# Resumindo e concluindo...

TeleTextos de bolso e de trazer por casa, suavemente, suavemente

## Yes, we QAM

**e não custa nada**

**© Sílvio A. Abrantes**
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto
Porto, Portugal
sam@fe.up.pt

**Janeiro de 2009**

## Conteúdo



## 1. Introdução

Neste TeleTexto vão ser apresentadas as principais características de QAM, uma modulação digital híbrida, de amplitude e fase, de constelação habitualmente quadrada ou rectangular. Veremos, entre outros assuntos, como gerar e desmodular um sinal de QAM e como quantificar o desempenho da transmissão.

## 2. Formas de onda, constelações e energias médias

Nas modulações digitais ASK, PSK e FSK a amplitude, a fase ou a frequência, respectivamente, de uma portadora sinusoidal variam de acordo com a sequência moduladora discreta. Pelo contrário, em QAM só a frequência não varia. A sua constelação possui *M* pontos de coordenadas $\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} \end{bmatrix}^T$ associados a grupos de *k* bits, em que $M = 2^k$, e é quadrada se *M* for um quadrado perfeito[1], como 16 ou 64. A forma de onda genérica é expressa por

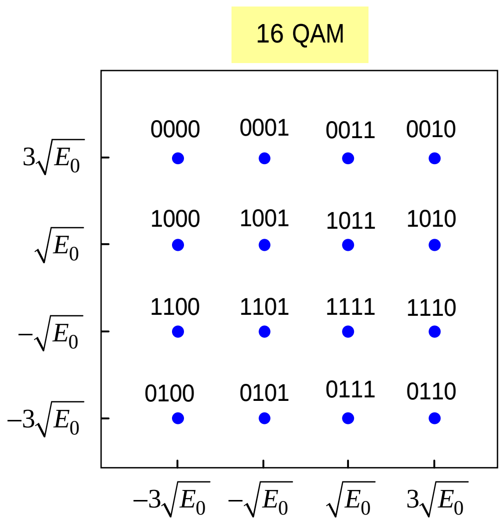
[1] Dito de outro modo: se *k* for par a constelação é quadrada, se for ímpar é em cruz.

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i \cos 2\pi f_c t + \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i \operatorname{sen} 2\pi f_c t = \\ &= \underbrace{a_i \sqrt{E_0}}_{s_{i1}} \psi_1(t) + \underbrace{b_i \sqrt{E_0}}_{s_{i2}} \psi_2(t) \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T \qquad (1)$$

em que *T* é o tempo de símbolo, $E_0$ é metade da energia do ponto da constelação mais próximo da origem dos eixos, $f_c$ é a frequência da portadora e $a_i$ e $b_i$ têm valores independentes $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(\sqrt{M}-1)$. As funções-base $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ do espaço de sinal bidimensional são sinusóides de duração *T*, frequência $f_c$ e energia unitária:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ \psi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen} 2\pi f_c t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T$$

De acordo com a Eq. (1) os pontos de uma constelação quadrada têm coordenadas $\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} a_i\sqrt{E_0} \\ b_i\sqrt{E_0} \end{bmatrix}$, como na constelação 16-QAM seguinte. Note-se nesta que ao passarmos de um ponto para outro ao lado as palavras binárias só diferem em um bit. A uma atribuição de bits a pontos assim feita chama-se *mapeamento de Gray*.




Com cinco bits/símbolo a constelação tem 32 pontos e não é quadrada mas sim *em* cruz. Depois, com seis bits/símbolo, vem a constelação quadrada de 64 pontos. Ambas são apresentadas na Fig. 1 com distância mínimas iguais: nitidamente a energia média em 64-QAM é maior.

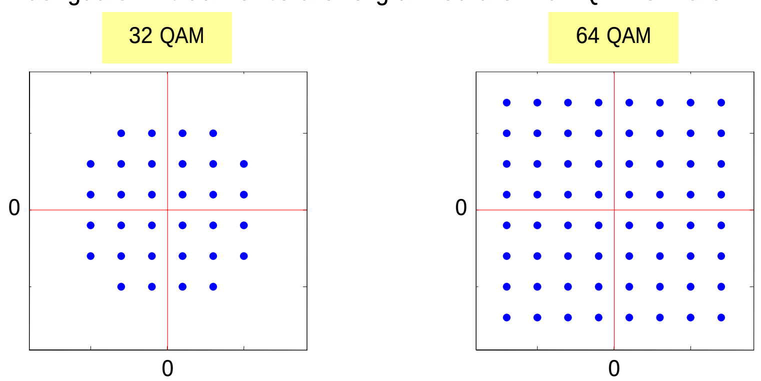



Fig. 1 Constelações de 32-QAM e 64-QAM.

A distância mínima entre pontos adjacentes é $d_{\min} = 2\sqrt{E_0}$ e a energia média, em função de $E_0$ ou de $d_{\min}$, de constelações quadradas com símbolos equiprováveis é igual a

$$\langle E\rangle = \frac{4}{M}\left[2\frac{\sqrt{M}}{2}\sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2}(2i-1)^2 E_0\right] = \frac{2(M-1)E_0}{3} \tag{2}$$

$$\langle E\rangle = \frac{M-1}{6}d_{\min}^2 \tag{3}$$

Na Eq. (2) a expressão dentro do parêntesis recto representa a energia total de um quadrante.

