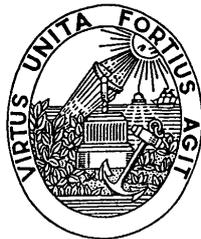


João Manuel R. S. Tavares

Comunicação Interna:

**APRESENTAÇÃO DE UMA MODELIZAÇÃO POR
ELEMENTOS FINITOS LINEARES DO TIPO AXIAL**



FEUP - *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

DEEC - *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*



INEB - *Instituto de Engenharia Biomédica*

Julho de 1998

Sumário

Nesta comunicação é apresentado um método de emparelhamento modal, baseado em princípios físicos, para o estabelecimento de correspondências e para o cálculo de descritores canónicos de forma. O método tem por base a ideia de descrever objectos em termos de simetrias generalizadas utilizando para tal os modos próprios de cada objecto. A descrição modal resultante é utilizada para o reconhecimento de objectos e sua caracterização; para tal, as similaridades entre duas formas são expressas em termos do valor da energia de deformação necessária para as alinhar. O emparelhamento modal também pode ser utilizado para a combinação linear de modelos segundo princípios físicos e, assim, sintetizar-se formas em termos de uma combinação pesada de formas protótipos deformadas segundo os seus modos. No geral, modos fornecem um ordenamento das deformações de uma forma do global para o local e assim permite a selecção dos tipos de deformações a considerar no alinhamento e na comparação de objectos.

Em contraste com outras técnicas, as quais requerem que a correspondência seja determinada com uma forma protótipo inicial, o método utiliza uma modelação por intermédio de elementos finitos axiais que permite a determinação dos modos próprios de cada objecto directamente a partir dos seus dados pontuais.

Uma implementação da técnica proposta foi por nós realizada para uma plataforma *PC* em ambiente *MS WINDOWS 95/NT* utilizando o ambiente integrado de desenvolvimento *MS VISUAL C++ 5.0*.

Também serão apresentados os resultados experimentais obtidos na deformação modal de formas, de emparelhamento de formas, na estimativa de deslocamentos para os dados que não foram devidamente emparelhados pela abordagem modal, de determinação da transformação rígida existente e de medição da deformação elástica envolvida.

Uma discussão sobre a influência dos vários parâmetros envolvidos no método e dos tipos das formas em estudo será apresentada no fim desta comunicação.

1 - Introdução

Um dos problemas principais da visão por computador é como deve ser realizada a descrição de características, contornos, superfícies e volumes de maneira a que possam ser reconhecidas e emparelhadas de vista para vista. As primeiras dificuldades são: os descritores do objecto são sensíveis ao ruído, o objecto pode não ser rígido, a aparência de um objecto deforma-se se a geometria utilizada na captação dos seus dados for alterada. Estes problemas motivaram a utilização de modelos deformáveis para interpolar, suavizar e segmentar dados.

Modelos deformáveis, por si só, não incluem um método para cálculo dos descritores canónicos para reconhecimento ou para obter a correspondência entre conjuntos de dados. Para resolver este problema Sclaroff e Pentland, [Pentland, 1990, 1991a], desenvolveram um método para representar formas como deformações canónicas a partir de um objecto protótipo. Descrevendo a forma do objecto em termos dos valores próprios da matriz de rigidez do objecto protótipo, é possível obter para a mesma uma descrição robusta e ordenada pela frequência. Além do mais, estes vectores ou modos próprios são um método intuitivo para descrição da forma pois correspondem aos eixos de simetria generalizados do objecto. Representando os objectos em termos das deformações modais, este método é robusto para o modelamento 3D, reconhecimento de objectos, e seguimento 3D utilizando pontos, contornos, distâncias e fluxo óptico.

Contudo o método de Sclaroff e Pentland ainda não resolve o problema da determinação da correspondência entre conjuntos de dados ou entre dados e modelos. Tal é devido à imposição de cada objecto ser necessariamente descrito por deformações a partir de um único objecto protótipo. Tal impõe à priori uma parametrização implícita dos dados e assim determinar implicitamente a correspondência entre os dados e o protótipo.

Para evitar a referida imposição Sclaroff, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1994b, 1995, 1995a; Tavares, 1998a], desenvolveu um método com o qual é possível obter os invariantes modais de forma directamente a partir dos dados. Tal permite calcular descritores canónicos robustos para o reconhecimento e para resolver problemas de correspondência entre dados de qualquer dimensão. No seu método Sclaroff modeliza cada objecto por intermédio de um elemento finito isoparamétrico¹ e determina para este as matrizes de massa, de rigidez e dos modos próprios de vibração. Obtendo estas matrizes para cada um dos dois modelos, Sclaroff obtém os emparelhamentos através da similaridade dos deslocamentos de cada dado pontual em cada espaço modal; desta forma, dados que apresentam deslocamentos semelhantes nos dois espaços modais são declarados como correspondentes. Para determinar os deslocamentos dos dados não emparelhados por análise modal, Sclaroff utiliza um processo de minimização da energia de deformação por mínimos quadrados segundo princípios físicos. Com este procedimento, são estimados os deslocamentos para os dados não emparelhados de forma a ser congruente com o próprio objecto em análise e com as propriedades do material virtual utilizado na modelização do mesmo. O valor determinado para a energia de deformação pode ser posteriormente utilizado como medida de similaridade entre os dois objectos em análise. Com a descrição modal utilizada Sclaroff consegue descrever as deformações de forma perfeitamente ordenada do nível global para o local através das frequências de vibração em modo livre².

Nesta comunicação é apresentado um procedimento para obter os emparelhamentos dos dados pontuais que constituem dois objectos, estimar os deslocamentos dos dados não

¹ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998].

² Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986].

emparelhados com êxito e obter uma medida de deformação. Este procedimento é baseado no utilizado por Sclaroff; no entanto, em vez de utilizar uma modelização por um único elemento finito isoparamétrico utiliza uma modelização por elementos finitos lineares do tipo axial³.

1.1 - A Ideia Base do Método Proposto

Considere-se o problema de dados dois conjuntos de dados pontuais pretender-se determinar se são ou não de dois objectos similares. A abordagem mais comum, para resolver este problema, é tentar determinar características locais distintivas que possam ser emparelhadas com alguma confiança; tal abordagem falha quando existe insuficiente informação local e quando as condições de obtenção dos dados ou de deformação alteraram significativamente a aparência das características locais utilizadas.

Uma outra abordagem consiste em determinar um referencial de copo centrado para cada objecto e depois tentar emparelhar os dados pontuais. Desde que os dados estejam descritos por coordenadas intrínsecas ou por coordenadas de corpo centrado, em vez de coordenadas cartesianas, utilizando a posição relativa é fácil obter a correspondência entre os dados dos dois objectos.

Muitos métodos para determinar o referencial de corpo centrado têm sido sugeridos, incluindo métodos de momentos de inércia, de determinação das simetrias e descritores polares de Fourier. Geralmente estes métodos apresentam as seguintes dificuldades: erros de amostragem, erros de parametrização e não unicidade. A grande contribuição do método de Sclaroff é a de determinar um sistema de referência local que evita, em grande parte, estas três dificuldades.

Erros de amostragem são dos três os melhores compreendidos. Toda a gente envolvida no domínio da visão artificial sabe que os dados observados e as suas localizações podem ser drasticamente alteradas de vista para vista. A solução mais comum para este tipo de problema é a de apenas utilizar estatísticas globais como momentos de inércia; contudo, na melhor das hipóteses, tais métodos oferecem soluções fracas ou parciais.

Erros de parametrização são mais subtis. O problema ocorre quando, por exemplo, ajusta-se um conjunto de dados pontuais utilizando-se uma esfera deformável 3D o que impõem um sistema coordenado radial nos dados em vez de permitir que os mesmos dados determinem por si só um adequado sistema de coordenadas. Consequentemente a descrição resultante é afectada fortemente, por exemplo, pelas distorções compressivas e de corte típicas da perspectiva. O elevado número de artigos sobre simetrias distorcidas é indicativo da seriedade deste tipo de problema [Sclaroff, 1995, 1995a].

Não unicidade é um problema óbvio para o reconhecimento e emparelhamento mas que é muitas vezes ignorado quando se procura um qualquer tipo de descrição estável. Virtualmente todos os métodos baseados em *splines*, em placas finas e em polinómios apresentam esta inabilidade para obter descrições canónicas; geralmente este problema é devido ao facto dos parâmetros para as superfícies consideradas serem definidos de forma arbitrária e assim não invariantes há mudança de vista, oclusões e deformações não rígidas.

A solução apresentada nesta comunicação é semelhante à proposta por Sclaroff, a menos do procedimento utilizado na modelização, como anteriormente já foi referido, e pode ser decomposta em três partes:

1. *É calculada uma descrição da forma que é robusta em relação há amostragem pela utilização de interpolação de Galerkin matematicamente associada ao método dos*

³ Elementos axiais são unicamente capazes de suportar esforços segundo a sua direcção. Este tipo de elementos é muito utilizado na modelização de estruturas do tipo treliça.

*elementos finitos*⁴.

2. *É utilizada uma modelização por intermédio de elementos finitos lineares do tipo axial que permite obter a parametrização da forma directamente a partir dos seus dados.*
3. *De seguida são utilizados os modos próprios desta descrição da forma para obter-se um sistema de coordenadas canónico ortogonal e ordenado pela frequência. Este sistema pode ser encarado como os eixos de simetria generalizados da forma.*

Com a descrição da localização dos dados pontuais neste sistema de corpo centrado é fácil emparelhar dados correspondentes e medir a similaridade entre objectos diferentes. Tal permite o reconhecimento de objectos e determinar se diferentes objectos são relacionados por simples transformações físicas.

Um diagrama do método proposto nesta comunicação esta representado na *Figura 1*. Para cada imagem, consideramos as localizações dos seus dados pontuais $X = [X_1 \cdots X_m]$ e utilizam-se estes como nodos na construção para a forma de um modelo de elementos finitos constituídos por um determinado material virtual (por exemplo, borracha).

De seguida são determinados os modos próprios (vectors próprios) $\{\phi\}_i$ do modelo de elementos finitos. Estes modos proporcionam uma descrição ortogonal, ordenada pela frequência, da forma e das suas deformações naturais. Tais vectors são, por vezes, designados por vectors de forma para cada modo [Kelly, 1993; Meirovitch, 1986] pois descrevem como cada modo deforma a forma por alteração das localizações originais dos dados, por exemplo:

$$X_{deformado} = X + a \{\phi\}_i$$

onde a é um escalar.

Em problemas bidimensionais os três primeiros modos são os modos de corpo rígido da translação e da rotação, em problemas tridimensionais são os seis primeiros modos, e os restantes são os modos não rígidos [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986]. Estes modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, modos de baixa frequência descrevem deformações globais enquanto modos de elevada frequência descrevem mais as deformações localizadas. Este ordenamento do global para o local é bastante útil na comparação e emparelhamento de formas.

Os modos próprios também formam um sistema de coordenadas ortogonal e centrado no objecto para descrição da localização dos dados pontuais. Isto é, a localização de cada dado pontual pode ser descrita de forma única em termos de como se move segundo cada modo próprio. A transformação entre as localizações no sistema cartesiano e no sistema modal é conseguida pela utilização dos vectors próprios do modelo finito como uma base coordenada. Na técnica utilizada e inicialmente proposta por Sclaroff, [Sclaroff, 1993, 1994, 1984a, 1994b, 1995, 1995a; Tavares, 1998a], dois grupos de dados são comparados neste espaço próprio. A ideia importante é que os modos de baixa ordem para dois objectos similares irão ser bastante idênticos mesmo na presença de deformações afins⁵, deformações não rígidas, perturbações locais da forma ou de ruído.

Utilizando esta propriedade, correspondência entre dados é determinada por

⁴ Técnica *standard* de engenharia para simular o comportamento dinâmico de um objecto. Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Segerlind, 1984; Tavares, 1998].

⁵ Ver, por exemplo, [Folley 1991; Hall, 1993; Tavares, 1995].

emparelhamento modal. Assim a correspondência entre duas formas pode ser determinada por comparação das suas trajectórias no espaço modal. Dados cujo o emparelhamento apresenta um elevado grau de confiança são obtidos por este processo, os deslocamentos dos restantes serão estimados pela utilização do modelo físico como uma restrição de suavização.

Finalmente determinada a correspondência entre muitos dos dados pontuais que constituem dois objectos pode-se medir as suas diferenças de forma. Como o processo modal decompõe as deformações num conjunto ortogonal pode-se medir selectivamente as diferenças de corpo rígido, ou deformações do tipo projectiva de baixa ordem, ou deformações que são principalmente locais. Consequentemente pode-se reconhecer objectos numa maneira flexível e geral.

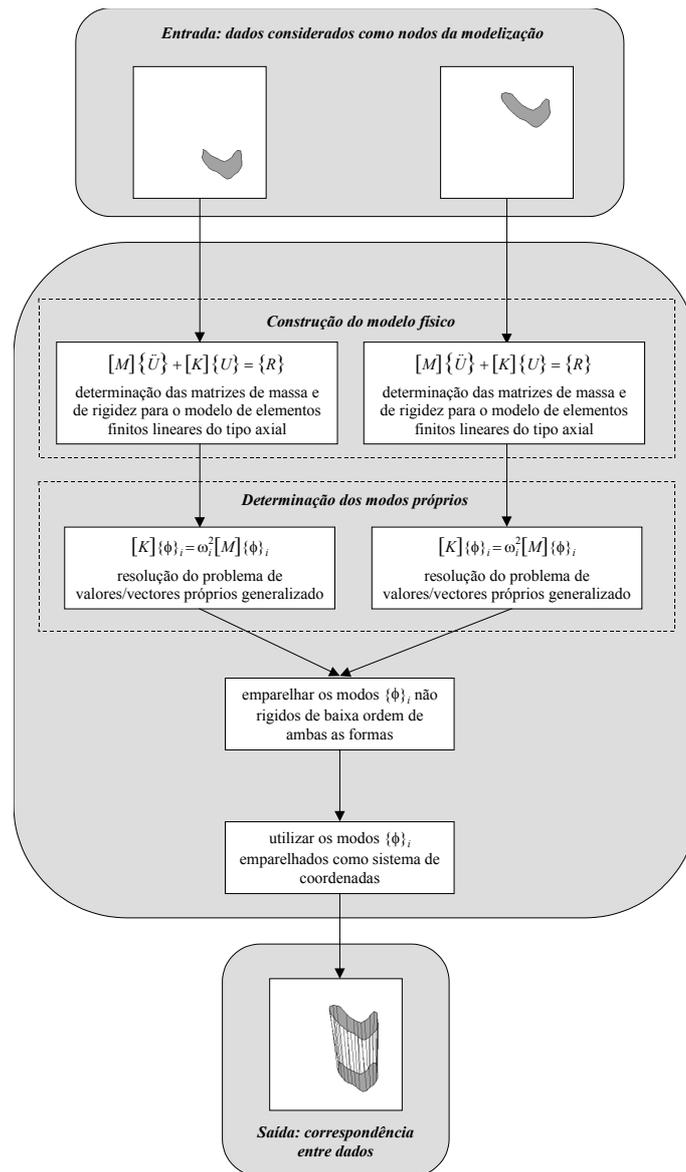


Figura 1 - Diagrama do método proposto nesta comunicação.

Alternativamente dadas as correspondências pode-se alinhar ou destorcer uma forma numa outra. Tal alinhamento é útil na fusão de dados obtidos por sensores diferentes, ou para a comparação de dados obtidos em instantes de tempo distintos ou sobre condições diferentes. Também é útil em computação gráfica em que a referida distorção de uma forma numa outra

é designada por *morphing*⁶.

Em resumo podemos afirmar que a técnica modal inicialmente desenvolvida por Sclaroff oferece três vantagens sobre outras técnicas existentes. Primeira, pode ser utilizada automaticamente para identificar e etiquetar correspondentes dados entre duas formas; de tal forma, poder ser possível, sem intervenção de um utilizador, alinhar, comparar e realizar *morphing* entre as duas. Segunda, a representação modal obtida permite a separação de diferentes tipos de deformação. Por última, os parâmetros de deformação correspondem qualitativamente aos referidos como utilizados pelos humanos e, desta forma, podem ser utilizados para animação e para busca em bases de dados [Sclaroff, 1995].

Além do mais, deve-se ter em conta que a representação modal é suportada pelas teorias defendidas por biólogos envolvidos no estudo da morfologia dos esqueletos e das formas dos animais segundo as quais as formas de espécies diferentes estão relacionadas entre si por deformações [Sclaroff, 1995]. Estudos recentes também utilizam as deformações modais para a descrição do crescimento de órgãos de animais e no registo entre órgãos do mesmo tipo [Martin, 1998; Syn, 1995, 1995a].

Quando o número de dados a ter em conta é muito elevado a obtenção dos modos próprios pode ser um processo bastante custoso em termos computacionais; contudo, para uma classe particular de formas similares os modos podem ser predeterminados e generalizados [Pentland, 1990, 1991a]. Em alguns casos, para topologias do tipo tubo e esfera, Nastar em [Nastar, 1994a] demonstra que os modos de deformação podem ser determinados analiticamente.

Nesta comunicação será apresentada seguidamente uma introdução breve ao método dos elementos finitos; no ponto seguinte, será apresentada a determinação das matrizes para um elemento finito 2D do tipo axial; após esta apresentação, é descrita de forma introdutória a análise modal; seguidamente é descrito o procedimento para a determinação das correspondências; no sexto ponto é descrita a abordagem para determinar o alinhamento de dois objectos, para a sua comparação e para a descrição; alguns resultados experimentais obtidos, por uma implementação do método proposto, para a deformação modal de um objecto, determinação dos emparelhamentos, estimativa dos deslocamentos por minimização da energia de deformação para os dados não emparelhados com êxito e para a determinação da energia de deformação serão apresentados no sétimo ponto; finalmente, no oitavo e último ponto, serão apresentadas algumas conclusões e perspectivas de desenvolvimentos futuros.

2 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos

O aumento da complexidade das estruturas e da capacidade dos computadores favoreceu o aparecimento de novos métodos de análise nomeadamente o método dos elementos finitos. Após esta utilização inicial, em problemas de elasticidade [Bathe, 1996; Gomes, 1995; Martins, a; Segerlind, 1984; Oliveira, 1990], a mesma foi se rapidamente estendendo a outros domínios como o da transferência de calor e da mecânica dos fluidos [Bathe, 1996; Segerlind, 1984], do electromagnetismo, das vibrações mecânicas e acústicas [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986], da visão por computador⁷, da computação gráfica [Essa, 1992; Pentland, 1989;

⁶ Ver, por exemplo, [Folley 1991].

⁷ Desde a primeira utilização do método dos elementos finitos por Pentland em 1989, [Pentland, 1989], no domínio da visão por computador que a mesma tem vindo a generalizar-se às suas diferentes áreas; nomeadamente:

- na análise de movimento 2D e 3D rígido e não rígido [Benayoun, 1994, 1994a; Cootes, 1995; Nastar, 1994, 1994a; Pentland, 1991; Sclaroff, 1994a];

Pentland, 1989a], da realidade virtual (nomeadamente em simulações cirúrgicas [Bro-Nielsen, 1996; Keeve, 1996]), etc. O objectivo do método é a obtenção de uma formulação que possa explorar a análise, de forma automática, de sistemas complexos, e/ou irregulares, por intermédio de programas computacionais. Para atingir tal objectivo, o método considera o sistema global como equivalente a um agrupamento de elementos finitos no qual cada um destes é uma estrutura contínua mais simples. Impondo que em certos pontos comuns a vários elementos, designados por nodos ou nós, os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas em equilíbrio o sistema global, resultante do agrupamento, reage como uma única entidade.

Apesar do método dos elementos finitos considerar os elementos individuais como contínuos é, na sua essência, um procedimento de discretização pois exprime os deslocamentos (e a partir destes por diferenciação as deformações e, no caso de comportamento linear utilizando-se a lei de Hooke⁸, a partir destas as tensões) em qualquer ponto do elemento contínuo em termos de um número finito de deslocamentos nos pontos nodais multiplicados por funções de interpolação⁹ apropriadas. A vantagem do método é que a equação de movimento para o sistema global pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas individualmente para cada elemento finito utilizado na modelização. O movimento em qualquer ponto no interior de cada um destes elementos é obtido por intermédio de interpolação sendo, geralmente, as funções de interpolação polinómios de grau reduzido e iguais para elementos do mesmo tipo.

Uma outra vantagem do método dos elementos finitos é a facilidade com que a sua generalização pode ser conseguida para a resolução de problemas bidimensionais e tridimensionais constituídos por vários materiais diferentes e com fronteiras irregulares.

Os passos essenciais de uma solução numérica pelo método dos elementos finitos são os seguintes:

1. *Subdivisão do sistema global contínuo em elementos finitos;*
2. *Para cada elemento finito m cálculo da matriz de rigidez $[K^{(m)}]$ e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa $[M^{(m)}]$ e da matriz de amortecimento dependente da velocidade $[C^{(m)}]$ relativamente a um referencial local conveniente;*
3. *Determinação para o sistema global da matriz de rigidez $[K]$ e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa $[M]$ e da matriz de amortecimento dependente da velocidade $[C]$ por agrupamento das matrizes de cada elemento finito utilizado na modelização expressas relativamente a um mesmo sistema de referência global;*

-
- na obtenção de estruturas 2D e 3D [Cohen, 1991; Kakadiaris, 1997; Pentland, 1991];
 - na análise de faces [Essa, 1995];
 - na análise de objectos deformáveis 2D e 3D [McInerney, 1996; Park, 1996; Pentland, 1990; Pentland, 1991a];
 - representação de imagens 2D e 3D [Moulin, 1992];
 - registo de imagens e modelos 2D e 3D [Syn, 1995a];
 - descrição de objectos 2D e 3D [Syn, 1995; Sclaroff, 1993, 1994, 1994b, 1995, 1995a].

⁸ Ver, por exemplo, [Timoshenko, 1970].

⁹ Também designadas por funções de forma.

4. Determinação do vector das cargas aplicadas ao sistema global $\{R\}$;
5. Estabelecimento das equações de movimento para o sistema global $[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}$;
6. Cálculo das variáveis do problema em questão; tais como: deslocamentos, velocidades, deformações e tensões.

O método dos elementos finitos apresenta diversas formulações possíveis. Em problemas estáticos, por exemplo no caso da análise estrutural, é comum derivar-se a matriz de rigidez utilizando-se a abordagem directa que consiste no relacionamento do vector dos deslocamentos nodais com o vector das forças nodais. Tal abordagem apresenta algumas dificuldades em problemas dinâmicos, tais como na análise de vibrações, sendo preferível neste tipo de problemas obter-se para cada elemento individual a derivação das matrizes de elementos finitos de rigidez, de massa e do vector das forças não conservativas nodais a partir respectivamente da energia cinética, da energia potencial e da expressão dos trabalhos virtuais¹⁰; esta abordagem é geralmente designada por abordagem variacional.

Note-se que o método dos elementos finitos não dá, em princípio, soluções exactas. No entanto à medida que usamos mais e mais elementos na modelização a solução obtida deve convergir para a solução exacta.

2.1 - Formulação do Método dos Elementos Finitos

Neste ponto são derivadas as equações que governam o método dos elementos finitos. Em primeiro lugar consideremos um corpo tridimensional geral, *Figura 2*.

No método dos elementos finitos o corpo em questão, *Figura 2*, é aproximado pela consideração que o mesmo é equivalente a um conjunto de elementos finitos discretos agrupados, de forma adequada, pelos pontos nodais, também designados por nodos ou nós, localizados nas fronteiras dos mesmos. Os deslocamentos referenciados num sistema de coordenadas local (x, y, z) , a ser escolhido de forma conveniente, no interior de cada elemento são assumidos como sendo função dos deslocamentos dos N nodos do mesmo. Deste modo, para o elemento m temos:

$$\{u^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\}$$

Eq. 1

onde $[N^{(m)}]$ é a matriz das funções de forma, por vezes também designada por matriz de interpolação dos deslocamentos, o índice m significa elemento m , e $\{\hat{U}\}$ é o vector dos deslocamentos globais dos pontos nodais com três componentes U_i , V_i e W_i , incluindo os deslocamentos nos suportes do conjunto agrupado; por exemplo $\{\hat{U}\}$ é um vector de dimensão $3N$:

$$\{\hat{U}\}^T = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \cdots \quad U_N V_N W_N].$$

¹⁰ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Tavares, 1998; Timoshenko, 1982].

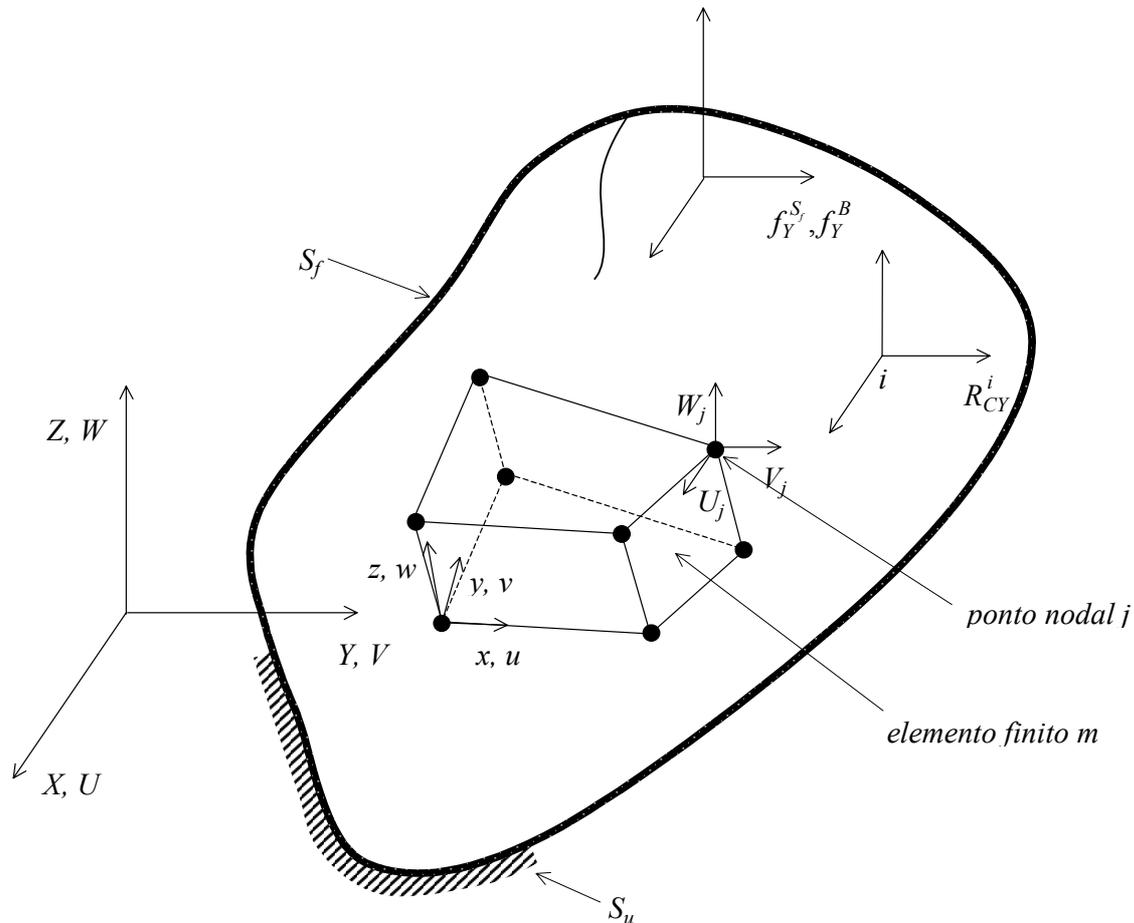


Figura 2 - Corpo tridimensional geral com um elemento finito tridimensional de oito nós.

