FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Continuidade estrutural em tabuleiros de pontes construídos com vigas pré-fabricadas. Soluções com ligação em betão armado.

Carlos Filipe Ferreira de Sousa

Licenciado em Engenharia Civil
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil,
realizada sob supervisão do Professor Afonso Serra Neves
do Departamento de Engenharia Civil
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Dezembro de 2004

Aos meus Pais.

Resumo

Com o presente trabalho pretende-se contribuir para o conhecimento do comportamento estrutural, durante a fase de serviço, de tabuleiros de pontes estruturalmente contínuos, construídos a partir de vigas pré-fabricadas, pré-esforçadas, sendo a ligação de continuidade realizada em betão armado, isto é, sem recorrer a pré-esforço de continuidade. Esta é uma técnica muito utilizada na construção de pontes e passagens desniveladas. O facto de a ligação ser usualmente efectuada na zona de apoio simplifica a construção, mas torna mais complexo o funcionamento estrutural da obra. Por um lado, origina uma evolução, ao longo do tempo, dos esforços e tensões instalados na estrutura, como consequência da deformação do betão por fluência e retracção. Por outro lado, a ligação tem assim que resistir a esforços elevados.

Apresenta-se uma síntese das soluções mais utilizadas para estabelecimento da continuidade em tabuleiros de pontes construídos a partir de vigas pré-fabricadas, incluindo os aspectos mais relevantes do seu funcionamento estrutural, dando especial destaque às soluções que dispensam a utilização de pré-esforço de continuidade.

Descrevem-se os aspectos de comportamento do betão mais relevantes para a análise do comportamento em serviço deste tipo de estruturas. Apresentam-se as metodologias usualmente empregues para analisar o comportamento diferido das estruturas e descreve-se o modelo aplicado no presente estudo para a modelação dos efeitos da fendilhação, da fluência e da retracção. Apresenta-se um procedimento simplificado, baseado no Método do Módulo Efectivo Ajustado, para a determinação da evolução temporal dos esforços e tensões (por efeito da fluência e da retracção do betão) em obras do tipo das que são abordadas no presente trabalho.

Numa primeira aplicação numérica, comparam-se os resultados obtidos, no âmbito desta dissertação, por via numérica, com resultados experimentais obtidos por Mattock (1961), que ensaiou em laboratório estruturas com dois tramos contínuos, à escala 1:2.

Numa segunda aplicação numérica, analisa-se um caso prático, constituído por um tabuleiro com dois tramos contínuos de 25 m, com ligação em betão armado. Para atender à incerteza associada à quantificação das deformações de fluência e retracção, a análise efectuada é de natureza probabilística. Utiliza-se o método de Monte Carlo, sendo a amostragem realizada pelo método do Hipercubo Latino, quantificando-se assim a distribuição estatística da resposta estrutural. Esta análise permitiu avaliar a variabilidade dos resultados em obras deste tipo. Permitiu também caracterizar o comportamento estrutural em fase de serviço, da estrutura concreta em análise, de uma forma mais rigorosa do que aquela que é usualmente efectuada no projecto de estruturas.

Abstract

The aim of the present work is to contribute for the knowledge of the structural behaviour, during service phase, of continuous bridges decks, constructed from precast prestressed beams, connected with reinforced concrete solutions, that is, without continuity prestress. This technique is frequently used in the construction of bridges and viaducts. The connection is usually located in the support zone, which simplifies the construction, although the structural behaviour becomes more complex. On the one hand, it originates an evolution, along the time, of the efforts and stressed installed in the structure, as a consequence of the concrete creep and shrinkage deformations. On the other hand, the connection has, thus, to resist high efforts.

A synthesis of the commonly used solutions for establishment of the continuity in bridge decks (constructed with precast beams) in presented, including the most relevant aspects of its structural behaviour. Special care is devoted to the solutions that do not need continuity prestress.

The most relevant aspects (for the study of this kind of structures) of hardened concrete behaviour are described. The methodologies usually employed to analyze the long term behaviour of structures are presented, and the algorithm used in the present dissertation to model the effects of cracking, creep and shrinkage, is described. A simplified procedure is presented, based in the age-adjusted-effective-modulus method, for the determination of the evolution of the efforts and tensions, along the time (motivated by concrete creep and shrinkage), in constructions of the type of the ones that are referred in the present work.

In a first numerical application, numerical results obtained in the present study, are compared with experimental ones, gotten by Mattock (1961), that has tested and observed, in laboratory, a structure composed by two continuous spans, to scale 1:2.

In one second numerical application, a practical case, consisting of a bridge deck, with two 25 m continuous spans, connected with a reinforced concrete solution, is analyzed. To account to the uncertainty associated with the quantification of the creep and shrinkage deformations, a probabilistic analysis is made. Monte Carlo method is employed, with sampling carried through with the Latin Hypercube method, quantifying thus the statistical distribution of the structural response. This analysis allowed to evaluate the variability of the results in structures of this type. It also allowed to characterize the structural behaviour, in service phase, of the structure in analysis, in a more rigorous way than what is usually done in structural design.

Agradecimentos

Em primeiro lugar expresso o meu apreço ao Professor Afonso Serra Neves, orientador científico desta dissertação, pelo incentivo e orientação recebida, sem esquecer a forma amiga com que acompanhou o meu trabalho.

Estou também grato aos Professores e colegas do grupo LABEST, nomeadamente ao Professor Abel Henriques e aos Engºs Mário Pimentel e Miguel Azenha, pelas trocas de impressões, de onde surgiram sugestões importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Professor Joaquim Figueiras, Director do LABEST, pela disponibilização do software DIANA.

Expresso o meu reconhecimento ao Engº Alípio Ferreira, pelas interessantes conversas de onde surgiu o meu interesse pelo tipo de obras tratadas nesta dissertação.

Agradeço o interesse e o apoio prestado pela Maprel, através dos Engºs Rego de Araújo e Paulo Lopes, para a realização de estudos, sobre continuidade estrutural em tabuleiros de pontes construídos com vigas pré-fabricadas, que se encontram em fase de desenvolvimento.

Índice

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Enquadramento e objectivos da dissertação 1

1.2 Organização em capítulos 4

2 SOLUÇÕES DE CONTINUIDADE EM TABULEIROS DE PONTES COM VIGAS PRÉ-FABRICADAS 7

2.1 Introdução 7

2.2 Elementos constituintes dos tabuleiros com vigas pré-fabricadas 9

2.3 Tabuleiros isostáticos 12

2.4 Tabuleiros isostáticos com lajes contínuas 13

2.5 Tabuleiros contínuos com ligação entre vigas realizada na zona dos apoios 14

2.5.1 Continuidade com armaduras ordinárias 17

2.5.1.1 Faseamento construtivo 20

2.5.1.2 Geometria da zona de ligação 21

2.5.1.3 Emenda das armaduras inferiores na zona de apoio 24

2.5.1.4 Funcionamento da ligação sob actuação de momentos flectores negativos 34

2.5.2 Continuidade com armaduras de pré-esforço sobre os apoios, com traçado recto 35

2.5.3 Continuidade com pré-esforço em todo o comprimento do tabuleiro 37

2.6 Tabuleiros contínuos com ligação entre vigas realizada fora da zona dos apoios 39

2.7 Pontes Integrais 41

2.8 Considerações finais 41

3 MODELOS DE COMPORTAMENTO DO BETÃO 43

3.1 Introdução 43

3.2 Comportamento deformacional do betão submetido a níveis moderados de tensão 44

3.2.1 Considerações iniciais 44

3.2.2 Deformação instantânea e módulo de elasticidade do betão 46

3.2.3 Fluência do betão 47

3.2.3.1 Tipos de fluência 48

3.2.3.2 Coeficiente de fluência e função de fluência 48

3.2.3.3 Aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos 49

3.2.3.4 Modelos de fluência 50

3.2.3.5 Variabilidade associada à fluência 52

3.2.4 Retracção do betão 53

3.2.4.1 Tipos de retracção 53

3.2.4.2 Modelos de retracção 54

3.2.4.3 Variabilidade associada à retracção 56
3.3 Comportamento do betão submetido a níveis elevados de tensão 56
3.3.1 Betão simples comprimido 57
3.3.1.1 Carregamentos de curta duração 57
3.3.1.2 Carregamentos de longa duração 59
3.3.2 Betão simples traccionado 60
3.3.2.1 Carregamentos de curta duração 60
3.3.2.2 Carregamentos de longa duração 63
3.3.3 Betão armado traccionado uniaxialmente 63
3.3.3.1 Carregamentos de curta duração 63
3.3.3.1.1 Diagramas de retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas 70
3.3.3.2 Carregamentos de longa duração ou ciclicamente repetidos 76
3.3.3.3 Abertura de fendas 77
3.4 Considerações finais 81

4 MODELAÇÃO NUMÉRICA 83
4.1 Introdução 83
4.2 Modelação do comportamento visco-elástico do betão 83
4.2.1 Generalidades 83
4.2.2 Solução numérica da equação integral 84
4.2.3 Conversão para a forma diferencial 86
4.2.4 Solução algébrica: Método do Módulo Efectivo Ajustado 88
4.3 Modelação da fendilhação 90
4.3.1 Modelos de fendilhação 90
4.3.1.1 Modelo com decomposição de extensões e múltiplas fendas fixas 91
4.3.1.2 Problemas com fractura localizada 96
4.3.1.3 Problemas com padrões de fendilhação difusa 97
4.3.2 Associação de modelos de fendilhação, de fluência e de retracção 99
4.4 Aplicações do Método do Módulo Efectivo Ajustado 100
4.4.1 Análise de secções compostas 101
4.4.1.1 Evolução das tensões por fluência 102
4.4.1.2 Efeitos da retracção 106
4.4.2 Análise de vigas contínuas com secções compostas 107
4.4.2.1 Evolução de esforços e tensões por fluência 109
4.4.2.2 Efeitos da retracção 110
4.4.3 Exemplo de aplicação 111
4.4.3.1 Efeito, a longo prazo, do peso próprio e do pré-esforço 112
4.4.3.2 Efeito, a longo prazo, da retracção diferencial 114
4.5 Considerações finais 115

5 APLICAÇÃO NUMÉRICA PARA CONFRONTAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS 117
5.1 Introdução 117
5.2 Trabalho experimental 118
5.2.1 Descrição da estrutura 118
5.2.2 Ensaios e medições efectuadas 122
5.2.3 Resultados experimentais obtidos 123
5.2.3.1 Medições de longa duração 124
5.2.3.2 Testes de carga intermitentes 126
5.2.3.3 Carregamento até à rotura 128
5.3 Modelação numérica 129
5.3.1 Descrição do modelo 129
5.3.2 Propriedades materiais consideradas 133
5.3.3 Análises efectuadas 138
5.4 Comparação entre resultados experimentais e numéricos 139
5.4.1 Medições de longa duração 139
5.4.1.1 Efeito da variabilidade da fluência e da retracção 144
5.4.2 Testes de carga intermitentes 147
5.5 Considerações finais 149

6 ANÁLISE DE UM CASO PRÁTICO 151
6.1 Introdução 151
6.2 Descrição do caso em análise 152
6.2.1 Geometria e armaduras 152
6.2.2 Propriedades dos materiais 155
6.2.3 Acções actuantes 156
6.2.3.1 Pré-esforço 157
6.2.3.2 Cargas permanentes não estruturais 157
6.2.3.3 Sobrecarga rodoviária 159
6.2.3.4 Variação de temperatura 161
6.2.3.5 Resumo das acções consideradas 163
6.2.4 Faseamento construtivo 164
6.3 Descrição do modelo numérico 165
6.4 Análise dos resultados 167
6.5 Considerações finais 176

7 ANÁLISE PROBABILÍSTICA UTILIZANDO O MÉTODO DE MONTE CARLO 179
7.1 Introdução 179
7.2 Medidas estatísticas e definições 180
7.2.1 Variável estatística e variável aleatória 181

7.2.2 Função de distribuição de probabilidade e função densidade de probabilidade 181
7.2.3 Quantis 182
7.2.4 Média aritmética 182
7.2.5 Desvio padrão, variância e coeficiente de variação 183
7.2.6 Intervalo de confiança da média, da variância e do desvio padrão 183
7.2.7 Testes de hipóteses 185
7.2.8 Intervalo de tolerância de uma variável aleatória 186
7.3 Simulação de Monte Carlo 188
7.3.1 Generalidades 188
7.3.2 Variáveis aleatórias e suas propriedades estatísticas 188
7.3.3 Amostragem pelo método do Hipercubo Latino 192
7.3.4 Análise estrutural 194
7.3.5 Tratamento estatístico da resposta 194
7.4 Análise probabilística de um caso prático 195
7.4.1 Generalidades 195
7.4.2 Evolução da resposta estrutural ao longo do incremento de tempo de 20000 dias 196
7.4.3 Resposta estrutural face à actuação, a longo prazo, da sobrecarga rodoviária e da variação de temperatura com os seus valores característicos 204
7.4.4 Resposta estrutural sob actuação das combinações quase permanentes de acções 206
7.4.5 Influência da idade em que é estabelecida a continuidade 211
7.5 Considerações finais 212

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS 151
8.1 Conclusões 215
8.2 Perspectivas para futuros desenvolvimentos 219

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 223

ANEXO A: AMOSTRAGEM SEGUNDO O MÉTODO DO HIPERCUBO LATINO. TABELAS AUXILIARES 229

Notação e simbologia

Para clareza de exposição, no texto far-se-á a descrição de cada notação ou símbolo aquando da sua primeira utilização. Da lista que se segue, constituída por ordem alfabética, não constam símbolos de natureza secundária, em geral assim considerados quando o seu emprego não ultrapassou aplicações restritas. As matrizes e os vectores são identificados por símbolos sublinhados ($\underline{A}$ ou $\underline{a}$, respectivamente).

A	Área da secção transversal
A_c	Área da secção transversal de betão
$A_{c,eff}$	Área afectiva de betão traccionado, que envolve as armaduras traccionadas
A_s	Área da secção transversal da armadura
α_{cT}	Coeficiente de dilatação térmica
α_e	Razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do betão
CV	Coeficiente de variação
ΔT	Variação de temperatura
δ	Deslocamento
E	Módulo de elasticidade
E_c	Módulo de elasticidade do betão
E_{ci}	Módulo de elasticidade do betão para uma tensão $\sigma_c = 0$ e uma idade de carregamento igual a 28 dias
$E_{ci}(t)$	Módulo de elasticidade do betão para uma tensão $\sigma_c = 0$ e uma idade de carregamento igual a t dias
E_s	Módulo de elasticidade do aço
ε	Extensão
$\varepsilon_c(t)$	Extensão total do betão num instante de tempo t
$\varepsilon_{cc}(t)$	Deformação de fluência do betão
$\varepsilon_{ci}(t_0)$	Deformação instantânea do betão
$\varepsilon_{cs}(t)$	Deformação de retracção do betão
$\varepsilon_{cT}(t)$	Deformação térmica do betão
ε_{ct}	Extenção de fendilhação, dada pela razão entre a resistência do betão à tracção e o módulo de elasticidade do betão
ε_s	Extensão da armadura

ε_{sm}	Extensão média de um tirante de betão armado traccionado
ε_{s1}	Extensão da armadura calculada em secção não fendilhada
ε_{s2}	Extensão da armadura calculada em secção totalmente fendilhada
ε_{sE}	Extensão da armadura no ponto de deslizamento nulo
ε_{sr1}	Extensão da armadura, no ponto de deslizamento nulo, sob actuação do esforço N_r
ε_{sr2}	Extensão da armadura, na secção da fenda, sob actuação do esforço N_r
ε_{sy}	Extensão de cedência da armadura
f_{ck}	Valor característico da resistência do betão à compressão em provetes cilíndricos
f_{cm}	Valor médio da resistência do betão à compressão em provetes cilíndricos
f_{ct}	Resistência do betão à tracção
f_{ctm}	Valor médio da resistência do betão à tracção
$f_{p0.1k}$	Valor característico da tensão limite de proporcionalidade a 0.1% do aço de pré-esforço
f_{pu}	Resistência à tracção do aço de pré-esforço
f_{puk}	Valor característico da resistência à tracção do aço de pré-esforço
f_{sy}	Tensão de cedência do aço
$\phi(t, t_0)$	Coeficiente de fluência para o instante t, correspondente a carregamento à idade t_0
ϕ_s	Diâmetro de um varão
G_F	Energia de fractura do betão
h_{eq}	Espessura equivalente de um elemento, dada pela razão entre o dobro da área do elemento e o perímetro do membro em contacto com a atmosfera
HR	Humidade relativa ambiental
$J(t, t_0)$	Função de fluência para o instante t, correspondente a carregamento à idade t_0
$l_{s,max}$	Comprimento máximo ao longo do qual ocorre deslizamento entre o aço e o betão; a deformação do aço e do betão ao longo deste comprimento contribui para a abertura de uma fenda
$l^k_{s,max}$	Comprimento máximo ao longo do qual ocorre deslizamento entre o aço e o betão, calculado com base no valor relativo ao quantil inferior da tensão de aderência, τ_{bk}
L	Comprimento; vão
M	Momento flector
μ	Valor médio de uma variável aleatória
N	Esforço axial
N_r	Esforço axial que provoca a fendilhação de um tirante de betão armado

ν	Coeficiente de Poisson
χ	Coeficiente de envelhecimento
ρ_s	Percentagem de armadura
s_{rm}	Distância média entre fendas
σ	Tensão no betão; desvio padrão de uma variável aleatória
σ_{s2}	Tensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada
σ_{sE}	Tensão na armadura no ponto de deslizamento nulo
σ_{sm}	Tensão média na armadura ao longo do comprimento em que ocorre deslizamento entre o aço e o betão
σ_{sr}	Tensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada, sob actuação do esforço N_r
t	Instante de tempo
T	Temperatura
τ	Instante de tempo; tensão tangencial
τ_{bk}	Valor relativo ao quantil inferior da tensão de aderência média ao longo do comprimento de deslizamento entre o aço e o betão
τ_{bm}	Valor da tensão de aderência média ao longo do comprimento de deslizamento entre o aço e o betão
w	Abertura de uma fenda

Siglas

ACI	American Concrete Institute
AVB	Acção Variável Base
CEN	Comité Européen de Normalisation
CEB	Comité Euro-International du Béton
CTL	Construction Technology Laboratories
dT	Variação de Temperatura
DTp	Department of Transport (United Kingdom)
EC1	Eurocode 1
EC2	Eurocode 2
ELU	Estado Limite Último
FIB	Fédération Internationale du Béton
MC90	CEB-FIP Model Code 1990
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMEA	Método do Módulo Efectivo Ajustado
NCHRP	National Cooperative Highway Research Program
PCA	Portland Cement Association
PCI	Precast/Prestressed Concrete Institute
RCP	Restante Carga Permanente
REBAP	Regulamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado
RSA	Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes
VT	Veículo Tipo (sobrecarga rodoviária)

1 Introdução

1.1 Enquadramento e objectivos da dissertação

A utilização da técnica da pré-fabricação na realização de obras de Engenharia Civil, nomeadamente na construção de tabuleiros de pontes, viadutos e passagens desniveladas é uma realidade em contínuo desenvolvimento. A ligação em obra de vigas pré-fabricadas para formar um tabuleiro contínuo, constitui um procedimento com utilização crescente em Portugal. Esta solução tem vantagens relativamente a uma solução pré-fabricada com tramos isostáticos, como sejam: a existência de reservas de resistência devido à hiperstaticidade da estrutura; a melhoria do conforto para a circulação rodoviária; o aumento da durabilidade, devido à eliminação de juntas; a possibilidade de serem construídos tabuleiros com grandes vãos e a boa qualidade estética (Figura 1-1).

É corrente a localização da ligação entre vigas pré-fabricadas ser na zona de apoio, o que simplifica significativamente a construção, mas torna necessária uma cuidada avaliação do comportamento da estrutura, pois, nesta zona, os esforços instalados são elevados. A ligação de continuidade pode ser materializada com armaduras ordinárias, ou recorrendo a técnicas de pré-esforço, utilizando cabos de pós-tensão (aderente ou não aderente) ou barras de pré-esforço.

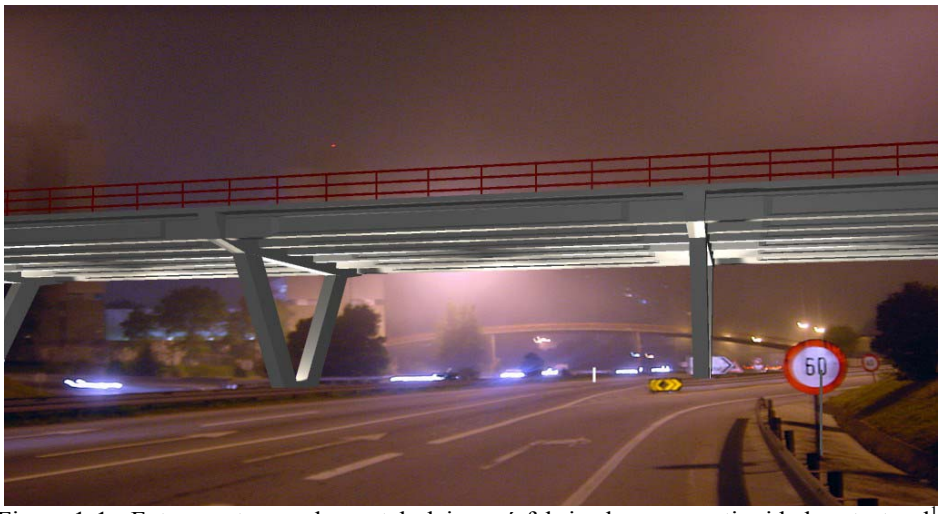


Figura 1-1 - Foto-montagem de um tabuleiro pré-fabricado com continuidade estrutural[1].

A ligação com armaduras ordinárias é a solução que, segundo diversos autores, é mais utilizada na construção de tabuleiros contínuos de médio vão. Esta solução de continuidade consiste na colocação de armadura longitudinal contínua na laje, sobre os apoios, e na betonagem do espaço entre vigas criando uma carlinga. A armadura longitudinal inferior e a armadura de alma saem dos topos das vigas, permitindo o estabelecimento da continuidade. Existem várias formas de realizar a sua emenda.

O desenvolvimento desta técnica tem sido suportado por numerosos trabalhos de investigação. Nos Estados Unidos, onde este tipo de construções tem maior tradição, os estudos tiveram início na década de 60 do século passado, com um trabalho levado a cabo na Portland Cement Association. Em resultado dos diversos trabalhos realizados têm sido sugeridos, por vários autores, procedimentos de projecto diversos e conclusões aparentemente contraditórias. A evolução das ferramentas disponíveis para a análise numérica de estruturas, tem também motivado vários estudos focados no comportamento destas estruturas. Sendo escassa a regulamentação directamente aplicável, não é de estranhar que vários autores implementem na prática disposições de projecto aparentemente contraditórias, facto que foi confirmado em diversos inquéritos realizados.

A construção de tabuleiros contínuos com recurso a vigas pré-fabricadas envolve particularidades especiais, que marcam a sua resposta estrutural. O faseamento construtivo implementado na execução deste tipo de obras envolve uma evolução do esquema estrutural, uma vez que o peso próprio da viga pré-fabricada e da laje e ainda a força de pré-esforço actuam sobre uma estrutura simplesmente apoiada (viga pré-fabricada apenas), enquanto que as restantes cargas permanentes e as sobrecargas de utilização actuam sobre uma estrutura

[1] Foto-montagem gentilmente cedida pela Streng-Engenharia de Estruturas, Lda.

hiperstática (tabuleiro contínuo). A secção transversal sofre também evolução, sendo constituída inicialmente pela viga pré-fabricada apenas, e posteriormente por duas peças com diferentes idades e diferentes propriedades materiais (viga pré-fabricada e laje). A evolução do esquema estrutural e da secção transversal, dá origem, em virtude da deformação diferida do betão por fluência e por retracção, a uma evolução dos esforços instalados na estrutura. O momento flector instalado na zona de ligação, a longo prazo, pode ter sinal positivo ou negativo. A existência de momento flector positivo na zona de apoio (que não é frequente em vigas contínuas construídas *in situ* sob actuação de cargas gravíticas) torna necessária a materialização da continuidade da armadura inferior. O tratamento incorrecto deste problema pode dar origem a patologias que comprometam a durabilidade ou a segurança da estrutura.

Tal como foi referido, o estado de tensão e de deformação neste tipo de obras evolui ao longo do tempo, sendo fortemente dependente da deformação do betão por fluência e retracção, em virtude do faseamento envolvido na sua construção. Por outro lado, a fluência e a retracção fazem parte das propriedades do betão cuja quantificação é mais incerta. Essa incerteza resulta da variabilidade dos parâmetros ambientais (humidade relativa e temperatura), da composição do betão e da incerteza associada aos modelos teóricos de previsão dessas propriedades. Assim, a resposta estrutural neste tipo de obras terá também uma variabilidade significativa. Uma determinada grandeza, por exemplo uma tensão ou uma deformação, num determinado ponto e num determinado instante, não deverá então ser caracterizada por um valor único, de natureza determinística, mas antes por um intervalo onde se espera que, com uma determinada probabilidade, esteja contida a grandeza procurada.

O estabelecimento da continuidade estrutural sem utilização de pré-esforço de continuidade é uma técnica que não envolve uma complexidade significativa durante a fase de construção. A análise do seu funcionamento estrutural é complicada pela evolução de esforços (e pela variabilidade que lhe está associada), cujo cálculo envolve a realização de análises visco-elásticas. A fendilhação influi de forma significativa sobre a resposta estrutural deste tipo de obras, aumentando a flexibilidade da estrutura e originando fendas cuja abertura deve ser controlada. É, então, importante a consideração de modelos constitutivos que traduzam (de uma forma suficientemente aproximada) o comportamento do betão traccionado, na análise deste tipo de obras.

O desenvolvimento actual das ferramentas de cálculo automático, que permitem a consideração dos diversos aspectos de comportamento não linear do betão (simples ou associado a armaduras aderentes) tem sido aplicado ao estudo de estruturas especiais, e pode contribuir para um melhor conhecimento do comportamento estrutural dos tabuleiros de pontes com continuidade estrutural.

O objectivo geral do presente estudo é contribuir para o conhecimento do comportamento estrutural, durante a fase de serviço, de tabuleiros de pontes construídos a partir de vigas pré-fabricadas, estruturalmente contínuos, sendo a ligação de continuidade realizada em betão armado, isto é, sem recorrer a pré-esforço de continuidade. Pretende-se também fazer a aplicação, em estruturas deste tipo, de ferramentas para modelação do comportamento não linear de estruturas de betão armado ou pré-esforçado com carácter evolutivo. Utiliza-se o programa de cálculo DIANA (2002), desenvolvido pela instituição TNO-Building and Construction Research em colaboração com a Universidade de Delft da Holanda.

Os objectivos particulares do estudo são:

- elaborar uma síntese dos métodos correntemente utilizados para estabelecimento da continuidade em tabuleiros de pontes construídos a partir de vigas pré-fabricadas, incluindo os aspectos mais relevantes do seu funcionamento estrutural (dando especial importância às soluções que dispensam a utilização de pré-esforço de continuidade);
- sistematizar uma metodologia para a análise, por via numérica, do comportamento em serviço de obras sensíveis aos efeitos da fendilhação do betão e da variabilidade da fluência e da retracção;
- aplicar essa metodologia numérica para avaliar a viabilidade da utilização de soluções de continuidade em betão armado para a construção de tabuleiros de pontes de médio vão (vão superior a 20 m), avaliando o comportamento em serviço deste tipo de obras, nomeadamente em termos de abertura de fendas nas zonas controladas por armaduras ordinárias;
- estudar o efeito da incerteza estatística associada à previsão das deformações por fluência e retracção do betão, sobre a variabilidade da resposta estrutural deste tipo de obras.

1.2 Organização em capítulos

A presente dissertação está organizada em oito capítulos, o primeiro dos quais é constituído pela presente **Introdução**.

No **Capítulo 2,** apresenta-se as soluções mais correntemente utilizadas para a construção de tabuleiros contínuos de pontes, com recurso a vigas pré-fabricadas. Apresenta-se soluções em que a continuidade é estabelecida na zona dos apoios, com ou sem recurso a armaduras de pré-esforço. É dado especial destaque aos tabuleiros formados por vigas pré-fabricadas com

secção em "I", com ligação de continuidade em betão armado, abordando-se aspectos relevantes como sejam o faseamento construtivo, a geometria da zona de ligação, a emenda das armaduras inferiores na zona de apoio e o funcionamento da ligação sob actuação de momentos flectores negativos. Por fim, é feita uma breve referência aos tabuleiros contínuos com ligação entre vigas realizadas fora da zona dos apoios, e às pontes integrais.

No **Capítulo 3,** apresenta-se modelos constitutivos que traduzem o comportamento instantâneo do betão (que resulta da aplicação de carregamentos de carácter quase-estático e de curta duração) e o comportamento diferido do betão (que resulta da evolução da resposta estrutural ao longo do tempo, devida essencialmente à fluência e à retracção do betão). Aborda-se inicialmente o comportamento deformacional do betão, para níveis de carregamento afastados da rotura, sendo posteriormente tratado o comportamento em situações de carregamento até à rotura. São tratados, com maior detalhe, aspectos tais como a fluência, a retracção, o comportamento do betão traccionado e a quantificação da abertura de fendas, por serem relevantes para a caracterização do comportamento em serviço de estruturas do tipo das que são estudadas nesta dissertação.

No **Capítulo 4,** apresenta-se formulações simplificadas e formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizadas para a implementação de análises visco-elásticas com envelhecimento e necessárias para o cálculo da evolução temporal da resposta estrutural. Expõe-se também o modelo utilizado para traduzir o comportamento do betão (simples ou envolvendo armaduras aderentes) fendilhado. Trata-se de um modelo baseado no conceito de fenda distribuída, com decomposição da deformação em duas componentes (uma relativa às fendas e outra relativa ao betão entre fendas), permitindo a combinação do efeito da fendilhação com outros fenómenos não lineares, tais como a fluência e a retracção. Termina-se o capítulo apresentando-se uma aplicação do Método do Módulo Efectivo Ajustado (MMEA) para a análise, de forma simplificada, da evolução dos esforços e das tensões, por efeito da fluência e da retracção do betão, em estruturas do tipo das que são abordadas no presente trabalho.

No **Capítulo 5,** apresenta-se o trabalho de modelação numérica efectuado para simular o comportamento de vigas que foram ensaiadas no âmbito do amplo estudo experimental que foi realizado pela Portland Cement Associaton dos Estados Unidos. Descreve-se o trabalho experimental realizado por Mattock (1961), depois apresenta-se o modelo numérico utilizado no âmbito desta dissertação, e, por fim, comparam-se os resultados obtidos pelas vias experimental e numérica.

No **Capítulo 6,** analisa-se o comportamento, durante a fase de serviço, do tabuleiro de uma ponte, com dois vãos de 25 m, construído a partir de vigas pré-fabricadas e pré-esforçadas, ligadas em continuidade sobre o apoio central, através de uma solução de ligação que recorre a armaduras ordinárias apenas. A análise, de carácter determinístico, tem em consideração o faseamento construtivo e o comportamento não linear dos materiais.

No **Capítulo 7,** é apresentada uma análise probabilística do comportamento da estrutura tratada no capítulo anterior, efectuada com recurso ao método de Monte Carlo, utilizando-se a técnica de redução da variância designada de Hipercubo Latino. Este método permite estimar a distribuição estatística da resposta estrutural e avaliar a sua variabilidade. Consideram-se como variáveis aleatórias de entrada a humidade relativa, a temperatura média, a resistência à compressão do betão, a incerteza associada aos modelos de fluência e de retracção do betão e ainda a tensão de pré-esforço.

Finalmente, no **Capítulo 8** é apresentada uma síntese do trabalho realizado, salientando-se as conclusões mais importantes. São sugeridos desenvolvimentos para trabalhos futuros dando continuidade ao trabalho iniciado na presente dissertação.

2 Soluções de continuidade em tabuleiros de pontes com vigas pré-fabricadas

2.1 Introdução

A utilização de soluções pré-fabricadas para a construção de pontes em betão iniciou-se na década de 30 do século passado, com aplicações em pontes de pequeno vão. Foi, no entanto, nos anos 50 que começou a ser utilizada esta técnica de uma forma mais intensa, com o aparecimento de meios de transporte e elevação com alguma capacidade e com o progresso da tecnologia do pré-esforço (Calavera Ruiz e Hernández 2002).

As vantagens da utilização da pré-fabricação em pontes são muitas, podendo enumerar-se:

- a boa qualidade do betão e das peças produzidas, uma vez que a construção em fábrica permite a obtenção de betões de alta resistência, de peças com baixos desvios nos valores dos recobrimentos e com bom acabamento, em virtude da qualidade das cofragens utilizadas;
- as vantagens económicas que resultam da utilização de formas optimizadas e de soluções *standard*, com grande repetição;
- a redução do congestionamento em obra e o encurtamento dos prazos de construção, uma vez que (desde que haja espaço para armazenamento) o fabrico das peças pré-fabricadas pode começar em simultâneo com a construção da infra-estrutura;
- a dispensa total de cofragem e escoramento para a construção do tabuleiro.

Os dois tipos principais de elementos pré-fabricados que são utilizados em tabuleiros de pontes são: os segmentos (ou aduelas) de secções pré-fabricadas e as vigas pré-fabricadas (Figura 2-1).

Os tabuleiros construídos pelo método que, na nomenclatura inglesa, é denominado por *precast segmental method*, são compostos por vários segmentos (ou aduelas) pré-fabricados, de reduzido comprimento, que são ligados por pré-esforço longitudinal após a montagem. Devido ao custo de fabrico dos segmentos e do equipamento de montagem, este método construtivo só é, geralmente, economicamente vantajoso para pontes de grande vão. As juntas entre segmentos não são, geralmente, atravessadas por armaduras ordinárias. A abertura dessas juntas deve então ser prevenida, garantindo que permanecem comprimidas sob actuação das acções permanentes e variáveis. As secções transversais utilizadas, geralmente em forma de caixão, são semelhantes às secções utilizadas na construção *in situ* (Menn 1986).

As vigas pré-fabricadas são geralmente construídas com um comprimento igual ao do vão, sendo cada vão constituído por várias vigas ligadas entre si por uma laje betona *in situ* e por carlingas. As secções transversais mais comuns são em forma de "I" ou em forma de "U". Segundo FIB (2000), esta é uma técnica económica para a construção de pontes com vãos até 50 m, limite este que tem sido várias vezes ultrapassado (Abdel-Karim e Tadros 1992; Montaner *et al.* 2000; Sesar *et al.* 2004) com o aparecimento de meios de elevação com maior capacidade e a concepção de novas soluções de continuidade.

a)

b)

Figura 2-1 – Elementos pré-fabricados utilizados em tabuleiros de pontes: a) aduelas pré-fabricadas[1]; b) vigas pré-fabricadas[2].

[1] Deep Bay Project, em Hong Kong (*The VSL News Magazine*, nº 1, 2004)

[2] Fotografia gentilmente cedida pela Civibral, S.A.

Neste trabalho são estudados tabuleiros formados por vigas pré-fabricadas, com secção em "I", estruturalmente contínuas entre vãos, sendo as ligações de continuidade realizadas na secção de apoio sem utilização de pré-esforço de continuidade. A exposição feita neste capítulo foca-se nas soluções de continuidade deste tipo, sendo feita uma breve referência a outras soluções relevantes.

2.2 Elementos constituintes dos tabuleiros com vigas pré-fabricadas

Os tipos mais comuns de secções transversais de vigas pré-fabricadas são, segundo Calavera Ruiz e Hernández (2002):

- secções rectangulares (Figura 2-2 a));
- secções em "I" (Figura 2-2 b) e c));
- secções em "T" (Figura 2-2 d));
- secções em "T" invertido (Figura 2-2 e));
- secções em "U" (Figura 2-2 f) e g)).

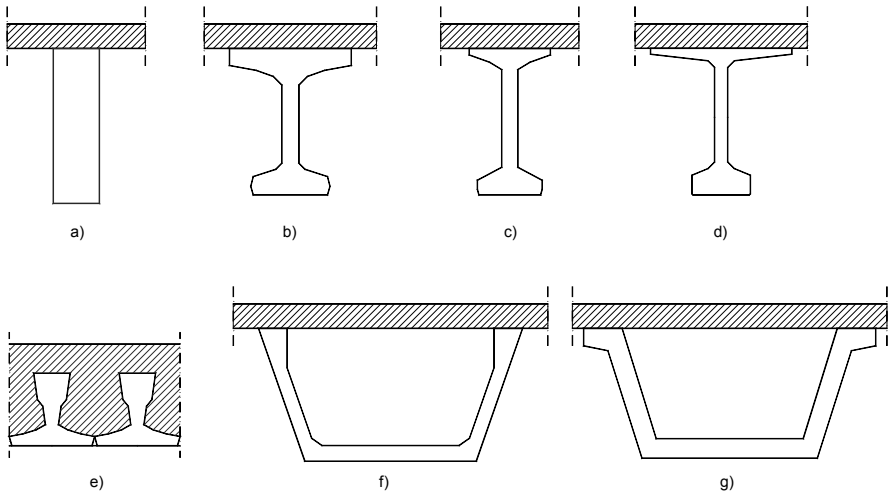


Figura 2-2 – Tipos de secções de vigas pré-fabricadas correntemente utilizados (adaptado de Calavera Ruiz e Hernández (2002)).

As formas das secções são determinadas por condicionamentos vários, tais como:

- procedimentos de fabrico;
- sistema de pré-esforço utilizado (pré-tensão ou pós-tensão);
- sistemas de transporte e montagem;
- método de construção da laje de tabuleiro.

Estes aspectos são resumidamente explicitados por Menn (1986).

Em vãos superiores a 15 m, a secção transversal mais utilizada é formada por vigas em "I", afastadas entre si de 0,60 m a 6 m. Sobre as vigas é executada uma laje, em toda a largura do tabuleiro, que forma com as vigas uma secção composta (Figura 2-3), havendo uma junta de betonagem horizontal entre o banzo superior da viga e a laje. A laje liga as vigas pré-fabricadas entre si e suporta as sobrecargas de utilização, sendo geralmente em betão armado. A cofragem da laje é, correntemente, realizada por lajes finas, de betão armado ou pré-tensionado, designadas por pré-lajes. Estas podem ter função resistente no tabuleiro final ou funcionar apenas como cofragem durante a betonagem da laje do tabuleiro. A betonagem da laje *in situ* após a montagem das vigas conduz a soluções com vigas leves que são, portanto, económicas em termos de transporte e montagem. Além disso, conduz a um sistema menos sensível à existência de deformações iniciais desiguais das vigas pré-fabricadas, comparativamente a uma solução em que as vigas são montadas lado a lado.

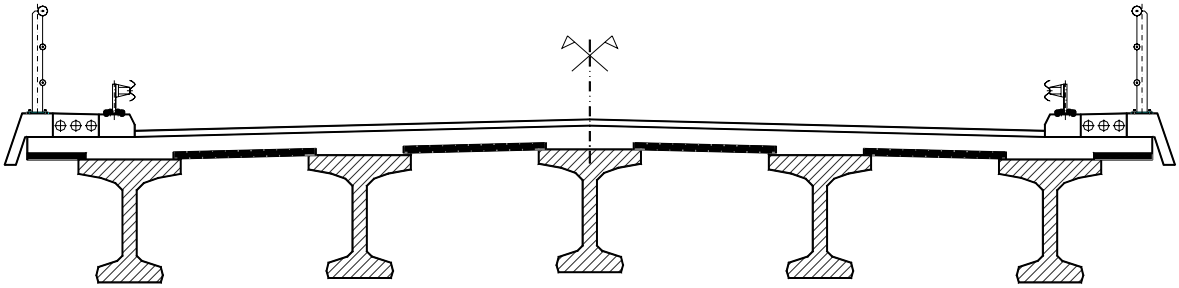


Figura 2-3 – Secção transversal do tabuleiro de uma ponte com vigas "I".

A distribuição transversal de cargas pelas várias vigas é garantida pela rigidez à torção das vigas, pela laje e pelas carlingas (vigas perpendiculares ao eixo do tabuleiro). É comum a adopção de carlingas apenas nos alinhamentos dos apoios. Estas restringem a rotação por torção das vigas pré-fabricadas e permitem o levantamento do tabuleiro para a substituição dos aparelhos de apoio. Não é comum a adopção de carlingas em secções intermédias do vão, por serem difíceis de construir. Essas dificuldades prendem-se com a necessidade de haver armaduras saídas das vigas pré-fabricadas e com as operações de fixação, suporte (escoramento) e remoção da cofragem das carlingas.

A altura da secção transversal do tabuleiro depende essencialmente da forma da secção da viga e do afastamento transversal entre vigas. A esbelteza do tabuleiro, definida como a razão entre o comprimento do vão e a altura total da secção transversal, tem geralmente, segundo FIB (2000), um valor aproximado de 18 para um afastamento entre vigas de 2 m a 3 m, conseguindo-se uma solução mais económica, mas menos agradável esteticamente, com uma esbelteza de 15.

A aplicação de pré-esforço pode ser feita por pré-tensão, por pós-tensão, ou com recurso a ambas as técnicas. A utilização da pré-tensão tem a importante vantagem de garantir uma maior protecção contra a corrosão das armaduras, conferida pelo betão, quando comparada com a protecção conferida pelas caldas de injecção às armaduras de pré-esforço por pós-tensão (FIB 2000). As vigas em "I" pré-esforçadas por pós-tensão precisam de um alargamento da alma nas extremidades para acomodar a ancoragem dos cabos de pré-esforço.

Pontes curvas em planta são geralmente realizadas com vigas rectas paralelas entre si, sendo a curvatura do tabuleiro conseguida com o uso de pré-lajes em consola com comprimento variável. O arranjo das vigas em planta pode seguir uma das duas disposições apresentadas na Figura 2-4 (Menn 1986). Apesar de pouco vulgares, também se executam tabuleiros curvos construídos com vigas pré-fabricadas em "U" com directriz curva em planta (Montaner *et al.* 2000).