Em $\sqrt{M}$-PAM (constelação unidimensional de $\sqrt{M}$ pontos igualmente espaçados de $d_{\min}$) a energia média é igual a $\frac{2E_0}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2}(2i-1)^2 = \frac{(M-1)E_0}{3}$, metade da energia média de *M*-QAM.

A tabela seguinte mostra como a relação $\langle E\rangle/E_0$ em QAM quadrada aumenta com o número de pontos *M*.

| *M* | $\langle E\rangle/E_0$ |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 16 | 10 |
| 64 | 42 |
| 256 | 170 |
| 1024 | 682 |

Em 16-QAM temos $16 = 2^4$ pontos e 4 bits por símbolo, em 64-QAM temos $2^6 = 2^{4+2}$ pontos e 6 bits por símbolo (e em 256-QAM são 8 bits/símbolo, é claro); quer dizer, de uma constelação quadrada ($2^k$ pontos) para a seguinte ($2^{k+2}$ pontos) são usados mais 2 bits/símbolo e o número de pontos quadruplica.

De uma constelação quadrada para a seguinte de quanto aumenta a energia média se a distância mínima for a mesma? Aumenta cerca de 6 dB (pois o número de pontos quadruplicou e 4 corresponde a 6 dB):

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \frac{M-1}{6}d_{\min}^2\\ \langle E\rangle_{\text{seguinte}} &= \frac{4M-1}{6}d_{\min}^2\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \frac{\langle E\rangle_{\text{seguinte}}}{\langle E\rangle} = \frac{4M-1}{M-1} \approx \frac{4M}{M} = 4 \qquad (\text{ou } 10\log_{10}4 = 6\text{ dB})$$

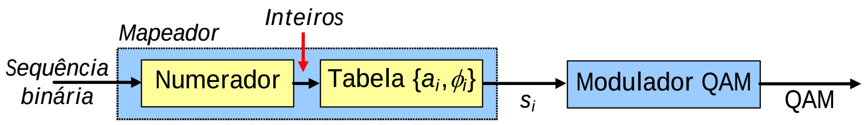
Digamos que são precisos mais 6dB por cada 2 bits/símbolo adicionais se a distância entre símbolos se mantiver.

**Exemplo 1:**
**Comparação das energias médias de 16-QAM e 4-PAM com igual distância mínima**

Em 16-QAM com $d_{\min} = 2\sqrt{E_0}$ a energia média vale $\langle E\rangle = \frac{2(M-1)E_0}{3} = \frac{2\times 15}{3}E_0 = 10E_0$. Em 4-PAM e mesma distância mínima a constelação tem quatro pontos situados em $\pm\sqrt{E_0}$ e $\pm 3\sqrt{E_0}$, os dois primeiros com energia $E_0$ e os outros dois com energia $9E_0$. A energia média dos quatro vale $\langle E'\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}E_i = \frac{2E_0 + 2\times 9E_0}{4} = 5E_0$. Confirma-se assim que a energia média de 4-PAM é metade da energia média de 16-QAM.

## 3. Como modular e desmodular um sinal QAM

A figura seguinte apresenta um diagrama de blocos muito genérico de um modulador QAM constituído por um mapeador e um modulador propriamente dito. No mapeador o numerador numera os grupos de $k$ bits que lhe chegam (de 1 a $M$, por exemplo) e a tabela atribui a cada número uma amplitude $a_i$ e uma fase $\phi_i$ ou, em alternativa, as coordenadas de um ponto $\mathbf{s}_i$ da constelação. O bloco "Modulador" transfere o sinal modulador, que está em banda-base, para a banda de canal centrada na frequência da portadora.




O diagrama de blocos da Fig. 2 é uma pormenorização possível deste gerador de QAM. O conversor série-paralelo (S/P) secciona a sequência binária em grupos de $k$ bits e reparte cada grupo em dois iguais, que entrega aos conversores $2 \to \sqrt{M}$ dos ramos em fase e em quadratura. Por exemplo, em 64-QAM cada grupo de $k = 6$ bits à entrada é dividido em dois de três bits cada, que se fazem corresponder a um de $\sqrt{M} = 8$ valores discretos nos conversores.

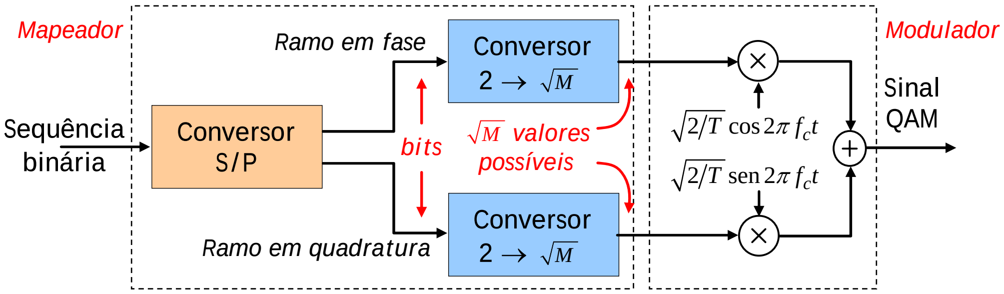



Fig. 2 Modulador de QAM quadrada.

