 + q_2 - q_{10} - q_{20}) - \frac{r_1 r_2}{2} \cos(q_1 + q_2 - q_{10}) \\ &-\frac{r_1 r_2}{2} \cos(q_1 - q_{10} - q_{20}) - \frac{r_1^2}{2} \cos(q_1 - q_{10}) + r_1 r_2 \cos(q_2) + \frac{r_1^2}{2} + \frac{r_2^2}{2} \end{aligned} \right] \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Para achar a FD (aproximada devido à truncatura das funções de Bessel a partir da ordem seis inclusive) tem-se que determinar também a transformada de Fourier da função:

$$\text{cosec}(q_2) = \frac{1}{\sin(q_2)}, \quad q_2 = q_{20} + Q_2 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.13)$$

Através de métodos aproximados e numéricos chegou-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\text{cosec}(q_2) &\cong -0.234 \text{sgn}[\text{cosec}(q_{20})] + 1.20 \text{cosec}(q_{20}) + \\ &+ \left| -0.881 + 0.821 |\text{cosec}(q_{20})| \right| 5.07 Q_2 \cos \left\{ \omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \text{sgn}[\cos(q_{20})] + \phi \right\} + \\ &+ \left| -0.0603 + 0.063 |\text{cosec}(q_{20})| \right| 34.7 Q_2^2 \cos \left\{ 2\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \text{sgn}[\sin(q_{20})] + 2\phi \right\} + \\ &+ \left| -0.0055 + 0.0064 |\text{cosec}(q_{20})| \right| 183 Q_2^3 \cos \left\{ 3\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \text{sgn}[\cos(q_{20})] + 3\phi \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| -0.0011 + 0.00105 \right| \operatorname{cosec}(q_{20}) \left\| 1091 Q_2^4 \cos \left\{ 4\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[\sin(q_{20})] + 4\phi \right\} + \right. \\
& \left. + \left| -0.00014 + 0.00013 \right| \operatorname{cosec}(q_{20}) \left\| 6073 Q_2^5 \cos \left\{ 5\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[\cos(q_{20})] + 5\phi \right\} \right\} \quad (5.14)
\end{aligned}$$

No entanto, verificam-se erros elevados nas assíntotas da função (5.13), pelo que se optou por obter numericamente a FD deste bloco. O problema torna-se ainda mais difícil para o cálculo deste bloco com a modificação da matriz pseudo-inversa, porque é muito mais sujeito a erros de aproximação devido às funções presentes serem mais complexas. Assim, foi também calculada numericamente a FD deste bloco para esse caso. De qualquer forma, apresenta-se a seguir a equação para cálculo da FD deste bloco com a modificação da matriz pseudo-inversa:

$$(\mathbf{S}\mathbf{J})^+ \begin{bmatrix} x_{eC} \\ y_{eC} \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta^2 + v^2} \begin{bmatrix} \beta y_{eC} \\ v y_{eC} \end{bmatrix} \quad (5.15a)$$

$$\begin{cases} \beta = r_1 \sin(\theta - q_1) + r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \\ v = r_2 \sin(\theta - q_1 - q_2) \end{cases} \quad (5.15b)$$

$$y_{eC} = r_1 \cos(\theta - q_{10}) + r_2 \cos(\theta - q_{10} - q_{20}) - r_1 \cos(\theta - q_1) - r_2 \cos(\theta - q_1 - q_2) \quad (5.15c)$$

A solução numérica é suficiente, porque como se verá adiante obtém-se bons resultados em termos de comparação dos resultados das simulações com ciclos limite com os previstos através da utilização da FD. Verificou-se, também, que a análise através da FD é muito sensível aos erros cometidos no cálculo da FD deste bloco.

5.3.3 A \mathbf{D} do bloco robot 2R/ambiente

Nesta subsecção apresenta-se o cálculo da FD do bloco robot 2R/ambiente. Para o efeito, considere-se a equação da dinâmica inversa do conjunto:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} \quad (5.16)$$

Neste sentido, o primeiro harmónico de τ obtido da entrada sinusoidal de q pode ser determinado através da decomposição em quatro partes (ver equação anterior): termos inerciais, termos Coriolis/centrífugos, termos gravitacionais e termos de interacção com o ambiente. Assim, veremos mais adiante que só os termos de interacção com o ambiente serão calculados de uma forma aproximada devido à truncatura das séries que contêm funções de Bessel, enquanto que os restantes serão determinados com total exactidão.

Para calcular a FD dos termos inerciais é necessário decompor $C_2 = \cos(q_2)$ em série com funções de Bessel:

$$C_2 \cong \cos(q_{20}) \left[J_0(Q_2) - 2J_2(Q_2) \cos(2\omega t + 2\phi) + 2J_4(Q_2) \cos(4\omega t + 4\phi) \right] - \sin(q_{20}) \left[2J_1(Q_2) \cos(\omega t + \phi) - 2J_3(Q_2) \cos(3\omega t + 3\phi) + 2J_5(Q_2) \cos(5\omega t + 5\phi) \right] \quad (5.17)$$

Então, a FD correspondente vem:

$$\begin{aligned} & \left[\left[(m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + J_{1m} + J_{1g} \right] \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + 2m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20})J_0(Q_2) \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left[m_2r_2^2 \right] \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20})J_0(Q_2) \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(q_{20})J_2(Q_2) \cos(\omega t + 2\phi) \left(-Q_1\omega^2 \right) \right\} + m_2r_2^2 \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] + \right. \\ & \left. \left. - \cos(q_{20})J_2(Q_2) \cos(\omega t + 2\phi) \left(-Q_1\omega^2 \right) \right\} + \right. \\ & \left. \left. + m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20})J_0(Q_2) \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] - \cos(q_{20})J_2(Q_2) \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] \right\} \right] \\ & \left. + \left(m_2r_2^2 + J_{2m} + J_{2g} \right) \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] \right] \quad (5.18) \end{aligned}$$

Para calcular a FD dos termos Coriolis/centrífugos é também necessário expandir $S_2 = \sin(q_2)$ em série com funções de Bessel:

$$S_2 \cong \sin(q_{20}) \left[J_0(Q_2) - 2J_2(Q_2) \cos(2\omega t + 2\phi) + 2J_4(Q_2) \cos(4\omega t + 4\phi) \right] + \cos(q_{20}) \left[2J_1(Q_2) \cos(\omega t + \phi) - 2J_3(Q_2) \cos(3\omega t + 3\phi) + 2J_5(Q_2) \cos(5\omega t + 5\phi) \right] \quad (5.19)$$

Neste caso a FD vem:

$$\begin{aligned}
& \left[-m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [Q_2^2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)] - 2m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [Q_1 Q_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)] \cos(\phi) + \right. \\
& \left. m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [Q_1^2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)] + m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [-Q_1^2 \omega^2 \cos(-\omega t + \phi)] \frac{1}{2} + \right. \\
& \left. + m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [Q_2^2 \omega^2 \cos(-\omega t - \phi)] \frac{1}{2} - m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_3(Q_2) [Q_2^2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)] \frac{1}{2} + \right. \\
& \left. + m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_3(Q_2) [Q_1^2 \omega^2 \cos(\omega t + 3\phi)] \frac{1}{2} \right. \\
& \left. + m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_1(Q_2) [Q_1 Q_2 \omega^2 \cos(-\omega t)] - m_2 r_1 r_2 \cos(q_{20}) J_3(Q_2) [Q_1 Q_2 \omega^2 \cos(\omega t + 2\phi)] \right] \\
& \hspace{20em} (5.20)
\end{aligned}$$

A FD dos termos gravitacionais vem:

$$\left[g \left[-(m_1 r_1 + m_2 r_1) \sin(q_{10}) 2J_1(Q_1) \cos(\omega t) - 2m_2 r_2 \sin(q_{120}) J_1(Q_{12}) \cos(\omega t + \alpha) \right] \right. \\
\left. - 2gm_2 r_2 \sin(q_{120}) J_1(Q_{12}) \cos(\omega t + \alpha) \right] \quad (5.21)$$

onde $q_{120} = q_{10} + q_{20}$ e α é o ângulo entre q_1 e q_2 (como calculado anteriormente).

A FD do termo $\mathbf{J}^T \mathbf{F}$ está apresentada no Apêndice 5.B que contém a aproximação com as parcelas relativas à funções de Bessel até à ordem cinco.

Na próxima secção aplicam-se estas expressões no estudo da viabilidade da utilização da FD à previsão de ocorrência de ciclos limite no CH com robot 2R.

5.4 Viabilidade do estudo da estabilidade do CH através do diagrama de Nyquist multivariável

Depois de se terem calculado os blocos de FDs decompostas do CH considere-se a Figura 5.19 onde se representa o respectivo diagrama de blocos da FD total (hipótese inicial). Note-se que este diagrama de blocos só é válido para Q_1 ou Q_2 razoavelmente de pequena grandeza, vindo erros mais elevados se isso não se verificar devido à interacção entre as duas variáveis na FD. No entanto, devido à falta generalizada de ferramentas para analisar sistemas multivariáveis não lineares, teve-se que aplicar esta estratégia inicial.

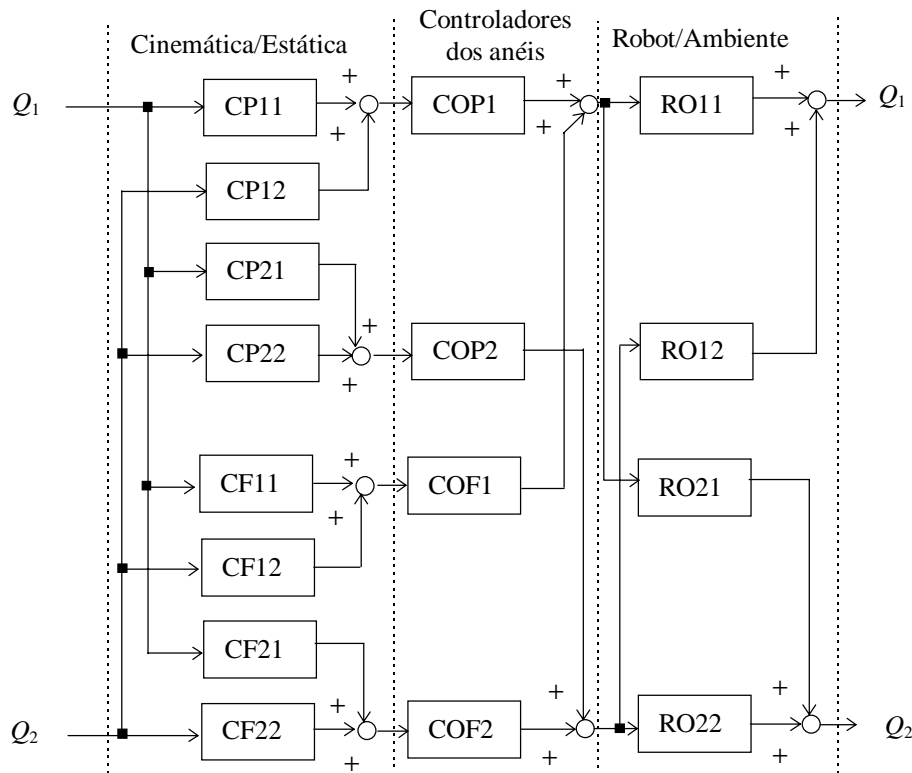


Figura 5.19

Diagrama de blocos correspondente à aplicação da FD ao CH com robot 2R.

O diagrama de blocos da Figura anterior pode ser simplificado (Figura 5.20), resultando as equações de um sistema MIMO (multiple-input-multiple-output), (5.22):

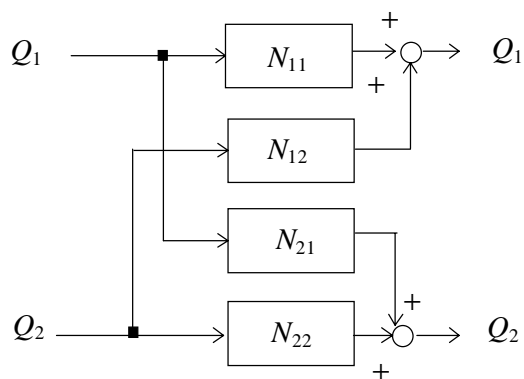


Figura 5.20

Diagrama de blocos simplificado do CH.

$$\begin{cases} Q_1 = N_{11}Q_1 + N_{12}Q_2 \\ Q_2 = N_{21}Q_1 + N_{22}Q_2 \end{cases} \quad (5.22)$$

Então pode-se aplicar o critério de Nyquist multivariável que conduz à equação característica:

$$N_{11}N_{22} - N_{11} - N_{22} - N_{12}N_{21} + 1 = 0 \quad (5.23)$$

Até agora considerou-se que tanto Q_1 como Q_2 podem tomar independentemente qualquer valor. Esta hipótese não foi verificada na prática, pois estas variáveis têm sempre uma grandeza pequena e não são independentes como se prova a seguir. Deste modo, está aberta a porta para a utilização generalizada da linearização do sistema partindo das equações das FDs parciais do sistema. De seguida, apresenta-se o estudo da utilização numérica da FD para verificar a consistência entre ciclos limite encontrados e o valor da equação característica anterior (5.23). Considere-se então os valores numéricos utilizados para o robot 2R ideal indicados na Tabela 5.1.

i	m_i (Kg)	r_i (m)	J_{im} (Kgm ²)	J_{ig} (Kgm ²)
1	0.5	1.0	1.0	4.0
2	6.25	0.8	1.0	4.0

Tabela 5.1 Os parâmetros do robot 2R ideal.

Na Tabela 5.2 enunciam-se os valores numéricos dos CEVs de primeira ordem utilizados nesta secção.

Eixo i	K_{Pi}	K_{Fi}	τ_{Pmaxi}	τ_{Fmaxi}	c_{Pi}	c_{Fi}
1	10^4 a 2×10^5	80 a 500	1,000	1,000	2.5	0.25
2	10^4 a 2×10^5	80 a 500	500	500	2.5	0.25

Tabela 5.2 Os valores numéricos dos CEVs utilizados nesta secção.

O ponto de funcionamento utilizado para o sistema robot 2R com CH foi: $K = 100$ N/m, $B = 0.03$ Ns/m, $M = 0$ Kg, $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $F_d = 0$ N, $y_{Cd} = y_{C0}$ m, $f_c = 10$ kHz, com a formulação da inversa clássica. Note-se que se utilizou a superfície restrição de segunda ordem.

Segundo os resultados obtidos, K_{P_i} ($i = 1, 2$) só afecta a estabilidade e o erro de posição. Deste modo variou-se K_{F_i} ($i = 1, 2$) e obtiveram-se, a título exemplificativo, os gráficos seguintes (Figuras 5.21 e 5.22).

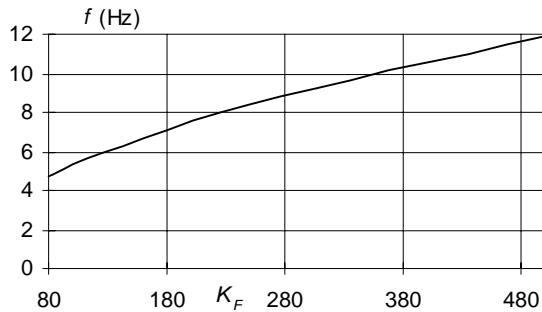


Figura 5.21

Gráfico da frequência dos ciclos limite encontrados em função de $K_F = K_{F1} = K_{F2}$.

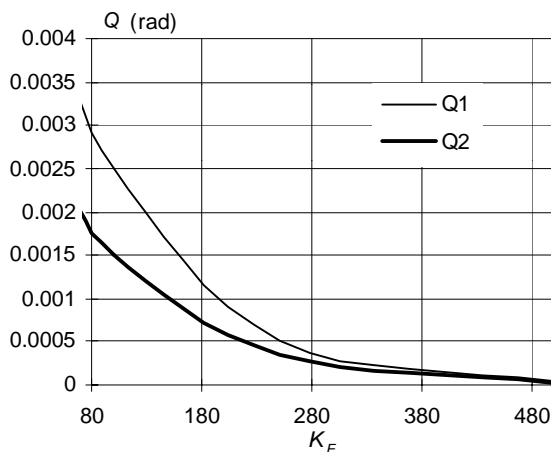


Figura 5.22

Gráfico dos valores de Q_1 e de Q_2 para os ciclos limite encontrados em função de $K_F = K_{F1} = K_{F2}$.

Como se pode concluir dos dois gráficos anteriores, existe uma dependência entre q_1 e q_2 , pelo que não se pode arbitrar valores quaisquer para estes dois parâmetros. Também se verificou que a equação característica do critério de Nyquist multivariável é satisfeita para qualquer condição de ciclo limite, porque Q_1 e Q_2 são de pequena grandeza.

5.5 Linearização do CH

Nesta secção apresenta-se o desenvolvimento das expressões para a linearização do CH com robot 2R e recorre-se a esses resultados para estudar o sistema através do traçado de Nyquist. São verificadas condições de estabilidade do sistema para casos de ciclos limite em função de monofrequência e multifrequência de controladores. Estes resultados teóricos são todos comprovados nas experiências realizadas.

Para iniciar o cálculo da linearização global do sistema utiliza-se a mesma estratégia que para a FD, ou seja, calculam-se as linearizações dos três sub-blocos. Para tal, observe-se que as seguintes expressões são válidas para pequenos x :

$$J_0(x) \approx 1, J_1(x) \approx \frac{x}{2}, J_2(x) \approx 0, J_3(x) \approx 0, J_4(x) \approx 0, J_5(x) \approx 0 \quad (5.24)$$

Partindo destas simplificações e eliminado produtos de segunda ordem e superiores de Q_1 e de Q_2 , obtém-se a linearização do sistema. Assim, a linearização da parte de estática de força está exposta no Apêndice 5.C, onde se pode verificar a maior simplicidade dos cálculos comparados com a FD respectiva. A linearização da parte de cinemática de posição calculou-se numericamente para as formulações com a inversa clássica e com a matriz pseudo-inversa, devido aos problemas referidos no cálculo da FD. A linearização do bloco robot 2R/ambiente foi realizada através das quatro partes distintas referidas anteriormente, vindo para os termos inerciais a expressão:

$$\left[\begin{aligned} & \left[(m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + J_{1m} + J_{1g} \right] \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + 2m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20}) \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + \right. \\ & \left. (m_2r_2^2) \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20}) \left[-Q_1\omega^2 \cos(\omega t) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + m_2r_2^2 \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] + m_2r_1r_2 \left\{ \cos(q_{20}) \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] \right\} \right\} \right] \\ & \left. + (m_2r_2^2 + J_{2m} + J_{2g}) \left[-Q_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] \right] \quad (5.25) \end{aligned}$$

A linearização dos termos Coriolis/centrífgos vem igual ao vector nulo e a relativa aos termos gravitacionais toma a seguinte expressão:

$$\left[g \left\{ (m_1 r_1 + m_2 r_1) [-\sin(q_{10}) Q_1 \cos(\omega t)] - m_2 r_2 \sin(q_{120}) [Q_1 \cos(\omega t) + Q_2 \cos(\omega t + \phi)] \right\} \right. \\ \left. - g m_2 r_2 \sin(q_{120}) [Q_1 \cos(\omega t) + Q_2 \cos(\omega t + \phi)] \right] \quad (5.26)$$

Finalmente, a linearização do termo $\mathbf{J}^T \mathbf{F}$ está apresentada no Apêndice 5.D onde se pode observar a muito maior simplicidade das expressões obtidas. É possível agora estudar o CH com robot 2R através da linearização e do traçado de Nyquist perto do ponto $-1+j0$ (correspondente a um ciclo limite).

Por exemplo, para uma frequência de controlador $f_c = 10$ kHz e para as condições $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 0.03$ Ns/m e $M = 0$ Kg, encontra-se um ciclo limite de $f = 5$ Hz, valor que verifica a expressão (5.23).

O diagrama de Nyquist do sistema para várias frequências do controlador está representado na Figura 5.23. Pode ser visto que para $f_c = 10$ kHz o ciclo limite é estável enquanto que diminuindo f_c o sistema torna-se instável.

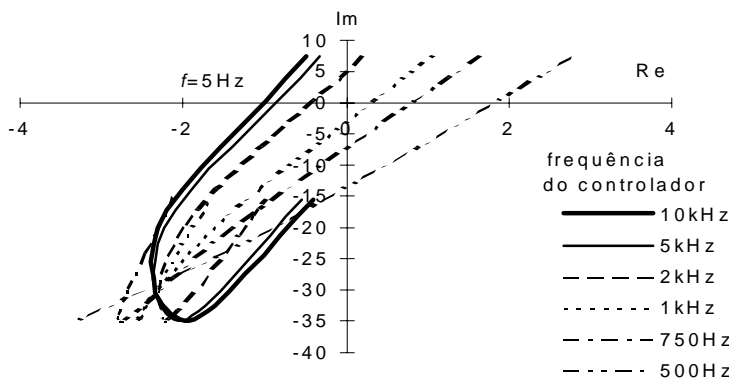


Figura 5.23

Diagrama de Nyquist do sistema para várias frequências (f_c) do controlador ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 0.03$ Ns/m e $M = 0$ Kg).

A linearização dos controladores, incluindo o efeito da frequência de amostragem finita, está representada na Figura 5.24, onde o bloco $G_s(j\omega)$ é dado pela expressão:

$$G_s(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \quad (5.27)$$

e T é o período de amostragem do controlador.

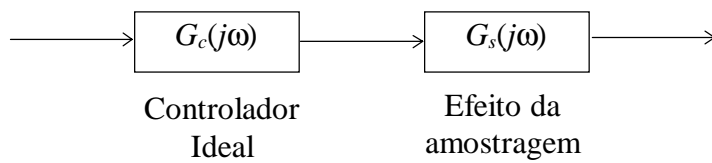


Figura 5.24

Análise da linearização dos controladores tendo em conta a frequência de amostragem finita.

Agora, para este mesmo ponto de funcionamento, vai-se apresentar o estudo análogo relativo à multifrequência de operação dos controladores dos anéis de posição e de força. Assim, na Figura 5.25a mostra-se o traçado de Nyquist para a frequência de amostragem do controlador de posição fixa a 10 kHz e a do controlador de força variável. Na Figura 5.25b apresenta-se o caso inverso, ou seja, a frequência de amostragem do controlador de posição variável e a do controlador de força fixa a 10 kHz. Como se pode concluir pelos gráficos, a frequência do controlador de força é mais crítica para pontos de funcionamento de ocorrência de ciclos limite do que a do controlador de posição. Isto foi confirmado pelas experiências de multifrequência para vários valores do coeficiente de amortecimento B apresentadas no capítulo anterior.

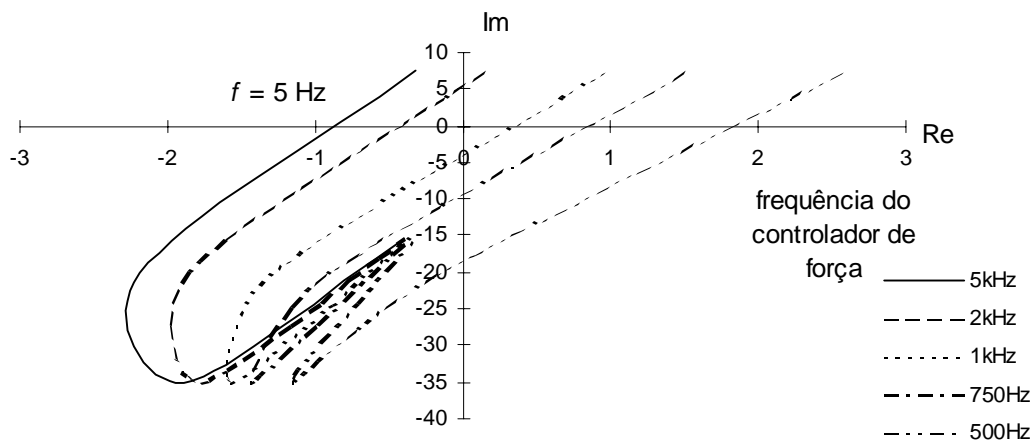


Figura 5.25a

Diagrama de Nyquist para CH com multifrequência de amostragem (a da posição fixa a 10 kHz e a da força variável), $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 0.03$ Ns/m e $M = 0$ Kg.

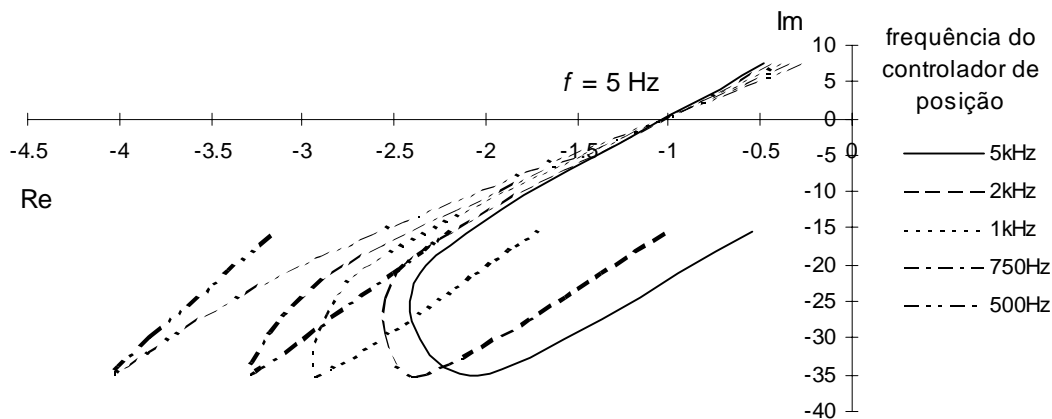


Figura 5.25b

Diagrama de Nyquist para o CH com multifrequência de amostragem (a da posição variável e a da força fixa a 10 kHz) , $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 0.03$ Ns/m e $M = 0$ Kg.

Em conclusão, o diagrama de Nyquist representa uma ferramenta muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

5.6 Resposta em frequência em malha fechada analítica do CH com o robot 2R

Nesta secção apresenta-se o cálculo da resposta em frequência em malha fechada do CH com robot 2R de forma analítica usando a linearização determinada na secção anterior. Os resultados obtidos são, assim, válidos para pequenos sinais de entrada, mas verifica-se que aproximam qualitativa e quantitativamente os obtidos numericamente. Nesta secção todos os blocos são determinados analiticamente. Considere-se então o diagrama de blocos da Figura 5.26 com o propósito de calcular a resposta em frequência através da utilização da linearização do sistema efectuada na secção anterior. O objectivo final será obter o diagrama de blocos simplificado da Figura 5.27, isto é, a resposta em frequência analítica.