Este vector pode ser escrito de forma simplificada como:

$$\{\hat{U}\}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_n]$$

onde U_i representa um deslocamento segundo uma qualquer direcção X , Y ou Z , ou mesmo segundo uma direcção não alinhada com estes eixos coordenados mas alinhados com os eixos de um outro sistema de coordenadas local, e também pode significar uma rotação. Como $\{\hat{U}\}$ inclui os deslocamentos, e rotações, nos pontos de suporte do conjunto agrupado, numa fase seguinte é necessário impor os valores conhecidos de $\{\hat{U}\}$ antes de resolver o problema para os deslocamentos nodais não conhecidos.

Na Figura 2 está representado um elemento finito típico para uma modelização possível para o corpo. Este elemento tem oito nós, um em cada um dos seus vértices, e pode ser interpretado como um elemento finito 3D equivalente a um tijolo. Deveremos interpretar a modelização como uma construção de elementos deste tipo agrupados de forma a não existirem falhas entre os vários domínios de cada elemento. O elemento considerado é apenas um exemplo; na prática podem ser utilizados elementos com geometrias diferentes e com nós no interior das faces e no interior dos mesmos.

A escolha do elemento e a construção das correspondentes entradas na matriz $[N^{(m)}]$ (que depende da sua geometria, do seu número de nós/graus de liberdade, e dos requisitos de convergência) constituem as etapas básicas do método dos elementos finitos.

Apesar de todos os deslocamentos nodais estarem representados no vector $\{\hat{U}\}$, devemos notar que para um dado elemento apenas os deslocamentos nos seus nodos afectam a distribuição dos deslocamentos e das deformações no interior do mesmo.

Assumindo os deslocamentos da Eq. 1 podemos agora determinar as deformações do elemento correspondentes:

$$\{\varepsilon^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\}$$

Eq. 2

onde a matriz $[B^{(m)}]$, geralmente designada por matriz de deformação, relaciona os deslocamentos com as deformações e é obtida pela apropriada derivação e combinação das linhas da matriz $[N^{(m)}]$.

O propósito de definir os deslocamentos e as deformações do elemento em termos do vector dos deslocamentos nodais do conjunto agrupado pode por agora ainda não ser óbvio. Contudo, será verificado que procedendo desta forma, a utilização da Eq. 2 e do princípio dos deslocamentos virtuais¹¹ permite, de forma automática, um processo eficiente de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos nas matrizes do sistema global. Este processo de agrupamento é designado pelo método directo de rigidez¹².

As tensões num elemento finito estão relacionadas com as deformações do mesmo e com as suas tensões iniciais pela expressão:

$$\{\sigma^{(m)}\} = [D^{(m)}] \{\varepsilon^{(m)}\} + \{\sigma^{I(m)}\}$$

Eq. 3

onde $[D^{(m)}]$ é a matriz de elasticidade para o elemento m e $\{\sigma^{I(m)}\}$ é o vector das conhecidas tensões iniciais para o mesmo. A lei para o material esta especificada na matriz $[D^{(m)}]$ e pode ser quer para um elemento isotrópico quer para anisotrópico e pode variar de elemento para elemento.

Utilizando os deslocamentos no interior de cada elemento, como descritos na Eq. 1, pode-se agora derivar as equações de equilíbrio que correspondem aos deslocamentos nodais do conjunto de elementos finitos devidamente agrupado. Em primeiro, reescrevemos a equação do princípio dos deslocamentos virtuais como uma soma de integrações sobre o volume e áreas de todos os elementos finitos utilizados na discretização do corpo:

$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \{\varepsilon^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \{\bar{u}^{(m)}\}^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} +$$

$$\sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \{\bar{u}^{(m)}\}^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} + \sum_i \{\bar{u}^i\}^T \{R_C^i\}$$

Eq. 4

onde $m = 1, 2, \dots, L$, onde L é o número de elementos e $S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}$ representa as superfícies do elemento m que pertencem à superfície S do corpo. Para elementos totalmente rodeados

¹¹ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Tavares, 1998].

¹² Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Tavares, 1998].

por outros não existe este tipo de superfície; contudo, para elementos na superfície do corpo uma ou mais superfícies deste tipo são incluídas no integral das forças que actuam sobre a mesma. Note-se que foi assumido que na Eq. 4 os nodos estão localizados nos pontos onde as cargas concentradas estão aplicadas, apesar de uma carga concentrada poder obviamente ser incluída no integral de forças de superfície.

É importante notar que desde que as integrações na Eq. 4 sejam executadas sobre os volumes e superfícies dos elementos utilizados - por razões de eficiência para cada elemento pode ser utilizado nos cálculos um diferente e qualquer sistema de coordenadas conveniente - apesar de tudo, para um dado campo dos deslocamentos virtuais, o trabalho interno virtual é um número, assim como também o é o trabalho externo virtual, e este número pode ser determinado por integração utilizando um qualquer sistema de coordenadas. Obviamente que é assumido que para cada integral na Eq. 4 é utilizado um único sistema de coordenadas para todas as variáveis; por exemplo, o vector $\{\bar{u}^{(m)}\}$ está definido no mesmo sistema de coordenadas do vector $\{f^{B(m)}\}$.

As relações na Eq. 1 e na Eq. 2 foram obtidas para os deslocamentos e deformações desconhecidos e reais do elemento. Na utilização do princípio dos deslocamentos virtuais pode-se utilizar as mesmas considerações para os deslocamentos e deformações virtuais:

$$\{\bar{u}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}] \{\hat{U}\} \text{ e } \{\bar{\varepsilon}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}] \{\hat{U}\}.$$

Desta forma as matrizes de rigidez e de massa do elemento serão matrizes simétricas.

Se proceder-se à substituição na Eq. 4 obtemos:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}\} \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \right] \{\hat{U}\} &= \{\hat{U}\}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} \right] \\ &+ \left[\sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_n^{(m)}} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} \right] - \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{\sigma^{I(m)}\} dV^{(m)} \right] + \{R_C\} \end{aligned}$$

Eq. 5

onde as matrizes de interpolação dos deslocamentos na superfície $[N^{S(m)}]$ são obtidas a partir das matrizes de interpolação dos deslocamentos $[N^{(m)}]$ da Eq. 1 por adequada substituição das coordenadas da superfície do elemento e $\{R_C\}$ é o vector das cargas concentradas aplicadas nos nós dos elementos agrupados.

Deveremos notar que a componente i do vector $\{R_C\}$ é a força nodal concentrada que corresponde à componente i do vector de deslocamentos $\{\hat{U}\}$. Na Eq. 5 os vectores de deslocamentos nodais $\{\hat{U}\}$ e $\{\bar{\hat{U}}\}$ do conjunto agrupado são independentes do elemento m e assim foram retirados do interior dos somatórios.

Para obter a partir da Eq. 5 as equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o princípio dos deslocamentos virtuais n vezes impondo deslocamentos virtuais unitários a todas as componentes do vector $\{\bar{\hat{U}}\}$. Na primeira aplicação obtemos $\{\bar{\hat{U}}\} = \{e_1\}$, na segunda aplicação $\{\bar{\hat{U}}\} = \{e_2\}$, e por adiante, até que na aplicação n obtemos $\{\bar{\hat{U}}\} = \{e_n\}$, resultando assim:

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

Eq. 6

onde está omitida a matriz identidade $[I]$, devido aos deslocamentos virtuais de cada lado da equação, e o vector $\{R\}$ é:

$$\{R\} = \{R_B\} + \{R_S\} - \{R_I\} + \{R_C\}$$

Eq. 7

e, como a partir de agora será referenciado, o vector para os deslocamentos nodais desconhecidos está referenciado como $\{U\}$ (isto é, $\{U\} \equiv \{\hat{U}\}$).

A matriz $[K]$ é a matriz de rigidez para o sistema global:

$$[K] = \sum_m \underbrace{\int [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)}}_{[K^{(m)}]}$$

Eq. 8

O vector de carga $\{R\}$ inclui o efeito das forças de corpo:

$$\{R_B\} = \sum_m \underbrace{\int [N^{(m)}]^T [f^{B(m)}] dV^{(m)}}_{\{R_B^{(m)}\}},$$

Eq. 9

o efeito das forças de superfície:

$$\{R_S\} = \sum_m \underbrace{\int [N^{S(m)}]^T [f^{S(m)}] dS^{(m)}}_{\{R_S^{(m)}\}},$$

Eq. 10

o efeito da tensão inicial:

$$\{R_I\} = \sum_m \underbrace{\int [B^{(m)}]^T \{\sigma^{I(m)}\} dV^{(m)}}_{\{R_I^{(m)}\}},$$

Eq. 11

e as cargas concentradas $\{R_C\}$.

Nota-se que o somatório dos integrais de volume na Eq. 8 exprime a adição directa das matrizes de rigidez dos elementos utilizados $[K^{(m)}]$ para obter-se a matriz de rigidez do sistema global $[K]$. Do mesmo modo, o agrupamento do vector de forças de corpo $\{R_B\}$ é determinada pela adição directa dos vectores das forças de corpo dos elementos utilizados

$\{R_B^{(m)}\}$; e os vectores $\{R_S\}$ e $\{R_I\}$ são obtidos de forma similar. O processo de agrupamento das matrizes e dos vectores dos elementos por esta adição directa é designado pelo método directo de rigidez.

Esta escrita elegante do processo de agrupamento baseia-se em dois factores principais: primeiro, as dimensões de todas as matrizes, e de todos os vectores, a serem somadas são as mesmas e, segundo, os graus de liberdade de cada elemento são iguais aos graus de liberdade do conjunto agrupado. Evidentemente que na prática apenas as linhas e colunas diferentes de zero para as matrizes e vectores de cada elemento são calculadas, correspondendo aos verdadeiros graus de liberdade nodais de cada elemento, e o agrupamento é executado utilizando para cada elemento um vector de conectividade no qual são guardados os índices dos graus de liberdade para o elemento em termos do conjunto agrupado. Na prática, também, as matrizes e os vectores de cada elemento finito podem ser primeiramente calculadas relativamente aos seus graus de liberdade locais, não alinhados com os graus de liberdade do conjunto agrupado; neste caso, antes de se proceder ao agrupamento deve-se realizar uma transformação das matrizes e vectores dos graus de liberdade locais para os graus de liberdade globais. Isto equivale a transformar o sistema de coordenadas local, no qual estão referenciados os graus de liberdade locais, no sistema de coordenadas global, no qual estão referenciados os graus de liberdade globais.

A Eq. 6 é a equação de equilíbrio estático para o sistema global. Nas considerações deste equilíbrio as forças aplicadas podem variar com o tempo; neste caso, os deslocamentos também variaram com o tempo e a Eq. 6 é a equação de equilíbrio para qualquer ponto específico no tempo. Contudo, se as forças são realmente aplicadas de forma rápida as forças de inércia necessitam de ser consideradas; isto é, é necessário resolver um verdadeiro sistema dinâmico. Utilizando-se o princípio de Alembert¹³ pode-se simplesmente incluir as forças de inércia como parte das forças de corpo. Assumindo que as acelerações são aproximadas da mesma maneira que os deslocamentos na Eq. 7 a contribuição das forças totais de corpo no vector das cargas $\{R\}$ é (com o sistema de coordenadas X, Y, Z estacionário):

$$\{R_B\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T [\{f^{B(m)}\} - \rho^{(m)} [N^{(m)}] \{\ddot{U}\}] dV^{(m)}$$

Eq. 12

onde os vectores $\{f^{B(m)}\}$ já não incluem as forças de inércia, $\{\ddot{U}\}$ é o vector das acelerações nodais (isto é, a segunda derivada de $\{U\}$ em relação ao tempo), $\rho^{(m)}$ é a densidade de massa do elemento m . Neste caso as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$

Eq. 13

onde $\{R\}$ e $\{U\}$ são dependentes do tempo. A matriz $[M]$ é a matriz de massa para o sistema global:

¹³ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Tavares, 1998].

$$[M] = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N^{(m)}]^T [N^{(m)}] dV^{(m)}}_{[M^{(m)}]}.$$

Eq. 14

Na medição das respostas dinâmicas reais do sistema global é observado que a energia é dissipada durante a vibração; na análise de vibrações tal dissipação é geralmente considerada pela introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Introduzindo estas forças como contribuições adicionais às forças de corpo obtemos, correspondendo à Eq. 12:

$$\{R_B\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \left[[N^{(m)}]^T \left[\{f^{B(m)}\} - \rho^{(m)} [N^{(m)}] \{\ddot{U}\} - \kappa^{(m)} [N^{(m)}] \{\dot{U}\} \right] dV^{(m)} \right].$$

Neste caso os vectores $\{f^{B(m)}\}$ já não incluem as forças de inércia nem de amortecimento dependente da velocidade, $\{\dot{U}\}$ é o vector das velocidades nodais (isto é a primeira derivada de $\{U\}$ em relação ao tempo), e $\kappa^{(m)}$ é o parâmetro de amortecimento para o elemento m . Neste caso, as equações de equilíbrio resultantes são:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$

Eq. 15

onde $[C]$ é a matriz de amortecimento do sistema global:

$$[C] = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} [N^{(m)}]^T [N^{(m)}] dV^{(m)}}_{[C^{(m)}]}.$$

Na prática é difícil, se não impossível, determinar para sistemas gerais de elementos finitos os parâmetros de amortecimento para os elementos que os constituem, particularmente porque as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, a matriz $[C]$ não é geralmente agrupada a partir das matrizes de amortecimentos dos elementos mas é construída utilizando-se as matrizes de massa e de rigidez do sistema global conjuntamente com resultados experimentais do valor do montante de amortecimento. Assim a matriz de amortecimento do sistema $[C]$ é uma combinação linear de potências das matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ do mesmo, isto é:

$$[C] = \alpha [K]^r + \beta [M]^s$$

onde α e β são valores reais e r e s são valores inteiros; nestes casos, o amortecimento é designado por proporcional. Se r e s são iguais a um, então o amortecimento é proporcional e viscoso ficando a equação matricial de movimento para o sistema global com a forma:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [\alpha [M] + \beta [K]] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}.$$

Até este momento considerou-se que cada elemento individual apresenta nodos livres; isto é, nodos que podem sofrer deslocamentos sem nenhum tipo de restrições. A implicação é que o sistema global não está restringido e pode sofrer movimentos rígidos e, desta forma, a matriz $[K]$ torna-se singular. Contudo muitos sistemas são suportados de forma a impedir movimentos rígidos, o que é reflectido nas condições da fronteira geométrica. Outros sistemas, designados por indeterminados, são suportados de maneira que os deslocamentos são nulos num número de pontos superior ao requerido para impedir o movimento rígido.

Um maneira simples de resolver o problema no qual a matriz $[K]$ é singular e o sistema é suportado de tal maneira que um certo número de deslocamentos nodais são nulos é eliminar das matrizes $[M]$, $[C]$, $[K]$ e $\{F\}$ o correspondente número de linhas e colunas que estão associadas aos nodos restringidos.

Em resumo uma análise completa de um sistema pelo método dos elementos finitos consiste no cálculo da matriz de rigidez $[K]$, e das matrizes de massa $[M]$ e de amortecimento $[C]$ numa análise dinâmica, e do vector das cargas $\{R\}$, resolvendo para os deslocamentos $\{U\}$ a partir da Eq. 6 (ou $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$, $\{\ddot{U}\}$ a partir da Eq. 13 ou da Eq. 15), e de seguida determinar as deformações e as tensões utilizando respectivamente a Eq. 2 e a Eq. 3.

2.1.1 - Graus de Liberdade Locais e Globais

A derivação das matrizes dos elementos permite concluir que é mais fácil e conveniente estabelecer em primeiro lugar as matrizes correspondentes aos graus de liberdade locais do elemento. A construção das matrizes do elemento finito que correspondem aos graus de liberdade do sistema global (ou seja, aos graus de liberdade globais), utilizados na Eq. 8 até à Eq. 14, podem posteriormente ser obtidas directamente pela identificação dos graus de liberdade globais que correspondem aos graus de liberdade locais do mesmo. Contudo considerando as matrizes $[N^{(m)}]$, $[B^{(m)}]$, $[K^{(m)}]$, e por aí adiante, definidas relativamente aos graus de liberdade globais apenas as linhas e colunas que correspondem aos graus de liberdade do elemento têm entradas não nulas, e o objectivo principal na definição destas matrizes específicas foi apenas o de ser possível exprimir o processo de agrupamento das matrizes dos elementos de uma maneira teoricamente elegante. Em implementações práticas, do método dos elementos finitos, esta elegância também está presente; contudo, todas as matrizes dos elementos são calculadas correspondendo apenas aos graus de liberdade de cada elemento e posteriormente são agrupadas directamente utilizando a correspondência entre os graus de liberdade locais do mesmo e os graus de liberdade globais do conjunto agrupado. Assim considerando apenas os graus de liberdade locais dos nodos do elemento incluídos no vector $\{\hat{u}\}$ podemos escrever:

$$\{u\} = [N] \{\hat{u}\}$$

Eq. 16

onde as entradas no vector $\{u\}$ são os deslocamentos do elemento medidos num qualquer sistema de coordenadas local. A seguir também temos:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\hat{u}\}.$$

Eq. 17

Considerando as relações na Eq. 16 e na Eq. 17 o facto de nenhum índice superior ser utilizado nas matrizes de interpolação indica que as matrizes são definidas relativamente aos graus de liberdade locais do elemento em questão. Utilizando as relações para as matrizes do elemento de rigidez, de massa, e os cálculos anteriormente utilizados para o vector de carga, obtemos:

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$$

Eq. 18

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV,$$

Eq. 19

$$\{R_B\} = \int_V [N]^T \{f^B\} dV,$$

Eq. 20

$$\{R_S\} = \int_S [N^S]^T \{f^B\} dS,$$

Eq. 21

$$\{R_I\} = \int_V [B]^T \{\sigma^I\} dV,$$

Eq. 22

onde todas as variáveis são definidas como na Eq. 8 até à Eq. 14, mas correspondendo aos graus de liberdade locais do elemento finito considerado. Desde que as matrizes dadas na Eq. 18 até à Eq. 22 estejam calculadas, podem ser agrupadas directamente, pelo processo descrito anteriormente, determinando-se assim as matrizes para o sistema global.

Neste processo de agrupamento é assumido que as direcções dos deslocamentos nodais do elemento $\{\hat{u}\}$ na Eq. 16 são as mesmas das direcções dos deslocamentos nodais globais $\{U\}$. Contudo, geralmente é conveniente começar a derivação das matrizes e dos vectores relativamente aos graus de liberdade locais do elemento $\{\tilde{u}\}$ que não necessariamente alinhados com os graus de liberdade globais do sistema agrupado $\{\hat{u}\}$. Neste caso temos:

$$\{u\} = [\tilde{N}] \{\tilde{u}\}$$

Eq. 23

e

$$\{\tilde{u}\} = [T] \{\hat{u}\}$$

Eq. 24

onde a matriz $[T]$ transforma os graus de liberdade $\{\hat{u}\}$ nos graus de liberdade $\{\tilde{u}\}$ e a Eq. 24 corresponde a uma transformação de tensor de primeira ordem; as entradas na coluna j da

matriz $[T]$ são os co-senos de direcção de um vector unitário correspondendo ao grau de liberdade j do vector $\{\hat{u}\}$ quando medido segundo as direcções dos graus de liberdade $\{\tilde{u}\}$. Substituindo a Eq. 24 na Eq. 23, obtemos:

$$[N] = [\tilde{N}][T].$$

Eq. 25

Assim, identificando todas as matrizes de elementos finitos correspondendo aos graus de liberdade $\{\hat{u}\}$ com um $\tilde{}$ sobre os mesmos, obtemos a partir da Eq. 25 e da Eq. 18 até à Eq. 22:

$$[K] = [T]^T [\tilde{K}] [T]; [M] = [T]^T [\tilde{M}] [T];$$

$$\{R_B\} = [T]^T \{\tilde{R}_B\}; \{R_S\} = [T]^T \{\tilde{R}_S\}; \{R_I\} = [T]^T \{\tilde{R}_I\}.$$

Devemos notar que estas transformações também são utilizadas quando são impostos deslocamentos na fronteira que não correspondem aos graus de liberdade globais do sistema.

3 - Matrizes para um Elemento Finito 2D do tipo Axial

Utilizando-se a abordagem variacional, [Meirovitch, 1986], as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais equivalentes podem ser obtidos através das expressões em termos de coordenadas nodais, respectivamente, para a energia potencial, para a energia cinética e para o trabalho virtual.

O deslocamento axial do sistema de segunda ordem da Figura 3 pode ser escrito com a forma:

$$u(x,t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) = \{N(x)\}^T \{\hat{u}(t)\}$$

onde $\{N(x)\}$ é o vector de dimensão dois das funções de forma, com o índice a indicar qual o nodo com que cada função de forma está associada, e $\{\hat{u}(t)\}$ é o correspondente vector de deslocamentos nodais. Deve-se notar que esta equação apenas é válida no interior do elemento em questão e não é aplicável fora deste.

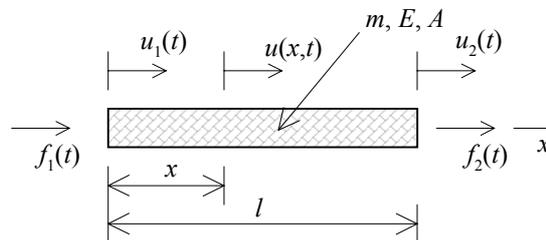


Figura 3 - Elemento axial.

A energia cinética para um elemento finito m do tipo axial é simplesmente:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \{\dot{u}(t)\}^T \{N(x)\} \{N(x)\}^T \{\dot{u}(t)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}(t)\}$$

onde:

$$[M^{(m)}] = \int_0^l m(x) \{N(x)\} \{N(x)\}^T dx$$

é a matriz (2×2) simétrica de massa para o elemento m e $m(x)$ a massa em x .

Da mesma forma, a energia potencial é:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \{\dot{u}(t)\}^T \{N'(x)\} \{N'(x)\}^T \{\dot{u}(t)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [K^{(m)}] \{\dot{u}(t)\} \end{aligned}$$

onde:

$$[K^{(m)}] = \int_0^l EA(x) \{N'(x)\} \{N'(x)\}^T dx$$

é a matriz (2×2) simétrica de rigidez para o elemento, E é o módulo de elasticidade, $A(x)$ a área da secção em x e $\{N'(x)\} = \frac{d}{dx} \{N(x)\}$.

Para derivar o vector de forças nodais, utiliza-se a expressão para o trabalho virtual. Assumindo que o elemento é sujeito à força axial distribuída não conservativa¹⁴ $f(x,t)$ pode-se obter:

$$\overline{\delta W}(t) = \int_0^l f(x,t) \delta u(x,t) dx = \int_0^l f(x,t) \{N(x)\}^T \{\delta \hat{u}(x,t)\} dx = \{f(t)\}^T \{\delta \hat{u}(t)\}$$

onde:

$$\{f(t)\} = \int_0^l f(x,t) \{N(x)\} dx \text{ é o vector de forças nodais não conservativas.}$$

Eq. 26

Utilizando para o elemento finito do tipo axial de massa m as funções de forma polinomiais de grau um: $N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$ e $N_2(x) = \frac{x}{l}$, representadas na *Figura 4*, obtemos a matriz de massa:

¹⁴ Deve-se notar que forças concentradas podem ser transformadas em forças distribuídas por intermédio da função espacial delta de Dirac; por exemplo, a força $P(t)$ concentrada no ponto $x=l/3$ pode ser expressa na forma distribuída como $f(x,t) = P(t)\delta(x-l/3)$ onde $\delta(x-l/3)$ é a função espacial delta de Dirac.

$$[M^{(m)}] = m \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix}^T dx = m \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{x}{l} \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{x}{l} & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

isto é, para um elemento finito axial de secção constante com área A e de material com densidade ρ :

$$[M^{(m)}] = \frac{\rho A l^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

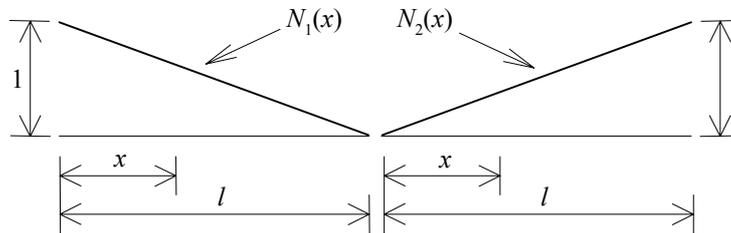


Figura 4 - Funções de forma polinomiais de grau um para um elemento do tipo axial.

Para se determinar a matriz de rigidez do elemento é necessário $\{N'(x)\}$:

$$\{N'(x)\} = \frac{d}{dx} \{N(x)\} = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Deste modo, obtemos a matriz de rigidez para o elemento de rigidez axial EA constante:

$$[K^{(m)}] = \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para se determinar o vector de forças nodais para a força distribuída $f(x,t) = a + bx$ utiliza-se a Eq. 26 e obtemos:

$$\{f(t)\} = \int_0^l (a + bx) \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} dx = \int_0^l \begin{Bmatrix} a + \left(b - \frac{a}{l}\right)x - \frac{b}{l}x^2 \\ \frac{a}{l}x + \frac{b}{l}x^2 \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}al + \frac{1}{6}bl^2 \\ \frac{1}{2}al + \frac{1}{3}bl^2 \end{Bmatrix}.$$

3.1 - Determinação das Matrizes no Sistema Global

De acordo com o método dos elementos finitos o sistema global é composto por elementos discretos que deverão ser agrupados. As componentes dos deslocamentos nos nodos em cada elemento são especificados segundo as direcções que melhor se adaptam ao mesmo. No caso de um elemento axial com os seus nodos designados por a e b , *Figura 5*, é conveniente especificar as componentes para os deslocamentos em cada um dos nodos de maneira que uma componente seja segundo a direcção axial x e a outra lhe seja ortogonal. As componentes dos deslocamentos nos nodos a e b ao longo destes eixos são designados na *Figura 5*, respectivamente, por u_1, u_2 e u_3, u_4 .

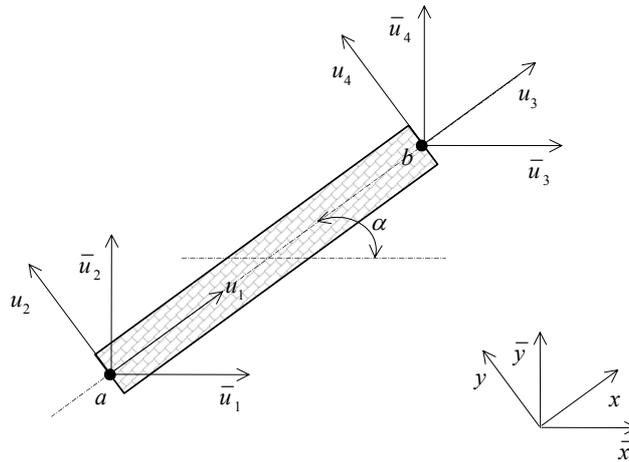


Figura 5 - Sistemas de referência para um elemento axial.