No correspondente desmodulador coerente, apresentado na Fig. 3, cada ramo está relacionado com um dos dois eixos do espaço de sinal. Assim, o decisor do ramo em fase produz a estimativa da abcissa do ponto enviado, enquanto que o do ramo em quadratura produz a estimativa da ordenada, e por desmapeamento do ponto da constelação assim estimado obtém-se o grupo de $k$ bits que se pensa ter sido enviado. Voltando ao exemplo de 64-QAM, a abcissa do ponto recebido é comparada no decisor em fase com $\sqrt{M} - 1 = 7$ limiares de decisão e a ordenada é comparada no decisor em quadratura com 7 limiares também. Cada decisor entrega ao conversor paralelo-série (P/S) um grupo de três bits, depois concatenados num grupo de $k = 6$.

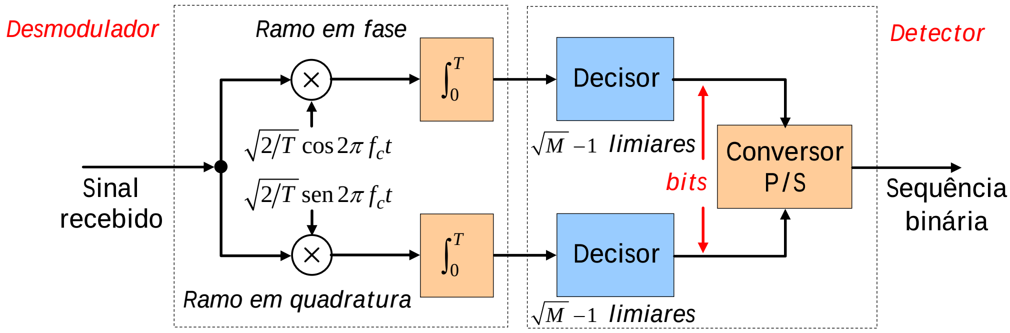



Fig. 3 Desmodulador de QAM quadrada.

## 4. Probabilidades de erro em constelações quadradas

Por causa do ruído e outras interferências os decisores por vezes enganam-se ao tomar decisões. Qual é a probabilidade dos símbolos da sequência discreta serem incorrectamente escolhidos e qual é a probabilidade, decorrente da escolha anterior, dos bits da sequência binária estimada estarem errados? À primeira chamamos *probabilidade de símbolo errado*, $P_e$, e à segunda *probabilidade de bit errado*, $P_b$.

## 4.1. Probabilidade de símbolo errado

Vamos supor que o ruído é gaussiano com variância $\sigma^2 = N_0/2$ à entrada dos decisores. Um ponto é correctamente escolhido se a abcissa e a ordenada forem ambas bem estimadas. Basta, porém, que uma das estimativas esteja errada para que o símbolo esteja errado. A probabilidade da abcissa ou da ordenada estarem erradas é calculada como em PAM de $\sqrt{M}$ níveis. Se estes estiverem espaçados de $d_{\min} = 2\sqrt{E_0}$ a probabilidade de erro vale, como se sabe,

$$P_{e_{PAM}} = 2\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$$

onde a função $Q(x)$ representa a área por baixo da cauda, à direita de *x*, da função densidade de probabilidade gaussiana normalizada. Mas se $P_{e_{PAM}}$ é a probabilidade de erro então a probabilidade de decisão correcta segundo cada eixo é $1-P_{e_{PAM}}$. Como as componentes em fase e em quadratura são independentes a probabilidade global de detecção correcta em QAM pode então ser escrita como o produto das probabilidades (iguais) de detecção correcta segundo cada eixo:

$$P_c = (1-P_{e_{PAM}})^2$$

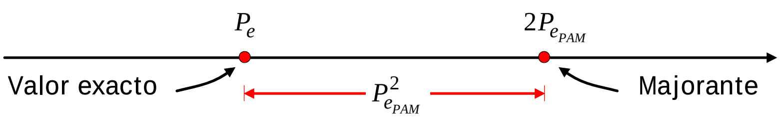
A probabilidade de símbolo errado vem dada exactamente por

$$P_e = 1-P_c = 1-(1-P_{e_{PAM}})^2 = 2P_{e_{PAM}} - P_{e_{PAM}}^2$$

ou

$$P_e = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) - 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right).$$

Vemos que $P_e < 2P_{e_{PAM}}$, o que indica (veja-se a figura seguinte) que $P_e$ será sempre inferior a $2P_{e_{PAM}}$ e tanto mais próximo deste quanto menor for $P_{e_{PAM}}^2$ (ou $P_{e_{PAM}}$).