As expressões para os vários blocos vêm como de seguida se expõe. Assim, para Y_1 e Y_2 :

$$Y_1 = r_1 \sin(\theta - q_{10}) + r_2 \sin(\theta - q_{120}) \quad (5.28)$$

$$Y_2 = r_2 \sin(\theta - q_{120}) \quad (5.29)$$

Para $CF1 = FF1$ e $CF2 = FF2$ vem:

$$CF1 = FF1 = -r_1 \cos(\theta - q_{10}) - r_2 \cos(\theta - q_{120}) \quad (5.30)$$

$$CF2 = FF2 = -r_2 \cos(\theta - q_{120}) \quad (5.31)$$

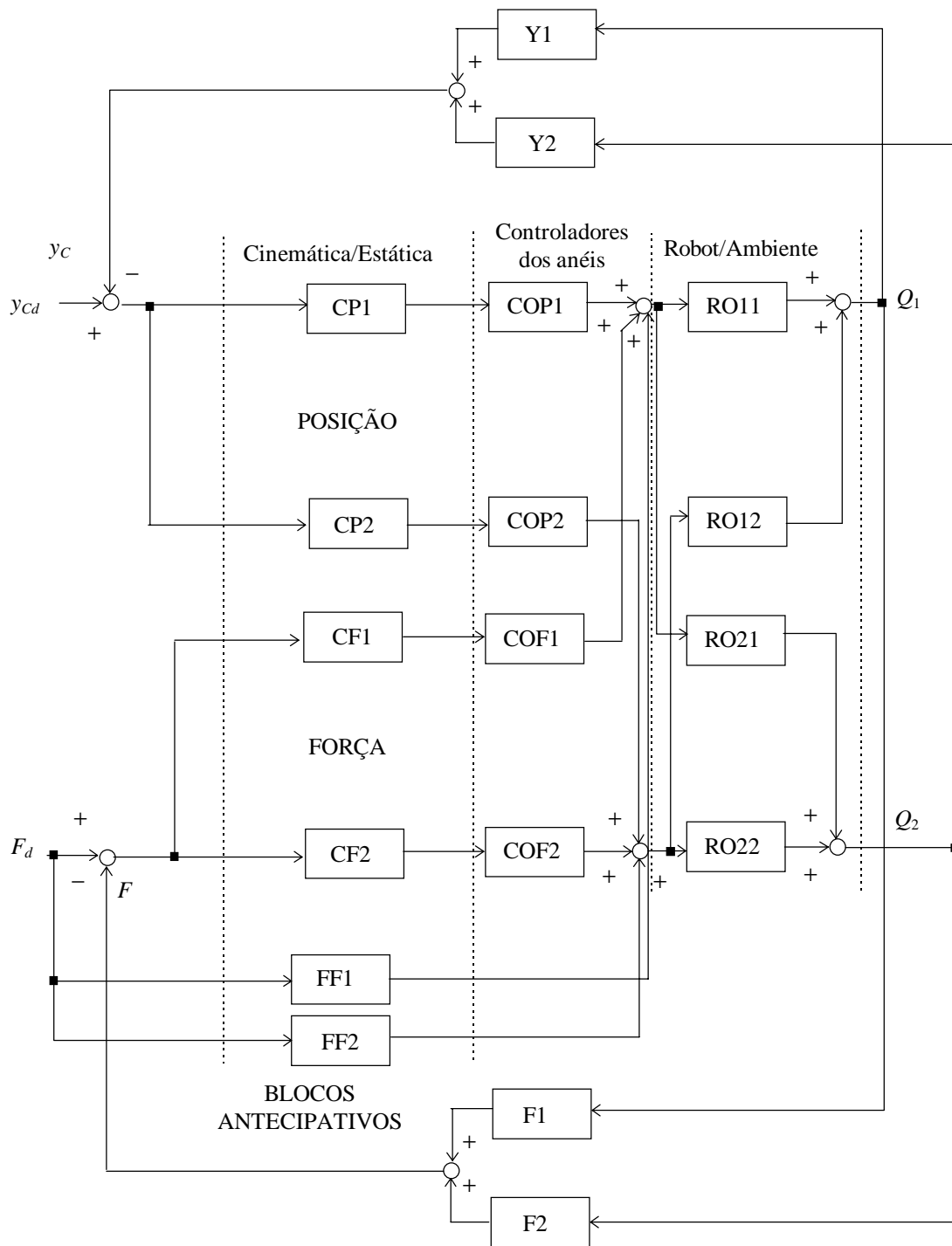


Figura 5.26

Diagrama de blocos para cálculo da resposta em frequência em malha fechada do CH com robot 2R.

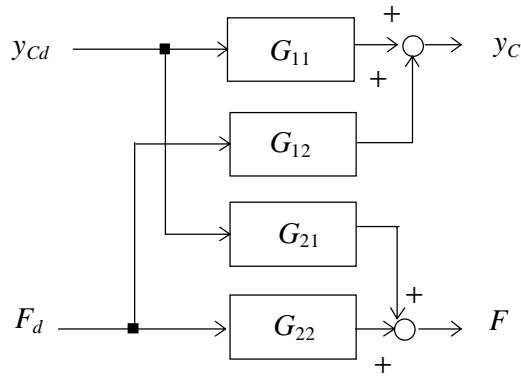


Figura 5.27

Diagrama de blocos simplificado da resposta em frequência em malha fechada do CH com robot 2R.

Os blocos F_1 e F_2 foram calculados num programa de álgebra por computador e estão apresentados no Apêndice 5.E. Os blocos $CP1$ e $CP2$ têm duas expressões alternativas, para o caso de se considerar a formulação do CH com a inversa clássica ou com a modificação da pseudo-inversa. Assim, para o primeiro caso vem:

$$CP1 = \frac{\cos(\theta - q_{120})}{r_1 \sin(q_{20})} \quad (5.32)$$

$$CP2 = \frac{-r_1 \cos(\theta - q_{10}) - r_2 \cos(\theta - q_{120})}{r_1 r_2 \sin(q_{20})} \quad (5.33)$$

Para o segundo caso, ou seja, com a formulação da pseudo-inversa, vem:

$$CP1 = \frac{r_1 \sin(\theta - q_{10}) + r_2 \sin(\theta - q_{120})}{D} \quad (5.34)$$

$$CP2 = \frac{r_2 \sin(\theta - q_{120})}{D} \quad (5.35)$$

$$D = -r_2^2 \cos(2q_{20} + 2q_{10} - 2\theta) - r_1 r_2 \cos(q_{20} + 2q_{10} - 2\theta) + r_1 r_2 \cos(q_{20}) - \frac{1}{2} r_1^2 \cos(2q_{10} - 2\theta) + \frac{1}{2} r_1^2 + r_2^2 \quad (5.36)$$

Os blocos dos controladores dos anéis foram já apresentados anteriormente, bem como os do robot 2R. Deste modo, resta calcular as funções de transferência $G_{11} = \frac{Y_c}{Y_{cd}}$, $G_{12} = \frac{Y_c}{F_d}$, $G_{21} = \frac{F}{Y_{cd}}$ e $G_{22} = \frac{F}{F_d}$ através das expressões analíticas referidas. Assim, começa-se por identificar os anéis e as transmissões entradas/saídas e finalmente calculam-se essas funções de transferência.

O diagrama de blocos da resposta em frequência contém dez anéis ($L_i, i = 1, \dots, 10$):

$$L_1 = -COF2 \cdot CF2 \cdot RO12 \cdot F1 \quad (5.37a)$$

$$L_2 = -COF2 \cdot CF2 \cdot RO22 \cdot F2 \quad (5.37b)$$

$$L_3 = -COF1 \cdot CF1 \cdot RO11 \cdot F1 \quad (5.37c)$$

$$L_4 = -COF1 \cdot CF1 \cdot RO21 \cdot F2 \quad (5.37d)$$

$$L_5 = -COP1 \cdot CP1 \cdot RO11 \cdot Y1 \quad (5.37e)$$

$$L_6 = -COP1 \cdot CP1 \cdot RO21 \cdot Y2 \quad (5.37f)$$

$$L_7 = -COP2 \cdot CP2 \cdot RO12 \cdot Y1 \quad (5.37g)$$

$$L_8 = -COP2 \cdot CP2 \cdot RO22 \cdot Y2 \quad (5.37h)$$

$$L_9 = Y1 \cdot RO11 \cdot COF1 \cdot CF1 \cdot F2 \cdot RO22 \cdot COP2 \cdot CP2 \quad (5.37i)$$

$$L_{10} = Y2 \cdot RO22 \cdot COF2 \cdot CF2 \cdot F1 \cdot RO11 \cdot COP1 \cdot CP1 \quad (5.37j)$$

Vindo, então o determinante Δ do sistema:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 + L_{10}) + (L_1 L_6 + L_2 L_5 + L_3 L_8 + L_4 L_7) \quad (5.38)$$

Finalmente, as funções de transferência são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{Y_c}{Y_{cd}} = \frac{1}{\Delta} \{ & Y1 \cdot [RO11 \cdot COP1 \cdot CP1 \cdot (1 - L_2) + RO12 \cdot COP2 \cdot CP2 \cdot (1 - L_4)] + \\ & + Y2 \cdot [RO22 \cdot COP2 \cdot CP2 \cdot (1 - L_3) + RO21 \cdot COP1 \cdot CP1 \cdot (1 - L_1)] - \\ & - Y1 \cdot RO11 \cdot COF1 \cdot CF1 \cdot F2 \cdot RO22 \cdot COP2 \cdot CP2 - \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$-Y_2 \cdot RO_{22} \cdot COF_2 \cdot CF_2 \cdot F_1 \cdot RO_{11} \cdot COP_1 \cdot CP_1\}$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{Y_{cd}} = \frac{1}{\Delta} \{ & F_1 \cdot (RO_{11} \cdot COP_1 \cdot CP_1 + RO_{12} \cdot COP_2 \cdot CP_2) + \\ & + F_2 \cdot (RO_{22} \cdot COP_2 \cdot CP_2 + RO_{21} \cdot COP_1 \cdot CP_1) - \\ & - F_1 \cdot RO_{11} \cdot COP_1 \cdot CP_1 \cdot Y_2 \cdot RO_{22} \cdot COF_2 \cdot CF_2 - \\ & - F_2 \cdot RO_{22} \cdot COP_2 \cdot CP_2 \cdot Y_1 \cdot RO_{11} \cdot COF_1 \cdot CF_1 \} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{F_d} = \frac{1}{\Delta} \{ & F_1 \cdot [RO_{11} \cdot (COF_1 + 1) \cdot CF_1 \cdot (1 - L_8) + \\ & + RO_{12} \cdot (COF_2 + 1) \cdot CF_2 \cdot (1 - L_6)] + \\ & + F_2 \cdot [RO_{22} \cdot (COF_2 + 1) \cdot (1 - L_5) \cdot CF_2 + \\ & + RO_{21} \cdot (COF_1 + 1) \cdot (1 - L_7) \cdot CF_1] \} \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_c}{F_d} = \frac{1}{\Delta} \{ & Y_1 \cdot [RO_{11} \cdot (COF_1 + 1 - L_2) \cdot CF_1 + \\ & + RO_{12} \cdot (COF_2 + 1 - L_4) \cdot CF_2] + \\ & + Y_2 \cdot [RO_{22} \cdot (COF_2 + 1 - L_3) \cdot CF_2 + \\ & + RO_{21} \cdot (COF_1 + 1 - L_1) \cdot CF_1] \} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Estas são as expressões para a resposta em frequência analítica do CH com robot 2R. Note-se como uma particularidade que se x_{c0} for menor que zero deve-se multiplicar por -1 a função de transferência Y_c/F_d .

Para ilustrar a utilização destas expressões apresenta-se de seguida as respostas em frequência para o ponto de funcionamento $\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0$ Kg. Assim, na Figura 5.28 está representada a resposta em frequência em malha fechada, com a inversa clássica, determinada numericamente (traços a cheio) *versus* a resposta obtida analiticamente (pontos indicados com quadrados).

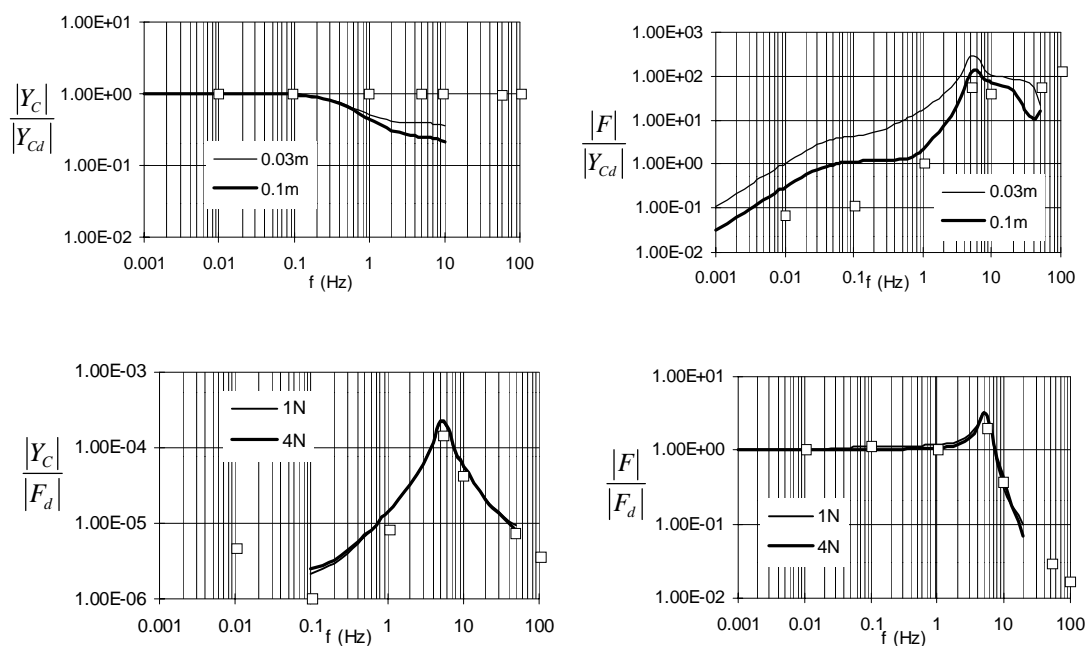


Figura 5.28

Resposta em frequência em malha fechada do CH com robot 2R com a formulação da inversa clássica ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0$ Kg). A traço cheio está a resposta obtida numericamente e com quadrados os pontos obtidos analiticamente.

Na Figura 5.29 estão representadas, de modo análogo, as respostas em frequência de alguns pontos calculados analiticamente (quadrados brancos) e numericamente (traço cheio) com a modificação da matriz pseudo-inversa e para o mesmo ponto de funcionamento.

Como se pode verificar os resultados obtidos de forma analítica e os obtidos numericamente para as respostas em frequência estão de acordo, dentro de uma pequena margem de erro.

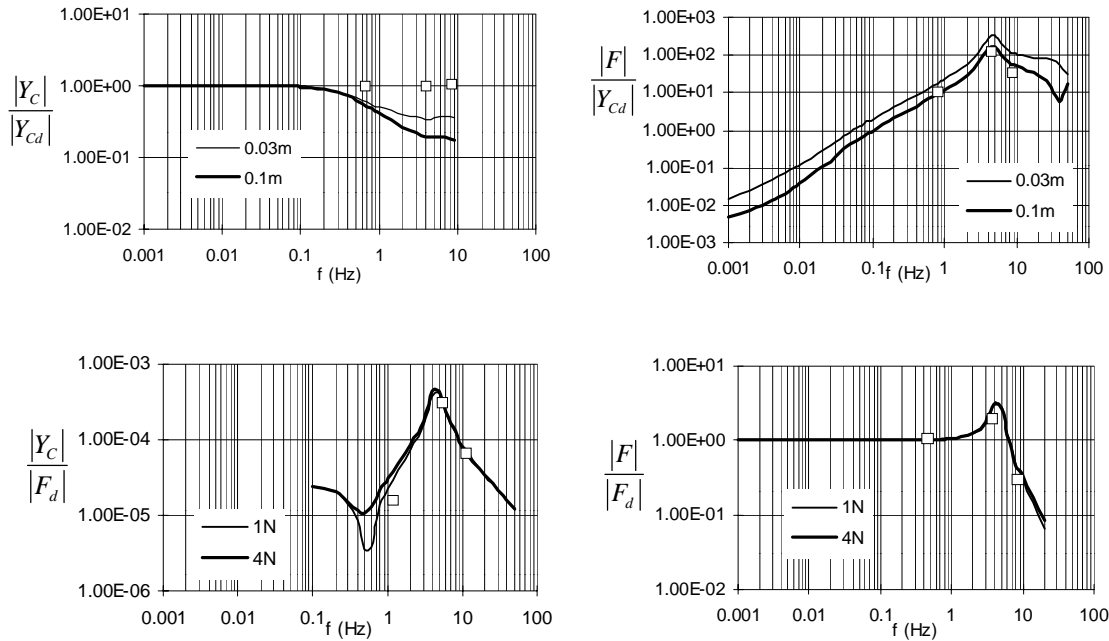


Figura 5.29

Respostas em frequência em malha fechada do CH com robot 2R com a modificação da pseudo-inversa ($\theta = \pi/2$, $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, $K = 100$ N/m, $B = 1$ Ns/m e $M = 0$ Kg). A traço cheio está a resposta obtida numericamente e com quadrados os pontos obtidos analiticamente.

5.7 Conclusões

Neste capítulo apresentaram-se algumas considerações sobre a utilização da FD no estudo da cinemática directa de robots e estudou-se a FD do CH através da utilização do traçado de Nyquist multivariável para verificar a estabilidade do CH. Por outro lado, estudou-se a linearização do CH, tendo como ponto de partida a FD do sistema, e a determinação analítica da resposta em frequência em malha fechada do CH tendo como base a linearização do sistema respectivo.

Os resultados obtidos neste capítulo são encorajadores para a utilização das técnicas de análise com a FD em sistemas complexos, uma vez que foi possível estudar a estabilidade do CH com robot 2R tendo como ponto de partida a sua FD. A linearização é uma técnica também muito importante e satisfatoriamente aproximada para o estudo do CH, pois os sinais internos envolvidos são sempre de pequena amplitude neste sistema. Deste modo, chegou-se à determinação da expressão analítica da resposta em frequência em malha fechada do CH com robot 2R que pode ser estendida a qualquer tipo de robot.

A validação dos resultados foi efectuada através de simulações intensivas que possibilitaram estudar o desempenho do sistema em várias condições de funcionamento.

Apêndice 5.A

Determinação da \mathbf{D} do bloco de controlo de força

Neste apêndice apresenta-se a FD para os dois eixos do bloco de controlo de força. As expressões foram obtidas através de um programa de manipulação algébrica. Devido a restrições desse programa para a designação das variáveis na tabela apresentam-se as correspondências entre as variáveis utilizadas no texto e as variáveis do referido programa:

Programa	Texto	Programa	Texto
a	q_{10}	delta	$J_3(Q_1)$
c	q_{20}	u	$J_4(Q_1)$
w	ω	v	$J_5(Q_1)$
t	t	x	$J_0(Q_{12})$
d	Q_1	y	$J_1(Q_{12})$
e	Q_2	z	$J_2(Q_{12})$
f	ϕ	alpha	$J_3(Q_{12})$
n	r_1	beta	$J_4(Q_{12})$
o	r_2	tau	$J_5(Q_{12})$
p	θ	theta	x_{C0}
m	M	g	Q_{12}
b	B	h	α
k	K	i	$Q_{l_{12}}$
q	$J_0(Q_1)$	j	$\alpha_{l_{12}}$
r	$J_1(Q_1)$	l	$Q_{ll_{12}}$
s	$J_2(Q_1)$	epsilon	$\alpha_{ll_{12}}$

Eixo 1:

$$\begin{aligned}
 & (1 * m * o^{2 * x * z} / 2 + 1 * m * o^{2 * y^2} / 4 - \alpha * 1 * m * o^{2 * y} / 2 + \beta * 1 * m * o^{2 * z} / 2 - \\
 & \alpha * 1 * m * o^{2 * \tau} / 2) * \cos(2 * a + 2 * c + \epsilon - 2 * h - 2 * p - t * w) + 1 * m * o^{2 * (y^2 - z^2 + \alpha^2 - \\
 & \beta^2 + \tau^2) - x^2} * \cos(2 * a + 2 * c + \epsilon - 2 * p + t * w) / 4 + (1 * m * o^{2 * x * z} / 2 + 1 * m * o^{2 * y^2} / 4 - \\
 & \alpha * 1 * m * o^{2 * y} / 2 + \beta * 1 * m * o^{2 * z} / 2 - \alpha * 1 * m * o^{2 * \tau} / 2) * \cos(2 * a + 2 * c - \epsilon - 2 * h - \\
 & 2 * p + t * w) + 1 * m * o^{2 * (y^2 - z^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \tau^2) - x^2} * \cos(2 * a + 2 * c - \epsilon - 2 * p - \\
 & t * w) / 4 + (\alpha * i^{2 * m * o^{2 * x} / 4 + y * (i^{2 * m * o^{2 * z} / 4 - \\
 & \beta * i^{2 * m * o^{2 * \tau} / 4} + i^{2 * m * o^{2 * \tau} * z} / 4) * \cos(2 * a + 2 * c + 3 * h - 2 * j - 2 * p + t * w) - \beta * i^{2 * (2 * x * z + y^2 - \\
 & 2 * \alpha * y + 2 * (\beta * z - \alpha * \tau))} * \sin(2 * a + 2 * c + 2 * h - j - 2 * p + t * w) / 4 - i^{2 * m * o^{2 * (x * y - y * z + \alpha * z - \\
 & \beta * (\alpha - \tau))} * \cos(2 * a + 2 * c + h - 2 * j - 2 * p - t * w) / 4 + (o^{2 * x * y * (i^{2 * m - 2 * k} / 2 + o^{2 * y * z * (2 * k - \\
 & i^{2 * m} / 2 + \alpha * o^{2 * z * (i^{2 * m - 2 * k} / 2 + \alpha * \beta * o^{2 * (2 * k - i^{2 * m} / 2 + \beta * o^{2 * \tau} * (i^{2 * m - \\
 & 2 * k) / 2) * \cos(2 * a + 2 * c + h - 2 * p + t * w) - i^{2 * m * o^{2 * (x * y - y * z + \alpha * z - \beta * (\alpha - \tau))} * \cos(2 * a + 2 * c - h + 2 * j - \\
 & 2 * p + t * w) / 4 + (o^{2 * x * y * (i^{2 * m - 2 * k} / 2 + o^{2 * y * z * (2 * k - i^{2 * m} / 2 + \alpha * o^{2 * z * (i^{2 * m - \\
 & 2 * k) / 2 + \alpha * \beta * o^{2 * (2 * k - i^{2 * m} / 2 + \beta * o^{2 * \tau} * (i^{2 * m - 2 * k} / 2) * \cos(2 * a + 2 * c - h - 2 * p - \\
 & t * w) + (\beta * i^{2 * o^{2 * x * z} / 2 + \beta * i^{2 * o^{2 * y^2} / 4 - \alpha * \beta * i^{2 * o^{2 * y} / 2 + \beta * \beta * i^{2 * o^{2 * z} / 2 - \\
 & \alpha * \beta * i^{2 * o^{2 * \tau} / 2) * \sin(2 * a + 2 * c - 2 * h + j - 2 * p - t * w) + (\alpha * i^{2 * m * o^{2 * x} / 4 + y * (i^{2 * m * o^{2 * z} / 4 - \\
 & \beta * i^{2 * m * o^{2 * \tau} / 4} + i^{2 * m * o^{2 * \tau} * z} / 4) * \cos(2 * a + 2 * c - 3 * h + 2 * j - 2 * p - t * w) + \beta * i^{2 * (2 * (y^2 - z^2 + \alpha^2 - \\
 & \beta^2 + \tau^2) * b * i^{2 * o^{2 * z} / 2 + \beta * (beta^2 * i^{2 * o^{2 * \tau} / 2 - i^{2 * o^{2 * \tau} * z} / 2))} * \sin(2 * a + 2 * c - j - 2 * p - \\
 & t * w) + 1 * m * n * o^{2 * \tau} * y * \cos(2 * a + c + \epsilon + 5 * h - 2 * p + t * w) / 4 - \beta * 1 * m * n * o^{2 * u} * \cos(2 * a + c + \epsilon + 4 * h - \\
 & 2 * p + t * w) / 4 + \alpha * \delta * 1 * m * n * o^{2 * u} * \cos(2 * a + c + \epsilon + 3 * h - 2 * p + t * w) / 4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^l m^n o^v \cos(2^*a+c+\epsilon+3^*h-2^*p-t^*w) / 4-1^*m^n o^s z \cos(2^*a+c+\epsilon+2^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^u z \cos(2^*a+c+\epsilon+2^*h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c+\epsilon+h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4-\Delta^l m^n o^y \cos(2^*a+c+\epsilon+h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c+\epsilon-h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c+\epsilon-h-2^*p-t^*w) / 4-1^*m^n o^s z \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^q z \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*h-2^*p-t^*w) / 4+\alpha \Delta^l m^n o^o \cos(2^*a+c+\epsilon- \\
& 3^*h-2^*p+t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^r \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*h-2^*p-t^*w) / 4- \\
& \beta^l m^n o^u \cos(2^*a+c+\epsilon-4^*h-2^*p+t^*w) / 4+\beta^l m^n o^s \cos(2^*a+c+\epsilon-4^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 4+1^*m^n o^t \cos(2^*a+c+\epsilon-5^*h-2^*p+t^*w) / 4-\Delta^l m^n o^t \cos(2^*a+c+\epsilon-5^*h- \\
& 2^*p-t^*w) / 4-1^*m^n o^q x \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^s x \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*p-t^*w) / 4- \\
& \Delta^l m^n o^t \cos(2^*a+c+\epsilon+5^*h-2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^t \cos(2^*a+c+\epsilon-5^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 4+\beta^l m^n o^s \cos(2^*a+c+\epsilon+4^*h-2^*p+t^*w) / 4-\beta^l m^n o^u \cos(2^*a+c+\epsilon-4^*h- \\
& 2^*p-t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^r \cos(2^*a+c+\epsilon-3^*h-2^*p+t^*w) / 4+\alpha \Delta^l m^n o^o \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon+3^*h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^q z \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^s z \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon+2^*h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c+\epsilon-h-2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon-h-2^*p-t^*w) / 4-\Delta^l m^n o^y \cos(2^*a+c+\epsilon-h-2^*p+t^*w) / 4+1^*m^n o^r y \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon-h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^u z \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*h-2^*p+t^*w) / 4-1^*m^n o^s z \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon-2^*h-2^*p-t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^v \cos(2^*a+c+\epsilon-3^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+\alpha \Delta^l m^n o^o \cos(2^*a+c+\epsilon-3^*h-2^*p-t^*w) / 4-\beta^l m^n o^u \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon-4^*h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^t \cos(2^*a+c+\epsilon-5^*h-2^*p-t^*w) / 4+1^*m^n o^s x \cos(2^*a+c- \\
& \epsilon-2^*p+t^*w) / 4-\beta^l m^n o^q x \cos(2^*a+c+\epsilon-2^*p-t^*w) / 4+\beta^l m^n o^t \cos(2^*a+c+5^*h-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b \Delta^l m^n o^t \sin(2^*a+c+5^*h-j-2^*p+t^*w) / 4-b^l m^n o^t \sin(2^*a+c+5^*h-j-2^*p- \\
& t^*w) / 4+i^2 m^n o^s \tau \cos(2^*a+c+5^*h-2^*j-2^*p+t^*w) / 8-i^2 m^n o^t \cos(2^*a+c+5^*h-2^*j-2^*p- \\
& t^*w) / 8+n^o \tau (d^2 m^w^2 (s+2^*u) + 2^*d m^w^2 (\Delta-v) + 2^*u (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+5^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 8-b^d n^o \tau (\Delta+v) \sin(2^*a+c+5^*h-2^*p+t^*w) / 4- \\
& d^m n^o \tau w^2 (d^*u+2^*v) \cos(2^*a+c+5^*h-2^*p-t^*w) / 8+b^d n^o \tau w^2 \sin(2^*a+c+5^*h-2^*p-t^*w) / 4- \\
& b^l \beta^l m^n o^u \sin(2^*a+c+4^*h-j-2^*p+t^*w) / 4-b^l \beta^l m^n o^s \sin(2^*a+c+4^*h-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^l \beta^l m^n o^u \sin(2^*a+c+4^*h-j-2^*p-t^*w) / 4-\beta^l m^n o^r \cos(2^*a+c+4^*h-2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+\beta^l m^n o^t \cos(2^*a+c+4^*h-2^*j-2^*p-t^*w) / 8- \\
& \beta^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (2^*\Delta+r+v) + 2^*d m^w^2 (s-u) + 2^*\Delta (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+4^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+b^l \beta^l m^n o^w (s+u) \sin(2^*a+c+4^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+\beta^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (\Delta+v) + 2^*d m^w^2 (2^*\Delta+2^*v) + 2^*u (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+4^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 8-b^l \beta^l m^n o^w \sin(2^*a+c+4^*h-2^*p-t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^u \cos(2^*a+c+3^*h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^b \Delta^l m^n o^o \sin(2^*a+c+3^*h+j-2^*p+t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c+3^*h+j-2^*p- \\
& t^*w) / 4+4^* \alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c+3^*h-j-2^*p+t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^b \Delta^l m^n o^o \sin(2^*a+c+3^*h-j-2^*p- \\
& t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^q \cos(2^*a+c+3^*h-2^*j-2^*p+t^*w) / 8-\alpha^l m^n o^s \cos(2^*a+c+3^*h-2^*j-2^*p- \\
& t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (q+2^*s+u) + 2^*d m^w^2 (r-\Delta) + 2^*s (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+3^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 8-\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c+3^*h-2^*p+t^*w) / 4- \\
& \alpha^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (s+2^*u) + 2^*d m^w^2 (\Delta+v) + 2^*u (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+3^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c+3^*h-2^*p-t^*w) / 4-\Delta^l m^n o^z \cos(2^*a+c+2^*h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^v z \cos(2^*a+c+2^*h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8-b^l m^n o^s z \sin(2^*a+c+2^*h+j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^l m^n o^u z \sin(2^*a+c+2^*h+j-2^*p-t^*w) / 4-b^l m^n o^q z \sin(2^*a+c+2^*h-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^l m^n o^s z \sin(2^*a+c+2^*h-j-2^*p-t^*w) / 4+i^2 m^n o^r z \cos(2^*a+c+2^*h-2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^r z \cos(2^*a+c+2^*h-2^*j-2^*p-t^*w) / 8-n^o z (d^2 m^w^2 (\Delta+r) + 2^*d m^w^2 (q- \\
& s) + 2^*r (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+2^*h-2^*p+t^*w) / 8+b^d n^o w^2 (q+s) \sin(2^*a+c+2^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+n^o z (d^2 m^w^2 (2^*\Delta+r+v) + 2^*d m^w^2 (s-u) + 2^*\Delta (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c+2^*h- \\
& 2^*p-t^*w) / 8-b^d n^o w^2 (s+u) \sin(2^*a+c+2^*h-2^*p-t^*w) / 4+i^2 m^n o^s y \cos(2^*a+c+h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8-i^2 m^n o^u y \cos(2^*a+c+h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8+b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c+h+j-2^*p+t^*w) / 4- \\
& b^l \Delta^l m^n o^y \sin(2^*a+c+h+j-2^*p-t^*w) / 4-b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c+h-j-2^*p+t^*w) / 4- \\
& b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c+h-j-2^*p-t^*w) / 4+i^2 m^n o^s y \cos(2^*a+c+h-2^*j-2^*p+t^*w) / 8- \\
& i^2 m^n o^q y \cos(2^*a+c+h-2^*j-2^*p-t^*w) / 8+n^o y (d^2 m^w^2 (q+s) - 2^*d m^r w^2 + q (i^2 m- \\
& 4^*k)) \cos(2^*a+c+h-2^*p+t^*w) / 4-n^o y (d^2 m^w^2 (q+2^*s+u) + 2^*d m^w^2 (r-\Delta) + 2^*s (i^2 m- \\
& 4^*k)) \cos(2^*a+c+h-2^*p-t^*w) / 8+b^d n^o w^2 (\Delta+r) \sin(2^*a+c+h-2^*p-t^*w) / 4- \\
& i^2 m^n o^q y \cos(2^*a+c-h+2^*j-2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^s y \cos(2^*a+c-h+2^*j-2^*p- \\
& t^*w) / 8+b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c-h+j-2^*p+t^*w) / 4+b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c-h+j-2^*p- \\
& t^*w) / 4+b^l \Delta^l m^n o^y \sin(2^*a+c-h-j-2^*p+t^*w) / 4-b^l m^n o^r y \sin(2^*a+c-h-j-2^*p-t^*w) / 4- \\
& i^2 m^n o^u y \cos(2^*a+c-h-2^*j-2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^s y \cos(2^*a+c-h-2^*j-2^*p-t^*w) / 8- \\
& b^d n^o w^2 (\Delta+r) \sin(2^*a+c-h-2^*p+t^*w) / 4+n^o y (d^2 m^w^2 (q+s) - 2^*d m^r w^2 + q (i^2 m- \\
& 4^*k)) \cos(2^*a+c-h-2^*p-t^*w) / 4+i^2 m^n o^r z \cos(2^*a+c-2^*h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^r z \cos(2^*a+c-2^*h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8-b^l m^n o^s z \sin(2^*a+c-2^*h+j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^l m^n o^q z \sin(2^*a+c-2^*h+j-2^*p-t^*w) / 4-b^l m^n o^u z \sin(2^*a+c-2^*h-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^l m^n o^s z \sin(2^*a+c-2^*h-j-2^*p-t^*w) / 4+i^2 m^n o^v z \cos(2^*a+c-2^*h-2^*j-2^*p+t^*w) / 8- \\
& \Delta^l m^n o^z \cos(2^*a+c-2^*h-2^*j-2^*p-t^*w) / 8+n^o z (d^2 m^w^2 (2^*\Delta+r+v) + 2^*d m^w^2 (s- \\
& u) + 2^*\Delta (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-2^*h-2^*p+t^*w) / 8+b^d n^o w^2 (s+u) \sin(2^*a+c-2^*h-2^*p+t^*w) / 4- \\
& n^o z (d^2 m^w^2 (\Delta+r) + 2^*d m^w^2 (q-s) + 2^*r (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-2^*h-2^*p-t^*w) / 8- \\
& b^d n^o w^2 (q+s) \sin(2^*a+c-2^*h-2^*p-t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^s \cos(2^*a+c-3^*h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^q \cos(2^*a+c-3^*h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^b \Delta^l m^n o^o \sin(2^*a+c-3^*h+j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c-3^*h+j-2^*p-t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^v \sin(2^*a+c-3^*h-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4-\alpha^l m^n o^b \Delta^l m^n o^o \sin(2^*a+c-3^*h-j-2^*p-t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^u \cos(2^*a+c-3^*h-2^*j- \\
& 2^*p-t^*w) / 8-\alpha^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (s+2^*u) + 2^*d m^w^2 (\Delta-v) + 2^*u (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-3^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 8-\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c-3^*h-j-2^*p-t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^o \sin(2^*a+c-3^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+\alpha^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (q+2^*s+u) + 2^*d m^w^2 (r-\Delta) + 2^*s (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-3^*h- \\
& 2^*p-t^*w) / 8+\alpha^l m^n o^b \sin(2^*a+c-3^*h-2^*p-t^*w) / 4+\beta^l m^n o^t \cos(2^*a+c- \\
& 4^*h+2^*j-2^*p+t^*w) / 8-\beta^l m^n o^r \cos(2^*a+c-4^*h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8-b^l \beta^l m^n o^u \sin(2^*a+c- \\
& 4^*h+j-2^*p+t^*w) / 4+b^l \beta^l m^n o^s \sin(2^*a+c-4^*h+j-2^*p-t^*w) / 4+b^l \beta^l m^n o^t \sin(2^*a+c-4^*h-j-2^*p- \\
& t^*w) / 4-\beta^l m^n o^v \cos(2^*a+c-4^*h-2^*j-2^*p- \\
& t^*w) / 8+\beta^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (\Delta+2^*v) + 2^*d m^w^2 (2^*\Delta+2^*v) + 2^*u (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-4^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+b^l \beta^l m^n o^w \sin(2^*a+c-4^*h-2^*p+t^*w) / 4- \\
& \beta^l m^n o^o (d^2 m^w^2 (2^*\Delta+r+v) + 2^*d m^w^2 (s-u) + 2^*\Delta (i^2 m-4^*k)) \cos(2^*a+c-4^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 8-b^l \beta^l m^n o^w (s+u) \sin(2^*a+c-4^*h-2^*p-t^*w) / 4-i^2 m^n o^t \cos(2^*a+c-5^*h+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+i^2 m^n o^s \tau \cos(2^*a+c-5^*h+2^*j-2^*p-t^*w) / 8+b^l m^n o^t \sin(2^*a+c-5^*h+j-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2^*p+t^*w) / 4-b^*delta^*i^*n^*o^*tau^*SIN(2^*a+c-5^*h+j-2^*p-t^*w) / 4-b^*i^*n^*o^*tau^*v^*SIN(2^*a+c-5^*h-j-2^*p- \\
& t^*w) / 4-d^*m^*n^*o^*tau^*w^*2^*(d^*u+2^*v)^*COS(2^*a+c-5^*h-2^*p+t^*w) / 8-b^*d^*n^*o^*tau^*v^*w^*SIN(2^*a+c-5^*h- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+n^*o^*s^*x^*(d^*2^*m^*w^*2^*(s+2^*u)+2^*d^*m^*w^*2^*(delta-v)+2^*u^*(i^*2^*m-4^*k))^*COS(2^*a+c-5^*h-2^*p- \\
& t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*tau^*w^*(delta+v)^*SIN(2^*a+c-5^*h-2^*p-t^*w) / 4-i^*2^*m^*n^*o^*r^*x^*COS(2^*a+c+2^*j- \\
& 2^*p+t^*w) / 8+delta^*i^*2^*m^*n^*o^*x^*COS(2^*a+c+2^*j-2^*p-t^*w) / 8-b^*i^*n^*o^*q^*x^*SIN(2^*a+c+j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*s^*x^*SIN(2^*a+c+j-2^*p-t^*w) / 4-b^*i^*n^*o^*s^*x^*SIN(2^*a+c-j- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*q^*x^*SIN(2^*a+c-j-2^*p-t^*w) / 4+delta^*i^*2^*m^*n^*o^*x^*COS(2^*a+c-2^*j-2^*p+t^*w) / 8- \\
& i^*2^*m^*n^*o^*r^*x^*COS(2^*a+c-2^*j-2^*p-t^*w) / 8+n^*o^*s^*x^*(d^*2^*m^*w^*2^*(delta+r)+2^*d^*m^*w^*2^*(q-s)+2^*r^*(i^*2^*m- \\
& 4^*k))^*COS(2^*a+c-2^*p+t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*w^*x^*(q+s)^*SIN(2^*a+c- \\
& 2^*p+t^*w) / 4+n^*o^*s^*x^*(d^*2^*m^*w^*2^*(delta+r)+2^*d^*m^*w^*2^*(q-s)+2^*r^*(i^*2^*m-4^*k))^*COS(2^*a+c-2^*p-t^*w) / 8- \\
& b^*d^*n^*o^*w^*x^*(q+s)^*SIN(2^*a+c-2^*p-t^*w) / 4+n^*2^*(d^*2^*m^*w^*2^*(delta*(q+s-u)+q^*r-r^*u+v^*(s+u))- \\
& d^*m^*w^*2^*(2^*delta^2-2^*delta*(r+v)-q^2+2^*q*s+3^*r^2-2^*(s^2-s^*u+u^2-v^2))+4^*delta^*k^*(u-s)- \\
& 4^*k^*(q^*r-r^*s+u^*v))^*COS(2^*a-2^*p+t^*w) / 4-b^*d^*n^*2^*w^*(2^*delta^2+2^*delta*(r+v)-q^2-2^*q*s+r^2- \\
& 2^*(s^2+s^*u+u^2-v^2))^*SIN(2^*a-2^*p+t^*w) / 4+n^*2^*(d^*2^*m^*w^*2^*(delta*(q+s-u)+q^*r-r^*u+v^*(s+u))- \\
& d^*m^*w^*2^*(2^*delta^2-2^*delta*(r+v)-q^2+2^*q*s+3^*r^2-2^*(s^2-s^*u+u^2-v^2))+4^*delta^*k^*(u-s)- \\
& 4^*k^*(q^*r-r^*s+u^*v))^*COS(2^*a-2^*p-t^*w) / 4+b^*d^*n^*2^*w^*(2^*delta^2+2^*delta*(r+v)-q^2-2^*q*s+r^2-2^*s^2- \\
& 2^*s^*u-2^*u^2+2^*v^2)^*SIN(2^*a-2^*p-t^*w) / 4+k^*o^*theta^*y^*SIN(a+c+h-p+t^*w)+k^*o^*theta^*y^*SIN(a+c-h-p- \\
& t^*w)+k^*n^*r^*theta^*SIN(a-p+t^*w)+k^*n^*r^*theta^*SIN(a-p-t^*w)-l^*m^*n^*o^*tau^*v^*COS(c+epsilon+5^*h+t^*w) / 4- \\
& beta^*l^*m^*n^*o^*u^*COS(c+epsilon+4^*h+t^*w) / 4- \\
& alpha^*delta^*l^*m^*n^*o^*COS(c+epsilon+3^*h+t^*w) / 4+alpha^*l^*m^*n^*o^*v^*COS(c+epsilon+3^*h-t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*s^*z^*COS(c+epsilon+2^*h+t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*u^*z^*COS(c+epsilon+2^*h-t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c+epsilon+h+t^*w) / 4+delta^*l^*m^*n^*o^*y^*COS(c+epsilon-h+t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c+epsilon-h+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c+epsilon-h-t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*s^*z^*COS(c+epsilon-2^*h+t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*q^*z^*COS(c+epsilon-2^*h-t^*w) / 4- \\
& alpha^*delta^*l^*m^*n^*o^*COS(c+epsilon-3^*h+t^*w) / 4+alpha^*l^*m^*n^*o^*r^*COS(c+epsilon-3^*h- \\
& t^*w) / 4+beta^*l^*m^*n^*o^*s^*COS(c+epsilon-4^*h-t^*w) / 4+delta^*l^*m^*n^*o^*tau^*COS(c+epsilon-5^*h-t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*q^*x^*COS(c+epsilon+t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*s^*x^*COS(c+epsilon-t^*w) / 4+delta^*l^*m^*n^*o^*tau^*COS(c- \\
& epsilon+5^*h+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*tau^*v^*COS(c-epsilon+5^*h-t^*w) / 4+beta^*l^*m^*n^*o^*s^*COS(c- \\
& epsilon+4^*h+t^*w) / 4-beta^*l^*m^*n^*o^*u^*COS(c-epsilon+4^*h-t^*w) / 4+alpha^*l^*m^*n^*o^*r^*COS(c- \\
& epsilon+3^*h+t^*w) / 4-alpha^*delta^*l^*m^*n^*o^*COS(c-epsilon+3^*h-t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*q^*z^*COS(c- \\
& epsilon+2^*h+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*s^*z^*COS(c-epsilon+2^*h-t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c-epsilon+h+t^*w) / 4- \\
& l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c-epsilon+h-t^*w) / 4+delta^*l^*m^*n^*o^*y^*COS(c-epsilon-h+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*r^*y^*COS(c- \\
& epsilon-h-t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*u^*z^*COS(c-epsilon-2^*h+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*s^*z^*COS(c-epsilon-2^*h- \\
& t^*w) / 4+alpha^*l^*m^*n^*o^*v^*COS(c-epsilon-3^*h+t^*w) / 4-alpha^*delta^*l^*m^*n^*o^*COS(c-epsilon-3^*h-t^*w) / 4- \\
& beta^*l^*m^*n^*o^*u^*COS(c-epsilon-4^*h-t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*tau^*v^*COS(c-epsilon-5^*h- \\
& t^*w) / 4+l^*m^*n^*o^*s^*x^*COS(c-epsilon+t^*w) / 4-l^*m^*n^*o^*q^*x^*COS(c-epsilon-t^*w) / 4- \\
& b^*i^*n^*o^*tau^*v^*SIN(c+5^*h+j+t^*w) / 4-b^*delta^*i^*n^*o^*tau^*SIN(c+5^*h-j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*tau^*v^*SIN(c+5^*h- \\
& j-t^*w) / 4+i^*2^*m^*n^*o^*s^*tau^*COS(c+5^*h-2^*j+t^*w) / 8-i^*2^*m^*n^*o^*tau^*u^*COS(c+5^*h-2^*j-t^*w) / 8- \\
& m^*n^*o^*tau^*(d^2^*w^2^*(s+2^*u)+2^*d^*w^2^*(delta-v)- \\
& 2^*i^2^*u)^*COS(c+5^*h+t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*tau^*w^*(delta+v)^*SIN(c+5^*h+t^*w) / 4+d^*m^*n^*o^*tau^*w^2^*(d^*u+2^*v)^*C \\
& OS(c+5^*h-t^*w) / 8-b^*d^*n^*o^*tau^*v^*w^*SIN(c+5^*h-t^*w) / 4+beta^*i^2^*m^*n^*o^*v^*COS(c+4^*h+2^*j+t^*w) / 8- \\
& b^*beta^*i^*n^*o^*u^*SIN(c+4^*h+j+t^*w) / 4-b^*beta^*i^*n^*o^*s^*SIN(c+4^*h-j+t^*w) / 4+b^*beta^*i^*n^*o^*u^*SIN(c+4^*h- \\
& j-t^*w) / 4+beta^*i^2^*m^*n^*o^*r^*COS(c+4^*h-2^*j+t^*w) / 8-beta^*delta^*i^2^*m^*n^*o^*COS(c+4^*h-2^*j-t^*w) / 8- \\
& beta^*m^*n^*o^*(d^2^*w^2^*(2^*delta+r+v)+2^*d^*w^2^*(s-u)- \\
& 2^*delta^*i^2)^*COS(c+4^*h+t^*w) / 8+b^*beta^*d^*n^*o^*w^*(s+u)^*SIN(c+4^*h+t^*w) / 4+beta^*m^*n^*o^*(d^2^*w^2^*(delta \\
& +2^*v)+2^*d^*u^*w^2-2^*i^2^*v)^*COS(c+4^*h-t^*w) / 8-b^*beta^*d^*n^*o^*u^*w^*SIN(c+4^*h- \\
& t^*w) / 4+alpha^*i^2^*m^*n^*o^*u^*COS(c+3^*h+2^*j+t^*w) / 8- \\
& alpha^*b^*delta^*i^*n^*o^*SIN(c+3^*h+j+t^*w) / 4+alpha^*b^*i^*n^*o^*v^*SIN(c+3^*h+j-t^*w) / 4- \\
& alpha^*b^*i^*n^*o^*u^*SIN(c+3^*h-j+t^*w) / 4+alpha^*b^*delta^*i^*n^*o^*SIN(c+3^*h-j- \\
& t^*w) / 4+alpha^*i^2^*m^*n^*o^*q^*COS(c+3^*h-2^*j+t^*w) / 8-alpha^*i^2^*m^*n^*o^*s^*COS(c+3^*h-2^*j-t^*w) / 8- \\
& alpha^*m^*n^*o^*(d^2^*w^2^*(q+2^*s+u)+2^*d^*w^2^*(r-delta)- \\
& 2^*i^2^*s)^*COS(c+3^*h+t^*w) / 8+alpha^*b^*d^*n^*o^*w^*(delta+r)^*SIN(c+3^*h+t^*w) / 4+alpha^*m^*n^*o^*(d^2^*w^2^*(s+2 \\
& ^*u)+2^*d^*w^2^*(delta-v)-2^*i^2^*u)^*COS(c+3^*h-t^*w) / 8-alpha^*b^*d^*n^*o^*w^*(delta+v)^*SIN(c+3^*h- \\
& t^*w) / 4+delta^*i^2^*m^*n^*o^*z^*COS(c+2^*h+2^*j+t^*w) / 8-i^2^*m^*n^*o^*v^*z^*COS(c+2^*h+2^*j-t^*w) / 8- \\
& b^*i^*n^*o^*s^*z^*SIN(c+2^*h+j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*u^*z^*SIN(c+2^*h+j-t^*w) / 4-b^*i^*n^*o^*q^*z^*SIN(c+2^*h- \\
& j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*s^*z^*SIN(c+2^*h-j-t^*w) / 4-i^2^*m^*n^*o^*r^*z^*COS(c+2^*h-2^*j+t^*w) / 8- \\
& i^2^*m^*n^*o^*r^*z^*COS(c+2^*h-2^*j- \\
& t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*w^*z^*(q+s)^*SIN(c+2^*h+t^*w) / 4+m^*n^*o^*z^*(d^2^*w^2^*(2^*delta+r+v)+2^*d^*w^2^*(s-u)- \\
& 2^*delta^*i^2)^*COS(c+2^*h-t^*w) / 8-b^*d^*n^*o^*w^*z^*(s+u)^*SIN(c+2^*h- \\
& t^*w) / 4+i^2^*m^*n^*o^*s^*y^*COS(c+h+2^*j+t^*w) / 8-i^2^*m^*n^*o^*u^*y^*COS(c+h+2^*j-t^*w) / 8- \\
& b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c+h+j+t^*w) / 4+b^*delta^*i^*n^*o^*y^*SIN(c+h+j-t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c+h- \\
& j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c+h-j-t^*w) / 4+i^2^*m^*n^*o^*s^*y^*COS(c+h-2^*j+t^*w) / 8-i^2^*m^*n^*o^*q^*y^*COS(c+h- \\
& 2^*j-t^*w) / 8-m^*n^*o^*y^*(d^2^*w^2^*(q+s)-2^*d^*r^*w^2- \\
& i^2^*q)^*COS(c+h+t^*w) / 4+m^*n^*o^*y^*(d^2^*w^2^*(q+2^*s+u)+2^*d^*w^2^*(r-delta)-2^*i^2^*s)^*COS(c+h-t^*w) / 8- \\
& i^2^*m^*n^*o^*q^*y^*COS(c-h+2^*j+t^*w) / 8+i^2^*m^*n^*o^*s^*y^*COS(c-h+2^*j-t^*w) / 8-b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c- \\
& h+j+t^*w) / 4-b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c-h-j-t^*w) / 4-b^*delta^*i^*n^*o^*y^*SIN(c-h-j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*r^*y^*SIN(c-h- \\
& j-t^*w) / 4-i^2^*m^*n^*o^*u^*y^*COS(c-h-2^*j+t^*w) / 8+i^2^*m^*n^*o^*s^*y^*COS(c-h-2^*j- \\
& t^*w) / 8+m^*n^*o^*y^*(d^2^*w^2^*(q+2^*s+u)+2^*d^*w^2^*(r-delta)-2^*i^2^*s)^*COS(c- \\
& h+t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*w^*y^*(delta+r)^*SIN(c-h+t^*w) / 4-m^*n^*o^*y^*(d^2^*w^2^*(q+s)-2^*d^*r^*w^2-i^2^*q)^*COS(c-h- \\
& t^*w) / 4-i^2^*m^*n^*o^*r^*z^*COS(c-2^*h+2^*j+t^*w) / 8-i^2^*m^*n^*o^*r^*z^*COS(c-2^*h+2^*j-t^*w) / 8- \\
& b^*i^*n^*o^*s^*z^*SIN(c-2^*h+j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*q^*z^*SIN(c-2^*h+j-t^*w) / 4-b^*i^*n^*o^*u^*z^*SIN(c-2^*h- \\
& j+t^*w) / 4+b^*i^*n^*o^*s^*z^*SIN(c-2^*h-j-t^*w) / 4-i^2^*m^*n^*o^*v^*z^*COS(c-2^*h- \\
& 2^*j+t^*w) / 8+delta^*i^2^*m^*n^*o^*z^*COS(c-2^*h-2^*j-t^*w) / 8+m^*n^*o^*z^*(d^2^*w^2^*(2^*delta+r+v)+2^*d^*w^2^*(s- \\
& u)-2^*delta^*i^2)^*COS(c-2^*h+t^*w) / 8+b^*d^*n^*o^*w^*z^*(s+u)^*SIN(c-2^*h+t^*w) / 4- \\
& m^*n^*o^*z^*(d^2^*w^2^*(delta+r)+2^*d^*w^2^*(q-s)-2^*i^2^*r)^*COS(c-2^*h-t^*w) / 8-b^*d^*n^*o^*w^*z^*(q+s)^*SIN(c- \\
& 2^*h-t^*w) / 4-alpha^*i^2^*m^*n^*o^*s^*COS(c-3^*h+2^*j+t^*w) / 8+alpha^*i^2^*m^*n^*o^*q^*COS(c-3^*h+2^*j-t^*w) / 8- \\
& alpha^*b^*delta^*i^*n^*o^*SIN(c-3^*h+j+t^*w) / 4+alpha^*b^*i^*n^*o^*r^*SIN(c-3^*h-j-t^*w) / 4- \\
& alpha^*b^*i^*n^*o^*v^*SIN(c-3^*h-j+t^*w) / 4+alpha^*b^*delta^*i^*n^*o^*SIN(c-3^*h-j- \\
& t^*w) / 4+alpha^*i^2^*m^*n^*o^*u^*COS(c-3^*h-2^*j-t^*w) / 8+alpha^*m^*n^*o^*(d^2^*w^2^*(s+2^*u)+2^*d^*w^2^*(delta-v)- \\
& 2^*i^2^*u)^*COS(c-3^*h+t^*w) / 8+alpha^*b^*d^*n^*o^*w^*(delta+v)^*SIN(c-3^*h+t^*w) / 4-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^m n^o (d^2 w^2 (q+2s+u) + 2d^2 w^2 (r-\delta) - 2i^2 s) \cos(c-3h-t) / 8 - \\
& \alpha^m b^d n^o w^2 (\delta+r) \sin(c-3h-t) / 4 - \beta^m \delta^m \alpha^i^2 m^m n^o \cos(c- \\
& 4h+2j+t) / 8 + \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o r \cos(c-4h+2j-t) / 8 - b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o u \sin(c- \\
& 4h+j+t) / 4 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o s \sin(c-4h+j-t) / 4 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o v \sin(c-4h-j- \\
& t) / 4 + \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o v \cos(c-4h-2j-t) / 8 + \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o (d^2 w^2 (\delta+2v) + 2d^2 u w^2 - \\
& 2i^2 v) \cos(c-4h+t) / 8 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o w^2 \sin(c-4h+t) / 4 - \\
& \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o (d^2 w^2 (2\delta+r+v) + 2d^2 w^2 (s-u) - 2\delta i^2) \cos(c-4h-t) / 8 - \\
& b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m n^o w^2 (s+u) \sin(c-4h-t) / 4 - i^2 m^m n^o \tau u \cos(c- \\
& 5h+2j+t) / 8 + i^2 m^m n^o s \tau \cos(c-5h+2j-t) / 8 - b^m i^2 m^m n^o \tau v \sin(c- \\
& 5h+j+t) / 4 + b^m \delta^m \alpha^i^2 m^m n^o \tau \sin(c-5h+j-t) / 4 + b^m i^2 m^m n^o \tau v \sin(c-5h-j- \\
& t) / 4 + d^m n^o \tau w^2 (d^2 u + 2v) \cos(c-5h+t) / 8 + b^m d^m n^o \tau v \sin(c-5h+t) / 4 - \\
& m^m n^o \tau (d^2 w^2 (s+2u) + 2d^2 w^2 (\delta-v) - 2i^2 u) \cos(c-5h-t) / 8 - \\
& b^m d^m n^o \tau w^2 (\delta+v) \sin(c-5h-t) / 4 + i^2 m^m n^o r x \cos(c+2j+t) / 8 - \\
& \delta^m \alpha^i^2 m^m n^o x \cos(c+2j-t) / 8 - b^m i^2 m^m n^o q x \sin(c+j+t) / 4 + b^m i^2 m^m n^o s x \sin(c+j-t) / 4 - \\
& b^m i^2 m^m n^o s x \sin(c-j+t) / 4 + b^m i^2 m^m n^o q x \sin(c-j-t) / 4 - \delta^m \alpha^i^2 m^m n^o x \cos(c- \\
& 2j+t) / 8 + i^2 m^m n^o r x \cos(c-2j-t) / 8 + m^m n^o x (d^2 w^2 (\delta+r) + 2d^2 w^2 (q-s) - \\
& 2i^2 r) \cos(c-t) / 8 - b^m d^m n^o w^2 x (q+s) \sin(c-t) / 4 + (1^m o^2 x z - \\
& 1^m o^2 y^2 / 2 + \alpha^m 1^m o^2 y + \beta^m 1^m o^2 z + \alpha^m 1^m o^2 \tau) \cos(\epsilon-2h-t) - \\
& 1^m o^2 x (x^2 + 2(y^2 + z^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \tau^2)) \cos(\epsilon+t) / 2 - b^m i^2 m^m n^o (2^m x z - \\
& y^2 + 2(\alpha y + \beta z + \alpha \tau)) \sin(2h-j+t) / 2 - \\
& b^m i^2 m^m n^o (x^2 + 2(y^2 + z^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \tau^2)) \sin(j+t) / 2 + d^m n^2 w^2 (2\delta^2 - \\
& 2\delta(r+v) + q^2 - 2qs + 3r^2 + 2s^2 - \\
& 2^m s + 2u^2 + 2v^2) \cos(t) / 2 + b^m d^m n^2 w^2 (2\delta^2 + 2\delta(r+v) + q^2 + 2qs + r^2 + 2s^2 + 2^m s + 2u^2 + \\
& 2v^2) \sin(t) / 2
\end{aligned}$$

