

Modelação do atraso dos veículos em cruzamentos semaforizados

Maria Lurdes Simões, *lurdes.simoes@fe.up.pt*

CONSTRUCT e Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Paula Milheiro Oliveira, *poliv@fe.up.pt*

CMUP e Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 Introdução

O controlo de tráfego usa semáforos para, alternadamente, atribuir passagem aos movimentos incompatíveis. As suas principais vantagens residem em permitir estabelecer movimentos ordenados de tráfego, aumentar a capacidade do cruzamento, reduzir a frequência de certos tipos de colisões.

Quando se trata de tráfego rodoviário, nomeadamente de tráfego em cruzamentos, semaforizados ou não, estamos sem sombra de dúvida perante um fenómeno revestido de incerteza. A incerteza nos movimentos dos veículos, a incerteza nos espaçamentos de tempo entre as suas chegadas a um dado ponto da corrente de tráfego, a incerteza nos atrasos que os veículos vão sofrer no seu movimento até de facto abandonarem as correntes de tráfego ou os cruzamentos, são alguns dos aspectos que fazem com que um problema que envolva o tráfego rodoviário deva ser formalizado e tratado no contexto dos processos estocásticos, nomeadamente à luz da teoria de filas de espera.

Historicamente, os semáforos operavam inicialmente apenas com ciclo pré-definido, no qual era dado sinal verde para os movimentos de acordo com um plano de tempos fixado pelo engenheiro de tráfego ou por um técnico. Este plano era desenvolvido com base num historial de volumes de tráfego e tendo em atenção que a duração do ciclo deveria ser tal que, por um lado permitisse escoar a totalidade da procura e que, por outro lado, produzisse o atraso médio por veículo mais baixo. De modo a atribuir mais eficientemente o tempo de verde disponível num cruzamento semaforizado, os semáforos actuados vieram, mais tarde, substituir os semáforos regulados com tempos fixos.

As medidas de desempenho fundamentais em concepção e controlo de cruzamentos semaforizados são o comprimento das filas de espera e os tempos de espera ou atrasos [1]. Estas medidas não avaliam apenas o nível de serviço que é oferecido aos condutores, mas permitem também estimar o consumo de combustível, o ruído produzido e a poluição do ar. Uma importante contribuição é devida a [2], visto como um artigo fundamental sobre as questões da regulação de semáforos, onde se apresenta a simulação do fluxo de tráfego rodoviário numa via na aproximação ao cruzamento semaforizado. Webster [2] ajusta uma curva aos resultados da simulação, a qual descreve o atraso médio por veículo devido ao semáforo. A expressão que descreve esta curva tem-se mostrado fundamental para a regulação de semáforos com ciclo fixo. Havendo qualquer tipo de actuação do semáforo, o estudo das medidas de desempenho e dos processos de chegadas de veículos conduzem a métodos e fórmulas matemáticas mais complexas do que no controlo de ciclo fixo, podendo mesmo acontecer que o problema de modelação do atraso não admita uma solução analítica.

2 Tipos de regulação semafórica

Existem várias formas de controlo semaforizado, que se podem classificar essencialmente em controlo fixo e controlo actuado. Em semáforos com controlo fixo, a sequência de sinais apresentada é pré-

determinada e tem um ciclo de duração fixa, assim como o tempo atribuído a cada sinal. Em controlo actuado, a aproximação dos veículos ao cruzamento é detectada por sensores existentes na via, normalmente colocados próximo da linha de paragem, e a duração do período de sinal verde é ajustada à procura de tráfego. Mais especificamente, podemos considerar que existem de facto três formas de controlo semaforizado, como se descreve a seguir:

Tempos fixos: Em controlo pré-definido ou com ciclo fixo, todos os parâmetros de sinal operacionais estão definidos no controlador, o qual repetidamente executa os tempos fixados. Pode existir um único plano, que será executado continuamente durante todo o dia, ou vários planos que serão executados em diferentes períodos do dia, dependendo do fluxo de tráfego. Estes planos são estabelecidos com base em dados históricos e na experiência do engenheiro de tráfego.

