Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Exercícios de

Análise Matemática II

Maria Margarida Ferreira
Maria do Rosário de Pinho
Maria Antónia Carravilla
Fevereiro de 2000

1

Aproximação Polinomial

1. (a) Determine o polinómio de Taylor de $\log(1+x)$ de grau n no ponto $a = 0$. Considere $\log(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ e siga o tratamento dado à função $arctg(x)$ nas aulas teóricas.

   (b) Calcule as estimativas do resto desse polinómio para $x \in (-1, 1]$ e para $|x| > 1$.

   (c) Verifique que o polinómio de Taylor não tem qualquer utilidade para para $|x| > 1$ quando o grau do polinómio cresce.

   (d) Indique como poderá ainda usar o polinómio de Taylor desta função para calcular o valor da função para $|x| > 1$.

2. (a) Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Determine o polinómio de Taylor de grau n da função no ponto 0.

   (b) Para que valores de x poderá utilizar esse polinómio para estimar $f(x)$? Poderá conjectурar sobre o porquê deste comportamento do polinómio de Taylor?

   (c) Verifique que 0 é mínimo local da função e verifique porque é que o resultado dado nas teóricas:

   Seja $f \in C^n(I)$, $a \in \overset{\circ}{I}$ e $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$
   $f^{(n)}(a) \neq 0$

      i. Suponha n par e $f^{(n)}(a) > 0$. Mostre que f tem um mínimo local em a.

ii. Suponha n par e $f^{(n)}(a) < 0$. Mostre que f tem um máximo local em a.

iii. Suponha n ímpar. Mostre que f não tem nem máximo nem mínimo em a.

não pode ser utilizado para classificar o ponto 0.

3. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Verifique que 0 não é nem máximo nem mínimo local e verifique porque é que o resultado dado nas teóricas:

Seja $f \in C^n(I)$, $a \in \overset{\circ}{I}$ e $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$

$f^{(n)}(a) \neq 0$

(a) Suponha n par e $f^{(n)}(a) > 0$. Mostre que f tem um mínimo local em a.

(b) Suponha n par e $f^{(n)}(a) < 0$. Mostre que f tem um máximo local em a.

(c) Suponha n ímpar. Mostre que f não tem nem máximo nem mínimo em a.

não pode ser utilizado para classificar esse ponto crítico.

4. (a) Utilizando polinómios de Taylor, calcule $\sin(2)$ com erro inferior a 10^{-4}.

   (b) Utilizando polinómios de Taylor, calcule $\sin(1)$ com erro inferior a 10^{-10}.

5. Verifique que o polinómio de Taylor de grau 7 da função exponencial permite calcular e com três casas decimais exactas.

6. Verifique que $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ e utilize esta igualdade para mostrar que $arctg(x) + arctg(y) = arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ indicando qualquer possível restrição dos argumentos.

   Conclua que:

$$\frac{\pi}{4} = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$$

   Utilize a última equação e os polinómios de Taylor de $arctg(x)$ para mostrar que $\pi = 3.14159\ldots$.

7. Seja f uma função tal que $f''(x) + f(x) = 0$ para todo o $x \in \Re$ e $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Verifique que todas as derivadas de f existem. Calcule o polinómio de Taylor desta função no ponto 0 e o respectivo resto. Conclua que qualquer função satisfazendo estas condições é necessariamente a função nula.

8. Sejam a_i e b_i os coeficientes dos polinómios de Taylor em 0 respectivamente das funções f e g. Determine os coeficientes dos polinómios de Taylor c_i das funções:

   (a) $f + g$

   (b) fg

   (c) f''

   (d) $h(x) = \int_0^x f(t)dt$

   (e) $h(x) = f(x^n)$

9. Seja a um real qualquer e seja $n \in N$. Define-se

$$\begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$$

Calcule $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$ para $k \in N$ e $k > n$.

Verifique que o polinómio de Taylor de grau n da função $f(x) = (1+x)^a$ no ponto 0 é:

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} x^k$$

e que o resto na forma de Lagrange é $R_{n,0}(x) = \begin{pmatrix} a \\ n+1 \end{pmatrix} x^{n+1}(1+t)^{a-n-1}$ para algum $t \in [0, x]$ ou $t \in [x, 0]$.

2

Convergência Pontual e Uniforme Séries Funcionais

1. Para cada uma das seguintes sucessões de funções $\{f_n\}$, determine o respectivo limite pontual no intervalo indicado (se existir) e averigue se a convergência é ou não uniforme.

   (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ para $x \in [0, 1]$

   Sol: Converge pontualmente para $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$.

   Não é uniformemente convergente.

   (b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ para $x > 1$

   Sol: Converge pontualmente para $f(x) = 0$. Não é uniformemente convergente.

   (c) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ para $x \in [-1, 1]$

   Sol: Converge pontualmente para $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$.

   Não é uniformemente convergente.

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq n \\ x - n & \text{se} \quad x > n \end{cases}$ em $[a, b]$ e em $\Re$

   Sol: No intervalo $[a, b]$, converge pontualmente para $f(x) = 0$e é uniformemente convergente.

Sol: Em$\Re$, converge pontualmente para $f(x) = 0$, não é uniformemente convergente.

2. Suponha que $f_n \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} f$ em $[a, b]$ e que f_n são contínuas. Seja $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ e $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in [a, b]$. Mostre que $g_n \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} g$ em $[a, b]$.

3. Seja $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$ em $x \in [0, 1]$.

   (a) Calcule $lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   Sol: $lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

   (b) Mostre que $lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.
   Sol: $lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$

   (c) Que pode concluir sobre a convergência uniforme da sucessão de funções?

4. Suponha que a série funcional $\sum u_n(x)$ converge pontualmente para uma função $f(x)$ em $S \subset \Re$ fechado. Suponha que existe uma sucessão numérica $\{M_n\}$ tal que a série numérica gerada é convergente e tal que $0 \leq |u_n(x)| \leq M_n$ para todo o natural e para todo o $x \in S$. Mostre que a série $\sum u_n(x)$ converge uniformemente em todo o S.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

   (a) Mostre que a série converge para todo o $x \in \Re$.