Eixo 2:

$$\begin{aligned}
& (1^m o^2 x z / 2 + 1^m o^2 y^2 / 4 - \alpha^m 1^m o^2 y / 2 + \beta^m 1^m o^2 z / 2 - \\
& \alpha^m 1^m o^2 \tau / 2) \cos(2a+2c+\epsilon-2h-2p-t) + 1^m o^2 (2(y^2 - z^2 + \alpha^2 - \\
& \beta^2 + \tau^2) - x^2) \cos(2a+2c+\epsilon-2p+t) / 4 + (1^m o^2 x z / 2 + 1^m o^2 y^2 / 4 - \\
& \alpha^m 1^m o^2 y / 2 + \beta^m 1^m o^2 z / 2 - \alpha^m 1^m o^2 \tau / 2) \cos(2a+2c+\epsilon+2h- \\
& 2p+t) + 1^m o^2 (2(y^2 - z^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \tau^2) - x^2) \cos(2a+2c+\epsilon-2p- \\
& t) / 4 + (\alpha^m i^2 m^m o^2 x / 4 + y^m (i^2 m^m o^2 z / 4 - \\
& \beta^m \alpha^i^2 m^m o^2 / 4) + i^2 m^m o^2 \tau / 4) \cos(2a+2c+3h-2j-2p+t) - b^m i^2 m^m o^2 (2^m x z + y^2 - \\
& 2\alpha y + 2(\beta z - \alpha \tau)) \sin(2a+2c+2h-j-2p+t) / 4 - i^2 m^m o^2 (x y - y z + \alpha \beta - \\
& \beta^m (\alpha + \tau)) \cos(2a+2c+h-2j-2p-t) / 4 + (o^2 x y (i^2 m^m - 2k) / 2 + o^2 y z (2k - \\
& i^2 m^m) / 2 + \alpha^m o^2 z z (i^2 m^m - 2k) / 2 + \alpha^m \beta^m o^2 (2k - i^2 m^m) / 2 + \beta^m o^2 \tau (i^2 m^m - \\
& 2k) / 2) \cos(2a+2c+h-2p+t) - i^2 m^m o^2 (x y - y z + \alpha \beta - \beta^m (\alpha + \tau)) \cos(2a+2c-h+2j- \\
& 2p+t) / 4 + (o^2 x y (i^2 m^m - 2k) / 2 + o^2 y z (2k - i^2 m^m) / 2 + \alpha^m o^2 z z (i^2 m^m - \\
& 2k) / 2 + \alpha^m \beta^m o^2 (2k - i^2 m^m) / 2 + \beta^m o^2 \tau (i^2 m^m - 2k) / 2) \cos(2a+2c-h-2p- \\
& t) + (b^m i^2 m^m o^2 x z / 2 + b^m i^2 m^m o^2 y^2 / 4 - \alpha^m b^m i^2 m^m o^2 y / 2 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m o^2 z / 2 - \\
& \alpha^m b^m i^2 m^m o^2 \tau / 2) \sin(2a+2c-2h+j-2p-t) + (\alpha^m i^2 m^m o^2 x z / 4 + y^m (i^2 m^m o^2 z / 4 - \\
& \beta^m \alpha^i^2 m^m o^2 / 4) + i^2 m^m o^2 \tau / 4) \cos(2a+2c-3h+2j-2p-t) + b^m i^2 m^m o^2 (2(y^2 - z^2 + \alpha^2 - \\
& \beta^2 + \tau^2) - x^2) \sin(2a+2c+j-2p+t) / 4 + (b^m i^2 m^m o^2 x^2 / 4 - b^m i^2 m^m o^2 y^2 / 2 + b^m i^2 m^m o^2 z^2 / 2 - \\
& \alpha^m b^m i^2 m^m o^2 / 2 + b^m (\beta^2 + 2i^2 o^2 / 2 - i^2 o^2 \tau / 2)) \sin(2a+2c-j-2p- \\
& t) + n^o \tau (d^2 m^m w^2 (s+2u) + 2d^m m^w^2 (\delta-v) - 4k) \cos(2a+c+5h-2p+t) / 8 - \\
& b^m d^m n^o \tau w^2 (\delta+v) \sin(2a+c+5h-2p+t) / 4 - d^m n^o \tau w^2 (d^2 u + 2v) \cos(2a+c+5h-2p- \\
& t) / 8 + b^m d^m n^o \tau v \sin(2a+c+5h-2p-t) / 4 - \\
& \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (2\delta+r+v) + 2d^m m^w^2 (s-u) - 4\delta k) \cos(2a+c+4h- \\
& 2p+t) / 8 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (s+u) \sin(2a+c+4h- \\
& 2p+t) / 4 + \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (\delta+2v) + 2d^m m^w^2 - 4k^2) \cos(2a+c+4h-2p-t) / 8 - \\
& b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 \sin(2a+c+4h-2p-t) / 4 + \alpha^m n^o (d^2 m^m w^2 (q+2s+u) + 2d^m m^w^2 (r-\delta) - \\
& 4k^2) \cos(2a+c+3h-2p+t) / 8 - \alpha^m b^m d^m n^o w^2 (\delta+r) \sin(2a+c+3h-2p+t) / 4 - \\
& \alpha^m n^o (d^2 m^m w^2 (s+2u) + 2d^m m^w^2 (\delta-v) - 4k^2) \cos(2a+c+3h-2p- \\
& t) / 8 + \alpha^m b^m d^m n^o w^2 (\delta+v) \sin(2a+c+3h-2p-t) / 4 - \\
& n^o z (d^2 m^m w^2 (\delta+r) + 2d^m m^w^2 (q-s) - 4k^2) \cos(2a+c+2h- \\
& 2p+t) / 8 + b^m d^m n^o w^2 z (q+s) \sin(2a+c+2h- \\
& 2p+t) / 4 + n^o z (d^2 m^m w^2 (2\delta+r+v) + 2d^m m^w^2 (s-u) - 4\delta k) \cos(2a+c+2h-2p-t) / 8 - \\
& b^m d^m n^o w^2 z (s+u) \sin(2a+c+2h-2p-t) / 4 + n^o y (d^2 m^m w^2 (q+s) - 2d^m m^w^2 - \\
& 2k^2) \cos(2a+c+h-2p+t) / 4 - n^o y (d^2 m^m w^2 (q+2s+u) + 2d^m m^w^2 (r-\delta) - \\
& 4k^2) \cos(2a+c+h-2p-t) / 8 + b^m d^m n^o w^2 y (\delta+r) \sin(2a+c+h-2p-t) / 4 - \\
& n^o y (d^2 m^m w^2 (q+2s+u) + 2d^m m^w^2 (r-\delta) - 4k^2) \cos(2a+c-h-2p+t) / 8 - \\
& b^m d^m n^o w^2 y (\delta+r) \sin(2a+c-h-2p-t) / 4 + n^o y (d^2 m^m w^2 (q+s) - 2d^m m^w^2 - \\
& 2k^2) \cos(2a+c-h-2p-t) / 4 + n^o z (d^2 m^m w^2 (2\delta+r+v) + 2d^m m^w^2 (s-u) - \\
& 4\delta k) \cos(2a+c-2h-2p+t) / 8 + b^m d^m n^o w^2 z (s+u) \sin(2a+c-2h-2p+t) / 4 - \\
& n^o z (d^2 m^m w^2 (\delta+r) + 2d^m m^w^2 (q-s) - 4k^2) \cos(2a+c-2h-2p-t) / 8 - \\
& b^m d^m n^o w^2 z (q+s) \sin(2a+c-2h-2p-t) / 4 - \alpha^m n^o (d^2 m^m w^2 (s+2u) + 2d^m m^w^2 (\delta-v) - \\
& 4k^2) \cos(2a+c-3h-2p+t) / 8 - \alpha^m b^m d^m n^o w^2 (\delta+v) \sin(2a+c-3h- \\
& 2p+t) / 4 + \alpha^m n^o (d^2 m^m w^2 (q+2s+u) + 2d^m m^w^2 (r-\delta) - 4k^2) \cos(2a+c-3h-2p- \\
& t) / 8 + \alpha^m b^m d^m n^o w^2 (\delta+r) \sin(2a+c-3h-2p- \\
& t) / 4 + \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (\delta+2v) + 2d^m m^w^2 - 4k^2) \cos(2a+c-4h- \\
& 2p+t) / 8 + b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 \sin(2a+c-4h-2p+t) / 4 - \\
& \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (2\delta+r+v) + 2d^m m^w^2 (s-u) - 4\delta k) \cos(2a+c-4h-2p-t) / 8 - \\
& b^m \beta^m \alpha^i^2 m^m w^2 (s+u) \sin(2a+c-4h-2p-t) / 4 - d^m n^o \tau w^2 (d^2 u + 2v) \cos(2a+c-5h- \\
& 2p+t) / 8 - b^m d^m n^o \tau v \sin(2a+c-5h- \\
& 2p+t) / 4 + n^o \tau (d^2 m^m w^2 (s+2u) + 2d^m m^w^2 (\delta-v) - 4k^2) \cos(2a+c-5h-2p- \\
& t) / 8 + b^m d^m n^o \tau w^2 (\delta+v) \sin(2a+c-5h-2p- \\
& t) / 4 + n^o x (d^2 m^m w^2 (\delta+r) + 2d^m m^w^2 (q-s) - 4k^2) \cos(2a+c- \\
& 2p+t) / 8 + b^m d^m n^o w^2 x (q+s) \sin(2a+c-2p+t) / 4 + n^o x (d^2 m^m w^2 (\delta+r) + 2d^m m^w^2 (q-s) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*k*r)*\cos(2*a+c-2*p-t*w)/8-b*d*n*o*w*x*(q+s)*\sin(2*a+c-2*p-t*w)/4+k*o*theta*y*\sin(a+c+h- \\
& p+t*w)+k*o*theta*y*\sin(a+c-h-p-t*w)-n*o*tau*(d^2*m*w^2*(s+2*u)+2*d*m*w^2*(delta-v)- \\
& 4*k*u)*\cos(c+5*h+t*w)/8+b*d*n*o*tau*w*(delta+v)*\sin(c+5*h+t*w)/4+d*m*n*o*tau*w^2*(d*u+2*v)*\cos \\
& (c+5*h-t*w)/8-b*d*n*o*tau*v*w*\sin(c+5*h-t*w)/4-beta*n*o*(d^2*m*w^2*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s- \\
& u)- \\
& 4*delta*k)*\cos(c+4*h+t*w)/8+b*beta*d*n*o*w*(s+u)*\sin(c+4*h+t*w)/4+beta*n*o*(d^2*m*w^2*(delta+2 \\
& v)+2*d*m*w^2-4*k*v)*\cos(c+4*h-t*w)/8-b*beta*d*n*o*u*w*\sin(c+4*h-t*w)/4- \\
& alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)- \\
& 4*k*s)*\cos(c+3*h+t*w)/8+alpha*b*d*n*o*w*(delta+r)*\sin(c+3*h+t*w)/4+alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(s+2*u \\
&)+2*d*m*w^2*(delta-v)-4*k*u)*\cos(c+3*h-t*w)/8-alpha*b*d*n*o*w*(delta+v)*\sin(c+3*h- \\
& t*w)/4+b*d*n*o*w*z*(q+s)*\sin(c+2*h+t*w)/4+n*o*z*(d^2*m*w^2*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s-u)- \\
& 4*delta*k)*\cos(c+2*h-t*w)/8-b*d*n*o*w*z*(s+u)*\sin(c+2*h-t*w)/4-n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+s)- \\
& 2*d*m*r*w^2-2*k*q)*\cos(c+h+t*w)/4+n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)- \\
& 4*k*s)*\cos(c+h-t*w)/8-b*d*n*o*w*y*(delta+r)*\sin(c+h- \\
& t*w)/4+n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)-4*k*s)*\cos(c- \\
& h+t*w)/8+b*d*n*o*w*y*(delta+r)*\sin(c-h+t*w)/4-n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+s)-2*d*m*r*w^2-2*k*q)*\cos(c- \\
& h-t*w)/4+n*o*z*(d^2*m*w^2*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s-u)-4*delta*k)*\cos(c- \\
& 2*h+t*w)/8+b*d*n*o*w*z*(s+u)*\sin(c-2*h+t*w)/4-n*o*z*(d^2*m*w^2*(delta+r)+2*d*m*w^2*(q-s)- \\
& 4*k*r)*\cos(c-2*h-t*w)/8-b*d*n*o*w*z*(q+s)*\sin(c-2*h- \\
& t*w)/4+alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(s+2*u)+2*d*m*w^2*(delta-v)-4*k*u)*\cos(c- \\
& 3*h+t*w)/8+alpha*b*d*n*o*w*(delta+v)*\sin(c-3*h+t*w)/4- \\
& alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)-4*k*s)*\cos(c-3*h-t*w)/8- \\
& alpha*b*d*n*o*w*(delta+r)*\sin(c-3*h-t*w)/4+beta*n*o*(d^2*m*w^2*(delta+2*v)+2*d*m*u*w^2- \\
& 4*k*v)*\cos(c-4*h+t*w)/8+b*beta*d*n*o*u*w*\sin(c-4*h+t*w)/4- \\
& beta*n*o*(d^2*m*w^2*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s-u)-4*delta*k)*\cos(c-4*h-t*w)/8- \\
& b*beta*d*n*o*w*(s+u)*\sin(c-4*h-t*w)/4+d*m*n*o*tau*w^2*(d*u+2*v)*\cos(c- \\
& 5*h+t*w)/8+b*d*n*o*tau*v*w*\sin(c-5*h+t*w)/4-n*o*tau*(d^2*m*w^2*(s+2*u)+2*d*m*w^2*(delta-v)- \\
& 4*k*u)*\cos(c-5*h-t*w)/8-b*d*n*o*tau*w*(delta+v)*\sin(c-5*h- \\
& t*w)/4+n*o*x*(d^2*m*w^2*(delta+r)+2*d*m*w^2*(q-s)- \\
& 4*k*r)*\cos(c+t*w)/8+b*d*n*o*w*x*(q+s)*\sin(c+t*w)/4+n*o*x*(d^2*m*w^2*(delta+r)+2*d*m*w^2*(q-s)- \\
& 4*k*r)*\cos(c-t*w)/8-b*d*n*o*w*x*(q+s)*\sin(c-t*w)/4+(l*m*o^2*x*z- \\
& l*m*o^2*y^2/2+alpha*l*m*o^2*y+beta*l*m*o^2*z+alpha*l*m*o^2*tau)*\cos(epsilon-2*h-t*w)- \\
& l*m*o^2*(x^2+2*(y^2+z^2+alpha^2+beta^2+tau^2))*\cos(epsilon+t*w)/2-b*i*o^2*(2*x*z- \\
& y^2+2*(alpha*y+beta*z+alpha*tau))*\sin(2*h-j+t*w)/2- \\
& b*i*o^2*(x^2+2*(y^2+z^2+alpha^2+beta^2+tau^2))*\sin(j+t*w)/2
\end{aligned}$$

Apêndice 5.B

Determinação da \mathbb{D} do sub-bloco de interação com o ambiente

Neste apêndice apresenta-se a FD para os dois eixos do sub-bloco de interação com o ambiente do robot 2R. As expressões seguintes foram também obtidas através de um programa de álgebra por computador. Devido a restrições desse programa só alguns nomes para variáveis são possíveis e, deste modo, as correspondências entre as variáveis empregues no texto e as de saída do programa são:

Programa	Texto	Programa	Texto
a	q_{10}	s	$J_2(Q_1)$
c	q_{20}	delta	$J_3(Q_1)$
w	ω	u	$J_4(Q_1)$
t	t	v	$J_5(Q_1)$
d	Q_1	x	$J_0(Q_{12})$
e	Q_2	y	$J_1(Q_{12})$
f	ϕ	z	$J_2(Q_{12})$
n	r_1	alpha	$J_3(Q_{12})$
o	r_2	beta	$J_4(Q_{12})$
p	θ	tau	$J_5(Q_{12})$
m	M	theta	x_{C0}
b	B	g	Q_{12}
k	K	h	α
q	$J_0(Q_1)$	i	$Q_{l_{12}}$
r	$J_1(Q_1)$	j	$\alpha_{l_{12}}$

Eixo 1:

$$\begin{aligned}
 & -e^*m^*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z-alpha*tau))*COS(2*a+2*c+f-2*h-2*p- \\
 & t*w)/4+(e^*m^*o^2*w^2*x^2/4-e^*m^*o^2*w^2*y^2/2+e^*m^*o^2*w^2*z^2/2- \\
 & alpha^2*e^*m^*o^2*w^2/2+beta^2*e^*m^*o^2*w^2/2-e^*m^*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c+f-2*p+t*w)- \\
 & e^*m^*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z-alpha*tau))*COS(2*a+2*c-f+2*h- \\
 & 2*p+t*w)/4+(e^*m^*o^2*w^2*x^2/4-e^*m^*o^2*w^2*y^2/2+e^*m^*o^2*w^2*z^2/2- \\
 & alpha^2*e^*m^*o^2*w^2/2+beta^2*e^*m^*o^2*w^2/2-e^*m^*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c-f-2*p- \\
 & t*w)+(alpha*i^2*m^*o^2*x/4+y*(i^2*m^*o^2*z/4- \\
 & beta*i^2*m^*o^2/4)+i^2*m^*o^2*tau*z/4)*COS(2*a+2*c+3*h-2*j- \\
 & 2*p+t*w)+(b*i^2*o^2*x*z/2+b*i^2*o^2*y^2/4-alpha*b*i^2*o^2*y/2+b*beta*i^2*o^2*z/2- \\
 & alpha*b*i^2*o^2*tau/2)*COS(2*a+2*c+2*h-j-2*p+t*w)-d^*m^*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z- \\
 & alpha*tau))*COS(2*a+2*c+2*h-2*p+t*w)/4-i^2*m^*o^2*(x*y-y*z+alpha*z-beta*(alpha- \\
 & tau))*COS(2*a+2*c+h-2*j-2*p-t*w)/4+(o^2*x*y*(i^2*m-2*k)/2+o^2*y*z*(2*k- \\
 & i^2*m)/2+alpha*o^2*z*(i^2*m-2*k)/2+alpha*beta*o^2*(2*k-i^2*m)/2+beta*o^2*tau*(i^2*m- \\
 & 2*k)/2)*COS(2*a+2*c+h-2*p+t*w)-i^2*m^*o^2*(x*y-y*z+alpha*z-beta*(alpha- \\
 & tau))*COS(2*a+2*c-h+2*j- \\
 & 2*p+t*w)/4+(o^2*x*y*(i^2*m-2*k)/2+o^2*y*z*(2*k-i^2*m)/2+alpha*o^2*z*(i^2*m- \\
 & 2*k)/2+alpha*beta*o^2*(2*k-i^2*m)/2+beta*o^2*tau*(i^2*m-2*k)/2)*COS(2*a+2*c-h-2*p- \\
 & t*w)+(b*i^2*o^2*x*z/2+b*i^2*o^2*y^2/4-alpha*b*i^2*o^2*y/2+b*beta*i^2*o^2*z/2- \\
 & alpha*b*i^2*o^2*tau/2)*COS(2*a+2*c-2*h+j-2*p-t*w)-d^*m^*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z- \\
 & alpha*tau))*COS(2*a+2*c-2*h-2*p-t*w)/4+(alpha*i^2*m^*o^2*x/4+y*(i^2*m^*o^2*z/4-
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta a^i 2^2 m^o 2^2 / 4 + i^2 2^2 m^o 2^2 \tau^z / 4 * \cos(2^2 a + 2^2 c - 3^2 h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) + b^i o^2 2^2 * (y^2 - z^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \tau^2) \\
& \beta a^i 2^2 \tau^z - x^2) * \cos(2^2 a + 2^2 c + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^o 2^2 * (y^2 - z^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \tau^2) * \cos(2^2 a + 2^2 c - j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& (d^2 m^o 2^2 w^2 x^2 / 4 - d^2 m^o 2^2 w^2 y^2 / 2 + d^2 m^o 2^2 w^2 z^2 / 2 - \alpha^2 d^2 m^o 2^2 w^2 / 2 + \beta a^i 2^2 d^2 m^o 2^2 w^2 / 2 - d^2 m^o 2^2 \tau^2 w^2 / 2) * \cos(2^2 a + 2^2 c - 2^2 p + t^2 w) + \\
& (d^2 m^o 2^2 w^2 x^2 / 4 - d^2 m^o 2^2 w^2 y^2 / 2 + d^2 m^o 2^2 w^2 z^2 / 2 - \alpha^2 d^2 m^o 2^2 w^2 / 2 + \beta a^i 2^2 d^2 m^o 2^2 w^2 / 2 - d^2 m^o 2^2 \tau^2 w^2 / 2) * \cos(2^2 a + 2^2 c - 2^2 p - t^2 w) - \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + f + 5^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + f + 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& \alpha^2 \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + f + 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 e^2 m^2 n^2 o^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + f + 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f + 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f + 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + f + h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + f + h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + f - h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + f - h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 q^2 w^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& \alpha^2 \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 4^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 5^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + f - 5^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& e^2 m^2 n^2 o^2 q^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c + f - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c + f - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 x^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f + 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f + 4^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \alpha^2 e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 x^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f + 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \alpha^2 e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f + 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + e^2 m^2 n^2 o^2 q^2 w^2 x^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f + 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f + 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 x^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f + 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f + 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 w^2 2^2 y^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c - f - h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 r^2 w^2 2^2 y^2 * \cos(2^2 a + c - f - h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 2^2 z^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - f - 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 v^2 w^2 2^2 z^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 v^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - f - 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \beta a^i e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 2^2 z^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 2^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - f - 5^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - e^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 2^2 z^2 * \\
& \cos(2^2 a + c - f - 5^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + e^2 m^2 n^2 o^2 q^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f - 2^2 p + t^2 w) / 4 + e^2 m^2 n^2 o^2 q^2 w^2 x^2 * \cos(2^2 a + c - f - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \\
& b^i i^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 5^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - b^i i^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 5^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * \\
& \cos(2^2 a + c + 5^2 h - j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 \tau^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 5^2 h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 \tau^2 v^2 w^2 * \\
& \cos(2^2 a + c + 5^2 h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 + n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (s + 2^2 u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i - v) + 2^2 u * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 5^2 h - \\
& 2^2 p + t^2 w) / 8 - b^i d^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * (\delta a^i + v) * \sin(2^2 a + c + 5^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - d^2 m^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 2^2 * (d^2 u + 4^2 v) * \cos(2^2 a + c + 5^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 + b^i d^2 n^2 o^2 \tau^2 v^2 w^2 * \sin(2^2 a + c + 5^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& \beta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 4^2 h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - b^i \beta a^i i^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 4^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i \beta a^i i^2 n^2 o^2 s^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 4^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& \beta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 \delta a^i * \cos(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 + \beta a^i \delta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 * \cos(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 - \beta a^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (2^2 \delta a^i + r + v) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (s - u) + 2^2 \delta a^i * (i^2 2^2 m - \\
& 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 8 + b^i \beta a^i d^2 n^2 o^2 w^2 * (s + u) * \sin(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \beta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \sin(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \beta a^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i + t + v) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (s + 2^2 u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i - v) + 2^2 u * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 - b^i \beta a^i d^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \sin(2^2 a + c + 4^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \alpha^2 e^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 3^2 h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 + \alpha^2 \delta a^i b^i \delta a^i i^2 n^2 o^2 * \cos(2^2 a + c + 3^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i b^i i^2 n^2 o^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 3^2 h + j - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i b^i i^2 n^2 o^2 r^2 w^2 * \cos(2^2 a + c + 3^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 \delta a^i b^i \delta a^i i^2 n^2 o^2 * \cos(2^2 a + c + 3^2 h - j - 2^2 p - t^2 w) / 8 + \alpha^2 \delta a^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + 2^2 s + u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (r - \delta a^i) + 2^2 s * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 8 - \alpha^2 \delta a^i b^i d^2 n^2 o^2 w^2 * (\delta a^i + r) * \sin(2^2 a + c + 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& \alpha^2 \delta a^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (s + 2^2 u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i - v) + 2^2 u * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 + \alpha^2 \delta a^i b^i d^2 n^2 o^2 w^2 * (\delta a^i + v) * \sin(2^2 a + c + 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \delta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 v^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h + 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 - b^i i^2 m^2 n^2 o^2 s^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 u^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h + j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 q^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - b^i i^2 m^2 n^2 o^2 s^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h - j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 r^2 z^2 * \cos(2^2 a + c + 2^2 h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 - n^2 o^2 z^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i + r) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (q - s) + 2^2 r * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 8 + b^i d^2 n^2 o^2 w^2 z^2 * (q + s) * \sin(2^2 a + c + 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + n^2 o^2 z^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (2^2 \delta a^i + r + v) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (s - u) + 2^2 \delta a^i * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 - b^i d^2 n^2 o^2 w^2 z^2 * (s + u) * \sin(2^2 a + c + 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 u^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h + 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 r^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - b^i \delta a^i i^2 n^2 o^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h + j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 r^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 s^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 q^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 + n^2 o^2 y^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + s) - 4^2 d^2 m^2 r^2 w^2 + q^2 * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - n^2 o^2 y^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + 2^2 s + u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (r - \delta a^i) + 2^2 s * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 p - t^2 w) / 8 + b^i d^2 n^2 o^2 w^2 y^2 * (\delta a^i + r) * \sin(2^2 a + c + h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 q^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 p - t^2 w) / 8 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 4 - b^i i^2 m^2 n^2 o^2 r^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 r^2 y^2 * \cos(2^2 a + c + h - j - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \\
& i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 + n^2 o^2 y^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + 2^2 s + u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (r - \delta a^i) + 2^2 s * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c - h - 2^2 p + t^2 w) / 8 - \\
& b^i d^2 n^2 o^2 w^2 y^2 * (\delta a^i + r) * \sin(2^2 a + c - h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + n^2 o^2 y^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + s) - 4^2 d^2 m^2 r^2 w^2 + q^2 * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c - h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 r^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 q^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h + j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + b^i i^2 m^2 n^2 o^2 u^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& b^i i^2 m^2 n^2 o^2 s^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h - j - 2^2 p - t^2 w) / 4 + i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 v^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - \delta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 z^2 * \cos(2^2 a + c - 2^2 h - 2^2 j - 2^2 p - t^2 w) / 8 + b^i d^2 n^2 o^2 w^2 z^2 * (s + u) * \sin(2^2 a + c - 2^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \\
& n^2 o^2 z^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i + r) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (q - s) + 2^2 r * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c - 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 - \\
& b^i d^2 n^2 o^2 w^2 z^2 * (q + s) * \sin(2^2 a + c - 2^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 s^2 w^2 * \cos(2^2 a + c - 3^2 h + 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 \delta a^i b^i \delta a^i i^2 n^2 o^2 * \cos(2^2 a + c - 3^2 h + j - 2^2 p + t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i b^i i^2 n^2 o^2 r^2 w^2 * \cos(2^2 a + c - 3^2 h + j - 2^2 p - t^2 w) / 4 - \alpha^2 \delta a^i b^i i^2 n^2 o^2 v^2 w^2 * \cos(2^2 a + c - 3^2 h - j - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 \delta a^i b^i \delta a^i i^2 m^2 n^2 o^2 u^2 w^2 * \cos(2^2 a + c - 3^2 h - 2^2 j - 2^2 p + t^2 w) / 8 - \alpha^2 \delta a^i b^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (s + 2^2 u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (\delta a^i - v) + 2^2 u * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c - 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 8 - \alpha^2 \delta a^i b^i d^2 n^2 o^2 w^2 * (\delta a^i + v) * \sin(2^2 a + c - 3^2 h - 2^2 p + t^2 w) / 4 + \alpha^2 \delta a^i n^2 o^2 * (d^2 2^2 m^2 w^2 2^2 * (q + 2^2 s + u) + 4^2 d^2 m^2 w^2 2^2 * (r - \delta a^i) + 2^2 s * (i^2 2^2 m - 4^2 k)) * \cos(2^2 a + c - 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 8 + \alpha^2 \delta a^i b^i d^2 n^2 o^2 w^2 * (\delta a^i + r) * \sin(2^2 a + c - 3^2 h - 2^2 p - t^2 w) / 4 + \beta a^i \delta a^i i^2 2^2 m^2 n^2 o^2 * \cos(2^2 a + c -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4h+2j-2p+t^*)/8-\beta a^i \Delta^2 m^* o^* r^* \cos(2^* a+c-4^* h+2^* j-2^* p-t^*)/8-b^* \beta a^i n^* o^* u^* \cos(2^* a+c-4^* h+j-2^* p+t^*)/4+b^* \beta a^i n^* o^* s^* \cos(2^* a+c-4^* h+j-2^* p-t^*)/4-b^* \beta a^i n^* o^* u^* \cos(2^* a+c-4^* h-j-2^* p-t^*)/4-\beta a^i \Delta^2 m^* n^* o^* v^* \cos(2^* a+c-4^* h-2^* j-2^* p-t^*)/8+b^* \beta a^i d^* n^* o^* u^* w^* \sin(2^* a+c-4^* h-2^* p+t^*)/4-\beta a^i n^* o^* (d^2 m^* w^2 (2 \Delta +r+v)+4 d^* m^* w^2 (s-u)+2 \Delta (i^2 m-4 k)) \cos(2^* a+c-4^* h-2^* p-t^*)/8-b^* \beta a^i d^* n^* o^* w^* (s+u) \sin(2^* a+c-4^* h-2^* p-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* t^* \cos(2^* a+c-5^* h+2^* j-2^* p+t^*)/8+i^2 m^* n^* o^* s^* t^* \cos(2^* a+c-5^* h-2^* j-2^* p-t^*)/8+b^i i^2 m^* n^* o^* t^* \cos(2^* a+c-5^* h+j-2^* p-t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* t^* \cos(2^* a+c-5^* h-j-2^* p-t^*)/4-d^* m^* n^* o^* t^* w^2 (d+u+4 v) \cos(2^* a+c-5^* h-2^* p+t^*)/8-b^* d^* n^* o^* t^* v^* w^2 \sin(2^* a+c-5^* h-2^* p+t^*)/4+n^* o^* t^* (d^2 m^* w^2 (s+2 u)+4 d^* m^* w^2 (\Delta -v)+2 u (i^2 m-4 k)) \cos(2^* a+c-5^* h-2^* p-t^*)/8+b^* d^* n^* o^* t^* w^2 (\Delta +v) \sin(2^* a+c-5^* h-2^* p-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* r^* x^* \cos(2^* a+c+2^* j-2^* p+t^*)/8+\Delta i^2 m^* n^* o^* x^* \cos(2^* a+c+2^* j-2^* p-t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* s^* x^* \cos(2^* a+c+j-2^* p-t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* s^* x^* \cos(2^* a+c-j-2^* p+t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* q^* x^* \cos(2^* a+c-j-2^* p-t^*)/4+\Delta i^2 m^* n^* o^* x^* \cos(2^* a+c-2^* j-2^* p-t^*)/8+n^* o^* x^* (d^2 m^* w^2 (\Delta +r)+4 d^* m^* w^2 (q-s)+2 r (i^2 m-4 k)) \cos(2^* a+c-2^* p+t^*)/8+b^i d^* n^* o^* w^* x^* (q+s) \sin(2^* a+c-2^* p+t^*)/4+n^* o^* x^* (d^2 m^* w^2 (\Delta +r)+4 d^* m^* w^2 (q-s)+2 r (i^2 m-4 k)) \cos(2^* a+c-2^* p-t^*)/8-b^i d^* n^* o^* w^* x^* (q+s) \sin(2^* a+c-2^* p-t^*)/4+n^2 (d^2 m^* w^2 (\Delta +r)+q^2 (q+s+u)+q^2 r-r^2 u+v (s+u))-d^* m^* w^2 (2 \Delta^2 -2 \Delta (r+v)-q^2+2 q^2 s+3 r^2-2 (s^2-s^2 u+u^2-v^2))-4 k^2 (\Delta (s-u)+q^2 r-r^2 s+u^2) \cos(2^* a-2^* p+t^*)/4-b^i d^* n^2 w^2 (2 \Delta^2+2 \Delta (r+v)-q^2-2 q^2 s+r^2-2 (s^2+s^2 u+u^2-v^2)) \sin(2^* a-2^* p-t^*)/4+n^2 (d^2 m^* w^2 (\Delta +r)+q^2 (q+s+u)+q^2 r-r^2 u+v (s+u))-d^* m^* w^2 (2 \Delta^2-2 \Delta (r+v)-q^2+2 q^2 s+3 r^2-2 (s^2-s^2 u+u^2-v^2))-4 k^2 (\Delta (s-u)+q^2 r-r^2 s+u^2) \cos(2^* a-2^* p-t^*)/4+b^i d^* n^2 w^2 (2 \Delta^2+2 \Delta (r+v)-q^2-2 q^2 s+r^2-2 s^2-2 s^2 u-2 u^2+2 v^2) \sin(2^* a-2^* p-t^*)/4+k^* o^* \theta^* y^* \sin(a+c+h-p+t^*)+k^* o^* \theta^* y^* \sin(a+c-h-p-t^*)+k^* n^* r^* \theta^* \sin(a-p-t^*)+k^* n^* r^* \theta^* \sin(a-p-t^*)+e^* m^* n^* o^* t^* v^* w^2 \cos(c+f+5 h+t^*)/4+\beta a^i e^* m^* n^* o^* u^* w^2 \cos(c+f+4 h+t^*)/4+\alpha^i \Delta^2 e^* m^* n^* o^* w^2 \cos(c+f+3 h+t^*)/4-\alpha^i e^* m^* n^* o^* v^* w^2 \cos(c+f+3 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* s^* w^2 z^* \cos(c+f+2 h+t^*)/4-e^* m^* n^* o^* u^* w^2 z^* \cos(c+f+2 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* r^* w^2 y^* \cos(c+f+h+t^*)/4-\Delta e^* m^* n^* o^* w^2 y^* \cos(c+f+h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* r^* w^2 y^* \cos(c+f-h+t^*)/4+e^* m^* n^* o^* r^* w^2 y^* \cos(c+f-h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* s^* w^2 z^* \cos(c+f-2 h+t^*)/4-e^* m^* n^* o^* q^* w^2 z^* \cos(c+f-2 h-t^*)/4+\alpha^i \Delta e^* m^* n^* o^* w^2 \cos(c+f-3 h+t^*)/4-\alpha^i e^* m^* n^* o^* r^* w^2 \cos(c+f-3 h-t^*)/4+\beta a^i e^* m^* n^* o^* u^* w^2 \cos(c+f-4 h+t^*)/4-\beta a^i e^* m^* n^* o^* s^* w^2 \cos(c+f-4 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* t^* v^* w^2 \cos(c+f-5 h+t^*)/4-\Delta e^* m^* n^* o^* t^* w^2 \cos(c+f-5 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* q^* w^2 x^* \cos(c+f+t^*)/4-e^* m^* n^* o^* s^* w^2 x^* \cos(c+f-t^*)/4-\Delta e^* m^* n^* o^* t^* w^2 \cos(c-f+5 h+t^*)/4+e^* m^* n^* o^* t^* v^* w^2 \cos(c-f+5 h-t^*)/4-\beta a^i e^* m^* n^* o^* s^* w^2 \cos(c-f+4 h+t^*)/4+\beta a^i e^* m^* n^* o^* u^* w^2 \cos(c-f+4 h-t^*)/4-\alpha^i e^* m^* n^* o^* r^* w^2 \cos(c-f+3 h+t^*)/4+\alpha^i \Delta e^* m^* n^* o^* w^2 \cos(c-f+3 h-t^*)/4-e^* m^* n^* o^* q^* w^2 z^* \cos(c-f+2 h+t^*)/4+e^* m^* n^* o^* s^* w^2 z^* \cos(c-f+2 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* r^* w^2 y^* \cos(c-f+h+t^*)/4-\Delta e^* m^* n^* o^* w^2 y^* \cos(c-f-h+t^*)/4+e^* m^* n^* o^* r^* w^2 y^* \cos(c-f-h-t^*)/4-e^* m^* n^* o^* u^* w^2 z^* \cos(c-f-2 h+t^*)/4+e^* m^* n^* o^* s^* w^2 z^* \cos(c-f-2 h-t^*)/4-\alpha^i e^* m^* n^* o^* v^* w^2 \cos(c-f-3 h+t^*)/4+\alpha^i \Delta e^* m^* n^* o^* w^2 \cos(c-f-3 h-t^*)/4+\beta a^i e^* m^* n^* o^* u^* w^2 \cos(c-f-4 h-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* t^* v^* w^2 \cos(c-f-5 h+t^*)/4-e^* m^* n^* o^* s^* w^2 x^* \cos(c-f-t^*)/4+e^* m^* n^* o^* q^* w^2 x^* \cos(c-f-t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* t^* v^* w^2 \cos(c+5 h-j+t^*)/4+b^i \Delta e^* m^* n^* o^* t^* \cos(c+5 h-j-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* s^* t^* \cos(c+5 h-2 j+t^*)/8-i^2 m^* n^* o^* t^* u^* \cos(c+5 h-2 j-t^*)/8-m^* n^* o^* t^* (d^2 w^2 (s+2 u)+4 d^* w^2 (\Delta -v)-2 i^2 u) \cos(c+5 h+t^*)/8+b^i d^* n^* o^* t^* w^2 (\Delta +v) \sin(c+5 h+t^*)/4+d^* m^* n^* o^* t^* w^2 (d+u+4 v) \cos(c+5 h-t^*)/8-b^i d^* n^* o^* t^* v^* w^2 \sin(c+5 h-t^*)/4+\beta a^i \Delta^2 m^* n^* o^* v^* \cos(c+4 h+2 j+t^*)/8-b^i \beta a^i n^* o^* u^* \cos(c+4 h+j+t^*)/4+b^i \beta a^i n^* o^* s^* \cos(c+4 h-j+t^*)/4-b^i \beta a^i n^* o^* u^* \cos(c+4 h-j-t^*)/4+\beta a^i \Delta^2 m^* n^* o^* r^* \cos(c+4 h-2 j+t^*)/8-\beta a^i \Delta e^* m^* n^* o^* \cos(c+4 h-2 j-t^*)/8-m^* n^* o^* (d^2 w^2 (2 \Delta +r+v)+4 d^* w^2 (s-u)-2 \Delta (i^2)) \cos(c+4 h+t^*)/8+b^i \beta a^i d^* n^* o^* w^* (s+u) \sin(c+4 h+t^*)/4+\beta a^i m^* n^* o^* (d^2 w^2 (\Delta +2 v)+4 d^* u^2-2 i^2 u) \cos(c+4 h-t^*)/8-b^i \beta a^i d^* n^* o^* u^* w^* \sin(c+4 h-t^*)/4+\alpha^i \Delta^2 m^* n^* o^* u^* \cos(c+3 h+2 j+t^*)/8-\alpha^i \beta a^i \Delta e^* m^* n^* o^* \cos(c+3 h+j-t^*)/4+\alpha^i \beta a^i i^2 m^* n^* o^* v^* \cos(c+3 h-j-t^*)/4+\alpha^i \beta a^i i^2 m^* n^* o^* r^* \cos(c+3 h-j+t^*)/4-\alpha^i \beta a^i \Delta e^* m^* n^* o^* \cos(c+3 h-j-t^*)/4+\alpha^i \Delta^2 m^* n^* o^* q^* \cos(c+3 h-2 j+t^*)/8-\alpha^i \Delta e^* m^* n^* o^* s^* \cos(c+3 h-2 j-t^*)/8-\alpha^i m^* n^* o^* (d^2 w^2 (q+2 s+u)+4 d^* w^2 (r-\Delta)-2 i^2 s) \cos(c+3 h+t^*)/8+\alpha^i \beta a^i d^* n^* o^* w^* (\Delta +r) \sin(c+3 h+t^*)/4+\alpha^i m^* n^* o^* (d^2 w^2 (s+2 u)+4 d^* w^2 (\Delta -v)-2 i^2 u) \cos(c+3 h-t^*)/8-\alpha^i \beta a^i d^* n^* o^* w^* (\Delta +v) \sin(c+3 h-t^*)/4+\Delta e^* m^* n^* o^* z^* \cos(c+2 h+2 j+t^*)/8-i^2 m^* n^* o^* v^* z^* \cos(c+2 h+2 j-t^*)/8-b^i i^2 m^* n^* o^* s^* z^* \cos(c+2 h+j+t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* q^* z^* \cos(c+2 h-j+t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* s^* z^* \cos(c+2 h-j-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* r^* z^* \cos(c+2 h-2 j+t^*)/8-i^2 m^* n^* o^* r^* z^* \cos(c+2 h-2 j-t^*)/8-m^* n^* o^* z^* (d^2 w^2 (\Delta +r)+4 d^* w^2 (q-s)-2 i^2 r) \cos(c+2 h+t^*)/8+b^i d^* n^* o^* w^* z^* (q+s) \sin(c+2 h+t^*)/4+m^* n^* o^* z^* (d^2 w^2 (2 \Delta +r+v)+4 d^* w^2 (s-u)-2 \Delta (i^2)) \cos(c+2 h-t^*)/8-b^i d^* n^* o^* w^* z^* (s+u) \sin(c+2 h-t^*)/4+i^2 m^* n^* o^* s^* y^* \cos(c+h+2 j+t^*)/8-i^2 m^* n^* o^* u^* y^* \cos(c+h+2 j-t^*)/8-b^i i^2 m^* n^* o^* r^* y^* \cos(c+h+j+t^*)/4+b^i \Delta e^* m^* n^* o^* y^* \cos(c+h-j-t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* r^* y^* \cos(c+h-j+t^*)/4-m^* n^* o^* y^* (d^2 w^2 (q+s)-4 d^* r^2-2 i^2 q) \cos(c+h+t^*)/4+m^* n^* o^* y^* (d^2 w^2 (q+2 s+u)+4 d^* w^2 (r-\Delta)-2 i^2 s) \cos(c+h-t^*)/8-b^i d^* n^* o^* w^* y^* (\Delta +r) \sin(c+h-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* q^* y^* \cos(c-h+2 j+t^*)/8+i^2 m^* n^* o^* s^* y^* \cos(c-h+2 j-t^*)/8-b^i i^2 m^* n^* o^* r^* y^* \cos(c-h+j-t^*)/4+b^i \Delta e^* m^* n^* o^* y^* \cos(c-h-j+t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* r^* y^* \cos(c-h-j-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* u^* y^* \cos(c-h+2 j+t^*)/8+i^2 m^* n^* o^* s^* y^* \cos(c-h-2 j-t^*)/8-m^* n^* o^* y^* (d^2 w^2 (q+2 s+u)+4 d^* w^2 (r-\Delta)-2 i^2 s) \cos(c-h-t^*)/8+b^i d^* n^* o^* w^* y^* (\Delta +r) \sin(c-h+t^*)/4-m^* n^* o^* y^* (d^2 w^2 (q+s)-4 d^* r^2-2 i^2 q) \cos(c-h-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* r^* z^* \cos(c-2 h+2 j+t^*)/8-i^2 m^* n^* o^* r^* z^* \cos(c-2 h+2 j-t^*)/8-b^i i^2 m^* n^* o^* s^* z^* \cos(c-2 h+j+t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* q^* z^* \cos(c-2 h-j-t^*)/4+b^i i^2 m^* n^* o^* u^* z^* \cos(c-2 h-j+t^*)/4-b^i i^2 m^* n^* o^* s^* z^* \cos(c-2 h-j-t^*)/4-i^2 m^* n^* o^* v^* z^* \cos(c-2 h-2 j+t^*)/8+\Delta e^* m^* n^* o^* z^* \cos(c-2 h-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*j-t*w) / 8+m*n*o*z*(d^2*w^2*(2*delta+r+v)+4*d*w^2*(s-u)-2*delta*i^2)*COS(c- \\
& 2*h+t*w) / 8+b*d*n*o*w*z*(s+u)*SIN(c-2*h+t*w) / 4-m*n*o*z*(d^2*w^2*(delta+r)+4*d*w^2*(q-s)- \\
& 2*i^2*r)*COS(c-2*h-t*w) / 8-b*d*n*o*w*z*(q+s)*SIN(c-2*h-t*w) / 4-alpha*i^2*m*n*o*s*COS(c- \\
& 3*h+2*j+t*w) / 8+alpha*i^2*m*n*o*q*COS(c-3*h+2*j-t*w) / 8-alpha*b*delta*i*n*o*COS(c- \\
& 3*h+j+t*w) / 4+alpha*b*i*n*o*r*COS(c-3*h-j-t*w) / 4+alpha*b*i*n*o*v*COS(c-3*h-j+t*w) / 4- \\
& alpha*b*delta*i*n*o*COS(c-3*h-j-t*w) / 4+alpha*i^2*m*n*o*u*COS(c-3*h-2*j- \\
& t*w) / 8+alpha*m*n*o*(d^2*w^2*(s+2*u)+4*d*w^2*(delta-v)-2*i^2*u)*COS(c- \\
& 3*h+t*w) / 8+alpha*b*d*n*o*w*(delta+v)*SIN(c-3*h+t*w) / 4- \\
& alpha*m*n*o*(d^2*w^2*(q+2*s+u)+4*d*w^2*(r-delta)-2*i^2*s)*COS(c-3*h-t*w) / 8- \\
& alpha*b*d*n*o*w*(delta+r)*SIN(c-3*h-t*w) / 4-beta*delta*i^2*m*n*o*COS(c- \\
& 4*h+2*j+t*w) / 8+beta*i^2*m*n*o*r*COS(c-4*h+2*j-t*w) / 8-b*beta*i*n*o*u*COS(c- \\
& 4*h+j+t*w) / 4+b*beta*i*n*o*s*COS(c-4*h+j-t*w) / 4-b*beta*i*n*o*u*COS(c-4*h-j- \\
& t*w) / 4+beta*i^2*m*n*o*v*COS(c-4*h-2*j-t*w) / 8+beta*m*n*o*(d^2*w^2*(delta+2*v)+4*d*u*w^2- \\
& 2*i^2*v)*COS(c-4*h+t*w) / 8+b*beta*d*n*o*u*w*SIN(c-4*h+t*w) / 4- \\
& beta*m*n*o*(d^2*w^2*(2*delta+r+v)+4*d*w^2*(s-u)-2*delta*i^2)*COS(c-4*h-t*w) / 8- \\
& b*beta*d*n*o*w*(s+u)*SIN(c-4*h-t*w) / 4-i^2*m*n*o*tau*u*COS(c- \\
& 5*h+2*j+t*w) / 8+i^2*m*n*o*s*tau*COS(c-5*h+2*j-t*w) / 8-b*i*n*o*tau*v*COS(c- \\
& 5*h+j+t*w) / 4+b*delta*i*n*o*tau*COS(c-5*h+j-t*w) / 4-b*i*n*o*tau*v*COS(c-5*h-j- \\
& t*w) / 4+d*m*n*o*tau*w^2*(d*u+4*v)*COS(c-5*h+t*w) / 8+b*d*n*o*tau*v*w*SIN(c-5*h+t*w) / 4- \\
& m*n*o*tau*(d^2*w^2*(s+2*u)+4*d*w^2*(delta-v)-2*i^2*u)*COS(c-5*h-t*w) / 8- \\
& b*d*n*o*tau*w*(delta+v)*SIN(c-5*h-t*w) / 4+i^2*m*n*o*r*x*COS(c+2*j+t*w) / 8- \\
& delta*i^2*m*n*o*x*COS(c+2*j-t*w) / 8-b*i*n*o*q*x*COS(c+j+t*w) / 4+b*i*n*o*s*x*COS(c+j- \\
& t*w) / 4+b*i*n*o*s*x*COS(c-j+t*w) / 4-b*i*n*o*q*x*COS(c-j-t*w) / 4-delta*i^2*m*n*o*x*COS(c- \\
& 2*j+t*w) / 8+i^2*m*n*o*r*x*COS(c-2*j-t*w) / 8+m*n*o*x*(d^2*w^2*(delta+r)+4*d*w^2*(q-s)- \\
& 2*i^2*r)*COS(c+t*w) / 8+b*d*n*o*w*x*(q+s)*SIN(c+t*w) / 4+m*n*o*x*(d^2*w^2*(delta+r)+4*d*w^2*(q-s)- \\
& 2*i^2*r)*COS(c-t*w) / 8-b*d*n*o*w*x*(q+s)*SIN(c-t*w) / 4-e*m*o^2*w^2*(2*x*z- \\
& y^2+2*(alpha*y+beta*z+alpha*tau))*COS(f-2*h- \\
& t*w) / 2+(e*m*o^2*w^2*x^2/2+e*m*o^2*w^2*y^2+e*m*o^2*w^2*z^2+alpha^2*e*m*o^2*w^2+beta^2*e*m*o^2*w^2 \\
& ^2+e*m*o^2*tau^2*w^2)*COS(f+t*w)+(b*i*o^2*x*z- \\
& b*i*o^2*y^2/2+alpha*b*i*o^2*y+b*beta*i*o^2*z+alpha*b*i*o^2*tau)*COS(2*h-j+t*w)- \\
& d*m*o^2*w^2*(2*x*z-y^2+2*(alpha*y+beta*z+alpha*tau))*COS(2*h+t*w) / 2- \\
& b*i*o^2*(x^2+2*(y^2+z^2+alpha^2+beta^2+tau^2))*COS(j+t*w) / 2+(d*m*o^2*w^2*x^2/2+d*m*o^2*w^2*y^2 \\
& +d*m*o^2*w^2*z^2+alpha^2*d*m*o^2*w^2+beta^2*d*m*o^2*w^2+d*m*w^2*(2*delta^2*n^2- \\
& 2*delta*n^2*(r+v)+n^2*(q^2-2*q*s+3*r^2+2*s^2- \\
& 2*s*u+2*u^2+2*v^2)+2*o^2*tau^2) / 2)*COS(t*w)+b*d*n^2*w*(2*delta^2+2*delta*(r+v)+q^2+2*q*s+r^2+2 \\
& *s^2+2*s*u+2*u^2+2*v^2)*SIN(t*w) / 2
\end{aligned}$$