Semi-actuado: Em controlo semi-actuado, a via secundária (com menor volume de tráfego) recebe sinal verde apenas quando é detectada a presença de tráfego. Um sistema de detecção determina quando é que existem veículos na via secundária que se aproximam do cruzamento, o que permite a abertura do sinal verde. Sempre que o intervalo de tempo entre a activação de veículos for superior ao valor da extensão do tempo de verde ou o tempo máximo de serviço expire, o sinal verde passa a ser executado na via principal (com maior volume de tráfego).

Totalmente actuado: Em controlo totalmente actuado, todas as fases são controladas através do uso de detecção. O conjunto de parâmetros de controlo deve incluir um tempo de verde mínimo e um tempo de verde máximo para cada fase. Esta forma de controlo é mais eficiente do que as outras formas, nos casos em que a procura de tráfego varia com o tempo. Para além disso, uma fase pode ser saltada se, num determinado ciclo, não houver a procura respectiva.

Um bom plano de controlo actuado, que responda apropriadamente à procura de tráfego, pode reduzir significativamente o atraso e o consumo de combustível. Isso motivou o estudo da influência das características das chegadas e das partidas de tráfego aos cruzamentos semaforizados com controlo actuado e a pesquisa dirigida para a optimização dos parâmetros da regulação, da localização do detector e da relação entre eles. Ora, os valores a atribuir a estes parâmetros derivam de considerações sobre o comportamento do condutor, as características do veículo e a segurança. De entre os vários parâmetros de controlo fundamentais que podem alterar a operação de um semáforo actuado destacam-se o tempo de verde mínimo, o tempo de verde máximo e a extensão do período de verde.

Os principais factores de controlo que governam a eficiência duma operação semi-actuada dizem respeito ao plano de regulação dos semáforos e à configuração do sensor (detector) e a dificuldade de aplicação do controlo semi-actuado ou totalmente actuado está em seleccionar uma combinação óptima destas operações. A estimação do atraso ao longo das redes semaforizadas é importante como base para um critério a usar na selecção de uma estratégia óptima de controlo de tráfego, de modo a responder às variações dos volumes e condições de tráfego.

3 Conceito e modelação de atraso

Uma das mais importantes consequências resultantes da instalação de semáforos é o atraso e as paragens sofridas pelos veículos, o que justifica a frequente utilização do atraso na definição de critérios de optimização.

3.1 Conceito de atraso

O atraso total de um veículo, d (seg), corresponde à diferença entre o tempo efectivo que ele demora a atravessar o cruzamento e o tempo que demoraria se mantivesse sempre a mesma velocidade (velo-

cidade de cruzeiro), ou seja, em condições ideais, na ausência tanto de incidentes como de controlo de tráfego e sem interação com veículos a circular na via. Portanto, o atraso sofrido pelo condutor deve-se, principalmente, a factores relacionados com o controlo, mas também à presença de outros veículos e aos eventuais acidentes.

As variáveis independentes que intervêm na definição do atraso podem agrupar-se em 3 conjuntos, englobando parâmetros relativos:

- a) às chegadas: débito de chegadas, q (veíc/seg);
- b) às partidas: débito de saturação, s (veíc/seg);
- c) ao sinal luminoso: duração do ciclo, C (seg); tempo útil de verde, g (seg); tempo de amarelo, A (seg); tempo de limpeza, r (seg).

O grau de saturação, $x_{sat} = \frac{qC}{s.g}$, é um parâmetro que representa o quociente entre o número médio de veículos que chegam durante um ciclo e o número máximo de veículos que podem passar durante esse período. Este conceito corresponde, na terminologia da teoria das filas de espera, ao conceito de intensidade de tráfego (ou índice de congestionamento) que relaciona, para um certo intervalo de tempo, o número de chegadas de clientes com a capacidade de atendimento do servidor. Para que todos os clientes que chegam ao sistema possam ser atendidos é necessário que a intensidade de tráfego (grau de saturação) seja inferior à unidade. Note-se que, devido ao carácter aleatório das chegadas, mesmo que o grau de saturação (x_{sat}) seja inferior à unidade, existem ciclos saturados (ciclos em que o tempo de verde não é suficiente para escoar todos os veículos), em que a fila de espera não chega a anular-se no fim do tempo de passagem dos veículos. Valores sustentáveis de x_{sat} vão de zero (onde a taxa de fluxo é nula) até 1 (onde a taxa de fluxo é igual à designada capacidade), exclusivé.