   (b) Seja f a soma da série. Mostre que f é contínua em $[0, \pi]$ e conclua que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

6. Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ para $x \in [0, 2\pi]$, deduza que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Mostre que:

   (a) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(log(a))^n}{n!} x^n$, $a > 0$, $x \in \Re$.

   (b) $\sin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $\forall_{x\in\Re}$.

   (c) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, $\forall_{x\in\Re}$.

   (d) $\frac{x}{-2x^2+x+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$, para $x \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$.

8. Calcule o intervalo de convergência das séries:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$
Sol: $]-2,2[$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n$
Sol: $]-1,1[$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$
Sol: $]-1,1]$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
Sol: $[-1,1[$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$
Sol: $[-1,1]$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}$
Sol: $[-1,5[$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$
Sol: $]0,2]$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-x)^n}$
Sol: $]-\infty,0] \bigcup [2,+\infty[$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{n^2+n}$
Sol: $[1,3]$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)}$
Sol: $[1,3]$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{2n+1}$
Sol: $[-2,2]$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$
Sol: $]-e,e[$

9. Sejam $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e seja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

   (a) Calcule o intervalo de convergência das duas séries.
   Sol: $]-\infty,+\infty[$

   (b) Mostre que $f'(x) = g(x)$ e que $g'(x) = -f(x)$.

   (c) Identifique as duas funções.

10. Seja $\{a_n\}$ uma sucessão numérica definida por: $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

(a) Mostre que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Determine o raio de convergência desta série.

Sol: $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$

(c) Para todos os valores no intervalo de convergência, verifique que $f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}$.

(d) Usando a decomposição em fracções simples, determine uma outra série de potências de f.

(e) Mostre que uma qualquer função é representada por uma só série de potências. Use esse facto para concluir que:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

3

Curvas em $\Re^n$

1. Identifique as seguintes curvas em $\Re^2$:

   (a) $F(t) = (t^2, 2t+1)$ $t \in \Re$
   (b) $F(t) = (t^2, 4t^4+1)$ $t \in \Re$
   (c) $F(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$
   (d) $F(t) = (\sin \pi t, 2t)$ $t \in [0, 4]$
   (e) $F(t) = (\sin t, 1+\cos^2 t)$ $t \in [0, 2\pi]$
   (f) $F(t) = (3t-1, 5-2t)$ $t \in [0, 1]$
   (g) $F(t) = (2t-1, 8t^3-5)$ $t \in [-1, +1]$
   (h) $F(t) = (2-\sin t, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$
   (i) $F(t) = (e^t, 4-e^{2t})$ $t \in \Re$
   (j) $F(t) = (e^{2t}, e^{2t}-1)$ $t \leq 0$
   (k) $F(t) = (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$ $0 < t < 3$

2. Parametrize a curva dada pela equação em coordenadas polares: $r = \cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

3. Uma partícula inicia um movimento sobre a circunferência $x^2+y^2 = 1$. Escreva equações na forma $x(t) = f(t)$ e $y(t) = g(t)$ descrevendo o movimento da partícula nos seguintes casos:

   (a) Início no ponto $(0, 1)$, percurso da circunferência uma vez, no sentido positivo.

   (b) Início no ponto $(0, 1)$, percurso da circunferência duas vezes, no sentido negativo.

   (c) Percorre apenas um quarto da circunferência desde $(1, 0)$ até $(0, 1)$.

   (d) Percorre três quartos da circunferência desde $(1, 0)$ até $(0, 1)$.

4. Determine parametrizações para as seguintes curvas:

   (a) Recta horizontal $y = 2$.

(b) Segmento de recta que une $(3,7)$ a $(8,5)$.

(c) Arco parabólico $x = y^2$ desde $(4,2)$ até $(0,0)$.

(d) A curva $y^2 = x^3$ desde $(4,8)$ até $(1,1)$.

(e) $r = \cos(3\theta)$.

(f) $r = 2 + 3\sin\theta$.

5. Determine $T(t)$ e $N(t)$ para cada uma das curvas:

   (a) $F(t) = (\cos t, t)$.

   (b) $F(t) = (\sqrt{t^2+1}, t)$.

   (c) $F(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$.

   (d) O gráfico de $y = \log(x^2+1)$.

   (e) Curva $y^3 = x^2 + 4$ no ponto $(2,2)$.

6. A trajectória de uma partícula é descrita pelo vector de posição $F(t) = (x(t), y(t))$. Para cada um dos movimentos dados determine a velocidade vectorial, velocidade escalar e aceleração. Suponha $t \geq 0$.

   (a) $F(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$.

   (b) $F(t) = (t^3 - t, t^3 - t)$.

   (c) $F(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$.

   (d) $F(t) = (2\cos t, 3\cos t)$.

7. Uma partícula desloca-se ao longo da curva $y = \frac{1}{16}x^2$ de tal forma que a componente y da velocidade é constante e igual a $8m/seg$. Determine $\dot{x}$ e a aceleração quando a partícula passa pelo ponto $(4,1)$.

8. Uma partícula desloca-se no sentido ascendente, ao longo da curva $y = \frac{1}{4}x^2$, com uma velocidade escalar constante e igual a $5m/seg$. Determine os vectores velocidade e aceleração no ponto $(2,1)$.

9. Se o movimento de uma partícula é descrito por $F(t) = (3t^2, 9t - t^3)$, determine o valor mínimo da velocidade escalar e o(s) ponto(s) em que esse valor ocorre.

10. O movimento de uma partícula é descrito pelo vector de posição $F(t)$. Determine para cada um dos movimentos a_T e a_N, isto é, as componentes tangencial e normal da aceleração.

(a) $F(t) = (t, 1 + t^2)$.

(b) $F(t) = (t, \log t), \;\; t > 0$.

(c) $F(t) = (e^t, e^{-t})$.

(d) $F(t) = (4\cos t, 2\sin t)$.

(e) $F(t) = (e^{2t}\cos 2t, e^{2t}\sin 2t)$.