Eixo 2:

$$\begin{aligned}
& -e*m*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z-alpha*tau))*COS(2*a+2*c+f-2*h-2*p- \\
& t*w) / 4+(e*m*o^2*w^2*x^2/4-e*m*o^2*w^2*y^2/2+e*m*o^2*w^2*z^2/2- \\
& alpha^2*e*m*o^2*w^2/2+beta^2*e*m*o^2*w^2/2-e*m*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c+f-2*p+t*w)- \\
& e*m*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z-alpha*tau))*COS(2*a+2*c-f+2*h- \\
& 2*p+t*w) / 4+(e*m*o^2*w^2*x^2/4-e*m*o^2*w^2*y^2/2+e*m*o^2*w^2*z^2/2- \\
& alpha^2*e*m*o^2*w^2/2+beta^2*e*m*o^2*w^2/2-e*m*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c-f-2*p- \\
& t*w)+(alpha*i^2*m*o^2*x/4+y*(i^2*m*o^2*z/4- \\
& beta*i^2*m*o^2/4)+i^2*m*o^2*tau*z/4)*COS(2*a+2*c+3*h-2*j- \\
& 2*p+t*w)+(b*i*o^2*x*z/2+b*i*o^2*y^2/4-alpha*b*i*o^2*y/2+b*beta*i*o^2*z/2- \\
& alpha*b*i*o^2*tau/2)*COS(2*a+2*c+2*h-j-2*p+t*w)-d*m*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z- \\
& alpha*tau))*COS(2*a+2*c+2*h-2*p+t*w) / 4-i^2*m*o^2*(x*y-y*z+alpha*z-beta*(alpha- \\
& tau))*COS(2*a+2*c+h-2*j-2*p-t*w) / 4+(o^2*x*y*(i^2*m-2*k) / 2+o^2*y*z*(2*k- \\
& i^2*m) / 2+alpha*o^2*z*(i^2*m-2*k) / 2+alpha*beta*o^2*(2*k-i^2*m) / 2+beta*o^2*tau*(i^2*m- \\
& 2*k) / 2)*COS(2*a+2*c+h-2*p+t*w)-i^2*m*o^2*(x*y-y*z+alpha*z-beta*(alpha- \\
& tau))*COS(2*a+2*c-h+2*j- \\
& 2*p+t*w) / 4+(o^2*x*y*(i^2*m-2*k) / 2+o^2*y*z*(2*k-i^2*m) / 2+alpha*o^2*z*(i^2*m- \\
& 2*k) / 2+alpha*beta*o^2*(2*k-i^2*m) / 2+beta*o^2*tau*(i^2*m-2*k) / 2)*COS(2*a+2*c-h-2*p- \\
& t*w)+(b*i*o^2*x*z/2+b*i*o^2*y^2/4-alpha*b*i*o^2*y/2+b*beta*i*o^2*z/2- \\
& alpha*b*i*o^2*tau/2)*COS(2*a+2*c-2*h+j-2*p-t*w)-d*m*o^2*w^2*(2*x*z+y^2-2*alpha*y+2*(beta*z- \\
& alpha*tau))*COS(2*a+2*c-2*h-2*p-t*w) / 4+(alpha*i^2*m*o^2*x/4+y*(i^2*m*o^2*z/4- \\
& beta*i^2*m*o^2/4)+i^2*m*o^2*tau*z/4)*COS(2*a+2*c-3*h+2*j-2*p-t*w)+b*i*o^2*(2*(y^2-z^2+alpha^2- \\
& beta^2+tau^2)-x^2)*COS(2*a+2*c+j-2*p+t*w) / 4+b*i*o^2*(2*(y^2-z^2+alpha^2-beta^2+tau^2)- \\
& x^2)*COS(2*a+2*c-j-2*p-t*w) / 4+(d*m*o^2*w^2*x^2/4-d*m*o^2*w^2*y^2/2+d*m*o^2*w^2*z^2/2- \\
& alpha^2*d*m*o^2*w^2/2+beta^2*d*m*o^2*w^2/2-d*m*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c- \\
& 2*p+t*w)+(d*m*o^2*w^2*x^2/4-d*m*o^2*w^2*y^2/2+d*m*o^2*w^2*z^2/2- \\
& alpha^2*d*m*o^2*w^2/2+beta^2*d*m*o^2*w^2/2-d*m*o^2*tau^2*w^2/2)*COS(2*a+2*c-2*p- \\
& t*w)+n*o*tau*(d^2*m*w^2*(s+2*u)+2*d*m*w^2*(delta-v)-4*k*u)*COS(2*a+c+5*h-2*p+t*w) / 8- \\
& b*d*n*o*tau*w*(delta+v)*SIN(2*a+c+5*h-2*p+t*w) / 4-d*m*n*o*tau*w^2*(d*u+2*v)*COS(2*a+c+5*h-2*p- \\
& t*w) / 8+b*d*n*o*tau*v*w*SIN(2*a+c+5*h-2*p-t*w) / 4- \\
& beta*n*o*(d^2*m*w^2*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s-u)-4*delta*k)*COS(2*a+c+4*h- \\
& 2*p+t*w) / 8+b*beta*d*n*o*w*(s+u)*SIN(2*a+c+4*h- \\
& 2*p+t*w) / 4+beta*n*o*(d^2*m*w^2*(delta+2*v)+2*d*m*w^2*(s-u)-4*k*v)*COS(2*a+c+4*h-2*p-t*w) / 8- \\
& b*beta*d*n*o*w*SIN(2*a+c+4*h-2*p-t*w) / 4+alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)- \\
& 4*k*s)*COS(2*a+c+3*h-2*p+t*w) / 8-alpha*b*d*n*o*w*(delta+r)*SIN(2*a+c+3*h-2*p+t*w) / 4- \\
& alpha*n*o*(d^2*m*w^2*(s+2*u)+2*d*m*w^2*(delta-v)-4*k*u)*COS(2*a+c+3*h-2*p- \\
& t*w) / 8+alpha*b*d*n*o*w*(delta+v)*SIN(2*a+c+3*h-2*p-t*w) / 4- \\
& n*o*z*(d^2*m*w^2*(delta+r)+2*d*m*w^2*(q-s)-4*k*r)*COS(2*a+c+2*h- \\
& 2*p+t*w) / 8+b*d*n*o*w*z*(q+s)*SIN(2*a+c+2*h- \\
& 2*p+t*w) / 4+n*o*z*(2*delta+r+v)+2*d*m*w^2*(s-u)-4*delta*k)*COS(2*a+c+2*h-2*p-t*w) / 8- \\
& b*d*n*o*w*z*(s+u)*SIN(2*a+c+2*h-2*p-t*w) / 4+n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+s)-2*d*m*r*w^2- \\
& 2*k*q)*COS(2*a+c+h-2*p+t*w) / 4-n*o*y*(d^2*m*w^2*(q+2*s+u)+2*d*m*w^2*(r-delta)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*k*s) * \cos(2*a+c+h-2*p-t*w) / 8 + b*d*n*o*w*y*(\delta+r) * \sin(2*a+c+h-2*p-t*w) / 4 - \\
& n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - 4*k*s) * \cos(2*a+c-h-2*p+t*w) / 8 - \\
& b*d*n*o*w*y*(\delta+r) * \sin(2*a+c-h-2*p+t*w) / 4 + n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+s) - 2*d*m*r*w^2 - \\
& 2*k*q) * \cos(2*a+c-h-2*p-t*w) / 4 + n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d*m*w^2*(s-u) - \\
& 4*\delta*k) * \cos(2*a+c-2*h-2*p+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*z*(s+u) * \sin(2*a+c-2*h-2*p+t*w) / 4 - \\
& n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - 4*k*r) * \cos(2*a+c-2*h-2*p-t*w) / 8 - \\
& b*d*n*o*w*z*(q+s) * \sin(2*a+c-2*h-2*p-t*w) / 4 - \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - \\
& 4*k*u) * \cos(2*a+c-3*h-2*p+t*w) / 8 - \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+v) * \sin(2*a+c-3*h- \\
& 2*p+t*w) / 4 + \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - 4*k*s) * \cos(2*a+c-3*h-2*p- \\
& t*w) / 8 + \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+r) * \sin(2*a+c-3*h-2*p- \\
& t*w) / 4 + \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(\delta+2*v) + 2*d*m*u*w^2 - 4*k*v) * \cos(2*a+c-4*h- \\
& 2*p+t*w) / 8 + \beta*b*d*n*o*u*w*\sin(2*a+c-4*h-2*p+t*w) / 4 - \\
& \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d*m*w^2*(s-u) - 4*\delta*k) * \cos(2*a+c-4*h-2*p-t*w) / 8 - \\
& \beta*b*d*n*o*w*(s+u) * \sin(2*a+c-4*h-2*p-t*w) / 4 - d*m*n*o*\tau*w^2*(d*u+2*v) * \cos(2*a+c-5*h- \\
& 2*p+t*w) / 8 - b*d*n*o*\tau*v*w*\sin(2*a+c-5*h- \\
& 2*p+t*w) / 4 + n*o*\tau*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - 4*k*u) * \cos(2*a+c-5*h-2*p- \\
& t*w) / 8 + b*d*n*o*\tau*w*(\delta+v) * \sin(2*a+c-5*h-2*p- \\
& t*w) / 4 + n*o*x*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - 4*k*r) * \cos(2*a+c- \\
& 2*p+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*x*(q+s) * \sin(2*a+c-2*p+t*w) / 4 + n*o*x*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - \\
& 4*k*r) * \cos(2*a+c-2*p-t*w) / 8 - b*d*n*o*w*x*(q+s) * \sin(2*a+c-2*p-t*w) / 4 + k*o*\theta*y*\sin(a+c+h- \\
& p-t*w) + k*o*\theta*y*\sin(a+c-h-p-t*w) - n*o*\tau*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - \\
& 4*k*u) * \cos(c+5*h+t*w) / 8 + b*d*n*o*\tau*w*(\delta+v) * \sin(c+5*h+t*w) / 4 + d*m*n*o*\tau*w^2*(d*u+2*v) * \cos \\
& (c+5*h-t*w) / 8 - b*d*n*o*\tau*v*w*\sin(c+5*h-t*w) / 4 - \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d*m*w^2*(s- \\
& u) - \\
& 4*\delta*k) * \cos(c+4*h+t*w) / 8 + \beta*b*d*n*o*w*(s+u) * \sin(c+4*h+t*w) / 4 + \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(\delta+2 \\
& *v) + 2*d*m*u*w^2 - 4*k*v) * \cos(c+4*h-t*w) / 8 - \beta*b*d*n*o*u*w*\sin(c+4*h-t*w) / 4 - \\
& \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - \\
& 4*k*s) * \cos(c+3*h+t*w) / 8 + \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+r) * \sin(c+3*h+t*w) / 4 + \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) \\
&) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - 4*k*u) * \cos(c+3*h-t*w) / 8 - \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+v) * \sin(c+3*h-t*w) / 4 - \\
& n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - \\
& 4*k*r) * \cos(c+2*h+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*z*(q+s) * \sin(c+2*h+t*w) / 4 + n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d* \\
& m*w^2*(s-u) - 4*\delta*k) * \cos(c+2*h-t*w) / 8 - b*d*n*o*w*z*(s+u) * \sin(c+2*h-t*w) / 4 - \\
& n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+s) - 2*d*m*r*w^2 - \\
& 2*k*q) * \cos(c+h+t*w) / 4 + n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - 4*k*s) * \cos(c+h-t*w) / 8 - \\
& b*d*n*o*w*y*(\delta+r) * \sin(c+h-t*w) / 4 + n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - \\
& 4*k*s) * \cos(c-h+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*y*(\delta+r) * \sin(c-h+t*w) / 4 - n*o*y*(d^{2*m*w^2}*(q+s) - 2*d*m*r*w^2 - \\
& 2*k*q) * \cos(c-h-t*w) / 4 + n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d*m*w^2*(s-u) - 4*\delta*k) * \cos(c- \\
& 2*h+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*z*(s+u) * \sin(c-2*h+t*w) / 4 - n*o*z*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - \\
& 4*k*r) * \cos(c-2*h-t*w) / 8 - b*d*n*o*w*z*(q+s) * \sin(c-2*h- \\
& t*w) / 4 + \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - 4*k*u) * \cos(c- \\
& 3*h+t*w) / 8 + \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+v) * \sin(c-3*h+t*w) / 4 - \\
& \alpha*n*o*(d^{2*m*w^2}*(q+2*s+u) + 2*d*m*w^2*(r-\delta) - 4*k*s) * \cos(c-3*h-t*w) / 8 - \\
& \alpha*b*d*n*o*w*(\delta+r) * \sin(c-3*h-t*w) / 4 + \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(\delta+2*v) + 2*d*m*u*w^2 - \\
& 4*k*v) * \cos(c-4*h+t*w) / 8 + \beta*b*d*n*o*u*w*\sin(c-4*h+t*w) / 4 - \\
& \beta*n*o*(d^{2*m*w^2}*(2*\delta+r+v) + 2*d*m*w^2*(s-u) - 4*\delta*k) * \cos(c-4*h-t*w) / 8 - \\
& \beta*b*d*n*o*w*(s+u) * \sin(c-4*h-t*w) / 4 + d*m*n*o*\tau*w^2*(d*u+2*v) * \cos(c- \\
& 5*h+t*w) / 8 + b*d*n*o*\tau*v*w*\sin(c-5*h+t*w) / 4 - n*o*\tau*(d^{2*m*w^2}*(s+2*u) + 2*d*m*w^2*(\delta-v) - \\
& 4*k*u) * \cos(c-5*h-t*w) / 8 - b*d*n*o*\tau*w*(\delta+v) * \sin(c-5*h- \\
& t*w) / 4 + n*o*x*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - \\
& 4*k*r) * \cos(c+t*w) / 8 + b*d*n*o*w*x*(q+s) * \sin(c+t*w) / 4 + n*o*x*(d^{2*m*w^2}*(\delta+r) + 2*d*m*w^2*(q-s) - \\
& 4*k*r) * \cos(c-t*w) / 8 - b*d*n*o*w*x*(q+s) * \sin(c-t*w) / 4 - e*m*o^2*w^2*(2*x*z - \\
& y^2 + 2*(\alpha*y + \beta*z + \alpha*\tau)) * \cos(f-2*h- \\
& t*w) / 2 + (e*m*o^2*w^2*x^2 / 2 + e*m*o^2*w^2*y^2 + e*m*o^2*w^2*z^2 + \alpha^2*e*m*o^2*w^2 + \beta^2*e*m*o^2*w^2 \\
& + 2*e*m*o^2*\tau*w^2) * \cos(f+t*w) + (b*i*o^2*x*z - \\
& b*i*o^2*y^2 / 2 + \alpha*b*i*o^2*y + \beta*b*i*o^2*z + \alpha*b*i*o^2*\tau) * \cos(2*h-j+t*w) - \\
& d*m*o^2*w^2*(2*x*z - y^2 + 2*(\alpha*y + \beta*z + \alpha*\tau)) * \cos(2*h+t*w) / 2 - \\
& b*i*o^2*(x^2 + 2*(y^2 + z^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \tau^2)) * \cos(j+t*w) / 2 + (d*m*o^2*w^2*x^2 / 2 + d*m*o^2*w^2*y^2 + \\
& d*m*o^2*w^2*z^2 + \alpha^2*d*m*o^2*w^2 + \beta^2*d*m*o^2*w^2 + d*m*o^2*\tau^2*w^2) * \cos(t*w)
\end{aligned}$$

Apêndice 5.C

Determinação da linearização do bloco de estática de força

Neste apêndice apresenta-se a linearização para os dois eixos do bloco de estática de força. As expressões seguintes foram também obtidas através de um programa de álgebra por computador. Devido a restrições desse programa só alguns nomes para variáveis são possíveis e, deste modo, as correspondências entre as variáveis empregues no texto e as de saída do programa são:

Programa	Texto	Programa	Texto
a	q_{10}	n	r_1
c	q_{20}	o	r_2
w	ω	p	θ
t	t	m	M
d	Q_1	b	B
e	Q_2	k	K
f	ϕ	theta	x_{C0}

Eixo 1, Parte com Q_1 :

$$-d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - b*d \cdot o^{2*w} (2* (-2)) * \sin(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p-t*w) / 16 + b*(d * (-o^{2*w}/4)) * \sin(2*a+2*c-2*p-t*w) - d*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p+t*w) / 8 + b*d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c-2*p+t*w) / 8 - d*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p-t*w) / 8 + b*(d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c-2*p-t*w) - d*n^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a-2*p+t*w) / 16 + b*d*n^{2*w} (4) * \sin(2*a-2*p+t*w) / 16 - d*n^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a-2*p-t*w) / 16 + b*(d*n^{2*w} (4) * \sin(2*a-2*p-t*w) + d*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c-p+t*w) / 2 + d*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c-p-t*w) / 2 + d*k \cdot n^{theta} * \sin(a-p+t*w) / 2 + d*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c+t*w) / 8 + b*(d*n \cdot o^{w/2}) * \sin(c+t*w) + d*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c-t*w) / 8 - b*d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(c-t*w) / 8 + d*m \cdot w^{2*} (2* (2*(n^{2+o^2}))) * \cos(t*w) / 8 + b*(d*(n^{2*w}/2 + o^{2*w}/2)) * \sin(t*w)$$

Eixo 1, Parte com Q_2 :

$$-e \cdot o^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+2*c+f-2*p+t*w) / 16 - b*e \cdot o^{2*w} (-4) * \sin(2*a+2*c+f-2*p+t*w) / 16 - e \cdot o^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+2*c-f-2*p-t*w) / 16 + b*(-e \cdot o^{2*w}/4) * \sin(2*a+2*c-f-2*p-t*w) - e*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c+f-2*p+t*w) / 16 + b*e*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c+f-2*p+t*w) / 8 - e*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-f-2*p-t*w) / 16 + b*(-e*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c-f-2*p-t*w) + e*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c+f-p+t*w) / 2 + e*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c-f-p-t*w) / 2 + e*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c+f+t*w) / 16 + b*(e*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(c+f+t*w) + e*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c-f-t*w) / 16 - b*e*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(c-f-t*w) / 8 + e*m \cdot o^{2*w} (4) * \cos(f+t*w) / 8 + b*(e \cdot o^{2*w}/2) * \sin(f+t*w)$$

Eixo 2, Parte com Q_1 :

$$-d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - b*d \cdot o^{2*w} (2* (-2)) * \sin(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p-t*w) / 16 + b*(d * (-o^{2*w}/4)) * \sin(2*a+2*c-2*p-t*w) - d*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p+t*w) / 16 + b*d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c-2*p+t*w) / 16 - d*n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p-t*w) / 16 + b*(d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(2*a+c-2*p-t*w) + d*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c-p+t*w) / 2 + d*k \cdot o^{theta} * \sin(a+c-p-t*w) / 2 + d*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c+t*w) / 16 + b*(d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(c+t*w) + d*m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c-t*w) / 16 - b*d*n \cdot o^{4*} (4) * \sin(c-t*w) / 16 + d*m \cdot o^{2*w} (2* (2)) * \cos(t*w) / 8 + b*(d*(o^{2*w}/2)) * \sin(t*w)$$

Eixo 2, Parte com Q_2 :

$$\begin{aligned}
& -e^{\omega^2} (4 (2k - m\omega^2)) \cos(2a + 2c + f - 2p + t\omega) / 16 - b e^{\omega^2} \omega^4 \sin(2a + 2c + f - 2p + t\omega) / 16 - \\
& e^{\omega^2} (4 (2k - m\omega^2)) \cos(2a + 2c - f - 2p - t\omega) / 16 + b (-e^{\omega^2} \omega / 4) \sin(2a + 2c - f - 2p - t\omega) - \\
& e^{\omega^2} k n \cos(2a + c + f - 2p + t\omega) / 4 - e^{\omega^2} k n \cos(2a + c - f - 2p - t\omega) / 4 + e^{\omega^2} k \theta \sin(a + c + f - \\
& p + t\omega) / 2 + e^{\omega^2} k \theta \sin(a + c - f - p - t\omega) / 2 + e^{\omega^2} k n \cos(c + f + t\omega) / 4 + e^{\omega^2} k n \cos(c - f - \\
& t\omega) / 4 + e^{\omega^2} m \omega^2 (4) \cos(f + t\omega) / 8 + b (e^{\omega^2} \omega / 2) \sin(f + t\omega)
\end{aligned}$$

Apêndice 5.D

Determinação da linearização do sub-bloco de interacção com o ambiente

Neste apêndice apresenta-se a linearização para os dois eixos do sub-bloco de interacção com o ambiente do robot 2R. As expressões seguintes foram também obtidas através de um programa de álgebra por computador. Devido a restrições desse programa só alguns nomes para variáveis são possíveis e, deste modo, as correspondências entre as variáveis empregues no texto e as de saída do programa são:

Programa	Texto	Programa	Texto
a	q_{10}	n	r_1
c	q_{20}	o	r_2
w	ω	p	θ
t	t	m	M
d	Q_1	b	B
e	Q_2	k	K
f	ϕ	theta	x_{C0}

Eixo 1, Parte com Q_1 :

$$-d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p-t*w) / 16 - d \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p+t*w) / 8 + b \cdot d \cdot n \cdot o^{4*} * \sin(2*a+c-2*p+t*w) / 8 - d \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p-t*w) / 8 + b \cdot (-d \cdot n \cdot o^{2*} / 2) * \sin(2*a+c-2*p-t*w) - d \cdot n^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a-2*p+t*w) / 16 + b \cdot d \cdot n^{2*} * \sin(2*a-2*p+t*w) / 16 - d \cdot n^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a-2*p-t*w) / 16 + b \cdot (-d \cdot n^{2*} / 4) * \sin(2*a-2*p-t*w) + d \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c-p+t*w) / 2 + d \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c-p-t*w) / 2 + b \cdot (d \cdot n \cdot o^{2*} / 2) * \sin(c+t*w) - b \cdot d \cdot n \cdot o^{4*} * \sin(c-t*w) / 8 + d \cdot m \cdot w^{2*} (2* (2* (n^2+o^2))) * \cos(t*w) / 8 + b \cdot (d \cdot (n^2 \cdot w / 2 + o^2 \cdot w / 2)) * \sin(t*w)$$

Eixo 1, Parte com Q_2 :

$$-e \cdot o^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+2*c+f-2*p+t*w) / 16 - b \cdot e \cdot o^{2*} * (-4) * \sin(2*a+2*c+f-2*p+t*w) / 16 - e \cdot o^{2*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+2*c-f-2*p-t*w) / 16 + b \cdot (-e \cdot o^{2*} / 4) * \sin(2*a+2*c-f-2*p-t*w) - e \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c+f-2*p+t*w) / 16 + b \cdot e \cdot n \cdot o^{4*} * \sin(2*a+c+f-2*p+t*w) / 8 - e \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-f-2*p-t*w) / 16 + b \cdot (-e \cdot n \cdot o^{4*} / 4) * \sin(2*a+c-f-2*p-t*w) + e \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c+f-p+t*w) / 2 + e \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c-f-p-t*w) / 2 + e \cdot m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c+f+t*w) / 16 + b \cdot (e \cdot n \cdot o^{2*} / 4) * \sin(c+f+t*w) + e \cdot m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c-f-t*w) / 16 - b \cdot e \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \sin(c-f-t*w) / 8 + e \cdot m \cdot o^{2*} * \cos(f+t*w) / 8 + b \cdot (e \cdot o^{2*} / 2) * \sin(f+t*w)$$