A capacidade, $Q = \frac{s.g}{C}$ (veíc/seg), é o número máximo de veículos que podem passar, por unidade de tempo, na linha de paragem, atendendo às condições existentes relativas ao tráfego, à geometria da via e à regulação do semáforo.

O valor do atraso sofrido pelos veículos num cruzamento semaforizado é uma função de vários parâmetros, incluindo a distribuição de chegadas de veículos ao cruzamento. O efeito do tipo de distribuição para as chegadas é mínimo para graus de saturação baixos, mas torna-se significativo quando o fluxo de chegadas se aproxima da capacidade. Neste caso, o atraso real é muito maior do que o atraso previsto para uma situação de chegadas igualmente espaçadas, por causa dos efeitos aleatórios de grandes volumes de tráfego.

3.2 Modelos analíticos do atraso dos condutores

De acordo com estudos comparativos, para controlo de tempos fixos, um modelo de atraso baseado simplesmente em intervalos regulares entre chegadas fornece resultados aceitáveis sempre que o débito de chegadas seja inferior a cerca de 50% da capacidade do sistema. Por outro lado, admitindo que as chegadas dos veículos têm carácter aleatório, a análise do modo como se processa o escoamento dos veículos poderia ser também feita a partir de modelos baseados na teoria de filas de espera. No entanto, na fila do tipo $M/D/1$, considera-se irrealisticamente que, durante o ciclo, as partidas se efectuem a intervalos constantes e iguais a $\frac{C}{s.g}$ (considerado o tempo médio de atendimento), o que conduz a admitir partidas durante o período de vermelho, resultando assim em atrasos inferiores aos verdadeiros. Note-se também que, se não houver chegadas não há partidas. Perante isto, surgiu a necessidade de estudos nesta área que levariam a outros modelos para o atraso dos veículos.

A expressão mais corrente para o cálculo do atraso é sugerida em [2]. Trata-se da seguinte expressão semi-empírica, obtida por simulação em computador:

$$d = \frac{C(1 - \frac{g}{C})^2}{2(1 - x_{sat} \frac{g}{C})} + \frac{x_{sat}^2}{2q(1 - x_{sat})} - 0,65 \sqrt[3]{\frac{C}{q^2} x_{sat}^{(2+5 \frac{g}{C})}} \quad (1)$$

e é habitualmente denominada *Fórmula de Webster*. A sua obtenção pressupõe que os veículos chegam segundo uma lei de *Poisson*.

Como é do conhecimento geral, o controlo de semáforos actuados tem muito mais parâmetros para os engenheiros fixarem do que o controlo de tempos fixos. Lin [3] refere que a crescente sofisticação na lógica do controlo oferece mais flexibilidade na regulação de semáforos, mas também torna a avaliação do seu desempenho mais difícil. O principal problema é que os atrasos não podem ser facilmente relacionados com os parâmetros de controlo (tempo mínimo e máximo de verde, extensão do tempo de verde ou localização do sensor) em semáforos actuados.

O *Highway Capacity Manual* (HCM) [4] propõe uma metodologia denominada Modelo Generalizado de Atraso (GDM¹), que considera o facto de, em controlo actuado, a duração do ciclo ser aleatória, contrariamente ao controlo com tempos fixos. Neste modelo intervêm a duração média do ciclo, a duração média do tempo de verde e dois coeficientes de sensibilidade, reflectindo as condições de tráfego e o tipo de controlo semaforico. É notório que, em semáforos actuados, a eficiência do modelo de estimação do atraso dependerá da qualidade das estimativas dos tempos do semáforo. Em 2010, o HCM [4] propunha um método para estimar o comprimento médio do ciclo e o intervalo médio de verde para cada tipo de regulação de semáforos, que apresentava sérios defeitos. Uma fraqueza crítica desse método, segundo Lin [5], consiste em não estabelecer o impacto da regulação dos semáforos e da configuração do detector, pois assume que o comprimento médio do ciclo é apenas função do volume de tráfego associado, tanto com a fase actuada como com a fase não actuada.