11. Considere a curva $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \;\;,\;\; t \in [0, 2\pi]$.

    (a) Determine o comprimento total da curva.

    (b) Determine os pontos da curva onde a tangente é vertical e a aceleração centrípeta (normal) nesses pontos.

12. Considere a curva $F(t) = (\cos t\sqrt{2\cos 2t}, \sin t\sqrt{2\cos 2t}) \;\;,\;\; t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

    (a) Determine os pontos em que a tangente à curva é horizontal.

    (b) Determine a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta no ponto $t = \frac{\pi}{6}$.

13. Considere a curva $F(t) = (3t^2, 4t^3) \;\;,\;\; t > 0$.

    (a) Calcule o comprimento do arco da curva compreendido entre $t = 1$ e $t = 2$.

    (b) Verifique se existe algum ponto onde a aceleração tangencial ou a aceleração centrípeta é nula.

14. Qual o comprimento de arco das seguintes curvas:

    (a) $r = e^{-3\theta} \;,\;\; \theta \geq 0$.

    (b) $r = \frac{1}{\theta} \;,\;\; \theta \geq 2\pi$.

15. Suponha que uma curva é descrita em coordenadas cartesianas pela equação $x = f(y)$. Mostre que o comprimento de arco da curva quando y percorre o intervalo $[c, d]$ é dado por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

16. Considere o comprimento de arco da curva $y = x^{\frac{2}{3}} \;,\;\; 1 \leq x \leq 8$.

(a) Defina esse comprimento de arco através de um integral definido usando x como parâmetro.

(b) Defina esse comprimento de arco através de um integral definido usando y como parâmetro.

(c) Calcule o mais fácil a) ou b).

17. Mostre que $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$ exprime o comprimento de arco de uma curva dada em coordenadas polares pela equação $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$.

18. Num determinado instante t_0, e associados ao movimento de uma partícula,
$F(t_0) = (1, 1)$, $F'(t_0) = (3, 4)$ e $F''(t_0) = (3, -3)$.

(a) Desenhe os vectores $F(t_0)$, $F'(t_0)$ e $F''(t_0)$.

(b) A partícula está a acelerar ou a afrouxar? Explique.

(c) Estude a_T e a_N, graficamente.

(d) Calcule a_T, a_N e k (curvatura), nesse instante.

19. Seja $F(t) = (t^2, t^3)$.

(a) Calcule $T(t)$ e mostre que N não está definido para $t = 0$.

(b) Faça um esboço da curva. Que propriedade causa N a não estar definido em $t = 0$?

20. Considere uma curva em $\Re^2$ definida por $F(t) = (x(t), y(t))$. Verifique que
$$\frac{v^4}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2$$
onde ρ representa o raio de curvatura, v velocidade escalar e s comprimento de arco.

21. Mostre que o raio de curvatura da curva $y = f(x)$ é dado por:
$$\rho = \frac{\left(1 + (\frac{dy}{dx})^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\frac{d^2y}{dx^2}|}$$

22. Considere uma curva $F : I \to \Re^3$ e suponha que F admite derivadas de qualquer ordem. Considere o vector, designado por binormal, $B = T \times N$ (produto vectorial dos vectores tangente unitária e normal principal). Verifique que:

(a) $\frac{dN}{ds} = -kT + \nu B$ ($2^{\underline{a}}$ Fórmula de Frenet)
onde k representa a curvatura e $\nu = \nu(s)$ designada por torsão da curva, pode ser determinada a partir de:

$$\nu(t) = \frac{(F'(t) \times F''(t)) \cdot F'''(t)}{\|F'(t) \times F''(t)\|^2}$$

(b) $\frac{dB}{ds} = -\nu N$ ($3^{\underline{a}}$ Fórmula de Frenet).

(c) $\frac{dT}{ds} = \Omega \times T$; $\frac{dN}{ds} = \Omega \times N$; $\frac{dB}{ds} = \Omega \times B$, onde $\Omega = \nu T \times kB$.

23. Seja $F : I \to \Re^3$ uma curva com curvatura sempre diferente de zero. Suponha que F admite derivadas de qualquer ordem.
Verifique que a torsão é constante e igual a 0 se e só se a curva é plana, isto é, o seu traço está contido num plano.

24. Considere a curva $H : \Re \to \Re^3$ definida por $H(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, onde a, b são constantes positivas. Determine a curvatura e torsão de H.

4

Funções Reais de Variável Vectorial

4.1 Domínio, contradomínio e conjuntos de nível. Limites e Continuidade

1. Determine e esboce o domínio da função: $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

2. Determine o domínio e contradomínio das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ $\quad$ (b) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$

   (c) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ $\quad$ (d) $f(x,y) = \log(4 - xy)$

3. Esboce os gráficos das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ (b) $f(x,y) = -x^2 + y^2 + 1$ $\quad$ (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$

4. Descreva as curvas (ou superfícies) de nível das funções seguintes nos pontos indicados:

   (a) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ $\quad$ $c = 4$; $c = 16$

   (b) $f(x,y) = xy$ $\quad$ $c = 1$; $c = -1$

   (c) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ $\quad$ $c = 0$; $c = \pm\frac{\pi}{6}$

5. Calcule:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x \,\sin y}{y}$ $\quad$ (b) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x(y-1)}{(x+1)y}$

6. Calcule os limites e discuta a continuidade das funções:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (x+3y^2)$ (b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{\sqrt{x+y}}$ (c) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[1-\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$
   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y^2}{2x^2+y}$

7. Utilize coordenadas polares para calcular os seguintes limites:
   ($x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$)

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

8. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 5$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 3$.
   Calcule:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-g(x,y)}{f(x,y)}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,g(x,y)$

9. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$$

   Mostre que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.

10. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)y}{x^4} & \text{se } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$$

    Prove que o limite de $f(x,y)$ é zero quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo de qualquer recta que passe na origem, mas que não se tem $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

11. Calcule os limites $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ e $\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$ para as funções:

    (a) $f(x,y) = x^2+y^2$ (b) $f(x,y) = x^2-4y$ (c) $f(x,y) = 2x+xy-3y$

12. Estude as seguintes funções quanto à continuidade:

$$(a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$(b)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

$$(c)\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$(d)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x-2y}{2x-3y} & \text{se } y \neq \frac{2}{3}x \\ 1 & \text{se } y = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

13. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ uma função contínua e (a,b) tal que $f(a,b) < 0$. Mostre que existe um número $\delta > 0$ tal que,

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{B}_\delta(a,b) = \left\{(x,y) \in \Re^2 :\ \|(x,y)-(a,b)\| < \delta\right\}\ ,\ \text{tem-se}\ \ f(x,y) < 0$$

4.2 Derivabilidade. Derivadas parciais e direccionais. Rectas normais e planos tangentes

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ das funções:

   (a) $f(x,y) = x^3 \log(x^2+y^2)$

   (b) $f(x,y) = x^2\, y^3 - 2\, y$

2. Calcule a derivada de $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ no ponto $(1,1,2)$ na direcção $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

3. Mostre que as funções seguintes satisfazem a equação do calor, $\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

   (a) $z = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$

   (b) $z = e^{-t} \sin \frac{x}{c}$

4. Seja $f(x,y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$.

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}\,(3,2)$ onde $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

   (b) Calcule o valor máximo da derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}\,(3,2)$.

5. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$$

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(x,y) \neq (0,0)$.

   (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0)$.

   (c) Que pode concluir?

6. Seja $h : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcule todas as derivadas direccionais de h na origem.

   (b) Calcule todas as derivadas direccionais de h em $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Verifique que a função h não é contínua na origem.

(d) Que pode concluir?

7. Considere a função $f : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique que $f'(0;\vec{v}) \neq \nabla f(0)\cdot\vec{v}$ para algum $\vec{v} \in \Re^2$. Que pode concluir?

(b) Estude a continuidade da função f.

8. Calcule $\nabla f(X)$ nos pontos indicados.

(a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2$ em $(1,2)$.

(b) $f(u,v) = u\sin(uv)$ em $(\frac{\pi}{4}, 2)$.

(c) $f(x,y,z) = x^2yz + 3xz^2$ em $(1,2,-1)$.

9. (a) Mostre que o maior valor das derivadas direccionais da função $z = f(x,y)$ num dado ponto é $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

(b) Que pode concluir?

10. Sejam $f, g, h : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$f(x,y) = ax+by \ (a^2+b^2 \neq 0) \qquad g(x,y) = x^2+y^2 \qquad$ e $\qquad h(x,y) = x^2-y^2$

(a) Determine as curvas de nível de f, g e h.

(b) Verifique que os gradientes de f, g e h são perpendiculares às curvas de nível.

11. (a) Seja $f(x,y) = \frac{x}{y}$, se $y \neq 0$. Calcule $\nabla f(x,y)\cdot v$ quando $v = (tx, ty)$ e relacione este resultado com as curvas de nível de f.

(b) Seja $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1}$. Mostre que $\nabla f(x,y,z)\cdot v = 0$ se e só se v é perpendicular a (x,y,z). Calcule $\nabla f(1,2,3)\cdot(4,2,2)$.

12. Calcule um vector normal à superfície de nível $f(x,y) = c$, no ponto P, quando:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad c = \frac{1}{2}, \quad P = (1,1).$

(b) $f(x,y) = xy$ $\quad c = -3, \quad P = (-1,3).$

13. Calcule os planos tangentes e as rectas normais às superfícies dadas, nos pontos indicados.

    (a) $25 - x^2 - y^2 - z = 0 \quad P = (3,1,15)$

    (b) $\arctan \frac{y}{x} - z = 0 \quad P = (1,0,0)$

    (c) $e^x (\sin y + 1) - z = 0 \quad P = (0, \frac{\pi}{2}, 2)$

    (d) $x^2 + y^2 + z = 9 \quad P = (1,2,4)$

    (e) $xy^2 + 3x - z^2 = 4 \quad P = (2,1,-2)$

14. A temperatura de uma placa num ponto (x,y) é dada por $T = \frac{x}{x^2+y^2}$. Calcular a direcção de maior crescimento do calor no ponto $(3,4)$.

15. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$$

    e seja $g(x,y) = xyf(x,y)$. Mostre que as derivadas mistas $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ no ponto $(0,0)$ são diferentes.

16. (a) Seja $f : \Re^3 \to \Re$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0, \ \forall u \in \Re^3$. Mostre que f é independente de y.

    (b) Seja $f : \Re^n \to \Re$ tal que f atinge o seu valor máximo ou mínimo num ponto $a \in \Re^n$. Mostre que qualquer derivada parcial no ponto a, caso exista, é nula.

    (c) Seja $A \subset \Re^2$ um rectângulo aberto de lados paralelos aos eixos. Suponha que $f : A \to \Re$ possui derivadas parciais de primeira ordem em todos os pontos de A. Sejam $(a,b) \in A$ e $(a+h, b+k) \in A$. Mostre que existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+k).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta k).k$$

17. Seja $U \subset \Re^2$ aberto, $f : U \to \Re$ contínua em U, com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$ onde $(a,b) \in U$ e $f(a,b) = c$.
    Mostre que existe um rectângulo $I \times J, \ \ I, J \subset \Re$, de lados paralelos

aos eixos, contido em U, tal que $f(x,y) > c$ quando (x,y) pertence à base superior do rectângulo e $f(x,y) < c$ quando (x,y) pertence à base inferior do rectângulo.

18. Seja $f : \Re^n \to \Re$ tal que $f(0) = 0$ e $f(tX) = t\,f(X)$, $\forall X \in \Re^n$ e $\forall t \in \Re$. Mostre que f tem todas as derivadas direccionais na origem e que $\frac{\partial f}{\partial v}\ (0) = f(v)$.

19. Seja $f : \Re^n \to \Re$. Considere $v, a \in \Re^n$ e o segmento de recta $[a, a+v]$. Suponha que a restrição de f a $[a, a+v]$ é uma função contínua e que existe $\frac{\partial f}{\partial v}\ (x),\ \ \forall x \in (a, a+v)$.