Eixo 2, Parte com Q_1 :

$$-d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - b \cdot d \cdot o^{2*} * (2* (-2)) * \sin(2*a+2*c-2*p+t*w) / 16 - d \cdot o^{2*} (2* (2* (2*k-m*w^2))) * \cos(2*a+2*c-2*p-t*w) / 16 + b \cdot (d \cdot (-o^{2*} / 4)) * \sin(2*a+2*c-2*p-t*w) - d \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p+t*w) / 16 + b \cdot d \cdot n \cdot o^{4*} * \sin(2*a+c-2*p+t*w) / 16 - d \cdot n \cdot o^{4*} (4* (2*k-m*w^2)) * \cos(2*a+c-2*p-t*w) / 16 + b \cdot (-d \cdot n \cdot o^{4*} / 4) * \sin(2*a+c-2*p-t*w) + d \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c-p+t*w) / 2 + d \cdot k \cdot o \cdot \theta * \sin(a+c-p-t*w) / 2 + d \cdot m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c+t*w) / 16 + b \cdot (d \cdot n \cdot o^{2*} / 4) * \sin(c+t*w) + d \cdot m \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \cos(c-t*w) / 16 - b \cdot d \cdot n \cdot o^{2*} (4) * \sin(c-t*w) / 16 + d \cdot m \cdot o^{2*} * \cos(t*w) / 8 + b \cdot (d \cdot (o^{2*} / 2)) * \sin(t*w)$$

Eixo 2, Parte com Q_2 :

$$\begin{aligned}
& -e^{\omega^2} (4 (2k - m\omega^2)) \cos(2a + 2c + f - 2p + t\omega) / 16 - b e^{\omega^2} \omega^4 \sin(2a + 2c + f - 2p + t\omega) / 16 - \\
& e^{\omega^2} (4 (2k - m\omega^2)) \cos(2a + 2c - f - 2p - t\omega) / 16 + b (-e^{\omega^2} \omega / 4) \sin(2a + 2c - f - 2p - t\omega) - \\
& e^{\omega^2} k n \cos(2a + c + f - 2p + t\omega) / 4 - e^{\omega^2} k n \cos(2a + c - f - 2p - t\omega) / 4 + e^{\omega^2} k \theta \sin(a + c + f - \\
& p + t\omega) / 2 + e^{\omega^2} k \theta \sin(a + c - f - p - t\omega) / 2 + e^{\omega^2} k n \cos(c + f + t\omega) / 4 + d^2 e^{\omega^2} m n \omega^2 \cos(c + f - \\
& t\omega) / 8 + e^{\omega^2} k n \cos(c - f - t\omega) / 4 + e^{\omega^2} \omega^2 \omega^4 \cos(f + t\omega) / 8 + b (e^{\omega^2} \omega / 2) \sin(f + t\omega)
\end{aligned}$$

Apêndice 5.E

Determinação dos blocos F_1 e F_2 para cálculo da resposta em frequência analítica

Neste apêndice apresentam-se as expressões para os blocos F_1 e F_2 para cálculo da resposta em frequência analítica do robot 2R com CH. As expressões seguintes foram também obtidas através de um programa de álgebra por computador. Devido a restrições desse programa só alguns nomes para variáveis são possíveis e, deste modo, as correspondências entre as variáveis empregues no texto e as de saída do programa são:

Programa	Texto	Programa	Texto
a	q_{10}	p	θ
c	q_{20}	m	M
w	ω	b	B
t	t	k	K
n	r_1	theta	x_{C0}
o	r_2		

F_1 :

$$o * (2 * (-2 * k + 2 * m * w^2)) * \cos(a + c - p + t * w) / 8 + b * o * w * \sin(a + c - p + t * w) / 2 + o * (2 * (-2 * k + 2 * m * w^2)) * \cos(a + c - p - t * w) / 8 - b * o * w * \sin(a + c - p - t * w) / 2 + n * (-4 * k + 4 * m * w^2) * \cos(a - p + t * w) / 8 + b * n * w * \sin(a - p + t * w) / 2 + n * (-4 * k + 4 * m * w^2) * \cos(a - p - t * w) / 8 - b * n * w * \sin(a - p - t * w) / 2$$

F_2 :

$$o * (-4 * k + 4 * m * w^2) * \cos(a + c - p + t * w) / 8 + b * o * w * \sin(a + c - p + t * w) / 2 + o * (-4 * k + 4 * m * w^2) * \cos(a + c - p - t * w) / 8 - b * o * w * \sin(a + c - p - t * w) / 2$$

6 Conclusão

O controlo de força de manipuladores robóticos tem vindo a ser alvo de uma intensa investigação conforme é patente pelo número de estudos efectuados nos últimos anos. Os primeiros algoritmos de controlo de força foram publicados nos fins dos anos 70 e desde então têm evoluído na sua complexidade e no seu desempenho.

Os controladores de força podem dividir-se em dois tipos distintos nos quais se procura obter:

- uma dada relação entre a posição e a força no ponto terminal do robot, como é o caso do controlo de impedância;
- um controlo da força e da posição do órgão terminal de um modo não conflituoso, como é o caso do controlo híbrido posição/força, que foi alvo de investigação neste trabalho.

Nesta ordem de ideias, no capítulo 2 com base nos conceitos introduzidos, apresentaram-se algumas considerações sobre a modelização dos atritos presentes em sistemas robóticos. Foi também estudado o efeito das folgas nas engrenagens de manipuladores, e o processo para a sua eventual “atenuação”, bem como os fenómenos dinâmicos correspondentes a eventuais flexibilidades.

No capítulo 3 estudaram-se os controladores de estrutura variável (CEVs) e expôs-se o método da Função Descritiva (FD) utilizado na previsão de ciclos limite em sistemas não lineares. Apresentaram-se os resultados para sistemas não lineares com um gdl em sistemas de controlo de posição. Com base neste estudo, generalizaram-se os conceitos a sistemas com um maior número de gdl.

No capítulo 4 apresentaram-se a descrição do sistema robot/ambiente e do controlador híbrido posição/força (CH) e a resposta temporal do sistema para vários controladores de posição e de força. Também estudou-se a resposta em frequência em malha fechada do sistema para vários parâmetros dos controladores e do sistema robot/ambiente e comparou-se o comportamento do sistema clássico com uma modificação através de uma matriz pseudo-inversa. Analisou-se a zona de estabilidade do sistema em função dos parâmetros da superfície restrição e calcularam-se as respostas do sistema com duas modelizações distintas da superfície restrição e quando se adopta um controlo por multifrequência. Estudaram-se as respostas para robots com atritos não lineares, com folgas e com flexibilidades nas juntas e considerou-se o fenómeno de impacto do robot com a superfície restrição. Em particular, analisou-se o comportamento do CH durante a ocorrência de impacto quando se varia a transição (*i.e.* do controlo de posição para o controlo de força) da estrutura do controlador em rampa e em degrau . Estudou-se de uma forma abreviada a adopção de controladores de ordem fraccionária nas malhas de posição e de força em alternativa aos sistemas de estrutura variável. Os sistemas com controladores de ordem fraccionária apresentaram um bom desempenho quando comparados com os CEVs, pois têm melhores respostas transitórias e melhor erro em regime permanente em quase todas as experiências.

Por último, no capítulo 5 desenvolveram-se algumas considerações sobre a utilização da FD no estudo da cinemática directa de robots, estudou-se a FD do sistema de CH e apresentou-se o trabalho de viabilidade da utilização do traçado de Nyquist multivariável para verificar a estabilidade do CH. Por outro lado, estudou-se a linearização do CH tendo como ponto de partida a FD do sistema. Também se apresentou a determinação analítica da resposta em frequência em malha fechada do CH tendo como base a linearização do sistema respectivo apresentado no capítulo 4 através da técnica de análise de sistemas não lineares da FD.

Como perspectivas para futuros desenvolvimentos podem referir-se pontos tais como:

- A utilização de outros controladores nos anéis de controlo no algoritmo híbrido;
- A integração de um maior número de sinais no algoritmo. Quando os actuadores são motores eléctricos, a corrente eléctrica (usualmente com ruído) é um sinal proporcional ao binário que pode ser utilizado na realimentação e no controlo de força;

- A generalização dos algoritmos estudados a robots cooperantes e a robots redundantes.

De facto, basta comparar o número de arquitecturas propostas para controlo de posição com as desenvolvidos para o controlo de força, para se constatar que ainda existe uma grande disparidade apesar de ter vindo a ser reduzida nos últimos anos. Os controladores de posição começaram a ser desenvolvidos há cerca de três décadas, enquanto os controladores de força só começaram a ser explorados mais recentemente. Assim, pode dizer-se que a extensão das arquitecturas de controlo para variáveis como as forças/binários é um passo na evolução para sistemas integrando múltipla informação sensorial. Por outro lado, verifica-se que o método de análise da FD está ainda pouco explorado e que a sua utilização tem vindo a ser restringida a sistemas de pequena complexidade.

Bibliografia

- Abbati-Marescotti, A., Bonivento, C. e Melchiorri, C., 1990, On the Invariance of the Hybrid Position/Force Control, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **3**, No. 3, pp. 233-250.
- Abou-El-Ela, A., 1995, Parameter Adaptive Force Control of Robot Manipulators in Compliant Motion, *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, pp. 3839-3844.
- Adams, J. e Payandeh, S., 1996, Methods for Low-Velocity Friction Compensation: Theory and Experimental Study, *Journal of Robotic Systems*, **13**, No. 6, pp. 391-404.
- Ailon, A. e Lozano, R., 1996, Controller-Observers for Set-point Tracking of Flexible-joint Robots Including Coriolis and Centripetal Effects in Motor Dynamics, *Automatica*, **32**, No. 9, pp. 1329-1331.
- Alexander, J. C. e Maddocks, J. H., 1993, Bounds on the Friction-Dominated Motion of a Pushed Object, *The International Journal of Robotics Research*, **12**, No. 3, pp. 231-248.
- Allan, P. M. e Levy, N. M., 1980, The Determination of Minimum Pre-Load Torque for Antibacklash Gears in a Positional Servomechanism, *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, **IECI-27**, No. 1, pp. 26-29.
- Allen, R. R. e Rozelle, D. M., 1980, A Describing Function for Dynamic Forces in Single Degree-of-Freedom Mechanisms, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**, No. 4, pp. 240-246.
- Amin, B. , 1993, *The Reliability of Describing Function Predictions for Systems with Friction*, Tese de Mestrado, University of Wisconsin – Milwaukee USA.
- Amin, B. e Armstrong-Hélouvry, B., 1993, *PID Control in the Presence of Static Friction – Part I: The Reliability of Describing Function Predictions* , University of Wisconsin – Milwaukee Technical Report EE-93-3.
- An, C. H. e Hollerbach, J. M., 1987a, Dynamic Stability Issues in Force Control of Manipulators, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 890-896.
- An, C. H. e Hollerbach, J. M., 1987b, Kinematic Stability Issues in Force Control of Manipulators, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 897-903.

- An, C. H., Atkeson, C. G. e Hollerbach, J. M., 1988, *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.
- An, C. H. e Hollerbach, J. M., 1989, The Role of Dynamic Models in Cartesian Force Control of Manipulators, *The International Journal of Robotics Research*, **8**, No. 4, pp. 51-72.
- Ang, Jr., M. H. e Andeen, G. B., 1995, Specifying and Achieving Passive Compliance Based on Manipulator Structure, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **11**, No. 4, pp. 504-515.
- Armstrong, B., 1988, Friction: Experimental Determination, Modeling and Compensation, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 1422-1427.
- Armstrong-Hélouvy, B., 1991, *Control of Machines with Friction*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Armstrong-Hélouvy, B. e Amin, B., 1993, *PID Control in the Presence of Static Friction – Part I: Algebraic Analysis*, University of Wisconsin – Milwaukee Technical Report EE-93-1.
- Armstrong-Hélouvy, B., Dupont, P. e de Wit, C. C., 1994, A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction, *Automatica*, **30**, No. 7, pp. 1083-1138.
- Armstrong, B. e Amin, B., 1996, PID Control in the Presence of Static Friction: A Comparison of Algebraic and Describing Function Analysis, *Automatica*, **32**, No. 5, pp. 679-692.
- Asada, H. e Slotine, J.-J. E., 1986, *Robot Analysis and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Atherton, D. P., 1975, *Nonlinear Control Engineering*, Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Azenha, A., 1994, *Controlo de Força de Manipuladores Robóticos*, Tese de Mestrado, FEUP, Porto.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1995a, Noções Fundamentais sobre Controlo de Força de Manipuladores Robóticos, *Robótica e Automatização*, No. 20, pp. 14-21.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1995b, Controlo Híbrido de Manipuladores Robóticos, *4th Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica*, Porto, Portugal, pp. 1523-1530.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996a, Controlo Híbrido Força/Posição de Robots, *Electricidade*, 40^o Ano, No. 329, pp. 11-14.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996b, Variable Structure Control of Robots with Nonlinear Friction and Backlash at the Joints, *1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, pp. 366-371.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996c, Control of Robots with Nonlinear Phenomena in the Joints, *8th Mediterranean Electrotechnical Conference, melecon'96*, Bari, Italy, pp. 1123-1126.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996d, Variable Structure Control of Systems with Nonlinear Friction and Dynamic Backlash, *IFAC 13th World Congress*, San Francisco, California, USA, vol. E, pp. 515-520.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996e, Control of Robots with Nonlinear Friction and Backlash in the Joints, *Conferência Controlo 96*, Porto, Portugal, pp. 237-242.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1996f, Limit Cycle Prediction of Robot Systems with Nonlinear Phenomena in the Joints, *27th International Symposium on Industrial Robots*, Milan, Italy, pp. 1003-1008.

- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1997a, Stability Analysis in Variable Structure Position/Force Hybrid Control of Manipulators, *IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems*, Bupapest, Hungary, pp. 327-332.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1997b, Dynamic Analysis in Variable Structure Position/Force Hybrid Control of Manipulators, *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, Orlando, Florida, USA, pp. 4309-4314.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1997c, Dynamic Performance of Variable Structure Hybrid Control of Manipulators, *XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Baurau, São Paulo, Brasil.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1998a, On the Describing Function Method and the Prediction of Limit Cycles in Nonlinear Dynamical Systems, *Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation*.
- Azenha, A. e Machado, J. A. T., 1998b, Dynamic Performance of Hybrid Robot Controllers Near Singularities, *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, La Jolla, San Diego, California, USA.
- Bayrleithner, R. e Komoriya, K., 1994, Stactic Friction Coefficient Determination by Force Sensing and Its Application, *IROS*, pp. 1639-1645.
- Bliman, P.-A. e Sorine, M., 1995, Easy-to-use Realistic Dry Friction Models for Automatic Control, *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, pp. 3788-3794.
- Blom, A. e de Jager, B., 1996, Experimental Robustness Study of a Second-Order Sliding Mode Controller, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **118**, No. 1, pp. 184-187.
- Bona, B. e Indri, M., 1995, Friction Compensation and Robustness Issues in Force/Position Controlled Manipulators, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, **142**, No. 6, pp. 569-574.
- Brady, M., Hollerbach, J. M., Johnson, T. L., Lozano-Perez, T. e Mason, M. T., 1982, *Robot Motion: Planning and Control*, The MIT Press, Cambridge-Massachusetts e London-England.
- Brandenburg, G., Unger, H. e Wagenpfeil, A., 1986, Stability Problems of a Speed-Controlled Drive in an Elastic System with Backlash and Corrective Measures by a Load Observer, *International Conference on Electrical Machines*, Munique – RFA, pp. 523-527.
- Breedveld, P., Diepenbroek, A. Y. e van Lunteren, T., 1997, Real-time Simulation of Friction in a Flexible Space Manipulator, *Proceedings of the 8th International Conference on Advanced Robotics*, Monterey, California, E.U.A., pp. 999-1006.
- Bridges, M. M., Cai, J., Dawson, D. M. e Grabbie, M. T., 1995, Experimental Results for a Robust Position and Force Controller Implemented on a Direct Drive Robot, *Robotica*, **13**, No. 1, pp. 11-18.
- Bridges, M. M. e Dawson, D. M., 1995, Redesign of Robust Controllers for Rigid-Link Flexible-Joint Robotic Manipulators Actuated with Harmonic Drive Gearing, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, **142**, No. 5, pp. 508-514.
- Brogliato, B., Ortega, R. e Lozano, R., 1995, Global Tracking Controllers for Flexible-joint Manipulators: A Comparative Study, *Automatica*, **31**, No. 7, pp. 941-956.
- Brogliato, B., 1996, *Nonsmooth Impact Mechanics*, Springer-Verlag, London.
- Bruyninckx, H. e De Schutter, J., 1996, Specification of Force-Controlled Actions in the “Task Frame Formalism” – A Synthesis, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **12**, No. 4, pp. 581-589.

- Cai, L. e Song, G., 1994, Joint Stick-Slip Friction Compensation of Robot Manipulators by Using Smooth Robust Controllers, *Journal of Robotic Systems*, **11**, No. 6, pp. 451-470.
- Chalhoub, N. G. e Zhang, X., 1996, Modeling and Control of Backlash in the Drive Mechanism of a Radially Rotating Compliant Beam, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **118**, No. 1, pp. 158-161.
- Chang, R. J. e Jiang, T. C., 1993, Dynamic Model and Response of Robot Manipulators With Joint Irregularities, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **115**, No. 1, pp. 70-77.
- Chapra, S. C. e Canale, R. P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Int. Editions, New York.
- Chern, T.-L. e Wong, J.-S., 1995, DSP Based Integral Variable Structure Control for DC Motor Servo Drivers, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, **142**, No. 5, pp. 444-450.
- Chernousko, F. L., Bolotnik, N. N. e Gradetsky, V. G., 1994, *Manipulation Robots-Dynamics, Control, and Optimization*, CRC Press, Florida, USA.
- Chiacchiarini, H. G., Desages, A. C., Romagnoli, J. A. e Palazoglu, A., 1995, Variable Structure Control with a Second-order Sliding Condition: Application to a Steam Generator, *Automatica*, **31**, No. 8, pp. 1157-1168.
- Choi, Y. S. e Noah, S. T., 1987, Nonlinear Steady-State Response of a Rotor-Support System, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **109**, No.2, pp. 255-261.
- Choi, Y. S. e Noah, S. T., 1988, Forced Periodic Vibration of Unsymmetric Piecewise-Linear Systems, *Journal of Sound and Vibration*, **121**, No. 1, pp. 117-126.
- Choi, Y. S. e Noah, S. T., 1989, Periodic Response of a Link Coupling With Clearance, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **111**, No. 2, pp. 253-259.
- Colbaugh, R. e Glass, K., 1995, Decentralized Adaptive Compliance Control of Robot Manipulators, *Robotica*, **13**, No. 5, pp. 485-498.
- Colgate, E. e Hogan, N., 1989, An Analysis of Contact Instability in Terms of Passive Physical Equivalents, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 404-409.
- Colgren, R. D. e Jonckheere, E. A., 1997, H_∞ Control of a Class of Nonlinear Systems Using Describing Functions and Simplicial Algorithms, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, No. 5, pp. 707-712.
- Conte, S. D. e de Boor, C., 1981, *Elementary Numerical Analysis – An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill Int. Editions, pp. 446-451.
- Cox, C. S., 1987, Algorithms for Limit Cycle Prediction: A Tutorial Paper (for undergraduates), *International Journal of Electrical Engineering Education*, **24**, No. 2, pp. 165-182.
- Dagalakis, N. G. e Myers, D. R., 1985, Adjustment of Robot Joint Gear Backlash Using the Robot Joint Test Excitation Technique, *The International Journal of Robotics Research*, **4**, No. 2, pp. 65-79.
- Dahl, P. R., 1968, A Solid Friction Model, *TOR-158(3107-18)*, *The Aerospace Corporation*, El Segundo, California, USA.
- Damaren, C. e Sharf, I., 1995, Simulation of Flexible-Link Manipulators With Inertial and Geometric Nonlinearities, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **117**, No. 1, pp. 74-87.

- Dawson, D. M., Bridges, M. M. e Qu, Z., 1995, *Nonlinear Control of Robotic Systems for Environmental Waste and Restoration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- de Carvalho, J. L. M., 1993, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice-Hall International, London.
- de Wit, C. C., Olsson, H., Åström, K. J. e Lischinsky, P., 1995, A New Model for Control of Systems with Friction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 3, pp. 419-425.
- de Wit, C. C. e Lischinsky, P., 1996, Adaptive Friction Compensation with Dynamic Friction Model, *IFAC 13th World Congress*, San Francisco, California, USA, vol. E, pp. 197-202.
- De Luca, A., 1995, Dynamic Feedback Linearization of Robots with Mixed Rigid/Elastic Joints, *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, pp. 1863-1869.
- De Luca, A. e Lanari, L., 1995, Robots with Elastic Joints are Linearizable via Dynamic Feedback, *Proceedings of the IEEE 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans; LA, USA, pp. 3895-3897.
- De Schutter, J., Torfs, D. e Bruyninckx, H., 1995, Combination of Robot Force Control with Active Damping of a Flexible End Effector, *International Conference on Recent Advances in Mechatronics*, Turquia, pp. 1006-1011.
- Denker, A. e Ohnishi, K., 1996, Robust Tracking Control of Mechatronic Arms, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, **1**, No. 2, pp. 181-188.
- DeSantis, R. M., 1996, Motion/Force Control of Robotic Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118**, No. 2, pp. 386-389.
- Doty, K. L., Melchiorri, C. e Bonivento, C., 1993, A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics, *The International Journal of Robotics Research*, **12**, No. 1, pp. 1-19.
- Dubowsky, S., Deck, J. F. e Costello, H., 1987, The Dynamic Modelling of Flexible Spatial Machine Systems With Clearance Connections, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **109**, No. 1, pp. 87-94.
- Dupont, P. E., 1992, The Effect of Coulomb Friction on the Existence and Uniqueness of the Forward Dynamics Problem, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1442-1447.
- Dupont, P. E., 1993, The Effect of Friction on the Forward Dynamics Problem, *The International Journal of Robotics Research*, **12**, No. 2, pp. 164-179.
- Dupont, P. E., 1994, Avoiding Stick-Slip Through PD Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, No. 5, pp. 1094-1097.
- Dupont, P. E. e Dunlap, E. P., 1995, Friction Modelling and PD Compensation at Very Low Velocities, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **117**, No. 1, pp. 8-14.
- El-Khazali, R. e DeCarlo, R., 1995, Output Feedback Variable Structure Control Design, *Automatica*, **31**, No. 6, pp. 805-816.
- Eppinger, S. D. e Seering, W. P., 1987, Understanding Bandwidth Limitations in Robot Force Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 904-909.
- Eppinger, S. D. e Seering, W. P., 1992, Three Dynamic Problems in Robot Force Control, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **8**, No. 6, pp. 751-758.
- Fisher, W. D. e Mujtaba, M. S., 1992a, Hybrid Position/Force Control: A Correct Formulation, *The International Journal of Robotics Research*, **11**, No. 4, pp. 299-311.

- Fisher, W. D. e Mujtaba, M. S., 1992b, Sufficient Stability Condition for Hybrid Position/Force Control, *Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation*, Nice, França, pp. 1336-1341.
- Fisher, W. D., Mujtaba, M. S. e Sinha, P., 1992c, A 2D Study of Hybrid Position/Force Control, *IROS'92*, Raleigh, USA, pp. 1980-1988.
- Freund, E. e Pesara, J., 1998, High-Bandwidth Force and Impedance Control for Industrial Robots, *Robotica*, **16**, No.1, pp. 75-87.
- Fu, K. S., Gonzalez, R. C. e Lee, C. S. G., 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York.
- Fukuda, T., Shoji, Y. e Inaba, M., 1990, Stable Position/Force Control of Robotic Manipulator with Consideration of Collision Phenomena, *11th IFAC World Congress*, Tallinn, Estonia-USSR, Vol. 9, pp. 262-267.
- Gao, W. e Hung, J. C., 1993, Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **40**, No. 1, pp. 45-55.
- Gao, W., Wang, Y. e Homaifa, A., 1995, Discrete-Time Variable Structure Control Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **42**, No. 2, pp. 117-122.
- Ge, S. S., 1996, Adaptive Controller Design for Flexible Joint Manipulators, *Automatica*, **32**, No. 2, pp. 273-278.
- Gentili, F. e Tornambè, A., 1996, Modelling and Controlling Multi Degree-of-Freedom Impacts, *27th International Symposium on Industrial Robots*, Milan, Italy, pp. 611-616.
- Glosser, G. D. e Newman, W. S., 1994, The Implementation of a Natural Admittance Controller on an Industrial Manipulator, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 1209-1215.
- Gogoussis, A. e Donath, M., 1988, Coulomb Friction Effects on the Dynamics of Bearings and Transmissions in Precision Robot Mechanisms, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 1440-1446.
- Gogoussis, A. e Donath, M., 1990, A Method for the Real Time Solution of the Forward Dynamics Problem for Robots Incorporating Friction, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, No. 4, pp. 630-639.
- Gomes, S. C. P. e Chrétien, J. P., 1992, Dynamic Modeling and Friction Compensated Control of a Robot Manipulator Joint, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1429-1435.
- Gorinevsky, D. M., Formalsky, A. M. e Schneider, A. Y., 1997, *Force Control of Robotics Systems*, CRC Press, Florida, USA.
- Grabbe, M. T., Carroll, J. J., Dawson, D. M. e Qu, Z., 1993, Review and Unification of Reduced-Order Force Control Methods, *Journal of Robotic Systems*, **10**, No. 4, pp. 481-504.
- Green, M. e Limebeer, D. J. N., 1995, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall Information And System Sciences Series, New Jersey, USA.
- Haessig, Jr., D. A. e Friedland, B., 1991, On the Modeling and Simulation of Friction, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **113**, No 3, pp. 354-362.
- Hairer, E., 1978, A Runge-Kutta Method of Order 10, *Journal of Inst. Maths Applies*, **21**, pp. 47-59.
- Harada, T., Nishida, Y., Imamura, N. e Kimura, N., 1992, Robust Implementations of Impedance Control Using Impedance Error Feedback, *IROS'92*, Raleigh, USA, pp. 1998- 2004.