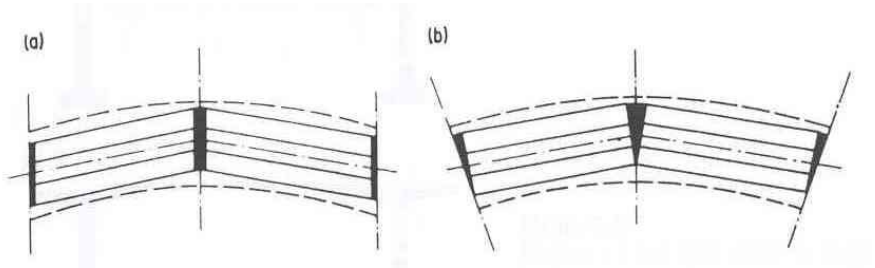


Figura 2-4 – Arranjo das vigas pré-fabricadas em tabuleiros com curvatura em planta: a) eixos de apoio paralelos; b) eixos de apoio com disposição radial (Menn 1986).

Quando existe curvatura do perfil longitudinal, podem ser adoptadas vigas pré-fabricadas com um enchimento, em betão estrutural, sobre o seu banzo superior, tendo a laje do tabuleiro uma espessura constante ao longo da obra, tal como se representa na Figura 2-5.

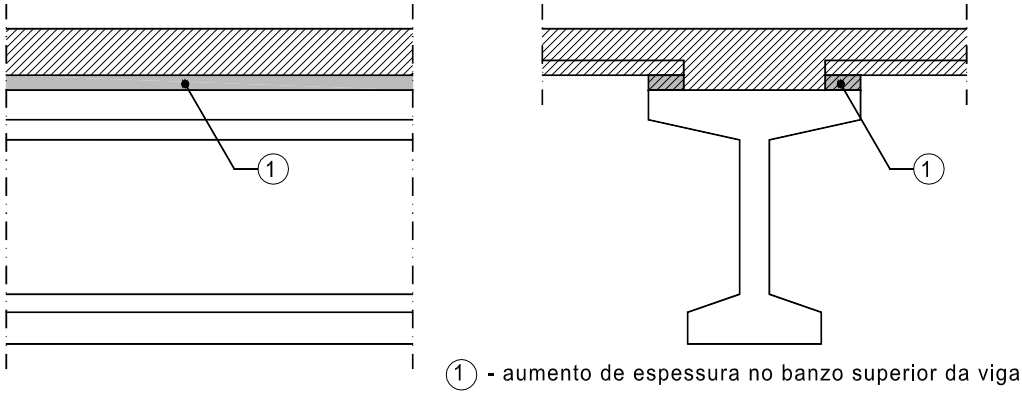


Figura 2-5 - Viga pré-fabricada com altura variável para a realização de pontes com perfil longitudinal curvo: alçado e secção transversal.

2.3 Tabuleiros isostáticos

Os primeiros tabuleiros construídos com recurso a vigas pré-fabricadas eram formados por tramos independentes, separados por juntas de dilatação, simplesmente apoiados sobre os pilares através de aparelhos de apoio. Com esta técnica conseguiam-se tabuleiros cuja construção era fácil e rápida.

O cálculo deste tipo de estruturas é também relativamente simples. Como se trata de uma estrutura simplesmente apoiada, as deformações impostas (assentamentos de apoio, variação diferencial de temperatura, retracção diferencial entre viga e laje e fluência do betão) não conduzem em geral a uma variação da distribuição de momentos flectores aplicados à estrutura, podendo originar apenas uma distribuição de tensões auto-equilibradas na secção transversal. O aspecto, relacionado com o cálculo, mais complexo, prende-se com a determinação da resposta da estrutura quando sujeita à actuação de cargas concentradas que simulam os veículos definidos regulamentarmente, aspecto este que está presente no cálculo de qualquer tabuleiro de ponte do tipo vigado. No entanto, vários autores (Calavera Ruiz e Hernández 2002; Jaafar 1998; Menn 1986; Pritchard 1992) salientam várias desvantagens nesta solução, em termos de:

- qualidade estética;
- conforto para a circulação rodoviária;
- durabilidade.

Os problemas de durabilidade resultam geralmente do atravessamento das juntas de dilatação por água e sais descongelantes (quando estes são aplicados sobre o tabuleiro), uma vez que, em geral, não é possível garantir a impermeabilidade das juntas. A água e os sais descongelantes originam a deterioração das próprias juntas e dos aparelhos de apoio e problemas de corrosão no topo das vigas pré-fabricadas e nas vigas de apoio do tabuleiro. Este problema tem particular importância pelo facto de o topo das vigas ser, geralmente, inacessível para efeitos de inspecção ou manutenção.

Estudos realizados pelo Department of Transport (DTp) do Reino Unido, no fim da década de 80, citados por Pritchard e Smith (1991a), permitiram concluir que na maioria das pontes pré-fabricadas com tramos isolados observam-se escorrências, constituindo as juntas de dilatação a principal causa dos problemas de corrosão do tabuleiro e da infra-estrutura.

Os problemas de durabilidade podem contudo ser minimizados mediante a adopção de pormenorização adequada (Calavera Ruiz e Hernández 2002):

- permitindo a inspecção e a substituição dos aparelhos de apoio;
- prevendo canais para drenagem das águas que atravessam as juntas de dilatação;
- prevendo galerias para acesso e inspecção dos encontros.

Estas medidas não são, no entanto, suficientes para solucionar os problemas referidos.

2.4 Tabuleiros isostáticos com lajes contínuas

Os tabuleiros estruturalmente isostáticos podem ser realizados com laje contínua (Figura 2-6). Esta solução consiste em ligar os diferentes tramos, na zona de apoio, apenas ao nível da laje. As vigas pré-fabricadas são montadas sobre apoios definitivos independentes, betonando-se depois a laje do tabuleiro que é, portanto, o único elemento que estabelece a continuidade entre tramos. Esta ligação garante uma superfície do tabuleiro contínua, mas a ponte funciona estruturalmente como uma série de tramos simplesmente apoiados, uma vez que a reduzida rigidez da laje de continuidade não permite que se instalem na secção de apoio momentos flectores significativos.

As rotações por flexão das secções de apoio das vigas (resultantes da acção do peso dos revestimentos, das sobrecargas, da variação diferencial de temperatura, da retracção diferencial entre viga e laje e das deformações por fluência devidas às cargas permanentes) constituem deformações impostas à lajeta de continuidade. Para que essas deformações impostas não originem esforços muito elevados, a laje deve ser desligada da viga pré-fabricada ao longo de um determinado comprimento por forma a aumentar a sua flexibilidade. Este elemento é também designado por lajeta de continuidade, em virtude de a sua espessura ser, por vezes, inferior à espessura da restante laje. A lajeta de continuidade deverá ter ainda capacidade suficiente para resistir aos efeitos provocados pelas rodas dos veículos. Este elemento estrutural é, geralmente, realizado em betão armado, com um grande número de varões de pequeno diâmetro.

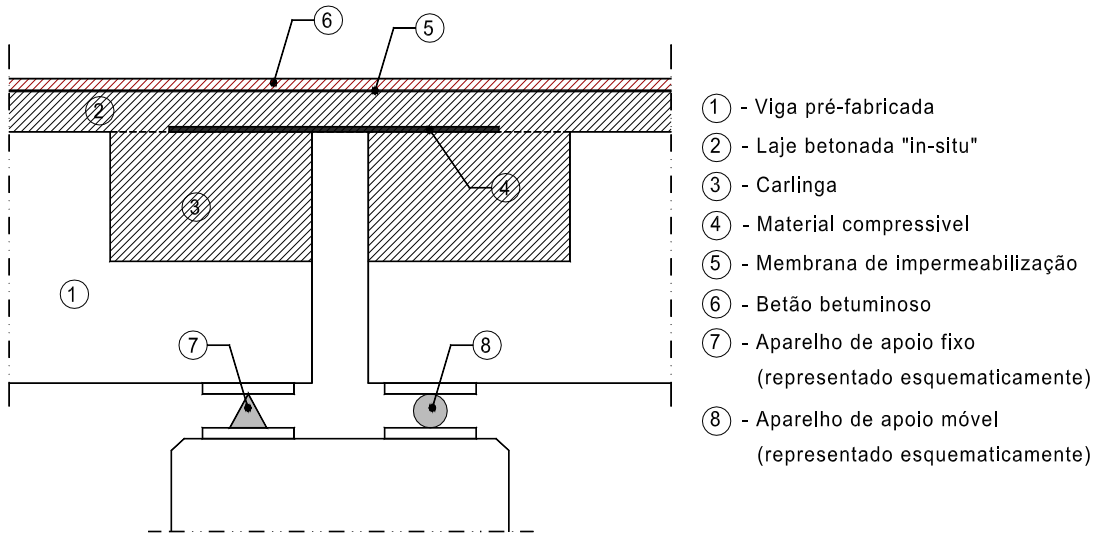


Figura 2-6 - Lajeta de continuidade.

A principal vantagem conseguida com esta solução tem a ver com a eliminação das juntas de dilatação sobre os pilares resultando, consequentemente, uma melhoria do conforto para a circulação rodoviária (FIB 2000). No entanto, segundo Menn (1986), não é garantida a solução dos problemas de durabilidade, uma vez que a membrana de impermeabilização (que pode ser aplicada sobre a laje como protecção adicional) pode ser deteriorada, e a fina lajeta de continuidade pode ter problemas de fissuração dando origem à penetração da água e dos sais descongelantes. Além disso, segundo Reis (1999), esta solução não garante um bom comportamento sísmico da estrutura uma vez que a lajeta de continuidade tem que funcionar como um tirante devido à força sísmica longitudinal induzida no tabuleiro.

2.5 Tabuleiros contínuos com ligação entre vigas realizada na zona dos apoios

A solução correntemente adoptada para a eliminação dos problemas referidos no sub-capítulo 2.3 para os tabuleiros com tramos isostáticos, consiste na ligação das vigas pré-fabricadas para formar um tabuleiro contínuo.

Nos Estados Unidos, esta técnica é muito utilizada, sendo referido por Jaafar (1998) que, já em 1980, era usada correntemente pela maior parte dos departamentos de transportes.

No Reino Unido, após terem sido detectados os problemas provocados pela existência de juntas de dilatação, o DTp encomendou, no início da década de 90, um estudo sobre as formas de estabelecimento de continuidade em pontes construídas a partir de vigas pré-fabricadas (Pritchard e Smith 1991a), tendo posteriormente estabelecido uma recomendação para que

todas os tabuleiros fossem contínuos, reduzindo-se ou mesmo eliminando-se, assim, as juntas de dilatação. Posteriormente, o mesmo DTp encomendou um novo estudo para avaliação do desempenho dos tabuleiros contínuos existentes (Pritchard e Smith 1991b), tendo sido concluído que as estruturas inspeccionadas (algumas com perto de 30 anos) estavam em muito boas condições.

As vantagens desta técnica não se limitam ao melhor desempenho em termos de durabilidade. A opção pela continuidade estrutural conduz, normalmente, a um conjunto de vantagens, estruturais, estéticas e económicas (Reis 1999):

- a continuidade estrutural reduz os esforços provocados pelas sobrecargas nas secções do vão, introduz uma capacidade de redistribuição de esforços em estado limite último, conduz a menores deformações verticais, aumenta a frequência própria de vibração do tabuleiro na direcção vertical e melhora o comportamento da estrutura sob as acções sísmicas;
- do ponto de vista estético, a continuidade permite uma maior esbelteza do tabuleiro e uma maior uniformidade no alçado da obra, podendo também ser eliminados os tradicionais capiteis no topo dos pilares, sendo conseguida uma solução esteticamente mais agradável quando a viga transversal está embebida na espessura do tabuleiro, tal como se representa na Figura 2-7;
- em termos económicos, para além da redução das quantidades de materiais que possam resultar da continuidade, existe uma importante redução dos custos de manutenção, uma vez que se eliminam os problemas referidos no sub-capítulo 2.3.

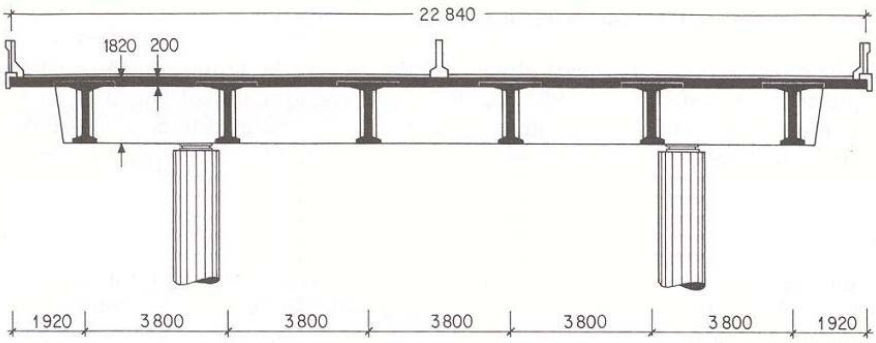


Figura 2-7 - Tabuleiro com viga transversal embebida na espessura do tabuleiro (Menn 1986).

O principal inconveniente dos tabuleiros contínuos reside nas maiores dificuldades introduzidas por esta técnica durante a fase de execução da obra, implicando uma redução do ritmo de construção. Este aspecto é especialmente importante quando é utilizado pré-esforço de continuidade, uma vez que são necessárias mais fases construtivas (ver o sub-capítulo 2.5.3) e pessoal especializado.

A execução de tabuleiros contínuos levanta também dificuldades acrescidas durante a fase de projecto. A evolução do esquema estrutural do tabuleiro e da secção transversal das vigas origina uma evolução nos esforços e nas tensões instaladas. De facto, se as vigas do tabuleiro permanecessem simplesmente apoiadas, o tabuleiro deformar-se-ia, ao longo do tempo, originando rotações na secção de apoio:

- por fluência, devido à acção do pré-esforço;
- por fluência, devido à acção do seu peso próprio;
- devido ao efeito da retracção diferencial entre a laje e a viga pré-fabricada.

Ora, na secção de apoio não podem, na realidade, existir rotações relativas entre extremidades das vigas a partir do momento em que a continuidade é estabelecida. Por isso, desenvolvem-se na estrutura, ao longo do tempo, momentos flectores positivos devidos à acção do pré-esforço e momentos flectores negativos devidos à acção do peso próprio do tabuleiro e da retracção diferencial (se a extensão de retracção da laje for superior à extensão de retracção da viga pré-fabricada após a betonagem da laje), tal como está ilustrado na Figura 2-8.

Além disso, a evolução da secção transversal (que numa primeira fase é constituída apenas pela viga pré-fabricada e, numa segunda fase, é constituída pela viga pré-fabricada associada à laje) dá também origem a uma evolução, ao longo do tempo, do estado de tensão instalado nas peças.

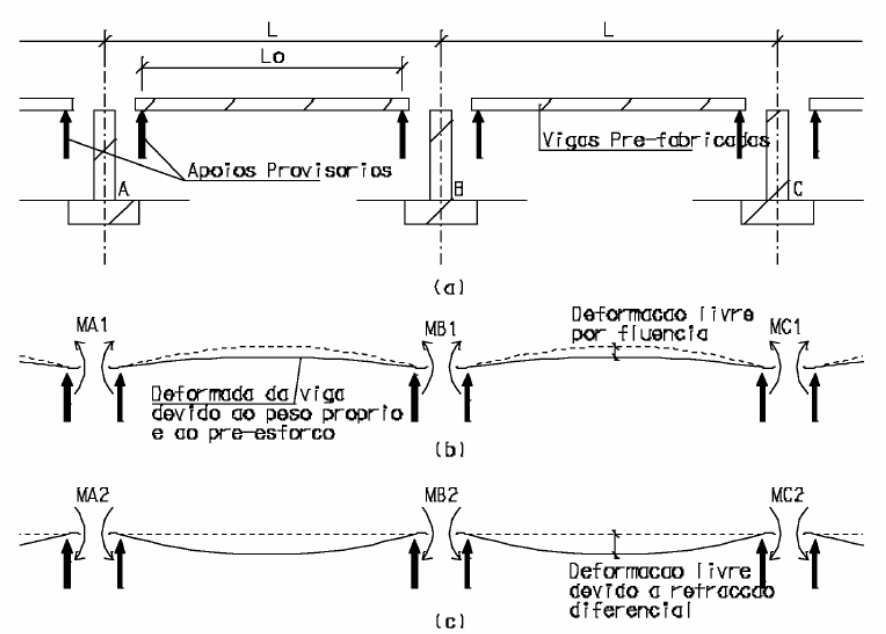


Figura 2-8 – Momentos flectores devidos ao impedimento das deformações do tabuleiro por fluência e retracção: a) estrutura; b) fluência; c) retracção diferencial.

Para a determinação da evolução dos esforços e tensões é necessária a realização de uma análise visco-eslástica. Note-se que essa evolução não condiciona a resistência última da estrutura se esta possuir ductilidade suficiente. No entanto, para a realização de verificações durante a fase de serviço, nomeadamente para o controlo de tensões e abertura de fendas na estrutura, tem que ser avaliada tal evolução de esforços.

Para além da dificuldade introduzida pelo cálculo visco-elástico é importante notar que:

- a evolução dos esforços deve-se essencialmente à fluência, à retracção do betão e à idade das vigas quando é estabelecida a continuidade, aspectos estes que têm uma grande variabilidade associada, o que faz com que os resultados de um cálculo visco-elástico de natureza determinística possam ter um erro significativo, tendo vários autores, tais como Clark e Sugie (1997) (ver sub-capítulo 2.5.1.3) sugerido que não existe vantagem na realização de cálculos rigorosos de natureza determinística, devendo antes ser adoptadas disposições construtivas adequadas (estudadas atendendo à variabilidade dos fenómenos envolvidos);
- a ocorrência de fendilhação provoca modificações na rigidez da estrutura, condicionando também a evolução destes esforços.

As soluções mais correntemente utilizadas para a realização de tabuleiros com continuidade estrutural estabelecida na zona dos apoios recorrem a armaduras ordinárias, a armaduras de pré-esforço na zona dos apoios com traçado recto ou a armaduras de pré-esforço com continuidade ao longo de todo o tabuleiro.

2.5.1 Continuidade com armaduras ordinárias

A continuidade pode ser estabelecida através da colocação de armadura longitudinal contínua na laje, sobre os apoios, e da betonagem do espaço entre vigas criando uma carlinga (Figura 2-9). A armadura longitudinal inferior e a armadura de alma saem dos topos das vigas, existindo várias formas de realizar a sua emenda.

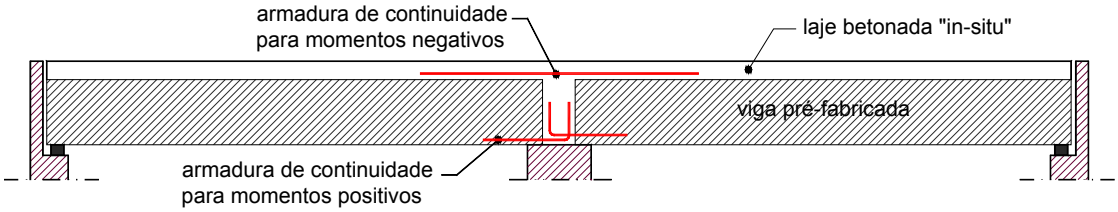


Figura 2-9 – Ligação de continuidade usando apenas armaduras ordinárias.

Esta solução é referida por vários autores, tais como Saleh *et al.* (1995) e Jaafar (1998), como sendo a mais simples e a mais utilizada para a construção de tabuleiros contínuos de médio vão.

Nos Estados Unidos, o desenvolvimento desta técnica tem sido suportado por numerosos trabalhos de investigação, sendo de destacar os seguintes:

- no início dos anos 60, a Portland Cement Association (PCA) desenvolveu trabalhos experimentais e numéricos, ensaiando em laboratório uma grande quantidade de modelos, com o objectivo de estudar os seguintes aspectos: resistência e ductilidade da ligação sob a actuação de momentos flectores negativos (Kaar *et al.* 1960); resistência ao esforço rasante entre a viga pré-fabricada e a laje (Hanson 1960); resistência ao momento flector provocado pela actuação de cargas ciclicamente repetidas (Mattock e Kaar 1960); resistência ao esforço transverso (Mattock e Kaar 1961a); efeitos da fluência e da retracção (Mattock 1961); resposta estrutural de um tabuleiro completo, à escala 1:2 (Mattock e Kaar 1961b);
- nos anos 70, no âmbito do Missouri Cooperative Highway Research Program, a University of Missouri-Columbia realizou trabalhos experimentais, com ensaios à escala real, para estudar a possibilidade de realizar a ligação para momentos positivos com cordões de pré-esforço saídos do topo das vigas (Salmons 1974);
- no fim dos anos 80, no âmbito do National Cooperative Highway Research Program (NCHRP), o Construction Technology Laboratories (CTL) desenvolveu um trabalho (projecto 12-29) com o objectivo principal de clarificar as incertezas associadas à quantificação do momento flector instalado na zona de ligação, envolvendo ensaios de fluência e retracção, estudos numéricos e um inquérito, tendo os resultados sido publicados no relatório 322 do NCHRP (Osterle *et al.* 1989);
- no início dos anos 90, foi realizado um trabalho experimental na Purdue University para avaliar o comportamento diferido e a resistência ao esforço transverso de vigas contínuas em que parte dos cordões de pré-tensão são embainhados junto das extremidades das vigas pré-fabricadas (Abdalla *et al.* 1993); a ligação de continuidade usada foi do tipo representado na Figura 2-11 f), sendo a armadura inferior na zona do apoio materializada com cordões de pré-esforço emendados da forma esquematizada na Figura 2-12 a);

- recentemente, no âmbito do NCHRP, foi realizado um trabalho (projecto 12-53) com o objectivo principal de estudar o comportamento, em fase de serviço e em relação ao Estado Limite Último (ELU), de ligações entre vigas pré-fabricadas realizadas com a técnica abordada neste sub-capítulo, tendo os resultados desse trabalho sido publicados no relatório 519 do NCHRP (Miller *et al.* 2003) e nos artigos de Mirmiran *et al.* (2001a), Mirmiran *et al.* (2001b) e Hastak *et al.* (2003).

A grande divulgação e aplicação desta técnica nos Estados Unidos é traduzida nos resultados dos inquéritos realizados no âmbito dos dois projectos do NCHRP, publicados por Osterle *et al.* (1989) e Hastak *et al.* (2003). Este último questionário inclui também respostas de agências do Canadá e do Japão.

A prática inglesa é exposta nos trabalhos de Pritchard e Smith (1991a; 1991b), que foram realizados após terem sido detectados os problemas provocados pela existência de juntas de dilatação. Na sequência desses estudos foi, segundo Clark e Sugie (1997), imposto pela Highways Agency do Reino Unido que todas as pontes com comprimento inferior a 60 m e viés inferior a 30º tenham tabuleiros contínuos, ao longo do seu comprimento e na ligação aos encontros. A preocupação das autoridades inglesas relativamente às estruturas pós-tensionadas (que, tal como é referido por Jaafar (1998), levou mesmo a uma proibição temporária do uso de pré-esforço por pós-tensão) contribuiu também para o desenvolvimento da técnica tratada neste sub-capítulo.

A técnica de estabelecimento de continuidade do tabuleiro com armaduras ordinárias tem sido utilizada por diversos autores em pontes com um comprimento significativo: Osterle *et al.* (1989) estudaram pontes com vãos até 39.62 m; Saleh *et al.* (1995) estudaram esta solução num tabuleiro com vão de 29 m; Clark e Sugie (1997) estudaram pontes com vãos até 36 m.

Aspectos, tais como o faseamento construtivo, a geometria da zona de ligação, a emenda das armaduras inferiores na zona de apoio e o funcionamento da ligação sob actuação de momentos flectores negativos, são relevantes para o comportamento estrutural deste tipo de obras.

2.5.1.1 Faseamento construtivo

A construção do tabuleiro inicia-se com a execução das vigas pré-fabricadas. Após a montagem das vigas na posição definitiva (eventualmente pousadas sobre apoios provisórios) procede-se à colocação das pré-lajes e das armaduras das carlingas e da laje. Segue-se a betonagem *in situ* das carlingas e da laje do tabuleiro, que pode ser feita segundo uma das três sequências seguintes:

- betonagem da carlinga antes da laje;
- betonagem da laje antes da carlinga;
- betonagem simultânea da laje e da carlinga.

Se a carlinga é betonada antes da laje, sendo emendada a armadura superior (adequadamente dimensionada) das vigas pré-fabricadas, consegue-se o estabelecimento da continuidade antes de a estrutura ser submetida ao peso da laje. Esta sequência construtiva foi adoptada por autores tais como Saleh *et al.* (1995) e Clark e Sugie (1997) por ter as seguintes vantagens:

- o peso próprio da laje origina momentos flectores negativos na zona de ligação, minimizando os problemas de fendilhação na fibra inferior, nessa zona;
- consegue-se uma redução do momento flector positivo na zona do vão, relativamente às outras sequências construtivas, permitindo uma redução da quantidade de pré-esforço.

No entanto, esta sequência construtiva apresenta também inconvenientes pois conduz a uma maior complexidade construtiva e a um aumento do valor do momento flector negativo na zona de ligação entre vigas, o que pode levantar problemas de fendilhação na fibra superior da laje.

Nos inquéritos realizados no âmbito dos trabalhos do NCHRP, foi verificado que outra sequência construtiva é utilizada nos Estados Unidos por vários autores, consistindo na betonagem da metade inferior da carlinga antes da betonagem da laje. Esses autores consideram que a rotação das secções extremas das vigas pré-fabricadas, devida ao peso próprio da laje, comprime o betão da primeira fase de betonagem da carlinga, minimizando assim os riscos de fendilhação na fibra inferior da secção de ligação. Esta sequência construtiva foi usada no trabalho experimental realizado por Miller *et al.* (2003), tendo os autores verificado que não se deu a compressão esperada. Como é obvio, essa compressão só existirá se a armadura superior da viga for emendada na secção de ligação (aquando da primeira betonagem da carlinga) ou se existir impedimento do deslocamento longitudinal das vigas pré-fabricadas.

A betonagem da laje antes da carlinga tem uma importante vantagem, pois permite minimizar os efeitos do calor de hidratação libertado após a betonagem da laje. De facto, quando a laje é betonada, a temperatura do betão aumenta por causa da libertação do calor de hidratação do cimento. Posteriormente a laje arrefece e o betão contrai. Esse arrefecimento dá-se numa fase avançada da hidratação do cimento, numa altura em que o betão da laje já tem propriedades mecânicas relevantes. A contracção devida ao arrefecimento do betão provoca efeitos semelhantes aos provocados pela retracção diferencial:

- se acontece antes da betonagem das carlingas, origina um diagrama de momentos flectores com valor nulo;
- se acontece depois do estabelecimento da continuidade, origina um diagrama de momentos flectores com valores negativos ao longo do desenvolvimento da estrutura.

No trabalho experimental realizado por Miller *et al.* (2003), em que foi construída uma viga contínua com dois tramos, verificou-se, devido a este efeito, o aparecimento de um momento flector negativo, na secção de apoio central, de cerca de 680 kNm. Este valor é muito significativo pois representa, em termos comparativos, cerca de 120% do momento de fendilhação da fibra inferior, calculado para a interface entre a viga e a carlinga, e pode ser evitado se a carlinga só é betonada depois da contracção da laje devida ao efeito do calor de hidratação.

A betonagem simultânea da laje e da carlinga constitui o procedimento que, construtivamente, é mais simples. Este foi o procedimento sugerido pelos autores do relatório nº 322 do NCHRP (Osterle *et al.* 1989) por terem concluído, na sequência do trabalho de carácter numérico que realizaram, que as sequências construtivas referidas atrás conduziam a diagramas de momentos flectores totais com diferenças que não eram significativas. É importante notar que esses autores não tiveram em conta o efeito do calor de hidratação da laje, efeito esse que poderia condicionar as suas conclusões.

2.5.1.2 Geometria da zona de ligação

Na Figura 2-11 representam-se as formas geométricas do nó de ligação correntemente utilizadas em Portugal.

Na Figura 2-11 a), b) e c) representam-se soluções em que as vigas pré-fabricadas são montadas sobre apoios provisórios. Após a betonagem e endurecimento do betão da carlinga e da laje, os apoios provisórios são removidos, ficando a carlinga apoiada sobre uma linha de

aparelhos de apoio definitivos. Na solução b), as faces inferiores da viga pré-fabricada e da carlinga são complanares. Na solução c), as vigas pré-fabricadas possuem um "dente" nas suas extremidades para garantir um melhor comportamento no que respeita à resistência ao corte na ligação entre os betões da viga pré-fabricada e da carlinga.

Na Figura 2-11 d) e e) representam-se soluções em que a carlinga é betonada em duas fases, sendo as vigas pré-fabricadas pousadas sobre a parte betonada em primeira fase. Na solução d), a ligação entre o tabuleiro e a infra-estrutura é realizada por uma linha de aparelhos de apoio definitivos, enquanto que na solução e) existe uma ligação monolítica entre o tabuleiro e a infra-estrutura.

A Figura 2-11 f) apresenta uma solução em que as vigas pré-fabricadas são montadas sobre aparelhos de apoio definitivos, sendo posteriormente realizada a betonagem da carlinga. Esta duplicação de apoios faz com que exista continuidade de momentos flectores entre o tabuleiro e a infra-estrutura. No inquérito realizado no âmbito do projecto 12-53 do NCHRP (Hastak *et al.* 2003) foi verificado que esta é a solução mais frequentemente utilizada nos Estados Unidos, tal como se pode ver no gráfico da Figura 2-10.

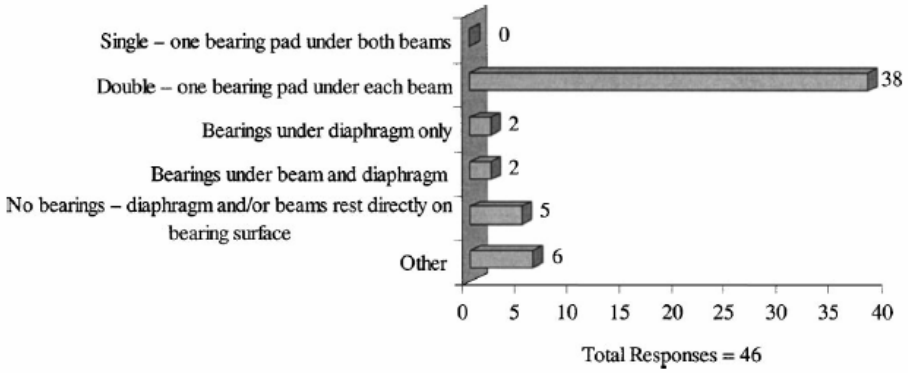


Figura 2-10 – Resultados do inquérito realizado por Hastak *et al.* (2003): tipos de apoios.

As soluções apresentadas atrás dispensam qualquer escoramento para suporte das vigas pré-fabricadas antes da betonagem das carlingas. Em obras em que a altura do tabuleiro em relação ao solo é pequena, pode ser conseguida uma solução mais agradável esteticamente usando uma única viga transversal sobre os pilares, embebida na altura do tabuleiro, tal como se representa na Figura 2-7 e na Figura 2-11 g). Nesta solução, as vigas pré-fabricadas são pousadas sobre um escoramento provisório que só pode ser removido depois da execução da laje e da carlinga.

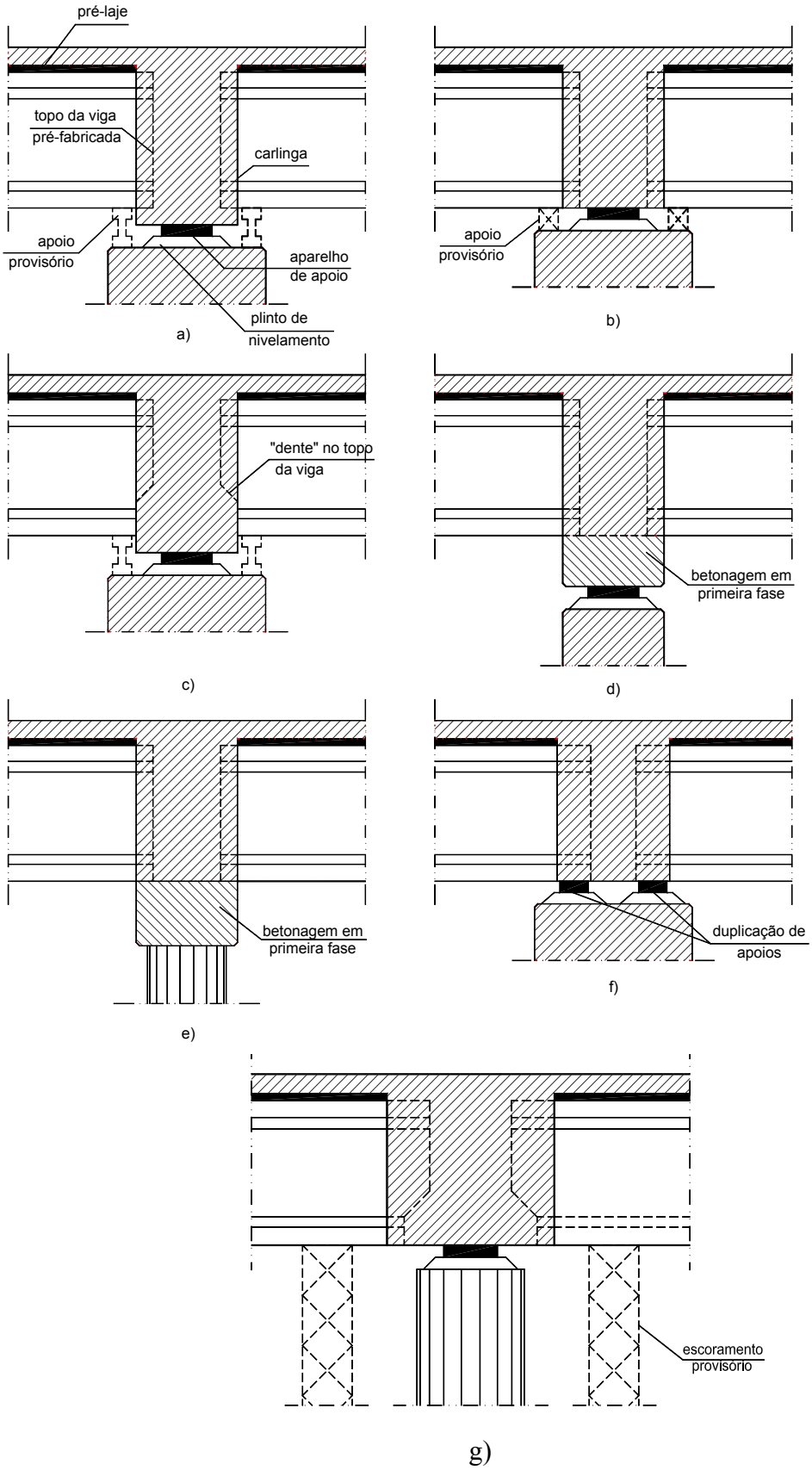


Figura 2-11 – Diferentes configurações geométricas para a ligação entre vigas pré-fabricadas.

No Reino Unido, a continuidade estrutural entre vigas pré-fabricadas é correntemente realizada através das soluções representadas na Figura 2-11 d), f) ou g) (Pritchard 1992; Pritchard e Smith 1991a; Pritchard e Smith 1991b).

Note-se que, em todas as soluções representadas na Figura 2-11, o topo das vigas pré-fabricadas está no interior da carlinga. Nos inquéritos realizados no âmbito dos projectos do NCHRP (Hastak *et al.* 2003; Osterle *et al.* 1989) foi verificado que o comprimento de viga inserido no interior da carlinga varia de autor para autor, sendo também utilizadas soluções em que esse comprimento é nulo, ou seja, em que o topo das vigas pré-fabricadas coincide com a face da carlinga.

2.5.1.3 Emenda das armaduras inferiores na zona de apoio

A armadura inferior de uma viga contínua, na zona sobre os apoios de continuidade, tem as seguintes funções:

- controlo da fendilhação causada pelo momento flector positivo que pode ocorrer nessa zona, como consequência da deformação por fluência (devida ao estado de tensão introduzido pelo pré-esforço), da variação diferencial de temperatura, dos assentamentos de apoio e da sobrecarga rodoviária (em tabuleiros com mais de dois tramos);
- resistência ao esforço axial instalado no tabuleiro;
- contributo para a resistência ao corte da junta de betonagem, que existe nestas obras entre o topo da viga pré-fabricada e o betão da carlinga;
- garantia da resistência em ELU, em relação ao efeito conjunto do esforço transverso e do momento flector positivo (ver Figura 2-19);
- garantia da existência de uma quantidade mínima de armadura inferior, na zona do apoio, que segundo alguns regulamentos tais como o REBAP (1983) e o EC2 (CEN 1991; CEN 2002) deve ser, pelo menos, 1/4 da armadura máxima de tracção correspondente ao momento no vão.

Nas obras em estudo, a armadura inferior (usualmente designada por armadura de continuidade para momentos positivos) deve ser emendada na zona de ligação. Várias soluções são correntemente utilizadas para emendar estas armaduras:

- emenda por sobreposição, mobilizando a aderência entre as armaduras e o betão, dobrando as armaduras por forma a ser reduzido o comprimento de emenda (esta ligação será designada à frente por emenda com armaduras dobradas em cotovelo), podendo esta solução ser utilizada para emendar armaduras ordinárias ou cordões de pré-esforço salientes nos topos das vigas pré-fabricadas (Figura 2-12 a));
- emenda por sobreposição, sendo a armadura dobrada em laço (Figura 2-12 b));
- emenda através de uma ligação soldada (Figura 2-12 c)).

A distância entre os topos das vigas pré-fabricadas deverá ser suficiente para a realização da emenda. Por isso, não são usualmente usadas emendas por sobreposição com varões rectos.

Quando são usadas soluções de emenda por sobreposição, deve ser evitada a ocorrência de colisões entre as armaduras que saem das duas vigas, através do desfasamento dessas mesmas armaduras. Para contornar esse problema, Shamir (1999) sugeriu a adopção de uma das soluções alternativas representadas na Figura 2-13. Na Figura 2-13 a) representa-se uma solução que só pode ser realizada com uma carlinga mais larga do que o necessário para materializar qualquer das soluções representadas na Figura 2-12, pois contém duas emendas consecutivas de armadura. Na Figura 2-13 b) representa-se uma solução em que são usadas pequenas placas de ancoragem nas extremidades dos cordões de pré-esforço. A utilização desta última solução torna indispensável a realização de uma cintagem adequada do betão na zona de emenda de armaduras. As soluções apresentadas na Figura 2-13 podem ser utilizadas com vantagens em pontes curvas em planta, pois a curvatura agrava o problema da colisão entre armaduras.

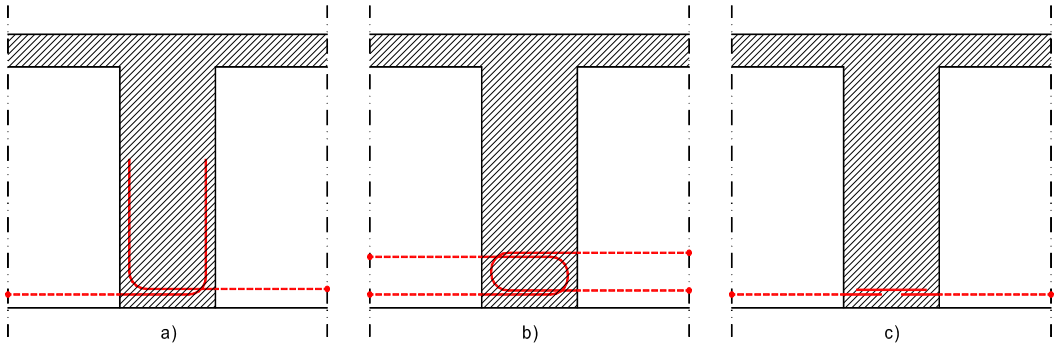


Figura 2-12 – Soluções mais utilizadas para emendar a armadura inferior.

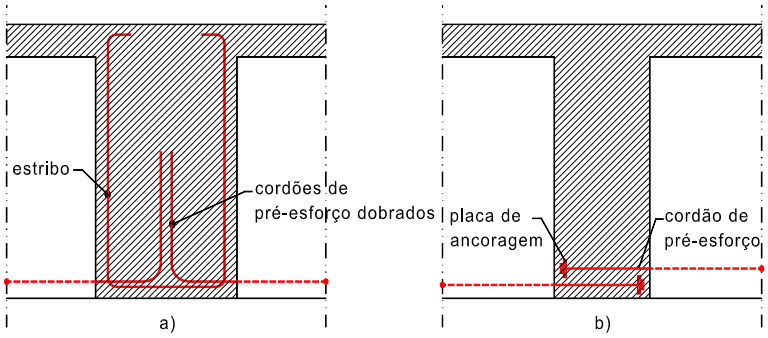


Figura 2-13 - Soluções alternativas para emenda da armadura inferior.

Trabalhos de investigação realizados

Nos diversos trabalhos de investigação atrás referidos, realizados para o estudo do comportamento deste tipo de ligações, foi abordado o problema da emenda da armadura inferior na zona dos apoios, tendo diversos autores chegado a conclusões aparentemente contraditórias.

Nos trabalhos desenvolvidos pelo PCA (Mattock e Kaar 1960) foram ensaiados dois tipos de ligações da armadura inferior: barras rectas soldadas a uma cantoneira (três modelos, dos quais um foi ensaiado sob actuação de cargas cíclicas) e barras emendadas em cotovelo (4 modelos, dos quais um foi ensaiado sob actuação de cargas cíclicas). Foi concluído que a ligação soldada garantiu um bom desempenho, sob actuação de cargas estáticas ou ciclicamente aplicadas. A ligação realizada por armadura emendada em cotovelo não garantiu a resistência suficiente para a transmissão da força de cedência da armadura, nos ensaios estáticos. A rotura deu-se por esmagamento do betão no interior do cotovelo ou por fractura frágil da armadura na zona do cotovelo. O comportamento desta ligação foi também deficiente nos ensaios sob actuação de cargas cíclicas. Os autores concluíram que um melhor desempenho poderia ser conseguido utilizando um maior diâmetro de dobragem da armadura (foi utilizado um diâmetro de dobragem igual a 2.54 cm) e uma maior distância entre o cotovelo e o topo da viga de onde sai essa armadura (ver Figura 2-14).