Se $P_{e_{PAM}} << 1$, ou melhor ainda, se $E_0/N_0 >> 1$ (ou até $\langle E\rangle/N_0 >> 1$), o majorante $2P_{e_{PAM}}$ fica tão próximo do valor exacto $P_e$ que o podemos mesmo tomar como uma aproximação:

$$P_e \approx 2P_{e_{PAM}} \qquad \text{(se } E_0/N_0 >> 1\text{)} \tag{4}$$

Substituindo valores obtemos expressões em função da energia $E_0$, da energia média $\langle E\rangle$ e da distância mínima $d_{\min}$:

$$P_e \approx 4(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \tag{5}$$

$$P_e \approx 4(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{\langle E\rangle}{N_0}}\right) \tag{6}$$

$$P_e \approx 4(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

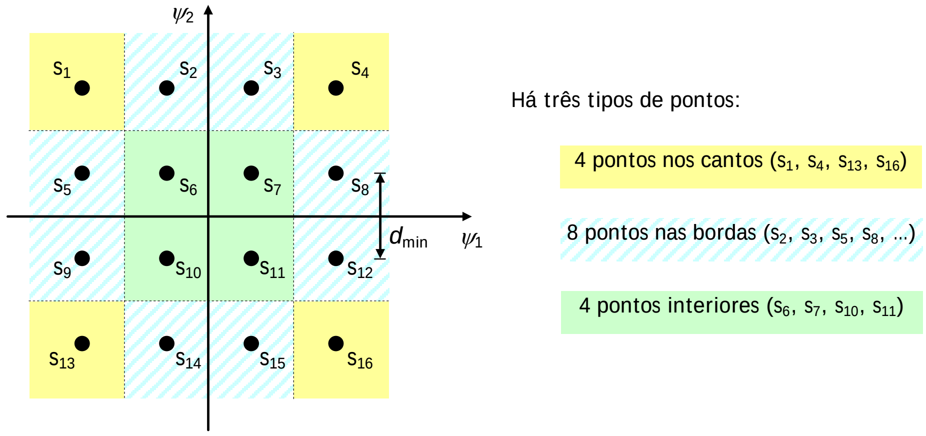
Note-se que o majorante da união $P_e \leq (M-1)Q\left(d_{\min}/\sqrt{2N_0}\right)$ aplicado às constelações quadradas está bastante longe do valor exacto procurado, como se constata na Tabela 1.

**Tabela 1**
**Coeficientes de majorantes de $P_e$ em QAM**

| $M$ | $4(1-1/\sqrt{M})$ | $M-1$ |
|---|---|---|
| 16 | 3 | 15 |
| 64 | 3,5 | 63 |
| 256 | 3,75 | 255 |
| 1024 | 3,875 | 1023 |

## Exemplo 2:
## Cálculo alternativo da probabilidade de símbolo errado em QAM

Neste exemplo vamos encontrar uma outra maneira, mais elaborada mas mais geral, de estimar a probabilidade de símbolo errado. Tomemos 16-QAM como exemplo e observemos a respectiva constelação de símbolos, que suporemos equiprováveis:




Seja $P_{c_i} = P(\text{decisão correcta} \mid s_i)$ a probabilidade de escolha correcta do ponto enviado $\mathbf{s}_i$. Dada a geometria da constelação temos

$$P_{c_1} = P(\text{decisão correcta} \mid s_1) = P_{c_4} = P_{c_{13}} = P_{c_{16}} \qquad \text{(pontos nos cantos)}$$

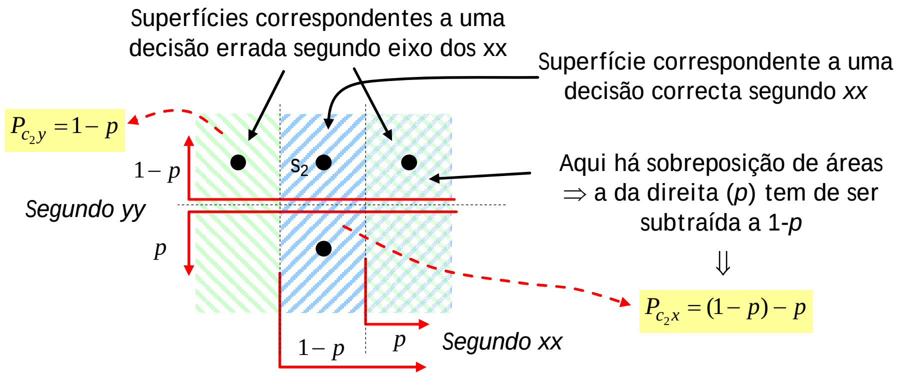
$$P_{c_2} = P_{c_3} = P_{c_5} = P_{c_8} = P_{c_9} = P_{c_{12}} = P_{c_{14}} = P_{c_{15}} \qquad \text{(pontos nas bordas)}$$

$$P_{c_6} = P_{c_7} = P_{c_{10}} = P_{c_{11}} \qquad \text{(pontos interiores)}$$