Como geralmente os elementos individuais são parte de um sistema mais complexo, e provavelmente têm orientações diferentes, torna-se óbvio que exprimir os deslocamentos num sistema de coordenadas particular a cada elemento (sendo, um tal sistema, designado por sistema de coordenadas locais) pode criar dificuldades no emparelhamento dos deslocamentos em cada nodo. Por esta razão, torna-se vantajoso trabalhar com as componentes dos deslocamentos num único sistema de coordenadas, enquanto se mantém a vantagem de identificar as componentes dos deslocamentos em cada elemento segundo as direcções que lhe são mais convenientes. Assim, pretende-se escolher um único sistema de referência global (\bar{x}, \bar{y}) e denotar as componentes dos deslocamentos ao longo destas direcções em a por \bar{u}_1 e \bar{u}_2 e em b por \bar{u}_3 e \bar{u}_4 . Então, uma simples transformação de coordenadas¹⁵ permite exprimir as componentes dos deslocamentos de um elemento particular ao longo do sistema de referência global (\bar{x}, \bar{y}) a partir das componentes ao longo do seu sistema de coordenadas local (x, y) e vice versa. Para se obter tal transformação de coordenadas, utiliza-se a matriz dos co-senos directores:

$$[t] = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} \end{bmatrix}$$

onde $t_{x\bar{x}}$ representa o co-seno do ângulo entre os eixos x e \bar{x} , etc. Esta matriz permite escrever a transformação de coordenadas do sistema global para o local:

¹⁵ Ver, por exemplo, [Foley, 1991; Hall, 1993; Tavares, 1995].

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix}$$

e a transformação do sistema local para o global:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.$$

A mesma transformação de coordenadas pode ser aplicada às componentes dos deslocamentos, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$

As equações anteriores podem ser combinadas de forma à transformação ser aplicada ao elemento como um todo obtendo-se:

$$\{u\} = [T] \{\bar{u}\}$$

Eq. 27

e

$$\{\bar{u}\} = [T]^T \{u\}$$

onde $\{u\}$ e $\{\bar{u}\}$ são os vectores coluna dos deslocamentos nodais com componentes respectivamente u_1, u_2, u_3, u_4 e $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$, e a matriz de transformação $[T]$ é definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}.$$

Obviamente, que existem diferentes matrizes de transformação $[T]$ para diferentes elementos; a menos que, alguns sejam do mesmo tipo e tenham a mesma orientação. Deve ser notado que a matriz $[T]$ é ortonormal e, assim, $[T]^{-1} = [T]^T$, pois $[t]$ representa uma transformação entre dois sistemas de eixos ortogonais.

No caso da *Figura 5*, sistema plano com $z \equiv \bar{z}$, a matriz dos co-senos directores é:

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Para transformar as matrizes de rigidez e de massa e o vector de forças nodais do sistema de referência local para o global, e vice versa, utiliza-se, novamente, a matriz de transformação geométrica $[T]$. Para se obter tal transformação, deve-se notar que a energia cinética e a energia potencial podem ser reescritas na forma de um produto matricial triplo:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}(t)\} \text{ e } V = \frac{1}{2} \{u(t)\}^T [K^{(m)}] \{u(t)\},$$

enquanto o trabalho virtual tem a expressão $\overline{\delta W} = \{\delta \bar{u}\}^T \{f\}$. Mas, se as componentes dos deslocamentos locais e globais estão relacionadas por Eq. 27 então as componentes locais e globais das velocidades estão relacionadas por $\{\dot{u}(t)\} [T] \{\dot{\bar{u}}\}$ e os correspondentes deslocamentos virtuais por:

$$\{\delta u\} = [T] \{\delta \bar{u}\}$$

Eq. 28

Assim, utilizando estas relações, pode-se obter:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [T]^T [M^{(m)}] [T] \{\dot{\bar{u}}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [\overline{M}^{(m)}] \{\dot{\bar{u}}\}$$

onde $[\overline{M}^{(m)}] = [T]^T [M^{(m)}] [T]$ é a matriz de massa para o elemento em termos do sistema de coordenadas global (\bar{x}, \bar{y}) . Da mesma forma, pode-se escrever a energia potencial como:

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [T]^T [K^{(m)}] [T] \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\overline{K}^{(m)}] \{\bar{u}\}$$

onde $[\overline{K}^{(m)}] = [T]^T [K^{(m)}] [T]$ é a matriz de rigidez para o elemento em termos do sistema de coordenadas global (\bar{x}, \bar{y}) . Note-se que $[\overline{M}^{(m)}]$ e $[\overline{K}^{(m)}]$ são matrizes simétricas pois $[M^{(m)}]$ e $[K^{(m)}]$ também o são. Finalmente, inserindo a relação da Eq. 28 na expressão do trabalho virtual obtemos:

$$\overline{\delta W} = \{\delta \bar{u}\}^T [T]^T \{f\} \{\delta \bar{u}\}^T \{f\}$$

onde $\{f\} = [T]^T \{f\}$ é o vector de forças nodais em termos do sistema de coordenadas global (\bar{x}, \bar{y}) .

As matrizes de massa e de rigidez e o vector de forças nodais expressas em termos do sistema de referência global podem ser utilizadas na escrita das equações do movimento do elemento individual relativamente ao mesmo sistema. Contudo se o objectivo final é a escrita das equações do movimento do sistema global é então necessário proceder ao agrupamento das matrizes de massa e de rigidez e do vector de forças nodais de cada elemento que constitui tal sistema.

3.2 - Agrupamento

A essência do método dos elementos finitos é considerar o sistema global como a soma de elementos individuais. Para esta soma, ou agrupamento, dos elementos individuais representar adequadamente o sistema global deve existir compatibilidade geométrica nos nodos dos elementos; por exemplo, os deslocamentos nos nodos partilhados por vários elementos devem ser iguais para cada um destes. Do mesmo modo, as correspondentes forças nodais devem ser estaticamente equivalentes às forças aplicadas. Deve-se notar que os deslocamentos podem incluir rotações e as forças incluir binários.

Assumindo que o sistema global consiste em L elementos e que estes são identificados pelo índice m ($m=1,2,\dots,L$) então, considerando um elemento m , o vector nodal de

deslocamentos é designado por $\{u^{(m)}\}$, o de forças por $\{f^{(m)}\}$, a matriz de massa por $[M^{(m)}]$ e a de rigidez por $[K^{(m)}]$ (onde todas as quantidades referem-se a este elemento e estão expressas no sistema de coordenadas global). De seguida, assumindo que o sistema tem um total de N graus de liberdade, N deslocamentos u_j ($j=1, 2, \dots, N$), designa-se o vector dos N deslocamentos nodais no sistema global por $\{U\}$. Para ser executado o processo de agrupamento, define-se para o elemento m um vector de deslocamentos nodais expandido $\{U^{(m)}\}_e$ obtido a partir da adição ao vector $\{u^{(m)}\}$ de componentes com valor nulo de forma que a dimensão do vector $\{U^{(m)}\}_e$ seja igual a N . Da mesma maneira, define-se o vector de forças nodais expandido $\{F^{(m)}\}_e$ com N componentes; assim como, as matrizes $(N \times N)$ de massa $[M^{(m)}]_e$ e de rigidez $[K^{(m)}]_e$ expandidas obtidas a partir das respectivas quantidades para o elemento e adicionando o necessário número de zeros.

As equações de movimento para o sistema global podem ser obtidas por um processo de agrupamento que consiga exprimir a energia cinética, a energia potencial e o trabalho virtual em termos da contribuição dos elementos individuais utilizados na modelização. Assim, a energia cinética pode ser escrita com a forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{\dot{u}^{(m)}\}^T [M^{(m)}] \{\dot{u}^{(m)}\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{\dot{U}\}_e^T [M^{(m)}]_e \{\dot{U}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\}$$

onde

$$[M] = \sum_{m=1}^L [M^{(m)}]_e$$

é a matriz simétrica de massa para o sistema global que é obtida simplesmente pela adição das matrizes de massa expandidas dos elementos que constituem tal sistema. Da mesma forma, a energia potencial é escrita como:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{u^{(m)}\}^T [K^{(m)}]_e \{u^{(m)}\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \{U^{(m)}\}_e^T [K^{(m)}]_e \{U^{(m)}\}_e = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\}$$

onde $[K] = \sum_{m=1}^L [K^{(m)}]_e$ é a matriz simétrica de rigidez para o sistema global.

Também o trabalho virtual pode ser escrito com a forma:

$$\overline{\delta W} = \sum_{m=1}^L \{f^{(m)}\}^T \{\delta u^{(m)}\} = \sum_{m=1}^L \{F^{(m)}\}_e^T \{\delta U^{(m)}\}_e = \{F\}^T \{\delta U\}$$

onde $\{F\} = \sum_{m=1}^L \{F^{(m)}\}_e$ é o vector de forças nodais não conservativas para o sistema global.

Utilizando as matrizes de massa e de rigidez e os vectores de forças nodais não conservativas e dos deslocamentos nodais do sistema global é possível, desprezando o efeito de amortecimento que eventualmente possa existir, escrever as equações de movimento de Lagrange para o mesmo com a seguinte forma matricial:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

onde o vector $\{F\}$ representa o vector das forças nodais não conservativas.

Obviamente que as matrizes de massa e de rigidez e o vector de forças nodais para o sistema global podem ser determinados sem a utilização das matrizes e dos vectores expandidos de cada elemento individual e, desta forma, diminuir as exigências de memória exigidas pelo programa computacional se o processo de agrupamento começar por transformar as matrizes e o vector de cada elemento do sistema de coordenadas local no sistema de coordenadas global e somar a contribuição de cada um nas células das matrizes e do vector global correspondentes aos graus de liberdade associados.

4 - Análise Modal

O sistema de equações do equilíbrio dinâmico do modelo de elementos finitos, Eq. 15, pode ser desacoplado impondo as equações numa base definida pelos vectores próprios de $[M]^{-1}[K]$ ortonormais à matriz de massa $[M]$. Estes vectores próprios e os respectivos valores próprios são a solução $(\{\phi\}_i, \omega_i^2)$ do problema de valores próprios generalizado [Bathe, 1996; Chapra, 1988; Press, 1992]:

$$[K]\{\phi\}_i = \omega_i^2[M]\{\phi\}_i.$$

Eq. 29

O vector $\{\phi\}_i$ é designado por vector de forma para o modo i e ω_i é a correspondente frequência de vibração [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1979].

Os vectores de forma podem ser interpretados como uma descrição dos eixos não lineares generalizados de simetria do objecto. A Eq. 29 pode ser escrita como:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

onde

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{c|c|c} \{u\}_1^T & & \\ \vdots & & \\ \{u\}_m^T & & \\ \{v\}_1^T & & \\ \vdots & & \\ \{v\}_m^T & & \end{array} \right] \text{ e } [\Omega] = \left[\begin{array}{ccc} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_m^2 \end{array} \right].$$

Como já foi referido, cada vector de forma $\{\phi\}_i$ é ortonormal em relação à matriz de massa $[M]$, isto significa que:

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [\Omega] \text{ e } [\Phi]^T[M][\Phi] = [1].$$

Eqs. 30

Esta transformação de coordenadas generalizada $[\Phi]$ é então utilizada para transformar os

deslocamentos modais $\{\tilde{U}\}$ nos nodais $\{\hat{U}\}$ e vice-versa:

$$\{U\} = [\Phi] \{\tilde{U}\}.$$

A Eq. 15 pode agora ser reescrita em termos dos deslocamentos modais e obtemos um sistema desacoplado de equações:

$$\{\tilde{U}\}_i + [\tilde{D}] \{\tilde{U}\} + [\Omega]_i \{\tilde{U}\}_i = [\Phi]_i^T \{R\},$$

Eq. 31

onde $[\tilde{D}]$ é a matriz diagonal de amortecimento modal.

As equações desacopladas podem ser facilmente resolvidas obtendo-se uma solução para o problema de equilíbrio dinâmico [Pentland, 1989a, 1991a]. Formulando-se a solução de equilíbrio em duas imagens pode ser obtida directamente a correspondência pontual.

Desprezando-se os modos associados as altas frequências o esforço computacional pode ser reduzido sem degradação significativa da qualidade da correspondência obtida. Além do mais, tal conjunto de amplitudes modais fornece uma descrição canónica robusta da forma em termos da deformação aplicada ao objecto elástico original. Tal permite a sua utilização directa para o reconhecimento de objectos [Cootes, 1995; Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1994b, 1995, 1995a; Syn, 1995, 1995a].

5 - Determinação dos Emparelhamentos

Para se determinar a correspondência entre os nodos que constituem dois modelos de elementos finitos deve-se, em primeiro lugar, determinar as matrizes de massa e de rigidez para cada um. Para tal, o objecto dever ser modelizado considerando que os seus dados estão ligados entre si por elementos finitos 2D do tipo axial, *Figura 6*. No caso de os objectos em questão serem contornos, os mesmos devem ser modelizados considerando que os seus dados estão ligados ao longo do contorno por intermédio de elementos finitos 2D do tipo axial, *Figura 7*; este procedimento é semelhante ao utilizado em contornos activos¹⁶, vulgarmente designados por *snakes*.

De seguida, determinam-se os valores ω_i e vectores $\{\phi\}_i$ próprios de cada modelo de elementos finitos:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

onde

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{c|c|c} \{\phi\}_1 & \dots & \{\phi\}_{2m} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \{u\}_1^T \\ \vdots \\ \{u\}_m^T \\ \{v\}_1^T \\ \vdots \\ \{v\}_m^T \end{array} \right] \text{ e } [\Omega] = \left[\begin{array}{ccc} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{2m}^2 \end{array} \right]$$

¹⁶ Ver, por exemplo, [Cohen, 1991; Kass, 1988].

sendo m o número de nodos do elemento a considerar.

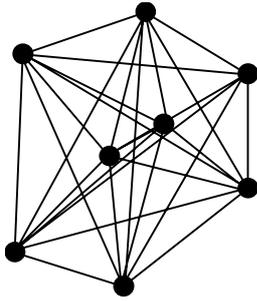


Figura 6 - Modelização de um objecto por intermédio de um conjunto de elementos finitos 2D do tipo axial.

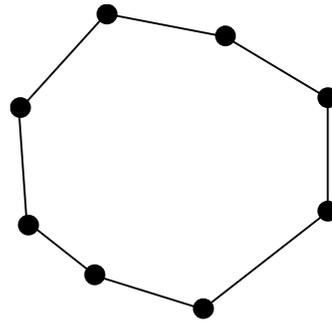


Figura 7 - Modelização de um contorno por intermédio de um conjunto de elementos finitos 2D do tipo axial.

Desta forma¹⁷ para cada modelo determinam-se as frequências modais de vibração ω_i e os respectivos vectores de forma $\{\phi\}_i$. Os quadrados das frequências de vibração estão ordenados de forma crescente na matriz diagonal $[\Omega]$.

O vector coluna $\{\phi\}_i$ descreve o deslocamento modal (u, v) para cada nodo do modelo devido ao modo de vibração i ; enquanto os vectores linha $\{u\}_i$ e $\{v\}_i$, são designados por vectores característica i e, em conjunto, descrevem a localização do nodo i no sistema de coordenadas modal.

Construídas as matrizes modais $[\Phi]_1$ e $[\Phi]_2$ para os dois modelos, com respectivamente m e n nodos, as correspondências podem ser estabelecidas comparando os vectores de forma para os dois conjuntos de nodos; cada ponto nodal será caracterizado pela sua participação relativa nos vários modos próprios. Desta forma utilizando os dois conjuntos de vectores característica determina-se a matriz de afinidade $[Z]$ com dimensão $(m \times n)$:

$$Z_{ij} = \left\| \{u\}_{1,i} - \{u\}_{2,j} \right\|^2 + \left\| \{v\}_{1,i} - \{v\}_{2,j} \right\|^2 .$$

Nesta matriz ao valor nulo corresponde um emparelhamento óptimo e quanto mais este é elevado mais fraco será o respectivo emparelhamento. Os melhores emparelhamentos são indicados pelos elementos que são mínimos na sua linha e na sua coluna: ao nodo i na imagem 1 corresponde o nodo j na imagem 2 e a este o nodo i na imagem 1. Deverão apenas ser considerados os emparelhamentos que apresentem um valor de afinidade inferior a um dado limiar; obtendo-se assim apenas correspondências com elevada confiança.

Na construção da matriz $[Z]$ deverão ser tidas em conta as seguintes considerações:

- Primeira, devido aos modelos terem, possivelmente, diferente número de nodos (m e n) o número de modos será diferente. A solução passa pela truncagem dos $|m - n|$ modos menos significativos do modelo com mais nodos, onde os menos significativos são indicados pelas frequências mais elevadas. Desta forma as matrizes modais terão k colunas (ou modos), onde $k = \min\{m, n\}$. Em realizações práticas poderão ser utilizados menos de k modos conseguindo-se assim uma maior imunidade ao ruído e uma menor sensibilidade às deformações locais: por analogia com a transformada de Fourier. Efectivamente, com este procedimento são desprezadas as componentes dos vectores característica ao longo dos eixos modais menos importantes.

¹⁷ Ver, por exemplo, [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986].

- Segunda, o sinal de cada vector próprio não é único pois invertendo a sua direcção não se viola a ortonormalidade da base; assim é necessário que ambos os conjuntos de eixos tenham direcções consistentes pois deseja-se comparar directamente os vectores característica. Consequentemente torna-se necessário utilizar um procedimento de correcção do sinal. Uma solução, [Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a], passa pela consideração de $[\Phi]_1$ como base de referência e proceder a orientação de cada eixo de $[\Phi]_2$, um de cada vez, escolhendo para cada um a direcção que maximiza o alinhamento dos dois conjuntos de vectores característica.

- Terceira, quando o sinal de um vector de $[\Phi]_2$ é indiferente no alinhamento tal traduz a existência de uma simetria de reflexão e o respectivo sinal deve ser determinado de acordo com a deformação existente [Sclaroff, 1995; Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a].

- Quarta, por vezes alguns modos apresentam frequências de vibração praticamente iguais o que implicaria um emparelhamento no subespaço modal; para evitar tal emparelhamento, estes modos são retirados da respectiva base modal [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a; Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares 1997a]. Tais modos são especialmente associados às baixas frequências de modelos com forma simétrica e com formas cuja a variação do aspecto é quase unitária (por exemplo: quadrados).

- Quinta, em problemas 2D quando não se pretender entrar com os modos correspondentes à transformação rígida existente entre os dois modelos (duas translações e uma rotação) não se deve considerar os três primeiros modos de vibração.

Da primeira e segunda consideração resulta uma divisão de cada espaço nodal em três grupos de vectores característica:

$$[\Phi]_1 = \left[\underbrace{\{\phi\}_{1,1} \mid \{\phi\}_{1,2} \mid \{\phi\}_{1,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{1,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{1,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{1,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{1,2m}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

$$[\Phi]_2 = \left[\underbrace{\{\phi\}_{2,1} \mid \{\phi\}_{2,2} \mid \{\phi\}_{2,3}}_{\text{modos de corpo rígido}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{2,4} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{2,p}}_{\text{modos intermédios}} \mid \underbrace{\{\phi\}_{2,p+1} \mid \cdots \mid \{\phi\}_{2,2n}}_{\text{modos de ordem elevada}} \right]$$

onde m e n são os números de nodos de cada modelo de elementos finitos a considerar. Mantendo apenas as colunas que representam os modos intermédios o espaço modal truncado terá para problemas 2D dimensão $2(p-3)$.

Considerando a referida truncagem de cada espaço modal resulta o conjunto de vectores característica truncados correspondentes aos modos intermédios:

$$[\bar{\Phi}] = [\{\phi\}_4 \mid \cdots \mid \{\phi\}_p] = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{u}\}_m^T \\ \{\bar{v}\}_1^T \\ \vdots \\ \{\bar{v}\}_m^T \end{bmatrix}$$

onde os dois vectores linha $\{\bar{u}\}_i$ e $\{\bar{v}\}_i$ contêm os deslocamentos para o nodo i no espaço modal truncado. O vector $\{\bar{u}\}_i$ contém os deslocamentos segundo o eixo x e $\{\bar{v}\}_i$ contém os deslocamentos segundo y , associados a cada um dos $(p-3)$ modos.

Em casos de amostragem grosseira ou de elevada deformação a ordem dos modos pode variar significativamente. Em tais casos será necessário um procedimento extra no qual vizinhos com valores de afinidade similares deverão ser comparados de forma a determinar-se os melhores emparelhamentos possíveis.

Por vezes para duas formas os seus modos de baixa ordem correspondem razoavelmente bem entre si enquanto os outros modos não correspondem tão bem. Para resolver estes problemas pode-se determinar as correspondências utilizando apenas os modos de cada forma que se correspondam aceitavelmente. Tal determinação pode ser realizada verificando a distância entre modos e optando por considerar aqueles que apresentem baixas distâncias entre si. Em [Sclaroff, 1995] é apresentado um procedimento heurístico para determinar as distâncias entre modos. A normalização dos vectores próprios em relação às áreas/volumes também é uma forma de solucionar tais casos.

5.1 - Casos com Elevada Rotação

O método de determinação dos emparelhamentos apresentado no ponto anterior funciona de forma aceitável quando existe, entre os dois modelos de elementos finitos a considerar, pequenas diferenças de orientação. Tal é devido ao facto dos deslocamentos modais serem descritos por vectores (u, v) no sistema de coordenadas cartesianas. Quando a rotação existente entre os dois elementos é elevada, a determinação da matriz de afinidade pode ser tornada invariante em relação à rotação pela transformação dos vectores de forma para o sistema de coordenadas polar [Sclaroff, 1993, 1994, 1995, 1995a]. Em duas dimensões cada vector de forma tem a seguinte forma

$$\{\phi\}_i = [u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_m]^T$$

onde o deslocamento modal para o nodo i é simplesmente (u_i, v_i) . Para obter invariância face à rotação deve-se transformar cada componente (u, v) numa coordenada no espaço (r, θ) como se pode observar na *Figura 8*. O ângulo θ é determinado relativamente ao vector do centroide do elemento ao ponto nodal X . O raio r é simplesmente a amplitude do vector de deslocamento $\{u\}$.

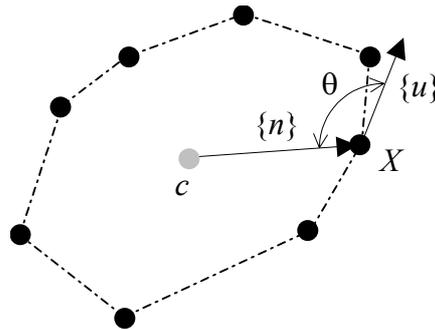


Figura 8 - Transformação de um vector modal $\{u\} = (u, v)$ em (r, θ) .

Após a transformação de cada vector de forma no sistema de coordenadas polar pode ser calculada a matriz de afinidade como foi descrito no ponto anterior. Sclaroff nas suas experiências, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1995, 1995a], concluiu que geralmente é mais eficaz calcular as afinidades utilizando apenas a componente r ou a componente θ , por exemplo:

$$Z_{ij} = \left\| \bar{\theta}_{1,i} - \bar{\theta}_{2,j} \right\|^2 .$$

6 - Alinhamento de Objectos, Comparação e Descrição

Uma vantagem da técnica modal proposta por Sclaroff é que os modos próprios calculados para a determinação da correspondência podem também ser utilizados para descrever as deformações rígidas e não rígidas necessárias para alinhar um objecto com um outro. Desde que esta descrição modal esteja calculada, pode ser realizada a comparação entre formas pela observação das amplitudes modais ou - como o modelo utilizado é um modelo físico - pode ser calculada e comparada a de energia de deformação necessária para alinhar um objecto e utilizar esta energia como medida de similaridade. Se os deslocamentos modais, ou a energia de deformação, para alinhar dois conjuntos de dados é relativamente pequena então os objectos em questão são similares.

Relembrando que para problemas bidimensionais os três primeiros modos são modos de corpo rígido associados há translação e há rotação os restantes modos são modos não rígidos. Os modos não rígidos são ordenados por ordem crescente da frequência de vibração; no geral, os modos de baixa frequência descrevem deformações globais enquanto os modos de alta frequência descrevem mais as deformações de forma localizadas. Tal ordenamento, global/local, das deformações da forma permite seleccionar quais os tipos de deformação a serem comparados.

Por exemplo, pode ser desejável comparações independentes da rotação, da posição e/ou da escala. Para se obter tal comparação ignora-se os deslocamentos de baixa ordem, ou modos de corpo rígido, e assim despreza-se as diferenças de posição, orientação e escala. Em complemento não considerando os modos de elevada ordem pode-se tornar as comparações robustas ao ruído e às variações de forma locais. Tal procedimento de selecção modal também é útil para a compressão dos dados que definem um objecto pois desta forma é possível descrever a derivação deste em relação a um protótipo em termos de poucos modos.

Contudo antes de ser possível comparar dois conjuntos de dados é em primeiro lugar necessário determinar as deformações modais $\{\tilde{U}\}$ que deformam os dados emparelhados de um objecto nas posições correspondentes no outro objecto. Métodos diferentes para determinar os parâmetros da deformação modal são apresentados a seguir.

6.1 - Determinação das Deformações

Pretende-se descrever os parâmetros da deformação $\{\tilde{U}\}$ que transformam um conjunto de dados nos dados correspondentes de um outro conjunto. Desde que as matrizes modais $[\Phi]_1$ e $[\Phi]_2$ estejam calculadas e as correspondências estejam determinadas pode-se obter os deslocamentos modais de forma directa. Tal é conseguido notando que os deslocamentos nodais $\{U\}$, que alinham os correspondentes dados de ambas as formas, podem ser escritos como:

$$\{u\}_i = \{x\}_{1,i} - \{x\}_{2,i}$$

Eq. 32

onde $\{x\}_{1,i}$ representa o nodo i na primeira forma e $\{x\}_{2,i}$ o nodo com o qual foi emparelhado na segunda forma.

Relembrando que $\{U\} = [\Phi] \{\tilde{U}\}$, e utilizando a identidade das Eqs. 30, obtemos:

$$\{\tilde{U}\} = [\Phi]^{-1} \{U\} = [\Phi]^T [M] \{U\}.$$

Eq. 33

Normalmente não existe uma correspondência de um para um entre os dados das duas formas. Na maior parte dos casos é desejável que os dados não emparelhados se movam numa maneira consistente com as propriedades do material e com as forças nos nodos emparelhados. Este tipo de solução pode ser obtida de maneiras diferentes.

Numa primeira abordagem, [Sclaroff, 1995], considera-se os deslocamentos nodais $\{u\}_i$ nos nodos emparelhados e anula-se as forças nos nodos não emparelhados $\{r\}_i$. O sistema de equilíbrio resultante é $[K] \{U\} = \{R\}$ onde existem tantas incógnitas como equações. Os deslocamentos modais são depois determinados utilizando-se a Eq. 33. Esta abordagem é de aplicação fácil no entanto considera que as forças nos nodos não emparelhados são nulas.

Um procedimento similar ao anterior consiste em resolver uma versão do sistema físico truncada no número de modos a considerar, [Sclaroff, 1995]. Assumindo que foi obtida correspondência para p dos m modos existentes, pode-se reduzir o número de graus de liberdade desprezando-se os $m-p$ modos de mais alta frequência na Eq. 33 e depois determinar os modos por inversão de uma matriz.