Foi também estudado o comportamento a longo prazo de duas vigas contínuas, uma sem ligação para momentos positivos e outra com armadura inferior emendada em cotovelo na zona do apoio (Mattock 1961). Na primeira viga apareceram fendas bem abertas ao longo do tempo e foi verificada uma grande diminuição de rigidez quando a viga foi submetida à actuação de uma sobrecarga (ver capítulo 5). As duas vigas contínuas foram carregadas até à rotura tendo sido verificado que a fendilhação significativa da viga contínua sem emenda de armadura inferior no apoio central não afectou a carga última da estrutura.

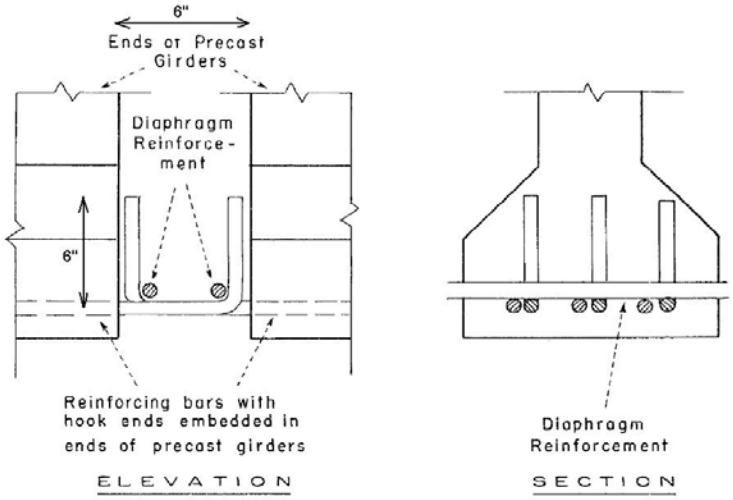


Figura 2-14 – Ligação com emenda em cotovelo utilizada nos ensaios realizados no PCA (Mattock e Kaar 1960).

Com base nos trabalhos realizados na University of Missouri-Columbia, Salmons (1974; 1980) propôs a utilização de cordões de pré-esforço saídos do topo das vigas, emendados em cotovelo, limitando a tensão nos cordões a 15% da resistência à rotura do aço de pré-esforço por forma a evitar problemas de fadiga.

Osterle *et al.* (1989) referem no relatório 322 do NCHRP que a fibra inferior da secção, na zona de ligação, pode fendilhar, quer exista nessa zona armadura emendada para resistir aos momentos flectores positivos, quer essa armadura não exista. Como o momento flector positivo que surge nessa secção é devido, principalmente, ao impedimento às deformações impostas, o seu valor será tanto maior quanto maior for a quantidade de armadura existente. Uma vez que esse momento flector positivo é indesejável (nomeadamente porque origina tensões de tracção na fibra inferior da secção do vão) e a realização da emenda das armaduras inferiores constitui uma dificuldade adicional durante a fase de construção, os autores do estudo recomendam que não seja efectuada qualquer ligação para resistir a momentos flectores positivos. Esta recomendação é também suportada pelos resultados do inquérito realizado pelos mesmos autores, tendo concluído que nos departamentos de transportes de quatro estados dos Estados Unidos, eram realizadas ligações de continuidade sem emenda da armadura inferior na secção dos apoios, sem terem sido relatados problemas associados à falta dessa armadura. Além disso, com base nos trabalhos de carácter numérico realizados, afirmam que o valor do momento flector no vão é virtualmente independente da quantidade de armadura inferior emendada na zona do apoio. Este aspecto pode ser melhor compreendido com o apoio da Figura 2-15.

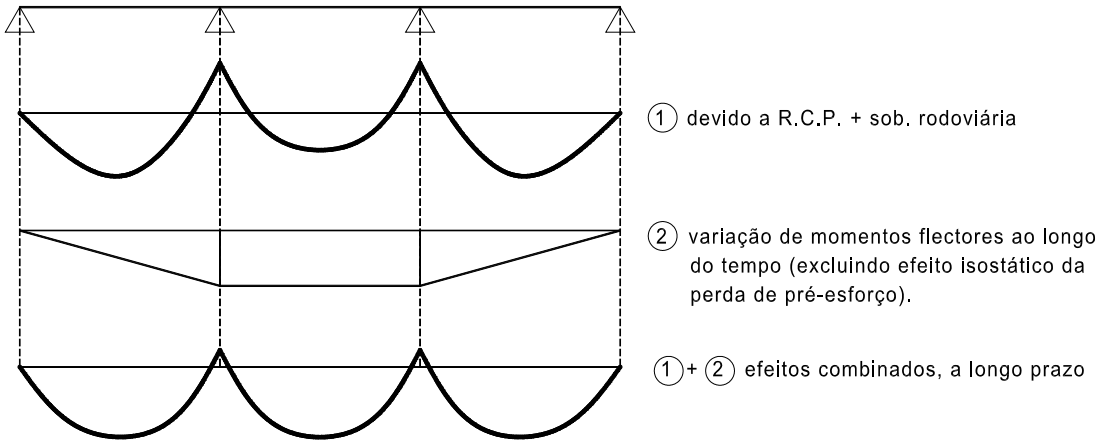


Figura 2-15 – Diagramas de momentos flectores antes e depois dos efeitos diferidos.

Com base no trabalho de carácter numérico que realizaram, Clark e Sugie (1997) concluíram que, em virtude da variabilidade dos efeitos da retracção e da fluência, e da redistribuição de esforços que ocorre com a fendilhação, não é justificável a realização de cálculos visco-elásticos de natureza determinística, devendo, em vez disso, a ligação ser calculada para resistir ao momento flector positivo cujo valor é indicado na Tabela 2-1, considerando uma tensão resistente do aço igual a 75% da sua tensão de cedência. Esses valores foram obtidos através de uma análise paramétrica, incidindo sobre tabuleiros com vãos de 17.5, 21, 26, 28.4 e 36 m, considerando várias idades das vigas pré-fabricadas aquando do estabelecimento da continuidade. Clark e Sugie (1997) referem que deve ser garantida a existência da percentagem mínima regulamentar de armadura, de 0.15%.

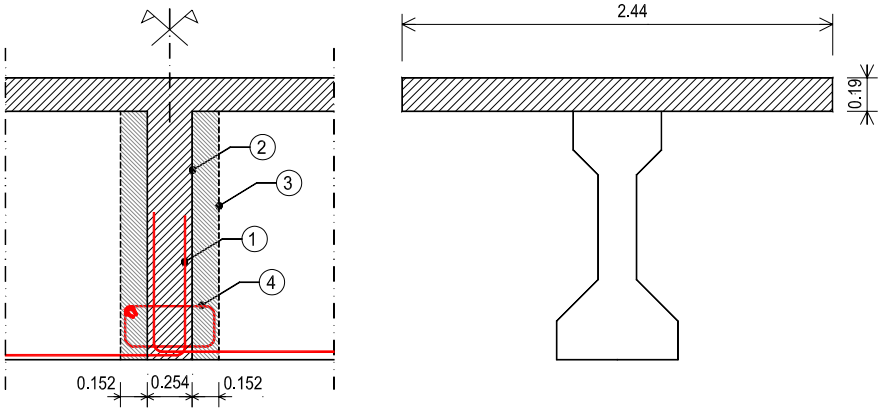
Tabela 2-1 – Momento flector positivo [kNm] para dimensionamento da ligação de continuidade, segundo Clark e Sugie (1997).

Número de vãos		2	3	4 ou mais
Comprimento do vão (L) e altura da viga (H)	$L \geq 20m$ ou $H \geq 1.10m$	1125	900	968
	$L < 20m$ e $H < 1.10m$	900	720	774

Rabbat e Aswad, citados em Mirmiran *et al.* (2001a), sugeriram no início dos anos 90 que não fosse realizada qualquer análise visco-elástica para a determinação dos esforços resultantes da deformação diferida do betão propondo, em vez disso, que a armadura inferior na zona dos apoios fosse dimensionada para resistir a um momento flector positivo igual a $1.2\,M_{cr}$, sendo M_{cr} o momento de fendilhação, positivo, calculado com as propriedades materiais do betão da carlinga e as características geométricas da secção composta pela viga pré-fabricada e pela laje.

No âmbito do projecto 12-53 do NCHRP (Miller *et al.* 2003), foram ensaiados, sob actuação de cargas ciclicamente aplicadas que induzem momentos flectores positivos na zona de ligação, seis modelos. Foram ensaiadas as seguintes soluções para emenda das armaduras inferiores (ver Figura 2-16):

- #1 - cordões de pré-esforço emendados em cotovelo;
- #2 - armaduras ordinárias emendadas em cotovelo;
- #3 - cordões de pré-esforço emendados em cotovelo e extremidades das vigas embebidas na carlinga;
- #4 - armaduras ordinárias emendadas em cotovelo e extremidades das vigas embebidas na carlinga;
- #5 - armaduras ordinárias emendadas em cotovelo, extremidades das vigas embebidas na carlinga e reforço de estribos na base da carlinga, ao lado das vigas;
- #6 - armaduras ordinárias emendadas em cotovelo, extremidades das vigas embebidas na carlinga, com a armadura de alma da carlinga atravessando a alma da viga pré-fabricada.



1 - armadura ordinária ou cordões de pré-esforço
2 - topo das vigas pré-fabricadas (coincide com a face da carlinga nos modelos #1 e #2)
3 - face da carlinga nos modelos #3 a #6
4 - reforço de estribos (modelo #5)

Figura 2-16 – Esquema do ensaio de ligações realizado no âmbito do projecto 12-53 do NCHRP (Miller *et al.* 2003).

Os modelos foram dimensionados para resistir a um momento flector positivo igual a $1.2\,M_{cr}$, sendo Mcr o momento de fendilhação positivo, calculado com as propriedades materiais do betão da carlinga e as características geométricas da secção composta pela viga pré-fabricada e pela laje. Para o dimensionamento das ligações com armaduras ordinárias foi considerada uma tensão resistente do aço igual à sua tensão de cedência, enquanto que para as ligações

com cordões de pré-esforço foi considerada uma tensão resistente inferior a 15% da sua tensão de rotura. Os autores concluíram que todos os modelos ensaiados apresentaram "resistência suficiente". Concluíram também que as soluções com viga embebida na carlinga evidenciaram um melhor desempenho, sendo difícil de quantificar essa melhoria. Além disso, concluíram que a existência de estribos adicionais (modelos #5 e #6) conduziram a um aumento de ductilidade da ligação.

No âmbito do projecto 12-53 do NCHRP foi também realizado um trabalho de carácter numérico (Mirmiran *et al.* 2001a), tendo sido estudado um tabuleiro com dois vãos de 19.8 m e outro com dois vãos de 30.5 m. Os autores prestaram especial atenção à quantificação do momento flector positivo nas secções do vão (valor importante para o controlo do estado limite de descompressão nessa zona) e à quantificação do grau de continuidade (definido como a razão entre o momento flector na secção de apoio central resultante da actuação da sobrecarga de serviço e o momento flector que é obtido considerando um comportamento linear-elástico dos materiais envolvidos). Concluíram que a armadura inferior na zona de apoio deve ser dimensionada, considerando uma tensão resistente do aço igual à sua tensão de cedência, por forma a garantir um momento flector resistente igual a $1.2\,M_{cr}$, tendo M_{cr} o significado já referido. Os autores concluíram que a utilização de uma quantidade superior de armadura tinha pouca influência sobre o valor do grau de continuidade e, consequentemente, pouca influência sobre o valor do momento flector em secções do vão. No entanto, não fizeram qualquer quantificação do valor da abertura de fendas nas fibras inferior e superior da secção de apoio para justificar o valor da armadura proposta.

Fez também parte do projecto 12-53 do NCHRP (Miller *et al.* 2003) o ensaio de duas vigas contínuas, cada uma com dois tramos de 15.24 m (50 ft). Uma das vigas foi monitorizada durante um período de 120 dias após a betonagem da laje, enquanto que a outra foi apenas sujeita a um ensaio de carga. Com base nesse trabalho, os autores concluíram que os efeitos do calor de hidratação do betão da laje (ver o sub-capítulo 2.5.1.1) e da variação diferencial de temperatura condicionam de forma relevante o estado de tensão e o estado de deformação da estrutura. A acção resultante da variação diferencial de temperatura originou momentos flectores positivos, sendo o valor registado na secção de apoio central de cerca de 340 kNm (cerca de 60% do momento de fendilhação, M_{cr}, quantificado da forma definida neste sub-capítulo). O valor do momento flector foi quantificado a partir dos valores medidos para a variação das reacções de apoio. A abertura de fendas, na fibra inferior, na secção de ligação entre a viga pré-fabricada e a carlinga apresentou um valor de cerca de 0.4 mm no fim do período de monitorização, isto é, 4 meses após a betonagem da laje (note-se que a armadura ordinária inferior na zona de apoio foi dimensionada para resistir a $1.2\,M_{cr}$, sendo emendada em cotovelo). O valor máximo diário do momento flector registado na secção de apoio

manteve-se sensivelmente constante ao longo do período de monitorização, enquanto que o valor máximo diário da abertura de fendas aumentou ao longo desse período. Após o período de 4 meses, a viga foi submetida a um ensaio de carga simulando o efeito da sobrecarga rodoviária. O grau de continuidade medido foi de cerca de 1, valor muito superior aquele que foi obtido por via numérica pelos mesmos autores (Mirmiran *et al.* 2001a). Este resultado seria de esperar, uma vez que, nos modelos numéricos utilizados, não foi tido em conta o efeito de retenção de tensões de tracção pelo betão, após a fendilhação. Este efeito é denominado, na nomenclatura inglesa, por *tension stiffening.*

Discussão

Verificam-se contradições entre as conclusões a que chegaram diferentes autores. Além disso, várias funções da armadura inferior, referidas no início deste sub-capítulo, não são consideradas pelos autores referidos atrás.

Vários autores realizaram trabalhos abordando problemas tais como a quantificação do grau de continuidade quando existe fendilhação na fibra inferior sobre o apoio, tendo obtido valores muito baixos (Mirmiran *et al.* 2001a). O interesse pela quantificação do grau de continuidade terá surgido em consequência dos resultados obtidos experimentalmente por Mattock (1961), quando ensaiou um tabuleiro contínuo sem qualquer armadura inferior de continuidade (ver capítulo 5) e em consequência dos trabalhos de carácter numérico realizados sem consideração do fenómeno de *tension stiffening*. O trabalho experimental realizado por Miller *et al.* (2003) permitiu concluir que, o grau de continuidade pode ser muito elevado, devendo ser considerados modelos que incluam o efeito de *tension stiffening* para a sua correcta quantificação pela via numérica.

As propostas apresentadas por alguns autores (e que foram implementadas na prática em inúmeras obras, tal como foi verificado nos inquéritos realizados no âmbito dos projectos do NCHRP (Hastak *et al.* 2003; Osterle *et al.* 1989)) e que consistem em não dispor armadura inferior na zona de apoio, ou quantificar essa armadura de forma simplificada com o critério de resistir a um momento flector igual a $1.2\,M_{cr}$, tal como foi apresentado anteriormente, podem conduzir a problemas de funcionamento ou a grandes aberturas de fendas. De facto, isso aconteceu:

- nos ensaios realizados por Miller *et al.* (2003) registaram-se grandes aberturas de fendas na junta de betonagem entre a viga pré-fabricada e a carlinga;
- Miller *et al.* (2003) e Hastak *et al.* (2003) relatam problemas de fendilhação nas fibras inferiores, junto dos apoios (Figura 2-17), nomeadamente os ocorridos em várias

pontes, no estado de Alabama, nos Estados Unidos, tendo esses problemas sido atribuídos ao efeito da variação diferencial diária de temperatura (a realização de um ensaio de carga numa das pontes com problemas, permitiu concluir, no entanto, que a existência de fendilhação não afectou o desempenho da estrutura quando submetida à acção das sobrecargas rodoviárias).

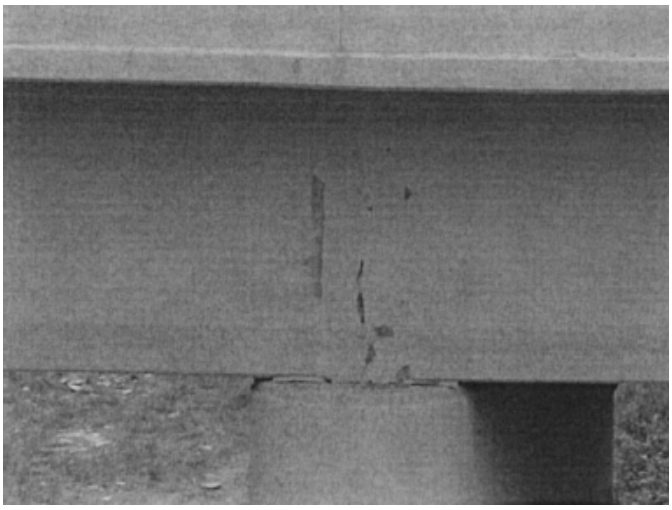


Figura 2-17 – Fendilhação na zona de apoio, devida à existência de momento flector positivo (Hastak *et al.* 2003).

De facto, o dimensionamento da armadura, com uma tensão resistente igual à tensão de cedência, para garantir a resistência a um momento flector positivo com o valor de $1.2\,M_{cr}$, não parece ser suficiente para limitar a abertura de fendas a um valor que não comprometa a durabilidade da estrutura. Como o momento flector positivo na zona de apoio resulta essencialmente do impedimento às deformações impostas (deformação diferida do betão e deformação resultante da variação diferencial de temperatura), a zona traccionada encontrar-se-á, após a fendilhação, em fase de formação de fendas, fase esta em que o momento flector instalado na secção em estudo poderá ter, no máximo, um valor igual a cerca de 120% a 130% do momento de fendilhação (ver capítulo 3). Se não for ultrapassada a fase de formação de fendas, o dimensionamento da armadura inferior para controlo da fendilhação poderá ser feito considerando um momento flector actuante igual a $1.2\,M_{cr}$ e uma tensão no aço (significativamente inferior à sua tensão de cedência) que garanta que o valor admissível para a abertura de fendas, imposto regulamentarmente, não é ultrapassado.

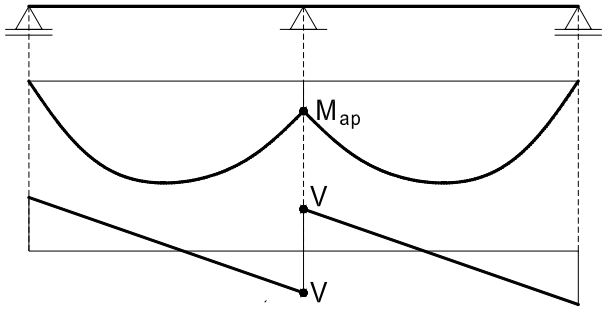


Figura 2-18 – Esquema estrutural e diagramas de momentos flectores e de esforço transverso numa viga contínua.

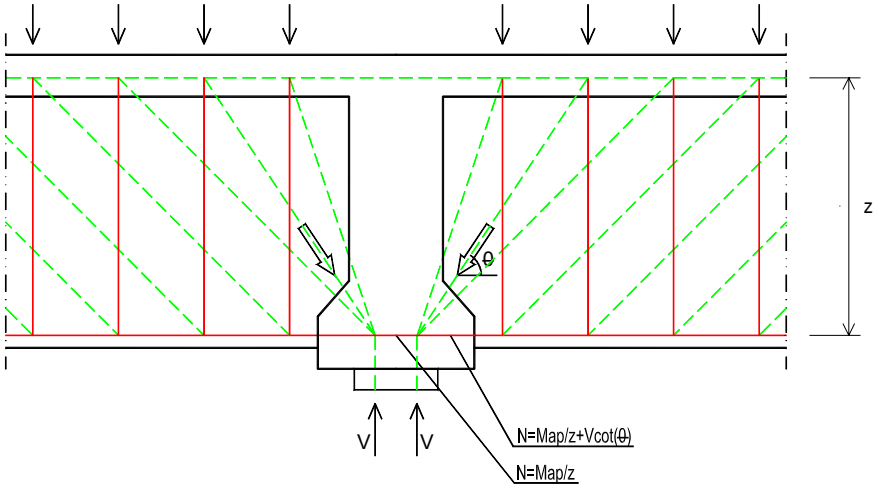
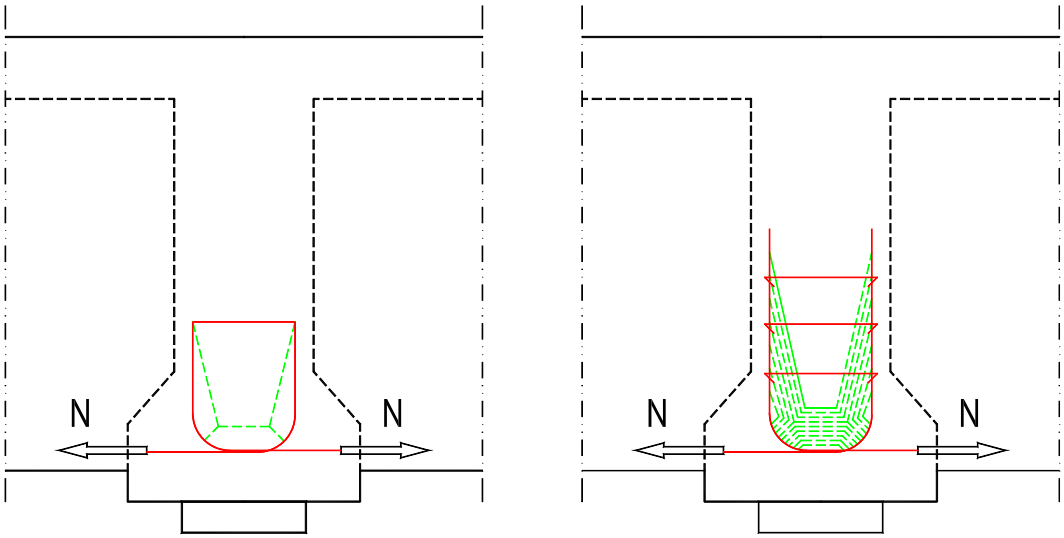


Figura 2-19 – Modelo de escoras e tirantes na zona de apoio central (escoras representadas a traço interrompido).



a) b)

Figura 2-20 –Emenda da armadura inferior na zona de apoio: a) modelo de escoras e tirantes (escoras representadas a traço interrompido); b) fluxo de forças de compressão e armadura.

É importante notar que a conclusão dos autores do relatório 322 do NCHRP (Osterle *et al.* 1989), que afirmaram não ser necessária a colocação de qualquer armadura inferior na zona de ligação, não pode ser aplicada a soluções de continuidade com um único aparelho de apoio sob a carlinga. Numa viga contínua, cujo diagrama de momentos flectores seja aquele que se representa na Figura 2-18 (o diagrama de momentos flectores representado não inclui o efeito isostático do pré-esforço), o fluxo de forças na zona do apoio central pode ser representado pelo modelo de escoras e tirantes exposto na figura Figura 2-19, que se baseia na modelação do comportamento da viga contínua como se esta fosse constituída por múltiplas treliças sobrepostas, com banzos comuns. Tal como se pode ver nessa figura, a armadura inferior que sai do topo da viga pré-fabricada deve ter uma capacidade suficiente para resistir ao esforço de tracção $N = M_{ap}/z + V \cdot \cot(\theta)$, sendo θ o ângulo que a direcção da escora comprimida (resultante) dirigida para o apoio faz com a horizontal. Pode ser, no entanto, efectuada uma redistribuição de momentos flectores se a ductilidade disponível é suficiente.

Tão importante como a quantidade de armadura adoptada, é o detalhe utilizado para a sua emenda. A solução representada na Figura 2-12 a), que é frequentemente utilizada em virtude da sua simplicidade, não constitui uma solução de emenda de armaduras prevista regulamentarmente. O seu funcionamento tem por isso que ser justificado por outros meios. Em trabalhos experimentais, referidos atrás, foi concluído que o diâmetro de dobragem das armaduras e a distância entre o topo das vigas pré-fabricadas constituem aspectos determinantes para o bom funcionamento da ligação. Na Figura 2-20 apresenta-se um modelo de escoras e tirantes que permite a verificação de segurança da emenda de armaduras. A disposição de varões no interior do cotovelo, com direcção perpendicular ao plano de ligação, é benéfica, tal como foi concluído pelos autores dos trabalhos experimentais referidos atrás.

2.5.1.4 Funcionamento da ligação sob actuação de momentos flectores negativos

Os autores do relatório 322 do NCHRP (Osterle *et al.* 1989) referem que a verificação do comportamento em serviço da zona de ligação, sob actuação de momentos negativos, deve incluir: o controlo da tensão normal nas armaduras traccionadas; o controlo da abertura de fendas na laje; o controlo das tensões de compressão na face inferior da viga (considerando também as tensões devidas ao pré-esforço). No entanto, tal como concluíram Clark e Sugie (1997), pouca importância é dada, na literatura americana, aos problemas de fendilhação nas fibras superiores junto dos apoios de continuidade. Vários autores americanos têm apresentado e recomendado soluções que maximizam o valor do momento flector negativo, consistindo essencialmente no estabelecimento da continuidade entre vigas antes da betonagem da laje. Essas soluções podem ser encontradas nas referências Tadros *et al.* (1993),

Saleh *et al.* (1995) e Ma *et al.* (1998). É também referido por vários autores o interesse em estabelecer a continuidade quando as vigas pré-fabricadas têm uma idade avançada, o que origina um maior momento flector negativo (devido ao efeito da retracção diferencial entre a viga e a laje) e uma menor evolução do momento flector positivo provocado pela deformação por fluência da viga pré-fabricada devida ao efeito do pré-esforço. O interesse em maximizar o valor do momento flector negativo nos apoios, deve-se essencialmente a razões de carácter económico, por conduzir a uma diminuição do momento flector positivo nas secções do vão e, consequentemente, a uma economia de pré-esforço nessa zona, podendo mesmo ser conseguido um aumento da capacidade das vigas pré-fabricadas em termos de vão máximo que estas conseguem vencer.

Não é de estranhar que no inquérito realizado no âmbito do projecto 12-53 do NCHRP (Hastak *et al.* 2003), tenham sido registados problemas de fendilhação na laje, nas secções sobre os apoios de continuidade, em algumas situações em que a continuidade foi estabelecida antes da betonagem da laje. Como forma de minimizar os problemas de durabilidade que podem advir da fendilhação da laje, Saleh *et al.* (1995) utilizaram (num tabuleiro com vãos de 29 m realizado com vigas pré-fabricadas com 1.1 m de altura) armaduras protegidas contra a corrosão (com *epoxi*), nas zonas sujeitas a momento flector negativo.

Soluções construtivas que conduzam a um momento flector negativo de valor reduzido, na zona de apoio (betonagem simultânea da laje e da carlinga, ou betonagem da laje antes da carlinga), serão mais favoráveis em termos de durabilidade do betão e armaduras da laje.

De entre os trabalhos experimentais realizados para estudo do comportamento deste tipo de ligações, destacam-se aqueles que foram realizados no PCA por Kaar *et al.* (1960) e Mattock e Kaar (1960), que ensaiaram modelos sob actuação de cargas com carácter estático e de cargas ciclicamente repetidas. Este último grupo de ensaios permitiu aos autores concluir que uma ligação dimensionada, em ELU, para ter um momento flector resistente igual a 2.5 vezes o valor do momento flector de serviço, M_s, resiste em segurança a um número infinito de carregamentos com um momento flector a variar entre $0.28 \cdot M_s$ e M_s.

2.5.2 Continuidade com armaduras de pré-esforço sobre os apoios, com traçado recto

Para impedir o aparecimento de fendilhação na fibra superior da laje, na zona dos apoios, pode ser aplicado pré-esforço de continuidade à laje (Figura 2-21). Comparativamente com a solução apresentada no sub-capítulo anterior, com esta forma de ligação podem ser vencidos vãos maiores.

O pré-esforço de continuidade pode ser materializado por cabos de pós-tensão (aderente ou não aderente) ou por barras de pré-esforço.

O sistema de pré-esforço a utilizar deve ser escolhido atendendo a que o espaço para alojamento das ancoragens nas extremidades dos cabos é reduzido, em virtude da pequena espessura que a laje usualmente tem. As perdas de pré-esforço, durante o processo de esticamento, serão tanto maiores quanto menor for o comprimento dos cabos.

A implementação desta solução envolve as seguintes fases construtivas:

- montagem das vigas pré-fabricadas;
- montagem das pré-lajes e das armaduras do tabuleiro;
- betonagem da carlinga e de um troço de laje (com o comprimento das armaduras de pré-esforço) sobre os apoios;
- aplicação do pré-esforço de continuidade;
- betonagem da restante laje.

Construtivamente esta é, portanto, uma solução mais complexa do que a apresentada no sub-capítulo 2.5.1.

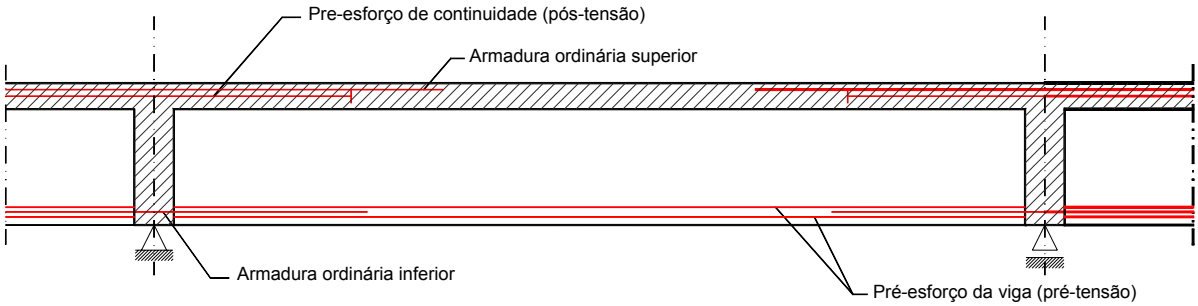


Figura 2-21 – Solução de continuidade utilizando cabos rectos de pré-esforço sobre os apoios.

A zona de ligação entre as vigas longitudinais e a carlinga pode ter qualquer das formas apresentadas no sub-capítulo 2.5.1.2. A armadura inferior pode ser emendada na zona de ligação através das soluções apresentadas no sub-capítulo 2.5.1.3.

Esta solução de continuidade tem grande utilização em tabuleiros construídos com vigas em "U", que formam, em conjunto com a laje betonada *in situ*, um tabuleiro em caixão (Bordadagua e Ferreira 1999; Minderico 1998). Essa grande utilização deve-se ao facto de as

secções em "U" terem usualmente almas de reduzida espessura, que não podem acomodar cabos de continuidade, sendo assim necessário alojar esses cabos na laje.

2.5.3 Continuidade com pré-esforço em todo o comprimento do tabuleiro

O pré-esforço de continuidade é materializado por um cabo de pós-tensão com traçado curvilíneo (geralmente parabólico). Podem distinguir-se quatro alternativas com diferentes faseamentos construtivos, tal como se representa na Figura 2-22.

A alternativa a) da Figura 2-22 consiste na aplicação do pré-esforço de continuidade (cabos C2) após a betonagem da carlinga e da laje. Assim, o pré-esforço aplicado em fábrica (cabos C1) terá que ser suficiente para suportar o peso próprio da viga pré-fabricada e da laje.

Na solução apresentada na Figura 2-22 b), o pré-esforço de continuidade (cabos C2) é aplicado após a betonagem das carlingas, mas antes da betonagem da laje, não sendo portanto necessário que o pré-esforço de fábrica seja suficiente para suportar o peso próprio da viga e da laje. Com esta solução, a acção correspondente ao peso próprio da laje é aplicada sobre uma viga contínua. Consequentemente, o diagrama de momentos flectores devido a essa carga não sofre evolução por fluência. No entanto, com esta solução, o pré-esforço de continuidade não comprime inicialmente a laje. A laje ficará portanto submetida a tensões de tracção na zona do apoio quando actuarem sobre o tabuleiro as restantes cargas permanentes e as sobrecargas. O pré-esforço só tem efeito sobre a laje após a evolução de tensões por fluência, a longo prazo.

Como alternativa, para que o pré-esforço de continuidade comprima a laje, na zona sobre os apoios, e contribua para suportar o peso próprio da laje (pelo menos parcialmente), pode ser utilizada a solução apresentada na Figura 2-22 c) (Sousa *et al.* 2002). Esta solução consiste em betonar um segmento de laje, juntamente com a carlinga, antes da aplicação do pré-esforço de continuidade.

Em tabuleiros com grande vão, em que seja adoptado mais do que um cabo de pré-esforço de continuidade para cada viga, poderá ser utilizada a solução representada na Figura 2-22 d) (ver Martins (2000)) e que consiste em introduzir o pré-esforço de uma forma ainda mais faseada:

- o grupo de cabos C1 é tensionado em fábrica;
- o grupo de cabos de continuidade C2 é tensionado após betonagem da carlinga;

- o grupo de cabos de continuidade C3 é tensionado após betonagem da laje.

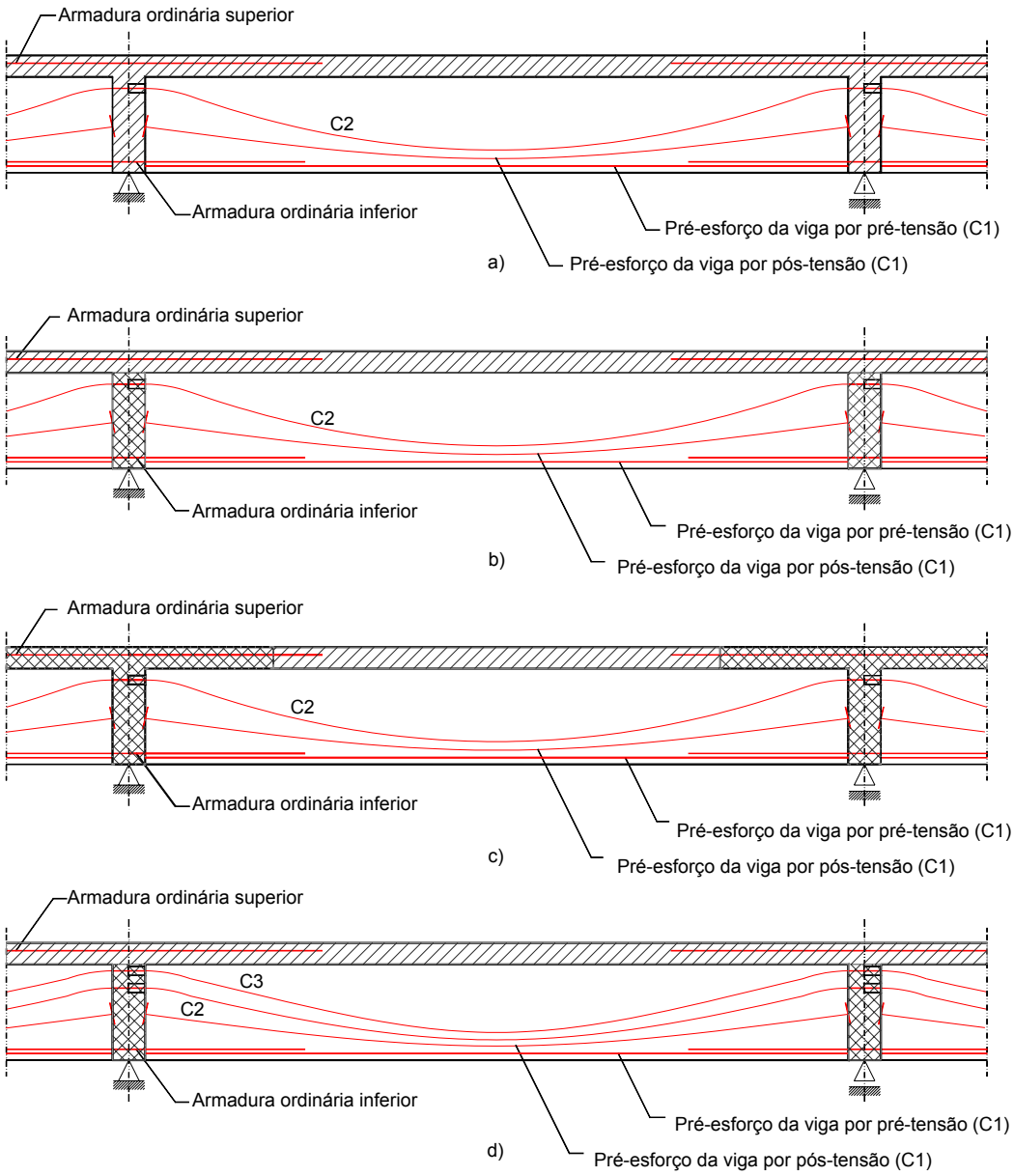


Figura 2-22 – Diferentes alternativas para o faseamento construtivo de tabuleiros com pré-esforço de continuidade em todo o comprimento das vigas.

Quando o número de vãos é grande, o tensionamento dos cabos de pré-esforço de continuidade deverá ser efectuado por segmentos, por exemplo de dois em dois tramos, sendo os cabos ligados por acopladores. A forma geométrica dos topos das vigas deverá ser definida por forma a garantir espaço suficiente para instalação das ancoragens e para permitir a operação de esticamento dos cabos de continuidade depois de estarem montadas todas as vigas do tabuleiro (Figura 2-23).

Se o pré-esforço de fábrica é constituído por cabos de pós-tensão, o topo das vigas deverá ser perpendicular à direcção dos cabos nessa secção, por forma a facilitar a montagem das placas de ancoragem. A existência de um dente na parte inferior da viga, tal como se representa na Figura 2-23, melhora as condições de transferência do esforço transverso através da junta de betonagem entre o betão pré-fabricado e o betão *in situ*.

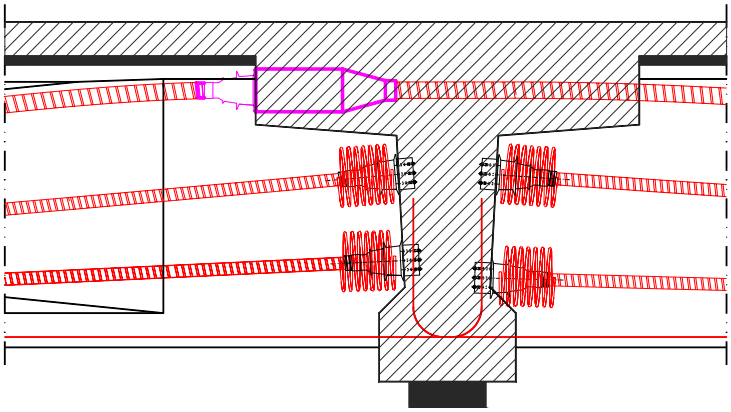


Figura 2-23 – Forma dos topos das vigas, das ancoragens e dos acopladores dos cabos de pós-tensão.

A emenda das armaduras inferiores na zona de apoio pode ser realizada da forma apresentada no sub-capítulo 2.5.1.3.

A alma das vigas deverá ter uma espessura suficiente para protecção dos cabos de pós-tensão e, nas extremidades das vigas, a espessura deverá ser aumentada para permitir a ancoragem desses cabos.

2.6 Tabuleiros contínuos com ligação entre vigas realizada fora da zona dos apoios

Condicionamentos vários, tais como o atravessamento de rios ou o atravessamento a grande altura de zonas com más condições de fundação, podem determinar a realização de pontes com vãos tais que não seja viável a sua construção com vigas pré-fabricadas de comprimento igual ao do vão. De facto, vigas com comprimento superior a um determinado valor limite (geralmente cerca de 30 a 40 m) são demasiado longas ou demasiado pesadas, não sendo viável o seu transporte e a sua montagem. Nessas situações, a utilização de vigas pré-fabricadas com comprimento inferior ao do vão, emendadas após montagem, poderá ser uma solução alternativa a outras técnicas construtivas, como por exemplo a técnica da construção por avanços sucessivos.

No relatório do PCI (Abdel-Karim e Tadros 1992) são apresentados diversos tipos de ligações de continuidade que podem ser adoptados para a construção deste tipo de pontes, assim como métodos construtivos que podem ser utilizados para evitar a existência de escoramentos construídos a partir do solo em todas as secções de ligação. São também apresentados exemplos de pontes construídas com esta técnica, das quais se destaca uma ponte (Stewart Park Bridge) com um vão máximo de 79,3 m. Na Figura 2-24 apresenta-se outra realização, com um vão máximo de 61 m.

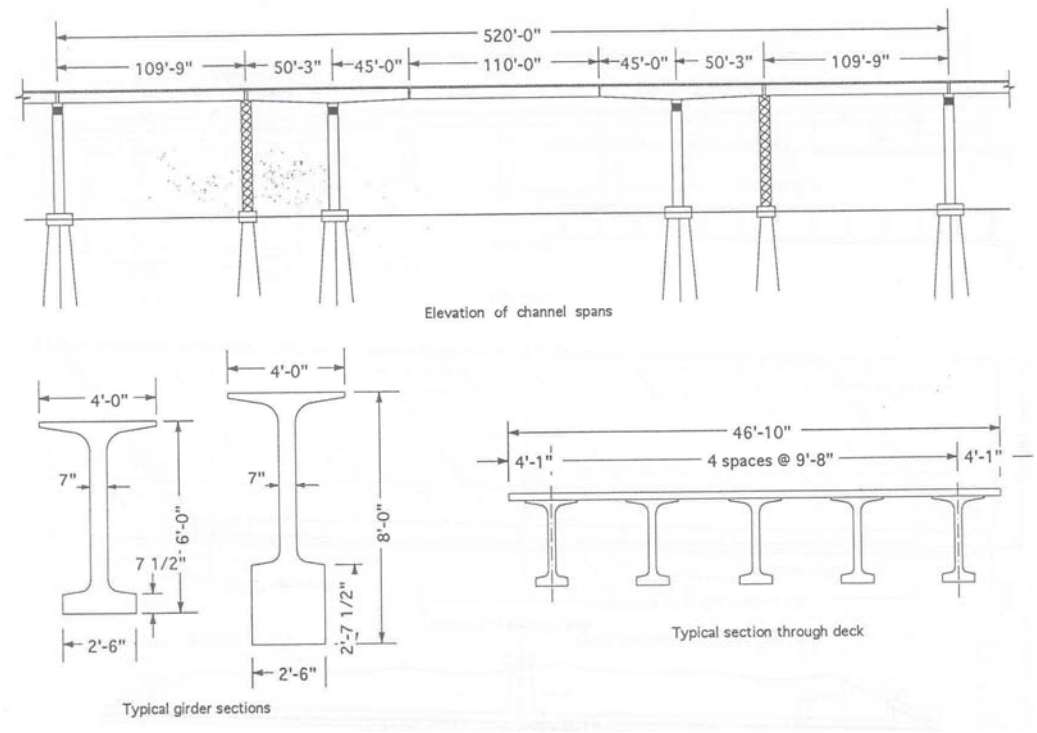


Figura 2-24 – Choctawhatchee Bay Bridge (Abdel-Karim e Tadros 1992).