Sendo $P_i = 1/16$ a probabilidade de ocorrência do símbolo $\mathbf{s}_i$ a probabilidade média de decisões correctas é

$$P_c = \sum_{i=1}^{16} P_i P_{c_i} = \frac{1}{16}(4P_{c_1} + 8P_{c_2} + 4P_{c_6}) \text{ ,}$$

e $P_e = 1 - P_c$. Mas uma decisão correcta sobre um símbolo significa ter decidido correctamente em ambos os eixos. Ora as duas decisões são independentes uma da outra; logo, $P_{c_i} = P_{c_i x} P_{c_i y}$, em que $P_{c_i x}$ e $P_{c_i y}$, as probabilidades de decisão correcta segundo *xx* e *yy*, respectivamente, dependem do ponto $\mathbf{s}_i$ considerado. Para calcularmos estas probabilidades observemos a figura seguinte, que ilustra o caso de $P_{c_2}$. Na figura $p = Q(d_{\min} / \sqrt{2N_0})$ é a probabilidade de erro entre dois pontos à distância $d_{\min}$.




Teremos então:

$$P_{c_1} = P_{c_1 x} P_{c_1 y} = (1-p)^2$$

$$P_{c_2} = P_{c_2 x} P_{c_2 y} = \underbrace{\left[(1-p) - p\right]}_{P_{c_2 x}} \underbrace{(1-p)}_{P_{c_2 y}} = (1-2p)(1-p)$$

$$P_{c_6} = P_{c_6 x} P_{c_6 y} = \underbrace{(1-2p)}_{P_{c_6 x}} \underbrace{(1-2p)}_{P_{c_6 y}} = (1-2p)^2$$

$$P_c = \frac{1}{16}(4P_{c_1} + 8P_{c_2} + 4P_{c_6}) = \frac{1}{4}\left[(1-p)^2 + 2(1-2p)(1-p) + (1-2p)^2\right] = 1 - 3p + \frac{9}{4}p^2$$

$$P_e = 1 - P_c = 3p - \frac{9}{4}p^2$$

Se a probabilidade *p* for muito pequena o termo $9p^2/4$ é desprezável e podemos considerar que a probabilidade de símbolo errado tem o valor aproximado

$$P_e \underset{\text{se } p \ll 1}{\approx} 3p = 3Q(d_{\min} / \sqrt{2N_0})$$

Em rigor $3p$ é um valor máximo, ou majorante, de $P_e$, isto é, $P_e \le 3p$, independentemente de *p* ser pequeno ou não. Se for pequeno o que estamos a fazer é tomar o majorante como o próprio valor estimado de $P_e$, algo que já fizéramos antes aquando da Eq. (4).

A conclusão anterior é uma manifestação do chamado *majorante dos vizinhos fronteiriços*, que diz que $P_e \le N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$, em que $N_{med} = \sum_{i=1}^{M} P_i N_i$ é o número médio de vizinhos fronteiriços e $N_i$ é o número de vizinhos que fazem fronteira com $\mathbf{s}_i$. Ora vamos confirmar que $N_{med} = 3$ em 16-QAM:

$$N_{med} = \frac{1}{16}(\underbrace{4 \times 2}_{\text{vizinhos de } s_1,\, s_4, \text{ etc.}} + \underbrace{8 \times 3}_{\text{vizinhos de } s_2,\, s_3, \text{ etc.}} + \underbrace{4 \times 4}_{\text{vizinhos de } s_6,\, s_7, \text{ etc.}}) = 3$$

O método alternativo de cálculo deste exemplo confirmou os valores exacto e aproximado que já tínhamos encontrado antes.

Já que falámos de vizinhos fronteiriços vamos ver quantos existem, em média, numa constelação quadrada de *M* pontos, onde temos

- 4 pontos nos cantos, que fazem fronteira com 2 vizinhos;
- $4(\sqrt{M}-2)$ pontos laterais nas bordas, com 3 vizinhos;
- $\left(\sqrt{M}-2\right)^2$ pontos interiores, com 4 vizinhos.

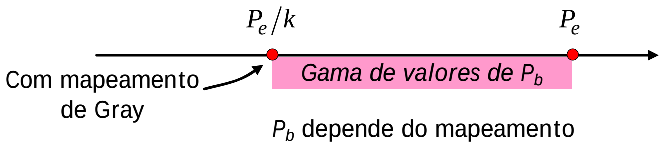
Então o número médio que procuramos é igual a

$$N_{med} = \frac{1}{M}\left[4\times 2+4\left(\sqrt{M}-2\right)\times 3+\left(\sqrt{M}-2\right)^2\times 4\right]=$$
$$= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Podemos pois escrever que, se $Q(d_{\min}/\sqrt{2N_0}) << 1$, então $P_e \approx N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$, como já sabíamos, aliás.

## 4.2. Probabilidade de bit errado

A probabilidade de bit errado $P_b$ está delimitada superiormente por $P_e$ e inferiormente por $P_e/k$, isto é, $P_e/k \le P_b \le P_e$. O seu real valor depende da atribuição, ou mapeamento, dos grupos de *k* bits da sequência binária aos *M* símbolos da constelação.