    (a) Mostre que existe um número $\theta \in (0,1)$ tal que

    $$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}\ (a + \theta\, v)$$

    (b) Conclua que, se $\frac{\partial f}{\partial v}\ (x) = 0,\ \ \forall x \in \Re^n$ e para todo $v \in \Re^n$, então f é constante.

20. (a) Seja $f : \Re^n \to \Re$ diferenciável em todo o $x \in (a, a+v)$ e contínua em $[a, a+v]$. Utilize 19a) para mostrar que $\exists_{\theta \in (0,1)}$ tal que

    $$f(a+v) - f(a) = \nabla f(a + \theta\, v) \cdot v$$

    (b) Seja $f : \Re^n \to \Re$ diferenciável, cujo gradiente satisfaz $\|\nabla f(X)\| \leq M$, $\forall_{X \in \Re^n}$. Mostre que $\forall_{X,Y \in \Re^n}, \quad |f(X) - f(Y)| \leq M\|X - Y\|$.

21. (a) Seja $f : \Re^n \to \Re$ diferenciável e tal que $\forall_{X \in \Re^n}$, $f(\frac{X}{2}) = \frac{f(X)}{2}$. Prove que f é linear.

    (b) Seja $f : \Re^n \to \Re$ linear e diferenciável. Mostre que

    $$\nabla f(X) \cdot V = f(V) \qquad \forall_{X,V \in \Re^n}.$$

5

Funções Vectoriais de Variável Vectorial

5.1 Derivação da função composta. Função inversa e função implícita. Máximos e mínimos de funções escalares de variável vectorial

1. Calcule a derivada da função:

$$\begin{array}{rcl} f : \Re^3 & \to & \Re^2 \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & (x^4 y \, , \, x e^z) \end{array}$$

Sol:

$$\begin{array}{rccl} Df : & \Re^3 & \to & \mathcal{L}(\Re^3; \Re^2) \\ & (a, b, c) & \rightsquigarrow & \Re^3 \to \Re^2 \\ & & & (x, y, z) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4a^3 b & a^4 & 0 \\ e^c & 0 & a e^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (4a^3 bx + a^4 y, e^c x + a e^c z) \end{array}$$

2. Seja $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$. Quais os pontos $X \in \Re$ tais que $f'(X)$ é um isomorfismo?

   Sol: $\Re^2 \setminus \{(x, y) \in \Re^2 : y = \pm x\}$

3. Seja $z = x^2 y$, $x = 3t + 4u$, $y = 5t - u$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$ de duas formas diferentes:

(a) Usando regras de derivação da função composta.

(b) Começando por escrever z como função de t e u.

Sol: $135t^2 + 222ut + 56u^2$

4. Sendo $z = x^2 \log y$, $x = \frac{u}{v}$ e $y = 3u - 2v$, calcule as derivadas parciais: $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

5. Seja $w = f(x, y)$ e $x = u - v$, $y = v - u$.

   (a) Mostre que $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

   (b) Verifique a alínea anterior para o caso de $f(x, y) = (x - y) \sin(y - x)$.

6. Seja $z = f(x, y)$, $x = u + v$ e $y = u - v$.

   (a) Mostre que $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 - (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{\partial z}{\partial u})(\frac{\partial z}{\partial v})$.

   (b) Verifique a alínea anterior para o caso de $f(x, y) = x^2 + 2y^3$.

7. (a) Seja $z = f(xy)$, $(f : \Re \to \Re)$. Mostre que $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   (b) Seja $w = F(xz, yz)$, $(F : \Re^2 \to \Re)$. Mostre que $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$.

   (c) Seja $z = F(ax + by)$. Mostre que $b\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   (d) Seja $z = \phi(x, y)$ solução da equação $F(x + y + z, Ax + By) = 0$. Mostre que $A(\frac{\partial z}{\partial y}) - B(\frac{\partial z}{\partial x})$ é constante.

8. Seja f uma função continuamente diferenciável tal que $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}\,(1, 1) = a$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\,(1, 1) = b$. Seja

$$\phi(x) = f(x, f(x, f(x, x))).$$

   Calcule $\phi(1)$ e $\phi'(1)$.

9. (a) Mostre que qualquer função da forma $z = f(x + y) + e^y g(x - y)$ é uma solução da equação em derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

   (b) Verifique (a) para $z = (x + y)^2 + e^y \sin(x - y)$.

10. Seja $z = f(x, y)$ representando a temperatura num ponto (x, y), com $x, y \geq 0$. Se utilizarmos coordenadas polares então podemos escrever $z = g(r, \theta)$.

(a) Exprima $\frac{\partial z}{\partial r}$ em termos de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.
(b) Exprima $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ em termos de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.
(c) Mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

11. Seja $u = f(r)$ e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

12. Averigue se o sistema seguinte pode ser resolvido em ordem a (x, y, z) numa vizinhança de $(0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} u = x + xyz \\ v = y + xy \\ w = z + 2x + 3z^2 \end{cases}$$

Sol: pode

13. Seja $f : \Re^3 \to \Re$ definida por $f(x, y, z) = y - xz - e^z$. Mostre que a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de classe C^∞ de x e y em torno do ponto $(1, 1, 0)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ no ponto em causa.

Sol: $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = -\frac{1}{4}$

14. Justifique a seguinte afirmação:
"A equação $x^2 + 3xz + zy^2 - 4z^2 = 0$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança de $(2, 0, 2)$"
Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ em $(2, 0)$.

Sol: $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0) = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 0) = 0$

15. Justifique a seguinte afirmação:
"As equações $x^2 + 3xz + zy^2 - 4z^2 = 0$ e $xyz = 0$ definem y e z como funções implícitas de x numa vizinhança de $(2, 0, 2)$"
Calcule $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $z''(x)$ e $y''(x)$ no ponto 2.