Este método pode ser descrito do seguinte modo: Assumindo que é conhecida a correspondências para alguns dos modos reordena-se as colunas da matriz $[\Phi]^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]_{conhecida}^{-1} & [\Phi]_{não\ conhecido}^{-1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_{conhecido} \\ \{U\}_{não\ conhecido} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{U}\}_{não\ conhecido} \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

onde $\{U\}_{conhecido}$ é o vector dos deslocamentos conhecidos para os p nodos emparelhados, $\{U\}_{não\ conhecido}$ é o vector dos deslocamentos nodais não conhecidos e $\{\tilde{U}\}_{não\ conhecido}$ é o vector das amplitudes modais a determinar. Nesta formulação é assumida que as amplitudes dos modos desprezados são nulas. Os termos na equação anterior podem ser reagrupados

obtendo-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\Phi]^{-1} & [0] \\ \hline & [I] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_{conhecido} \\ \{0\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} [I] & [\Phi]^{-1} \\ \hline [0] & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{U}\}_{n\tilde{a}o\ conhecido} \\ \{U\}_{n\tilde{a}o\ conhecido} \end{array} \right\}.$$

As amplitudes dos modos pretendidas podem ser obtidas directamente por inversão da matriz do lado direito desta equação. Note-se que com este procedimento obteve-se novamente uma solução para determinar as amplitudes não conhecidas mas foi assumido que os deslocamentos modais $\{\tilde{u}\}_i$ são nulos para $i > p$

Adicionando uma restrição de minimização da energia de deformação pode-se evitar as considerações utilizados nos duas soluções anteriores, [Sclaroff, 1993, 1994, 1994a, 1995, 1995a]. A energia de deformação pode ser obtida directamente a partir dos deslocamentos modais e engloba uma penalidade proporcional ao quadrado da frequência de cada nodo:

$$E_s = \frac{1}{2} \{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}.$$

Eq. 34

Como idealmente os modos de corpo rígido não introduzem deformação é lógico que as suas frequências sejam praticamente nulas.

Formulando uma solução por mínimos quadráticos restringida, na qual se minimiza o erro de alinhamento que inclua o termo da energia de deformação, obtemos:

$$E = \underbrace{\left[\{U\} - [\Phi] \{\tilde{U}\} \right]}_{\text{erro de ajuste quadrático}} + \lambda \underbrace{\{\tilde{U}\}^T [\Omega] \{\tilde{U}\}}_{\text{energia de deformação}}$$

Eq. 35

onde λ é o parâmetro de Lamé para o material considerado: $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$.

Diferenciando a Eq. 35 em relação ao vector dos parâmetros modais resulta a equação de minimização da deformação por mínimos quadráticos:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T \{U\}.$$

Desta forma pode-se explorar as características do modelo físico utilizado de forma a incluir certas restrições geométricas numa solução pelo método dos mínimos quadrados. A medida da energia de deformação permite a incorporação de algum prévio conhecimento há cerca do esticamento admissível para a forma, quanta esta é resistente à compressão, etc. Utilizando este conhecimento extra pode-se prever os deslocamentos razoáveis que os nodos não emparelhados deverão ter.

Como o algoritmo para a determinação dos emparelhamentos calcula o grau de certeza para os emparelhamentos obtidos pode-se também utilizar esta informação directamente na fase de alinhamento. Tal é obtido por inclusão de uma matriz diagonal $[W]$ para os pesos:

$$\{\tilde{U}\} = \left[[\Phi]^T [W]^2 [\Phi] + \lambda [\Omega] \right]^{-1} [\Phi]^T [W]^2 \{U\}.$$

Os elementos da matriz $[W]$ são inversamente proporcionais à medida de afinidade para o emparelhamento do respectivo nodo: $w_i = 1/(1+z_i)$. O vector dos deslocamentos nodais $\{U\}$ é determinado através dos emparelhamentos obtidos, Eq. 32; considerando-se para os nodos não emparelhados as respectivas entradas na matriz $[W]$ nulas¹⁸.

Este procedimento de minimização da energia de deformação é idêntico ao utilizado no domínio dos contornos activos: o modelo físico é utilizado como restrição de suavização [Cohen, 1991; Kass, 1988; Sclaroff, 1995].

6.2 - Solução Dinâmica: *Morphing*

No ponto anterior foram descritos métodos para determinar os deslocamentos modais que deformam directamente e alinham dois conjuntos de dados. Também é possível resolver o problema de alinhamento por simulação física integrando no tempo as equações do elemento finito até se atingir um equilíbrio. Neste caso, determina-se as deformações em cada instante de tempo através da equação dinâmica de equilíbrio dada pela Eq. 31. Realizando tal determinação calcula-se as deformações intermédias numa maneira consistente com as propriedades do material utilizado na formulação do modelo. As deformações intermédias também podem ser utilizadas para *morphing* segundo princípios físicos.

Quando se resolve a equação dinâmica utilizam-se dados de uma forma para exercer forças que os transformem nos dados da outra forma. As cargas dinâmicas $\{R(t)\}$ nos nodos dos modelos de elementos finitos são assim proporcionais às distâncias entre nodos emparelhados:

$$\{r(t+\Delta t)\}_i = \{r(t)\}_i + k \left\{ \{X_1\}_i + \{u(t)\}_i - \{X_2\}_i \right\}$$

Eq. 36

onde k é uma constante global de rigidez e $\{u(t)\}_i$ é o deslocamento nodal no instante anterior de tempo. Estas forças simulam forças a puxar os nodos e vão diminuindo até que estes estejam perfeitamente ajustados.

O equilíbrio dinâmico modal pode ser descrito por um sistema de $2m$, ou $3m$ para problemas tridimensionais, equações independentes com a seguinte forma:

$$\{\ddot{u}(t)\}_i + \tilde{d}_i \{\dot{u}(t)\}_i + \omega_i^2 \{u(t)\}_i = \{\tilde{r}(t)\}_i$$

onde $\{\tilde{r}(t)\}_i$ são as respectivas componentes do vector de carga transformado:

$$\{\tilde{R}(t)\} = [\Phi]^T \{R(t)\}.$$

Estas equações independentes de equilíbrio podem ser resolvidas por um procedimento de integração numérica iterativa (por exemplo, pelo método de Newmark [Bathe, 1996]). O sistema é integrado em frente no tempo até a diferença na carga ser inferior a um dado limiar δ :

¹⁸ Por vezes na prática verifica-se melhores resultados se o deslocamento nodal e a afinidade de emparelhamento forem obtidos com o melhor nodo da forma 2 candidato ao emparelhamento.

$$\| \{R(t+\Delta t)\} - \{R(t)\} \|^2 < \delta^2.$$

As cargas $\{r(t)\}_i$ são actualizadas em cada instante de tempo considerado através da Eq. 36.

6.3 - Na Presença de Rotações Elevadas

Se a rotação necessária para alinhar os dois conjuntos de dados é potencialmente elevada então, antes de se determinar as deformações modais, é necessário realizar em primeiro lugar um alinhamento inicial. Orientação, posicionamento e, se desejado, escalonamento podem ser determinados utilizando-se um algoritmo baseado em *quaternions* e proposto por Horn, [Horn, 1987; Sclaroff, 1995; Tavares, 1997].

Utilizando-se apenas as correspondências determinadas para alguns nodos emparelhados com uma elevada certeza (note-se que emparelhamentos obtidos com certezas elevadas têm valores reduzidos na matriz de afinidade $[Z]$) a transformação de corpo rígido pode ser determinada directamente. Os parâmetros adicionais resultantes para este alinhamento prévio são:

- vector de posição: $\{p\}_0$;
- *quaternion* unitário definindo a orientação: $\{q\}$;
- factor de escala: s ;
- centroides dos dois conjuntos: $\{c\}_1$ e $\{c\}_2$.

Como esta orientação inicial é calculada utilizando-se apenas as correspondências com certeza elevada geralmente obtêm-se boas estimativas para estes parâmetros da transformação de corpo rígido.

Os objectos podem agora ser alinhados através da determinação das deformações modais $\{\tilde{U}\}$ como previamente foi descrito. Como anteriormente, são calculadas as cargas virtuais que deformam os dados de um conjunto nos dados do outro conjunto com os quais foram devidamente emparelhados. Como foi introduzida mais uma rotação, uma translação, e um escalonamento a Eq. 32 deve ser modificada de forma a traduzir a distância entre os dados no correcto sistema de coordenadas:

$$\{u\}_i = \left\{ \frac{1}{s} [R]^T \left\{ \{X_2\}_i - \{p\}_0 - \{c\}_1 \right\} + \{c\}_1 - \{X_1\}_i \right\}$$

onde $[R]$ é a matriz de rotação obtida a partir do *quaternion* unitário $\{q\}$.

Com este procedimento inicial de alinhamento essencialmente reduz-se as forças virtuais entre nodos correspondentes; a equação da mola considera esta redução da força pela transformação do nodo emparelhado $\{X_2\}_i$ no sistema de coordenadas local do elemento. As amplitudes modais $\{\tilde{U}\}$ são então determinadas pela multiplicação das matrizes na Eq. 33 ou por resolução do sistema dinâmico da Eq. 31.

Os deslocamentos modais estão assim definidos num espaço rodado e escalado; como resultado, deve-se actualizar os deslocamentos na equação de interpolação:

$$\{u(X)\} = s [R][N][\Phi] \{\tilde{U}\}.$$

6.4 - Comparação de Objectos

Desde que as amplitudes dos modos tenham sido determinadas pode-se calcular a energia de deformação utilizando estas deformações na Eq. 34. Esta energia pode ser utilizada como medida de similaridade. Em certos casos também pode ser desejável comparar a energia de deformação num subconjunto de modos, considerados como importantes na medição da similaridade, ou então a energia associada a cada modo. A energia de deformação associada ao modo i é simplesmente:

$$E_{S_i} = \frac{1}{2} \hat{u}_i^2 \omega_i^2.$$

Como a energia de deformação associada a cada modo é escalada pela sua frequência de vibração, existe uma penalidade inerente para as deformações que ocorrem nos modos de mais altas frequências.

Em vez de se considerar a energia de deformação necessária para alinhar duas formas pode ser desejável comparar directamente as amplitudes modais sem a necessidade da determinação prévia da correspondência entre os seus dados. Neste caso determina-se em primeiro as duas descrições modais $\{\tilde{U}\}_1$ e $\{\tilde{U}\}_2$, e depois utiliza-se uma qualquer distância métrica para medir a distância entre os dois descritores modais. Tal sugere um espaço coordenado alternativo para descrição das distâncias entre formas: o espaço de similaridade modal. Assim neste espaço a similaridade de forma é proporcional à distância Euclidiana.

Se é pretendida uma função de distância métrica, então esta medida simples de energia necessita de ser modificada: a deformação não satisfaz um dos três axiomas para um espaço métrico:

- Existência de mínimo: $\delta(A, B) \geq \delta(A, A) = 0$.
- Simetria: $\delta(A, B) = \delta(B, A)$.
- Desigualdade triangular: $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C)$.

Enquanto satisfaz a existência de mínimo e a desigualdade triangular a energia de deformação não satisfaz a simetria. A energia de deformação não é simétrica para formas com tamanhos diferentes; por exemplo, se a escala de dois objectos A e B difere, então a energia de necessária para alinhar A com B pode ser diferente da necessária para alinhar B com A . A diferença na deformação será inversamente proporcional há diferença das escalas dos objectos ao quadrado. Deste modo, quando se comparam objectos com diferentes escalas deve-se dividir a energia de deformação pela área da forma. Quando um mapa de suporte é conhecido esta área pode ser determinada directamente. No caso de suporte infinito a área dos dados pode ser aproximada pelo cálculo do mínimo círculo que os engloba ou dos seus momentos.

Existe uma propriedade adicional que prova a utilidade da definição de um espaço métrico, a adição segmentada:

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C),$$

se B esta na fronteira entre A e C .

Para satisfazer a adição segmentada podemos considerar a raiz quadrada da energia de deformação:

$$\delta = \left(\frac{1}{2a} \sum_i \hat{u}_i^2 \omega_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde a é a área da forma. Tal resulta numa distância métrica pesada não diferente da distância de Mahalanobis¹⁹ [Sclaroff, 1995]: as amplitudes modais são desagregadas, cada qual tendo uma “invariância” que é inversamente proporcional ao valor próprio do modo. Como resultado, pode ser utilizada como parte de um esquema evolutivo de regularização no qual a matriz de covariância inicial $[\Omega]$ é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias dos parâmetros modais observados; por exemplo, filtragem de Kalman²⁰ ou análise das componentes principais²¹. Utilizando-se a análise da componentes principais pode-se descrever uma classe dos modos próprios de uma forma a partir de um conjunto de treino. Utilizando um modelo modal como uma estimativa inicial, pode-se de seguida aprender iterativamente os “verdadeiros” modos por via de uma análise recursiva das componentes principais. Como resultado, obter-se-á um esquema regularizado de aprendizagem no qual a matriz inicial de covariância é actualizada iterativamente de forma a incorporar as covariâncias para os parâmetros modais observados.

7 - Resultados Experimentais

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação por nós realizada do método proposto nesta comunicação.

Em primeiro lugar será analisada a descrição modal de alguns contornos. Verifica-se a influência do número de modos utilizados na descrição, o tipo de influência que os modos de alta e de baixa frequência têm sobre a mesma descrição, a influência da área da secção adoptada para os elementos finitos e a influência dos parâmetros do material virtual adoptado para os mesmos.

Em segundo lugar serão apresentados alguns resultados obtidos para o emparelhamento dos *pixels* que constituem dois contornos, para a determinação da transformação rígida existente, para a obtenção dos deslocamentos nodais por minimização da energia de deformação e para o cálculo do valor desta energia. A influência do número de modos utilizados será devidamente analisada.

Por último serão apresentadas algumas conclusões obtidas após a aplicação do método proposto em várias experiências por nós realizadas.

7.1 - Análise Modal do Modelo Finito

Na *Figura 9* esta representado um contorno²² constituído por cinco *pixels* para o qual serão apresentados alguns resultados obtidos por análise modal do modelo de elementos finitos de proposto. Os *pixels* que constituem este contorno estão ligados por intermédio de segmentos de recta na *Figura 10* e as suas coordenadas estão indicadas na *Figura 11*.

¹⁹ Ver, por exemplo, [Tavares, 1995].

²⁰ Ver, por exemplo, [Maybeck, 1979; Tavares, 1995].

²¹ Ver, por exemplo, [Cootes, 1993, 1993a, 1994, 1995; Martin, 1998; Nastar, 1996].

²² A forma deste contorno é puramente arbitrária e tem como único objectivo demonstrar o método proposto e analisar a influência dos parâmetros do mesmo. Outros contornos foram devidamente utilizados em várias experiências realizadas e os resultados obtidos estão reflectidos nas conclusões apresentadas.

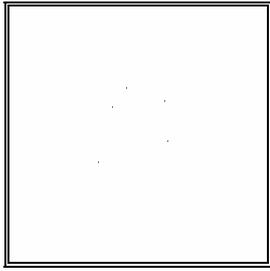


Figura 9 - Contorno a analisar.

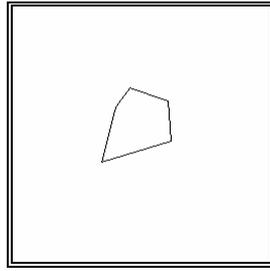


Figura 10 - Pixels do contorno a analisar ligados por segmentos de recta.

(116, 81)
 (102, 100)
 (88, 155)
 (157, 134)
 (154, 94)

Figura 11 - Coordenadas dos pixels do contorno a analisar.

Considerando borracha como o material utilizado na modelação (modulo de elasticidade igual a 2.43 N/mm^2 , coeficiente de Poisson igual a 0.45 e densidade igual a $0.00000112 \text{ Kg/mm}^3$) e área para os elementos finitos igual a 10 , obtemos para cada modo de vibração os contornos representados na *Figura 12*, ..., *Figura 21*. Nestas figuras também está representado o contorno original.

Na *Figura 22* e na *Figura 23* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 24*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 25* e é possível verificar-se as matrizes de massa e de rigidez do modelo de elementos finitos, as suas frequências de vibração, os seus vectores de forma e as amplitudes destes.

Analisando os resultados obtidos verifica-se que os primeiros modos de vibração são modos rígidos sendo a deformação por eles imposta mais global que a imposta pelos modos de frequência elevada que são mais localizadas e assemelhando-se a ruído.

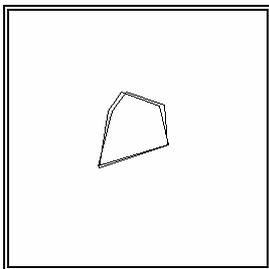


Figura 12 - 1º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

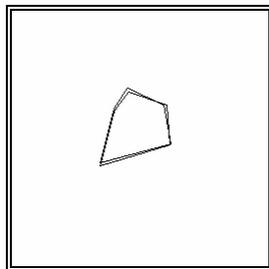


Figura 13 - 2º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

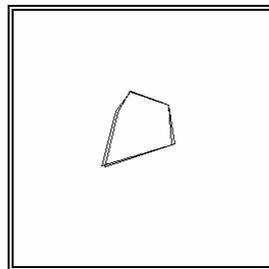


Figura 14 - 3º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

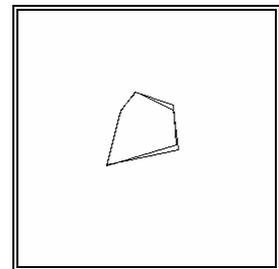


Figura 15 - 4º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

Considerando novamente borracha mas, desta vez, a área igual a 50 , o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 26*, ..., *Figura 35*. Na *Figura 36* e na *Figura 37* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 38*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 39*.

Analisando os resultados obtidos verifica-se que o contorno, como seria de esperar, tornou-se mais rígido. Os elementos da matriz de massa e da matriz de rigidez são, em termos absolutos, mais elevados, as frequências de vibração mantiveram-se praticamente inalteradas e as amplitudes dos vectores de forma diminuíram.

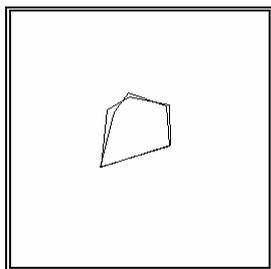


Figura 16 - 5º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

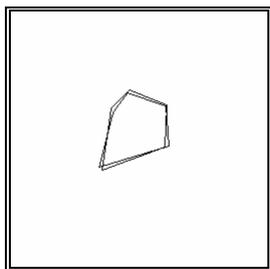


Figura 17 - 6º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

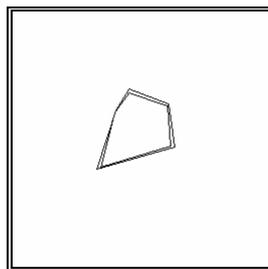


Figura 18 - 7º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

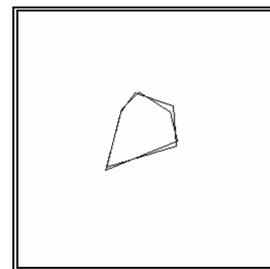


Figura 19 - 8º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

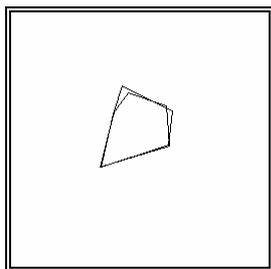


Figura 20 - 9º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

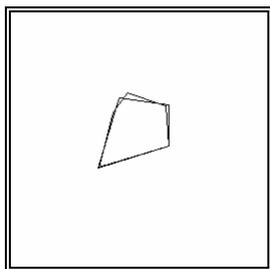


Figura 21 - 10º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

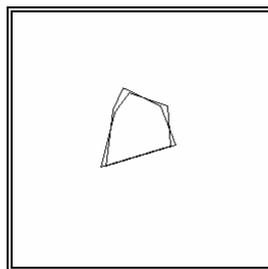


Figura 22 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

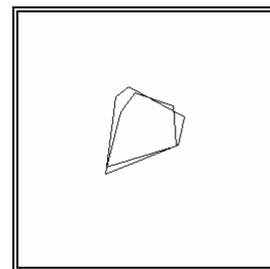


Figura 23 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para borracha e área igual a 10.

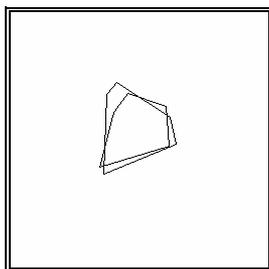


Figura 24 - Soma dos modos de vibração para borracha e área igual a 10.

Considerando a área dos elementos finitos igual a 10 mas densidade igual à do aço ($0.00000779 \text{ Kg/mm}^3$), o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados na *Figura 40*, ..., *Figura 49*. Na *Figura 50* e na *Figura 51* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando os restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 52*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 53*.

Analisando os resultados apresentados pode-se concluir que o contorno tornou-se mais rígido. Os valores dos elementos da matriz de massa aumentaram em termos absolutos, a matriz de massa manteve os valores dos seus elementos praticamente inalterados, os valores obtidos para as frequências de vibração diminuíram e as amplitudes dos modos próprios de vibração também diminuíram.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 10.000000.
 Material density: 0.000001.
 Young modulus: 2.430000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.008101 +0.001040 +0.000000 +0.000000 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.001040 +0.014105 +0.006013 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.006013 +0.031446 +0.009710 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.009710 +0.025428 +0.003003 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.003003 +0.012029 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.008101 +0.001040 +0.000000 +0.000000 +0.003011
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.001040 +0.014105 +0.006013 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.006013 +0.031446 +0.009710 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.009710 +0.025428 +0.003003
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.003003 +0.012029

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.903963 -0.362309 +0.000000 +0.000000 -0.541654 -0.306403 +0.491706 +0.000000 +0.000000 -0.185303
 -0.362309 +0.388363 -0.026054 +0.000000 +0.000000 +0.491706 -0.594061 +0.102355 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 -0.026054 +0.334408 -0.308354 +0.000000 +0.000000 +0.102355 -0.196202 +0.093847 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.308354 +0.311742 -0.003389 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.093847 -0.048666 -0.045181
 -0.541654 +0.000000 +0.000000 -0.003389 +0.545043 -0.185303 +0.000000 +0.000000 -0.045181 +0.230483
 -0.306403 +0.491706 +0.000000 +0.000000 -0.185303 +0.730708 -0.667315 +0.000000 +0.000000 -0.063393
 +0.491706 -0.594061 +0.102355 +0.000000 +0.000000 -0.667315 +1.069425 -0.402111 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.102355 -0.196202 +0.093847 +0.000000 +0.000000 -0.402111 +0.430673 -0.028562 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.093847 -0.048666 -0.045181 +0.000000 +0.000000 -0.028562 +0.630972 -0.602410
 -0.185303 +0.000000 +0.000000 -0.045181 +0.230483 -0.063393 +0.000000 +0.000000 -0.602410 +0.665803

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +5.357001 +6.338869 +9.860687 +13.603291 +16.868631

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

-4.800135 -1.212475 +0.407677 +1.356126 +1.428083 +1.664278 -0.289407 +3.738709 -5.918449 -7.587340
 -3.896332 +0.369794 +1.842431 -0.236893 -6.714792 -1.595722 +0.576472 +0.698482 -0.942558 +3.292331
 +1.104172 +0.185612 +3.485560 -0.331635 +1.264865 +3.079996 -3.599489 -1.183178 +0.638281 -0.737107
 +0.634796 +1.008707 +3.035770 +1.525571 +1.032415 -3.989603 +3.788857 +1.162467 -1.073965 -0.053716
 -5.082501 -2.613436 +0.339328 -0.370316 +3.100183 +1.132072 +0.919519 -2.701278 +5.692909 +3.290072
 -0.241406 -4.424132 -0.506940 -0.275321 +3.716958 -3.431846 -4.363561 -0.952367 -6.500257 +5.497728
 +0.424554 -3.258249 +0.550248 -1.449125 -2.283055 -4.475138 -1.578874 -3.124365 +2.402458 -4.742042
 +1.697410 -3.305132 +0.968499 -1.473241 -0.251870 +2.609591 +2.248400 +3.017726 -0.262582 +1.374091
 +0.155174 -0.600675 -0.509382 +4.629010 -1.015637 +0.646295 +0.631712 -4.555876 -1.395081 -0.432391
 +0.583971 -0.329014 -0.307149 +4.771201 -1.170719 -0.629523 -2.423012 +6.046635 +5.196368 -0.820481

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+8.316340
 +7.146392
 +5.185796
 +7.280658
 +8.994354
 +8.451594
 +7.837870
 +10.080035
 +12.121429
 +11.629196

Figura 25 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para borracha e área igual a 10.

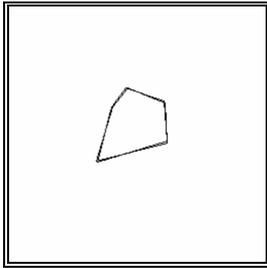


Figura 26 - 1º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

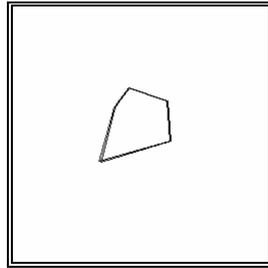


Figura 27 - 2º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

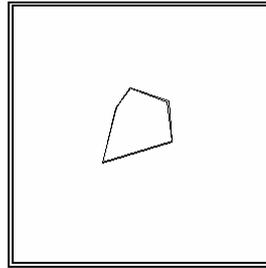


Figura 28 - 3º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

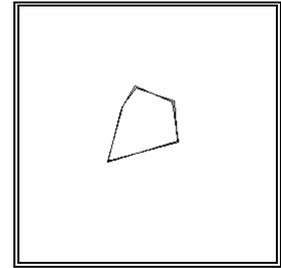


Figura 29 - 4º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

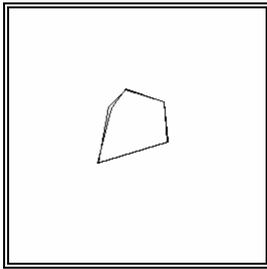


Figura 30 - 5º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

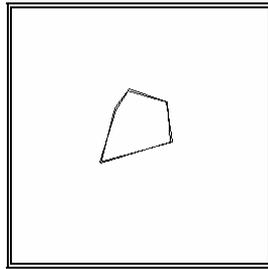


Figura 31 - 6º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

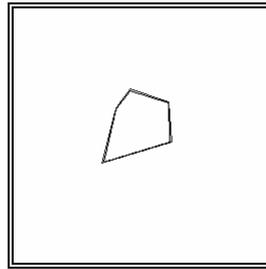


Figura 32 - 7º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

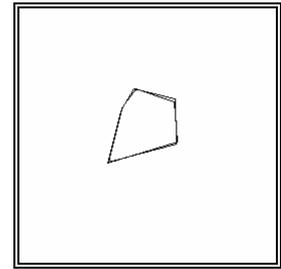


Figura 33 - 8º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

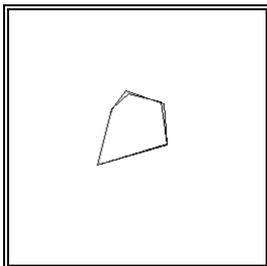


Figura 34 - 9º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

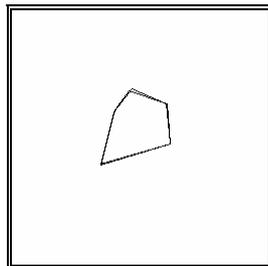


Figura 35 - 10º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

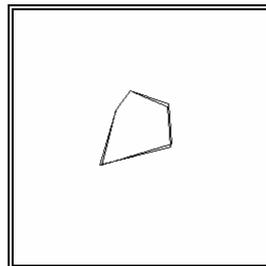


Figura 36 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

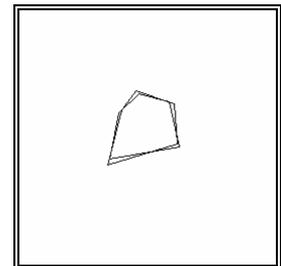


Figura 37 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para borracha e área igual a 50.