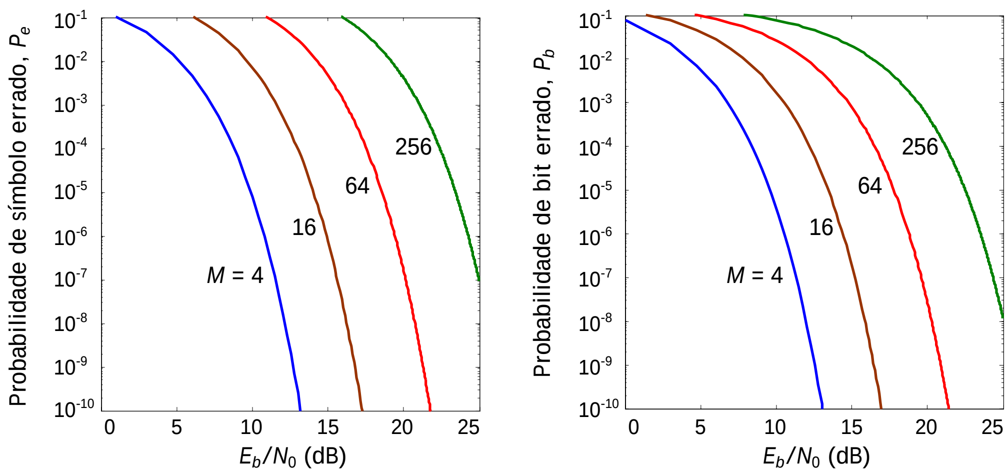



Claro que queremos que $P_b$ tenha o menor valor possível, o que se consegue com mapeamento de Gray e $E_0/N_0 >> 1$, ficando $P_e$ e $P_b$ relacionadas por $P_b \approx P_e/k$. No caso concreto de QAM (onde $\langle E\rangle = kE_b$ e $E_b$ é a energia média de bit) a probabilidade de bit errado é expressa pelas aproximações

$$P_e \approx \frac{4}{k}(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \qquad \text{ou} \qquad P_b \approx \frac{4}{k}(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\sqrt{\frac{3k}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

## 4.3. Gráficos de probabilidades de erro

A figura seguinte apresenta curvas das probabilidades de símbolo e de bit errados.



É notório na figura que para a mesma relação $E_b/N_0$ (e $E_0/N_0$, claro) as duas probabilidade de erro vão aumentando com o número de pontos da constelação, uma constatação gráfica que a Eq. (5) e a Tabela 1 confirmam. A contrapartida é o aumento da eficiência espectral.

## 5. Constelações QAM em cruz

Eis as constelações quadradas e em cruz de 16 a 256 pontos:

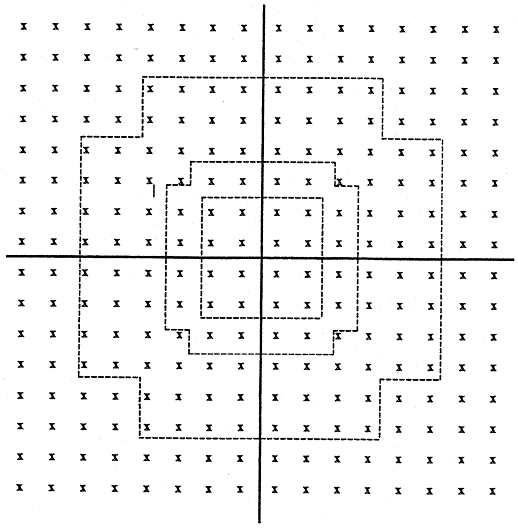
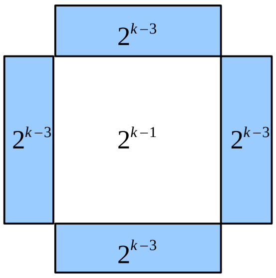


Fig. 4 Constelações quadradas e em cruz.

As constelações em cruz surgem quando o número de bits/símbolo *k* é ímpar e constroem-se assim:

- Começa-se com uma constelação quadrada de $2^{k-1}$ pontos (metade do total).
- Acrescentam-se $2^{k-3}$ pontos a cada um dos quatro lados dessa constelação, ignorando os cantos.




Claro que podemos sempre partir do primeiro quadrado perfeito superior a $2^k$, que é $2^k + 2^{k-3}$, dispor os pontos obtidos numa grelha quadrada e depois retirar dos cantos os pontos que estiverem a mais ($2^{k-3}$).

A energia média de uma constelação em cruz em que $d_{\min} = 2\sqrt{E_0}$ vale[2]

$$\langle E \rangle = \frac{d_{\min}^2}{6}\left(\frac{31}{32}M - 1\right) = \frac{2E_0}{3}\left(\frac{31}{32}M - 1\right)$$

Não é possível satisfazer o mapeamento de Gray em todos os pontos de uma constelação em cruz, e também não é possível exprimi-la à custa de constelações unidimensionais. Este facto complica o cálculo da probabilidade média de símbolo errado, que vale, aproximadamente,

[2] *In* John Cioffi, *EE 379A (Digital Communication: Signal Processing) Course Reader*, Stanford University.

$$P_e \approx 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \qquad (E_0/N_0 \text{ elevado}).$$