- Heinrichs, B., Sepehri, N. e Thornton-Trump, A. B., 1996, Position-Based Impedance Control of an Industrial Hydraulic Manipulator, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, pp. 284-290.
- Heinrichs, B., Sepehri, N. e Thornton-Trump, A. B., 1997, Position-Based Impedance Control of an Industrial Hydraulic Manipulator, *IEEE Control Systems Magazine*, **17**, No. 1, pp. 46-52.
- Held, V. e Maron, C., 1988, Estimation of Friction Characteristics, Inertial and Coupling Coefficients in Robotic Joints Based on Current and Speed Measurements, *IFAC SYROCO*, Karlsruhe, Alemanha, pp. 86.1-86.6.
- Ho, Y. K., Wang, D. e Soh, Y. C., 1995, Robust Control of a Manipulator Performing Constrained Motion with Uncertainties in the Constraint Functions, *Journal of Robotic Systems*, **12**, No. 11, pp. 747-755.
- Hogan, N., 1985, Impedance Control: An Approach to Manipulation, Parts I-Theory, II-Implementation and III-Applications, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **107**, No. 1, pp. 1-24.
- Hu, X., 1994, On Control of Servo Systems Affected by Friction Forces, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, USA, pp. 472-473.
- Hung, J. Y., Gao, W. e Hung, J. C., 1993, Variable Structure Control: A Survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **40**, No. 1, pp. 2-22.
- Iordanou, H. N. e Surgenor B. W., 1997, Experimental Evaluation of the Robustness of Discrete Sliding Mode Control Versus Linear Quadratic Control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **5**, No. 2, pp. 254-260.
- Isermann, R., 1995, Information Processing for Mechatronic Systems, *International Conference on Recent Advances in Mechatronics*, Turquia, pp. 3-17.
- Janabi-Sharifi, F., Wilson, W. J. e Wang, D., 1994, On the Contact Behaviour of Manipulators Colliding with Viscoelastic Environments, *IASTED International Journal of Robotics & Automation*, **9**, No. 3, pp. 116-129.
- Jankovic, M., 1995, Observer Based Control for Elastic Joint Robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **11**, No. 4, pp. 618-623.
- Jankowski, K. P. e ElMaraghy, H. A., 1992, Dynamic Decoupling for Hybrid Control of Rigid-/Flexible -Joint Robots Interacting with the Environment, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **8**, No. 5, pp. 519-534.
- Jankowski, K. P. e ElMaraghy, H. A., 1996, Constraint Formulation for Invariant Hybrid Position/Force Control of Robots, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118**, No. 2, pp. 290-299.
- Karnopp, D., 1985, Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **107**, No.1, pp. 100-103.
- Kelly, R., 1995, A Tuning Procedure for Stable PID Control of Robot Manipulators, *Robotica*, **13**, No. 2, pp. 141-148.
- Khatib, O., 1987, A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No. 1, pp. 43-53.
- Kim, J.-O., Gertz, M. W. e Khosla, P. K., 1994, Exploiting Redundancy to Reduce Impact Force, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **9**, No. 3, pp. 273-290.
- Kircanski, N. M. e Goldenberg, A. A., 1997, An Experimental Study of Nonlinear Stiffness, Hysteresis, and Friction Effects in Robot Joints with Harmonic Drives and Torque Sensors, *The International Journal of Robotics Research*, **16**, No. 2, pp. 214-239.

- Koivo, A. J., 1989, *Fundamentals for Control of Robotic Manipulators*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Korondi, P., Hashimoto, H. e Young, K.-K. D., 1995, Sliding Mode Based Feedback Compensation for Motion Control, *International Conference on Recent Advances in Mechatronics*, Turquia, pp. 863-868.
- Kulakov, F. M., 1995, Stability Conditions for Force Control of Elastic Robots, *Proceedings of the 7th International Conference on Advanced Robotics*, Catalonia, Spain, pp. 977-983.
- Kuntze, H.-B. e Jacobasch, A. H. K., 1985, Control Algorithms for Stiffening an Elastic Industrial Robot, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-1**, No. 2, pp. 71-78.
- Kwan, C. M., 1995, Hybrid Force/Position Control for Manipulators with Motor Dynamics Using a Sliding-Adaptive Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 5, pp. 963-968.
- Lewis, F. L., Abdallah, C. T. e Dawson, D. M., 1993, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan Publishing Company, New York, USA.
- Li, C.-J. e Sankar, T. S., 1993, Fast Computational Schemes for the Inertia Matrix of Robot Manipulators, *IASTED International Journal of Robotics and Automation*, **8**, No. 1, pp. 22-29.
- Lian, K.-Y., Jean, J.-H. e Fu, L.-C., 1991, Adaptive Force Control of Single-Link Mechanism with Joint Flexibility, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **7**, No. 4, pp. 540-545.
- Lim, S. Y., Hu, J., Dawson, D. M. e Queiroz, M., 1995, A Partial State Feedback Controller for Trajectory Tracking of Rigid -Link Flexible-Joint Robots Using an Observed Backstepping Approach, *Journal of Robotic Systems*, **12**, No. 11, pp. 727-746.
- Lin, Z. C., Patel, R. V. e Balafoutis, C. A., 1995, Impact Reduction for Redundant Manipulators Using Augmented Impedance Control, *Journal of Robotic Systems*, **12**, No. 5, pp. 301-313.
- Liu, G. e Goldenberg, A. A., 1994, Robust Hybrid Impedance Control of Robot Manipulators Via a Tracking Control Method, *Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Germany, pp. 1594-1601.
- Liu, J.-S., 1994, Joint Stick-Slip Friction Compensation for Robotic Manipulators by Iterative Learning, *IROS*, pp. 502-509.
- Liu, Y.-H. e Arimoto, S., 1996, Implicit and Explicit Force Controllers for Rheo-Holonomically Constrained Manipulators and Their Extensions to Distributed Cooperation Control, *13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, vol. A, pp. 1-6.
- Loria, A. e Ortega, R., 1996, Force/Position Regulation for Robot Manipulators with Unmeasurable Velocities and Uncertain Gravity, *Automatica*, **32**, No. 6, pp. 939-943.
- Lu, Z., Kawamura, S. e Goldenberg, A. A., 1995, An Approach to Sliding Mode-Based Impedance Control, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **11**, No. 5, pp. 754-759.
- Luh, J. Y. S., Fisher, W. D. e Paul, R. P. C., 1983, Joint Torque Control by a Direct Feedback for Industrial Robots, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**, No. 2, pp. 153-161.
- Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1988, A Smooth Variable Structure Control Algorithm for Robot Manipulators, *IEE International Conference on CONTROL*, Oxford, UK.

- Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1989, Engineering Design of a Multirate Nonlinear Controller for Robot Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **6**, No. 1, pp. 1-17.
- Machado, J. A. T., 1993, Variable Structure Control of Manipulators with Compliant Joints, *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Budapeste, Hungria, pp. 554-559.
- Machado, J. A. T., de Carvalho, J. L. M. e Galhano, A. M. S. F., 1993, Analysis of Robot Dynamics and Compensation Using Classical and Computed Torque Techniques, *IEEE Transactions on Education*, **36**, No. 4, pp. 372-379.
- Machado, J. A. T., 1995a, Controlo de Estrutura Variável de Manipuladores com Folgas e Flexibilidade nos Eixos, *4^{as} Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica*, Porto, Portugal, pp. 1531-1538.
- Machado, J. A. T., 1995b, Variable Structure Control of Manipulators with Joints Having Flexibility and Backlash, *Proceedings of the 7th International Conference on Advanced Robotics*, Catalonia, Spain, pp. 953-959.
- Machado, J. A. T., 1995c, Theory of Fractional Integrals and Derivatives: Application to Motion Control, *Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Mechatronics*, Istanbul, Turkey, pp. 1086-1091.
- Machado, J. A. T. e Galhano, A. M. S. F., 1995, Benchmarking Computer Systems for Robot Control, *IEEE Transactions on Education*, **38**, No. 3, pp. 205-210.
- Machado, J. A. T. e Azenha, A., 1997, Variable Structure Position/Force Hybrid Control of Manipulators, *4th IFAC Workshop on Algorithms and Architectures for Real-Time Control*, Vilamoura, Algarve, Portugal, pp. 347-352.
- Machado, J. A. T. e Azenha, A., 1998a, Position/Force Fractional Control of Mechanical Manipulators, *5th International Workshop on Advanced Motion Control*, Coimbra, Portugal.
- Machado, J. A. T. e Azenha, A., 1998b, Fractional-Order Hybrid Control of Robot Manipulators, *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, La Jolla, San Diego, California, USA.
- Marhefka, D. W. e Orin, D. E., 1996, Simulation of Contact Using a Nonlinear Damping Model, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, pp. 1662-1668.
- Maron, J. C., 1989, Identification and Adaptive Control of Mechanical Systems with Friction, *IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Glasgow – UK, pp. 221-226.
- Marques, S. J. C., Baptista, L. F. e da Costa, J. M. G. S., 1997, Hybrid Impedance Control of Robot Manipulators with Neural Networks Compensation, *4th IFAC Workshop on Algorithms and Architectures for Real-Time Control*, Vilamoura, Algarve, Portugal, pp. 382-387.
- Mason, M. T., 1981, Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-11**, No. 1, pp. 418-432.
- Miller, K. S. e Ross, B., 1993, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons.
- Mills, J. K. e Nguyen, C. V., 1992, Robotic Manipulator Collisions: Modeling and Simulation, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **114**, No. 4, pp. 650-659.

- Moeini, A. e Atherton, D. P., 1997, Exact Determination of the Limit Cycles in Relay Control Systems with Additional Nonlinearities in the Feedback Loops, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, **144**, No. 3, pp. 269-275.
- Morel, G. e Dubowsky, S., 1996, The Precise Control of Manipulators with Joint Friction: A Base Force/Torque Sensor Method, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, pp. 360-365.
- Nakamura, S., 1991, *Applied Numerical Methods with Software*, Prentice-Hall Int. Editions, N. J., USA.
- Naniwa, T. e Arimoto, S., 1995, Learning Control for Robot Tasks under Geometric Endpoint Constraints, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **11**, No. 3, pp. 432-441.
- Nassirharand, A. e Taylor, J. H., 1991, Frequency-Domain Modeling of Nonlinear Multivariable Systems, *Control – Theory and Advanced Technology*, **7**, No. 1, pp. 201-214.
- Newman, W. S., Glosser, G. D., Miller, J. H. e Rohn, D., 1992, The Detrimental Effect of Friction on Space Microgravity Robotics, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1436-1441.
- Newman, W. S. e Zhang, Y., 1994, Stable Interaction Control and Coulomb Friction Compensation Using Natural Admittance Control, *Journal of Robotics Systems*, **11**, No. 1, pp. 3-11.
- Nicosia, S. e Tomei, P., 1995a, A Tracking Controller for Flexible Joint Robots Using Only Link Position Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 5, pp. 885-890.
- Nicosia, S. e Tomei, P., 1995b, A Global Output Feedback Controller for Flexible Joint Robots, *Automatica*, **31**, No. 10, pp. 1465-1469.
- Nordin, M. e Bodin, P., 1995, A Backlash Gap Estimation Method, *Proceedings of the 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, pp. 3486-3491.
- Ochier, J. A., Mladenova, C. D. e Muller, P. C., 1995, An Approach to Automatic Generation of Dynamic Equations of Elastic Joint Manipulators in Symbolic Language, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **14**, No. 2, pp. 199-218.
- Ogata, K., 1970, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- Ohnishi, K., 1995, Industry Applications of Disturbance Observer, *International Conference on Recent Advances in Mechatronics*, Turquia, pp. 72-77.
- Oldham, K. B. e Spanier, J., 1974, *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press.
- Pagilla, P. R. e Tomizuka, M., 1995, Control of Mechanical Systems Subject to Unilateral Constraints, *Proceedings of the IEEE 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans; LA, USA, pp. 4311-4316.
- Pan, M.-C., Verbeure, B., Van Brussel H. e Sas, P., 1994, Detection and Quantification of the Link-Joint Backlash of a Robot – Time-Frequency Signal Representation and Feature Extraction, *Proceedings of the ISMA19 Tools for Noise and Vibration Analysis Conference*, Leuven, Bélgica, pp. 407-421.
- Paoletti, F., Landi, A. e Innocenti, M., 1996, A CAD Tool for Limit Cycle Prediction in Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Education*, **39**, No. 4, pp. 505-511.
- Paromtchik, I. E., Damm, M. e Matioukhina, L. I., 1994, A Variable Structure Force Controller for Robotic Manipulators, *Proceedings of the Fourth IFAC Symposium on Robot Control*, Capri, Italy, pp. 481-486.

- Patra, K. C. e Singh, Y. P., 1996, Graphical method of prediction of limit cycle for multivariable nonlinear systems, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, **143**, No. 5, pp. 423-428.
- Pelletier, M. e Doyon, M., 1994, On the Implementation and Performance of Impedance Control on Position Controlled Robots, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, USA, pp. 1228-1233.
- Pelletier, M., 1996, Synthesis of Hybrid Impedance Control Strategies for Robot Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118**, No. 3, pp.566-571.
- Pierrot, F., Jean, M. e Dauchez, P., 1994, Nonsmooth Mechanics Approach For Robots Simulations, *Preprints of the Fourth IFAC Symposium on Robot Control*, Capri, Itália, pp. 577-582.
- Pires, J. N. e da Costa, J. M. G. S., 1996, Controle de Posição e Força de Robôs Manipuladores no Espaço Operacional, *Robótica e Automatização*, No. 24/25, pp. 18-25.
- Popovic, M. R. e Goldenberg, A. A., 1997, Friction Diagnostics and Modeling Using DFT Analysis, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, USA, pp. 1669-1674.
- Popovic, M. R. e Goldenberg, A. A., 1998, Modeling of Friction Using Spectral Analysis, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **14**, No. 1, pp. 114-122.
- Rabinowicz, E., 1965, *Friction and Wear of Materials*, John Wiley and Sons, New York, USA.
- Radcliffe, C. J. e Southward, S. C., 1990, A Property of Stick-Slip Friction Models which Promotes Limit Cycle Generation, *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, CA, USA, pp. 1198-1203.
- Raibert, M. H. e Craig, J. J., 1981, Hybrid Position/Force Control of Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**, No. 2, pp. 126-133.
- Readman, M. C., 1994, *Flexible Joint Robots*, CRC Press, New York, USA.
- Rocco, P., Ferretti, G. e Magnani, G., 1996, Implicit Force Control for Industrial Robots in Contact with Stiff Surfaces, *IFAC 13th World Congress*, San Francisco, California, USA, vol. A, pp. 355-360.
- Sabanovic, A., Jezernik, K. e Kaynak, O. M., 1994, Chattering Free Sliding Modes in Robotic Manipulators Control, *International Journal of Intelligent Mechatronics: Design and Production*, **1**, No.1, pp. 25-45.
- Sabanovic, A., Jezernik, K. e Kenzo, W., 1996, Chattering-free Sliding Modes in Robotic Manipulators Control, *Robotica*, **14**, No.1, pp. 17-29.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. e Marichev, O. I., 1993, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers.
- Samson, C., Le Borgne, M. e Espiau, B., 1990, *Robot Control – The Task Function Approach*, Oxford Science Publications, UK.
- Schilling, R. J., 1990, *Fundamentals of Robotics – Analysis and Control*, Prentice-Hall International, Inc., NJ, USA.
- Schimmels, J. M. e Huang, S., 1996, A Passive Mechanism that Improves Robotic Positioning Through Compliance and Constraint, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **12**, No. 1, pp. 65-71.
- Seraji, H., Lim, D. e Steele, R., 1996, Experiments in Contact Control, *Journal of Robotic Systems*, **13**, No. 2, pp. 53-73.

- Shoji, Y., Inaba, M., Fukuda, T. e Hosokai, H., 1990, Stable Contact Force Control of a Link Manipulator with Collision Phenomena, *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pp. 501-507.
- Shoji, Y., Inaba, M. e Fukuda, T., 1991a, Impact Control of Grasping, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **38**, No. 3, pp. 187-194.
- Shoji, Y., Inaba, M., Fukuda, T. e Hosokai, H., 1991b, Stable Control of Multi-link Manipulator Using Collision Phenomena, *Journal of Robotics and Mechatronics*, **3**, No. 6, pp. 482-490.
- Shoji, Y., Inaba, M. e Fukuda, T., 1992a, Impact/Contact Control of a Robotic Manipulator, *Computers Elect. Engng.*, **18**, No. 1, pp. 99-108.
- Shoji, Y., Inaba, M. e Fukuda, T., 1992b, Stable Positioning Control of 3-dimensional Multi-link Manipulator for Contact Tasks, *IROS'92*, Raleigh, USA, pp. 983-989.
- Shoji, Y., Inaba, M., Fukuda, T. e Hosokai, H., 1993a, Stable Control of Robotic Manipulator with Collision Phenomena, *JSME International Journal*, Series C, **36**, No. 2, pp. 226-232.
- Shoji, Y., Inaba, M. e Fukuda, T., 1993b, Stable Force Control of 1 Degree-of-freedom Manipulator in Contact Tasks, *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Yokohama, Japan, pp. 1511-1515.
- Shoji, Y., Inaba, M. e Fukuda, T., 1993c, Stable Control of 1 Degree-of-freedom Linear Manipulator Based on Force Sensor in Contact Tasks, *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Electronics*, pp. 1425-1429.
- Siciliano, B. e Villani, L., 1996a, A Passivity-based Approach to Force Regulation and Motion Control of Robot Manipulators, *Automatica*, **32**, No. 3, pp. 443-447.
- Siciliano, B. e Villani, L., 1996b, A Force/Position Regulator for Robot Manipulators Without Velocity Measurements, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, pp. 2567-2572.
- Song, G. e Cai, L., 1996, A New Approach to Robust Position/Force Control of Flexible-Joint Robot Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **13**, No. 7, pp. 429-444.
- Southward, S. C., Radcliffe, C. J. e MacCluer, C. R., 1991, Robust Nonlinear Stick-Slip Friction Compensation, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **113**, No. 4, pp. 639-645.
- Specht, R. e Isermann, R., 1988, On-Line Identification of Inertia, Friction and Gravitational Forces Applied to an Industrial Robot, *IFAC SYROCO*, Karlsruhe, Alemanha, pp. 88.1-88.6.
- Spong, M. W. e Vidyasagar, M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Spong, M. W., 1995, The Swing Up Control Problem for the Acrobot, *IEEE Control Systems*, **15**, No. 1, pp. 49-55.
- Stadler, W., 1995, *Analytical Robotics and Mechatronics*, McGraw-Hill Int. Editions, New York, USA.
- Stepanenko, Y. e Sankar, T. S., 1986, Vibro-Impact Analysis of Control Systems With Mechanical Clearance and Its Application to Robotic Actuators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **108**, No. 1, pp. 9-16.
- Su, C.-Y., Stepanenko, Y. e Leung, T.-P., 1995, Combined Adaptive and Variable Structure Control for Constrained Robots, *Automatica*, **31**, No. 3, pp. 483-488.
- Suzuki, T., Yamada, K. e Okuma, S., 1992, A Fine Contact Motion of Manipulators based on Learning Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, França, pp. 1461-1466.

- Synnestvedt, R. G., 1996, An Effective Method for Modeling Stiction in Multibody Dynamic Systems, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118**, No. 1, pp. 172-178.
- Tachi, S., Sakaki, T., Arai, H., Nishizawa, S. e Pelaez-Polo, J. F., 1991, Impedance Control of a Direct-Drive Manipulator Without Using Force Sensors, *Advanced Robotics*, **5**, No. 2, pp. 183-205.
- Taghirad, H. D. e Bélanger, P. R., 1997, Robust Torque Control of Harmonic Drive Under Constrained-Motion, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, USA, pp. 248-253.
- Tang, J. e Walker, G., 1995, Variable Structure Control of a Pneumatic Actuator, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **117**, No. 1, pp. 88-92.
- Tang, Y., 1998, Terminal Sliding Mode Control for Rigid Robots, *Automatica*, **34**, No.1, pp. 51-56.
- Tao, G. e Kokotovic, P. V., 1993, Adaptive Control of Systems with Backlash, *Automatica*, **29**, No. 2, pp. 323-335.
- Tao, G. e Kokotovic, P. V., 1995a, Adaptive Control of Plants with Unknown Hystereses, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 2, pp. 200-212.
- Tao, G. e Kokotovic, P. V., 1995b, Adaptive Control of Systems with Unknown Output Backlash, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 2, pp. 326-330.
- Tao, G. e Kokotovic, P. V., 1995c, Continuous-Time Adaptive Control of Systems with Unknown Backlash, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, No. 6, pp. 1083-1087.
- Tarn, T.-J., Wu, Y., Xi, N. e Isidori, A., 1996, Force Regulation and Contact Transition Control, *IEEE Control Systems Magazine*, **16**, No. 1, pp.32-40.
- Tian, L. e Goldenberg, A. A., 1995, Motion and Force Control of Flexible Joint Robots in Constrained Motion, *Proceedings of the 7th International Conference on Advanced Robotics*, Catalonia, Spain, pp. 969-976.
- Tomei, P., 1990, An Observer for Flexible Joint Robots, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**, No. 6, pp. 739-743.
- Tomei, P., 1991, A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, No. 10, pp. 1208-1213.
- Tomei, P., 1994, Tracking Control of Flexible Joint Robots with Uncertain Parameters and Disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, No. 5, pp. 1067-1072.
- Tornambè, A., 1995, Modelling and Controlling Two Bodies Before, After and During the Period of a One-Degree-of-Freedom Impact, *Proceedings of the 7th International Conference on Advanced Robotics*, Catalonia, Spain, pp. 327-332.
- Truxal, J. G., 1955, *Automatic Feedback Control Systems Synthesis*, McGraw-Hill Int. Student Edition, New York.
- Tu, J. F. e Stein, J. L., 1995, On-Line Preload Monitoring for Anti-Friction Spindle Beatings of High-Speed Machine Tools, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **117**, No. 1, pp. 43-53.
- Tuttle, T. D. e Seering, W. P., 1996, A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **12**, No. 3, pp. 368-374.
- Utkin, V. I., 1977, Variable Structure Systems With Sliding Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**, pp. 212-222.
- Utkin, V. I., 1993, Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **40**, No. 1, pp. 23-36.

- Venkataraman, S. T. e Gulati, S., 1993, Terminal Slider Control of Robot Systems, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **7**, No. 1, pp. 31-55.
- Volpe, R. e Khosla, P., 1993, A Theoretical and Experimental Investigation of Explicit Force Control Strategies for Manipulators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**, No. 11, pp. 1634-1650.
- Volpe, R. e Khosla, P., 1994, Computational Considerations in the Implementation of Force Control Strategies, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **9**, Nos. 1&2, pp. 121-148.
- Volpe, R. e Khosla, P., 1995, The Equivalence of Second-Order Impedance Control and Proportional Gain Explicit Force Control, *The International Journal of Robotics Research*, **14**, No. 6, pp. 574-589.
- Vukobratovic, M. e Tuneski, A., 1994, Contact Control Concepts in Manipulation Robotics – An Overview, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **41**, No. 1, pp. 12-24.
- Vukobratovic, M. K. e Rodic, A. D., 1995, Control of Manipulation Robots Interacting with Dynamic Environment: Implementation and Experiments, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **42**, No. 4, pp. 358-366.
- Vukobratovic, M. K. e Ekalo, Y., 1996, New Approach to Control of Robotic Manipulators Interacting with Dynamic Environment, *Robotica*, **14**, No. 1, pp. 31-39.
- Walcott, B. L. e Zak, S. H., 1987, Laboratory Investigations in Microprocessor-Based Variable Structure Control, *IEEE Transactions on Education*, **E-30**, No. 4, pp. 227-243.
- Walker, M. W. e Orin, D. E., 1982, Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **104**, No. 3, pp. 205-211.
- Walrath, C. D., 1984, Adaptive Bearing Friction Compensation Based on Recent Knowledge of Dynamic Friction, *Automatica*, **20**, No. 6, pp. 717-727.
- Whitney, D. E., 1987, Historical Perspective and State of the Art in Robot Force Control, *The International Journal of Robotics Research*, **6**, No. 1, pp. 3-14.
- Williams, D. e Khatib, O., 1996, Wrist Force Sensor Feedback for Improved Actuation Performance in Conventional Arms, *13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, vol. A, pp. 19-24.
- Xu, Y., Hollerbach, J. M. e Ma, D., 1995, A Nonlinear PD Controller for Force and Contact Transient Control, *IEEE Control Systems*, **15**, No. 1, pp. 15-21.
- Yoshikawa, T., 1990, *Foundations of Robotics – Analysis and Control*, The MIT Press, Cambridge-Massachusetts, London-England.
- Youcef-Toumi, K. e Gutz, D., 1989, Impact and Force Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 410-416.
- Youcef-Toumi, K. e Gutz, D. A., 1994, Impact and Force Control: Modelling and Experiments, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **116**, No. 1, pp. 89-98.
- Young, K.-K. D., 1978, Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-8**, No. 2, pp. 101-109.
- Zeng, G. e Hemami, A., 1997, An Overview of Robot Force Control, *Robotica*, **15**, No. 5, pp. 473-482.
- Zhang, H. e Paul, R. P., 1985, Hybrid Control of Robot Manipulators, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 602-607.

- Zhang, H., 1989, Kinematic Stability of Robot Manipulators under Force Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, pp. 80-85.
- Zhao, F. e Utkin, V. I., 1996, Adaptive Simulation and Control of Variable-structure Control Systems in Sliding Regimes, *Automatica*, **32**, No. 7, pp. 1037-1042.
- Zhen, R. R. Y. e Goldenberg, A. A., 1996, Variable Structure Hybrid Control of Manipulators in Unconstrained and Constrained Motion, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118**, No. 2, pp. 327-332.
- Zheng, Y. F. e Fan, Y., 1991, Robot Force Sensor Interacting with Environments, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **7**, No. 1, pp. 156-164.