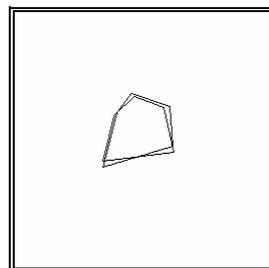


Figura 38 - Soma dos modos de vibração para borracha e área igual a 50.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 50.000000.

Material density: 0.000001.

Young modulus: 2.430000.

Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+0.040507 +0.005199 +0.000000 +0.000000 +0.015055 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.005199 +0.070523 +0.030063 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.030063 +0.157229 +0.048552 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.048552 +0.127139 +0.015017 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
+0.015055 +0.000000 +0.000000 +0.015017 +0.060144 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.040507 +0.005199 +0.000000 +0.000000 +0.015055
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.005199 +0.070523 +0.030063 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.030063 +0.157229 +0.048552 +0.000000
+0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.048552 +0.127139 +0.015017
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.015055 +0.000000 +0.000000 +0.015017 +0.060144
```

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+4.519817 -1.811547 +0.000000 +0.000000 -2.708270 -1.532014 +2.458528 +0.000000 +0.000000 -0.926513
-1.811547 +1.941817 -0.130271 +0.000000 +0.000000 +2.458528 -2.970305 +0.511777 +0.000000 +0.000000
+0.000000 -0.130271 +1.672038 -1.541768 +0.000000 +0.000000 +0.511777 -0.981011 +0.469234 +0.000000
+0.000000 +0.000000 -1.541768 +1.558710 -0.016943 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.469234 -0.243330 -0.225904
-2.708270 +0.000000 +0.000000 -0.016943 +2.725213 -0.926513 +0.000000 +0.000000 -0.225904 +1.152417
-1.532014 +2.458528 +0.000000 +0.000000 -0.926513 +3.635359 -3.336573 +0.000000 +0.000000 -0.316965
+2.458528 -2.970305 +0.511777 +0.000000 +0.000000 -3.336573 +5.347127 -2.010553 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.511777 -0.981011 +0.469234 +0.000000 +0.000000 -2.010553 +2.153363 -0.142810 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.469234 -0.243330 -0.225904 +0.000000 +0.000000 -0.142810 +3.154860 -3.012050
-0.926513 +0.000000 +0.000000 -0.225904 +1.152417 -0.316965 +0.000000 +0.000000 -3.012050 +3.329015
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

```
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +5.357001 +6.338869 +9.860687 +13.603291 +16.868631
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

```
+1.795415 -0.604073 -1.239994 -0.746627 +0.166619 -0.744288 +0.129427 -1.672001 +2.646811 +3.393162
+1.000607 -0.637661 -0.721405 +0.982470 -3.142921 +0.713629 -0.257806 -0.312371 +0.421525 -1.472375
-0.616075 -1.509337 +0.231140 +0.207441 +0.518098 -1.377416 +1.609740 +0.529133 -0.285448 +0.329644
+0.100517 -1.273262 +0.316406 +0.765546 +0.698891 +1.784205 -1.694428 -0.519871 +0.480292 +0.024022
+1.363463 -0.772205 -1.598648 -1.808387 +0.473057 -0.506278 -0.411221 +1.208048 -2.545946 -1.471365
+0.299882 -0.292646 +0.301047 -2.322113 +1.047640 +1.534768 +1.951444 +0.425912 +2.907003 -2.458659
-0.285766 -0.317395 +0.683166 -1.048041 -1.390969 +2.001343 +0.706094 +1.397259 -1.074412 +2.120706
-0.697285 -0.539276 +0.925632 -1.245322 -0.459073 -1.167045 -1.005515 -1.349568 +0.117430 -0.614512
+1.657232 +0.236398 +1.205791 +0.588450 +0.134961 -0.289032 -0.282510 +2.037450 +0.623899 +0.193371
+1.562511 +0.198818 +1.349421 +0.781495 +0.151898 +0.281531 +1.083604 -2.704137 -2.323887 +0.366930
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