Sol: $z'(2) = 1$; $y'(2) = 0$; $z''(2) = 0$; $y''(2) = 0$

16. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z^2 + w^2 = 2 \\ 3xy - x^2 + w = 1 \end{cases}$$

Verifique que este sistema define x e y como funções implícitas de z e w, de classe C^∞ numa vizinhança de $(x, y, z, w) = (0, 1, 0, 1)$. Calcule $\frac{\partial y}{\partial w}$ $(0, 1)$ e $\frac{\partial x}{\partial w}$ $(0, 1)$.

Sol: $\frac{\partial y}{\partial w}(0, 1) = -\frac{5}{3}$; $\frac{\partial x}{\partial w}(0, 1) = -\frac{1}{3}$

17. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - zy + 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema é localmente resolúvel em ordem a y e a z.

(b) Dado o ponto $X_0 = (0, 1, 1)$ verificar se é solução e calcular $y'(0)$ e $z'(0)$.

Sol: $y'(0) = z'(0) = 0$

(c) Verifique se há alguma solução tal que $y''(x_0) = 0$ e $z''(x_0) = 0$.

Sol: x_0 não existe

18. Verifique que $xy + zy + z^3 + 1 = 0$ define z como função implícita de x e y na vizinhança de $(1, 2, -1)$ e calcule $\frac{\partial z}{\partial y}$ $(1, 2)$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $(1, 2)$.

Sol: $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 2) = -\frac{3}{25}$

19. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ quando

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Sol: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(b) $xz + yz + xy = 0$

Sol: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$

(c) $z = e^x \sin(y + z)$

Sol: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x \sin(y+z)}{1-e^x \cos(y+z)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x \cos(y+z)}{1-e^x \cos(y+z)}$

20. Seja $g : \Re^3 \to \Re$ uma função de classe C^∞ tal que $g(1, 1, 0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ $(1, 1, 0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ $(1, 1, 0) \neq 0$. Seja $f : \Re^3 \to \Re$ definida por $f(x, y, z) = y - xz - e^z$.

(a) Mostre que o sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ define x e z como funções de classe C^∞ de y em torno do ponto $(1,1,0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto 1.

Sol: $\frac{\partial z}{\partial y}(1) = \frac{1}{2}$

21. Seja $f(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz)$ definida em todo $(x,y,z) \in \Re^3$.

    (a) Verifique que $f(0,0,0) = 0$ e mostre que existe uma função F de classe C^∞ definida numa vizinhança V de $(0,0)$ e tomando valores em $\Re$ tal que $F(0,0) = 0$ e que $f(x,y,F(x,y)) = 0$ para todo o $(x,y) \in V$.

    (b) Calcule $\frac{\partial F}{\partial x}$ $(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ $(0,0)$.

    Sol: $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1$

22. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x^3 + 3xt^2 + 3x + t^3 - 3t^2 + 3t = 1 \\ 3x^2t + t^3 + 3t - y = 0 \end{cases}$$

    (a) Prove que o sistema é localmente resolúvel em ordem a x e a y.

    (b) Determine as soluções (t_0, x_0, y_0) do sistema tais que:

    Se $F(t) = (x(t), y(t))$ é a função definida implicitamente pelo sistema numa vizinhança de (t_0, x_0, y_0) então $F'(t_0) = F''(t_0) = (0,6)$.

    Sol: $(t_0, x_0, y_0) = (1,0,4)$

23. Discuta a natureza dos pontos críticos de cada uma das funções seguintes:

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

    Sol: $(0,0)$ ponto de sela.

    (b) $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$

    Sol: $(0,0)$ ponto de sela.

24. Classifique os pontos críticos de cada uma das funções:

    (a) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

    Sol: $(4,-1)$ máximo local.

(b) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

Sol: $(0, 0)$ ponto de sela, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ máximos locais.

(c) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

Sol: $(0, 0)$ ponto de sela, $(1, 1)$ mínimo local.

(d) $f(x, y) = \frac{3x^2+1}{2} - (x^2 + y^2)x$

Sol: $(0, 0)$ ponto de sela, $(1, 0)$ máximo local.

(e) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Sol: $(0, 0)$ máximo local.

(f) $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$

Sol: $(0, 3, -1)$ mínimo local.

(g) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + yz - x^2z$

Sol: $(0, 0, 0)$ ponto de sela, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ pontos de sela .

(h) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

Sol: $(0, 0)$ mínimo local.

(i) $f(x, y) = e^{-x} \sin y$

Sol: Não tem pontos críticos.

(j) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3xz + 3yz$

Sol: $(0, 0, 0)$ ponto sela, (-2,-2,-2) máximo local.

(k) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + y^2$

Sol: $(0, 0)$ mínimo local, $(-\frac{2}{3}, 0)$ máximo local, $(-\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}})$ pontos de sela.

25. Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Mostre que a origem é um ponto sela, embora sobre qualquer recta que passa na origem f tenha um mínimo local em $(0, 0)$.

26. Seja $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

(a) Encontre os pontos críticos de f. **Sol:** $(0, 0); (1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)$

(b) Examine o comportamento de f quando $x^2 + y^2$ é "grande".

(c) Qual é o valor mínimo de f? **Sol:** 0

(d) Qual é o valor máximo de f? **Sol:** $\frac{2}{e}$

27. Sejam P_1, P_2, ... , P_n n pontos em $\Re^n$. Encontre P para o qual

$$f(P) = \sum_{1}^{n} |P - P_i|^2$$

é mínimo.

Sol: $P = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} x_{in})$ com $P_i = (x_{i1}, \cdots, x_{in})$

28. Encontre o ponto sobre a recta que passa em $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ que está mais próximo da recta definida por $x = t$, $y = t$ e $z = t$, $t \in \Re$.

Sol: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

29. Calcule o máximo de $f(x, y) = x^2+12xy+2y^2$ quando x e y satisfazem a equação $4x^2 + y^2 = 25$.

Sol: O valor máximo é $\frac{161}{4}$ e é atingido nos pontos $\pm(\frac{3}{2}, 4)$

30. Calcule o máximo de $f(x, y) = x - 2y + 2z$ restricta à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

31. Maximizar $f(x, y, z) = xy + yz$ quando $x + 6y = 6$ e $x - 3z = 0$.

Sol: $(3, \frac{1}{2}, 1)$, $f = 2$

32. Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48$ sujeito a $x + y = 8$.