Vamos ver como se chega a este resultado calculando primeiro a probabilidade exacta de símbolo errado como no Exemplo 2 (e com $p = Q\left(\sqrt{2E_0/N_0}\right)$), como se segue. Numa constelação em cruz como as da Fig. 4 os pontos caem em três categorias:

- $2^k - 4.2^{\frac{k-1}{2}}$ pontos interiores com 4 vizinhos e $P_{c_i} = P_{c_i x} P_{c_i y} = (1-2p)^2$
- $4.2^{\frac{k-1}{2}} - 8$ pontos laterais com 3 vizinhos e $P_{c_i} = (1-2p)(1-p)$
- 8 pontos nos cantos com 2 vizinhos e $P_{c_i} = (1-p)^2$

A probabilidade média de decisão correcta com símbolos equiprováveis, $P_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_{c_i}$ , é

$$P_c = \frac{1}{M}\left[(2^k - 4.2^{\frac{k-1}{2}})(1-2p)^2 + (4.2^{\frac{k-1}{2}} - 8)(1-2p)(1-p) + 8(1-p)^2\right] =$$
$$= 1 - 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}-\frac{2}{M}\right)p + 4\left(1-\sqrt{\frac{2}{M}}-\frac{2}{M}\right)p^2$$

e a de decisão errada é $P_e = 1 - P_c = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}-\frac{2}{M}\right)p - 4\left(1-\sqrt{\frac{2}{M}}-\frac{2}{M}\right)p^2$ , ou

$$P_e = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}-\frac{2}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) - 4\left(1-\sqrt{\frac{2}{M}}-\frac{2}{M}\right)Q^2\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right).$$

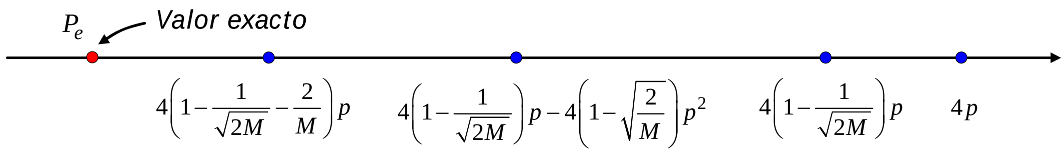
Esta é a fórmula exacta de $P_e$ mas, como de costume, podemos pensar em majorantes sucessivamente mais frouxos, isto é, mais afastados do valor exacto:

$$\begin{aligned} P_e &\le 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}-\frac{2}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \\ &< 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) - 4\left(1-\sqrt{\frac{2}{M}}\right)Q^2\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \\ &< 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) < 4Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Se $E_0/N_0$ for elevado uma aproximação razoável da probabilidade de símbolo errado é

$$P_e \approx 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) \qquad (E_0/N_0 \text{ elevado}),$$

já apresentada atrás. E o majorante dos vizinhos fronteiriços? Agora é fácil de concluir que o número médio de vizinhos fronteiriços em constelações em cruz é $N_{med} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} N_i = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}-\frac{2}{M}\right)$ e que o majorante dos vizinhos fronteiriços é o que na figura seguinte está mais próximo do valor exacto.




**Exemplo 3:**
**Cálculo da probabilidade de símbolo errado em 32-QAM**

Observe-se a Fig. 4. Na constelação 32-QAM há três categorias de pontos: 16 pontos interiores com $P_{c_i} = P_{c_i x}P_{c_i y} = (1-2p)^2$, 8 pontos laterais com $P_{c_i} = (1-2p)(1-p)$ e 8 pontos nos cantos com $P_{c_i} = (1-p)^2$. Assim,

$$N_{med} = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{64}}-\frac{2}{32}\right) = \frac{13}{4}$$

$$P_c = \frac{1}{32}\left[16(1-2p)^2 + 8(1-2p)(1-p) + 8(1-p)^2\right] = 1-\frac{13}{4}p+\frac{11}{4}p^2$$

$$P_e = 1-P_c = \frac{13}{4}p-\frac{11}{4}p^2$$

Este é o valor exacto de $P_e$. Se $p<<1$ então consideramos $P_e \approx \frac{13}{4}p = \frac{13}{4}Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$, valor ligeiramente mais próximo do exacto do que $P_e \approx 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) = \frac{7}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$.

## 6. Comparação entre PSK e QAM quadrada

Na comparação entre as modulações PSK e QAM com igual *M* a primeira fica sempre a perder. Por exemplo, se a distância mínima em ambas as constelações for igual a energia dos símbolos PSK é mais elevada que a energia média dos símbolos QAM, o mesmo acontecendo se desejarmos obter a mesma probabilidade de erro. Vamos ver que assim é.