```
+3.509853
+2.416552
+3.075099
+3.797431
+3.764406
+3.779668
+3.505202
+4.507929
+5.420868
+5.200735
```

Figura 39 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para borracha e área igual a 50.

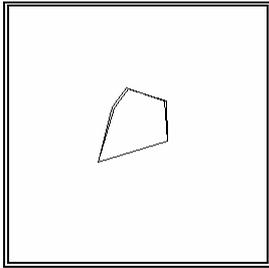


Figura 40 - 1º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

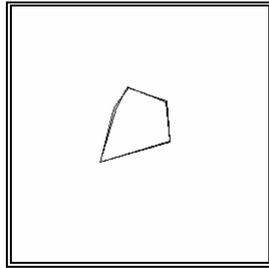


Figura 41 - 2º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

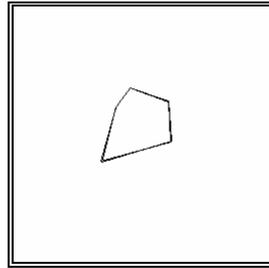


Figura 42 - 3º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

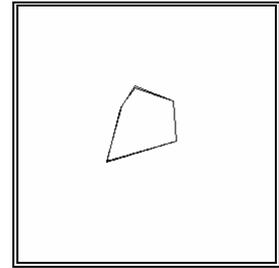


Figura 43 - 4º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

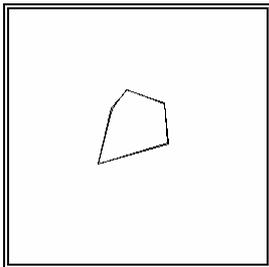


Figura 44 - 5º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

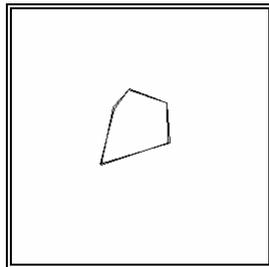


Figura 45 - 6º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

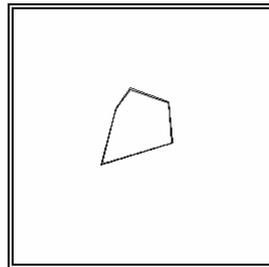


Figura 46 - 7º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

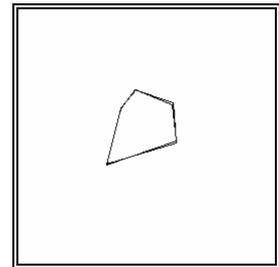


Figura 47 - 8º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

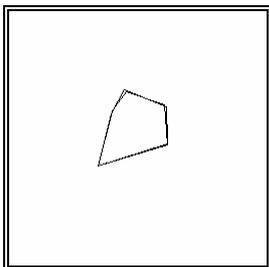


Figura 48 - 9º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

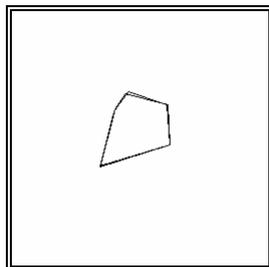


Figura 49 - 10º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

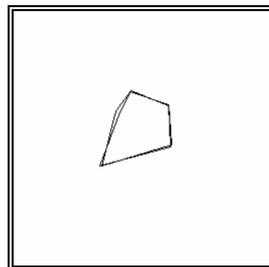


Figura 50 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

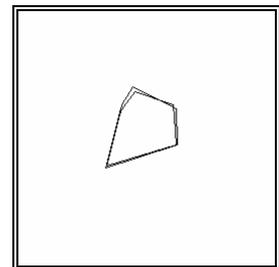


Figura 51 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

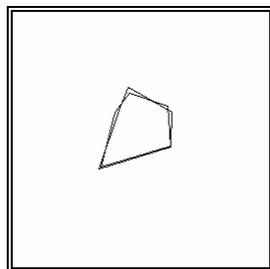


Figura 52 - Soma dos modos de vibração para densidade igual à do aço e área igual a 10.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 10.000000.
 Material density: 0.000008.
 Young modulus: 2.430000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.056348 +0.007232 +0.000000 +0.000000 +0.020942 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000
 +0.007232 +0.098102 +0.041819 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.041819 +0.218717 +0.067539 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.067539 +0.176859 +0.020890 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
 +0.020942 +0.000000 +0.000000 +0.020890 +0.083665 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000
 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 +0.056348 +0.007232 +0.000000 +0.000000 +0.020942
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.007232 +0.098102 +0.041819 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.041819 +0.218717 +0.067539 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.067539 +0.176859 +0.020890
 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 +0.020942 +0.000000 +0.000000 +0.020890 +0.083665

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.903963 -0.362309 +0.000000 +0.000000 -0.541654 -0.306403 +0.491706 +0.000000 +0.000000 -0.185303
 -0.362309 +0.388363 -0.026054 +0.000000 +0.000000 +0.491706 -0.594061 +0.102355 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 -0.026054 +0.334408 -0.308354 +0.000000 +0.000000 +0.102355 -0.196202 +0.093847 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.308354 +0.311742 -0.003389 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.093847 -0.048666 -0.045181
 -0.541654 +0.000000 +0.000000 -0.003389 +0.545043 -0.185303 +0.000000 +0.000000 -0.045181 +0.230483
 -0.306403 +0.491706 +0.000000 +0.000000 -0.185303 +0.730708 -0.667315 +0.000000 +0.000000 -0.063393
 +0.491706 -0.594061 +0.102355 +0.000000 +0.000000 -0.667315 +1.069425 -0.402111 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.102355 -0.196202 +0.093847 +0.000000 +0.000000 -0.402111 +0.430673 -0.028562 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.093847 -0.048666 -0.045181 +0.000000 +0.000000 -0.028562 +0.630972 -0.602410
 -0.185303 +0.000000 +0.000000 -0.045181 +0.230483 -0.063393 +0.000000 +0.000000 -0.602410 +0.665803

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +2.031244 +2.403544 +3.738931 +5.158035 +6.396172

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+1.680731 -0.686830 -0.086577 +0.410170 +0.795800 +0.631053 -0.109736 +1.417627 -2.244131 -2.876934
 +1.627007 +1.974304 +0.128057 +1.406826 -0.800270 -0.605059 +0.218584 +0.264847 -0.357395 +1.248371
 -0.368862 +0.071464 -1.407078 -0.056575 +0.220389 +1.167859 -1.364838 -0.448632 +0.242020 -0.279493
 -0.394730 +0.194825 -1.028266 +0.345636 +0.804071 -1.512760 +1.436642 +0.440779 -0.407221 -0.020368
 +1.957507 -1.370775 -0.417127 -0.179205 +0.443919 +0.429254 +0.348659 -1.024259 +2.158612 +1.247515
 +0.696241 -1.084625 -0.293670 -1.699486 +0.470107 -1.301272 -1.654556 -0.361114 -2.464738 +2.084604
 +0.656654 +0.876211 -0.135518 -0.965108 -0.705945 -1.696863 -0.598670 -1.184683 +0.910953 -1.798066
 +0.148615 +0.391852 -0.526280 -1.337610 -0.446141 +0.989493 +0.852538 +1.144248 -0.099565 +0.521022
 +0.063621 +0.797179 +0.718388 -0.016060 +1.471672 +0.245059 +0.239530 -1.727477 -0.528981 -0.163952
 -0.112797 +0.914599 +0.672553 +0.023303 +1.498683 -0.238700 -0.918747 +2.292736 +1.970336 -0.311106

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+3.248156
 +3.140286
 +2.141278
 +2.812804
 +2.737913
 +3.204637
 +2.971928
 +3.822102
 +4.596149
 +4.409506

Figura 53 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para densidade igual à do aço e área igual a 10.

Voltando a considerar a área dos elementos finitos igual a 10, a densidade da borracha mas, desta feita, a elasticidade do aço (200000 N/mm²), o contorno original e o obtido

considerando apenas cada modo de vibração estão representados nas *Figura 54*, ..., *Figura 63*. Na *Figura 64* e na *Figura 65* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 66*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 67*.

Analisando os resultados obtidos podemos concluir que as deformações são semelhantes. Os valores dos elementos da matriz de massa mantiveram-se praticamente iguais, os valores dos elementos da matriz de rigidez aumentaram consideravelmente assim como os valores das frequências de vibração e as amplitudes dos modos de vibração mantiveram-se praticamente iguais.

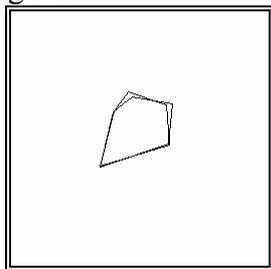


Figura 54 - 1º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

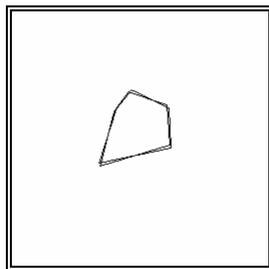


Figura 55 - 2º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

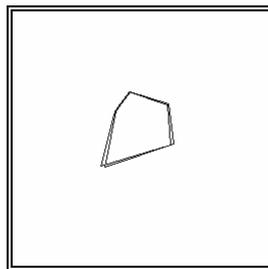


Figura 56 - 3º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

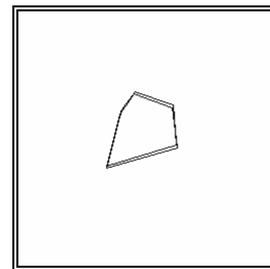


Figura 57 - 4º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

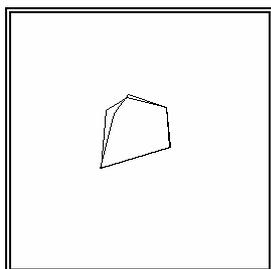


Figura 58 - 5º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

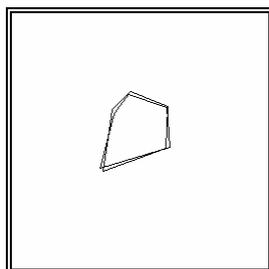


Figura 59 - 6º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

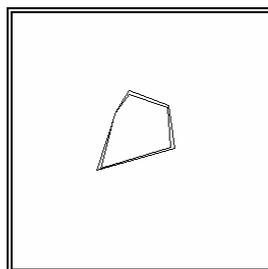


Figura 60 - 7º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

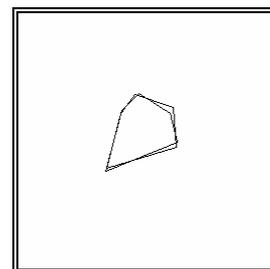


Figura 61 - 8º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

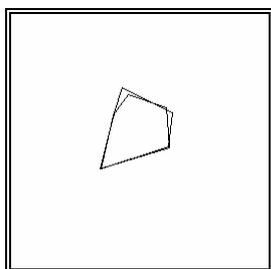


Figura 62 - 9º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

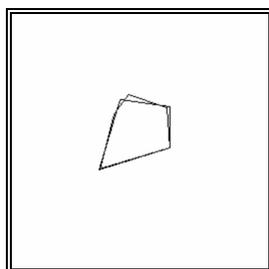


Figura 63 - 10º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

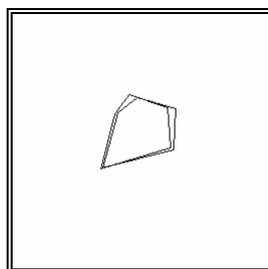


Figura 64 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

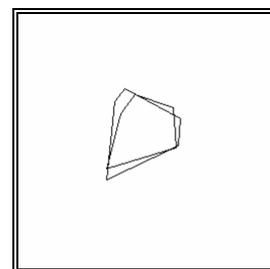


Figura 65 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

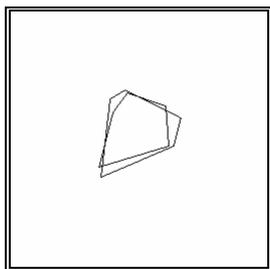


Figura 66 - Soma dos modos de vibração para a elasticidade do aço e área igual a 10.

Considerando novamente a área dos elementos finitos igual a 10 mas aço, em vez de borracha, para o material virtual, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados nas *Figura 68*, ..., *Figura 77*. Na *Figura 78* e na *Figura 79* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na

Figura 80. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 82*.

Como seria de esperar verifica-se que o contorno se tornou mais rígido. Tal também pode ser verificado na *Figura 81* na qual estão representados o contorno original e os obtidos considerando todos os modos de vibração para a borracha e para o aço. Em termos absolutos os valores dos elementos da matriz de massa aumentaram, os dos elementos da matriz de rigidez aumentaram consideravelmente; os valores das frequências de vibração também aumentaram consideravelmente e as amplitudes dos modos de vibração diminuíram.

Voltando a optar por área dos elementos finitos igual a 10 e borracha para o material virtual mas considerando desta vez a ligação entre todos os dados que constituem o objecto por intermédio de elementos finitos do tipo axial, o contorno original e o obtido considerando apenas cada modo de vibração estão representados nas *Figura 83*, ..., *Figura 92*. Na *Figura 93* e na *Figura 94* estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma dos três primeiros modos de vibração e o obtido considerando a soma dos restantes modos. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 95*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 96*.

Como seria de esperar analisando os resultados apresentados verifica-se que o contorno modelado se comportou de forma mais rígida. As matrizes de massa e de rigidez já não apresentam tantos elementos de valor nulo, em termos absolutos os seus elementos ou aumentaram o seu valor ou mantiveram-se iguais, os valores das frequências de vibração diminuíram e tornaram-se mais semelhantes e as amplitudes dos modos de vibração diminuíram e também tornaram-se mais semelhantes.

Para se verificar a influência da amostragem do objecto, nomeadamente na inclusão de mais *pixels* em zonas características (como vértices), foram realizadas várias experiências; no entanto, verificou-se que este aumento da concentração não alterou o tipo das deformações obtidas para cada modo de vibração nem ocorreu a “amarração” do contorno a estas zonas.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 10.000000.

Material density: 0.000001.

Young modulus: 200000.000000.

Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.008101 +0.001040 +0.000000 +0.000000 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.001040 +0.014105 +0.006013 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.006013 +0.031446 +0.009710 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.009710 +0.025428 +0.003003 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.003003 +0.012029 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.008101 +0.001040 +0.000000 +0.000000 +0.003011
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.001040 +0.014105 +0.006013 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.006013 +0.031446 +0.009710 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.009710 +0.025428 +0.003003
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.003003 +0.012029

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+74400.272434 -29819.700297 +0.000000 +0.000000 -44580.572137 -25218.344898 +40469.593260 +0.000000 +0.000000 -15251.248363
 -29819.700297 +31964.071566 -2144.371269 +0.000000 +0.000000 +40469.593260 -48893.908960 +8424.315700 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 -2144.371269 +27523.263137 -25378.891868 +0.000000 +0.000000 +8424.315700 -16148.326269 +7724.010569 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -25378.891868 +25657.785398 -278.893530 +0.000000 +0.000000 +7724.010569 -4005.430171 -3718.580397
 -44580.572137 +0.000000 +0.000000 -278.893530 +44859.465666 -15251.248363 +0.000000 +0.000000 -3718.580397 +18969.828760
 -25218.344898 +40469.593260 +0.000000 +0.000000 -15251.248363 +60140.551759 -54923.019424 +0.000000 +0.000000 -5217.532335
 +40469.593260 -48893.908960 +8424.315700 +0.000000 +0.000000 -54923.019424 +88018.545389 -33095.525964 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +8424.315700 -16148.326269 +7724.010569 +0.000000 +0.000000 -33095.525964 +35446.311790 -2350.785825 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +7724.010569 -4005.430171 -3718.580397 +0.000000 +0.000000 -2350.785825 +51931.857790 -49581.071965
 -15251.248363 +0.000000 +0.000000 -3718.580397 +18969.828760 -5217.532335 +0.000000 +0.000000 -49581.071965 +54798.604299

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000019 +0.000063 +1536.857410 +1818.543368 +2828.909440 +3902.616276 +4839.402120

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+4.129920 +3.205700 +0.521083 -0.831944 -0.509589 +1.664278 -0.289407 +3.738709 -5.918449 -7.587340
 -0.667398 +2.218116 +1.371689 -0.232894 -7.520374 -1.595722 +0.576472 +0.698482 -0.942558 +3.292331
 -0.334033 -0.741255 +3.570565 +0.238874 +1.282814 +3.079996 -3.599489 -1.183178 +0.638281 -0.737107
 -0.916417 +1.220946 +3.035169 +0.533582 +1.483951 -3.989603 +3.788857 +1.162467 -1.073965 -0.053716
 +6.146029 +1.514247 +0.655954 -1.405044 +0.232889 +1.132072 +0.919519 -2.701278 +5.692909 +3.290072
 +4.673131 -1.610011 -0.371976 +1.696079 +2.516833 -3.431846 -4.363561 -0.952367 -6.500257 +5.497728
 +1.138265 -2.337705 +0.254786 +2.137484 -2.649008 -4.475138 -1.578874 -3.124365 +2.402458 -4.742042
 +1.223121 -3.091000 +0.814500 +2.257571 -0.408197 +2.609591 +2.248400 +3.017726 -0.262582 +1.374091
 -0.690428 +3.356233 -0.944655 +3.225895 +0.252682 +0.646295 +0.631712 -4.555876 -1.395081 -0.432391
 -1.220111 +3.334235 -0.766214 +3.371292 +0.346512 -0.629523 -2.423012 +6.046635 +5.196368 -0.820481

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+9.100654
 +7.715074
 +5.185621
 +6.113628
 +8.626697
 +8.451594
 +7.837870
 +10.080035
 +12.121429
 +11.629196

Figura 67 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para a elasticidade do aço e área igual a 10.

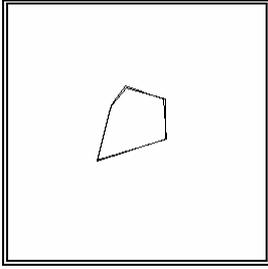


Figura 68 - 1º modo de vibração para aço e área igual a 10.

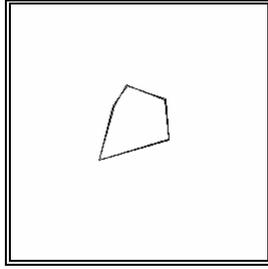


Figura 69 - 2º modo de vibração para aço e área igual a 10.

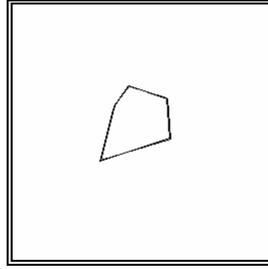


Figura 70 - 3º modo de vibração para aço e área igual a 10.

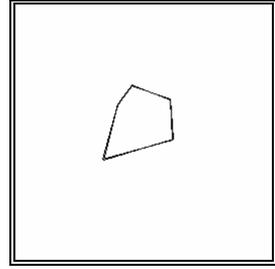


Figura 71 - 4º modo de vibração para aço e área igual a 10.

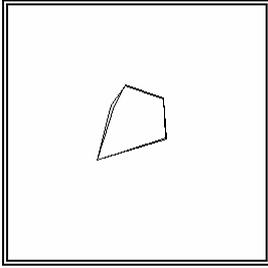


Figura 72 - 5º modo de vibração para aço e área igual a 10.

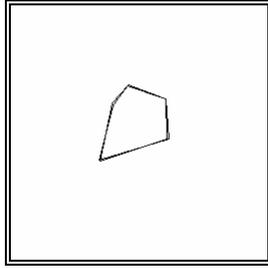


Figura 73 - 6º modo de vibração para aço e área igual a 10.

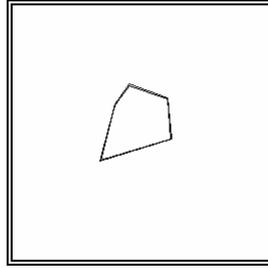


Figura 74 - 7º modo de vibração para aço e área igual a 10.

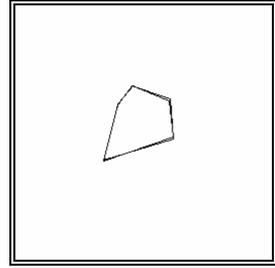


Figura 75 - 8º modo de vibração para aço e área igual a 10.

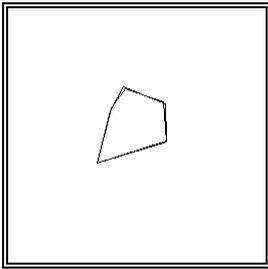


Figura 76 - 9º modo de vibração para aço e área igual a 10.

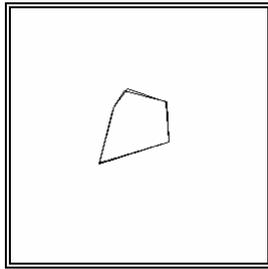


Figura 77 - 10º modo de vibração para aço e área igual a 10.

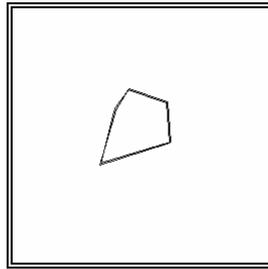


Figura 78 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para aço e área igual a 10.

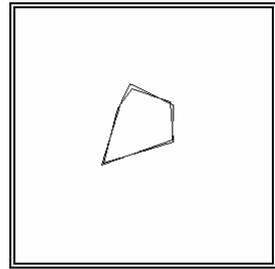


Figura 79 - Soma do 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para aço e área igual a 10.

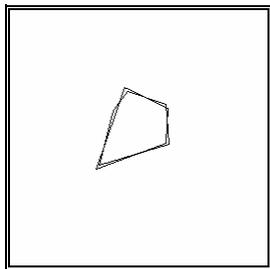


Figura 80 - Soma dos modos de vibração para aço e área igual a 10.

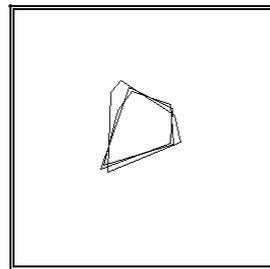


Figura 81 - Contorno original e os obtidos com a soma dos modos de vibração para a borracha e para o aço.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 10.000000.
 Material density: 0.000008.
 Young modulus: 200000.000000.
 Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.056348 +0.007232 +0.000000 +0.000000 +0.020942 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000
 +0.007232 +0.098102 +0.041819 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.041819 +0.218717 +0.067539 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.067539 +0.176859 +0.020890 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000
 +0.020942 +0.000000 +0.000000 +0.020890 +0.083665 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000
 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 +0.056348 +0.007232 +0.000000 +0.000000 +0.020942
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.007232 +0.098102 +0.041819 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.041819 +0.218717 +0.067539 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.067539 +0.176859 +0.020890
 -0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 +0.020942 +0.000000 +0.000000 +0.020890 +0.083665

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+74400.272434 -29819.700297 +0.000000 +0.000000 -44580.572137 -25218.344898 +40469.593260 +0.000000 +0.000000 -15251.248363
 -29819.700297 +31964.071566 -2144.371269 +0.000000 +0.000000 +40469.593260 -48893.908960 +8424.315700 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 -2144.371269 +27523.263137 -25378.891868 +0.000000 +0.000000 +8424.315700 -16148.326269 +7724.010569 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 -25378.891868 +25657.785398 -278.893530 +0.000000 +0.000000 +7724.010569 -4005.430171 -3718.580397
 -44580.572137 +0.000000 +0.000000 -278.893530 +44859.465666 -15251.248363 +0.000000 +0.000000 -3718.580397 +18969.828760
 -25218.344898 +40469.593260 +0.000000 +0.000000 -15251.248363 +60140.551759 -54923.019424 +0.000000 +0.000000 -5217.532335
 +40469.593260 -48893.908960 +8424.315700 +0.000000 +0.000000 -54923.019424 +88018.545389 -33095.525964 +0.000000 +0.000000
 +0.000000 +8424.315700 -16148.326269 +7724.010569 +0.000000 +0.000000 -33095.525964 +35446.311790 -2350.785825 +0.000000
 +0.000000 +0.000000 +7724.010569 -4005.430171 -3718.580397 +0.000000 +0.000000 -2350.785825 +51931.857790 -49581.071965
 -15251.248363 +0.000000 +0.000000 -3718.580397 +18969.828760 -5217.532335 +0.000000 +0.000000 -49581.071965 +54798.604299

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000003 +0.000017 +582.738696 +689.547113 +1072.653187 +1479.776527 +1834.982779

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+1.224341 -0.697583 -1.368115 +0.411143 +0.281453 +0.631053 -0.109736 +1.417627 -2.244131 -2.876934
 +0.304912 +1.394292 -0.846664 +0.086361 +2.533712 -0.605059 +0.218584 +0.264847 -0.357395 +1.248371
 -0.410579 -0.028300 -0.525098 -1.245053 -0.421361 +1.167859 -1.364838 -0.448632 +0.242020 -0.279493
 -0.514104 +0.252141 -0.958806 -0.648689 -0.590854 -1.512760 +1.436642 +0.440779 -0.407221 -0.020368
 +1.691371 -1.460183 -1.042189 -0.045928 +0.181375 +0.429254 +0.348659 -1.024259 +2.158612 +1.247515
 +1.592923 -0.892674 +0.325727 -0.500824 -1.079566 -1.301272 -1.654556 -0.361114 -2.464738 +2.084604
 +0.915449 +0.648707 +0.709954 -0.740138 +0.579993 -1.696863 -0.598670 -1.184683 +0.910953 -1.798066
 +0.733324 +0.286593 +0.791807 -1.079043 -0.172208 +0.989493 +0.852538 +1.144248 -0.099565 +0.521022
 +0.393170 +1.208040 -0.633233 +0.880437 -0.729112 +0.245059 +0.239530 -1.727477 -0.528981 -0.163952
 +0.227759 +1.336464 -0.626979 +0.835230 -0.787029 -0.238700 -0.918747 +2.292736 +1.970336 -0.311106

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+3.000877
 +3.028614
 +2.626966
 +2.363324
 +3.121056
 +3.204637
 +2.971928
 +3.822102
 +4.596149
 +4.409506

Figura 82 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para aço e área igual a 10.

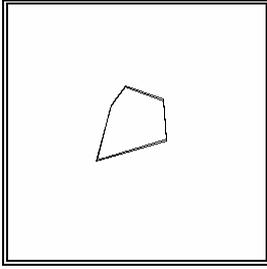


Figura 83 - 1º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

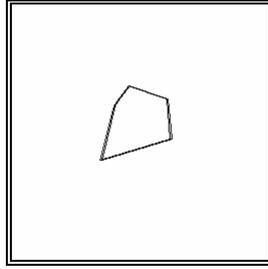


Figura 84 - 2º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

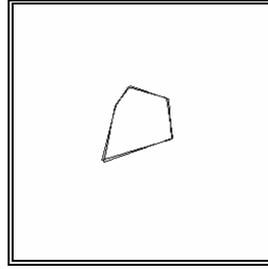


Figura 85 - 3º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

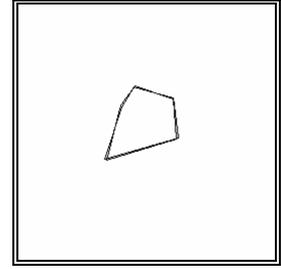


Figura 86 - 4º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

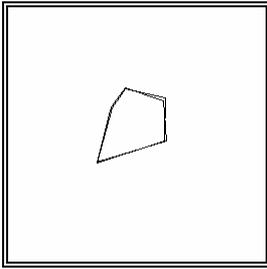


Figura 87 - 5º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

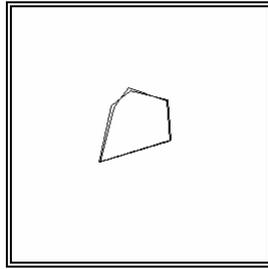


Figura 88 - 6º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

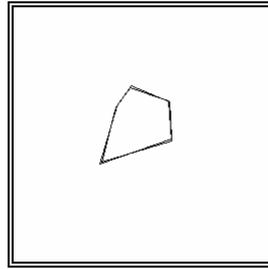


Figura 89 - 7º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

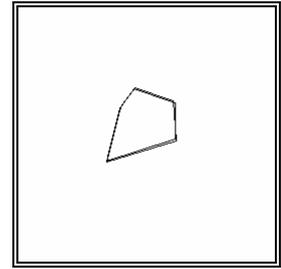


Figura 90 - 8º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

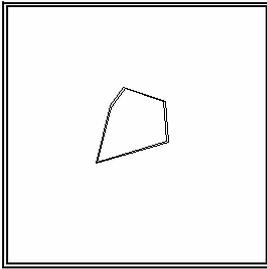


Figura 91 - 9º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

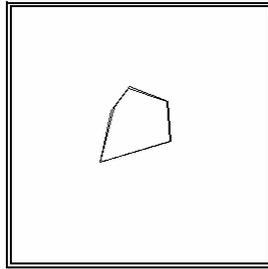


Figura 92 - 10º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

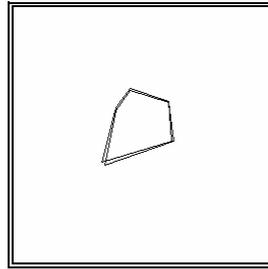


Figura 93 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

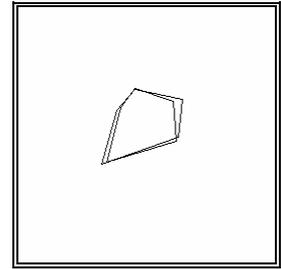


Figura 94 - Soma do 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º e 10º modo de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

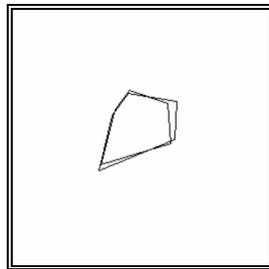


Figura 95 - Soma dos modos de vibração para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados.

Results for Modal Analysis with the model of 2D Axial Elements in testea

With:

Elements area: 10.000000.

Material density: 0.000001.

Young modulus: 2.430000.

Scale pixel/units used: 1.000000.

Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.048235 +0.001040 +0.011685 +0.008381 +0.003011 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.001040 +0.039943 +0.006013 +0.007805 +0.005115 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.011685 +0.006013 +0.084971 +0.009710 +0.015077 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
 +0.008381 +0.007805 +0.009710 +0.057799 +0.003003 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.003011 +0.005115 +0.015077 +0.003003 +0.052412 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.048235 +0.001040 +0.011685 +0.008381 +0.003011
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.001040 +0.039943 +0.006013 +0.007805 +0.005115
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.011685 +0.006013 +0.084971 +0.009710 +0.015077
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.008381 +0.007805 +0.009710 +0.057799 +0.003003
 +0.000000 +0.000000 +0.000000 -0.000000 -0.000000 +0.003011 +0.005115 +0.015077 +0.003003 +0.052412

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+1.078198 -0.362309 -0.038465 -0.135770 -0.541654 -0.232551 +0.491706 +0.101656 -0.175508 -0.185303
 -0.362309 +1.118393 -0.026054 -0.271901 -0.458128 +0.491706 -0.478837 +0.102355 -0.168084 +0.052861
 -0.038465 -0.026054 +0.518693 -0.308354 -0.145821 +0.101656 +0.102355 -0.432632 +0.093847 +0.134774
 -0.135770 -0.271901 -0.308354 +0.719414 -0.003389 -0.175508 -0.168084 +0.093847 +0.294926 -0.045181
 -0.541654 -0.458128 -0.145821 -0.003389 +1.148991 -0.185303 +0.052861 +0.134774 -0.045181 +0.042849
 -0.232551 +0.491706 +0.101656 -0.175508 -0.185303 +1.226247 -0.667315 -0.268663 -0.226876 -0.063393
 +0.491706 -0.478837 +0.102355 -0.168084 +0.052861 -0.667315 +1.179431 -0.402111 -0.103907 -0.006099
 +0.101656 +0.102355 -0.432632 +0.093847 +0.134774 -0.268663 -0.402111 +0.823899 -0.028562 -0.124564
 -0.175508 -0.168084 +0.093847 +0.294926 -0.045181 -0.226876 -0.103907 -0.028562 +0.961755 -0.602410
 -0.185303 +0.052861 +0.134774 -0.045181 +0.042849 -0.063393 -0.006099 -0.124564 -0.602410 +0.796466

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-10) of (10):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +3.114074 +4.126798 +4.448152 +4.760250 +5.748460 +6.698791 +7.918952

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-10x1-10) of (10x10):

+0.426356 +1.243161 -2.155346 -0.652254 +0.036431 +2.025979 +1.181078 -1.474880 -2.463972 +1.150671
 +0.170899 +1.377888 -1.197657 +1.366783 +1.274617 -2.606310 +1.153626 -0.697874 -1.307912 -2.987942
 -0.568585 +1.767887 +1.574602 -1.928909 -0.329999 -0.660730 -1.512837 +0.278698 -0.576719 -0.301672
 -0.286237 +1.618979 +0.516104 +2.439579 -2.382743 +0.521245 -0.175639 -0.537020 +1.693978 +0.583065
 +0.251569 +1.335343 -1.500085 -0.004536 +2.157745 +0.618103 +0.680194 +2.029559 +2.331208 +1.064205
 +1.412994 +0.177853 +0.628046 +1.074565 +0.694114 +2.877913 -1.556833 +1.018626 -0.595145 -2.390083
 +1.224762 +0.277126 +1.333712 +2.324541 +1.299385 -1.145420 -0.942223 +1.162816 -2.268726 +2.637712
 +1.036530 +0.376398 +2.039378 -0.597441 +0.574094 +0.086682 +2.281070 -1.116889 +0.661514 +0.163427
 +1.964245 -0.112874 -1.438547 -0.801468 +0.078043 -1.023825 -1.936713 -2.191953 +1.449005 +0.326575
 +1.923910 -0.091601 -1.287332 -0.908010 -2.645824 -0.787079 +0.588516 +2.404345 -0.393702 -0.435688

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-10) of (1):

+3.579130
 +3.353345
 +4.597262
 +4.510846
 +4.644831
 +4.822587
 +4.256758
 +4.622790
 +4.961051
 +4.980818

Figura 96 - Resultados obtidos para a análise modal do modelo de elementos finitos para borracha, área igual a 10 e todos os pixels ligados entre si.

7.2 - Emparelhamento, Deslocamentos Modais e Nodais, Energia de Deformação

Na *Figura 97* está representado um contorno constituído por 36 *pixels* que se pretendem emparelhar com os *pixels* do contorno representado na *Figura 98*. O contorno 2 foi obtido a partir do contorno 1 através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 20° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um escalonamento relativamente à origem de 0.75. Na *Figura 99* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

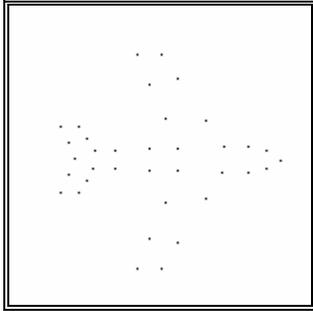


Figura 97 - Contorno 1.

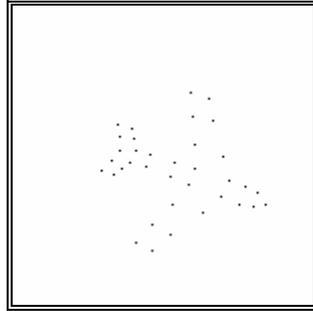


Figura 98 - Contorno 2.

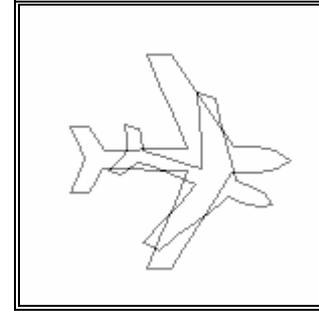


Figura 99 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento adoptou-se por borracha para o material virtual do modelo finito, área dos elementos finitos igual a 10, e consideraram-se todos os modos de vibração. Obtiveram-se emparelhamentos para 15 *pixels* e uma transformação geométrica²³ do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 24.44° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 56.49 e segundo o eixo y de 12.06 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.73. Na *Figura 100* estão representados²⁴ os emparelhamentos obtidos; na *Figura 101* os mesmos emparelhamentos após a aplicação²⁵ ao contorno 1 da rotação em torno da origem e da translação determinadas, e na *Figura 102* estão representados após a aplicação da transformação geométrica determinada. Nestas figuras é possível comprovar-se que alguns dos emparelhamentos obtidos estão errados; no entanto a transformação rígida existente entre os dois contornos é estimada de forma aceitável. O valor da energia de deformação obtido foi igual a $3.78e-5$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a $6.68e-7$.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração (18 modos) obtivemos 3 emparelhamentos todos errados. Considerando-se apenas 10% dos modos (7 modos) obtiveram-se 5 emparelhamentos todos errados. Considerando-se os modos que se diferenciavam de $1e-6$ em termos da sua frequência de vibração (36 modos) obtivemos 34 correctos e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.06° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.04 e segundo o eixo y de 9.84 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75. Na *Figura 103* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação em torno da origem e da translação determinadas e na *Figura 104* após a aplicação ao

²³ Deve-se notar que existem erros associados à transformação geométrica determinada devido ao facto de estarmos em presença de coordenadas discretas. O método utilizado para a determinação da transformação geométrica entre os dois contornos está descrito em [Horn, 1987; Tavares, 1997].

²⁴ Nas figuras de resultados os *pixels* que constituem os contornos aparecem ligados por intermédio de segmentos de recta de forma a facilitar a análise das mesmas.

²⁵ A transformação geométrica é aplicada ao contorno 1 apenas para a sua representação nas figuras.

contorno 1 da transformação rígida determinada. A energia de deformação determinada foi de 0.000144 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de 1.85e-6. Os deslocamentos nodais obtidos para o contorno 1 por minimização da energia de deformação estão representados²⁶ na *Figura 105*. Na *Figura 106* estão representados os dois contornos após determinação dos deslocamentos nodais para o contorno 1 por minimização da energia de deformação após ser aplicada ao contorno 1 a transformação rígida determinada.

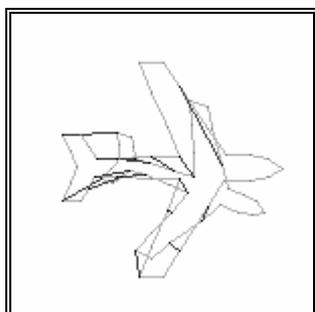


Figura 100 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração.

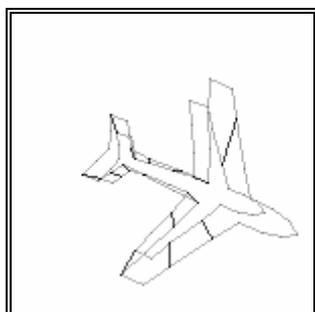


Figura 101 - ... após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

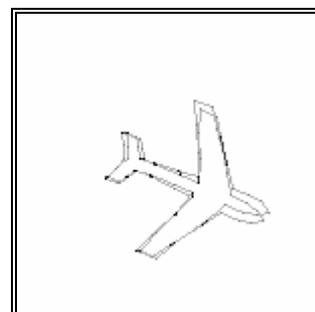


Figura 102 - ... após aplicação ao contorno 1 da transformação geométrica determinada.

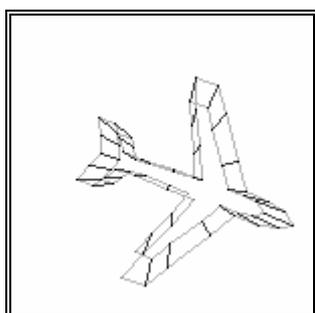


Figura 103 - Emparelhamentos obtidos considerando os modos de vibração que diferenciassem entre si de 1e-6 em frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

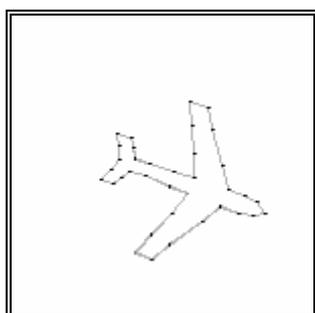


Figura 104 - ... após aplicação ao contorno 1 da transformação rígida determinada.

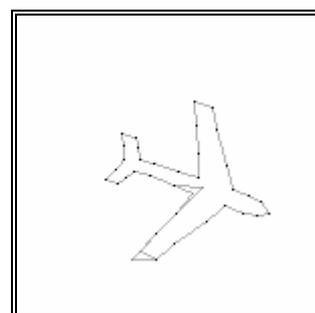


Figura 105 - Contornos após a aplicação dos deslocamento nodais para o contorno 1 obtidos por minimização da energia de deformação.

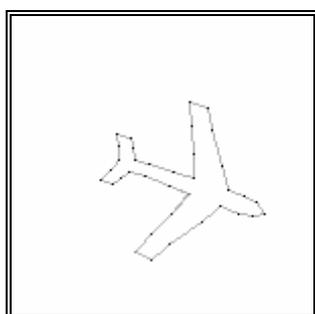


Figura 106 - Contornos após a aplicação da transformação rígida determinada e dos deslocamento nodais para o contorno 1 obtidos por minimização da energia de deformação.

Considerando-se apenas 45% dos modos e estes diferentes entre si de 1e-6 em termos de

²⁶ Nestas figuras quanto mais o contorno 1 coincidir com o contorno 2 melhores os deslocamentos nodais estimados.

frequência (32 modos) obtiveram-se resultados semelhantes quer para o emparelhamento quer para a transformação rígida.

Considerando-se os modos a partir do 4º modo (inclusive) e diferentes entre si de $1e-6$ em termos de frequência (36 modos) obtiveram-se resultados semelhantes quer para o emparelhamento quer para a transformação rígida.

Considerando-se apenas 25% dos modos e estes diferentes entre si de $1e-6$ em termos de frequência (18 modos) obtiveram-se 30 emparelhamentos correctos e uma transformação rígida do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 20.06° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.06 e segundo o eixo y de 9.86 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75.

Considerando-se apenas 8% dos modos e estes diferentes entre si de $1e-6$ em termos de frequência (6 modos) obtiveram-se 16 emparelhamentos correctos e uma transformação rígida do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 19.79° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.69 e segundo o eixo y de 11.17 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.74.

Considerando que os elementos finitos utilizados são construídos em aço obteve-se resultados de emparelhamento semelhantes.

Considerando novamente que os elementos finitos utilizados são construídos em borracha mas que têm secção com área unitária obtivemos resultados de emparelhamento semelhantes.

Desta experiência pode-se concluir que, independentemente do material virtual adoptado para os elementos finitos e do valor arbitrado para a área da secção dos mesmos, é possível obter bons resultados de emparelhamento e de determinação da transformação rígida existente entre os dois contornos desde que sejam retirados, das respectivas bases modais, os modos de que apresentem frequências de vibração praticamente iguais. O valor $1e-6$ revelou-se bastante aceitável para determinar os modos a retirar. Também se notou que a não consideração dos modos de elevada frequência não fez melhorar os resultados de emparelhamento obtidos. Da mesma forma verificou-se que neste caso os deslocamentos nodais obtidos, por minimização da energia de deformação, são de melhor qualidade se optarmos por deslocamentos nodais nulos para os *pixels* não emparelhados em vez de os estimar admitindo para cada um destes *pixels* o melhor candidato ao emparelhamento.