Sol: $(3, 5)$, $f = -2$

33. Suponha-se que pretendíamos fabricar recipientes com a forma de cilindros circulares (fechados) utilizando um determinado material. Esses recipientes devem ter um volume V_0 fixado. Pretende-se contudo utilizar em cada peça o menor material possível. Que valores devem ter r, raio da base, e h, altura da peça?

Sol: $(r, h) = ((\frac{V_0}{2\pi})^{\frac{1}{3}}, 2\,(\frac{V_0}{2\pi})^{\frac{1}{3}})$

34. Qual é o volume da maior caixa rectangular de lados paralelos aos eixos coordenados que pode ser inscrita no elipsoide $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$?

Sol: $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$

35. Seja $F(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ a temperatura em cada ponto de uma esfera centrada na origem e raio $\sqrt{11}$. Calcular as temperaturas

máximas e mínimas sobre as curvas formadas pela intersecção do plano $x+y+z=3$ com a esfera.

Sol: $T_{max} = \frac{91}{3}$ em $(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{4\sqrt{3}}{3})$ e $(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{4\sqrt{3}}{3})$,

$T_{min} = 25$ em (3,-1,1) e (-1, 3, 1)

36. O material para construir a base de uma caixa aberta custa 1.5 vezes mais que o material para construir os lados. Suponhamos que se tem uma quantidade fixa C de dinheiro para gastar. Calcule as dimensões da caixa de volume máximo que se pode construir.

    Sol: Base: $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2C}{\alpha}}$ x $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2C}{\alpha}}$; Altura: $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2C}{\alpha}}$; Volume: $\frac{18C}{\alpha}\sqrt{\frac{2C}{\alpha}}$

37. Calcule os extremos das seguintes funções na região R:

    (a) $f(x,y) = x^2 + xy$ $\qquad R = \{(x,y): \ |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 1\}$

    Sol: $\pm(\frac{1}{2}, -1)$ mínimos, $f = -\frac{1}{4}$; $\pm(2,1)$ máximos, $f = 6$

    (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad R = \left\{(x,y): \ x^2 + y^2 \leq 8\right\}$

    Sol: $(x,-x)$, $-2 \leq x \leq 2$ mínimos, $f = 0$; $\pm(2,2)$ máximos, $f = 16$

38. Calcule:

$$\begin{array}{ll} min & f(x,y) = (x-\frac{9}{4})^2 + (y-2)^2 \\ sujeito\ a: & y - x^2 \geq 0 \\ & y + x \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Sol: $f(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}) = \frac{5}{8}$

6

Integrais Múltiplos

1. Calcule os seguintes integrais:

   (a)
   $$\int\int_Q (x \sin y - ye^x) dxdy \text{ onde } Q = [-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

   Sol: $\frac{\pi}{8}(\frac{1}{e} - e)$

   (b)
   $$\int\int_Q \sqrt{|y - x^2|} dxdy \text{ onde } Q = [-1,1] \times [0,2]$$

   Sol: $\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$

2. Seja $Q = [1,2] \times [1,4]$ e $f : Q \to \Re$ definida por:

   $$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2} & \text{se } x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$$

   Determine a região de Q onde f não é nula e calcule $\int\int_Q f(x,y)dxdy$, supondo que o integral existe.

   Sol: $\frac{1}{6} \ln 2$

3. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ uma função positiva que verifica as equações em (a) e (b). Em cada um dos casos, determine e esboce a região S e mude a ordem de integração.

   (a)
   $$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy \right) dx$$

(b)

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{4-y}{2}} f(x,y)dx \right) dy$$

4. Determine e esboce as regiões de integração dadas e calcule os seguintes integrais:

   (a) $\int\int_S x\cos(x+y)dxdy$ onde S é uma região triangular de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ e (π,π).
   Sol: $-\frac{3\pi}{2}$

   (b) $\int\int_S e^{x+y}dxdy$, onde $S = \{(x,y) \in \Re^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
   Sol: $e - \frac{1}{e}$

   (c) $\int\int_S x^2y^2dxdy$, onde S é a região do primeiro quadrante limitada pelas hipérboles de equação $xy = 1$ e $xy = -1$
   e pelas rectas $y = x$ e $y = 4x$.
   Sol: $\frac{1}{3}\ln 2$

5. Calcule a área da seguinte região D:

   (a) $D = \{(x,y) \in \Re^2 : x < 0 \text{ e } -1 \leq y \leq e^x \text{ e } x^2y \geq -1\}$

   (b) $D = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq \frac{1}{2}x + 1 \text{ e } y \leq x+1 \text{ e } y \leq 4 - 2x\}$

   (c) $D = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x \text{ e } y \geq x^2\}$

6. Indique como calcularia, usando integrais duplos, a área da região limitada simultaneamente pelas curvas de equação:

   (a) $y^2 = 4a^2 - 3ax$ e $y^2 = ax$

   (b) $y^2 - x^2 = 1$ e $y^2 + x^2 = 9$ (região que contém a origem).

7. (a) Seja $S = [-1,1]\times[0,2]$ e $f(x,y) = \sqrt{|y-x^2|}$. Calcule $\int\int_S f(x,y)dxdy$.

   (b) Seja $S = [0,1]\times[0,1]$ e $f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{se } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{nos restantes pontos} \end{cases}$

   Calcule $\int\int_S f(x,y)dxdy$.

8. Usaram-se integrais duplos para calcular o volume de um sólido de volume V, que está sobre a região S do plano xy e é limitado pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Obteve-se o seguinte integral:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2+y^2)dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} (x^2+y^2)dx \right) dy$$

Esboce a região S e expresse o volume V como um integral duplo no qual a ordem de integração é trocada.