Outros exemplos de realizações de pontes, recorrendo a esta técnica, podem ser encontrados nas seguintes referências:

- Mumber *et al.* (2003) descrevem uma ponte com três vãos contínuos (com ligações atravessadas por pré-esforço de continuidade), tendo o vão central 68 m e os laterais 56 m, construída com recurso a vigas "I" com altura constante de 2.29 m, tendo a peça pré-fabricada com maior comprimento um desenvolvimento de 44 m;
- Sesar *et al.* (2004) descrevem duas pontes com vãos correntes de 35 m, tendo o vão máximo, condicionado pelo atravessamento de um rio, um comprimento de 70 m (constituído por um segmento central com comprimento de 35 m, construído com vigas "I" de altura constante, e por segmentos com altura variável sobre os pilares das margens do rio).

2.7 Pontes Integrais

Uma ponte integral é uma ponte construída sem qualquer junta de dilatação, nem entre vãos consecutivos nem entre os vãos extremos e os encontros (Figura 2-25). Este tipo de pontes resulta do interesse em eliminar completamente as juntas de dilatação, como forma de melhorar o desempenho da estrutura em termos de durabilidade e em termos de conforto para a circulação rodoviária.

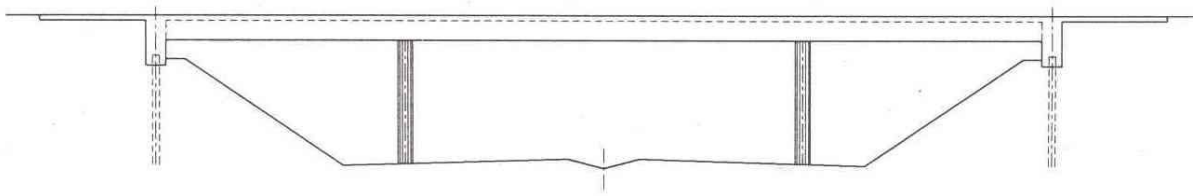


Figura 2-25 – Corte longitudinal de uma ponte integral (DGC 2000).

A definição dos encontros deste tipo de pontes deve ter em consideração aspectos particulares, que resultam do facto de os encontros terem os mesmos movimentos que as extremidades do tabuleiro, movimentos esses que são devidos às deformações diferidas do betão, às variações térmicas e às acções horizontais induzidas pelos veículos, vento ou sismos. A ligação de continuidade entre o tabuleiro e os encontros deve ser tratada de forma análoga (com as necessárias adaptações) ao tratamento feito neste trabalho para a ligação entre vãos consecutivos.

Em alguns países são recomendados valores máximos para o comprimento e o viés das pontes integrais. Nos Estados Unidos, existem pontes integrais com comprimento superior a 200 m, construídas com sucesso (Calavera Ruiz e Hernández 2002).

Este tipo de pontes não faz parte do âmbito trabalho. Nas referências Hambly e Nicholson (1991), DGC (2000), England *et al.* (2000) e PCI (2001), pode encontrar-se o desenvolvimento deste tipo de soluções.

2.8 Considerações finais

Ao longo deste capítulo foram apresentadas várias soluções para a construção de tabuleiros contínuos com recurso a vigas pré-fabricadas, tendo sido prestada especial atenção aos

tabuleiros construídos com vigas "I", com continuidade em betão armado estabelecida na secção de apoio. As considerações seguintes referem-se a este tipo de obras.

Relativamente a aspectos como o faseamento construtivo e a quantificação da armadura de continuidade para momentos positivos, verifica-se que existem abordagens divergentes seguidas por diferentes autores.

A função da armadura de continuidade para momentos positivos depende da geometria da zona de ligação (nomeadamente, da existência ou não de apoio directo sob cada uma das vigas pré-fabricadas), aspecto este que nem sempre foi realçado em alguns estudos. Por exemplo, a conclusão de estudos realizados por Osterle *et al.* (1989), onde se afirma que não há vantagem em realizar a ligação para momentos positivos, não pode ser aplicada quando a zona de ligação toma a forma representada na Figura 2-11 a), b), c) e g), sob pena de comprometer a segurança estrutural, não apenas durante a fase de serviço, mas também em ELU.

Autores de estudos sobre este tipo de obras referem que a avaliação do seu comportamento estrutural (nomeadamente em fase de serviço) deve atender à incerteza associada à quantificação da fluência e da retracção. Para atender a essa incerteza, alguns autores têm realizado análises do tipo paramétrico, isto é, fazendo parâmetros relevantes (tais como o coeficiente de fluência e a extensão de retracção) tomar mais do que um valor, obtendo um conjunto de valores possíveis para a resposta estrutural. Este tipo de análises não permite, no entanto, estimar a probabilidade de ocorrência de cada um desses valores. Para a melhor caracterização do comportamento em serviço deste tipo de estruturas, parece ter interesse a realização de análises em seja considerada a incerteza estatística associada à previsão das deformações por fluência e retracção do betão, para obtenção de uma estimativa da distribuição estatística da resposta estrutural. Deverá ser modelado de forma suficientemente rigorosa o comportamento do betão traccionado, incluindo o efeito da retenção de tensões de tracção, após a fendilhação, pelo betão entre fendas.

3 Modelos de comportamento do betão

3.1 Introdução

O betão é um material heterogéneo, constituído pela associação de inertes e pasta de cimento, incorporando assim elementos com diferentes propriedades. A abordagem realizada neste trabalho é aquela que é utilizada em aplicações estruturais correntes e que consiste na definição das relações constitutivas a um nível macroscópico, considerando o betão como sendo um material homogéneo e contínuo. O seu comportamento apresenta não-linearidades assinaláveis devidas a diferentes mecanismos como a fendilhação em tracção, a plastificação em compressão, a fluência, a retracção e a interacção entre a armadura e o betão. Os modelos constitutivos são uma representação simplificada do comportamento real do material, obtidos geralmente a partir de ensaios uniaxiais ou multiaxiais. Serão apresentados modelos constitutivos que traduzem o comportamento instantâneo do betão (sob actuação de carregamentos de carácter quase-estático, monotónico e de curta duração) e o seu comportamento quando é sujeito a carregamentos de longa duração.

Neste capítulo aborda-se inicialmente o comportamento deformacional do betão para níveis de carregamento afastados da rotura, sendo posteriormente tratado o comportamento em situações de carregamento até à rotura. Descrevem-se aspectos relativos ao comportamento uniaxial do betão, pois serão esses os mais determinantes para o presente estudo: nesta dissertação trata-se o comportamento em serviço de vigas (modeladas numericamente com elementos de viga), de altura reduzida, sendo consideradas como mais relevantes as não-linearidades devidas à fluência, à retracção e à fendilhação do betão (motivada essencialmente pela actuação de esforços normais e momentos flectores). Importa também, neste estudo, a

quantificação da abertura de fendas, para a caracterização do comportamento em serviço das estruturas em análise.

3.2 Comportamento deformacional do betão submetido a níveis moderados de tensão

3.2.1 Considerações iniciais

Para níveis de tensão de compressão, com carácter de permanência, com valor inferior a 40 por cento da sua resistência média à compressão, o betão pode ser considerado como um material com comportamento visco-elástico linear com envelhecimento, em que as extensões são proporcionais às tensões aplicadas, dependendo no entanto da idade do betão no momento em que a carga é aplicada.

O comportamento do betão traccionado por acções de longa duração é menos conhecido. Os estudos que já foram realizados nem sempre têm conduzido a conclusões concordantes. Uma das razões para esse facto reside na dificuldade em medir a extensão de tracção com a necessária precisão, pois a retracção é sempre largamente superior ao valor da deformação de tracção por fluência do betão (valor este que é da ordem da dispersão associada à retracção) (Coutinho e Gonçalves 1994). Geralmente é admitido que o comportamento do betão traccionado pode ser traduzido por um modelo visco-elástico linear com envelhecimento, igual ao usado para o betão comprimido, até se dar a fendilhação.

A extensão total num instante de tempo t, $\varepsilon_c(t)$, de um elemento de betão carregado uniaxialmente num instante de tempo t_0 com uma tensão constante $\sigma_c(t_0)$ pode ser expressa pela equação [3-1] (ver Figura 3-1):

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \qquad [3\text{-}1]$$

em que:

$\varepsilon_{ci}(t_0)$ é a deformação instantânea;
$\varepsilon_{cc}(t)$ é a deformação de fluência;
$\varepsilon_{cs}(t)$ é a deformação de retracção;
$\varepsilon_{cT}(t)$ é a deformação térmica, dada pelo produto da variação de temperatura pelo coeficiente de dilatação térmica.

As componentes de deformação $\varepsilon_{ci}(t_0)$ e $\varepsilon_{cc}(t)$ dependem do estado de tensão, sendo por isso também designadas por componentes de deformação mecânica. Por sua vez, $\varepsilon_{cs}(t)$ e $\varepsilon_{cT}(t)$ não dependem do estado de tensão, sendo também conhecidas por componentes de deformação não mecânica.

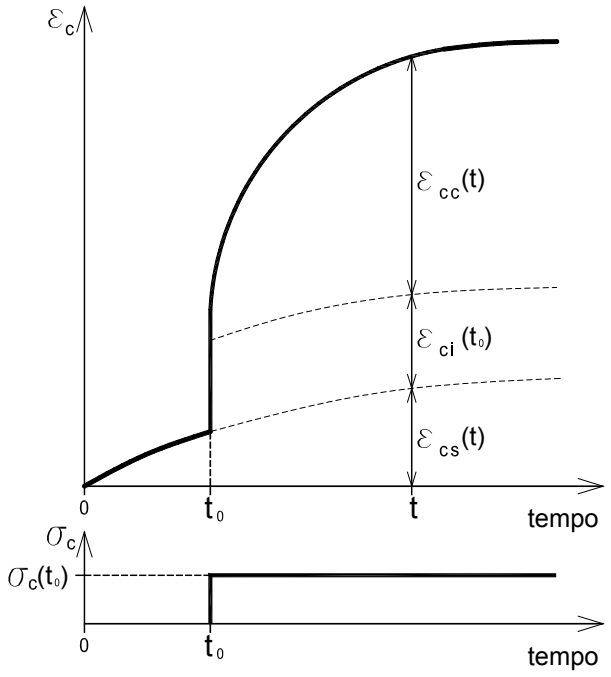


Figura 3-1 – Componentes $\varepsilon_{ci}(t_0)$, $\varepsilon_{cc}(t)$ e $\varepsilon_{cs}(t)$ da deformação total de um elemento de betão sujeito a tensão constante.

As componentes de deformação por fluência e por retracção são também designadas por deformações diferidas, por se processarem lentamente ao longo do tempo. Note-se que a distinção entre fluência e retracção é convencional porque, na realidade, estes fenómenos não são independentes. No entanto, essa distinção facilita a análise e, para a maioria das aplicações práticas, conduz a uma aproximação suficiente (Henriques (1998a) citando Neville).

A distinção entre deformação instantânea e deformação de fluência é também convencional. Numa análise estrutural interessa conhecer a deformação mecânica total num determinado instante de tempo, valor esse que é calculado a partir de uma função de fluência. A extensão inicial e a extensão de fluência são definidas de forma consistente, para que a sua soma resulte na correcta extensão mecânica.

3.2.2 Deformação instantânea e módulo de elasticidade do betão

A deformação instantânea produz-se simultaneamente com a aplicação da tensão e depende do nível de tensão, da velocidade com que esta é aplicada e da idade do betão. Dependendo do nível de tensão, a deformação instantânea pode ser completamente reversível (elástica), ou incluir uma parcela irreversível (plástica) se o nível de tensão é elevado. Se a tensão de compressão é inferior a 40 por cento da resistência à compressão do betão, a parte plástica da deformação instantânea é desprezável, sendo a deformação instantânea inteiramente reversível.

Segundo o Model Code 1990 (MC90) (CEB 1993) e o FIB (1999), a deformação inicial, $\varepsilon_{ci}(t_0)$, para níveis moderados de tensão, é calculada com base no módulo de elasticidade tangente na origem do diagrama tensão-deformação do betão, $E_{ci}(t)$, dado por:

$$E_{ci}(t) = \sqrt{\beta_{cc}(t)} \cdot E_{ci} \qquad [3\text{-}2]$$

em que E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente na origem, para uma idade de carregamento igual a 28 dias, dado por:

$$E_{ci} = 2.15 \cdot 10^4 (f_{cm}/10)^{1/3} \quad (\text{MPa}) \qquad [3\text{-}3]$$

onde f_{cm} representa o valor médio da resistência à compressão (MPa).

O coeficiente $\beta_{cc}(t)$ define a razão entre a resistência média à compressão do betão numa idade t e a sua resistência média à compressão aos 28 dias de idade, f_{cm}, sendo dado por:

$$\beta_{cc}(t) = \exp\left[s\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)\right] \qquad [3\text{-}4]$$

em que:

- t é a idade do betão, em dias, ajustada para ter em conta o efeito da temperatura durante o período de cura;
- s é um coeficiente que depende do tipo de cimento: $s = 0.20$ para cimento RS, 0.25 para cimento NR e 0.38 para cimento SL (a classificação dos cimentos é efectuada no MC90 (CEB 1993)).

A equação [3-3] é válida para betões de peso normal fabricados com agregados quartzíticos. O MC90 (CEB 1993) indica as correcções a efectuar quando os inertes utilizados são de outra natureza.

Tal como foi referido, o módulo de elasticidade depende também da velocidade de aplicação da carga, aumentando com o aumento da velocidade. Nas situações práticas essa variação é pequena sendo normalmente desprezada (Favre *et al.* 1997).

3.2.3 Fluência do betão

A deformação de fluência é definida como sendo a diferença entre o aumento de deformação ao longo do tempo de um elemento de betão sujeito a uma tensão exterior mantida constante e a deformação não mecânica de um elemento de betão semelhante (FIB 1999; Hilsdorf 1995).

É geralmente aceite que a fluência do betão é devida, quase em exclusivo, à fluência da pasta de cimento hidratado, uma vez que os agregados de densidade normal apresentam fluência desprezável. A fluência da pasta de cimento hidratado é condicionada, principalmente, pela água contida na pasta. Para além dos movimentos de água (dependentes do estado de tensão) no sistema poroso da pasta, ocorrem processos de deslizamento e compactação. A alteração do conteúdo de humidade na pasta provocado, por exemplo, pela secagem, acelera este processo (CEB 1993).

Vários modelos de previsão das extensões de fluência e das extensões de retracção, tais como os incluídos no MC90 (CEB 1993) e no EC2 (CEN 2002), são expressos em função da resistência à compressão do betão. No entanto, a fluência e a retracção não dependem da resistência à compressão mas sim de parâmetros relacionados com a micro-estrutura e a composição do betão, tais como a relação água/cimento, o grau de hidratação e as propriedades dos agregados, entre outras. A resistência à compressão do betão funciona como uma medida indirecta das propriedades micro-estruturais do betão, de utilização prática pois, muitas vezes, é conhecida só a classe de resistência na altura em que estão a ser realizados os cálculos.

As deformações de fluência em compressão e em tracção são tratadas de forma idêntica, tal como foi referido no sub-capítulo 3.2.1.

3.2.3.1 Tipos de fluência

As deformações devidas à fluência do betão podem ser decompostas em duas componentes:

- fluência básica, que designa a componente de fluência que ocorre no betão carregado, em ambiente selado (sem trocas de humidade com o exterior);
- fluência de secagem, que designa o acréscimo de fluência resultante das trocas de humidade com o exterior.

Nos modelos correntes não é feita, geralmente, a distinção entre estas duas grandezas, sendo considerado somente o seu valor total.

3.2.3.2 Coeficiente de fluência e função de fluência

A extensão de fluência num determinado instante, t, de um betão carregado com uma idade t_0, $\varepsilon_{cc}(t)$, é geralmente expressa em função do coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$, do modo definido na equação [3-5]:

$$\varepsilon_{cc}(t) = \varepsilon_{ci} \cdot \phi(t, t_0) \qquad [3\text{-}5]$$

onde ε_{ci} representa a extensão inicial ou elástica.

A extensão ε_{ci} pode ser a extensão elástica no instante de carregamento ou a extensão elástica de um betão com 28 dias de idade, dependendo do modelo de fluência que estiver a ser usado. Nos modelos de fluência do MC90 (CEB 1993) e do EC2 (CEN 2002), ε_{ci} corresponde à extensão elástica de um betão com 28 dias de idade.

A extensão mecânica total, $\varepsilon_{c\sigma}(t)$, num determinado instante t, de um betão solicitado por uma tensão constante $\sigma_c(t_0)$ actuando desde o instante t_0, é dada pela equação [3-6]:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) = \sigma_c(t_0)\left[\frac{1}{E_{ci}(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{ci}}\right] = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \qquad [3\text{-}6]$$

onde $J(t, t_0)$ representa a função de fluência, expressando a deformação do betão de idade t produzida por uma tensão unitária constante aplicada no instante t_0.

3.2.3.3 Aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos

Nas equações [3-5] e [3-6], a extensão de fluência relaciona-se linearmente com a tensão aplicada. Esta relação linear é válida se as tensões com carácter de permanência forem inferiores a 40 por cento da resistência média do betão à compressão na data de carregamento, isto é, $\sigma_c(t_0) < 0.4 f_{cm}(t_0)$, limite este que é usualmente satisfeito nas estruturas correntes de betão. Tal como foi referido anteriormente, para estes níveis de tensão o betão pode ser considerado como um material com comportamento visco-elástico linear com envelhecimento. Sendo válida a hipótese de linearidade, o princípio da sobreposição dos efeitos pode ser aplicado para calcular a resposta em termos de deformações de uma peça de betão sujeita a tensões variáveis no tempo. De acordo com este princípio, a deformação provocada pela história de tensões $\sigma_c(t)$ pode ser obtida decompondo a história de tensões em pequenos incrementos $\Delta\sigma_c(\tau_i)$, aplicados nos instantes τ_i, e somando as deformações correspondentes, resultando a equação [3-7]:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \sum_{i=1}^{n} J(t, \tau_i) \cdot \Delta\sigma_c(\tau_i) \qquad [3\text{-}7]$$

Se $\sigma_c(t)$ for uma função contínua (Figura 3-2), pode substituir-se $\Delta\sigma_c(\tau_i)$ por $\frac{\partial\sigma_c(\tau)}{\partial\tau} \cdot \partial\tau$ na equação [3-7], obtendo-se a equação [3-8] que se designa habitualmente por equação integral de Rieman.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^{t} J(t, \tau) \cdot \frac{\partial\sigma_c(\tau)}{\partial\tau} \partial\tau \qquad [3\text{-}8]$$

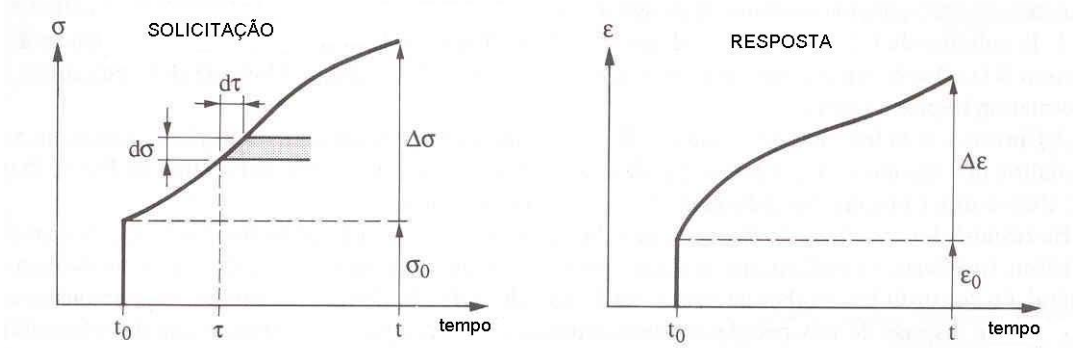


Figura 3-2 – Resposta ε a uma solicitação variável σ (adaptado de Favre *et al.* (1997)).

O princípio da sobreposição dos efeitos deixa de ser estritamente válido nos casos em que num instante t_1, superior a t_0, é aplicada uma tensão de valor significativo. Se houver uma

descarga, o princípio da sobreposição dos efeitos sobrestima a parte reversível da fluência (Figura 3-3). No entanto, este princípio dá uma boa aproximação das deformações devidas à fluência causadas por uma história de tensão variável no tempo (Henriques (1998a) citando Bazant).

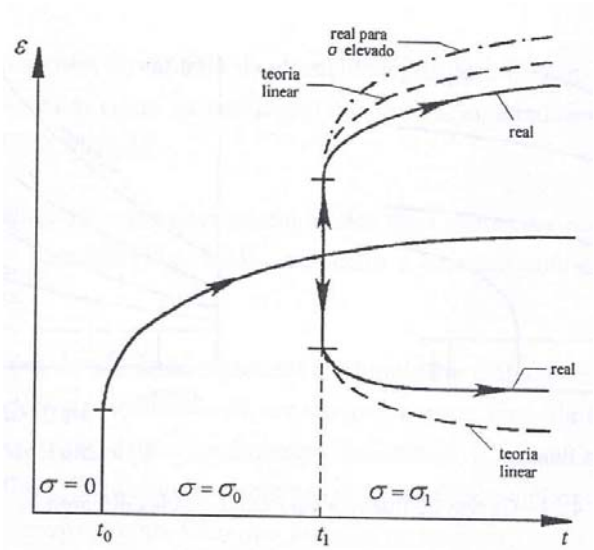


Figura 3-3 – Desvios entre a teoria linear e os valores experimentais para tensões de serviço (Henriques (1978) citando Bazant).

3.2.3.4 Modelos de fluência

Os modelos de previsão da fluência mais correntemente utilizados são os modelos de Bazant e Panula (1978), do ACI Committee 209 (1982), do MC90 (CEB 1993) e do EC2 (CEN 1991; CEN 2002).

O modelo de fluência do EC2 (CEN 2002) foi publicado no Boletim nº 1 do FIB (1999). Trata-se de um modelo muito semelhante ao que é apresentado no MC90 (CEB 1993), tendo modificações para melhor retratar o comportamento dos betões de elevado desempenho. Foi este o modelo de fluência utilizado nas aplicações numéricas realizadas neste trabalho e será designado à frente por modelo de fluência do EC2 (CEN 2002). Este modelo não deve ser confundido com o modelo incluído em versões mais antigas do EC2 (CEN 1991).

Segundo o EC2 (CEN 2002), o coeficiente de fluência, $\phi(t, t_0)$, de um betão com a idade t, submetido a uma tensão constante desde a idade t_0, é dado pela equação [3-9],

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \qquad [3\text{-}9]$$

sendo ϕ_0 o coeficiente nominal de fluência, dado pela equação [3-10],

$$\phi_0 = \phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \qquad [3\text{-}10]$$

e $\beta_c(t, t_0)$ um coeficiente que exprime o desenvolvimento da fluência com o tempo, depois do carregamento, dado pela equação [3-11],

$$\beta_c(t, t_0) = \left(\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right)^{0.3} \qquad [3\text{-}11]$$

em que:

ϕ_{RH} é o parâmetro que representa a influência da humidade relativa e da espessura equivalente, sobre ϕ_0;

$\beta(f_{cm})$ é o parâmetro que representa a influência da resistência à compressão do betão;

$\beta(t_0)$ é o parâmetro que representa a influência da idade de carregamento;

β_H é o parâmetro que representa a influência da humidade relativa e da espessura equivalente, sobre $\beta_c(t, t_0)$.

Os valores dos vários parâmetros intervenientes nas equações [3-9] a [3-11] são definidos em FIB (1999) e no EC2 (CEN 2002).

A diferença entre os modelos do EC2 (CEN 2002) e do MC90 (CEB 1993) reside essencialmente no facto de o modelo do EC2 (CEN 2002) conter três parâmetros, α_1, α_2 e α_3, definidos em [3-12]. Os parâmetros α_1 e α_2 afectam o valor de ϕ_{RH}, enquanto que o parâmetro α_3 afecta o valor de β_H.

$$\alpha_1 = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.7} \qquad \alpha_2 = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.2} \qquad \alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.5} \qquad [3\text{-}12]$$

As expressões referidas atrás são válidas para uma temperatura média ambiental de 20ºC. No MC90 (CEB 1993) é quantificada a influência de temperaturas médias diferentes sobre a deformação por fluência do betão.

3.2.3.5 Variabilidade associada à fluência

A fluência, assim como a retracção, são das propriedades do betão cuja variabilidade é maior. A incerteza associada à quantificação da deformação por fluência é devida (Bazant e Liu 1985; Madsen e Bazant 1983; Tsubaki 1988):

- a factores externos e internos, próprios do processo de fluência;
- aos erros contidos nos modelos de previsão;
- aos erros associados à modelação estrutural.

Os factores externos, próprios do processo de fluência, consistem na incerteza associada à quantificação dos parâmetros ambientais e materiais influentes, tais como a humidade relativa, a temperatura ou a composição do betão. O factor interno consiste no carácter aleatório do mecanismo físico de fluência.

Os modelos teóricos de previsão das deformações por fluência têm também erros, isto é, não traduzem o fenómeno de forma perfeita. Isto resulta, por um lado, de erros cometidos na medição das extensões e na avaliação de outros parâmetros, em ensaios a partir dos quais foram definidas as curvas de fluência. Por outro lado, é escassa a quantidade de resultados experimentais existentes que forneçam valores da deformação por fluência após longos períodos de tempo, e de resultados experimentais realizados sobre betões com resistência à compressão superior a 50 MPa (Takács 2002). Além disso, as fórmulas de previsão da deformação por fluência são baseadas em resultados experimentais obtidos em provetes de dimensão reduzida, submetidos a um esforço de compressão axial. Contribui também para o aumento dos erros contidos nos modelos de previsão o facto de esses modelos quantificarem a deformação média de uma secção transversal quando, na realidade, essa deformação varia de ponto para ponto em virtude da variação da temperatura e do grau de hidratação existente ao longo de uma secção transversal.

A modelação estrutural é também responsável pela incerteza. Tal como foi referido anteriormente, a utilização de um modelo visco-elástico linear com envelhecimento para o cálculo dos efeitos da fluência e do princípio da sobreposição dos efeitos, constituem aproximações da realidade. A utilização de métodos simplificados para o cálculo dos efeitos da fluência, tais como o método do módulo efectivo ajustado (ver sub-capítulo 4.2.4) conduzem a incertezas adicionais.

Conclui-se assim que a deformação por fluência deve ser considerada como uma variável estatística, caracterizada pela estimativa do seu valor médio e por uma medida que

quantifique a dispersão em torno desse valor. Esta é a abordagem seguida pelo MC90 (CEB 1993), que prevê uma distribuição normal para o modelo de cálculo da função de fluência, com um coeficiente de variação de 20%. Este coeficiente de variação deverá reflectir, para além da incerteza resultante dos erros contidos no modelo de previsão da função de fluência, a incerteza interna (associada ao carácter aleatório do mecanismo físico de fluência). No entanto tal não é explicitado no MC90 (CEB 1993).

3.2.4 Retracção do betão

A deformação de retracção é definida como sendo a variação de volume ao longo do tempo de um elemento de betão, não sujeito a tensões exteriores, a uma temperatura constante (FIB 1999; Hilsdorf 1995).

3.2.4.1 Tipos de retracção

Distinguem-se quatro tipos de deformações de retracção:

- retracção plástica, que é devida à evaporação de água à superfície, quando o betão está ainda no seu estado plástico (antes da presa);
- retracção autógena, também designada por retracção química ou retracção por auto-dissecação, que resulta da diminuição de volume durante a hidratação do cimento (o volume da pasta de cimento hidratado é inferior à soma do volume de água com o volume de cimento antes da reacção química), sendo independente das condições de humidade;
- retracção de secagem, que se produz por difusão da água para as faces expostas à secagem, na presença de um gradiente hídrico entre o betão e o meio-ambiente;
- retracção por carbonatação, que é causada pela reacção da pasta de cimento hidratado com o dióxido de carbono do ar na presença de humidade, que começa à superfície do betão e evolui para o interior à medida que avança a carbonatação do betão.

Favre *et al.* (1997) consideram ainda um quinto tipo de deformação por retracção, que designam por retracção térmica, e que não é mais do que a contracção do betão, após a sua presa, que ocorre com a dissipação das elevadas temperaturas geradas pela libertação do calor de hidratação.

A parcela de retracção que se dá antes da presa do betão não tem interesse e é desprezada no presente estudo porque se dá antes do betão ter propriedades mecânicas relevantes.

A retracção de secagem e a retracção por carbonatação processam-se essencialmente da superfície para o interior das peças, dando origem ao aparecimento de tensões internas auto-equilibradas (tracções à superfície e compressões no interior das peças). Note-se que as estimativas regulamentares (CEB 1993; CEN 2002) para o valor da deformação de retracção fornecem a extensão média na secção transversal de um elemento de betão simples.

A evolução da retracção térmica não é igual em todos os pontos de uma estrutura, pois a hidratação do cimento também não se desenvolve de modo uniforme. Geram-se assim tensões auto-equilibradas nos elementos estruturais. A sua quantificação só pode ser obtida com modelos que considerem as propriedades locais dos materiais, evolutivas ao longo do processo de hidratação do cimento, considerando o acoplamento entre o campo térmico decorrente da hidratação do cimento e o consequente campo de tensões (ver Azenha (2004)).

A retracção autógena, pelo contrário, desenvolve-se de forma sensivelmente uniforme ao longo da secção transversal dos elementos. A importância da retracção autógena é reduzida em betões de resistência normal mas é bastante significativa em betões de elevado desempenho, tal como se pode verificar na Figura 3-4.

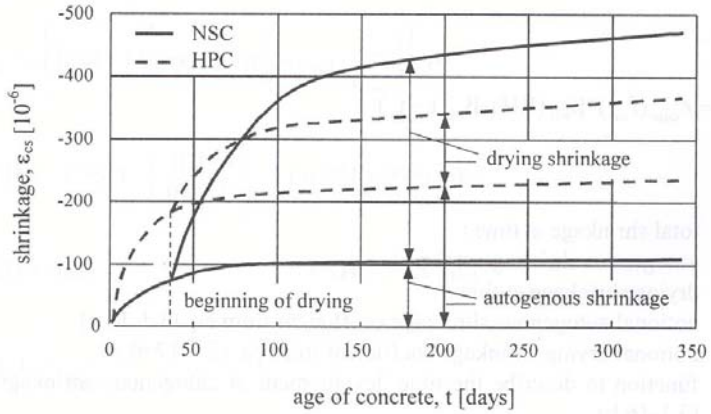


Figura 3-4 – Desenvolvimento ao longo do tempo da retracção autógena e da retracção de secagem em betões de resistência normal (NSC) e em betões de elevado desempenho (HPC) (FIB 1999).

3.2.4.2 Modelos de retracção

Os modelos mais correntemente utilizados para previsão da deformação por retracção são os modelos de Bazant e Panula (1978), do ACI Committee 209 (1982), do MC90 (CEB 1993) e do EC2 (CEN 1991; CEN 2002).

Nas aplicações numéricas efectuadas no presente trabalho, a quantificação da deformação resultante da retracção do betão é realizada através do modelo proposto pelo FIB (1999), modelo esse que foi adoptado pelo EC2 (CEN 2002). Estas expressões de previsão são válidas para betões com resistência à compressão até 120 MPa, com cura húmida a temperaturas normais com duração inferior a 14 dias, e expostos a uma humidade relativa ambiental, HR, entre 40 e 100 por cento.

Ao contrário de outros modelos anteriores, neste modelo a retracção total é subdividida nas parcelas relativas à retracção autógena e à retracção de secagem. A estimativa da retracção de secagem é muito semelhante à que é obtida através do modelo do MC90 (CEB 1993).

De acordo com o modelo do EC2 (CEN 2002), a extensão total de retracção é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \qquad [3\text{-}13]$$

com

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t) \qquad [3\text{-}14]$$

e

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(HR) \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \qquad [3\text{-}15]$$

em que:

$\varepsilon_{cs}(t)$	é a retracção total no instante de tempo t;
$\varepsilon_{cas}(t)$	é a retracção autógena no instante de tempo t;
$\varepsilon_{cds}(t, t_s)$	é a retracção de secagem no instante de tempo t;
$\varepsilon_{cas0}(f_{cm})$	é a deformação de retracção autógena de referência;
$\beta_{as}(t)$	é a função que descreve a evolução da retracção autógena com o tempo;
$\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$	é a deformação de retracção de secagem de referência;
$\beta_{RH}(HR)$	é o parâmetro que representa a influência da humidade relativa;
$\beta_{ds}(t - t_s)$	é a função que descreve a evolução da retracção de secagem com o tempo.

Os valores dos vários parâmetros intervenientes nas equações [3-14] e [3-15] estão definidos em FIB (1999) e no EC2 (CEN 2002).

O aumento de temperatura provoca um aumento de retracção. As expressões referidas atrás são válidas para uma temperatura média ambiental de 20ºC. O MC90 (CEB 1993) fornece

expressões para estimar o efeito da temperatura sobre a extensão de retracção de secagem, para temperaturas entre 0ºC e 80ºC.

3.2.4.3 Variabilidade associada à retracção

Os diversos factores responsáveis pela variabilidade da retracção do betão são os mesmos já enunciados para a fluência, pois os mecanismos associados a estes dois fenómenos têm natureza idêntica (Bazant e Liu 1985; Madsen e Bazant 1983).

A deformação por retracção deve então ser considerada como uma variável estatística. O MC90 (CEB 1993) prevê uma distribuição normal para o modelo de cálculo da deformação por retracção, com um coeficiente de variação de 35%, valor este que deverá reflectir, para além da incerteza resultante dos erros contidos no modelo de previsão da extensão de retracção, a incerteza interna (apesar de tal não ser explicitado no MC90 (CEB 1993)).

Os factores externos, nomeadamente as condições ambientais (humidade relativa e temperatura) têm também um peso significativo na variabilidade do fenómeno de retracção (Tsubaki 1988).

3.3 Comportamento do betão submetido a níveis elevados de tensão

As expressões apresentadas no sub-capítulo 3.2, que relacionam a história de tensões num ponto com a deformação mecânica nesse ponto, num determinado instante de tempo, têm a sua validade limitada a casos em que as tensões instaladas no ponto em análise tenham valores moderados, cujos limites foram identificados nesse sub-capítulo. Neste sub-capítulo, são apresentados os modelos constitutivos que caracterizam o comportamento das estruturas de betão carregadas até à rotura. Para além de ser feita uma breve descrição do comportamento do betão simples comprimido, são apresentados os modelos considerados neste trabalho para a simulação da fractura do betão simples e do betão armado. É dedicada especial atenção ao comportamento de tirantes de betão armado traccionados, aspecto este que é determinante para a caracterização da rigidez e da abertura de fendas das estruturas em análise.

Tal como foi referido anteriormente, será descrito essencialmente o comportamento dos materiais solicitados por acções uniaxiais, por ser mais determinante para o presente estudo.

Note-se que as expressões apresentadas no sub-capítulo 3.2 para quantificação das componentes de deformação não mecânica, resultantes da retracção do betão e da variação de temperatura, são também válidas em pontos submetidos a níveis elevados de tensão.

3.3.1 Betão simples comprimido

3.3.1.1 Carregamentos de curta duração

Quando se inicia o carregamento de um provete, já existem microfissuras na interface cimento-inerte devidas às tensões de tracção resultantes das variações de volume sofridas pela pasta de cimento durante a hidratação e ainda devidas à ocorrência da retracção de secagem. A um nível de tensão correspondente a aproximadamente 40 por cento da resistência à compressão, as microfissuras já existentes na interface cimento-inerte começam a desenvolver-se. Quando a tensão atinge, aproximadamente, 80 por cento da resistência à compressão, estas microfissuras propagam-se para a matriz cimentícia, predominantemente na direcção paralela à carga exterior (FIB 1999). Este mecanismo de propagação da microfissuração interna é, em grande medida, responsável pela não linearidade do diagrama tensão-extensão. Com o aumento da tensão aplicada, as fendas continuam a aumentar e as microfissuras juntam-se formando microfissuras maiores. A tensão de rotura à compressão é atingida quando numa região crítica o comprimento de uma ou várias microfissuras se torna crítico ocorrendo uma rotura instável. Se o carregamento é efectuado com imposição da deformação, a carga é reduzida após ter sido atingida a carga máxima, exibindo o diagrama tensão-extensão um tramo descendente (FIB 1999).

O ramo descendente da curva tensões-extensões não traduz com rigor o comportamento real do material, já que os resultados obtidos vêm substancialmente afectados pelas condições de execução do ensaio, sendo particularmente relevante o grau de impedimento da expansão lateral verificado nas extremidades do provete, em consequência do atrito existente na interface provete-dispositivos de carga (Póvoas 1991). Ensaios experimentais efectuados por Vecchio e Collins (1986) permitiram verificar que a ocorrência de fendilhação antes do início do carregamento em compressão provoca uma degradação da resistência e da rigidez à compressão do betão. Note-se que, tal como no processamento da fractura em tracção, também em compressão o desenvolvimento de microfissuração é concentrado numa região limitada de forma que, em muitos casos, a fractura em compressão é também um fenómeno discreto (Meyer 1997).

O betão é habitualmente classificado com base na tensão resistente à compressão, f_c, de cilindros com 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura, sendo o ensaio realizado de acordo com condições normalizadas (CEB 1993). Uma determinada classe de resistência é identificada pelo valor da resistência característica à compressão do betão, f_{ck}, definido como sendo o valor da tensão resistente abaixo do qual estarão 5% de todas as medições do valor da tensão resistente efectuadas. O EC2 (CEN 2002) e o MC90 (CEB 1993) definem o valor médio da resistência à compressão, f_{cm}, de acordo com a equação [3-16]:

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \qquad [3\text{-}16]$$

em que $\Delta f = 8\,\text{MPa}$. A equação [3-16] pressupõe que o desvio padrão da resistência à compressão do betão é independente da sua classe de resistência.

A Figura 3-5 apresenta diagramas tensão-extensão para o betão comprimido, para diversas classes de resistência (FIB (1999) citando Nilson). Verifica-se que os betões pertencentes a classes de resistência mais baixas apresentam um comportamento dúctil, tornando-se progressivamente mais frágil à medida que a resistência à compressão aumenta. Verifica-se também que, para tensões baixas, o comportamento do betão pode ser traduzido por um modelo linear-elástico.

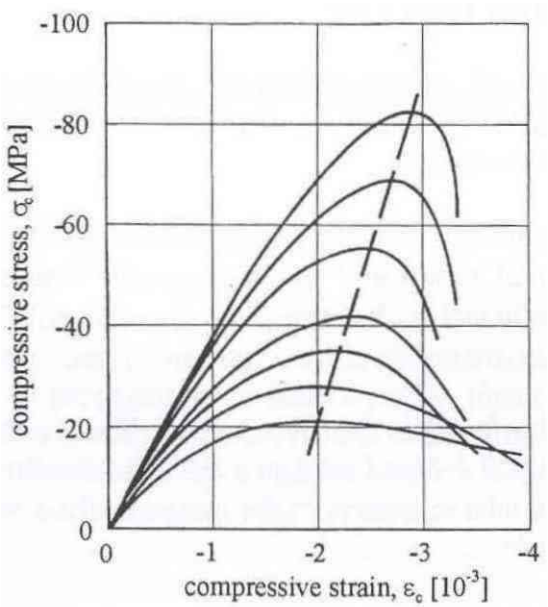


Figura 3-5 – Diagramas tensão-extensão para betões de diferentes classes de resistência sujeitos a uma taxa de deformações constante (FIB (1999) citando Nilson).

3.3.1.2 Carregamentos de longa duração

Se o nível de tensões aplicadas é superior a cerca de 40 por cento da resistência do betão, deixa de ser linear a relação entre tensões e deformações, não podendo, portanto, ser aplicado o princípio da sobreposição dos efeitos para o tratamento de problemas com carregamentos de longa duração. Para esses níveis de tensão, as deformações são superiores às obtidas através de um modelo linear. O aumento da fluência em elementos de betão sujeitos a tensões elevadas é causado principalmente pela progressão, ao longo do tempo, da microfissuração podendo, para determinados valores da tensão aplicada, ser atingida a rotura. A rotura do betão ocorrida nessas condições designa-se por rotura diferida. A duração do carregamento sob tensão constante, até ao instante de rotura, designa-se por período crítico e o valor dessa tensão designa-se por resistência do betão para cargas de duração igual a esse período crítico.

Na Figura 3-6 representa-se, a título de exemplo, o valor da deformação mecânica total de um elemento de betão com $f_{cm} = 34.5\text{MPa}$ comprimido uniaxialmente aos 56 dias de idade, para diferentes durações do carregamento e em função do nível de tensão aplicada. Pode ver-se a não-linearidade da deformação por fluência para níveis de tensão superiores a, sensivelmente 40 por cento de f_{cm}. Neste caso concreto, verifica-se a possibilidade de haver rotura diferida se a tensão aplicada é superior a cerca de 70 por cento de f_{cm}.