Em MPSK a constelação é circular e a distância mínima entre símbolos é $d_{\min} = 2\sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}\,\pi/M$, onde $E_s$ é a energia de cada símbolo, enquanto que a probabilidade de símbolo errado é aproximada por $P_e \approx 2Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\,\mathrm{sen}\,\pi/M\right)$, se $E_s/N_0 >> 1$. Para determinarmos a energia adicional necessária no sinal MPSK relativamente à energia média $\langle E\rangle$ em QAM – isto é, $10\log_{10} E_s/\langle E\rangle$, em dB – basta compararmos estas expressões com as Eqs. (3) e (6). Assim, da primeira equação, $\langle E\rangle = \frac{M-1}{6}d_{\min}^2$, derivamos $d_{\min} = \sqrt{\frac{6\langle E\rangle}{M-1}}$, que igualamos a $d_{\min} = 2\sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}\,\pi/M$ para obtermos

$$\frac{E_s}{\langle E\rangle} = \frac{3}{2(M-1)\mathrm{sen}^2\,\pi/M}\ ;$$

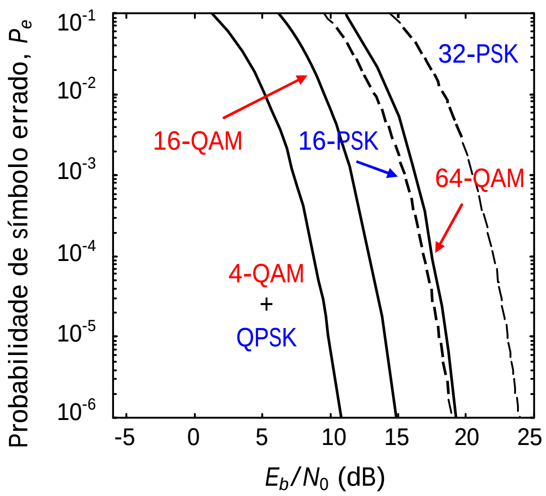
da segunda expressão, $P_e \approx 4(1-\frac{1}{\sqrt{M}})Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{\langle E\rangle}{N_0}}\right)$, a comparação resulta em

$$\frac{E_s}{\langle E\rangle} = \frac{3}{2(M-1)\ \ \mathrm{sen}^2\,\pi/M}\left[\frac{Q^{-1}(Pe/2)}{Q^{-1}\left[P_e/4(1-1/\sqrt{M})\right]}\right]^2.$$

A tabela seguinte apresenta os resultados para diversos valores de *M* e $P_e = 10^{-5}$.

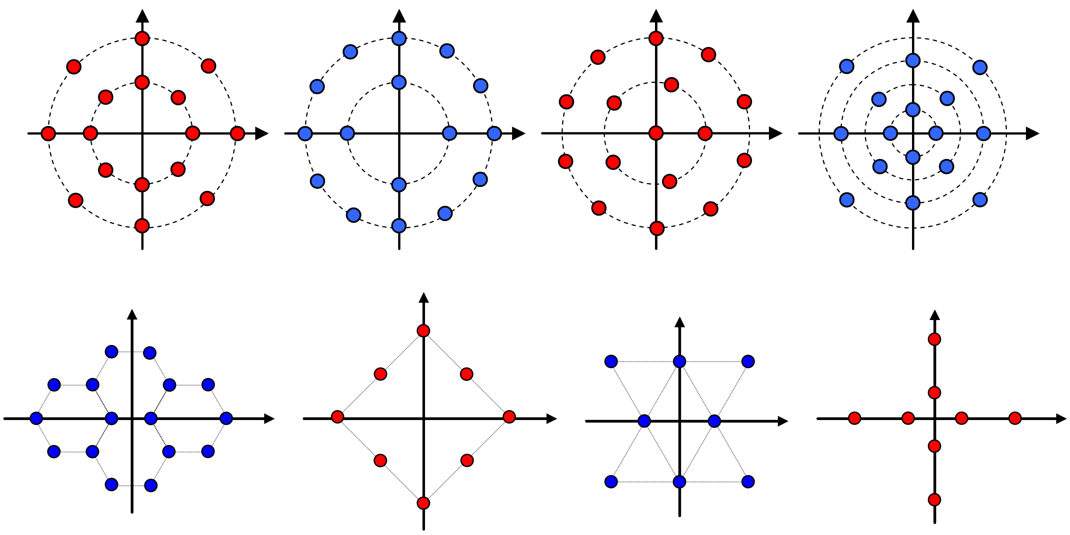
| *M* | *Energia adicional em MPSK (dB)* Igual $d_{min}$ | Igual $P_e$ ($10^{-5}$) |
|---|---|---|
| 4 | 0,0 | 0,0 |
| 16 | 4,20 | 4,03 |
| 64 | 9,95 | 9,72 |
| 256 | 15,92 | 15,66 |

A figura seguinte permite comparar o desempenho relativo das duas modulações. Em iguais circunstâncias (igual relação $E_b/N_0$ e igual número de pontos) QAM tem um melhor desempenho. Compare-se, por exemplo, 16-QAM com 16-PSK: a largura de banda ocupada é a mesma mas $P_e$ é menor em 16-QAM. Em resumo, quanto mais pontos houver mais QAM é "melhor" que PSK, em termos de probabilidade de símbolo errado.




## 7. Outras constelações QAM

Claro que um sinal QAM pode ser descrito por uma constelação que não é nem quadrada nem em cruz. Em seguida são apresentados vários exemplos.



Fica um desafio nada trivial: qual é a probabilidade de erro com estas constelações?