Resumindo, os técnicos de tráfego usam habitualmente a *Fórmula de Webster* para estimar o atraso médio sofrido pelos veículos em cruzamentos semaforizados regulados com tempos fixos, o que se revela adequado para graus de saturação inferiores a 70%. Para o caso de controlo actuado, o modelo GDM, apresenta a grande desvantagem de necessitar de estimativas de vários parâmetros que só poderão ser obtidas através de medições em campo ou por simulação.

4 Modelação da fila de espera em cruzamentos semaforizados

4.1 Algumas considerações

Admitindo que as chegadas dos veículos têm carácter aleatório, a análise do modo como se processa o escoamento dos veículos pode ser também feita a partir de modelos baseados na teoria de filas de espera. No entanto, na fila do tipo *M/D/1*, como já tivemos ocasião de referir, considera-se irrealisticamente que, durante o ciclo, as partidas se efectuam a intervalos constantes e iguais a $\frac{C}{s.g}$ (considerado o tempo médio de atendimento), o que conduz a admitir partidas durante o período de vermelho, resultando assim em atrasos inferiores aos verdadeiros. Neste trabalho estamos interessados em mostrar como é que os modelos das filas de espera com pausas do servidor podem ser usados para tratar problemas de tráfego urbano, nomeadamente no que se refere à espera em cruzamentos semaforizados.

Heidemann [1] propõe um modelo analítico em que considera pausas do servidor, mas ainda em condições restritivas em termos da regulação do semáforo. As suas condições de partida são que o processo de chegadas seja um processo de *Poisson*, o cruzamento seja regulado com ciclo fixo, o intervalo entre as partidas dos veículos seja constante. As funções geradoras de probabilidade para o comprimento

¹em inglês *Generalized Delay Model*

da fila e o atraso do veículo foram deduzidas por investigação das cadeias de *Markov* associadas. Esta técnica permitiu confirmar que a correlação existente no processo de chegada dos veículos não deve ser ignorada, pois conduz a estimativas deficientes das medidas de desempenho, especialmente em grandes intensidades de tráfego. A caracterização via processos de chegadas de *Markov* é combinada com método analítico-matricial descrito em [6], conduzindo ao estudo do comprimento da fila de espera em semáforos com ciclo fixo, mas não ainda nos semáforos com ciclo variável, como é o caso dos semáforos semi-actuados, devido à sua complexidade.

Começaremos portanto por apresentar as cadeias de *Markov* do tipo $M/G/1$ e a sua utilização no contexto do tráfego semaforizado regulado por ciclos de comprimento fixo, passando posteriormente ao tratamento das situações de regulação semi-actuada.

Em termos de teoria de espera, cruzamentos regulados por tempos fixos, podem ser vistos como sistemas de espera em que o servidor (semáforo) é desactivado (sinal vermelho) por períodos fixos de tempo. Assim, este sistema pode ser analisado com uma fila do tipo $M/G/1$ em que ocorre desactivação cíclica do servidor.

Mostramos aqui como é que a teoria de filas de espera com pausas do servidor pode ser explorada de forma a estabelecer um algoritmo de cálculo do atraso médio por veículo no contexto do controlo de tempos fixos. E comparamos os resultados com as fórmulas existente na literatura anteriormente referidas.

4.2 Formulação da cadeia de Markov para controlo fixo

Um cruzamento semaforizado regulado com ciclo fixo, em que tanto o período de verde como o período de vermelho são fixados, é um sistema de espera em que cada veículo, quando chega ao cruzamento, tem de esperar, se existirem veículos à sua frente e chegar durante o período de verde, ou se chegar ao cruzamento durante o período de vermelho. Suponhamos que o período de tempo de verde e o período de tempo de vermelho têm duração $M.T_a$ e $N.T_a$, respectivamente. A constante T_a representa a quantidade de tempo necessária para que um veículo atravesse o cruzamento. Na terminologia dos sistemas de espera, estamos perante um sistema que consiste num servidor (semáforo) que está activo em períodos de duração $M.T_a$ e inactivo por períodos de duração $N.T_a$, sendo o tempo de atendimento igual a T_a segundos, e que apresenta as seguintes especificações:

- Os veículos chegam ao cruzamento de acordo com um processo de *Poisson* de taxa λ ;
- O servidor está apto a servir um grupo de quando muito r (número de vias) veículos em cada período de serviço (período de verde);
- O tempo de atendimento, para cada grupo, é constante e igual a T_a segundos;
- O serviço só começa e termina nos instantes de tempo $0, T_a, 2T_a, \dots, nT_a, \dots$;
- O ciclo do semáforo consiste num intervalo de verde, de duração $M.T_a$ segundos, seguido de um intervalo de vermelho de duração $N.T_a$ segundos.

Considerar que o tempo de atendimento é constante é pouco realista na aplicação a sistemas de espera de tráfego, em cruzamentos semaforizados, uma vez que apenas os veículos que estão parados em fila de espera, quando o semáforo abre, dependem algum tempo no arranque, o mesmo não se passando com os veículos que não param (porque o sinal está verde e a fila já foi esvaziada), pois passam a linha de paragem à velocidade desejada.

Tomando como referência uma via de acesso ao cruzamento, designemos por $\{L(t), \xi(t)\}$, com $t \geq 0$, um sistema de estados ao longo do instante t , onde $L(t)$ é o comprimento da fila no instante t e $\xi(t)$ o

número de intervalos de duração T_a decorridos até ao instante t , desde a última abertura do sinal verde. O espaço de estados de $L(t)$ é \mathbb{N} e o de $\xi(t)$ é $\{0, 1, 2, \dots, M+N\}$. O processo $\{\xi(t)\}$ é também referido como o estado do sinal do sistema. Define-se também, no instante t , o sistema $\{X, T_a\} = \{X_n, t_n; n \in \mathbb{N}\}$, onde $X_n = \{L(t_n), \xi(t_n)\}$ e $t_n = nT_a$. O processo $\{L(t), \xi(t)\}$, com $t \geq 0$, é um processo semi-regenerativo e o processo markoviano de renascimento associado é $\{X, T_a\}$ [9].

A matriz de probabilidades de transição de X_n é uma matriz por blocos, cuja estrutura algo particular fica definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \cdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde A_k e B_k , com $k \geq 0$, são matrizes $(M+N) \times (M+N)$.

Neste caso, B_k e A_k podem ser definidas por:

$$(B_k)_{ij} = \begin{cases} a_k, & i = 1, 2, \dots, M+N-1, j = i+1 \\ a_k, & i = M+N, j = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

e

$$(A_k)_{ij} = \begin{cases} a_k, & i = 1, 2, \dots, M-1, j = i+1 \\ a_{k-1}, & i = M, M+1, \dots, M+N-1, j = i+1 \\ a_k, & i = M+N, j = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (4)$$

com $a_k = e^{-\lambda T_a} \frac{(\lambda T_a)^k}{k!}$, for $k = 0, 1, 2, \dots$. Define-se a matriz estocástica $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$, e o vector de probabilidade invariante, π , a ela associado, definido por $\pi A = \pi$ e $\pi \mathbb{1} = 1$ com $\mathbb{1} = [1, 1, \dots]^T$. O vector π é único e de componentes positivas, desde que a matriz A seja irredutível. De facto, os elementos de π que resultam da aplicação da teoria das cadeias de *Markov* do tipo $M/G/1$ aos cruzamentos semaforizados regulados por ciclo fixo, são todos iguais entre si e iguais a $1/(M+N)$, no pressuposto das chegadas serem *Poissonianas*.

Definindo o vector $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} i A_i \mathbb{1}$ e $\rho = \pi \beta$, a condição necessária e suficiente para a ergodicidade da cadeia X_n é $M - (M+N)\lambda T_a > 0$, onde λT_a representa o número médio de chegadas de *Poisson* num intervalo de tempo de duração T_a . E assim, fica garantido que $\rho \leq 1$, isto é, $\frac{\lambda T_a(M+N) + N}{M+N} \leq 1$.