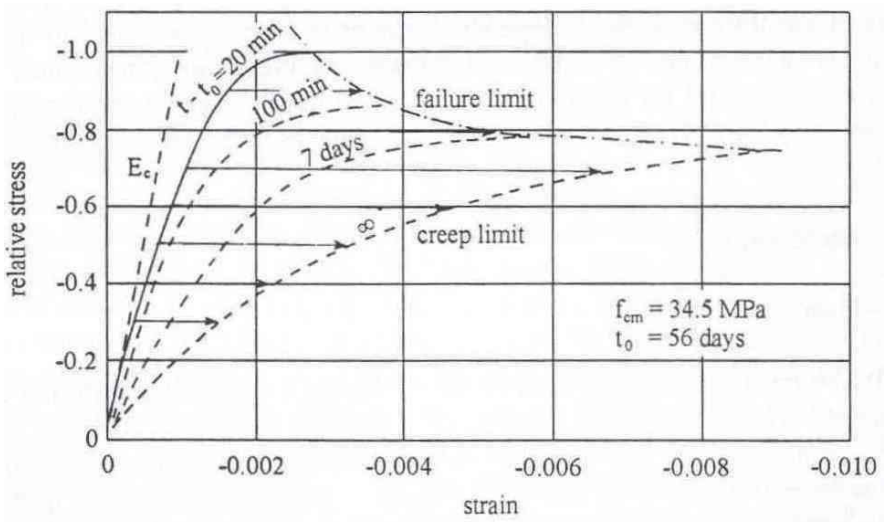


Figura 3-6 – Deformação mecânica total e rotura diferida em elementos de betão sujeitos a compressão uniaxial (FIB (1999) citando Rusch).

A actuação, com carácter de permanência, de tensões de valor moderado (que não originem rotura diferida) conduz a um aumento da resistência à compressão do betão (Coutinho e Gonçalves 1994; FIB 1999).

3.3.2 Betão simples traccionado

3.3.2.1 Carregamentos de curta duração

Num elemento de betão sujeito a tracção uniforme, não se registam alterações significativas do padrão de fendilhação pré-existente até a tensão aplicada atingir cerca de 70 por cento do valor da tensão de rotura à tracção do betão. Para valores superiores, verifica-se um crescimento estável e de reduzida expressão das fendas microscópicas, acontecendo posteriormente, para valores próximos da tensão máxima, a propagação localizada das referidas fendas numa pequena região do provete, que se designa por zona em processo de fractura ou, mais simplesmente, zona de fractura. A zona de fractura consiste num sistema de microfissuras, aproximadamente paralelas, mas inicialmente descontínuas, que permitem a transmissão de tensões de tracção. O valor da tensão transmitida diminui com o aumento da abertura de fenda, até que se forma uma única fenda contínua. Na Figura 3-7 a) apresenta-se a curva tensão-deslocamento axial, típica de um ensaio de tracção uniaxial do betão realizado com controlo do deslocamento. O ramo descendente desse diagrama traduz a capacidade de retenção de tensões de tracção pelo betão simples, após ser atingida a carga máxima no ensaio. Este efeito é denominado na nomenclatura inglesa por *tension softening*.

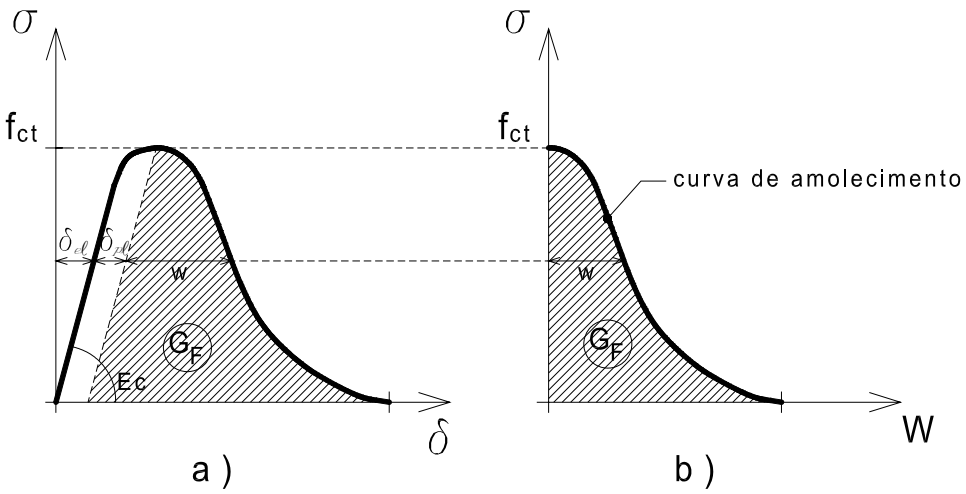


Figura 3-7 – Ensaio de tracção uniaxial: a) curva tensão-deslocamento; b) curva tensão-abertura de fenda.

A fractura de um elemento de betão simples sujeito a tracção é um fenómeno localizado numa determinada zona. A resposta do provete traccionado representada na Figura 3-7 a) deve, assim, ser expressa em função de duas relações constitutivas distintas: uma relação tensão-extensão para o material homogéneo situado fora da zona de fractura e uma relação tensão-deslocamento ou tensão-largura de fenda para a zona de fractura, tal como se ilustra na Figura 3-8.

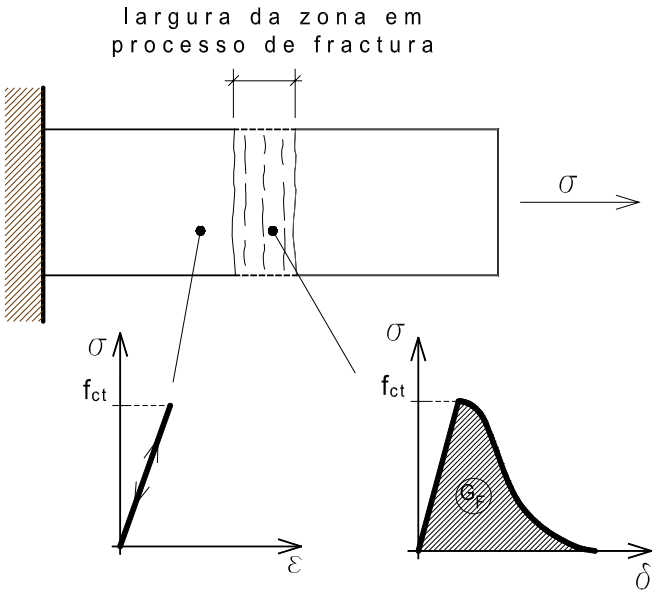


Figura 3-8 – Comportamento mecânico do betão traccionado uniaxialmente, com localização da fractura.

Na curva da Figura 3-7 a) é possível distinguir o seguinte conjunto de parâmetros do material que caracterizam o comportamento do betão à tracção: a tensão de rotura do betão à tracção, f_{ct}; o módulo de elasticidade longitudinal, E_c; a energia de fractura, G_F e a forma do diagrama (ramos ascendente e descendente). A energia de fractura, G_F, define a quantidade de energia necessária para propagar uma fenda de superfície unitária, sendo representada pela área limitada pela curva tensão-abertura de fenda representada na Figura 3-7 b). A energia dispendida até à formação da zona de fractura não deve ser incluída na energia de fractura, pois trata-se de energia dissipada na deformação elasto-plástica de todo o provete. A determinação dos parâmetros que caracterizam o comportamento do betão à tracção pode ser feita experimentalmente (Hilsdorf 1995). Estimativas podem ser feitas a partir das expressões fornecidas pelo MC90 (CEB 1993) e que se apresentam a seguir.

Em relação à resistência à tracção (resistência à tracção uniaxial), o MC90 (CEB 1993) propõe que a estimativa do seu valor médio e dos seus valores característicos seja feita a partir da resistência à compressão, de acordo com as seguintes expressões:

$$f_{ctk,min} = 0.95(f_{ck}/10)^{2/3} \quad [3\text{-}17]$$

$$f_{ctk,max} = 1.85(f_{ck}/10)^{2/3} \quad [3\text{-}18]$$

$$f_{ctm} = 1.40(f_{ck}/10)^{2/3} \quad [3\text{-}19]$$

em que $f_{ctk,min}$ e $f_{ctk,max}$ representam, respectivamente, os valores característicos inferior e superior da resistência à tracção uniaxial (MPa) e f_{ctm} representa o valor médio da resistência

à tracção (MPa). f_{ck} representa o valor característico da resistência do betão à compressão (MPa).

Em relação ao módulo de elasticidade longitudinal, apesar de em ensaios de tracção uniaxial se obterem valores ligeiramente superiores aos que são obtidos em ensaios de compressão uniaxial (Póvoas 1991), o MC90 (CEB 1993) ignora essas diferenças.

Em relação à energia de fractura, G_F, o MC90 (CEB 1993) indica a equação [3-20] para a sua estimativa.

$$G_F = G_{F0}\left(f_{cm}/10\right)^{0.7} \qquad [3\text{-}20]$$

em que:

G_F é a energia de fractura (N/mm);

G_{F0} é o valor base da energia de fractura, que depende da dimensão máxima dos inertes, d_{max}, tal como indicado na Tabela 3-1;

f_{cm} é o valor médio da resistência à compressão dado pela equação [3-16] (N/mm^2).

Tabela 3-1 – Efeito da dimensão máxima dos inertes, d_{max}, sobre o valor base da energia de fractura, G_{F0}, de acordo com o MC90 (CEB 1993).

d_{max} [mm]	8	16	32
G_{F0} [N/mm]	0.025	0.030	0.058

Em relação à forma dos diagramas, o MC90 (CEB 1993) indica:

- um diagrama bilinear para a relação tensão-extensão fora da zona de fractura, tendo o primeiro ramo do digrama um declive igual a E_{ci} e uma tensão máxima igual a 90 por cento da resistência à tracção (o segundo ramo do diagrama tem uma tensão máxima igual à resistência à tracção do betão e uma extensão máxima igual a 0.00015);
- um diagrama bilinear para a relação tensão-abertura de fenda na zona de fractura.

Segundo o (FIB 1999), citando Hilsdorf e Brameshuber, os diagramas definidos no MC90 conduzem a boas aproximações em relação a resultados experimentais. Vários autores têm utilizado diagramas aproximados (Póvoas 1991; Rots e Blaauwendraad 1989) considerando:

- um diagrama linear para a relação tensão-extensão fora da zona de fractura;

- aproximações do tipo linear, bilinear ou não-linear para a relação tensão-abertura de fenda na zona de fractura.

Em FIB (1999) são apresentadas expressões modificadas para a estimativa de f_{ctm} e de G_F, baseadas em resultados experimentais recentes, incluindo experiências sobre betões de elevado desempenho.

3.3.2.2 Carregamentos de longa duração

A tensão de rotura do betão num ensaio de carga rápido é sempre superior à tensão de rotura determinada em ensaios onde o betão é sujeito a cargas permanentes de longa duração (Coutinho e Gonçalves 1994). Coutinho e Gonçalves (1994) referem que existem registos de roturas por fluência de provetes submetidos a tensões de tracção a partir de 60 por cento da sua resistência à tracção. É também referido por esses autores que existe uma grande dispersão de resultados, para a qual deve contribuir a natureza das máquinas de ensaio utilizadas na determinação da tensão de rotura por fluência. Além disso, é difícil a quantificação do valor da tensão aplicada (num ensaio de tracção de longa duração) em percentagem da tensão de rotura do betão, devido à dispersão associada à própria tensão de rotura do betão.

Segundo o MC90 (CEB 1993), não há bases suficientes para dar informação sobre a resistência do betão à tracção sob actuação de tensões de tracção elevadas com carácter de longa duração.

3.3.3 Betão armado traccionado uniaxialmente

3.3.3.1 Carregamentos de curta duração

Tal como foi referido anteriormente, o betão simples fendilhado desenvolve alguma capacidade de retenção de tensões de tracção, que diminui com o aumento da deformação. Num elemento de betão armado, a retenção de tensões de tracção pelo betão é superior. Na Figura 3-9 representa-se o comportamento de um tirante em betão armado submetido a uma deformação imposta, relacionando-se a deformação média do tirante, $\Delta L/L$, (sendo ΔL o alongamento e L o comprimento total do tirante) com o esforço axial a que fica submetido. Representa-se a traço interrompido a relação força-deformação para um tirante constituído pela armadura apenas.

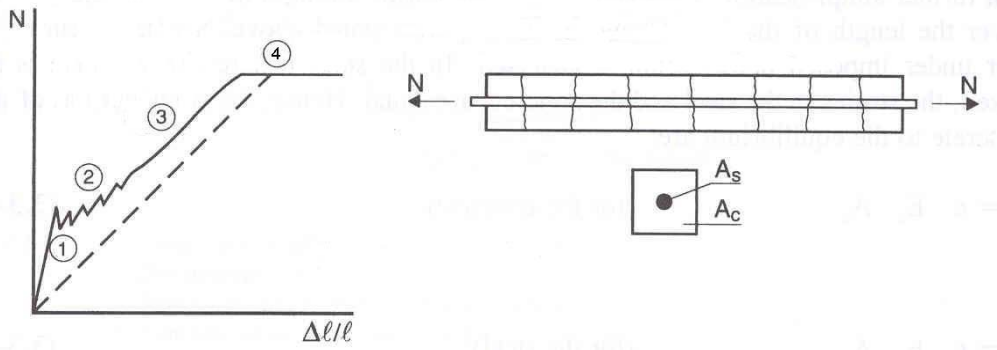


Figura 3-9 – Relação força-deformação num ensaio de um tirante com imposição de deformação.

No diagrama da Figura 3-9 podem ser distinguidas várias fases:

- a fase 1, antes da fendilhação, com comportamento linear-elástico;
- a fase 2, designada por fase de formação de fendas, em que se formam sucessivas fendas com afastamentos mais ou menos regulares;
- a fase 3, designada por fase de fendilhação estabilizada, em que não se formam novas fendas, aumentando a abertura das existentes;
- a fase 4, após a armadura atingir a tensão de cedência na secção das fendas.

Ao longo deste trabalho considera-se, simplificadamente, que o comportamento à tracção e à compressão do aço é traduzido por um diagrama tensão-deformação bilinear, tendo o primeiro ramo um declive igual a E_s (módulo de elasticidade do aço) e o segundo ramo um declive nulo (tensão constante de valor igual à tensão de cedência do aço, f_{sy}).

Após a fendilhação, as tensões no betão, na secção da fenda, decrescem acentuadamente, forçando as armaduras que atravessam a fenda a absorver quase integralmente a força instalada no tirante. A diferente deformação do betão e das armaduras na secção da fenda conduz ao deslizamento relativo destes dois materiais, desenvolvendo-se, entre fendas, tensões tangenciais na interface armadura-betão, com transferência de tensões da armadura para o betão circundante. Este fenómeno é descrito esquematicamente na Figura 3-10 a) e é designado habitualmente por efeito de retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas. Na nomenclatura inglesa é denominado, de uma forma mais sintética, por *tension stiffening*. Este fenómeno condiciona a resposta deformacional do tirante durante as fases 2 e 3.

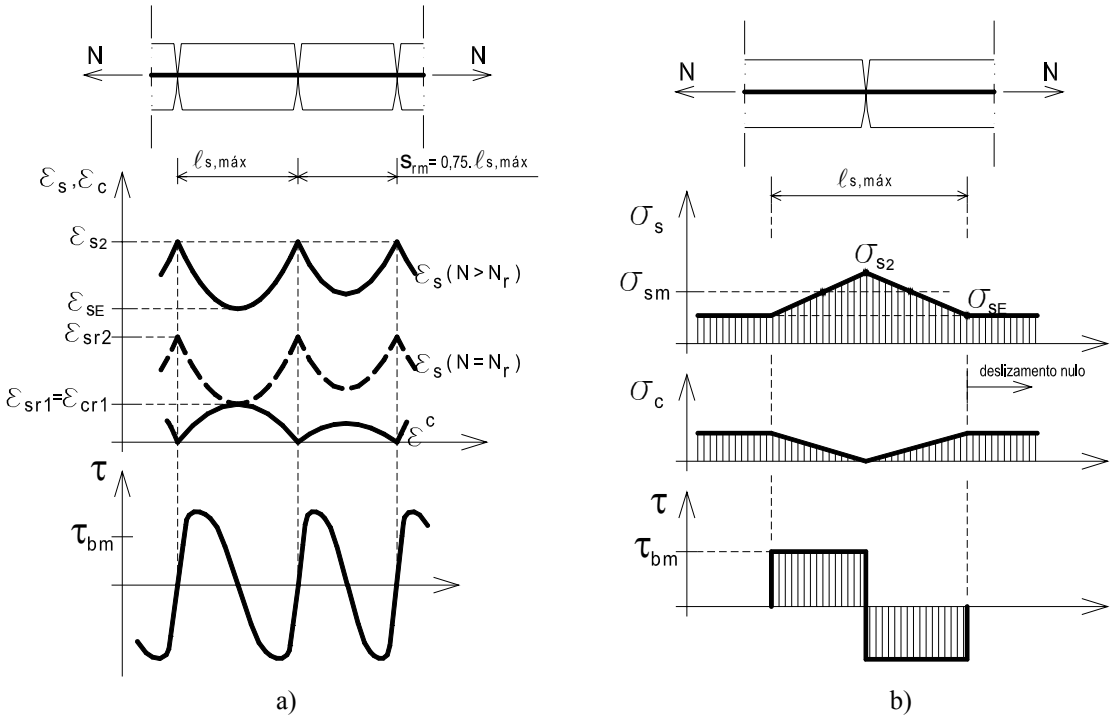


Figura 3-10 – Tensões e deformações num tirante de betão armado traccionado: a) distribuição de extensões no betão e na armadura, e de tensões na interface betão-armadura; b) distribuição, simplificada, de tensões no betão, na armadura e na interface entre os dois materiais.

Os símbolos usados na Figura 3-10 têm o seguinte significado:

ε_{cr1}	Extensão do betão, no ponto de deslizamento nulo, sob actuação do esforço N_r
ε_{s2}	Extensão da armadura calculada em secção totalmente fendilhada
ε_{sE}	Extensão da armadura no ponto de deslizamento nulo
ε_{sr1}	Extensão da armadura, no ponto de deslizamento nulo, sob actuação do esforço N_r
ε_{sr2}	Extensão da armadura, na secção da fenda, sob actuação do esforço N_r
$l_{s,max}$	Comprimento máximo ao longo do qual ocorre deslizamento entre o aço e o betão; a deformação do aço e do betão ao longo deste comprimento contribui para a abertura da fenda
N_r	Esforço axial que provoca a fendilhação de um tirante de betão armado
s_{rm}	Distância média entre fendas
σ_{s2}	Tensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada
σ_{sE}	Tensão na armadura no ponto de deslizamento nulo
σ_{sm}	Tensão média na armadura ao longo do comprimento em que ocorre deslizamento entre o aço e o betão
τ_{bm}	Valor da tensão de aderência média ao longo do comprimento de deslizamento entre o aço e o betão

A correcta quantificação do efeito de *tension stiffening* é importante para o estudo do comportamento em serviço de estruturas de betão armado, nomeadamente para:

- a correcta tradução das características de rigidez de elementos de betão armado traccionado;
- a quantificação da abertura de fendas nesses elementos.

A seguir aborda-se o problema da quantificação da relação entre o esforço axial aplicado a um tirante e a sua deformação.

A relação esforço-deformação de um tirante é condicionada por inúmeros factores. Diferentes autores têm formulado inúmeras relações distintas, tal como se pode verificar no trabalho realizado por Barros (1995). O comportamento do tirante, nas referidas 4 diferentes fases, pode ser quantificado da forma simples apresentada por Walraven no Boletim nº 1 do FIB (1999), assumindo os seguintes pressupostos:

- relação tensão de aderência-deslizamento do tipo rígido-perfeitamente plástico, tal como ilustrado na Figura 3-11;
- resistência à tracção do betão com valor constante ao longo de todo o tirante, com valor igual a f_{ctm}.

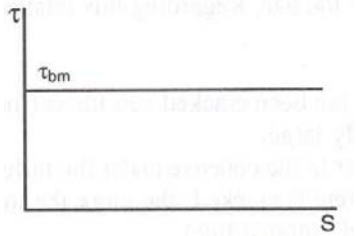


Figura 3-11 – Relação assumida, entre a tensão de aderência e o deslizamento.

De acordo com estes pressupostos, a resposta estrutural de um tirante de betão armado (nas quatro fases ilustradas na Figura 3-9), submetido a uma imposição de deformação com valor crescente, pode ser quantificada da forma apresentada a seguir.

Fase 1

Ambos os materiais, betão e aço, estão em regime linear-elástico, sendo igual a sua deformação. Assim, $N = N_c + N_s = \varepsilon_{sm} E_{ci} A_c (1 + \alpha_e \rho_s)$, em que:

ε_{sm} é extensão média do tirante de betão armado traccionado;

α_e é a razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do betão;

ρ_s é a percentagem de armadura.

Fase 2

A primeira fenda forma-se quando a tensão no betão atinge pela primeira vez um valor igual a f_{ctm}. Tal acontece quando o esforço axial atinge o valor designado por esforço de fendilhação, N_r:

$$N_r = \varepsilon_{ct} E_{ci} A_c (1 + \alpha_e \rho_s) = A_c f_{ctm} (1 + \alpha_e \rho_s) \qquad [3\text{-}21]$$

Nessa altura, a tensão no betão anula-se na secção da fenda. Ao lado da fenda, a aderência entre o betão e o aço promove a transferência de tensões de tracção para o betão (ver Figura 3-10). Em virtude da perda de rigidez do tirante, devida à fendilhação, o esforço no tirante diminui para N_0 (ver Figura 3-12). O posterior aumento da deformação imposta provoca uma nova subida do esforço de tracção, até ser atingido novamente o esforço N_r, altura em que se forma uma nova fenda. O processo repete-se até que termine a fase de formação de fendas. Isso acontece quando a distância entre duas fendas consecutivas é inferior a $l_{s,max}$, sendo sempre superior a $l_{s,max}/2$, tal como é explicado por Walraven (FIB 1999). $l_{s,max}$ representa o dobro da distância entre a secção da fenda e a secção mais próxima em que, por efeito da aderência, a tensão normal no betão atinge o valor de f_{ctm} sob a actuação do esforço N_r (ver Figura 3-10). Usando a relação tensão de aderência-deslizamento da Figura 3-11, $l_{s,max}$ é dado pela equação [3-22].

$$l_{s,max} = \frac{f_{ctm} \phi_s}{2 \tau_{bm} \rho_s} \qquad [3\text{-}22]$$

onde ϕ_s representa o diâmetro de um varão.

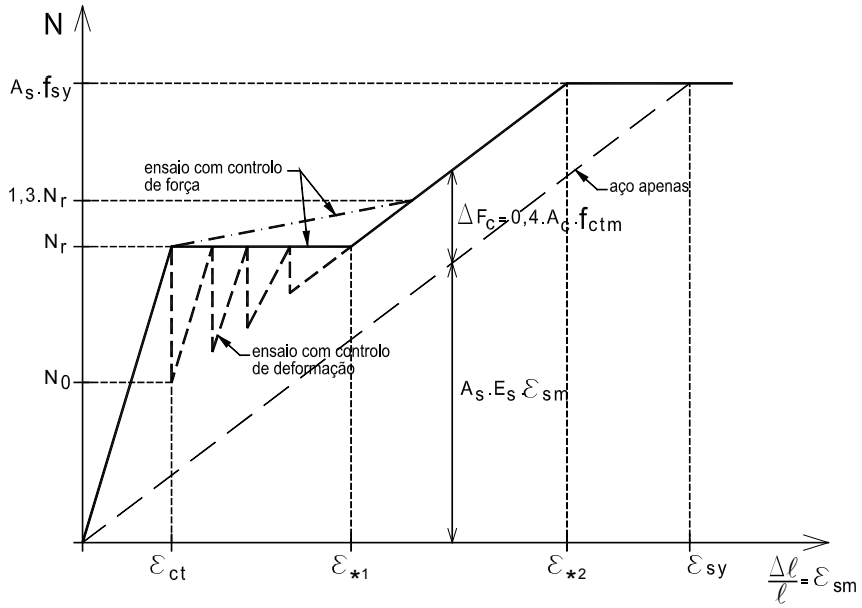


Figura 3-12 - Relação força-deformação num ensaio de um tirante, partindo de pressupostos simplificativos.

A forma do diagrama esforço-deformação, representativo da fase de formação de fendas, depende de vários factores, nomeadamente do comprimento do tirante, isto é, do número de fendas que se podem formar. Por outro lado, num ensaio realizado com controlo de força não podem ser captadas as quedas de força sob deformação constante. Nessa situação, o comportamento do tirante na fase de formação de fendas é traduzido pela linha a traço contínuo da Figura 3-12. Esta é a forma do diagrama sugerida por Walraven (FIB 1999) para traduzir, de modo simples, o comportamento do tirante durante a fase de formação de fendas. Note-se que a inclinação nula desta linha resulta de se ter assumido um valor constante para a resistência à tracção do betão ao longo de todo o tirante. Num tirante real isso não acontece, sugerindo Walraven (FIB 1999) a substituição desse patamar pela linha a traço-ponto representada na Figura 3-12, assumindo que a última fenda se forma sob uma carga 30% superior a N_r.

O MC90 (CEB 1993) refere que o comportamento em fase de formação de fendas deve ser descrito pela linha a traço-ponto (Figura 3-12) para solicitações com imposição de forças e pela linha a traço contínuo (Figura 3-12) para solicitações com imposição de deformações.

Fase 3

Com o posterior aumento da deformação imposta, o estado de tensão no betão mantém-se inalterado uma vez que não há formação de novas fendas e a tensão de aderência entre o aço e o betão permanece constante. Então, em fase de fendilhação estabilizada, o contributo do betão entre fendas para a rigidez do tirante mantém-se constante, resultando um diagrama

$N-\varepsilon_{sm}$ paralelo ao diagrama representativo do comportamento de um tirante com aço apenas (Figura 3-12). A distância entre essas duas linhas representa o contributo para a rigidez do tirante devida ao betão entre fendas. Para a quantificação do valor médio desse contributo, Walraven (FIB 1999) assume uma distância média entre fendas, $s_{rm} = 0.75 \cdot l_{s,max}$, resultando assim (ver Figura 3-10):

$$\sigma_{sm} = \sigma_{s2} - \frac{0.75/4\, l_{s,max}\, \tau_{bm}\, n\pi\phi_s}{n\pi\phi^2/4} \qquad [3\text{-}23]$$

sendo n o número de varões que constituem a armadura de tracção do tirante. Substituindo $l_{s,max}$ a partir da equação [3-22], resulta:

$$\sigma_{sm} = \sigma_{s2} - 0.375\frac{f_{ctm}}{\rho_s} \approx \sigma_{s2} - 0.4\frac{f_{ctm}}{\rho_s} \qquad [3\text{-}24]$$

A deformação média do aço é, então, dada por:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} = \varepsilon_{s2} - 0.4\frac{f_{ctm}}{E_s\rho_s} \qquad [3\text{-}25]$$

Usando a equação [3-25], pode-se obter a relação entre o esforço axial e a deformação média, distinguindo-se os contributos do aço e do betão, cujo significado se ilustra na Figura 3-12:

$$N = A_s E_s \varepsilon_{s2} = A_s E_s \varepsilon_{sm} + 0.4 A_c f_{ctm} \qquad [3\text{-}26]$$

Esta é também a relação $N-\varepsilon_{sm}$ prevista no MC90 (CEB 1993) para a caracterização do comportamento durante a fase de fendilhação estabilizada.

Fase 4

Quando o esforço de tracção instalado no tirante atinge o valor $N = A_s f_{sy}$, a armadura entra em cedência na secção da fenda. Se for assumido um comportamento elástico-perfeitamente plástico para o aço, um posterior aumento da deformação imposta não dá origem a qualquer aumento do esforço de tracção no tirante, sendo então, o comportamento nesta fase descrito pelo patamar horizontal no diagrama $N-\varepsilon_{sm}$ da Figura 3-12.

Após a cedência da armadura na secção da fenda, o modelo de comportamento previsto no MC90 (CEB 1993) difere do representado na Figura 3-12, por ser considerado o endurecimento do aço e o contributo do betão entre fendas após a cedência da armadura.

3.3.3.1.1 Diagramas de retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas

Na análise não-linear de estruturas de betão armado, o efeito de retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas (*tension stiffening*) é geralmente contabilizado através de uma alteração do diagrama tensão-extensão do betão traccionado. Esse diagrama deve ser tal que, sendo o comportamento das armaduras modelado com um diagrama elástico-perfeitamente plástico, resulte para o elemento composto (betão + aço) uma relação $N-\varepsilon_{sm}$ semelhante àquela que é evidenciada por um elemento composto real.

A relação $N-\varepsilon_{sm}$ representada na Figura 3-12 (com o comportamento em fase de formação de fendas dado pela linha a traço contínuo) é obtida se for considerada para o betão traccionado a relação tensão-extensão representada na Figura 3-13. Para um dado valor da deformação, o valor da tensão neste diagrama obtém-se dividindo o valor da força de tracção retida pelo betão (ΔF_c na Figura 3-12) pela área de betão.

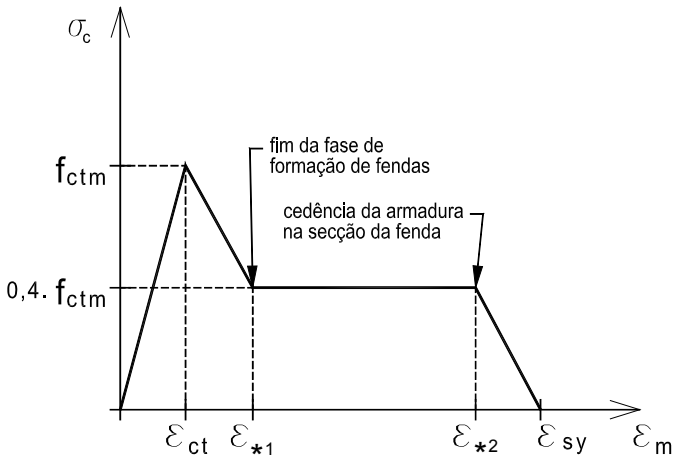


Figura 3-13 – Relação entre a extensão média e a tensão normal no betão traccionado.

As extensões ε_{*1} e ε_{*2} representadas na Figura 3-13 obtêm-se por intersecção da recta relativa à fase 3, do diagrama representado na Figura 3-12, com as rectas relativas às fases 2 e 4, respectivamente. Os seus valores são indicados nas equações [3-27] e [3-28].

$$\varepsilon_{*1} = \frac{f_{ctm}\left(0.6+\alpha_e\rho_s\right)}{E_s\rho_s} \qquad [3\text{-}27]$$

$$\varepsilon_{*2} = \varepsilon_{sy} - 0.4\frac{f_{ctm}}{E_s \rho_s} \qquad [3\text{-}28]$$

Note-se que este diagrama não inclui a diminuição de esforço axial que acontece em fase de formação de fendas quando um tirante é sujeito a uma deformação imposta (linha a traço interrompido na Figura 3-12). Essa queda será tanto maior quanto mais curto for o tirante, isto é, quanto menor for o número de fendas que podem abrir durante a fase de formação de fendas pois, nessa situação, é mais acentuada a perda de rigidez do tirante quando se forma uma fenda. Na Figura 3-14 representa-se o comportamento de um tirante, de acordo com os pressupostos anteriores, se houver formação de uma única fenda, ou todas as fendas se formarem simultaneamente.

A quebra brusca do diagrama após ser atingida a tensão resistente à tracção do betão (diagrama (1) da Figura 3-14) só acontece se for desprezada a retenção de tensões de tracção pelo betão simples (efeito de *tension softening*). Vários autores, tais como Feenstra (1993) e Cervenka, citado em Barros (1995), apresentaram modelos de *tension stiffening* em que se sobrepõem as contribuições resultantes das propriedades de fractura do betão simples e dos fenómenos de interacção entre a armadura e o betão circundante na zona entre fendas. Adoptando um diagrama de amolecimento linear (tal como consideraram Feenstra (1993) e Cervenka), a contribuição resultante das propriedades do betão simples corresponde à área a tracejado na Figura 3-14. A energia de fractura do betão simples é, então, dissipada em fendas com um afastamento médio igual a s_{rm}. Nessas condições, a área a tracejado, no diagrama tensão-extensão representado na Figura 3-14, é dada por (ver Capítulo 4):

$$g_F^{ba} = \frac{G_F}{s_{rm}} \qquad [3\text{-}29]$$

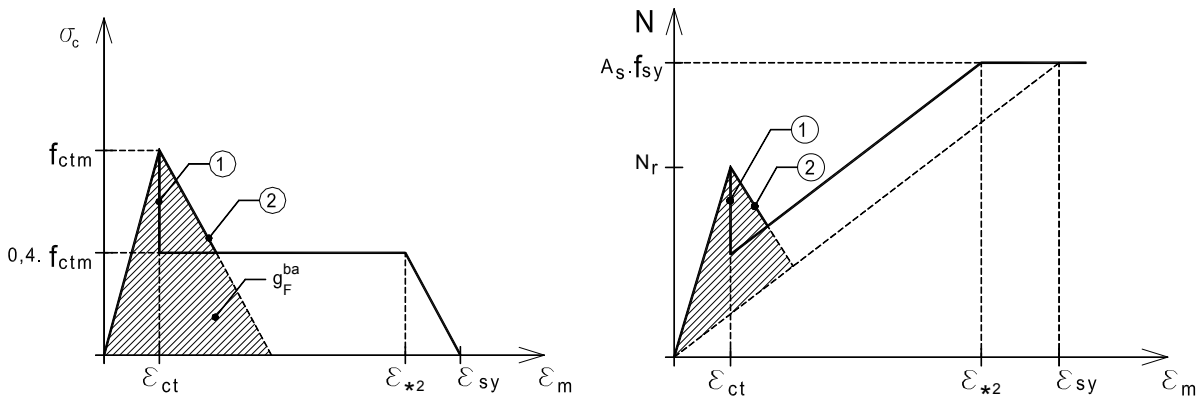


Figura 3-14 – Comportamento de um tirante supondo formação simultânea de todas as fendas.

Os diagramas apresentados na Figura 3-14 traduzem, comparativamente com o digrama da Figura 3-13, uma menor contribuição do betão entre fendas, na fase de formação de fendas. Incluem também a diminuição de esforço no tirante que se dá quando se forma a primeira fenda sob a actuação de uma deformação imposta. Note-se que, nas estruturas em análise na presente dissertação, parte dos esforços instalados resultam do impedimento das deformações devidas à retracção, à fluência e à variação de temperatura do betão. É por isso importante a forma do diagrama a usar durante a fase de formação de fendas.

Tal como foi referido anteriormente, outros diagramas têm sido utilizados por diferentes autores. Destaca-se, pela sua simplicidade, o diagrama adoptado por autores tais como Figueiras (1983), Póvoas (1991), Henriques (1998a) e Favre *et al.* (1997), representado na Figura 3-15. Este diagrama pressupõe que, após a extensão de fendilhação, ε_{ct}, a tensão média retida pelo betão é igual a 60 por cento da resistência à tracção do betão. Segundo este modelo, a tensão retida pelo betão diminui linearmente com o aumento da deformação, atingindo um valor nulo quando se dá a cedência da armadura na secção da fenda.

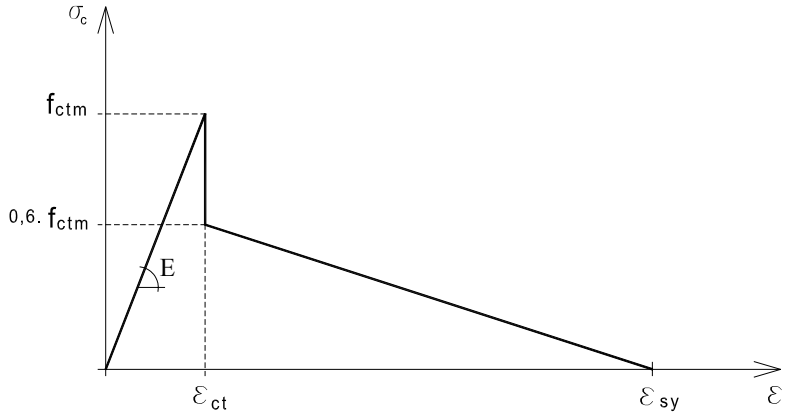


Figura 3-15 – Diagrama de retenção de tensões de tracção pelo betão fendilhado.

Destaca-se também o modelo adoptado pelo EC2 (CEN 1991) pela sua grande utilização no cálculo de abertura de fendas, no projecto de estruturas. Segundo este modelo, a extensão média de um tirante após a fendilhação é obtida como uma ponderação entre a extensão na armadura calculada em secção não fendilhada, ε_{s1}, e a extensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada, ε_{s2}, da forma indicada na equação [3-30].

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} \cdot \varsigma + \varepsilon_{s1} \cdot (1 - \varsigma) \qquad [3\text{-}30]$$

sendo:

$$\begin{cases} \varsigma = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\dfrac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 & , \sigma_{s2} \geq \sigma_{sr} \\ \varsigma = 0 & , \sigma_{s2} < \sigma_{sr} \end{cases} \qquad [3\text{-}31]$$

em que β_1 e β_2 são coeficientes que têm em conta as propriedades de aderência da armadura e a duração e natureza das cargas, respectivamente, sendo o seu valor definido no EC2 (CEN 1991). Este modelo de comportamento está representado no gráfico da Figura 3-16.

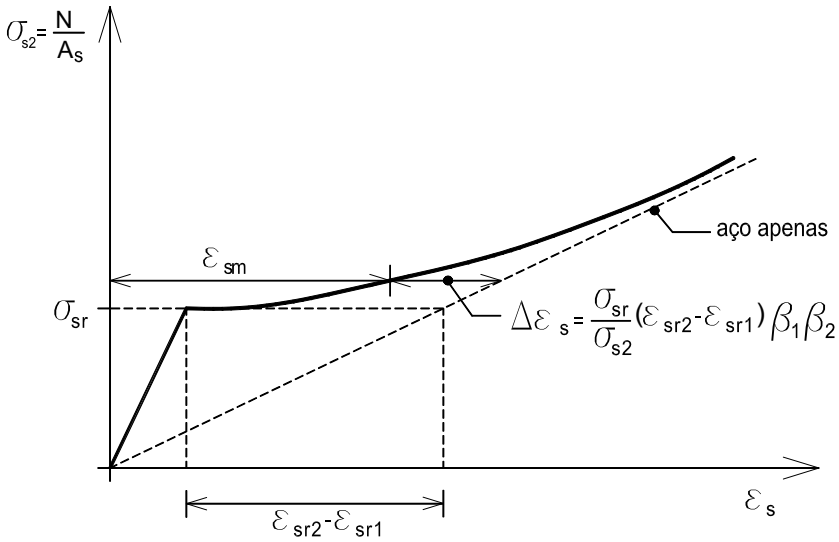


Figura 3-16 – Comportamento à tracção de um tirante de betão armado (CEN 1991).

Na Figura 3-17 e na Figura 3-18 apresentam-se gráficos para comparação dos vários modelos de *tension stiffening* referidos atrás, considerando uma resistência do betão à tracção igual a 2.50 MPa e uma extensão de cedência do aço de 2.50‰. Na Figura 3-17 apresentam-se diagramas tensão-extensão média para o betão traccionado, para um tirante com uma percentagem de armadura $\rho_s = 0.7\%$. Na Figura 3-18 apresentam-se diagramas representativos do comportamento de um tirante de betão armado, representando a evolução da tensão média na armadura (calculada em secção totalmente fendilhada) em função da deformação média do tirante, para tirantes com diferentes percentagens de armadura, $\rho_s = 0.7\%$ e $\rho_s = 1.5\%$.

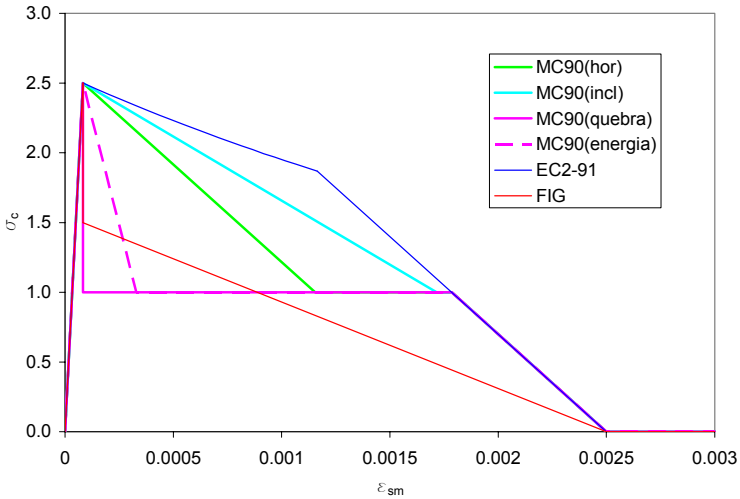
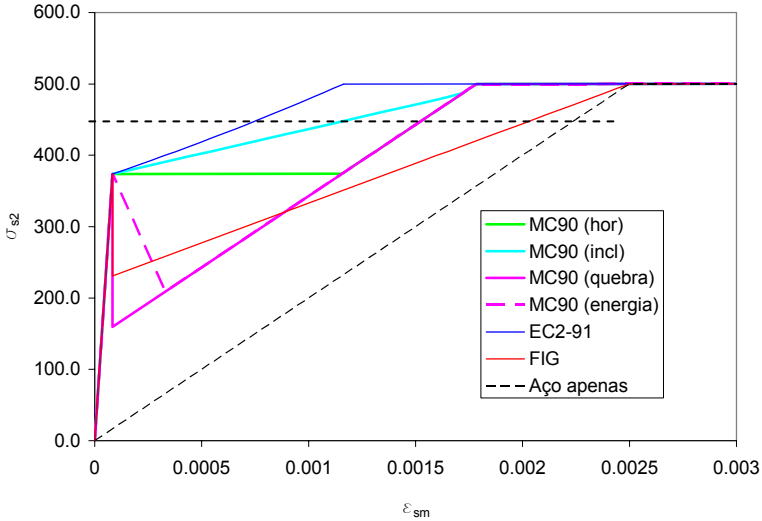
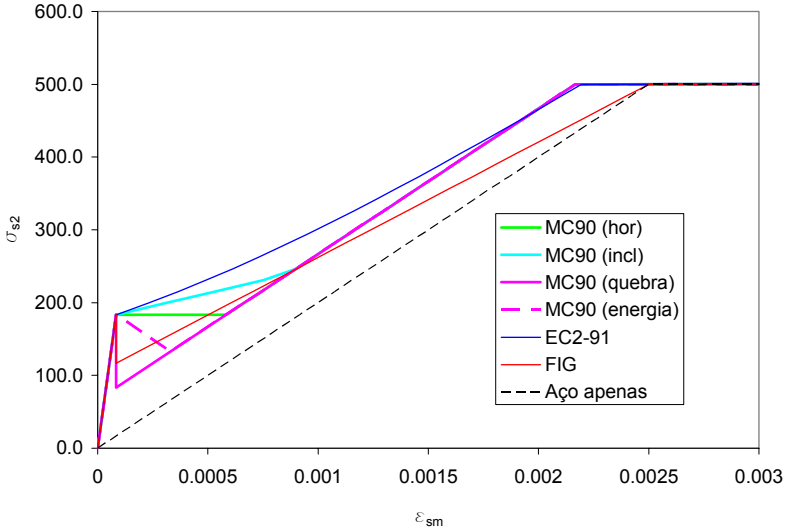


Figura 3-17 - Relação entre a extensão média e a tensão normal no betão traccionado (comparação de diferentes modelos).



a)



b)

Figura 3-18 – Comportamento à tracção de um tirante, calculado de acordo com diferentes modelos: a) $\rho_s = 0.7\%$; b) $\rho_s = 1.5\%$.