Sol: $\frac{4}{3}$

9. Usaram-se integrais duplos para calcular o volume de um sólido de volume V, que está sobre a região S do plano xy e é limitado pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Obteve-se o seguinte integral:

$$V = \int_1^2 \left(\int_x^{x^3} e^y \sqrt{\frac{x}{y}} dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_x^8 e^y \sqrt{\frac{x}{y}} dy \right) dx$$

Esboce a região S e expresse o volume V como um integral duplo no qual a ordem de integração é trocada.

Sol: $4e^8 + \frac{2}{3}e$

10. Esboce a região S e exprima o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ como um integral iterado em coordenadas polares:

    (a) $S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}, a > 0$

    (b) $S = \left\{(x,y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\right\}, 0 < a < b$

    (c) $S = \left\{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\right\}$

11. Usando coordenadas polares, calcule os integrais:

    (a)
    $$\int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx$$

    Sol: $\frac{3}{4}a^4\pi$

    (b)
    $$\int_0^a \left[\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx$$

    Sol: $\frac{a^3}{6}\left[\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$

12. Seja S a região triangular limitada pelos eixos coordenados e pela recta de equação $x + y = 2$. Calcule o integral $\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, fazendo a mudança de variáveis: $u = y - x$ e $v = y + x$.

Sol: $e - \frac{1}{e}$

13. Considere a transformação definida pelas equações $x = u + v$ e $y = v - u^2$.
    (a) Calcule o determinante da matriz jacobiana dessa transformação.
    Sol: $1 + 2u$
    (b) Considere um triângulo T no plano uv de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$. Esboce S, a imagem de T pela transformação dada, num plano xy.
    (c) Calcule a área de S, usando integrais duplos sobre S, e a área de T, usando integrais duplos sobre T.
    (d) Calcule o integral $\int\int_S (x - y + 1)^{-2} dxdy$
14. Demonstre as seguintes equações, introduzindo mudanças de variável apropriadas em cada caso:
    (a)
    $$\int\int_S f(x+y)dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)du$$
    onde $S = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$.
    (b)
    $$\int\int_S f(ax+by+c)dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\ \ f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right) du$$
    onde $S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.
    (c)
    $$\int\int_S f(xy)dxdy = \log(2)\int_{1}^{2} f(u)du$$
    onde S é a região do primeiro quadrante limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.
15. (a) Calcule a área do hemisfério S de raio $a > 0$ e de centro na origem. Utilize coordenadas polares.
    (b) Calcule a área da porção de superfície $z^2 = 2xy$ que está situada sobre o primeiro quadrante do plano xy e é cortada pelos planos $x = 2$ e $y = 1$.
    (c) Calcule a área da porção da superfície cónica $x^2 + y^2 = z^2$ que se encontra entre os planos $z = 0$ e $x + 2z = 3$.

(d) Calcule a área da porção da superfície cónica de revolução de eixo $0z$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

16. Seja $r > 0$ e $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-u^2} du$.

    (a) Mostre que $I^2(r) = \int\int_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, $R = [-r, r] \times [-r, r]$.

    (b) Sejam C_1 e C_2 dois discos circulares de centro na origem e tais que $C_1 \subset R \subset C_2$. Verifique que:
    $$\int\int_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I^2(r) \leq \int\int_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

    (c) Expresse os integrais sobre C_1 e C_2 em coordenadas polares e use (b) para concluir que $I(r) \to \sqrt{\pi}$ quando $r \to 0$. Note que assim se prova que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

17. Esboce as regiões de integração dos seguintes integrais:

    (a)
    $$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

    (b)
    $$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

18. (a) Seja T um tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2z$ e $y + 3z = 3$. Calcule $\int\int\int_T dxdydz$.

    Sol: 1

    (b) Seja V o sólido limitado pelos planos coordenados, pela superfície $z = x^2+y^2$ e pelo plano $x+y = 1$. Calcule, utilizando coordenadas cilíndricas, o volume do sólido.

    Sol: $\frac{1}{6}$

    (c) Seja W o sólido limitado pela superfície esférica $z^2+x^2+y^2 = a^2$ e pela superfície cónica $z^2 = x^2+y^2$ (exterior em relação à superfície cónica). Utilize coordenadas esféricas para calcular o volume de W.

    Sol: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

    (d) Seja U o sólido limitado pelo parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ e pela superfície $z = 4 - y^2$ (cilindro parabólico). Calcule o volume de U usando coordenadas cilíndricas.

Sol: 4π

(e) Calcule o volume da parte do cone $\phi = \frac{\pi}{4}$ situada dentro da esfera $\rho = 2a\cos\phi$.

Sol: πa^3

19. Seja $V_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z^2, 0 < z \leq 1\}$, $V_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1, 1 < z \leq 2\}$ e $V = V_1 \cup V_2$. Calcule:

$$\int\int\int_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

20. Seja $a > 0$ e $V = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq a, x^2 \geq y^2+z^2\}$. Calcule, usando coordenadas esféricas, o volume de V.

21. Sejam a e R tais que $0 < a < R$ e $T = \left\{(x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 \leq a^2\right\}$. Calcule, utilizando coordenadas cilíndricas, o volume de T.

    Sol: Volume de $T = 2\pi^2 a^2 R$

22. Seja $a > 0$ e $V_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq a^2\}$, $V_2 = \{(x,y,z) : x^2+z^2 \leq a^2\}$, $V_3 = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \leq a^2\}$ e $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Calcule o volume de V.

23. Seja $a > 0$ e $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2, (x-a)^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$. Calcule o volume de V e exprima-o em coordenadas esféricas explicitando os limites de integração.

24. Seja $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq (z-1)^2, z \in [0,1]\}$. Calcule:

$$\int\int\int_V \frac{z+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

25. Calcule o volume de V onde $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2z+1, z+y \leq 1\}$.

26. Calcule o volume limitado por $(z+1)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1$ e $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

27. Seja $S_n(a) = \{(x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \Re^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq a^2\}$ e

$$V_n(a) = \int\int_{S_n(a)} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

    Mostre que $V_n(a) = a^n V_n(1)$, isto é, o volume de uma esfera em $\Re^n$ de raio a é a^n vezes o volume de uma esfera de raio 1.