Na análise das filas de espera, um passo fundamental no manuseamento de cadeias de *Markov* deste tipo é o cálculo da matriz estocástica G que é solução não negativa minimal² da equação matricial não linear (ver detalhes em [7]) $G = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i G^i$, onde G é uma matriz $m \times m$, tornando-se essencial para a determinação do vector de probabilidade invariante associado a Q , $u = [u^0, u^1, \dots]^T$. Uma vez calculada a matriz G , podemos obter os vectores u^k , com $k \geq 1$, através da Fórmula Recursiva de *Ramaswami* [8]:

$$u^k = \left[u^0 \bar{B}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \pi^j \bar{A}_{i+1-j} \right] (I - \bar{A}_1)^{-1}, \quad k \geq 1, \quad (5)$$

²A equação $G = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i G^i$ tem pelo menos uma solução, G , no conjunto das matrizes não negativas tal que $G \mathbb{1} \leq \mathbb{1}$. A matriz G é a solução não negativa tal que $\|G \mathbb{1} - \mathbb{1}\|$ é mínima.

onde

$$\bar{A}_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i G^{i-n} \quad e \quad \bar{B}_n = \sum_{i=n}^{+\infty} B_i G^{i-n}, \quad n \geq 0 \quad (6)$$

e u^0 é solução do sistema

$$\begin{cases} u^0 = u^0 K \\ u^0 \kappa = 1 \end{cases}, \quad (7)$$

$$K = \sum_{h=0}^{+\infty} B_h G^h, \quad (8)$$

$$\kappa = \mathbb{1} + \sum_{i=0}^{+\infty} B_i \sum_{k=0}^{i-1} G^k \mu, \quad (9)$$

$$\mu = \left[I - \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \sum_{k=0}^{i-1} G^k \right]^{-1} \mathbb{1}. \quad (10)$$

A matriz G pode ser obtida através do seguinte processo recursivo:

$$G = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n, \quad (11)$$

$$G_1 = (I - A_1)^{-1} A_0, \quad (12)$$

$$G_{n+1} = \left(I - \sum_{i=1}^{+\infty} A_i G_n^{i-1} \right)^{-1} A_0, \quad n > 1. \quad (13)$$

A sucessão de matrizes assim definida é monótona não decrescente e converge para G . A matriz inversa necessária ao cálculo de G_{n+1} , com $n \geq 0$, existe sempre que $G_n \leq G$.

Uma vez implementados os algoritmos para o cálculo da matriz G e do vector u , torna-se possível estudar as propriedades probabilísticas da cadeia de *Markov* do tipo $M/G/1$, nomeadamente o tempo de permanência no sistema, o tempo de espera e o comprimento da fila. Para que a utilização desta teoria no contexto do tráfego em cruzamentos semaforizados se torne clara, expomos de seguida a forma de se chegar a um modelo analítico do tráfego em cruzamentos regulados por ciclo fixo, em particular, e o procedimento a seguir para o estudo de características como o comprimento da fila de espera e o tempo de espera.

4.3 Algoritmo para cálculo do atraso dos veículos

De [9], o comprimento médio da fila, $E[L]$, é dado por

$$E[L] = \frac{\lambda T_a}{2} + \sum_{i=1}^{M+N} \sum_{k=0}^{+\infty} k u_i^k \quad (14)$$

e o tempo médio no sistema, $E[W]$, é simplesmente obtido por aplicação da fórmula de *Little*,

$$E[W] = E[L]/\lambda. \quad (15)$$

O algoritmo a seguir mostra explicitamente como implementar os cálculos para obter o comprimento médio da fila e o tempo médio de espera num cruzamento regulado por tempos fixos:

1. De acordo com a precisão fixada:

- para $k \geq 0$, calcular as matrizes não nulas B_k (3) até que $B_k = O$ (matriz nula); fixar índice k da última matriz não nula B_k, n_B ;
- para $k \geq 0$, calcular as matrizes não nulas A_k (4) até que $A_k = O$ (matriz nula); fixar índice k da última matriz não nula A_k, n_A ;
- fixar $n_{max} = \max(n_A, n_B)$;

2. Calcular a matriz G usando as expressões (11) – (13);
3. Calcular os vectores μ, κ e a matriz K usando as expressões (8) – (10);
4. Resolver o sistema (7);
5. Para $n = n_A, n_A - 1, \dots, 1$ calcular \bar{A}_n e para $n = n_B, n_B - 1, \dots, 1$ calcular \bar{B}_n , usando (6);
6. Para $k = 1, 2, \dots, n_{max}$ calcular os vectores u^k (de dimensão $M + N$) usando a expressão (5);
7. Calcular $E[L]$ usando a expressão (14) e $E[W]$ usando a expressão (15).