Comparam-se os seguintes modelos:

- o modelo do MC90 (CEB 1993) (semelhante ao modelo apresentado por Walraven (FIB 1999)), sendo o comportamento em fase de formação de fendas descrito, no gráfico da Figura 3-12 pela linha a traço contínuo (legendado como MC90(hor));
- o modelo do MC90 (CEB 1993), sendo o comportamento em fase de formação de fendas descrito, no gráfico da Figura 3-12 pela linha a traço-ponto (legendado como MC90(incl));
- o modelo (1) apresentado na Figura 3-14 (legendado como MC90(quebra));
- o modelo (2) apresentado na Figura 3-14 (legendado como MC90(energia));
- o modelo do EC2 (CEN 1991) (legendado como EC2-91);
- o modelo adoptado por Figueiras (1983) e outros autores (legendado como FIG).

Nos diagramas apresentados não se considera o endurecimento do aço nem o contributo do betão entre fendas após a cedência da armadura.

Verificam-se grandes diferenças nos resultados obtidos para a caracterização do comportamento do tirante. Veja-se por exemplo, na Figura 3-18 a), o valor da deformação média fornecida pelos diferentes modelos para uma tensão $\sigma_{s2} = 450\text{MPa}$. Uma vez que os modelos de *tension stiffening* intervêm no cálculo de aberturas de fendas (ver sub-capítulo 3.3.3.3), serão de esperar grandes diferenças no resultado desse cálculo consoante o modelo utilizado. Nos casos apresentados na Figura 3-18, o modelo do EC2 (CEN 1991) é o que conduz a menores deformações médias do elemento traccionado e, portanto, a aberturas de fendas mais reduzidas.

Verifica-se que a diferença entre os vários modelos é mais significativa quando a percentagem de armadura é menor pois, nessa situação, a parcela do esforço axial devida ao contributo do betão é maior. Verifica-se alguma semelhança entre os resultados fornecidos pelos modelos legendados como MC90(quebra), MC90(energia) e FIG.

O efeito de *tension stiffening*, isto é, da modificação das tensões de tracção retidas pelo betão devido à presença de armadura, faz-se sentir apenas numa zona que envolve essa armadura, designada geralmente por área de betão efectivo, $A_{c,ef}$. Essa área é definida, segundo o MC90 (CEB 1993) do modo indicado na Figura 3-19, onde x representa a profundidade do eixo neutro. A percentagem efectiva de armadura é dada por $\rho_{s,ef} = A_s / A_{c,ef}$.

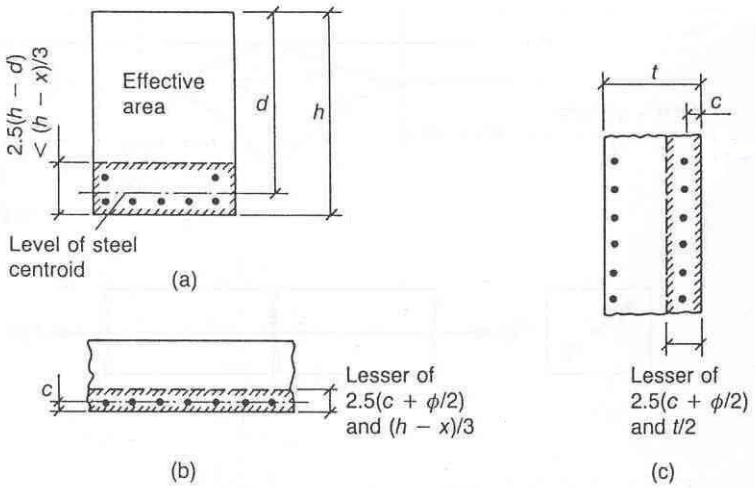


Figura 3-19 – Determinação da área de betão efectivo (CEB 1993): a) vigas; b) lajes; c) elementos em tracção.

Fora da área de betão efectivo, a capacidade de retenção de tensões de tracção é somente garantida pelas propriedades de fractura do betão simples (sub-capítulo 3.3.2).

Se a percentagem de armadura existente é inferior à percentagem mínima (percentagem de armadura que garante que, sob a actuação do esforço que provoca a fendilhação, a tensão na armadura traccionada, calculada em fase totalmente fendilhada, é igual à tensão de cedência do aço), a capacidade de retenção de tensões de tracção é garantida somente pelas propriedades de fractura do betão simples, tal como apresentado no sub-capítulo 3.3.2.

3.3.3.2 Carregamentos de longa duração ou ciclicamente repetidos

A actuação de cargas com carácter de longa duração ou ciclicamente repetidas, conduz a uma redução do efeito de *tension stiffening*, levando a um aumento da deformação média da armadura, aumento da abertura de fendas e redução da rigidez do elemento traccionado.

Os modelos de MC90 (CEB 1993) e do EC2 (CEN 1991; CEN 2002) prevêem, para atender a este efeito, uma redução da retenção de tensões de tracção quando o carregamento tem um carácter cíclico ou de longa duração. Nessas situações, o MC90 (CEB 1993) indica que, em fase de fendilhação estabilizada, o factor 0.4, na equação [3-24], seja substituído por 0.25. Os contributos do aço e do betão, para o esforço axial de um elemento traccionado, passam a ser dados pela equação [3-32].

$$N = A_s E_s \varepsilon_{sm} + 0.25 A_c f_{ctm} \qquad [3\text{-}32]$$

O EC2 (CEN 1991) tem em consideração o carácter do carregamento através do factor β_2 da equação [3-31]. Este factor toma o valor de 1.0 para cargas de curta duração e 0.5 para cargas de longa duração ou frequentemente repetidas.

Na Figura 3-20 ilustram-se as estimativas fornecidas pelos modelos para o comportamento de tirantes de betão armado com percentagens de armadura $\rho_s = 0.7\%$ e $\rho_s = 1.5\%$. Verifica-se que os dois modelos fornecem resultados semelhantes, em fase de fendilhação estabilizada, quando $\rho_s = 1.5\%$. As diferenças mais significativas acontecem durante a fase de formação de fendas.

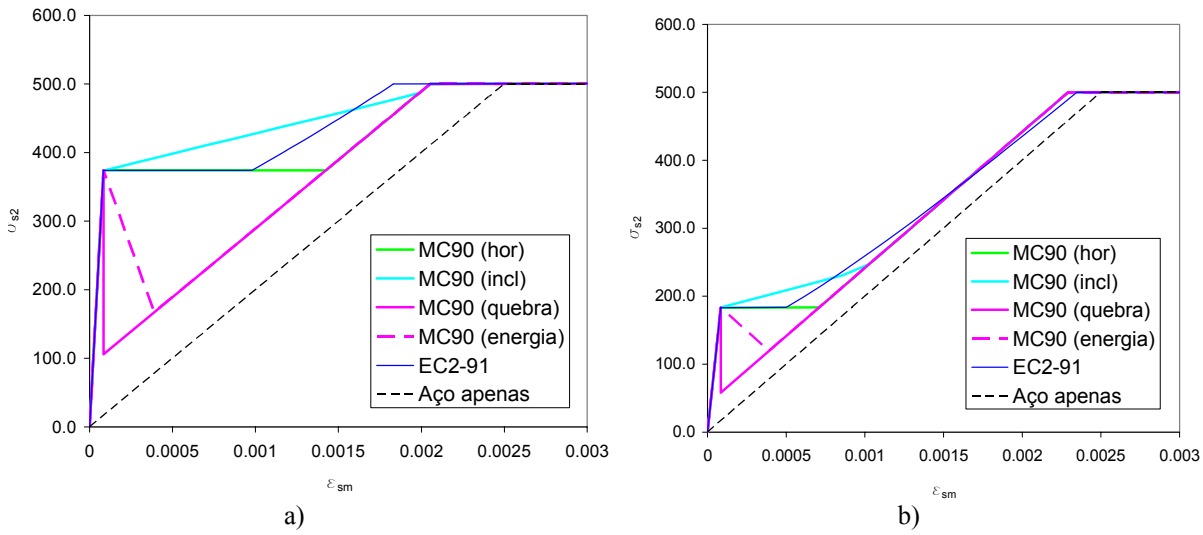


Figura 3-20 - Comportamento à tracção de um tirante submetido a acções de longa duração ou repetidas, calculado de acordo com diferentes modelos: a) $\rho_s = 0.7\%$; b) $\rho_s = 1.5\%$.

3.3.3.3 Abertura de fendas

Após a fendilhação de um elemento de betão armado, deixa de existir compatibilidade de deformações entre a armadura e o betão envolvente. A acumulação das extensões diferenciais dá origem a uma deslizamento relativo. O valor da abertura da fenda é dado pela soma dos deslizamentos de ambos os lados da fenda, isto é,

$$w = \int_{(l_s)} (\varepsilon_s - \varepsilon_c) dz \qquad [3\text{-}33]$$

sendo l_s a distância entre dois pontos de deslizamento nulo consecutivos.

Abordagem do MC90 (CEB 1993)

Segundo o MC90 (CEB 1993), o valor a considerar para a abertura de fendas resulta do deslizamento relativo entre a armadura e o betão, que ocorre ao longo do comprimento $l_{s,max}^{k}$, sendo dado por:

$$w_k = l_{s,max}^{k}\left(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}\right) \qquad [3\text{-}34]$$

O valor determinado através da equação [3-34] é considerado um valor característico por ser calculado com base na distância máxima entre pontos de deslizamento nulo consecutivos, $l_{s,max}^{k}$, distância essa que é determinada com base no valor relativo ao quantil inferior da tensão de aderência, τ_{bk}.

Os valores médios das deformações no aço e no betão, ε_{sm} e ε_{cm}, têm valores diferentes daqueles que foram calculados nos sub-capítulos 3.3.3.1 e 3.3.3.2 (aí foi apresentado o valor médio das deformações, calculado ao longo de um comprimento igual a $0.75 \cdot l_{s,max}$). Note-se que a força máxima que pode ser transmitida por efeito de aderência é $F_b = A_c f_{ctm}$. Então, considerando que a tensão de aderência tem um valor constante (tal como representado na Figura 3-10 b)), a tensão de tracção média retida pelo betão ao longo do comprimento $l_{s,max}^{k}$ é igual a 50 por cento de f_{ctm}. As tensões médias no betão e no aço são, assim, dadas por:

$$\sigma_{sm} = \sigma_{s2} - 0.5\frac{A_c f_{ctm}}{A_s} \qquad [3\text{-}35]$$

$$\sigma_{cm} = 0.5 f_{ctm} \qquad [3\text{-}36]$$

Dividindo as tensões médias nos materiais pelos respectivos módulos de elasticidade e calculando a sua diferença, obtém-se a deformação relativa média entre o betão e o aço:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_{s2} - 0.5\dfrac{f_{ctm}}{\rho_s}\left(1 + \alpha_e \rho_s\right)}{E_s} \qquad [3\text{-}37]$$

A equação [3-37] foi obtida considerando uma variação linear, ao longo do comprimento $l_{s,max}^{k}$, para as tensões no aço e no betão. Como, na realidade, a evolução dessas tensões ao longo do comprimento não tem essa forma (ver Figura 3-10 a)), o valor médio da tensão no betão entre fendas é superior a $0.5 \cdot f_{ctm}$. O MC90 considera que essa evolução é tal que a tensão de tracção média retida pelo betão tem o valor $\beta \cdot f_{ctm}$, tomando β os valores indicados na Tabela 3-2. A determinação da deformação relativa média entre o betão e o aço deve então, de

acordo com o MC90 (CEB 1993), ser efectuada a partir da equação [3-38] e não a partir da equação [3-37]. Na equação [3-38] é introduzida, através do parâmetro β, a diminuição do efeito de *tension stiffening* que ocorre quanto o carregamento é de longa duração ou frequentemente repetido.

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_{s2} - \beta \frac{f_{ctm}}{\rho_s}\left(1 + \alpha_e \rho_s\right)}{E_s} \qquad [3\text{-}38]$$

Tabela 3-2 – Valores de β e τ_{bk}, segundo o MC90 (CEB 1993), para armaduras rugosas.

	Fase de formação de fendas		Fase de fendilhação estabilizada	
	β	τ_{bk}	β	τ_{bk}
Acção de curta duração	0.6	$1.8 f_{ctm}(t)$	0.6	$1.8 f_{ctm}(t)$
Acção de longa duração ou repetida	0.6	$1.35 f_{ctm}(t)$	0.38	$1.8 f_{ctm}(t)$

O valor da distância máxima entre fendas, $l^k_{s,max}$, é dado, segundo o MC90 (CEB 1993), pela expressão [3-39]. Esta expressão é válida também em fase de formação de fendas (mesmo se $N < N_r$). τ_{bk} toma os valores indicados na Tabela 3-2.

$$\begin{aligned} l^k_{s,max} &= 2\frac{\sigma_{s2} - \sigma_{sE}}{4\tau_{bk}}\phi_s \\ &= \frac{\phi_s}{3.6\rho_{s,ef}} \quad \text{, em fase de fendilhação estabilizada} \\ &= \frac{\sigma_{s2}}{2\tau_{bk}}\phi_s \frac{1}{1 + \alpha_e \rho_{s,ef}} \quad \text{, em fase de formação de fendas} \end{aligned} \qquad [3\text{-}39]$$

Note-se que, em fase de fendilhação estabilizada, a distância entre fendas se mantém constante, independentemente do número de ciclos de carregamento ou do tempo de actuação da carga.

A inclusão da extensão de retracção na equação [3-34] é coerente com os pressupostos assumidos para o comportamento do tirante traccionado durante a fase de fendilhação estabilizada. Nessa situação, a deformação do betão é obtida pela sobreposição dos efeitos da força de aderência (que provoca a deformação mecânica ε_{cm}) e da retracção (que provoca a deformação não mecânica ε_{cs}). A consideração de uma relação tensão de aderência-deslizamento do tipo representado na Figura 3-11 implica que não haja interacção entre os

dois efeitos referidos. No entanto, essa relação tensão de aderência-deslizamento constitui uma simplificação da realidade. A consideração de outra relação mais elaborada conduziria a uma modificação do diagrama de tensões retidas pelo betão, como consequência do deslizamento relativo entre os materiais originado pela retracção.

Abordagem do EC2 (CEN 2002)

Na versão mais recente do EC2 (CEN 2002) foi abandonada, para efeitos de quantificação da abertura de fendas, a abordagem que vinha sendo utilizada (CEN 1991) para a quantificação do efeito de *tension stiffening*. Segundo o EC2 (CEN 2002), a componente mecânica da deformação relativa média entre o aço e o betão é obtida, tal como é estipulado no MC90 (CEB 1993), a partir da equação [3-38], tomando β os valores 0.6 ou 0.4 consoante as acções aplicadas têm carácter instantâneo ou são de natureza cíclica ou de longa duração, respectivamente. Adicionalmente, é imposto que:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} \geq 0.6 \frac{\sigma_{s2}}{E_s} \qquad [3\text{-}40]$$

Este limite impede que o efeito da retenção de tensões de tracção pelo betão seja muito elevado quando a percentagem de armadura é reduzida.

A abertura de fendas, designada de característica, é obtida através da equação [3-41], ou seja, de um modo análogo ao definido no MC90 (CEB 1993), mas sem inclusão da extensão de retracção ε_{cs}.

$$w_k = l_{s,max}^k \left(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}\right) \qquad [3\text{-}41]$$

sendo o valor de $l_{s,max}^k$ dado pela equação [3-42],

$$l_{s,max}^k = 3.4c + 0.425 k_1 k_2 \, \phi_s / \rho_{s,ef} \qquad [3\text{-}42]$$

em que c é o recobrimento da armadura, k_1 é um coeficiente que depende das propriedades de aderência das armaduras e k_2 é um coeficiente que depende da distribuição de tensões na secção do elemento. O valor dos vários parâmetros intervenientes na equação [3-42] está definido no EC2 (CEN 2002).

Na Figura 3-21 comparam-se os valores da distância entre pontos de deslizamento nulo, $l_{s,max}^k$, fornecidos pelos modelos do EC2 (CEN 2002) e do MC90 (CEB 1993).

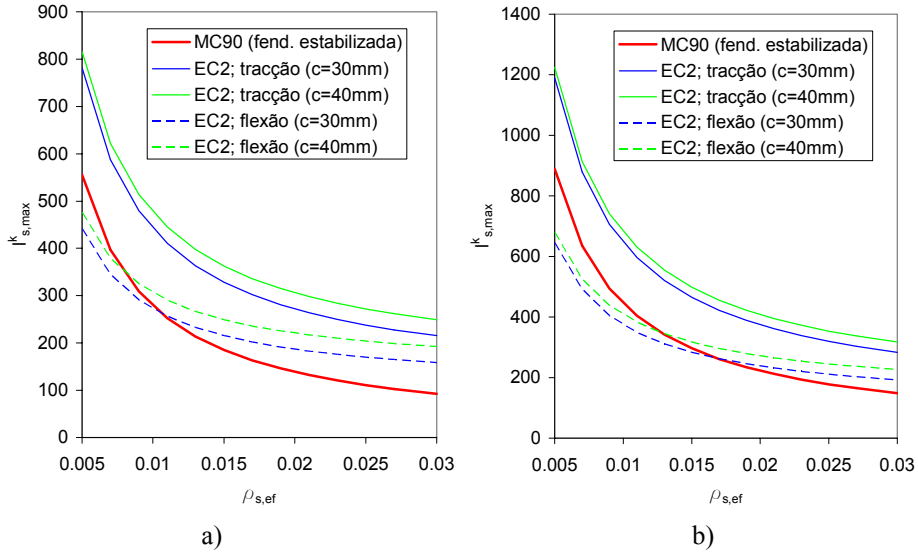


Figura 3-21 – Valores da distância $l^k_{s,max}$ fornecidos pelos modelos do EC2 (CEN 2002) e do MC90 (CEB 1993): a) $\phi_s = 10\text{mm}$; b) $\phi_s = 16\text{mm}$.

Nas situações comparadas, verifica-se que existe uma razoável semelhança entre os valores fornecidos pelos dois modelos, quando a fendilhação resulta da actuação de um momento flector. Quando o elemento em análise está sujeito a um esforço de tracção, o modelo do EC2 (CEN 2002) conduz a um maior valor de $l^k_{s,max}$.

3.4 Considerações finais

A análise do comportamento de estruturas ao longo do tempo envolve a quantificação das deformações do betão por fluência e retracção. Os modelos de previsão da fluência e da retracção incluídos no EC2 (CEN 2002) contêm melhoramentos relativamente aos modelos previstos no MC90 (CEB 1993). Esses melhoramentos foram introduzidos para que os modelos traduzam melhor o comportamento de betões com resistências elevadas. Neste trabalho são utilizados esses modelos, tendo sido implementada (no âmbito da presente dissertação) uma sub-rotina para a inclusão do modelo de fluência do EC2 (CEN 2002), no programa DIANA (2002).

O comportamento do betão comprimido sob a actuação de níveis elevados de tensões foi abordado sucintamente, uma vez que neste estudo se aborda essencialmente o comportamento estrutural durante a fase de serviço. O comportamento do betão fendilhado é abordado de forma diferente consoante existam ou não armaduras aderentes no seu interior. Quando não

existem essas armaduras, ou a quantidade de armadura existente é reduzida, é usado o conceito de *tension softening* (amolecimento ou diminuição gradual da tensão retida pelo betão, após a fendilhação, na zona em processo de fractura). O betão que envolve armaduras traccionadas evidencia uma maior retenção de tensões de tracção em virtude da aderência entre os dois materias (fenónemo de *tension stiffening*).

Neste capítulo abordou-se com maior desenvolvimento o comportamento do betão que envolve as armaduras traccionadas, tratando-se em paralelo a definição dos diagramas tensão-extensão para o betão e a quantificação da abertura de fendas. Uma vez que estes dois aspectos estão interligados, o seu tratamento deve ser feito de forma coerente. A abordagem apresentada no MC90 (CEB 1993) para a quantificação do comportamento deformacional de um tirante de betão armado traccionado é semelhante à abordagem apresentada por Walraven no Boletim número 1 do FIB (1999), e àquela que é apresentada no EC2 (CEN 2002). A referida abordagem conduz, para o cálculo do comportamento deformacional de um tirante, a uma tensão média retida pelo betão (em fase de fendilhação estabilizada) igual a 40% ou 25% de f_{ctm}, para acções de curta duração e para acções de longa duração ou ciclicamente repetidas, respectivamente. Essas percentagens tomam os valores 60% e 40%, respectivamente, quando se trata do cálculo de aberturas de fendas, pois neste caso a tensão média é calculada ao longo do comprimento $l_{s,max}^{k}$. Outras abordagens têm sido utilizadas, conduzindo a resultados diferentes especialmente nas situações em que a percentagem de armadura é reduzida.

No presente estudo, como interessa a quantificação da abertura de fendas em fase de serviço, é seguida a abordagem do MC90 (CEB 1993), EC2 (CEN 2002) e Walraven (FIB 1999). Por forma a não ser modelada uma retenção excessiva de tensões de tracção durante a fase de formação de fendas (aspecto relevante quando a solicitação consiste na imposição de deformações), será considerado, nos cálculos efectuados no presente estudo, o diagrama tensão-extensão legendado com (2) na Figura 3-14. Com este diagrama é possível traduzir a diminuição de esforço axial que acontece, durante a fase de formação de fendas, quando a um elemento de betão armado é imposta a uma deformação.

4 Modelação numérica

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se formulações simplificadas e formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizadas para a implementação de análises visco-elásticas com envelhecimento, sendo dado especial destaque a esta última metodologia em virtude das suas potencialidades para o tratamento de problemas não-lineares e do facto de o seu uso ser, actualmente, muito generalizado. Apresentam-se também os fundamentos do modelo de fendilhação que foi utilizado neste trabalho. Durante a exposição é assumido que são já conhecidos os fundamentos básicos do MEF.

Termina-se o capítulo apresentando-se uma aplicação do Método do Módulo Efectivo Ajustado (MMEA) para a análise, de forma simplificada, da evolução dos esforços e das tensões, por efeito da fluência e da retracção do betão, em estruturas do tipo das que são abordadas neste trabalho.

4.2 Modelação do comportamento visco-elástico do betão

4.2.1 Generalidades

Quando submetido a níveis moderados de tensão, o betão comporta-se como um material visco-elástico linear com envelhecimento, tal como foi referido no sub-capítulo 3.2.1.

A análise de uma estrutura de betão incluindo os efeitos diferidos não é, no essencial, diferente de qualquer outra análise estrutural. De facto, três condições devem sempre ser satisfeitas:

- equilíbrio;
- compatibilidade de deformações;
- relações constitutivas dos materiais.

A consideração dos fenómenos de fluência e de retracção torna, no entanto, a análise mais complexa, quando comparada com uma análise linear elástica. A deformação por fluência num ponto qualquer de uma estrutura de betão depende fortemente da história de tensões, mas essa mesma história depende também do valor e do tipo de variação das deformações por fluência e retracção. Além disso, o betão é um material com envelhecimento, ou seja, quanto maior é a idade do betão no instante de carregamento, mais pequena é a sua deformação final por fluência.

Nos sub-capítulos seguintes serão expostas as metodologias usualmente empregues para analisar o comportamento diferido das estruturas:

- solução numérica da equação integral;
- conversão para a forma diferencial;
- solução algébrica: método do módulo efectivo ajustado.

Todas as metodologias têm por base a equação integral de Rieman já referida no Capítulo 3.

4.2.2 Solução numérica da equação integral

Este método baseia-se na resolução numérica da equação integral de Rieman:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = J(t,t_0)\cdot\sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^{t} J(t,\tau)\cdot\frac{\partial\sigma_c(\tau)}{\partial\tau}\partial\tau \qquad [4\text{-}1]$$

Identificando tempos discretos $t_1, t_2, ..., t_n$ ao longo da escala de tempos, define-se o incremento de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, tal como está representado na Figura 4-1.

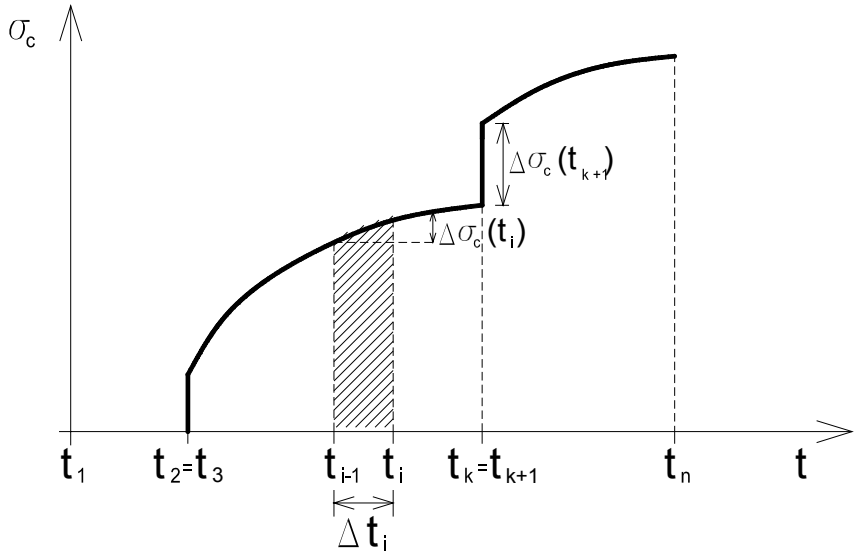


Figura 4-1 – História de tensões.

Pretende-se determinar a relação entre o incremento de tensão $\Delta\sigma_c(t_i)$ e o incremento de deformação mecânica $\Delta\varepsilon_{c\sigma}(t_i)$, que se produzem no incremento de tempo Δt_i. Para isso, substitui-se o integral da equação [4-1] por uma soma finita (equação [4-2]), supondo que se conhece a história de tensões, história essa que é tornada descontínua. Seguindo a regra do rectângulo, considera-se que o incremento de tensão $\Delta\sigma_c(t_i)$ é aplicado no instante t_i.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t_n) = \sum_{i=1}^{n} J(t_n, t_i)\cdot\Delta\sigma_c(t_i) = \sum_{i=1}^{n-1} J(t_n, t_i)\cdot\Delta\sigma_c(t_i) + J(t_n, t_n)\cdot\Delta\sigma_c(t_n) \qquad [4\text{-}2]$$

Também:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} J(t_{n-1}, t_i)\cdot\Delta\sigma_c(t_i) \qquad [4\text{-}3]$$

Subtraindo [4-3] de [4-2], obtém-se:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t_n) - \varepsilon_{c\sigma}(t_{n-1}) = J(t_n, t_n)\cdot\Delta\sigma_c(t_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[J(t_n, t_i) - J(t_{n-1}, t_i)\right]\cdot\Delta\sigma_c(t_i) \qquad [4\text{-}4]$$

donde se obtém:

$$\Delta\sigma_c(t_n) = \frac{1}{J(t_n, t_n)}\cdot\left\{\Delta\varepsilon_{c\sigma}(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1}\left[J(t_n, t_i) - J(t_{n-1}, t_i)\right]\cdot\Delta\sigma_c(t_i)\right\} \qquad [4\text{-}5]$$

Assim, a resolução da equação integral [4-1] é substituída pela realização de uma série de análises elásticas (ou pseudo-elásticas uma vez que o módulo de elasticidade é reduzido), mas explícitas, incrementais e com deformações iniciais.

Outras regras podem ser adoptadas na transformação da história contínua de tensões numa história de tensões descontínua, conduzindo a uma integração numérica com uma aproximação trapezoidal ou linear (ver Póvoas (1991)).

Com uma adequada subdivisão da escala do tempo em intervalos suficientemente pequenos, consegue-se uma elevada precisão.

4.2.3 Conversão para a forma diferencial

O procedimento geralmente adoptado em análises que têm por base o MEF, consiste na obtenção de relações diferenciais incrementais tensão–extensão através da aproximação (com o nível de precisão desejado) da função de fluência por leis incrementais baseadas em cadeias de modelos reológicos (compostos por elementos com envelhecimento). Esta formulação tem a vantagem de não necessitar da gravação de toda a história de tensões da estrutura (ao contrário do método apresentado no sub-capítulo 4.2.2), sendo requerida assim uma menor capacidade de memória computacional durante o cálculo.

A exposição que se segue é feita para o caso bidimensional, podendo ser generalizada a outras situações, nomeadamente a unidimensional ou a tridimensional. No caso bidimensional, a relação entre o vector extensão e o vector tensão é expressa pela equação [4-6] (neste sub-capítulo apresentam-se relações entre tensões e extensões mecânicas para o betão, omitindo-se os índices inferiores c, no caso das tensões e $c\sigma$, no caso das extensões mecânicas):

$$\underline{\varepsilon}^{e}(t) = \int_{t_0}^{t} J(t,\tau)\underline{C}\frac{\partial \underline{\sigma}(\tau)}{\partial \tau}d\tau \qquad [4\text{-}6]$$

sendo $\underline{\varepsilon}^{e}(t)$ o vector das extensões mecânicas no betão e $\underline{C}$ a matriz adimensional expressa em função do coeficiente de poisson, ν:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \qquad [4\text{-}7]$$

A função de fluência pode ser escrita como uma série de Dirichlet:

$$J(t,\tau)=\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{1}{E_{\alpha}(\tau)}\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{\alpha}}}\right) \qquad [4\text{-}8]$$

em que $E_{\alpha}(\tau)$ indica que a rigidez do modelo depende da idade de carregamento, τ, permitindo assim a consideração do envelhecimento do betão. Fisicamente, a série de Dirichlet pode ser interpretada como uma cadeia de Kelvin (Figura 4-2). A rigidez da mola, $E_{\alpha}(\tau)$, e a viscosidade do amortecedor, $\eta_{\alpha}(\tau)$, de cada elemento da cadeia de Kelvin determinam o tempo de retardação, λ_{α} (valor constante, isto é, não depende da idade de carregamento):

$$\lambda_{\alpha}=\frac{\eta_{\alpha}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} \qquad [4\text{-}9]$$

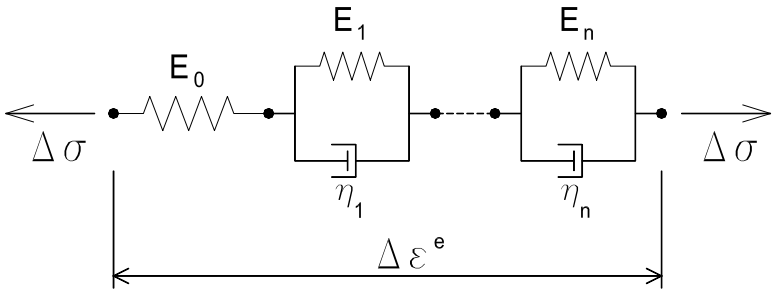


Figura 4-2 – Cadeia de Kelvin.

Partindo da equação [4-6] e do desenvolvimento em série de Dirichlet da função de fluência, pode obter-se uma equação que exprime o acréscimo do vector tensão, $\underline{\Delta\sigma}$, em função do acréscimo do vector deformação, $\underline{\Delta\varepsilon}^{e}$, adequada para implementação do cálculo em programas de cálculo automático baseados no MEF:

$$\underline{\Delta\sigma}=\tilde{E}(t^{*})\underline{D}\underline{\Delta\varepsilon}^{e}+\underline{\tilde{\sigma}}(t) \qquad [4\text{-}10]$$

em que $\underline{D}=\underline{C}^{-1}$. Em DIANA (2002) é apresentada a dedução da expressão [4-10] e o modo de determinação dos parâmetros $\tilde{E}(t^{*})$ e $\underline{\tilde{\sigma}}(t)$. Estes são dois parâmetros cujo valor pode ser calculado no início do intervalo de tempo em análise, sem ser necessário o conhecimento de toda a história de tensões da estrutura. Em DIANA (2002) é também explicado sucintamente o procedimento usado para a determinação dos parâmetros $E_{\alpha}(\tau)$ e $\eta_{\alpha}(\tau)$, que definem a cadeia de Kelvin.

Consegue-se assim obter uma relação entre o incremento de tensão e o incremento de deformação durante cada intervalo de tempo, à custa de um conjunto de parâmetros que são conhecidos no início de cada intervalo de tempo.

É importante salientar que a dedução das expressões apresentadas tem por base os seguintes pressupostos:

- é considerada uma variação linear de tensão entre t e $t+\Delta t$;
- é considerado que as propriedades mecânicas do material têm valor constante ao longo do intervalo de tempo Δt, sendo avaliadas num instante t^*, geralmente tomado a meio do intervalo de tempo.

A definição dos intervalos de tempo a considerar no cálculo deverá ter em conta estes aspectos, podendo ser adoptados intervalos de tempo maiores quando o betão é mais velho e em idades afastadas da actuação de variações instantâneas de tensão. Note-se que, quando existem fendas, os intervalos de tempos adoptados devem ser mais pequenos pois, nessa situação, as variações de tensão no betão são mais significativas.

4.2.4 Solução algébrica: Método do Módulo Efectivo Ajustado

O Método do Módulo Efectivo Ajustado (MMEA) consiste na conversão da equação integral de Rieman numa expressão algébrica (equação [4-11]), de natureza aproximada, realizando-se o cálculo visco-elástico com envelhecimento num único intervalo de tempo. Assim, a resposta $\varepsilon_{c\sigma}(t)$ a uma solicitação $\sigma_c(t)=\sigma_c(t_0)+\Delta\sigma_c(t,t_0)$, em que $\Delta\sigma_c(t,t_0)$ representa a variação de tensão que ocorre gradualmente ao longo do intervalo de tempo, pode ser dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c\sigma}(t) &= \sigma_c(t_0)\cdot J(t,t_0)+\Delta\sigma_c(t,t_0)\cdot\left[\frac{1}{E_{ci}(t_0)}+\chi\frac{\phi(t,t_0)}{E_{ci}}\right] \\ &= \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c,ef}(t,t_0)}+\frac{\Delta\sigma_c(t,t_0)}{E_{c,adj}(t,t_0)}\end{aligned} \qquad [4\text{-}11]$$

tendo sido introduzido o módulo de elasticidade efectivo, $E_{c,ef}(t,t_0)$:

$$E_{c,ef}(t,t_0)=\frac{1}{J(t,t_0)}=\frac{E_{ci}(t_0)}{1+\frac{E_{ci}(t_0)}{E_{ci}}\phi(t,t_0)} \qquad [4\text{-}12]$$

o módulo de elasticidade efectivo ajustado, $E_{c,adj}(t,t_0)$:

$$E_{c,adj}(t,t_0)=\frac{E_{ci}(t_0)}{1+\chi\dfrac{E_{ci}(t_0)}{E_{ci}}\phi(t,t_0)} \qquad [4\text{-}13]$$

e ainda o coeficiente de envelhecimento χ. A natureza aproximada da equação resulta da aproximação envolvida na determinação deste coeficiente. No MC90 (CEB 1993) é referido que, na determinação dos efeitos da fluência a longo prazo, podem ser obtidas boas aproximações tomando $\chi = t_0^{0.5}/\left(1+t_0^{0.5}\right)$, podendo ser adoptado, simplificadamente, um valor constante de 0.8 para valores de t_0 entre 10 e 30 dias.

Note-se que a deformação a longo prazo provocada pela actuação de uma tensão inicial, $\sigma_c(t_0)$, ou de uma variação lenta de tensão (que resulta, geralmente, de uma redistribuição de tensões), $\Delta\sigma_c(t,t_0)$, é calculada utilizando, respectivamente, o módulo de elasticidade efectivo ou o módulo de elasticidade efectivo ajustado. Na equação [4-13], que define o valor do módulo de elasticidade efectivo ajustado, o coeficiente de envelhecimento funciona como um factor redutor da deformação por fluência (ver expressão [4-11]), que traduz o facto de o acréscimo de tensão $\Delta\sigma_c(t,t_0)$ não ocorrer quando $t=t_0$, mas mais tarde e, portanto, a fluência ter lugar sobre um betão mais velho do que o existente à data t_0.

Se a variação de tensão $\Delta\sigma_c(t,t_0)$ é pequena quando comparada com o valor de $\sigma_c(t)$ (variação inferior a 10% a 20%, segundo o MC90 (CEB 1993)), pode ser adoptado, simplificadamente, $\chi=1$, resultando a expressão [4-14] para o cálculo da resposta $\varepsilon_c(t)$ (Método do Módulo Efectivo).

$$\varepsilon_{c\sigma}(t)=\sigma_c(t)\cdot J(t,t_0)=\frac{\sigma_c(t)}{E_{c,ef}(t,t_0)} \qquad [4\text{-}14]$$

O MMEA conduz a resultados menos rigorosos do que os fornecidos pelas metodologias apresentadas nos sub-capítulos 4.2.2 e 4.2.3. No entanto, o ganho em termos de precisão conseguido com os modelos mais refinados pode ser dispensado quando a estimativa das características de fluência e retracção é pobre (CEB 1993). Além disso, o MMEA pode ser útil para a realização de cálculos simples para validação de resultados do MEF.

4.3 Modelação da fendilhação

4.3.1 Modelos de fendilhação

Para a representação da fendilhação nos modelos de elementos finitos, têm sido adoptados dois conceitos distintos: o conceito de fenda discreta e o conceito de fenda distribuída.

Nos modelos resultantes da aplicação do conceito de fenda discreta, a fenda é modelada directamente através da separação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes, introduzindo-se, em consequência, uma descontinuidade na respectiva interface. Este tipo de modelos é mais adequado para problemas em que exista a formação de um número reduzido de fendas, podendo a sua localização ser prevista antes de ser realizada a análise, embora existam algoritmos que dispensam esse conhecimento prévio da localização das fendas (ver Póvoas (1991)).

Nos modelos em que é adoptado o conceito de fenda distribuída, o material fendilhado é considerado como um meio contínuo, mantendo-se portanto a continuidade da geometria e do campo de deslocamentos da malha de elementos finitos do problema. O efeito da fendilhação é considerado através de uma modificação das relações constitutivas definidas para o material (com a fendilhação, a relação tensão-extensão inicialmente isotrópica é substituída por uma relação tensão-extensão ortotrópica). Estes modelos são mais adequados para a análise de problemas caracterizados pela ocorrência de padrões de fendilhação difusa, podendo também ser utilizados na análise de problemas com fractura de tipo localizado (elementos de betão simples ou pouco reforçados). Neste sub-capítulo serão abordados apenas os modelos de fendilhação distribuída, uma vez que o modelo utilizado no presente trabalho é desta natureza.

Dentro do conceito de fenda distribuída, distinguem-se os modelos de fendas fixas e os modelos de fendas rodadas. Nos modelos de fendas fixas a direcção da normal à fenda permanece inalterada após a sua formação. Nos modelos de fendas rodadas, por outro lado, a normal à fenda pode rodar durante o processo de fractura do material (mantendo co-axialidade com os eixos principais de deformação ou com os eixos principais de tensão). Neste trabalho foi utilizado um modelo baseado no conceito de fenda distribuída, com decomposição de extensões, em que é permitida a formação de múltiplas fendas fixas num ponto de integração. A escolha deste modelo deveu-se ao facto de ele permitir a combinação do efeito da fendilhação com outros fenómenos não lineares, tais como a fluência e a retracção.

4.3.1.1 Modelo com decomposição de extensões e múltiplas fendas fixas

A seguir, descrevem-se sucintamente os aspectos mais relevantes do modelo com decomposição de extensões e múltiplas fendas fixas. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em Borst (1991) e em DIANA (2002). A exposição é feita para o caso bidimensional, podendo ser generalizada a outros casos. Neste sub-capítulo, omitem-se os índices inferiores c (no caso das tensões) e $c\sigma$ (no caso das extensões mecânicas).

O aspecto fundamental deste modelo é a decomposição do incremento de extensão total $\underline{\Delta\varepsilon}$ numa componente elástica (relativa ao betão), $\underline{\Delta\varepsilon}^{e}$, e numa componente atribuída às fendas, $\underline{\Delta\varepsilon}^{cr}$, sendo ambas as componentes definidas no referencial global da estrutura:

$$\underline{\Delta\varepsilon} = \underline{\Delta\varepsilon}^{e} + \underline{\Delta\varepsilon}^{cr} \qquad [4\text{-}15]$$

A decomposição de extensões traduz uma associação em série do betão e das fendas, tal como é representado na Figura 4-3.

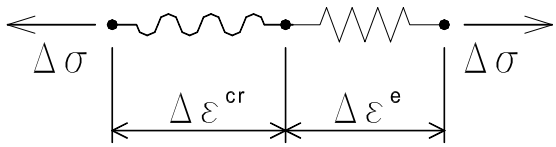


Figura 4-3 – Associação em série, no modelo com decomposição de extensões.