Numa segunda experiência utilizaram-se os contornos constituídos por 11 *pixels* representados na *Figura 107* e na *Figura 108*. O contorno 2 foi obtido a partir do contorno 1 através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de -15° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um escalonamento relativamente à origem de 1.25. Na *Figura 109* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento considerou-se que elementos finitos são construídos por borracha e com secção de área igual a 10. Considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se 10 emparelhamentos sendo alguns errados e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 357.27° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -6.66 e segundo o eixo y de -49.94 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.65. Na *Figura 110* estão representados os emparelhamentos obtidos. O valor da energia de deformação obtido foi igual a 0.00049 e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a 0.00114.

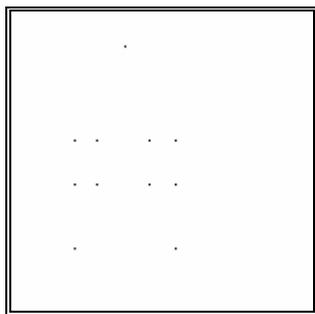


Figura 107 - Contorno 1.

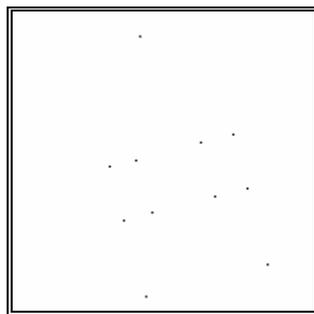


Figura 108 - Contorno 2.

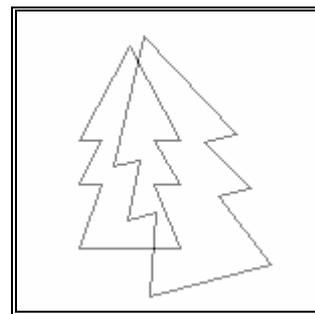


Figura 109 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Considerando-se apenas os modos que se diferenciavam entre si de $1e-6$ em termos de frequência (11 modos) obteve-se emparelhamento correctos para os 11 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.96° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.81 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Os emparelhamentos obtidos estão representados na *Figura 111*. Os contornos após a aplicação dos deslocamentos nodais do contorno 1 determinados por minimização da energia com a aplicação prévia da transformação rígida estão representados na *Figura 112*. O valor da energia de deformação obtido foi igual a $5.55e-5$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a $3.71e-7$.

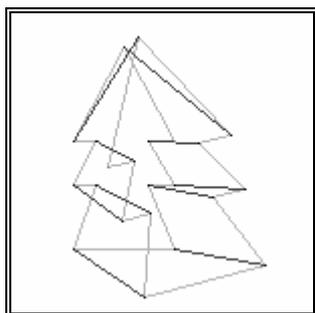


Figura 110 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração.

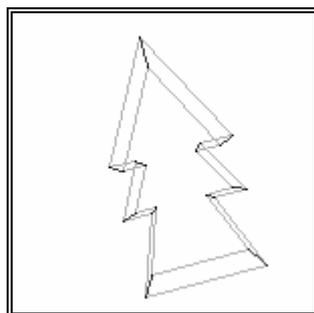
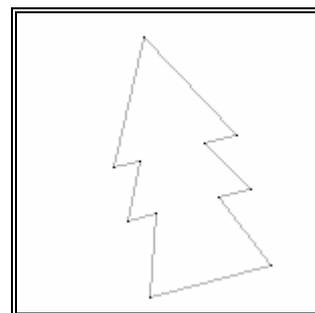
Figura 111 - Emparelhamentos obtidos considerando os modos diferentes entre si de $1e-6$ em termos da frequência.

Figura 112 - ... após a aplicação dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Considerando-se apenas 40% dos modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (8 modos) obtivemos resultados semelhantes.

Considerando-se apenas 25% dos modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (5 modos) obtivemos resultados semelhantes.

Considerando-se 100% dos modos de vibração a partir do 4º modo (inclusive) obteve-se 10 emparelhamentos sendo 2 errados, *Figura 113*, uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.99° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.05 e segundo o eixo y de 9.81 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 .

Considerando-se 75% dos modos de vibração obtiveram 7 emparelhamentos sendo alguns errados, *Figura 114*.

Considerando-se 25% dos modos de vibração obtiveram 2 emparelhamentos sendo um errado, *Figura 115*.

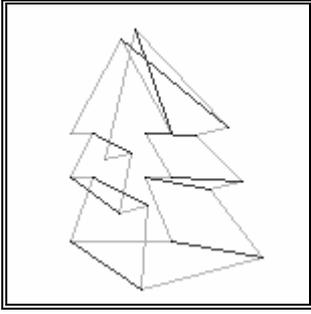


Figura 113 - Emparelhamentos obtidos considerando 100% dos modos de vibração a partir do 4º modo.

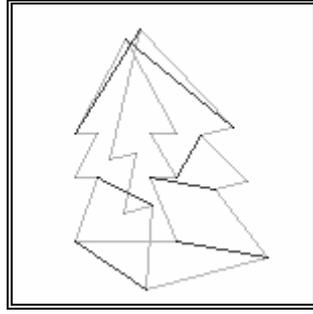


Figura 114 - Emparelhamentos obtidos considerando 75% dos modos de vibração.

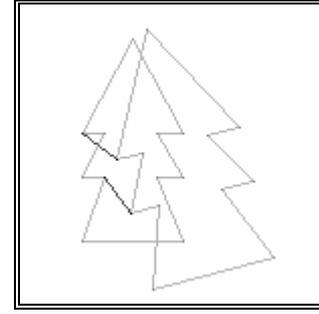


Figura 115 - Emparelhamentos obtidos considerando 25% dos modos de vibração.

Considerando-se que os elementos finitos têm secção com área unitária e utilizando-se 100% dos modos obteve-se 11 emparelhamentos correctos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.81 pixels e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Na Figura 116 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas. O valor da energia de deformação foi igual a $5.55e-6$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a $3.72e-8$.

Considerando-se 25% dos modos de vibração obtivemos 3 emparelhamentos sendo 2 errados.

Considerando-se apenas os modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (11 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos. O valor da energia de deformação foi igual a $5.55e-6$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a $3.72e-8$.

Considerando-se 25% dos modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (5 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos.

Considerando-se que os elementos finitos utilizados nas modelações são constituídos por aço e têm secção com área igual a 10 e utilizando todos os modos de vibração obtivemos 11 emparelhamentos correctos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.81 pixels e um escalonamento em relação à origem de 1.25 .

Considerando-se apenas os modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (11 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos.

Considerando-se 25% dos modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (5 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos.

Considerando-se que os elementos finitos utilizados nas modelações são constituídos por aço e têm secção com área igual unitária e utilizando todos os modos de vibração obtivemos 7 emparelhamentos, sendo 1 errado Figura 117, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 351.33° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -9.86 e segundo o eixo y de -0.75 pixels e um escalonamento em relação à origem de 1.28 .

Considerando-se apenas os modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (11 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos, Figura 118.

Considerando-se 25% dos modos que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequências (5 modos) obtivemos 11 emparelhamentos correctos.

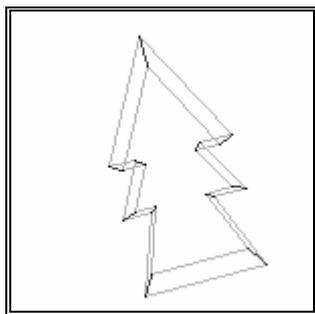


Figura 116 - Emparelhamentos obtidos para elementos finitos de área unitária e considerando todos os modos de vibração, após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

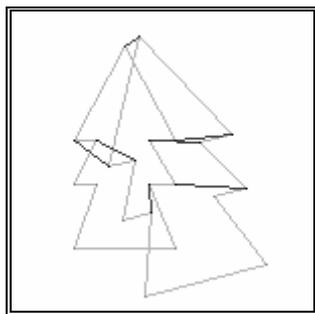


Figura 117 - Emparelhamentos obtidos para elementos finitos de área unitária constituídos por aço e considerando todos os modos de vibração.

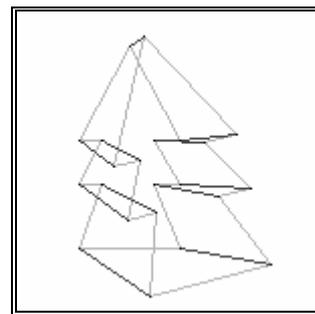


Figura 118- Emparelhamentos obtidos para elementos finitos de área unitária constituídos por aço e considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em frequência.

Desta experiência pode-se concluir que, independentemente do material virtual adoptado para os elementos finitos e do valor arbitrado para a área da secção dos mesmos, é possível obter bons resultados de emparelhamento e de determinação da transformação rígida existente entre os dois contornos desde que sejam retirados das respectivas bases modais os modos de que apresentem frequências de vibração praticamente iguais. O valor $1e-6$ revelou-se bastante aceitável para determinar os modos a retirar. Também se notou que a não consideração dos modos de elevada frequência não fez melhorar os resultados de emparelhamento obtidos. Da mesma forma verificou-se que os deslocamentos nodais obtidos, por minimização da energia de deformação, são de melhor qualidade se optarmos por deslocamentos nodais nulos para os *pixels* não emparelhados em vez de os estimar admitindo para cada um destes *pixels* o melhor candidato ao emparelhamento.

Numa terceira experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 5 em 5 *pixels*, de um objecto real (coração) representados²⁷ na Figura 119 (84 *pixels*) e na Figura 120 (79 *pixels*). Na Figura 121 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento considerou-se borracha como o material virtual dos elementos finitos e que estes tinham secção com área igual a 10, e utilizaram-se todos os modos de vibração; obtivemos 10 emparelhamento sendo alguns errados, Figura 122.

Apesar de várias tentativas com tipos diferentes de materiais virtuais, diferentes valores para a área das secções, diferentes conjuntos de modos a considerar, não foi possível determinar-se resultados aceitáveis quer em número de emparelhamentos quer na qualidade destes; suspeita-se que tal se tenha verificado devido há elevada deformação não rígida existente entre os dois contornos.

²⁷ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 0.5 cm superiormente, 1.5 cm inferiormente, 1.5 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito. Estes cortes foram feitos para diminuir o espaço ocupado sem diminuir a zona de interesse em cada imagem.

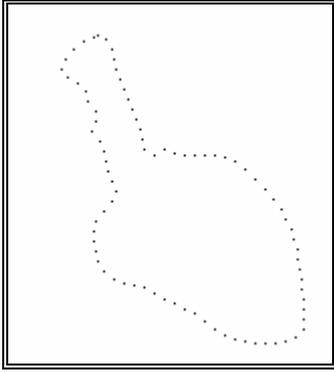


Figura 119 - Contorno 1.

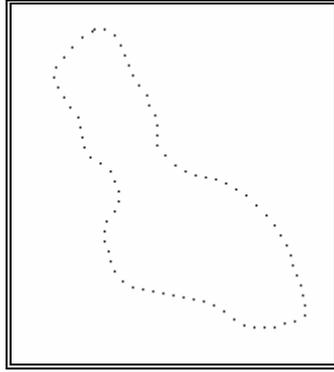


Figura 120 - Contorno 2.

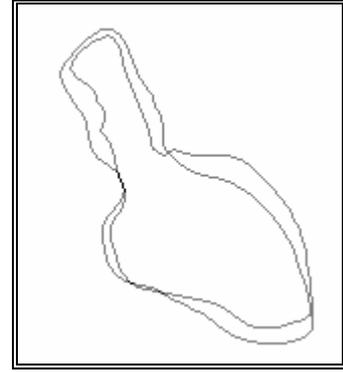


Figura 121 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

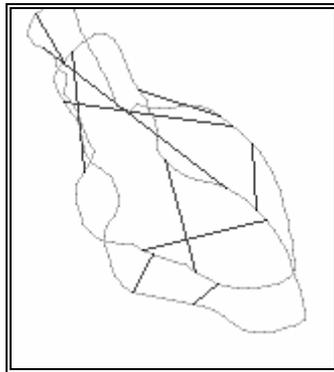


Figura 122 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração.

Numa quarta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real (coração) representados²⁸ na Figura 123 (84 *pixels*) e na Figura 124 (70 *pixels*). Na Figura 125 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

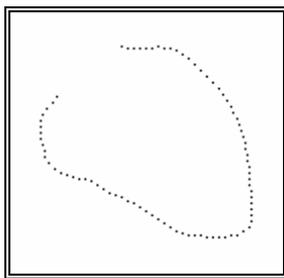


Figura 123 - Contorno 1.

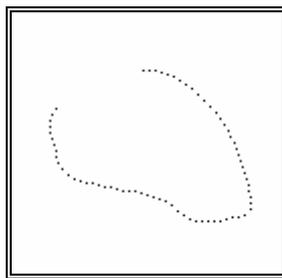


Figura 124 - Contorno 2.



Figura 125 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Apesar de várias tentativas com tipos diferentes de materiais virtuais, diferentes valores para as secções, diferentes conjuntos de modos a considerar, não foi possível determinar-se resultados aceitáveis quer em número de emparelhamentos quer na qualidade destes; suspeita-se que tal se tenha verificado devido há elevada deformação não rígida existente entre os dois

²⁸ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 2.0 cm superiormente, 1.3 cm inferiormente, 2.2 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito.

contornos.

Numa quinta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real representados²⁹ na *Figura 126* (78 *pixels*) e na *Figura 127* (85 *pixels*). Na *Figura 128* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

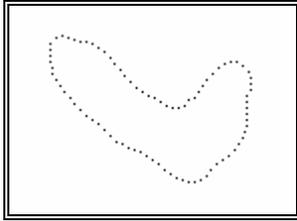


Figura 126 - Contorno 1.

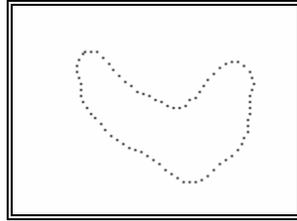


Figura 127 - Contorno 2.

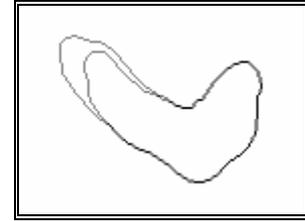


Figura 128 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha como material virtual para a modelização por elementos finitos, secção dos elementos com área unitária, e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 18 *pixels*, sendo alguns errados, e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 356.47° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 17.71 e segundo o eixo *y* de 35.12 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.87. Na *Figura 129* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si pelo menos $1e-5$ em termos de frequência (76 modos) obteve-se 45 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 356.05° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 10.37 e segundo o eixo *y* de 33.98 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.80. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 130*. O valor da energia de deformação foi igual a $1.417e-6$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, a $1.91e-6$.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração que diferem entre si pelo menos $1e-5$ em termos de frequência (39 modos) obteve-se 42 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 357.55° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 15.29 e segundo o eixo *y* de 31.19 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.88. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 131*.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios.

²⁹ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

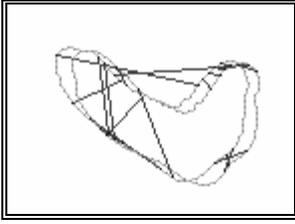


Figura 129 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração e após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

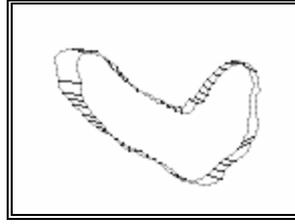


Figura 130 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si mais do que $1e-5$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

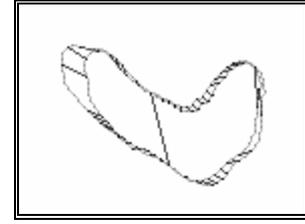


Figura 131 - Emparelhamentos obtidos, considerando 25% dos modos de vibração que diferem entre si mais do que $1e-5$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

Numa sexta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 7 em 7 *pixels*, de um objecto real representados³⁰ na Figura 132 (20 *pixels*) e na Figura 133 (22 *pixels*). Na Figura 134 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

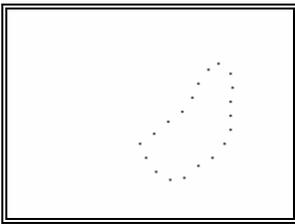


Figura 132 - Contorno 1.

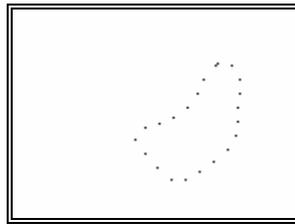


Figura 133 - Contorno 2.

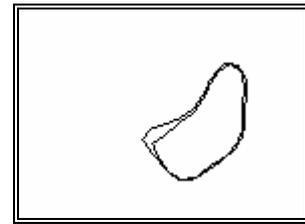


Figura 134 - Contornos 1 e 2 com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha para material virtual, fazendo a área da secção dos elementos finitos unitária e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 13 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 4.61° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 1.77 e segundo o eixo *y* de -33.31 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.09. Na Figura 135 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas e verifica-se que alguns estão errados.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (20 modos) obteve-se 19 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 5.43° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 8.61 e segundo o eixo *y* de -28.18 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na Figura 136.

Considerando-se apenas 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (16 modos) obteve-se 20 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 5.69° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 9.85 e segundo o eixo *y* de -28.49 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.05. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação

³⁰ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

determinadas estão representados na *Figura 137*. Aplicando os deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, ao contorno *1* resulta a representação da *Figura 138*. O valor desta energia de deformação é de $2.77e-6$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de $2.55e-6$.

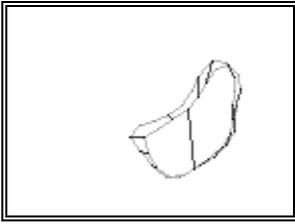


Figura 135 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

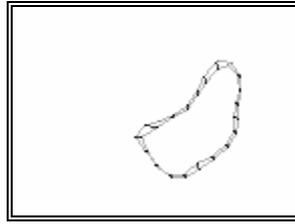


Figura 136 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

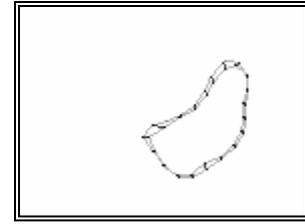


Figura 137 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

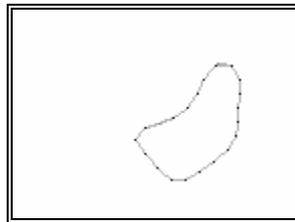


Figura 138 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Resultados semelhantes para os emparelhamentos entre os dados dos dois contornos foram obtidos para vários materiais virtuais e para diferentes valores da área da secção dos elementos finitos utilizados na modelização.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios. Para tal, independentemente do material adoptado e do valor da área dos elementos finitos, deve-se retirar de cada base modal os modos próprios de frequência praticamente igual, $1e-6$ revelou-se mais uma vez um valor razoável, e de frequência elevada.

Numa sétima experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 7 em 7 *pixels*, de um objecto real representados³¹ na *Figura 132* (21 *pixels*) e na *Figura 133* (22 *pixels*). Na *Figura 134* é possível observar-se os contornos *1* e *2* com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

³¹ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

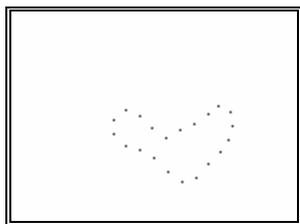


Figura 139 - Contorno 1.

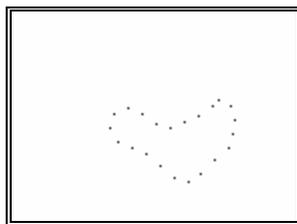


Figura 140 - Contorno 2.

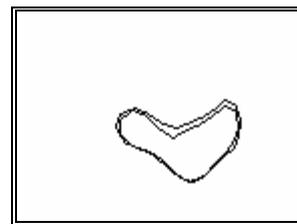


Figura 141 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha para material virtual, fazendo a área da secção dos elementos finitos unitária e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 11 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 358.06° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -24.09 e segundo o eixo y de -20.27 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.12 . Na Figura 142 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas e verifica-se que alguns estão errados.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (21 modos) obteve-se 20 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 352.84° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -32.06 e segundo o eixo y de 8.56 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na Figura 143. Aplicando os deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, ao contorno 1 resulta a representação da Figura 144. O valor desta energia de deformação é de $4.12e-5$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de $4.21e-5$.

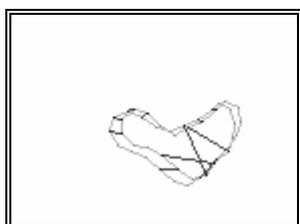


Figura 142 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

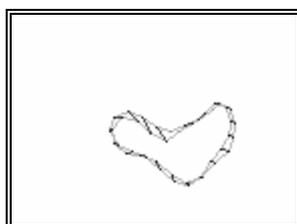


Figura 143 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

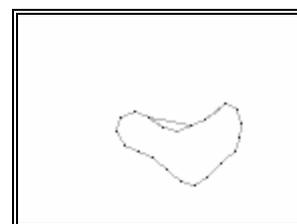


Figura 144 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Considerando-se apenas 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (16 modos) obteve-se 19 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 353.78° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -33.54 e segundo o eixo y de 7.17 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.07 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da transformação rígida determinada estão representados na Figura 145.

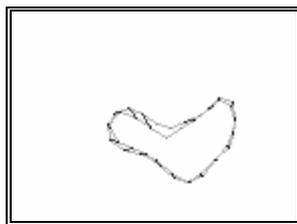


Figura 145 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da transformação rígida determinada.

Resultados semelhantes para os emparelhamentos entre os dados dos dois contornos foram obtidos para vários materiais virtuais e para diferentes valores da área da secção dos elementos finitos utilizados na modelização.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios. Para tal, independentemente do material adoptado e do valor da área dos elementos finitos, deve-se retirar de cada base modal os modos próprios de frequência praticamente igual ($1e-6$ revelou-se mais uma vez um valor razoável).

Numa oitava experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 7 em 7 *pixels*, de um objecto real representados³² na Figura 146 (17 *pixels*) e na Figura 147 (18 *pixels*). Na Figura 148 é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

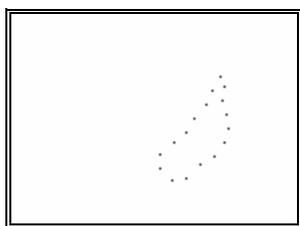


Figura 146 - Contorno 1.

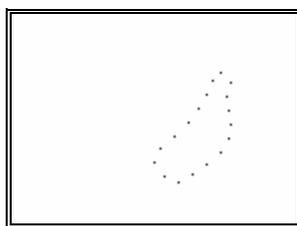


Figura 147 - Contorno 2.

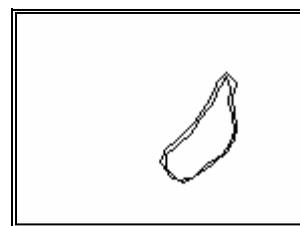


Figura 148 - Contornos 1 e 2 com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha para material virtual, fazendo a área da secção dos elementos finitos unitária e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 10 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno 1 para o contorno 2 constituída por uma rotação de 124.32° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 454.11 e segundo o eixo *y* de 149.95 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.99. Na Figura 149 estão representados os emparelhamentos obtidos e verifica-se que vários estão errados.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (17 modos) obteve-se 16 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 7.95° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de 14.68 e segundo o eixo *y* de -41.69 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.08. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação

³² As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

determinadas estão representados na *Figura 150*. Aplicando os deslocamentos nodais, determinados por minimização da energia de deformação, ao contorno *1* resulta a representação da *Figura 151*. O valor desta energia de deformação é de $1.58e-5$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de $1.67e-5$.

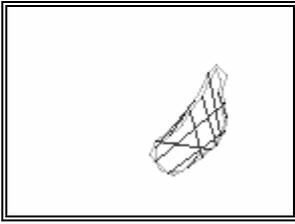


Figura 149 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração.

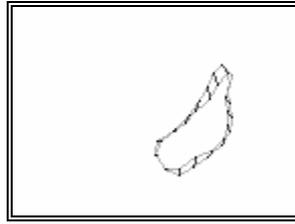


Figura 150 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

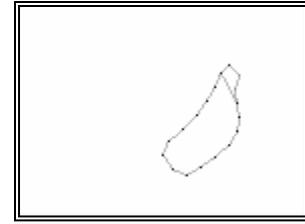


Figura 151 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 dos deslocamentos nodais determinados por minimização da energia de deformação.

Considerando-se apenas 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (13 modos) obteve-se 15 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 2.16° em torno da origem, uma translação segundo o eixo *x* de -5.55 e segundo o eixo *y* de -23.01 pixels e um escalonamento em relação à origem de 1.07 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno *1* da transformação rígida determinada estão representados na *Figura 152*.

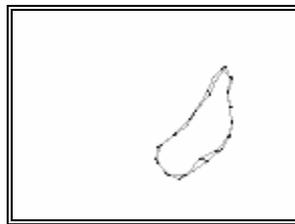


Figura 152 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da transformação rígida determinada.

Resultados semelhantes para os emparelhamentos entre os dados dos dois contornos foram obtidos para vários materiais virtuais e para diferentes valores da área da secção dos elementos finitos utilizados na modelização.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios. Para tal, independentemente do material adoptado e do valor da área dos elementos finitos, deve-se retirar de cada base modal os modos próprios de frequência praticamente igual ($1e-6$ revelou-se mais uma vez um valor razoável).

Numa nona experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 5 em 5 pixels, de um

objecto real (coração) representados³³ na *Figura 153* (35 *pixels*) e na *Figura 154* (42 *pixels*). Na *Figura 155* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

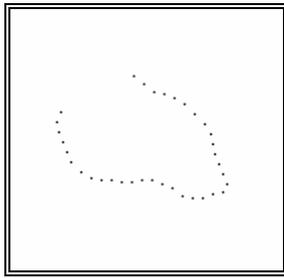


Figura 153 - Contorno 1.

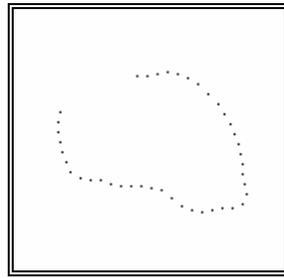


Figura 154 - Contorno 2.

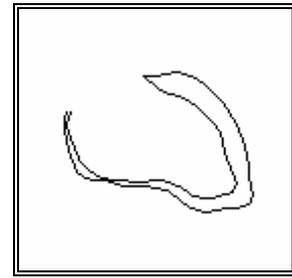


Figura 155 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha para material virtual, fazendo a área da secção dos elementos finitos unitária e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 2 *pixels*, *Figura 156*.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (35 modos) obteve-se 16 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 356.49° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -30.23 e segundo o eixo y de -11.55 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.17 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 157*.

Considerando-se apenas 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (28 modos) obteve-se 25 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 355.86° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -34.66 e segundo o eixo y de -12.39 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.19 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 158*.

Considerando-se apenas 25% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (17 modos) obteve-se 27 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 357.07° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -29.20 e segundo o eixo y de -14.61 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.17 . Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 159* e na *Figura 160* após a aplicação da transformação rígida determinada. O valor da energia de deformação é de $1.34e-5$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de $1.12e-5$. Os deslocamentos nodais estimados por minimização desta energia revelaram-se de má qualidade.

Resultados semelhantes para os emparelhamentos entre os dados dos dois contornos foram obtidos para vários materiais virtuais e para diferentes valores da área da secção dos elementos finitos utilizados na modelização.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre

³³ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 2.0 cm superiormente, 1.3 cm inferiormente, 2.2 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito.

os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios. Para tal, independentemente do material adoptado e do valor da área dos elementos finitos, deve-se retirar de cada base modal os modos próprios de frequência praticamente igual, $1e-6$ revelou-se mais uma vez um valor razoável, e de frequência elevada.

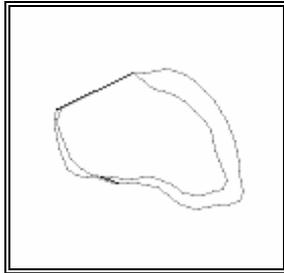


Figura 156 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

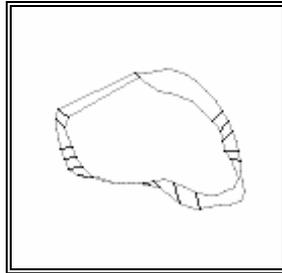


Figura 157 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

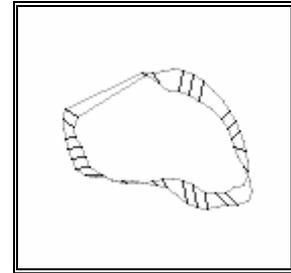


Figura 158 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

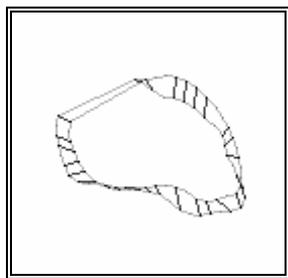


Figura 159 - Emparelhamentos obtidos, considerando 25% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

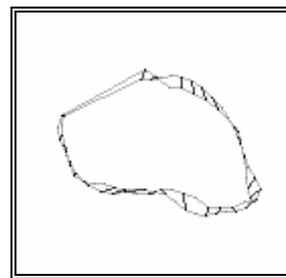


Figura 160 - Emparelhamentos obtidos, considerando 25% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da transformação rígida determinada.

Numa décima experiência utilizaram-se os contornos abertos, amostrados de 5 em 5 *pixels*, de um objecto real representados³⁴ na *Figura 161* (33 *pixels*) e na *Figura 162* (31 *pixels*). Na *Figura 163* é possível observar-se os contornos 1 e 2 com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se borracha para material virtual, fazendo a área da secção dos elementos finitos unitária e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 13 *pixels*. Na *Figura 164* estão representados os emparelhamentos obtidos e verifica-se que vários estão errados.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (30 modos) obteve-se 29 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 358.56° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 2.76 e segundo o eixo y de -10.09 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.92. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 165*.

³⁴ As figuras apresentadas para estes contornos foram reduzidas em 50% e cortadas 2 cm superiormente, 2 cm inferiormente, 2 cm do lado esquerdo e 2 cm do lado direito.

Considerando-se apenas 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência (24 modos) obteve-se 30 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 358.57° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 3.53 e segundo o eixo y de -9.83 pixels e um escalonamento em relação à origem de 0.92. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 166*. O valor da energia de deformação é de $7.05e-7$ e, após a aplicação da transformação rígida determinada, de $8.25e-7$. Os deslocamentos nodais estimados por minimização desta energia revelaram-se de má qualidade.

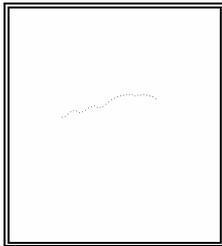


Figura 161 - Contorno 1.

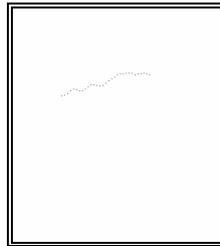


Figura 162 - Contorno 2.

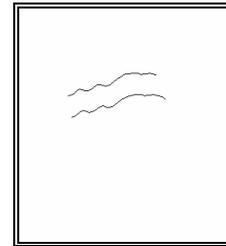


Figura 163 - Contornos 1 e 2 com os pixels ligados por segmentos de recta.

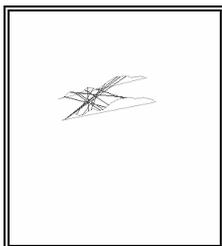


Figura 164 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração.

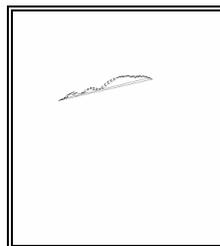


Figura 165 - Emparelhamentos obtidos, considerando os modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

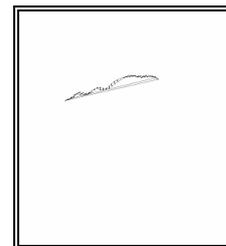


Figura 166 - Emparelhamentos obtidos, considerando 40% dos modos de vibração que diferem entre si de $1e-6$ em termos de frequência, após aplicação ao contorno 1 da rotação e da translação determinadas.

Resultados semelhantes para os emparelhamentos entre os dados dos dois contornos foram obtidos para vários materiais virtuais e para diferentes valores da área da secção dos elementos finitos utilizados na modelização.

Desta experiência pode-se concluir que quando a deformação não rígida existente entre dois contornos não é excessiva é possível recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois e obter-se emparelhamentos satisfatórios. Para tal, independentemente do material adoptado e do valor da área dos elementos finitos, deve-se retirar de cada base modal os modos próprios de frequência praticamente igual, $1e-6$ revelou-se mais uma vez um valor razoável, e de frequência elevada.

Dos resultados experimentais apresentados podemos concluir:

- É possível obter-se bons resultados de emparelhamento quando a deformação não rígida existente entre os dois objectos é reduzida;

- Geralmente obtemos melhores resultados quando a amostragem dos objectos não é muito fina;
- A não inclusão dos modos de mais alta frequência, em geral, favorece a obtenção de melhores emparelhamentos;
- Geralmente a não inclusão dos três primeiros modos de vibração não favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- A não consideração em cada base modal dos modos de vibração que tenham frequências praticamente iguais favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- Geralmente o material adoptado para as modelizações não afecta os resultados obtidos para o emparelhamento desde que sejam retirados de cada base modal os modos com frequências praticamente iguais;
- O valor adoptado para área dos elementos finitos geralmente não afecta os resultados obtidos para o emparelhamento desde que sejam retirados de cada base modal os modos com frequências praticamente iguais;
- O valor do limiar para considerar um dado emparelhamento entre dois nodos de duas formas como aceitável geralmente não têm influência sobre a qualidade dos emparelhamentos obtidos. Assim a condição do valor de afinidade do emparelhamento ser mínimo na sua linha e na sua coluna parece ser suficiente para classificar o referido emparelhamento como aceitável ou não;
- Geralmente os resultados determinados para a transformação rígida existente são de boa qualidade mesmo quando o número de emparelhamentos obtidos é reduzido;
- Quando o número de bons emparelhamentos obtidos é aceitável obtemos geralmente uma boa estimativa para os deslocamentos modais e nodais pelo processo de minimização da energia de deformação;
- O valor da energia de deformação traduz de forma aceitável a deformação existente;
- A grande percentagem do esforço computacional é dispendido nas fases de determinação dos modos de vibração e na determinação das correspondências;
- Verificou-se ser extremamente difícil classificar as simetrias de reflexão existentes.

Como foi verificado este método não obtém bons resultados de emparelhamento quando a deformação não rígida existente entre os dois objectos a emparelhar é considerável. Tais casos podem ser resolvidos dividindo-se o problema original em duas fases: na primeira, são determinadas as correspondências por um outro qualquer processo; na segunda, são determinados os deslocamentos modais e nodais por minimização da energia de deformação e é determinado o valor desta energia utilizando a modelização proposta nesta comunicação. Em [Tavares, 1997b] os emparelhamentos são determinados utilizando a técnica modal proposta por Shapiro, [Shapiro 1991, 1992, 1992a; Tavares, 1997a], e os deslocamentos nodais e o valor da energia de deformação utilizando a modelização proposta nesta comunicação, obtendo-se resultados bastante satisfatórios.

A título de exemplo esta representado na *Figura 167* o conteúdo do ficheiro de resultados do emparelhamento de dois contornos obtido pela implementação por nós realizada do

método proposto.