Este algoritmo será aplicado a seguir para calcular os tempos médios de espera no caso de um cruzamento regulados com tempos fixos. Consideramos um cruzamento com duas fases e o seguinte plano de tempos: $g = 30s$ and $C = 60s$.

O tempo médio de espera (atraso médio) estimado pelo modelo apresentado (referido como modelo de Markov) é apresentado na Figura 4.3 em conjunto com os resultados obtidos por aplicação da fórmula de Webster (1) and the HCM model [4].

O valor $T_a = 2s$ é usado como sendo o mais comum em engenharia de tráfego. Os atrasos por veículo apresentados correspondem apenas a uma das vias do cruzamento.

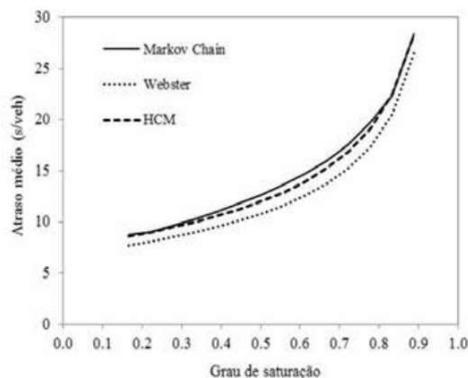


Figura 1: Comparação do atraso estimado pelo modelo de Markov, pela fórmula de Webster e pelo modelo do HCM.

Os resultados sugerem que o modelo de Markov oferece boas estimativas para o atraso médio dos condutores pelas expressões (14) – (15). As estimativas obtidas pela fórmula de Webster são normalmente inferiores às obtidas pelo modelo de HCM, assim como pelo modelo de Markov.

5 Comentários gerais e tópicos de investigação futura

Um algoritmo para calcular o atraso médio dos veículos em cruzamentos regulados por controlo fixo foi desenvolvido aplicando a teoria de filas com pausas do servidor. O modelo estocástico de filas espera com pausas do servidor reflete adequadamente os períodos de sinal vermelho que ocorrem ciclicamente neste tipo de controlo semafórico. A expressão que apresentamos neste trabalho fornece estimativas realistas do atraso médio de um veículo, de acordo com o modelo apresentado no HCM [4].

Este tipo de modelação está a ser estendido para aplicação em cruzamentos regulados com controlo semi-actuado (investigação em curso).

Referências

- [1] Heidemann, D. 1994. Queue length and delay distributions at traffic signals. *Transportation Res. B* **28**(5) 377–389.
- [2] Webster, F. V. 1958. *Traffic Signal Settings*, Road Research Laboratory, Road Research Laboratory 39, HMSO, London.
- [3] Lin, F.-B. and Mazdeyasna, F. 1983. Delay models of traffic-actuated signal controls. *Transportation Research Record* **905** 33–39.
- [4] Transportation Research Board (TRB). 2010. *Highway capacity manual* (TRB, National Research Council, Washington D.C.).
- [5] Lin, F.-B. 1990. Estimating Average cycle lengths and green intervals of semiactuated signal operations for level-of-service analysis. *Transportation Research Record* **1287** 119–128.
- [6] Neuts, M.F. 1989. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. Marcel Dekker Inc., New York.
- [7] Latouche, G. 1994. Newton's iteration for non-linear equations in Markov chains. In *IMA Journal of Numerical Analysis* **14** 583–598.
- [8] Ramaswami, V. 1988. A stable recursion for the steady state vector in Markov chains of M/G/1 type. In *Communications Statistics—Stochastic Models* **4**(1) 183–188.
- [9] Hu, X.N., Tang, L.C. and Ong, H.L. 1997. A $M/D^X/1$ vacation queue model for signalized intersection. In *Computers Industrial Engineering* **33**(3–4) 801–804.