Lei constitutiva para o betão entre fendas

O comportamento do betão é regido pela lei constitutiva:

$$\underline{\Delta\sigma} = \underline{D}^{e} \cdot \underline{\Delta\varepsilon}^{e} \qquad [4\text{-}16]$$

sendo $\underline{D}^{e}$ a matriz de elasticidade:

$$\underline{D}^{e} = \frac{E}{1-\nu^{2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \qquad [4\text{-}17]$$

Lei constitutiva para as fendas

A relação entre o incremento de tensão $\underline{\Delta s}_i^{cr} = \left[\Delta\sigma_{nn,i}^{cr}, \Delta\tau_{nt,i}^{cr}\right]^T$ e o incremento de deformação $\underline{\Delta e}_i^{cr} = \left[\Delta\varepsilon_{nn,i}^{cr}, \Delta\gamma_{nt,i}^{cr}\right]^T$ nas fendas é estabelecida no referencial local $n-t$ alinhado com cada fenda i (tal como ilustrado na Figura 4-4). A primeira componente de cada vector refere-se à abertura de fenda (direcção normal à fenda) e a segunda componente refere-se ao deslizamento na fenda (direcção tangencial à fenda). Em cada fenda, é estabelecida uma relação entre $\underline{\Delta s}_i^{cr}$ e $\underline{\Delta e}_i^{cr}$ do tipo:

$$\underline{\Delta s}_i^{cr} = \underline{D}_i^{cr} \cdot \underline{\Delta e}_i^{cr} \qquad [4\text{-}18]$$

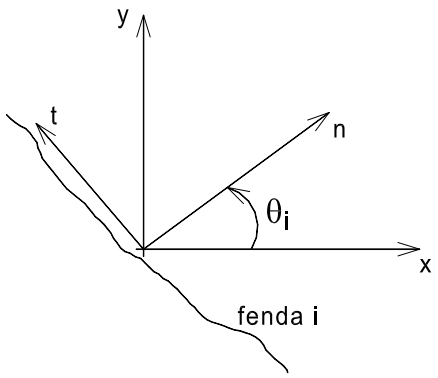


Figura 4-4 – Referencial global e referencial local de uma fenda.

O sucesso do modelo depende também de uma adequada formulação da matriz D_i^{cr}. Desprezando, simplificadamente, a relação entre a extensão normal à fenda e a tensão tangencial na fenda, e entre a distorção na fenda e a tensão normal na fenda, resulta a seguinte relação para cada fenda i:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn,i}^{cr} \\ \Delta\tau_{nt,i}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{I} & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn,i}^{cr} \\ \Delta\gamma_{nt,i}^{cr} \end{Bmatrix} \qquad [4\text{-}19]$$

em que D^{I} e D^{II} são parâmetros que dependem das propriedades de fractura do betão em termos de abertura de fenda e de deslizamento na fenda, respectivamente. Os seus valores podem ser obtidos considerando uma fenda cuja orientação esteja alinhada com o sistema de coordenadas global da estrutura. Introduzindo na equação [4-15] as relações seguintes:

$$\Delta\varepsilon_{nn} = \frac{\Delta\sigma_{nn}}{\mu' E} \qquad \Delta\varepsilon_{nn}^{e} = \frac{\Delta\sigma_{nn}}{E} \qquad \Delta\varepsilon_{nn}^{cr} = \frac{\Delta\sigma_{nn}}{D^{I}} \qquad [4\text{-}20]$$

obtém-se, após simples transformações algébricas:

$$D^{I} = \frac{\mu'}{1-\mu'}E \qquad [4\text{-}21]$$

Procedendo de forma análoga para a tensão de corte, obtém-se o valor de D^{II}:

$$D^{II} = \frac{\beta'}{1-\beta'}G \qquad [4\text{-}22]$$

O significado dos parâmetros μ' e β' está expresso na Figura 4-5.

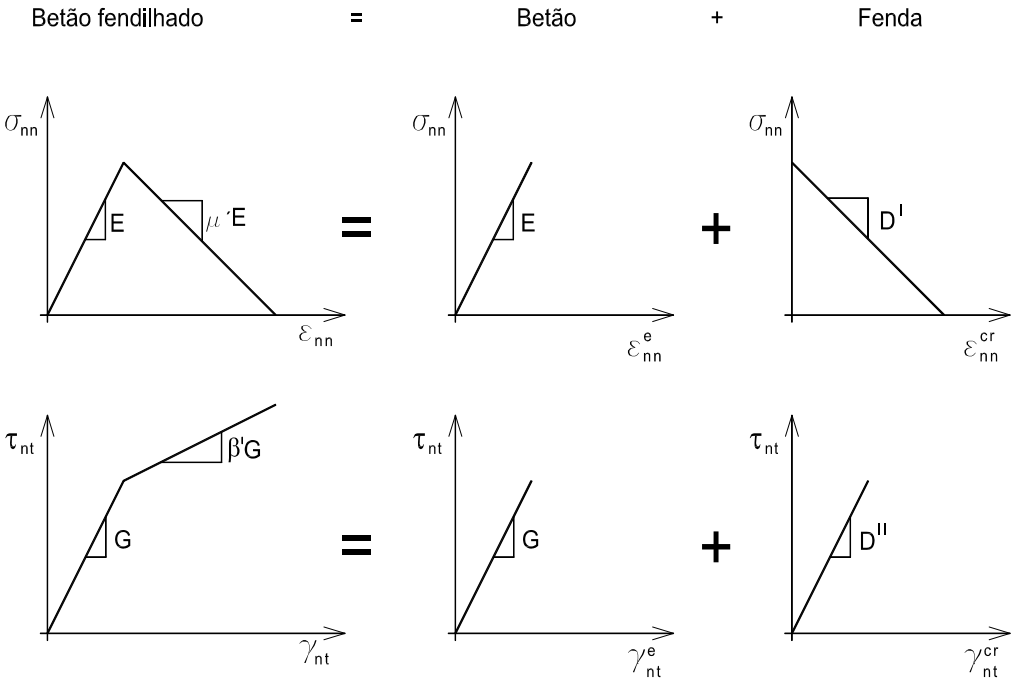


Figura 4-5 – Relação entre os parâmetros μ' e β' e os parâmetros D^{I} e D^{II}. Em cima: tensão normal. Em baixo: tensão de corte.

O parâmetro β' constitui um factor redutor do módulo de elasticidade transversal, G, após a fendilhação. O modelo implementado no programa DIANA (2002) permite apenas a consideração de um factor redutor, β', constante após fendilhação. Apesar de muitos autores terem adoptado um valor de β' constante, sendo muitas vezes considerado $\beta' = 0.2$ (ver Borst (1991)), uma modelação mais realista é conseguida fazendo depender o valor de β' da extensão de fendilhação $\varepsilon^{cr}_{nn,i}$, tal como considerou Figueiras (1983), uma vez que a capacidade da fenda para transmitir tensões de corte diminui com o aumento da extensão normal à fenda.

Consideração da existência de mais do que uma fenda num ponto de integração

O vector $\underline{\Delta\varepsilon}^{cr}$ pode ser composto pelas contribuições de várias fendas que ocorram simultaneamente:

$$\underline{\Delta\varepsilon}^{cr} = \underline{\Delta\varepsilon}_1^{cr} + \underline{\Delta\varepsilon}_2^{cr} + \ldots \qquad [4\text{-}23]$$

em que $\underline{\Delta\varepsilon}_1^{cr}$ é o vector das deformações numa fenda primária, $\underline{\Delta\varepsilon}_2^{cr}$ é o vector das deformações numa fenda secundária e assim sucessivamente (definidos no referencial global da estrutura). Usando uma matriz de transformação, $\underline{T}$, convenientemente definida e assemblando nas matrizes $\underline{\Delta e}^{cr}$, $\underline{\Delta s}^{cr}$ e $\underline{D}^{cr}$ os contributos relativos a cada fenda ($\underline{\Delta e}_i^{cr}$, $\underline{\Delta s}_i^{cr}$ e D_i^{cr} respectivamente), podem escrever-se as relações (ver Borst (1991)):

$$\underline{\Delta\varepsilon}^{cr} = \underline{T} \cdot \underline{\Delta e}^{cr} \qquad [4\text{-}24]$$

$$\underline{\Delta s}^{cr} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{\Delta\sigma} \qquad [4\text{-}25]$$

$$\underline{\Delta s}^{cr} = \underline{D}^{cr} \cdot \underline{\Delta e}^{cr} \qquad [4\text{-}26]$$

A possibilidade da existência de mais do que uma fenda aberta simultaneamente num dado ponto de integração resulta do seguinte facto: após a formação de uma fenda, quando é usado um modelo de retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas, o valor da tensão normal retida e o valor da tensão de corte instalada na fenda podem originar uma rotação dos eixos principais de tensão e o surgimento de uma tensão principal de tracção tal que justifique a formação de uma nova fenda com orientação diferente da primeira. Então, de acordo com este modelo, forma-se uma nova fenda sempre que se verifiquem simultaneamente as duas condições seguintes:

- a relação entre os valores das tensões principais é tal que é violado o critério limite, designado na nomenclatura inglesa por *tension cut-off criteria* (representam-se na Figura 4-6 os dois critérios implementados no programa DIANA (2002), assim como uma curva representativa dos resultados experimentais);
- o ângulo entre a direcção principal de tracção e a direcção normal a qualquer fenda previamente formada é superior a um determinado valor mínimo, designado na nomenclatura inglesa por *threshold angle*.

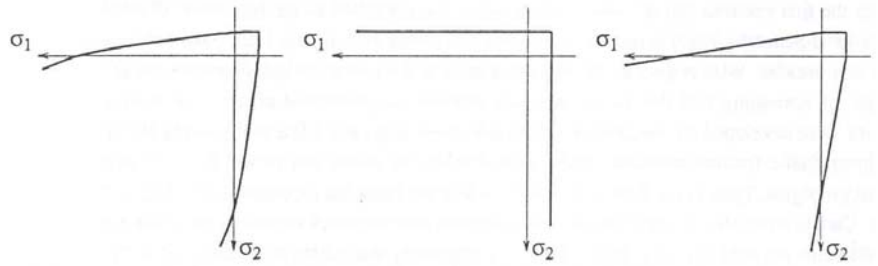


Figura 4-6– *tension cut-off criteria*. Resultados experimentais (à esquerda) e modelos simplificados implementados no programa DIANA (2002).

Cada nova fenda tem direcção perpendicular à direcção da tensão principal de tracção que lhe deu origem.

Relação incremental entre tensão e deformação

Para a obtenção da relação incremental entre os vectores das tensões e das deformações, usam-se as relações [4-15], [4-16], [4-24], [4-25] e [4-26], obtendo-se:

$$\underline{\Delta\varepsilon} = \left[\left(\underline{D}^{e}\right)^{-1} + \underline{T}\left(\underline{D}^{cr}\right)^{-1}\underline{T}^{T}\right]\cdot\underline{\Delta\sigma} \qquad [4\text{-}27]$$

Usando a fórmula de Woodbury (Mathworld 1999), pode escrever-se a equação [4-27] da seguinte forma:

$$\underline{\Delta\sigma} = \left[\underline{D}^{e} - \underline{D}^{e}\,\underline{T}\left(\underline{D}^{cr} + \underline{T}^{T}\,\underline{D}^{e}\,\underline{T}\right)^{-1}\underline{T}^{T}\,\underline{D}^{e}\right]\cdot\underline{\Delta\varepsilon} \qquad [4\text{-}28]$$

Obtém-se assim uma relação incremental entre os vectores das tensões e das deformações, que pode ser utilizada em programas baseados no MEF.

Neste modelo, implementado no programa DIANA (2002), a descarga (fecho das fendas) é feita com a rigidez secante.

A forma como o modelo se encontra implementado não permite a consideração da rotura por fluência (diminuição da tensão de rotura quando as tensões actuantes têm carácter de longa duração) do betão traccionado.

4.3.1.2 Problemas com fractura localizada

Para que a solução obtida não dependa da malha de elementos finitos adoptada, a definição do ramo descendente do diagrama que relaciona a tensão normal com a extensão normal à fenda (efeito de *tension softening*) é feita com base num critério energético de propagação da fendilhação, formulado com base na energia de fractura do material, G_F, e considerando que essa energia é dissipada numa banda cuja largura, h, está relacionada com a configuração da malha de elementos finitos (essa banda representa no modelo a zona de fractura, onde se dá a propagação da fendilhação).

Considera-se que a extensão na direcção normal à fenda tem um valor constante ao longo da largura h. Esta hipótese simplificativa não é geralmente válida, justificando-se face à aproximação envolvida na quantificação do parâmetro h (ver Póvoas (1991)). Neste trabalho considera-se uma forma linear para o diagrama de retenção das tensões de tracção, forma esta que tem como principal vantagem a sua simplicidade, tendo sido utilizada por diversos autores (ver Póvoas (1991)).

O diagrama de retenção das tensões de tracção é definido então como se apresenta a seguir.

A energia de fractura do betão, G_F (área do diagrama da Figura 4-7), pode ser expressa através da relação:

$$G_F = \int \sigma \cdot d\delta \qquad [4\text{-}29]$$

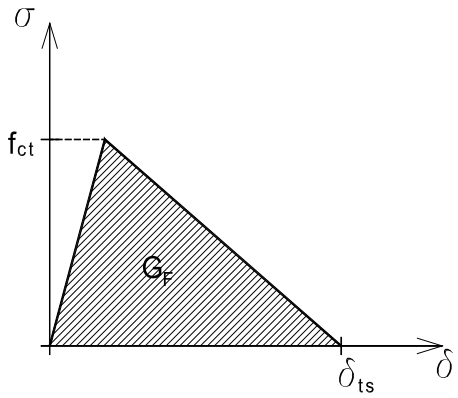


Figura 4-7 – Relação tensão-deslocamento num ensaio de tracção uniaxial.

Na hipótese de haver deformação constante da zona de fractura, de largura h:

$$\delta = \int \varepsilon \cdot dh = h \cdot \varepsilon \qquad [4\text{-}30]$$

Substituindo [4-30] em [4-29] obtém-se a relação:

$$G_F = h \cdot \int \sigma \cdot d\varepsilon = h \cdot g_F \qquad [4\text{-}31]$$

isto é, o diagrama $\sigma - \varepsilon$ deverá ter uma área $g_F = G_F / h$, tal como se representa na Figura 4-8. Então, o parâmetro ε_{ts} que define o ramo descendente do diagrama é dado por:

$$\varepsilon_{ts} = \frac{2 \cdot G_F}{h \cdot f_{ct}} \qquad [4\text{-}32]$$

O valor de h não deverá ser superior a um valor limite, dado pela expressão [4-33], que corresponde à direcção vertical do ramo descendente. Em estruturas cujas elevadas dimensões tornem impraticável a satisfação da condição [4-33], Bazant e Oh, citados em Póvoas (1991), sugerem a adopção do diagrama representado na Figura 4-9, onde $f_{ct,eq}$ representa a tensão de rotura à tracção equivalente, determinada com a condição de assegurar a preservação da energia de fractura associada ao ponto de amostragem fendilhado.

$$h < \frac{2 \cdot G_F \cdot E}{f_{ct}^2} \qquad [4\text{-}33]$$

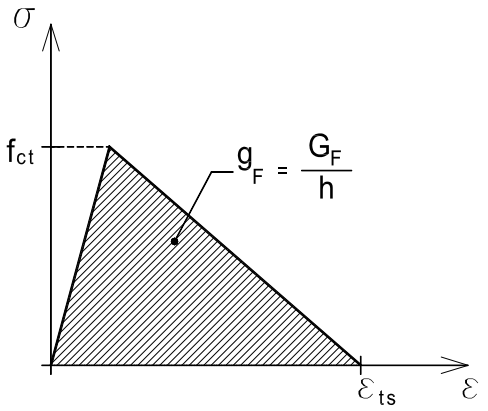


Figura 4-8 – Diagrama $\sigma - \varepsilon$ para estruturas de betão simples submetidas à tracção.

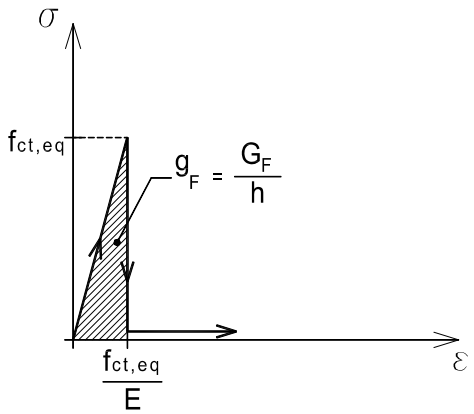


Figura 4-9 – Diagrama para o betão traccionado, corrigido segundo Bazant e Oh.

4.3.1.3 Problemas com padrões de fendilhação difusa

Em elementos de betão armado ou pré-esforçado com cordões aderentes, as fendas são distribuídas com espaçamentos sensivelmente regulares. O betão entre fendas tem um efeito significativo para a rigidez desses elementos, efeito esse que é designado na nomenclatura

inglesa por *tension stiffening*. Tal como foi exposto no sub-capítulo 3.3.3, este efeito pode ser traduzido por uma retenção de tensões de tracção (tensão média ao longo do comprimento afectado pela fendilhação) pelo betão após a fendilhação. Esta abordagem é adequada quando a armadura é modelada através de elementos embebidos no betão, sendo a deformação da armadura igual à deformação total da fibra de betão alinhada com cada varão de aço. O efeito de *tension stiffening* só deve ser considerado na zona efectiva de betão que envolve a armadura traccionada, tal como definido na Figura 3-19.

No presente estudo, o efeito de *tension stiffening* é modelado com o diagrama representado na Figura 4-10 a). Por questões de ordem prática, a limitação da força no tirante (composto pela armadura e pelo betão envolvente), após a cedência da armadura na secção da fenda, é considerada através de uma redução da tensão de cedência da armadura, tal como se ilustra na Figura 4-10. Assim, o comportamento de um elemento de betão que inclua zonas com diferentes percentagens de armadura, pode ser modelado com um único diagrama tensão-extensão para o betão traccionado, tendo a armadura uma tensão de cedência fictícia, f'_{sy}, dada por:

$$f'_{sy} = f_{sy} - 0.4 \cdot f_{ctm} \frac{A_c}{A_s} \qquad [4\text{-}34]$$

A tensão f'_{sy} representa o valor médio da tensão no aço do tirante de betão armado, quando se verifica a cedência na secção da fenda.

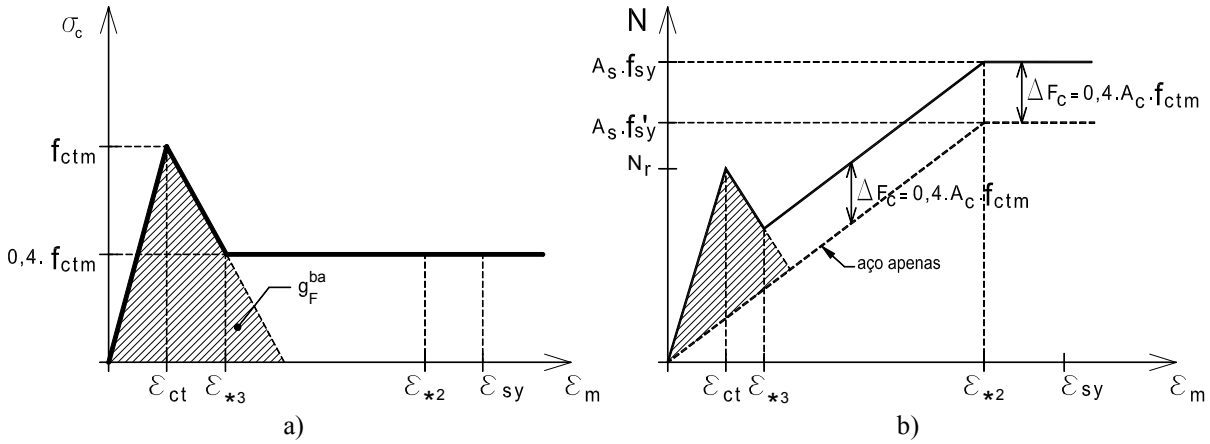


Figura 4-10 – Efeito de *tension stiffening*: a) diagrama tensão-extensão para o betão traccionado; b) diagrama esforço-extensão para um tirante traccionado.

Os modelos de simulação do comportamento do betão armado fendilhado, apresentados no sub-capítulo 3.3.3, baseiam-se na resposta de um tirante de betão armado. Nessa situação, as

fendas têm uma orientação ortogonal em relação à armadura. Em problemas onde se verifique um desvio significativo entre as direcções das armaduras e da fendilhação, a sua influência deve ser tomada em consideração. Tal pode ser feito através da definição das propriedades de uma armadura fictícia, ortogonal à fenda, que desenvolva efeito semelhante ao das armaduras reais (Barros 1995). Quando o desvio não é significativo (o que foi assumido no presente estudo), define-se para o betão traccionado, segundo a direcção normal a cada fenda, a relação tensão-extensão, apresentada anteriormente.

Tal como foi referido no Capítulo 3, quando as acções actuantes têm um carácter de longa duração ou são ciclicamente repetidas, a retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas é menor do que quando as acções têm um carácter instantâneo. Nas análises numéricas efectuadas no presente trabalho considera-se, durante a fase de fendilhação estabilizada, uma tensão média retida pelo betão igual a 40 por cento da sua resistência à tracção, tal como se representa na Figura 4-10. Assim, o valor da abertura de fendas pode ser calculado (de uma forma coerente com o que é estabelecido no MC90 (CEB 1993) e no EC2 (CEN 2002), para situações em que as acções são de longa duração ou ciclicamente repetidas), multiplicando o valor da extensão de fendilhação, ε_{cr}^{nn}, pela distância máxima entre fendas, $l_{s,max}^{k}$.

4.3.2 Associação de modelos de fendilhação, de fluência e de retracção

Tal como foi referido no sub-capítulo 4.3.1, a utilização de um modelo de fendilhação baseado no conceito de fenda distribuída, com decomposição de extensões e múltiplas fendas fixas, permite a combinação do fenómeno de fendilhação e do comportamento visco-elástico do betão.

O procedimento de cálculo é semelhante ao que foi exposto no sub-capítulo 4.3.1.1, sendo modificada a lei constitutiva que rege o comportamento do betão entre fendas.

Usando o desenvolvimento em série de Dirichlet da função de fluência, a relação incremental entre tensões e deformações do betão entre fendas é expressa pela relação [4-10]. Introduzindo a notação $\underline{D}^{ve} = \tilde{E}(t^*)\underline{D}$ na equação [4-10], resulta:

$$\underline{\Delta\sigma} = \underline{D}^{ve}\,\underline{\Delta\varepsilon}^{e} + \underline{\tilde{\sigma}}(t) \qquad [4\text{-}35]$$

Utilizando a lei constitutiva que rege o comportamento das fendas, descrita no sub-capítulo 4.3.1.1, a decomposição de extensões (equação [4-15]) traduz uma associação em série do

betão (com comportamento visco-elástico) e das fendas, tal como é representado na Figura 4-11.

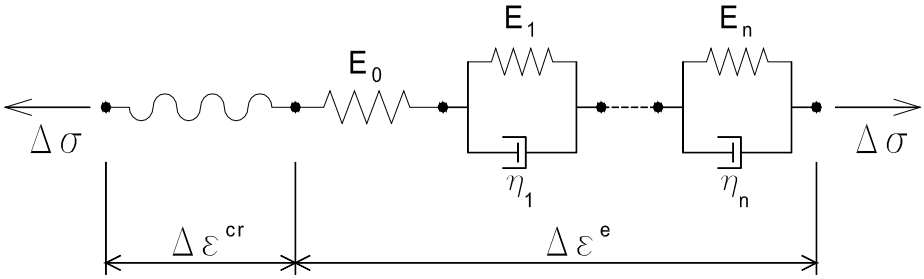


Figura 4-11 – Associação em série, no modelo com decomposição de extensões.

Usando as relações [4-15], [4-24], [4-25] e [4-26] e [4-35] obtém-se:

$$\underline{\Delta\varepsilon} = \left[\left(\underline{D}^{ve}\right)^{-1} + \underline{T}\left(\underline{D}^{cr}\right)^{-1}\underline{T}^{T}\right]\underline{\Delta\sigma} - \left(\underline{D}^{ve}\right)^{-1}\underline{\tilde{\sigma}}(t) \qquad [4\text{-}36]$$

Usando a fórmula de Woodbury (Mathworld 1999), pode escrever-se a equação [4-36] na seguinte forma:

$$\underline{\Delta\sigma} = \left[\underline{D}^{ve} - \underline{D}^{ve}\underline{T}\left(\underline{D}^{cr} + \underline{T}^{T}\underline{D}^{ve}\underline{T}\right)^{-1}\underline{T}^{T}\underline{D}^{ve}\right]\cdot\left[\underline{\Delta\varepsilon} + \left(\underline{D}^{ve}\right)^{-1}\underline{\tilde{\sigma}}(t)\right] \qquad [4\text{-}37]$$

Obtém-se assim uma relação incremental entre os vectores das tensões e das deformações, que pode ser utilizada em programas baseados no MEF.

4.4 Aplicações do Método do Módulo Efectivo Ajustado

Neste sub-capítulo utiliza-se o MMEA (equação [4-11]) para determinar a evolução, devida aos efeitos diferidos, dos esforços e do estado de tensão em estruturas pré-fabricadas com evolução da secção transversal e/ou evolução das ligações ao exterior. Apresentam-se expressões para análise simplificada do comportamento visco-elástico com envelhecimento do betão, não sendo considerado o efeito da fendilhação. Tratam-se apenas peças com secção simétrica relativamente a um eixo baricêntrico vertical. Uma vez que se procuram expressões que permitam realizar cálculos simples para validação ou pré-dimensionamento, será simplificadamente desprezado o efeito das armaduras.

A exposição tem por base os conhecimentos básicos da Resistência dos Materiais e o exposto em Favre *et al.* (1997).

4.4.1 Análise de secções compostas

Considere-se uma viga composta, constituída por uma peça pré-fabricada (adiante designada de viga), simplesmente apoiada, sobre a qual é betonada, em obra, uma camada de betão complementar (adiante designada de laje). Pretende-se avaliar o estado de tensão instalado. Durante a exposição, os símbolos relativos à viga e à laje são identificados pela inclusão, respectivamente, de um índice superior V ou L. Na Figura 4-12 representa-se esquematicamente, em alçado e corte, a estrutura em análise, apresentando-se também a nomenclatura utilizada.

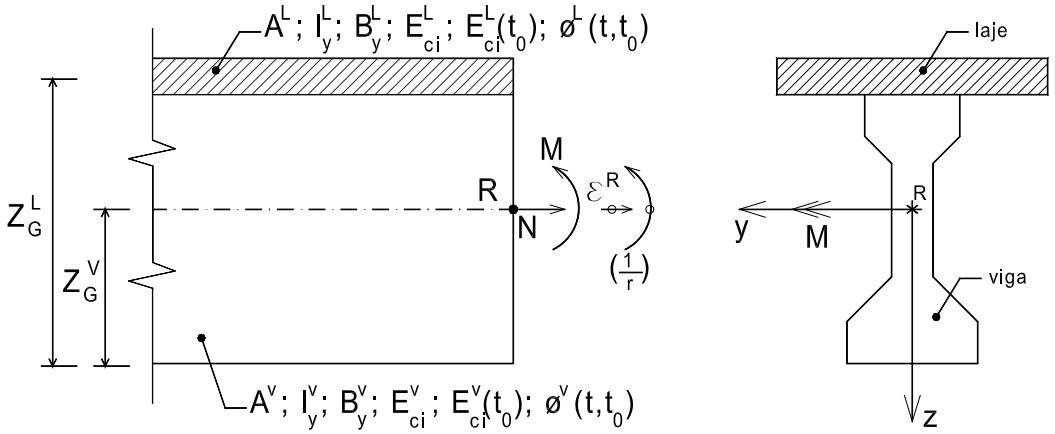


Figura 4-12 – Estrutura em análise: alçado e corte da secção transversal.

Como o centro de rigidez da peça composta evolui ao longo do tempo, o cálculo será referido (excepto quando é expresso o contrário) a um sistema de eixos principais de inércia com origem no centro de gravidade da viga (ponto R na Figura 4-12). Assim, a relação entre esforços e deformações é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^R \\ 1/r \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ci}^V\left(\overline{A}\cdot\overline{I}_y - \overline{B}_y^{\,2}\right)}\begin{bmatrix} \overline{I}_y & -\overline{B}_y \\ -\overline{B}_y & \overline{A} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N \\ M_y \end{Bmatrix} \qquad [4\text{-}38]$$

em que ε^R representa a extensão no ponto de referência e $1/r$ representa a curvatura da secção. $\overline{A}$, $\overline{I}_y$ e $\overline{B}_y$ representam respectivamente a área, a inércia e o momento estático da secção, relativamente ao eixo RY (valores homogeneizados no material da viga). E_{ci}^V representa o módulo de elasticidade do betão da viga.

A extensão e a tensão normal num ponto genérico identificado pela ordenada z são dadas pelas expressões [4-39] e [4-40], respectivamente.

$$\varepsilon(z) = \varepsilon^{R} + \frac{1}{r} \cdot z \qquad [4\text{-}39]$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} E_{ci}^{L} \cdot \varepsilon(z) & \text{, na laje} \\ E_{ci}^{V} \cdot \varepsilon(z) & \text{, na viga} \end{cases} \qquad [4\text{-}40]$$

4.4.1.1 Evolução das tensões por fluência

Estuda-se neste sub-capítulo, o efeito das acções do peso próprio da viga e do pré-esforço, acções estas que actuam inicialmente sobre a viga pré-fabricada apenas. Igual procedimento pode ser utilizado para calcular o efeito do peso próprio da laje, acção esta que actua, no entanto, num instante de tempo diferente. A secção transversal da peça em análise é de natureza evolutiva, sofrendo transformação após o betão da laje ter propriedades mecânicas relevantes. Após o instante em que a laje passa a constituir um elemento estrutural, o estado de tensão instalado na viga e na laje sofre alterações, que se dão progressivamente ao longo do tempo, com transferência de forças para a laje. Pretende-se calcular o estado de tensão instalado nos materiais, a longo prazo, designado por estado após evolução de tensões por fluência.

São adoptadas as seguintes simplificações:

$$\begin{gathered} E_{ci}^{V} = E_{ci}^{V}(t_0) = E_{ci}^{L} = E_{ci}^{L}(t_0) = E_{ci} \\ \phi^{V}(t, t_0) = \phi^{L}(t, t_0) = \phi \end{gathered} \qquad [4\text{-}41]$$

O cálculo será efectuado em quatro etapas, tal como ilustrado na Figura 4-13.

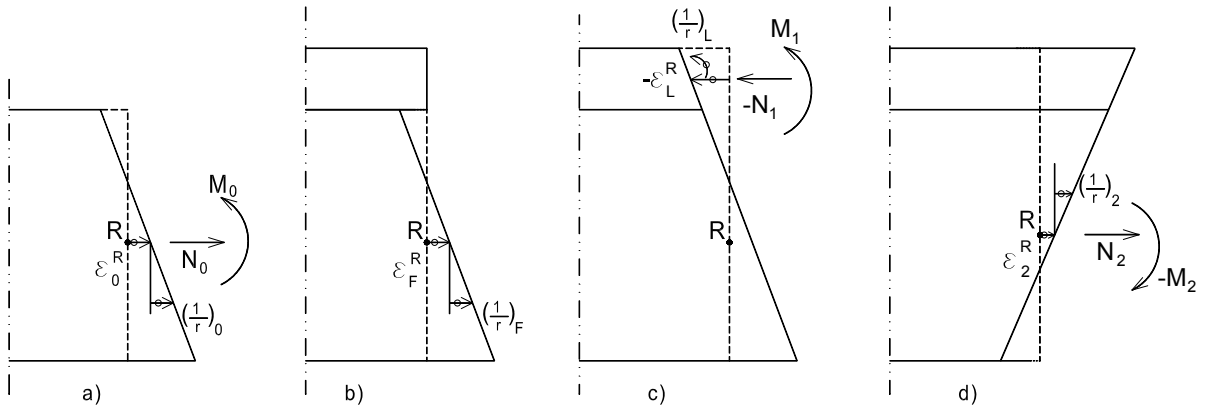


Figura 4-13 – Etapas de cálculo do estado de tensão e do estado de deformação, a longo prazo, provocado pela actuação de N_0 e M_0 sobre a viga.

A actuação dos esforços N_0 e M_0 sobre a viga origina as deformações iniciais ε_0^R e $(1/r)_0$ (Figura 4-13 a)):

$$\varepsilon_0^R = \frac{N_0}{E_{ci} \cdot A^V}$$
$$(1/r)_0 = \frac{M_0}{E_{ci} \cdot I_y^V} \qquad [4\text{-}42]$$

Esses esforços originam o diagrama de tensões normais $\sigma_0(z)$, com valores ao longo da altura da viga dados pela equação [4-43], e valores nulos na laje.

$$\sigma_0^V(z) = \frac{N_0}{A^V} + \frac{M_0}{I_y^V} z \qquad [4\text{-}43]$$

Para calcular o efeito da deformação por fluência que ocorre após a entrada em funcionamento da laje, começa-se por eliminar a ligação entre a viga e a laje. Nesta condição (Figura 4-13 b)), as deformações por fluência da viga, ε_F^R e $(1/r)_F$, seriam:

$$\varepsilon_F^R = \frac{N_0}{E_{ci} \cdot A^V} \phi$$
$$(1/r)_F = \frac{M_0}{E_{ci} \cdot I_y^V} \phi \qquad [4\text{-}44]$$

Para restabelecer a compatibilidade entre a viga e a laje, aplica-se à laje os esforços N_1 e M_1, que provocam as deformações ε_L^R e $(1/r)_L$ (Figura 4-13 c)). A relação entre estas deformações e esforços calcula-se com o módulo de elasticidade efectivo ajustado porque se trata de variações lentas de esforços que resultam de uma evolução por fluência.

$$\varepsilon_L^R = \varepsilon_F^R + (1/r)_F \cdot \left(Z_G^V - Z_G^L\right)$$
$$(1/r)_L = (1/r)_F \qquad [4\text{-}45]$$

$$N_1 = \frac{E_{ci}}{1 + \chi \cdot \phi} A^L \cdot \varepsilon_L^R$$
$$M_1 = \frac{E_{ci}}{1 + \chi \cdot \phi} I_y^L \cdot (1/r)_L \qquad [4\text{-}46]$$

Para restabelecer o equilíbrio, aplica-se ao elemento composto (viga e laje) os esforços N_2 e M_2, que anulam os esforços N_1 e M_1 (Figura 4-13 d)). As expressões [4-47] são obtidas por substituição dos valores dados pelas equações [4-44] a [4-46].

$$\begin{aligned} N_2 &= -N_1 = -\frac{A^L}{1+\chi\cdot\phi}\left[\frac{N_0\cdot\phi}{A^V}+\frac{M_0\cdot\phi}{I^V}\left(y_G^V-y_G^L\right)\right] \\ M_2 &= -M_1 - N_1\cdot\left(Z_G^V-Z_G^L\right)= \\ &= -\frac{M_0\cdot\phi\cdot I_y^L}{(1+\chi\cdot\phi)\cdot I_y^V}-\frac{A^L}{1+\chi\cdot\phi}\left[\frac{N_0\cdot\phi}{A^V}+\frac{M_0\cdot\phi}{I_y^V}\left(Z_G^V-Z_G^L\right)\right]\cdot\left(Z_G^V-Z_G^L\right) \end{aligned} \qquad [4\text{-}47]$$

Com a equação [4-38] determinam-se as deformações ε_2^R e $(1/r)_2$, provocadas pelos esforços N_2 e M_2, sendo a rigidez dos materiais calculada com base no módulo de elasticidade efectivo ajustado. A partir das equações [4-39] e [4-40], é possível calcular o diagrama de tensões normais na secção, provocado pelos esforços N_2 e M_2. Esse diagrama é definido pela equação [4-48]:

$$\sigma_2^V(z)=\sigma_2^L(z)=\frac{1}{\overline{A}\overline{I}_y-\overline{B}_y^2}\left(\overline{I}_y N_2-\overline{B}_y M_2-\overline{B}_y N_2 z+\overline{A}M_2 z\right) \qquad [4\text{-}48]$$

O diagrama de tensões normais instaladas na viga a longo prazo é obtido pela sobreposição dos efeitos de N_0, M_0, N_2 e M_2. Na laje, esse diagrama é obtido por sobreposição dos efeitos de N_1, M_1, N_2 e M_2 (ver Figura 4-13).

Por outro lado, se a secção composta fosse submetida à actuação dos esforços N_0 e M_0 (admitindo que a estrutura não era construída por fases, mas simultaneamente), aplicados no ponto R, resultariam as seguintes deformações iniciais e o seguinte diagrama de tensões normais, calculados a partir das equações [4-38] a [4-40]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{simult}^R \\ (1/r)_{simult} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ci}\left(\overline{A}\cdot\overline{I}_y-\overline{B}_y{}^2\right)}\begin{bmatrix} \overline{I}_y & -\overline{B}_y \\ -\overline{B}_y & \overline{A} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \qquad [4\text{-}49]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{simult}^V(z) &= \sigma_{simult}^L(z)=E_{ci}\cdot\left[\varepsilon_{simult}^R+\left(\frac{1}{r}\right)_{simult}\cdot z\right]= \\ &= \frac{1}{\overline{A}\overline{I}_y-\overline{B}_y^2}\left(\overline{I}_y N_0-\overline{B}_y M_0-\overline{B}_y N_0 z+\overline{A}M_0 z\right) \end{aligned} \qquad [4\text{-}50]$$

Através de simples operações matemáticas, atendendo a que $\overline{B}_y = A^L \cdot \left(Z_G^V - Z_G^L\right)$ e fazendo intervir o teorema de Steiner ($\overline{I}_y = I_y^V + I_y^L + \overline{B}_y \cdot \left(Z_G^V - Z_G^L\right)$), obtém-se a equação [4-51], que permite o cálculo do diagrama de tensões normais instalado na viga e na laje a longo prazo, $\sigma_{final}(z)$. A sua dedução não é aqui apresentada para não alongar a exposição.

$$\sigma_{final}(z) = \sigma_0(z) + \left[\sigma_{simult}(z) - \sigma_0(z)\right]\frac{\phi}{1+\chi\cdot\phi} \qquad [4\text{-}51]$$

Na Figura 4-14 apresenta-se, para um caso de exemplo, os três diagramas de tensões incluídos na equação [4-51]. Esta equação traduz que o diagrama de tensões a longo prazo, $\sigma_{final}(z)$, tem valores intermédios entre o diagrama de tensões iniciais, $\sigma_0(z)$ e o diagrama de tensões correspondente a uma situação de construção simultânea, $\sigma_{simult}(z)$, valores esses que são obtidos à custa do coeficiente $\phi/(1+\chi\cdot\phi)$.

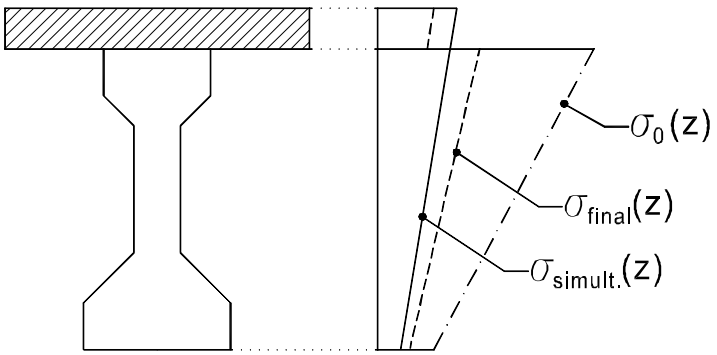


Figura 4-14 – Diagrama de tensões normais numa secção construída em duas fases.

Esta análise permitiu também a obtenção de conclusões importantes relativamente ao estado de deformação desta estrutura. Tal como se pode ver na Figura 4-13, a curvatura por fluência da estrutura, após o início do funcionamento estrutural da laje, $\Delta(1/r)$, é dada pela soma de $(1/r)_F$ (dado pela equação [4-44]) com $(1/r)_2$ (curvatura resultante do efeito de N_2 e M_2):

$$\Delta(1/r) = (1/r)_F + (1/r)_2 = \frac{M_0\phi}{E_{ci}I_y^V} + \frac{1+\chi\phi}{E_{ci}\left(\overline{A}\overline{I}_y - \overline{B}_y^{\,2}\right)}\left(-\overline{B}_y N_2 + \overline{A}M_2\right) \qquad [4\text{-}52]$$

Com simples operações matemáticas, é possível transformar a equação [4-52] numa expressão equivalente:

$$\Delta(1/r) = \frac{\phi}{E_{ci}\left(\overline{A}\overline{I}_y - \overline{B}_y^{\,2}\right)}\left(-\overline{B}_y N_0 + \overline{A}M_0\right) \qquad [4\text{-}53]$$

O segundo membro da equação [4-53] representa a curvatura por fluência de uma peça composta pela viga e pela laje, construídas simultaneamente, sob actuação dos mesmos esforços, N_0 e M_0 (ver expressão [4-38]). Conclui-se então que o cálculo de curvaturas, rotações e deslocamentos da peça em análise, por fluência, pode ser feito admitindo que a peça é construída de uma só vez.

Note-se que, a simplicidade das conclusões obtidas atrás só foi conseguida com a introdução da simplificação exposta na expressão [4-41]. No entanto, pode ser utilizado o mesmo procedimento sem introdução dessa simplificação para a obtenção de resultados mais rigorosos.

4.4.1.2 Efeitos da retracção

Na aplicação em análise, quando se procede à betonagem da laje, já se deu parte da retracção da viga pré-fabricada. Por outro lado, a retracção da laje tem ainda que ocorrer na sua totalidade. Designe-se por ε_{cs}^{dif} o valor da retracção diferencial a longo prazo, que é a diferença entre a retracção da laje e a retracção da viga que se dá após a data de betonagem da laje.

O cálculo do estado de tensão provocado pela retracção diferencial será efectuado em três etapas, tal como se representa na Figura 4-15.