```

Results for Modal Matching with the Model of 2D Axial Elements with:
Material's density: 1.120000.
Young modulus: 0.002430.
Elements area: 1.000000.
Scale pixel/units used for contour in image t: 1.000000.
Gaussian functions Sigma for contour in image t+1: 1.000000.
Scale pixel/units used for contour in image t+1: 1.000000.

Matrices of the contour in image t:
Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):
+10264.053333 +2512.533333 +2619.493333 +0.000000 +0.000000 -0.000000
+2512.533333 +11933.600000 +3454.266667 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+2619.493333 +3454.266667 +12147.520000 -0.000000 +0.000000 -0.000000
+0.000000 +0.000000 -0.000000 +10264.053333 +2512.533333 +2619.493333
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +2512.533333 +11933.600000 +3454.266667
-0.000000 +0.000000 -0.000000 +2619.493333 +3454.266667 +12147.520000

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):
+0.000014 -0.000007 -0.000007 -0.000000 +0.000010 -0.000010
-0.000007 +0.000025 -0.000018 +0.000010 -0.000010 -0.000000
-0.000007 -0.000018 +0.000025 -0.000010 -0.000000 +0.000010
-0.000000 +0.000010 -0.000010 +0.000028 -0.000014 -0.000014
+0.000010 -0.000010 -0.000000 -0.000014 +0.000014 -0.000000
-0.000010 -0.000000 +0.000010 -0.000014 -0.000000 +0.000014

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000054 +0.000064 +0.000083

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):
-0.000079 -0.004255 +0.005959 -0.000275 -0.007247 +0.000071
-0.000404 -0.004449 -0.002242 +0.005476 +0.002876 -0.005553
-0.000414 -0.004455 -0.002504 -0.005147 +0.003298 +0.005395
+0.004390 -0.000316 -0.000203 -0.006682 +0.000160 -0.006492
+0.004155 -0.000456 -0.006136 +0.002750 -0.004902 +0.002714
+0.004625 -0.000176 +0.005730 +0.002945 +0.004680 +0.002819

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-6) of (1):
+0.007633
+0.007622
+0.010832
+0.010837
+0.010845
+0.010835

Matrices of the contour in image t+1:
Mass Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):
+2134.720000 +531.066667 +536.293333 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+531.066667 +2365.066667 +651.466667 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+536.293333 +651.466667 +2375.520000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +2134.720000 +531.066667 +536.293333
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +531.066667 +2365.066667 +651.466667
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +536.293333 +651.466667 +2375.520000
    
```

Figura 167 - Conteúdo do ficheiro de resultados obtido pela implementação do método proposto.

Stiffness Matrix: - Symmetric Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

+0.000028 -0.000012 -0.000016 +0.000002 +0.000020 -0.000022
 -0.000012 +0.000053 -0.000041 +0.000020 -0.000022 +0.000002
 -0.000016 -0.000041 +0.000057 -0.000022 +0.000002 +0.000020
 +0.000002 +0.000020 -0.000022 +0.000063 -0.000034 -0.000029
 +0.000020 -0.000022 +0.000002 -0.000034 +0.000034 -0.000000
 -0.000022 +0.000002 +0.000020 -0.000029 -0.000000 +0.000029

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-6) of (6):

+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000186 +0.000207 +0.000277

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-6x1-6) of (6x6):

-0.009295 -0.009858 -0.009601 +0.001060 -0.015373 -0.000774
 -0.009705 +0.006652 +0.001764 -0.012457 +0.006105 -0.011800
 -0.009678 +0.005575 +0.001023 +0.011449 +0.007736 +0.012444
 +0.002302 +0.006101 -0.007419 +0.014494 +0.001050 -0.014321
 +0.002062 +0.015791 -0.000748 -0.005721 -0.011657 +0.007102
 +0.002587 -0.005384 -0.015325 -0.007329 +0.010662 +0.005799

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-6) of (1):

+0.017044
 +0.022092
 +0.019668
 +0.024164
 +0.024169
 +0.024163

Results for Modal Matching:

With:

First mode to be considered: 1.
 Percentage of modes to be considered: 100.
 Minimum difference in the eigenValues to be a considered mode: 0.000001.
 Minimum difference to be a symetrie 0.000000.
 Shape vector not normalized by areas ratio.
 Maximum correlation level to be a good matching: 1.000000.
 Number of matched pixels used to find the rigid transformation: 3.

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

+0.000054 +0.000064 +0.000083

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t - Rectangular Matrix - (1-6x1-3) of (6x3):

-0.000275 -0.007247 +0.000071
 +0.005476 +0.002876 -0.005553
 -0.005147 +0.003298 +0.005395
 -0.006682 +0.000160 -0.006492
 +0.002750 -0.004902 +0.002714
 +0.002945 +0.004680 +0.002819

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t+1 - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

+0.000186 +0.000207 +0.000277

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t+1 - Rectangular Matrix - (1-6x1-3) of (6x3):

-0.001060 -0.015373 -0.000774
 +0.012457 +0.006105 -0.011800
 -0.011449 +0.007736 +0.012444
 -0.014494 +0.001050 -0.014321
 +0.005721 -0.011657 +0.007102
 +0.007329 +0.010662 +0.005799

Figura 167 - Continuação.

Correlation Matrix - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

+0.000190 +0.000960 +0.000960
 +0.001022 +0.000172 +0.000907
 +0.001014 +0.000906 +0.000173

Centroid of the contour in image t: (116.999975, 112.667049).
 Centroid of the contour in image t+1: (132.666666, 104.666846).
 Translation between the contours: 77.111414 along x, 57.815981 along y.
 Scale between the contours: 0.447418 along x and y.
 Rotation between the contours: 356.222432.

Pixel 1 in contour t with (117, 49) matched with Pixel 1 in contour t+1 with (131, 75).
 Pixel 2 in contour t with (49, 143) matched with Pixel 2 in contour t+1 with (104, 121).
 Pixel 3 in contour t with (185, 146) matched with Pixel 3 in contour t+1 with (163, 118).

Displacements and Strain energy without rigid geometric transformation applied:

Nodal displacements: - Column Vector - (1-6) of (1):

+14.000000
 +54.999984
 -21.999984
 +25.999984
 -21.999992
 -27.999992

Modal displacements: - Column Vector - (1-6) of (1):

-2473.487605
 -3360.498345
 -160.764911
 +761.350367
 -154.268189
 -6296.950991

Modes strain energy: - Column Vector - (1-6) of (1):

+0.000000
 +0.000000
 +0.000000
 +0.000848
 +0.000048
 +0.136855

Modes strain energy by area: - Column Vector - (1-6) of (1):

+0.000000
 +0.000000
 +0.000000
 +0.000848
 +0.000048
 +0.136855

Total strain energy: 0.137751
 Total strain energy by area: 0.000021

Figura 167 - Continuação.

8 - Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros

Nesta comunicação é apresentado um método para a determinação da correspondência entre os *pixels* que constituem dois objectos. Este método começa por construir um modelo de elementos finitos para cada objecto e determina as correspondências por análise dos deslocamentos dos *pixels* no espaço modal de cada modelo. Deslocamentos idênticos nos dois espaços modais indicam que os *pixels* se devem corresponder.

Um método para a determinação dos deslocamentos nodais e modais também é

apresentado nesta comunicação. Este método, proposto por Sclaroff, realiza esta determinação por minimização da energia de deformação. O valor desta energia pode ser posteriormente para identificar objectos semelhantes.

Uma introdução breve ao método dos elementos finitos e à análise modal também é apresentada nesta comunicação.

Resultados experimentais obtidos por uma implementação por nós realizada do método proposto são apresentados e verifica-se que geralmente são obtidos bons resultados no estabelecimento dos emparelhamentos quando a deformação não rígida não é elevada. Da mesma forma, verifica-se que os deslocamentos nodais e modais, obtidos por minimização da energia de deformação, são geralmente de boa qualidade conseguindo-se assim aproximar as formas de dois objectos utilizando-se os emparelhamentos obtidos e princípios físicos. Também se verificou que o valor da energia de deformação descreve de forma adequada a deformação existente e a similaridade dos objectos.

O método apresenta contudo algumas limitações, como por exemplo: a não adequação para os casos nos quais os objectos se dividam ou se fundam; nos casos de elevadas simetrias torna-se bastante complicado obter os emparelhamentos mais correctos; quando a deformação não rígida é elevada torna-se difícil, se não impossível, obter-se bons resultados de emparelhamento.

No ponto seguinte são apresentadas algumas perspectivas de desenvolvimentos futuros. Pela nossa parte, estamos particularmente confiantes na inclusão na modelação do nível de intensidade como terceira coordenada de forma a adaptar este método à aplicação que actualmente temos em estudo. Esta aplicação prende-se com imagens em sequências de pedobarigrafia nas quais o nível de intensidade está fortemente correlacionado com a pressão exercida pelo pé em estudo ao caminhar sobre a “área sensora”.

8.1 - Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros

8.1.1 - Descritores Modais Treinados

É possível treinar o sistema para seleccionar um subconjunto pesado de modos que são cruciais para uma categoria particular de objectos ou quando se trata de uma aplicação particular. Tal pode ser obtido pelo cálculo das componentes principais para a deformação da forma verificada num conjunto de treino. Estas variações principais, específicas à categoria ou à aplicação, podem ser posteriormente utilizadas para seleccionar um subconjunto de modos de deformação que possam ser utilizados para capturar adequadamente a variação verificada no conjunto de treino.

O ajustamento pode ser determinado pela projecção das componentes principais no espaço modal geral. Deste modo, pode ser verificado que as componentes principais podem ser distribuídas por algum subconjunto das vibrações modais. A quantidade de cada modo de vibração necessária para obter-se esta projecção pode ser utilizada para pesar o quanto cada modo de vibração é considerado como importante para o emparelhamento num dado contexto ou categoria.

8.1.2 - Actualização Recursiva dos Parâmetros Físicos do Modelo

Um modelo modal pode ser recursivamente refinado de forma a capturar as propriedades do material do objecto que tem vindo a ser considerado [Pentland, 1989]. Supondo-se que temos um conjunto de vectores próprios, ou seja modos de vibração, que descrevem como uma dada forma protótipo se deforma sobre condições gerais - é assumido certas propriedades de material: material isotrópico, elasticidade e massa. A matriz de rigidez para o modelo de

elementos finitos pode ser actualizada de forma a incorporar novas observações assim que estas são disponíveis. Trabalho similar no sentido de combinar observações com o emparelhamento modal foi realizado por Cootes [Cootes, 1995].

8.1.3 - Várias Gamas de Modos

Nas várias experiências desenvolvidas verificou-se que, por vezes, se obtêm conjuntos distintos de bons emparelhamentos para gamas diferentes de modos. Assim podemos concluir que, em certas aplicações, os emparelhamentos poderão ser melhorados se não forem obtidos utilizando-se apenas uma única gama mas através da contribuição ponderada de diferentes gamas de modos.

8.1.4 - Melhoramento do Processo de Determinação das Correspondências

Se os emparelhamentos forem determinados na matriz de afinidade por um processo que minimiza o erro do estabelecimento das correspondências entre os *pixels* dos dois objectos de forma global, como por exemplo minimizando o caminho percorrido por todos os *pixels*, poderemos obter melhores resultados de emparelhamento. Desta forma, diminui-se a possibilidade de não emparelhar um determinado *pixel* apenas porque a informação local faz com tal se torne impossível.

Este processo também poderá ser utilizado para permitir uma correspondência de um para vários e de vários para um o que em certas aplicações pode ser o desejável.

Na fase de determinação das correspondências deverão ser anuladas as que provoquem “cruzamentos” sobre a área dos objectos e que se cruzem. Também deverão ser tidas em conta as correspondências obtidas para os vizinhos; isto é, deverá ser englobada informação local. Assim, por exemplo, se o vizinho precedente e o vizinho posterior de um dado *pixel* são emparelhados com dois *pixels* do outro objecto entre os quais exista um *pixel* então este *pixel* deverá ser emparelhado com o *pixel* em questão.

8.1.5 - Aumento da Velocidade de Execução do Método

Em aplicações para as quais a velocidade de execução seja crítica deverão ser implementados métodos mais rápidos para a determinação dos valores e vectores próprios dos modelos de elementos finitos. Por ventura, versões paralelizadas para obter-se os referidos modos de forma o mais rápida possível.

O processo de obtenção das correspondências também deverá ser acelerado de forma a não ser tão custoso em termos computacionais em particular quando o número de dados de cada modelo é elevado.

8.1.6 - Utilização de Elementos Finitos Mais Complexos

Como se verificou na prática esta modelização não é adequada para a determinação dos emparelhamentos entre objectos no caso da deformação não rígida existente ser elevada. Nestes casos deverá ser estudada a modelização por elementos finitos mais complexos; nomeadamente utilizando-se elementos finitos axiais quadráticos e cúbicos. Os nodos adicionados pela utilização destes elementos mais complexos não necessitam de ser considerados na determinação das matrizes globais não havendo assim um grande aumento dos custos computacionais [Bathe, 1996; Tavares, 1998].

O optimismo na utilização de elementos finitos mais complexos prende-se com o facto de que as soluções pelo método dos elementos finitos geralmente obtêm melhores resultados pela

utilização de elementos mais complexos do que pela utilização de um maior número de elementos mais simples [Bathe, 1996; Tavares, 1998].

8.1.7 - Inclusão do Nível de Cinzento nos Modelos 2D

Em vez de ser determinar uma representação da forma de um objecto e se considerar em separado a aparência, dada pela intensidade, de cada um dos seus *pixels* pode ser apropriado construir um modelo combinado. Modelos modais tridimensionais podem ser utilizados para representar dados em imagens em termos das componentes (x,y,i) , onde i representa a intensidade da imagem para o *pixel* localizado em (x,y) . Contudo, algum cuidado deverá ser necessário na utilização de dados de orlas, pois os valores de intensidade nos pontos das orlas tendem a ser instáveis [Sclaroff, 1995].

Tal problema pode ser evitado pela utilização de uma formulação alternativa na qual a informação da intensidade na imagem pode ser incluída no modelo pela variação da espessura da forma baseada no brilho na imagem ao longo da mesma.

A abordagem de incluir o nível de intensidade na modelação é utilizada em [Cootes, 1993, 1993a, 1994; Moghaddam, 1996; Nastar, 1995] e esperamos que possa a ser de grande utilizada em imagens de pedobarigrafia, nas quais o nosso estudo futuro se irá concentrar, e nas quais o nível de intensidade está directamente relacionado com a pressão do pé em estudo [Tavares, 1997b].

Agradecimentos

Agradeço à Junta Nacional de Investigação Científica a bolsa de doutoramento que me concedeu (referência: BD/3243/94 - PRAXIS XXI).

Bibliografia

[Bathe, 1996] - *Klaus-Jürgen Bathe*
FINITE ELEMENT PROCEDURES
PRENTICE HALL - 1996

[Benayoun, 1994] - *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*
ADAPTIVE MESHES AND NON RIGID MOTION COMPUTATION
IEEE - 1051-4651/94, MAI 1994

[Benayoun, 1994a] - *Serge Benayoun, Nicholas Ayache, Isaac Cohen*
AN ADAPTIVE MODEL FOR 2D AND 3D DENSE NON RIGID MOTION COMPUTATION
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION - N° 2297, MAI 1994

[Bro-Nielsen, 1996] - *Surgery Simulation Using Fast Finite Elements*
VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING
4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, VBC'96, HAMBURG, GERMANY - SEPTEMBER 1996
SPRINGER

[Chapra, 1988] - *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*
NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS

MCGRAW-HILL - 1988

[Cohen, 1991] - *Laurent D. Cohen*

ON ACTIVE CONTOUR MODELS AND BALLOONS

CVGIP: IMAGE UNDERSTANDING, VOL. 53, Nº 2, MARCH, PP. 211-218, 1991

[Cootes, 1993] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*

ACTIVE SHAPE MODEL SEARCH USING GREY-LEVEL MODELS: A QUANTITATIVE EVALUATION

PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE (ED. J. ILLINGWORTH), BMVA PRESS, PP. 639/648 - 1993

[Cootes, 1993a] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*

A UNIFIED APPROACH TO CODING AND INTERPRETING FACE IMAGES

PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE (ED. J. ILLINGWORTH), BMVA PRESS, PP. 639/648 - 1993

[Cootes, 1994] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*

MODELLING OBJECT APPEARANCE USING THE GREY-LEVEL SURFACE

PROC. BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE, PP. 479/488 - 1994

[Cootes, 1995] - *T. F. Cootes, C. J. Taylor*

COMBINING POINT DISTRIBUTION MODELS WITH SHAPE MODELS BASED ON FINITE ELEMENT ANALYSIS

IMAGE AND VISION COMPUTING VOL. 13 Nº 5 PP. 403/410 - JUNE 1995

[Essa, 1992] - *Irfan A. Essa, Stan Sclaroff, Alex P. Pentland*

PHYSICALLY-BASED MODELING FOR GRAPHICS AND VISION

M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 184 - 1992

[Foley, 1991] - *Foley, vanDam, Feiner, Hughes*

COMPUTER GRAPHICS PRINCIPLES AND PRACTICE

ADDISON WESLEY 12110 - 1991 SECOND EDITION

[Gomes, 1995] - *Carlos Manuel Balboa Reis Gomes*

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Hall, 1993] - *Ernest L. Hall*

FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF ROBOT VISION

SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII (1993) - 321/333

[Horn, 1987] - *Berthold K. P. Horn*

CLOSED-FORM SOLUTION OF ABSOLUTE ORIENTATION USING UNIT QUATERNIONS

JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA A, VOL. 4, 629/642, APRIL 1987

[Kakadiaris, 1997] - *Ioannis A. Kakadiaris, Dimitris Metaxas, Ruzena Bajcsy*
INFERRING 2D OBJECT STRUCTURE FROM THE DEFORMATION OF APPARENT CONTOURS
TO APPEAR IN THE SPECIAL ISSUE OF COMPUTER VISION AND IMAGE UNDERSTANDING ON
PHYSICS-BASE MODELING AND REASONING IN COMPUTER VISION

[Kass, 1988] - *Michael Kass, Andrew Witkin, Demetri Terzopoulos*
SNAKES: ACTIVE CONTOUR MODELS
INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 321-331 (1988)

[Keeve, 1996] - *Erwin Keeve, Sabine Girod, Bernd Girod*
CRANIOFACIAL SURGERY SIMULATION
VISUALIZATION IN BIOMEDICAL COMPUTING
4TH INTERNATIONAL CONFERENCE, VBC'96, HAMBURG, GERMANY - SEPTEMBER 1996
SPRINGER

[Kelly, 1993] - *S. Graham Kelly*
FUNDAMENTALS OF MECHANICAL VIBRATIONS
MCGRAW-HILL - 1993

[Martin, 1998] - *J. Martin, Alex Pentland, Stan Sclaroff, R. Kikinis*
CHARACTERIZATION OF NEUROPATHOLOGICAL SHAPE DEFORMATIONS
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 20, Nº 3, FEBRUARY
1998

[Martins, a] - *Rogério A. F. Martins*
INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO CÁLCULO DE
ESTRUTURAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

[Maybeck, 1979] - *Peter S. Maybeck*
STOCHASTIC MODELS, ESTIMATION, AND CONTROL - Volume I
MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING - VOLUME 141
ACADEMIC PRESS -1979

[McInermey, 1996] - **Tim McInermey, Demetri Terzopoulos**
DEFORMABLE MODELS IN MEDICAL IMAGE ANALYSIS: A SURVEY
MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, NUMBER 2, PP 91/108 - 1996
OXFORD UNIVERSITY PRESS

[Meirovitch, 1986] - *Leonard Meirovitch*
ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS
MCGRAW-HILL - 1986

[Moghaddam, 1996] - *Baback Moghaddam, Chahab Nastar, Alex P. Pentland*
BAYESIAN FACE RECOGNITION USING DEFORMABLE INTENSITY SURFACES
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 371 - 1996

[Moulin, 1992] - *Pierre Moulin*

AN ADAPTIVE FINITE-ELEMENT METHOD FOR IMAGE REPRESENTATION

11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PATTERN RECOGNITION, NETHERLANDS, 1992 - IEEE

[Nastar, 1994] - *Chahab Nastar, Nicholas Ayache*

FAST SEGMENTATION, TRACKING, AND ANALYSIS OF DEFORMABLE OBJECTS

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATION - ROCQUENCOUT,
N° 1783 - 1994

[Nastar, 1994a] - *Chahab Nastar*

**PHD THESIS: MODELES PHISQUES DEFORMABLES ET MODES VIBRATOIRES POUR
L'ANALYSE DU MOUVEMENT NON-RIGIDE DANS LES IMAGES MULTIDIMENSIONNELLES**
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES - 1994

[Nastar, 1995] - *Chahab Nastar, Alex P. Pentland*

MATCHING AND RECOGNITION USING DEFORMABLE INTENSITY SURFACES

IEEE - APRIL 1995

[Nastar, 1996] - *Chahab Nastar, Baback Moghaddam, Alex P. Pentland*

**GENERALIZED IMAGE MATCHING: STATISTICAL LEARNING OF PHYSICALLY-BASED
DEFORMATIONS**

PROCEEDING OF THE FOURTH EUROPEAN COFERENCE ON COMPUTER VISION - CAMBRIDGE,
ENGLAND - 14/18 APRIL 1996

[Oliveira, 1990] - *Carlos Alberto de Magalhães Oliveira*

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1990

[Park, 1996] - *Jinah Park , Dimitris Metaxas, Leon Axel*

**ANALYSIS OF LEFT VENTRICULAR WALL MOTION BASED ON VOLUMETRIC DEFORMABLE
MODELS AND MRI-SPAMM**

MEDICAL IMAGE ANALYSIS, VOLUME 1, NUMBER 1, PP 53/71 - 1996
OXFORD UNIVERSITY PRESS

[Pentland, 1989] - *Alex Pentland, Jonh Williams*

PERCEPTION OF NON-RIGID MOTION INFERENCE OF SHAPE, MATERIAL AND FORCE

M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 113, 1989

[Pentland, 1989a] - *Alex Pentland, Jonh Williams*

GOOD VIBRATIONS: MODAL DYNAMICS FOR GRAPHICS AND ANIMATION

MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT N° 115, 1989

[Pentland, 1990] - *Alex Pentland*

AUTOMATIC EXTRACTION OF DEFORMABLE PART MODELS

INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION, 4, 107-126, 1990

[Pentland, 1991] - *Alex Pentland, Bradley Horowitz*

RECOVERY OF NONRIGID MOTION AND STRUCTURE

IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, N° 7, JULY 1991

[Pentland, 1991a] - *Alex Pentland, Stan Sclaroff*

CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR PHYSICALLY BASED SHAPE MODELING AND RECOGNITION
IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 13, Nº 7, JULY 1991

[Press, 1992] - *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*

NUMERICAL RECIPES - THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - 1992 SECOND EDITION

[Sclaroff, 1993] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 201 - MAY 1993

[Sclaroff, 1994] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

OBJECT RECOGNITION AND CATEGORIZATION USING MODAL MATCHING
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 267 - 1994

[Sclaroff, 1994a] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

PHYSICALLY-BASED COMBINATIONS OF VIEWS: REPRESENTING RIGID AND NON RIGID MOTION
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 273, NOVEMBER 1994

[Sclaroff, 1994b] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

ON MODAL MODELING FOR MEDICAL IMAGES: UNDERCONSTRAINED SHAPE DESCRIPTION AND DATA COMPRESSION
M.I.T. MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 275 - 1994

[Sclaroff, 1995] - **Stanley Edward Sclaroff**

PHD THESIS: MODAL MATCHING: A METHOD FOR DESCRIBING, COMPARING, AND MANIPULATING DIGITAL SIGNALS
MIT - 1995

[Sclaroff, 1995a] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

MODAL MATCHING FOR CORRESPONDENCE AND RECOGNITION
MIT MEDIA LABORATORY - TECHNICAL REPORT Nº 95-008, 1995

[Seegerlind, 1984] - *Larry J. Seegerlind*

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS
JOHN WILEY & SONS, INC. - 1984

[Shapiro, 1991] - *Larry Shapiro*

REPORT: TOWARDS A VISION-BASED MOTION FRAMEWORK
ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE
OXFORD UNIVERSITY - MAY 25, 1991

[Shapiro, 1992] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*

A MODAL APPROACH TO FEATURE-BASED CORRESPONDENCE
ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE
OXFORD UNIVERSITY - 1992

[Shapiro, 1992a] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*
FEATURE-BASED CORRESPONDENCE: AN EINGENVECTOR APPROACH
BUTTERWORTH-HEINEMANN LTD, VOL 10 NO 5 - JUNE 1992

[Syn, 1995] - *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
FEM EIGENMODES AS SHAPE FEATURES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT Nº 211 - 1995

[Syn, 1995a] - *N. H-M. Syn, R. W. Prager*
BAYESIAN REGISTRATION OF MODELS USING FEM EIGENMODES
CAMBRIDGE UNIVERSITY ENGINEERING DEPARTMENT - TECHNICAL REPORT Nº 213 - 1995

[Tavares, 1995] - *João Manuel R. S. Tavares*
MASTER THESIS: OBTENÇÃO DE ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE MOVIMENTO DE CÂMARA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1997] - *João Manuel R. S. Tavares*
INTERNAL REPORT: APRESENTAÇÃO DE UM MÉTODO PARA A DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO RÍGIDA ENTRE DOIS CONTORNOS CONSTITUÍDOS POR PIXELS
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1997a] - *João Manuel R. S. Tavares*
INTERNAL REPORT: APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE PIXELS DE DOIS CONTORNOS NÃO RÍGIDOS
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1997b] - *João Manuel R. S. Tavares*
INTERNAL REPORT: ESTUDO DE DOIS MODELOS PARA SEGUIMENTO EM IMAGENS DE PEDOBAROGRAFIA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

[Tavares, 1998] - *João Manuel R. S. Tavares*
INTERNAL REPORT: INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1998

[Tavares, 1998a] - *João Manuel R. S. Tavares*
INTERNAL REPORT: APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE DOIS OBJECTOS NÃO RÍGIDOS UTILIZANDO O MODELO FINITO DE SCLAROFF
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1998

[Timoshenko, 1970] - *Stephen. P. Timoshenko, J. N. Goodier*
THEORY OF ELASTICITY
MCGRAW-HILL - 1970

[Timoshenko, 1982] - *Stephen. P. Timoshenko, James E. Gere*
MECÂNICA DOS SÓLIDOS - VOL. I E II
LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA - 1982

1 - Introdução	1
1.1 - A Ideia Base do Método Proposto	2
2 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos	5
2.1 - Formulação do Método dos Elementos Finitos	7
2.1.1 - Graus de Liberdade Locais e Globais	14
3 - Matrizes para um Elemento Finito 2D do tipo Axial	16
3.1 - Determinação das Matrizes no Sistema Global	19
3.2 - Agrupamento	21
4 - Análise Modal	23
5 - Determinação dos Emparelhamentos	24
5.1 - Casos com Elevada Rotação	27
6 - Alinhamento de Objectos, Comparação e Descrição	28
6.1 - Determinação das Deformações	29
6.2 - Solução Dinâmica: <i>Morphing</i>	31
6.3 - Na Presença de Rotações Elevadas	32
6.4 - Comparação de Objectos	33
7 - Resultados Experimentais	34
7.1 - Análise Modal do Modelo Finito	34
7.2 - Emparelhamento, Deslocamentos Modais e Nodais, Energia de Deformação	49
8 - Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros	68
8.1 - Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros	69
8.1.1 - Descritores Modais Treinados	69
8.1.2 - Actualização Recursiva dos Parâmetros Físicos do Modelo	69
8.1.3 - Várias Gamas de Modos	70
8.1.4 - Melhoramento do Processo de Determinação das Correspondências	70
8.1.5 - Aumento da Velocidade de Execução do Método	70
8.1.6 - Utilização de Elementos Finitos Mais Complexos	70
8.1.7 - Inclusão do Nível de Cinzento nos Modelos 2D	71
Agradecimentos	71
Bibliografia	71