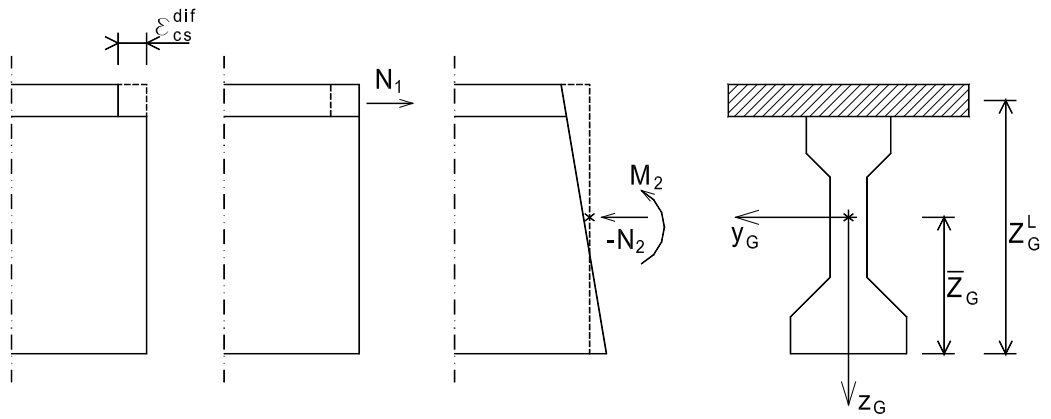


Figura 4-15 - Etapas de cálculo do estado de tensão e deformação a longo prazo, provocado pela retracção diferencial.

Se a laje e a viga retraírem de forma independente, a sua deformação difere de ε_{cs}^{dif}. Para restaurar a compatibilidade aplica-se à laje o esforço N_1, calculado com o módulo de

elasticidade efectivo ajustado, uma vez que N_1 aumenta lentamente ao longo do tempo, desde zero até ao seu valor final.

$$N_1 = \varepsilon_{cs}^{dif} \cdot A^L \cdot E_{c,adj}^L(\infty, t_0) \qquad [4\text{-}54]$$

Para restaurar o equilíbrio aplica-se, no centro de rigidez da secção composta, os esforços N_2 e M_2 (expressão [4-55]), cuja resultante é simétrica em relação a N_1. O cálculo das tensões e deformações provocadas por N_2 e M_2, e do centro de rigidez da secção composta é realizado com os módulos de elasticidade efectivos ajustados dos betões da viga e da laje.

$$\begin{aligned} N_2 &= -N_1 \\ M_2 &= -N_1 \cdot \left(\overline{Z}_G - Z_G^L\right) \end{aligned} \qquad [4\text{-}55]$$

O diagrama de tensões normais provocado pela retracção diferencial é obtido adicionando os efeitos de N_1, N_2 e M_2. A curvatura da secção é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_2}{E_{c,adj}^V(\infty, t_0) \cdot \overline{I}_{y_G}} = -\frac{\varepsilon_{cs}^{dif} \cdot A^L \cdot \left(\overline{Z}_G - Z_G^L\right)}{m \cdot \overline{I}_{y_G}} \qquad [4\text{-}56]$$

em que $m = E_{c,adj}^V(\infty, t_0) / E_{c,adj}^L(\infty, t_0)$ é o coeficiente de homogeneização e $\overline{I}_{y_G}$ é o momento de inércia da secção composta, homogeneizada em betão da viga. O parâmetro t_0 representa a idade de cada um dos elementos (laje ou viga) no instante em que a laje passa a constituir um elemento estrutural.

4.4.2 Análise de vigas contínuas com secções compostas

Considere-se agora uma estrutura semelhante à analisada no sub-capítulo 4.4.1, mas em que duas vigas são ligadas longitudinalmente para formar uma viga contínua. A ligação é estabelecida através de armaduras ordinárias de continuidade e da betonagem do espaço entre vigas no mesmo instante em que é betonada a laje.

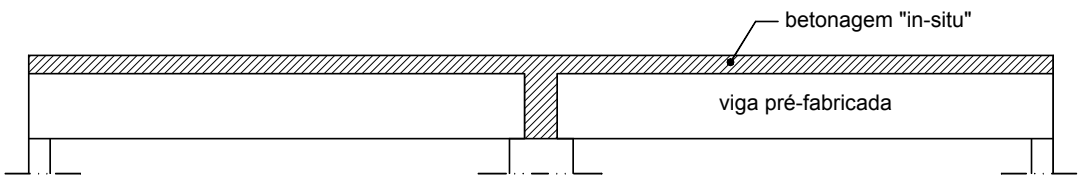


Figura 4-16 – Viga contínua construída a partir de duas peças pré-fabricadas.

Nesta situação, após o endurecimento do betão colocado *in situ*, existe uma transformação da secção transversal e também do esquema estrutural longitudinal. Assim, a distribuição das tensões normais provocada pelas acções que actuam inicialmente sobre a peça pré-fabricada apenas, sofre uma evolução ao longo do tempo, devida à deformação diferida do betão:

- por causa da evolução da secção transversal, conforme se viu no sub-capítulo 4.4.1;
- por causa da modificação do diagrama de momentos flectores ao longo do tempo, uma vez que o momento flector na secção de ligação é inicialmente nulo, mas evolui ao longo do tempo.

A distribuição de tensões normais a longo prazo será calculada em dois passos (tal como representado na Figura 4-17):

- passo 1: elimina-se a ligação de continuidade - a peça comporta-se nesta situação conforme se viu no sub-capítulo 4.4.1;
- passo 2: aplica-se um momento flector hiperstático, ΔX, que restabelece a compatibilidade de deformações na zona de ligação.

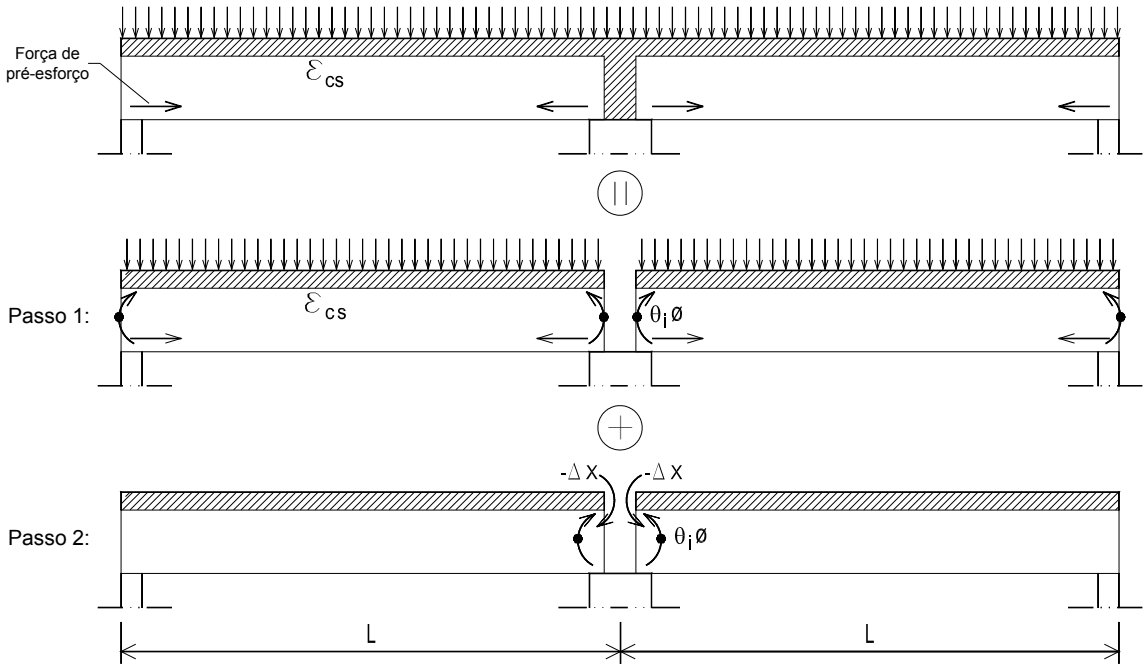


Figura 4-17 – Etapas de cálculo da distribuição das tensões normais a longo prazo.

4.4.2.1 Evolução de esforços e tensões por fluência

São assumidas as mesmas simplificações que foram consideradas no sub-capítulo 4.4.1.1.

Passo 1:

A longo prazo, a viga composta fica sujeita à distribuição de tensões que foi calculada no sub-capítulo 4.4.1.1 para vigas simplesmente apoiadas. Além disso, a rotação por fluência da viga composta, na secção de apoio, é igual à que aconteceria se a viga composta fosse construída numa única fase (tal como foi referido nesse sub-capítulo). Designemos por θ_i o valor da rotação da secção de apoio da viga, correspondente à deformação instantânea da peça. A rotação dessa secção, por efeito da fluência é então dada por $\theta_i \cdot \phi$.

Passo 2:

Para restabelecer a compatibilidade na secção de apoio é necessário aplicar, nas extremidades da viga composta, um momento flector ΔX que anule a rotação por fluência $\theta_i \cdot \phi$. Para o cálculo da relação entre tensões e deformações é utilizado o módulo de elasticidade efectivo ajustado, uma vez que ΔX aumenta lentamente ao longo do tempo, desde zero até ao seu valor final, em resultado da evolução por fluência. O valor de ΔX pode então ser obtido:

$$\Delta X = -\frac{3 \cdot E_{ci} \cdot \bar{I}_{y_G}}{L \cdot (1 + \chi \cdot \phi)} \theta_i \cdot \phi \qquad [4\text{-}57]$$

Se toda a estrutura fosse construída simultaneamente numa única fase, o valor do momento flector na secção de apoio, X, era dado por:

$$X = -\frac{3 \cdot E_{ci} \cdot \bar{I}_{y_G}}{L} \theta_i \qquad [4\text{-}58]$$

donde se conclui que:

$$\Delta X = \frac{\phi}{(1 + \chi \cdot \phi)} X \qquad [4\text{-}59]$$

Para se obter a distribuição de tensões normais a longo prazo na estrutura em análise é necessário adicionar o efeito de ΔX à distribuição de tensões que resulta do *Passo 1*.

O resultado dessa adição (diagrama de tensões normais a longo prazo na estrutura em análise) é dado pela expressão [4-51], onde $\sigma_0(z)$ é o diagrama de tensões normais resultante da aplicação do carregamento à viga pré-fabricada simplesmente apoiada e $\sigma_{simult}(z)$ é o diagrama de tensões normais resultante da aplicação do carregamento à viga composta, contínua.

Conclui-se então que a expressão [4-51] é também válida quando existe evolução da secção transversal da viga e, além disso, é estabelecida a continuidade para se formar uma viga contínua.

O cálculo apresentado neste sub-capítulo foi realizado para uma estrutura com dois vãos, mas a expressão [4-51] é válida para um número qualquer de vãos (ver Favre *et al.* (1997)).

4.4.2.2 Efeitos da retracção

Tal como foi referido, o efeito da retracção diferencial pode ser calculados em dois passos.

Passo 1:

A longo prazo, a viga composta fica sujeita à distribuição de tensões que foi calculada no sub-capítulo 4.4.1.2 para vigas simplesmente apoiadas e com uma curvatura, $1/r$, constante ao longo do seu comprimento, com o valor dado pela equação [4-56]. Nessa situação, a rotação da secção de apoio é dada por $\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{L}{2}$.

Passo 2:

Para restabelecer a compatibilidade na secção de apoio é necessário aplicar, nas extremidades da viga composta, um momento flector ΔX que anule aquela rotação. Para o cálculo da relação entre tensões e deformações é utilizado o módulo de elasticidade efectivo ajustado, uma vez que ΔX aumenta lentamente ao longo do tempo, desde zero até ao seu valor final, em resultado de uma evolução devida à deformação diferida do betão. O valor de ΔX pode então ser obtido:

$$\Delta X = -\frac{3 \cdot E_{c,adj}^{V} \cdot \bar{I}_{y_G}}{L} \theta \qquad [4\text{-}60]$$

Para se obter a distribuição de tensões normais a longo prazo na estrutura em análise é necessário adicionar o efeito de ΔX à distribuição de tensões que resulta do *Passo 1*. O cálculo das tensões normais devidas à actuação de ΔX deve ser efectuado considerando, para os betões da viga e da laje, os módulos de elasticidade efectivos ajustados.

4.4.3 Exemplo de aplicação

Apresenta-se, como exemplo, o resultado da aplicação do MMEA para o cálculo do estado de tensão, num tabuleiro de uma ponte com dois tramos contínuos de 24.60 m, para duas situações distintas:

- acção do peso próprio da viga pré-fabricada e do pré-esforço (antes e após a evolução de tensões por fluência);
- acção da retracção diferencial entre a laje e a viga.

Comparam-se os valores que resultam da aplicação do MMEA com aqueles que resultam de um cálculo utilizando o MEF, recorrendo ao programa DIANA (2002), sendo o cálculo visco-elástico realizado da forma descrita no sub-capítulo 4.2.3.

A estrutura em análise é semelhante à estudada no Capítulo 6, pelo que, a sua descrição é feita, a seguir, de uma forma sumária. Pela mesma razão se omite, a seguir, a descrição do modelo de elementos finitos utilizado no cálculo em que se aplica o MEF. A estrutura em análise é construída com recurso a vigas pré-fabricadas, pré-esforçadas por pré-tensão, constituindo, após construção da laje e da carlinga, uma viga contínua com dois tramos de 24.60 m. Na Figura 4-18 apresenta-se um alçado parcial da estrutura e um corte da secção transversal, resumindo-se nesse corte as propriedades consideradas para os betões da viga e da laje. Adoptam-se os seguintes pressupostos simplificativos:

- não é considerado o efeito das armaduras;
- não se consideram os efeitos da fendilhação, isto é, o cálculo realizado é de natureza visco-elástica linear;
- o pré-esforço é modelado através de uma força de 4604 kN, aplicada 17.36 cm acima da fibra inferior da viga, com valor constante ao longo da viga e ao longo do tempo;
- consideram-se os modelos de fluência e de retracção definidos no MC90 (CEB 1993) (nos cálculos cujos resultados se apresentam nos capítulos 5, 6 e 7 são considerados os modelos de fluência e de retracção definidos no EC2 (CEN 2002)).

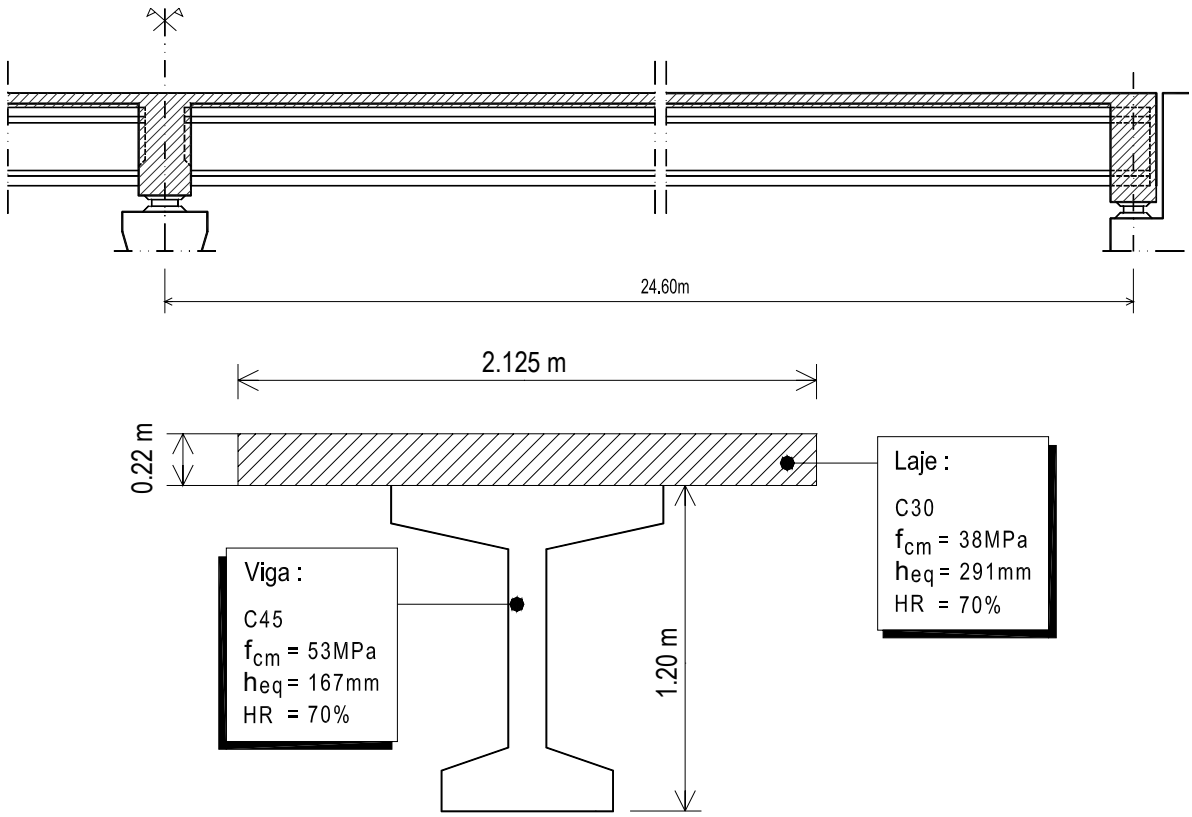


Figura 4-18 – Estrutura em análise: Alçado parcial, secção transversal e propriedades consideradas para os betões da viga pré-fabricada e da laje.

Os resultados, a longo prazo, são apresentados para duas situações:

- viga mista simplesmente apoiada (sem estabelecimento da continuidade);
- viga mista contínua.

4.4.3.1 Efeito, a longo prazo, do peso próprio e do pré-esforço

Considera-se, neste caso, que a betonagem da laje é efectuada 30 dias após a transferência do pré-esforço para as vigas. De acordo com o MMEA, o cálculo das tensões normais a longo prazo é efectuado a partir da equação [4-51]. Na Tabela 4-1 apresentam-se os valores que toma o coeficiente $\phi/(1+\chi\phi)$, para diferentes valores de ϕ, considerando $\chi = 0.8$. Verifica-se que o coeficiente $\phi/(1+\chi\phi)$ varia menos do que ϕ. Nos cálculos cujos resultados se apresentam neste sub-capítulo adopta-se $\phi/(1+\chi\phi) = 0.77$.

Tabela 4-1 – Valor do coeficiente $\phi/(1+\chi\phi)$ para diferentes valores de ϕ, considerando $\chi = 0.8$.

ϕ	$\frac{\phi}{1+\chi\phi}$
1.5	0.69
2.0	0.77
2.5	0.83

Na Figura 4-19 apresentam-se os diagramas de tensões normais na secção de meio vão, a longo prazo, obtidos pelos dois métodos. Apresenta-se ainda o diagrama correspondente ao estado de tensão inicial, isto é, antes de começar a evolução de tensões por fluência. Neste caso, verifica-se que quando não é estabelecida a continuidade (viga mista simplesmente apoiada), a variação do estado de tensão na viga pré-fabricada é desprezável.

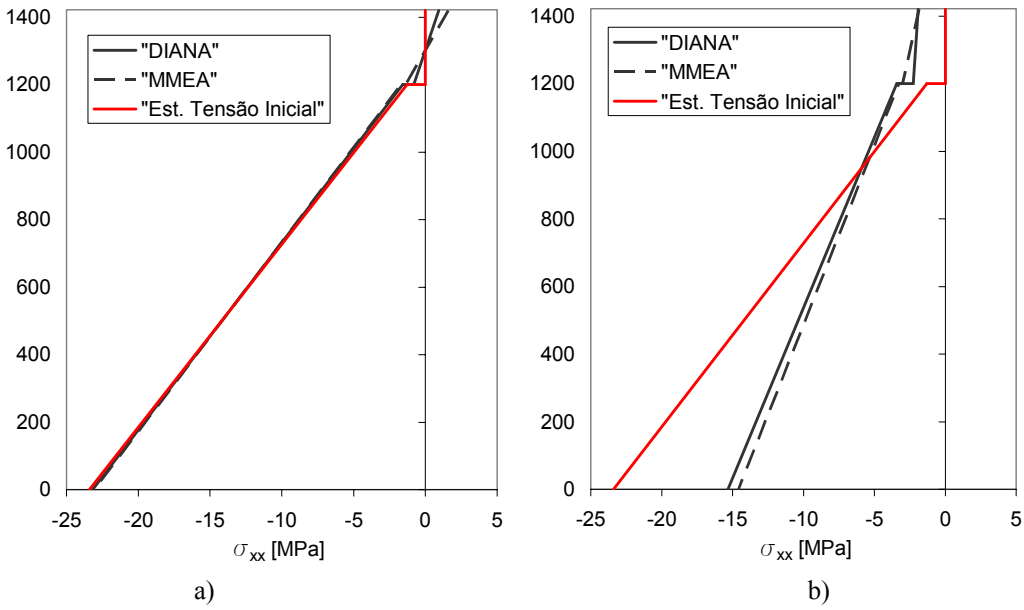


Figura 4-19 – Diagramas de tensões normais na secção de meio vão: a) viga mista simplesmente apoiada; b) viga mista contínua.

Quando é estabelecida a continuidade, devido ao efeito das acções aqui consideradas, o momento flector na secção sobre o apoio de continuidade, a longo prazo, é positivo e toma os seguintes valores:

- +2691 kNm, se o cálculo for realizado com o programa DIANA (2002);
- +2908 kNm, se o cálculo for realizado através do MMEA.

Conclui-se que, na situação apresentada, o MMEA conduz a uma boa estimativa do estado de tensão a longo prazo.

4.4.3.2 Efeito, a longo prazo, da retracção diferencial

Considera-se, neste caso, que a betonagem da laje é efectuada 90 dias após a transferência do pré-esforço para as vigas pois, geralmente, quando a diferença de idades entre os betões da viga e da laje é maior, é também maior o valor da retracção diferencial. Considera-se no cálculo, que o betão da laje e da carlinga começa a desempenhar funções estruturais um dia após a betonagem.

Na Figura 4-20 apresentam-se os diagramas de tensões normais na secção de meio vão, a longo prazo, obtidos pelos dois métodos. Verifica-se uma aproximação razoável entre os resultados do MMEA e do DIANA (2002).

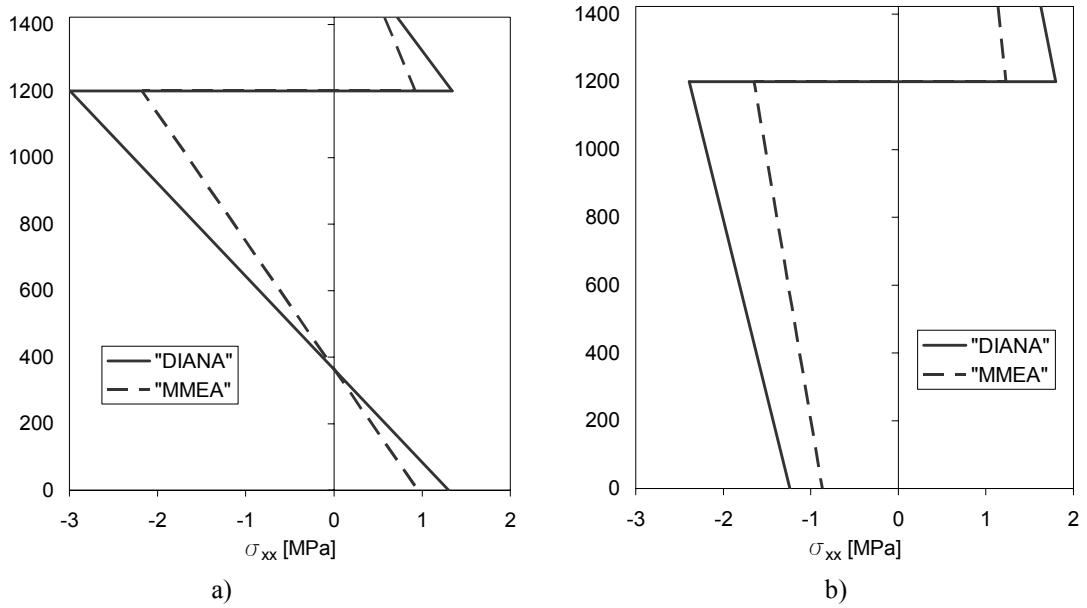


Figura 4-20 - Diagramas de tensões normais na secção de meio vão: a) viga mista simplesmente apoiada; b) viga mista contínua.

Devido ao efeito da retracção diferencial, o momento flector calculado para a secção sobre o apoio de continuidade, a longo prazo, é negativo e tem os seguintes valores:

- -867 kNm, se o cálculo for realizado com o programa DIANA (2002);
- -590 kNm, se o cálculo for realizado através do MMEA.

O MMEA conduz, neste caso, a uma estimativa por defeito do estado de tensão instalado nos materiais:

- no caso da viga isostática, conduz a menores valores de tensões normais;

- no caso da viga contínua, conduz a uma distribuição de momentos flectores com menor grandeza, em termos de valores absolutos.

4.5 Considerações finais

Neste capítulo foi tratada a resolução numérica do problema da análise ao longo do tempo. O tipo de análises visco-elásticas tratadas no presente capítulo têm por base as propriedades de fluência e retracção descritas no Capítulo 3. Trata-se de valores médios das propriedades na secção transversal de um elemento. Assim, a determinação de tensões e extensões ao longo do tempo contem erros por não incluir a distribuição não linear de tensões, auto-equilibrada ao longo de uma secção transversal, que resulta do facto das extensões de retracção e fluência não serem iguais em todos os pontos da secção transversal.

Para a realização de uma análise rigorosa através do MEF, incluindo o efeito da fendilhação, foi apresentado um modelo baseado no conceito de fenda distribuída, com decomposição da deformação em duas componentes (uma relativa às fendas e outra relativa ao betão entre fendas), que permite a combinação do efeito da fendilhação com os efeitos da fluência e da retracção.

A aplicação do método do módulo efectivo ajustado permitiu a obtenção de um procedimento expedito para o cálculo simplificado dos efeitos da fluência e da retracção diferencial em tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas e pré-esforçadas, ligadas em continuidade sobre os apoios. Este procedimento pode também ser aplicado a outras estruturas pré-fabricadas com a mesma tipologia estrutural, nomeadamente aquelas que se utilizam para a realização de pavimentos em edifícios. Deve ser tido em consideração o facto de os resultados da aplicação do MMEA serem de natureza aproximada. Esse método pode então ser utilizado, com grande utilidade, quando não seja desejado grande rigor nos cálculos, ou para validação de cálculos mais elaborados realizados com recurso a métodos mais rigorosos.

5 Aplicação numérica para confrontação com resultados experimentais

5.1 Introdução

A avaliação do desempenho e capacidade de um modelo numérico pode ser efectuada através da comparação a casos conhecidos que tenham sido objecto de análise experimental devidamente monitorizada.

Neste capítulo apresenta-se o trabalho de modelação numérica efectuado para simular o comportamento de vigas que foram ensaiadas no âmbito do amplo trabalho experimental de referência que foi realizado pela Portland Cement Associaton (PCA) dos Estados Unidos, no início dos anos 60. Esse trabalho, já referido no capítulo 2, teve como objectivo principal o estudo do comportamento estrutural de tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas, pré-esforçadas por pré-tensão, com continuidade estabelecida na zona sobre os apoios, recorrendo a armaduras ordinárias (Hanson 1960; Kaar *et al.* 1960; Mattock e Kaar 1960; Mattock e Kaar 1961a; Mattock e Kaar 1961b; Mattock 1961). Os ensaios aqui analisados fazem parte da fase número 5 desse trabalho de investigação, que tinha como principal objectivo o estudo da influência da retracção e da fluência do betão sobre o comportamento deste tipo de estruturas (Mattock 1961).

Com esta aplicação numérica, pretende-se avaliar a capacidade do modelo numérico, utilizado no âmbito desta dissertação, para captar os vários aspectos de funcionamento estrutural deste tipo de obras. Analisa-se numericamente o comportamento durante a fase de serviço apenas. Fazem-se análises paramétricas com o objectivo de avaliar a importância da variabilidade da

fluência e da retracção do betão sobre a evolução, ao longo do tempo, dos esforços e da deformação da estrutura.

Neste capítulo, após a descrição do trabalho experimental realizado por Mattock (1961), é apresentado o modelo numérico utilizado e por fim comparam-se os resultados obtidos pelas vias experimental e numérica.

5.2 Trabalho experimental

A seguir descreve-se resumidamente o trabalho experimental, apresentando-se as características geométricas dos modelos ensaiados, as propriedades dos materiais utilizados, os ensaios, as medições efectuadas e os resultados obtidos pelos autores do trabalho experimental. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em Mattock (1961).

5.2.1 Descrição da estrutura

Foram ensaiados em laboratório dois modelos construídos à escala 1:2, sendo cada modelo constituído por duas vigas pré-fabricadas com secção em "I", sobre as quais é posteriormente betonada uma laje. A continuidade estrutural é garantida pela laje e por uma carlinga localizada entre os topos das vigas a ligar.

Características geométricas

Cada modelo constitui uma viga contínua com dois vãos de 10.06 m, tal como se representa na Figura 5-1. As vigas pré-fabricadas têm uma altura de 57.2 cm, tendo a laje uma espessura de 7.6 cm e uma largura de 99 cm. A distância entre os topos das vigas pré-fabricadas, sobre o apoio central, é de 7.6 cm, tendo a carlinga uma espessura de 10.2 cm, isto é, cada viga pré-fabricada está embebida na carlinga ao longo de um comprimento de 1.3 cm.

Nas Figuras 5-1 e 5-2 apresentam-se os apoio utilizados. Os apoios de extremidade são constituídos por chapas em aço colocadas sob a viga pré-fabricada, permitindo a existência de rotações e de deslocamentos horizontais entre a viga pré-fabricada e a base de apoio. O apoio central é constituído por uma chapa de aço colocada sobre duas células de carga (ver Figura 5-2). A chapa tem uma dimensão, segundo a direcção longitudinal do modelo, de cerca de 23 cm, conferindo portanto apoio às extremidades das vigas pré-fabricadas e à carlinga.

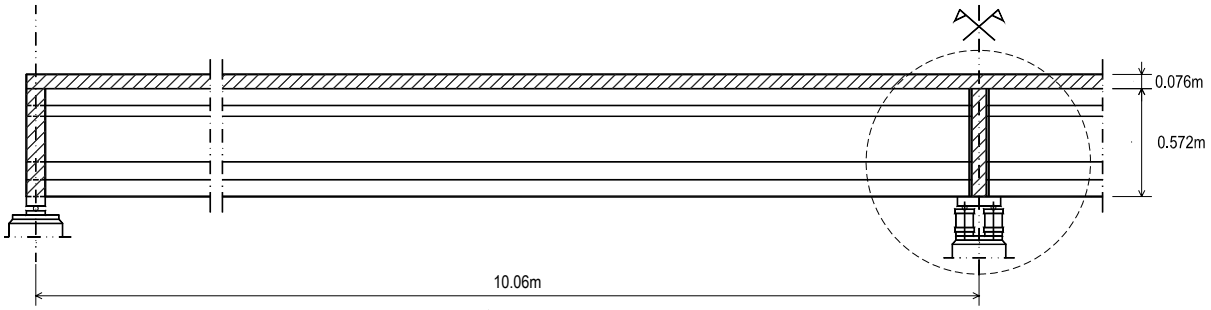


Figura 5-1 – Alçado dos modelos ensaiados por Mattock (1961).

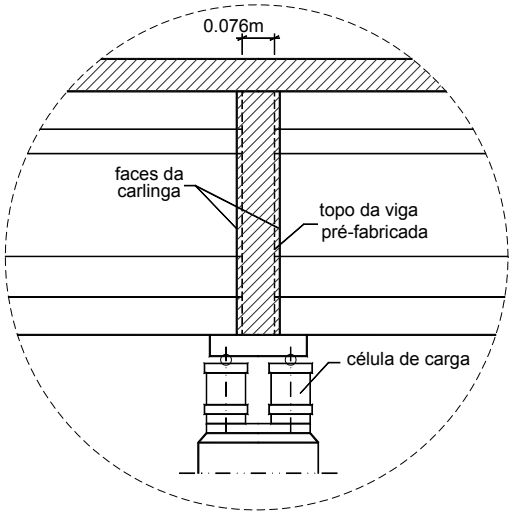


Figura 5-2 - Pormenor do alçado na zona de apoio central.

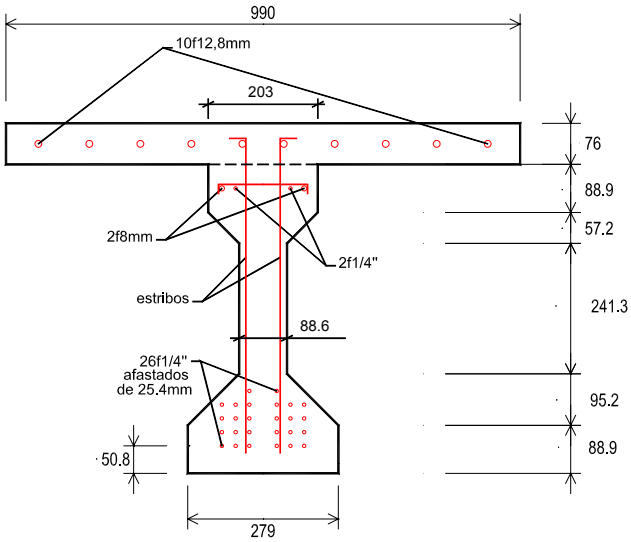


Figura 5-3 - Secção transversal e armaduras da viga e da laje (dimensões em mm).

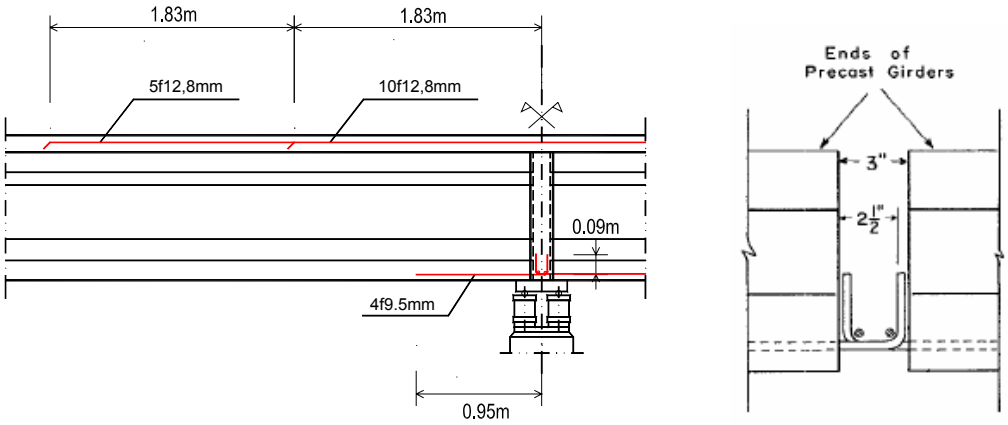


Figura 5-4 – Representação das armaduras de continuidade: alçado e pormenor de emenda da armadura inferior (Mattock 1961).

Na Figura 5-3, representam-se em secção transversal as armaduras da viga pré-fabricada e da laje. A armadura da laje, que constitui a armadura de continuidade para resistir a momentos flectores negativos, existe apenas ao longo de um comprimento de 7.32 m sobre o apoio central, tal como se representa na Figura 5-4. Ao longo do restante comprimento, a armadura da laje é constituída por uma rede electro-soldada de área muito pequena. Na Figura 5-4 representa-se também a armadura de continuidade para momentos flectores positivos (esta armadura não está representada na secção transversal da Figura 5-3), que existe apenas num dos dois modelos ensaiados, tal como se indica a seguir.

Os dois modelos ensaiados têm a seguinte diferença:

- um dos modelos, constituído pelas vigas 1 e 2, não possui qualquer armadura de ligação para momentos positivos (este modelo será adiante designado por modelo 1/2, ou viga 1/2);
- o outro modelo, constituído pelas vigas 3 e 4, possui armadura de ligação para momentos positivos, constituída por quatro varões com 9.5 mm de diâmetro emendados em cotovelo, da forma representada na Figura 5-4 (este modelo será adiante designado por modelo 3/4, ou viga 3/4).

Os betões utilizados nos modelos 1/2 e 3/4 têm propriedades ligeiramente diferentes uma vez que resultam de diferentes amassaduras.

As vigas pré-fabricadas são pré-esforçadas através de 28 cordões de 7 fios, com traçado recto, estando 26 cordões alojados no banzo inferior da viga e 2 no banzo superior (ver Figura 5-3). Cada cordão tem um diâmetro de 0.25'' e uma área de 23.23 mm^2. A força de esticamento foi de 27.8 kN por cordão, correspondendo a uma tensão de esticamento de 1197 MPa.

Propriedades dos materiais

Para aferição das propriedades dos materiais foram avaliadas experimentalmente as seguintes grandezas:

- resistência à compressão do betão, cujos valores estão indicados na Tabela 5-1;
- extensão de retracção dos betões utilizados para construir as vigas e a laje (medida em provetes com secção transversal igual à da viga e da laje, respectivamente, e comprimento de 3.05 m), cujos valores estão indicados no gráfico da Figura 5-5.

No gráfico da Figura 5-5 consta também o valor da extensão diferencial de retracção que representa, num determinado instante de tempo, a diferença entre a retracção total da laje até esse instante, e a retracção da viga pré-fabricada que ocorre desde o instante em que se inicia a retracção da laje até ao instante em questão. A extensão diferencial de retracção tem, neste caso, um valor de $24 \cdot 10^{-5}$ no final do período de monitorização.

Tabela 5-1 – Resistência à compressão dos betões utilizados (valores resultantes de ensaios aos 28 dias sobre cilindros com 15.2 cm de diâmetro e 30.5 cm de altura).

	Modelo 1/2		Modelo 3/4	
	Viga	Laje e Carlinga	Viga	Laje e Carlinga
f_{cm} (MPa)	36.3	26.7	37.5	33.2

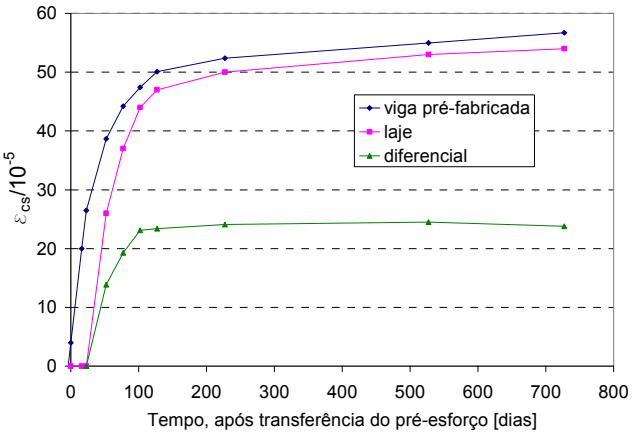


Figura 5-5 – Curvas de retracção dos betões da viga e da laje.

O período de cura (realizada através de serapilheira saturada com água) teve, segundo Mattock (1961), a duração de três dias. Após esse período, e até ao fim do ensaio, os modelos foram conservados num ambiente com 50% de humidade relativa e com uma temperatura de cerca de 20ºC.

Na Tabela 5-2 apresentam-se as propriedades mecânicas dos aços utilizados.

Tabela 5-2 – Propriedades mecânicas dos aços.

	f_{sy} (MPa)	E_s (GPa)	f_{pu} (MPa)
Arm. de pré-esforço	1750	198	1930
Arm. ordinária superior	334	200 (1)	-
Arm. ordinária inferior	345	200 (1)	-
Estribos	307	200 (1)	-

(1) – hipótese adoptada por tal dado não ser indicado em Mattock (1961)

Faseamento construtivo

A sequência de operações realizadas durante a construção dos modelos é apresentada na Tabela 5-3. Considera-se uma escala de tempos com origem no instante de transmissão do pré-esforço aplicado às vigas pré-fabricadas, escala esta que é utilizada neste capítulo (à excepção da escala temporal do gráfico apresentado na Figura 5-16, que tem origem no instante de esticamento dos cordões de pré-esforço).

Tabela 5-3 – Faseamento construtivo.

FASE	Tempo após a transferência de pré-esforço (dias)
Esticamento dos cordões de pré-esforço	-9
Betonagem das vigas pré-fabricadas	-8
Transferência do pré-esforço (e aplicação do peso próprio (pp) das vigas = 2.25 kN/m)	0
Carregamento das vigas com blocos suspensos (1) (pp blocos = 3.89 kN/m)	13
Betonagem da laje e da carlinga (2) (pp laje = 1.88 kN/m)	20
Remoção da cofragem da laje e da carlinga	27

(1) - estes blocos suspensos são usados para que o estado de tensão na viga devido às cargas permanentes seja semelhante aquele que está instalado numa estrutura real, à escala 1:1
(2) - após a betonagem da laje, o seu peso é integralmente suportado pelas vigas

5.2.2 Ensaios e medições efectuadas

Os modelos foram monitorizados durante cerca de dois anos, a partir da idade de fabrico. Durante esse período de tempo foram realizados os seguintes ensaios:

- medições de longa duração – para avaliar a evolução do estado de tensão e do estado de deformação na estrutura ao longo do tempo, foi medida a evolução da reacção vertical no apoio central, do deslocamento a meio vão e da deformação da armadura de continuidade para momentos flectores negativos;
- testes de carga intermitentes – em determinados instantes de tempo, as vigas foram submetidas a um ensaio de carga para simulação do efeito da actuação de uma sobrecarga de utilização (o carregamento consiste numa carga concentrada de 53.38 kN aplicada no centro de cada vão, carregamento esse que, numa análise linear

elástica, origina um momento flector na secção de apoio central 30 por cento superior ao que é provocado pela sobrecarga de serviço);

- carregamento até à rotura – depois de terminadas as medições de longa duração, os modelos foram carregados até à rotura para avaliação da influência das deformações diferidas do betão sobre a resistência última da estrutura (a sequência de carregamento utilizada é descrita por Mattock e Kaar (1960) e por Mattock (1961)).

Na Figura 5-6 apresenta-se a instrumentação efectuada. As células de carga são utilizadas para medição da reacção no apoio central e da força aplicada a meio vão durante os ensaios de carga. As variações de comprimento são medidas através de extensómetros mecânicos de Whittemore colados exteriormente ao betão e às armaduras (o acesso às armaduras é feito através de pequenos furos na laje). Os extensómetros têm uma base de medida de 25.4 cm. Foram ainda medidas aberturas de fendas com um pequeno microscópio portátil com escala incorporada.

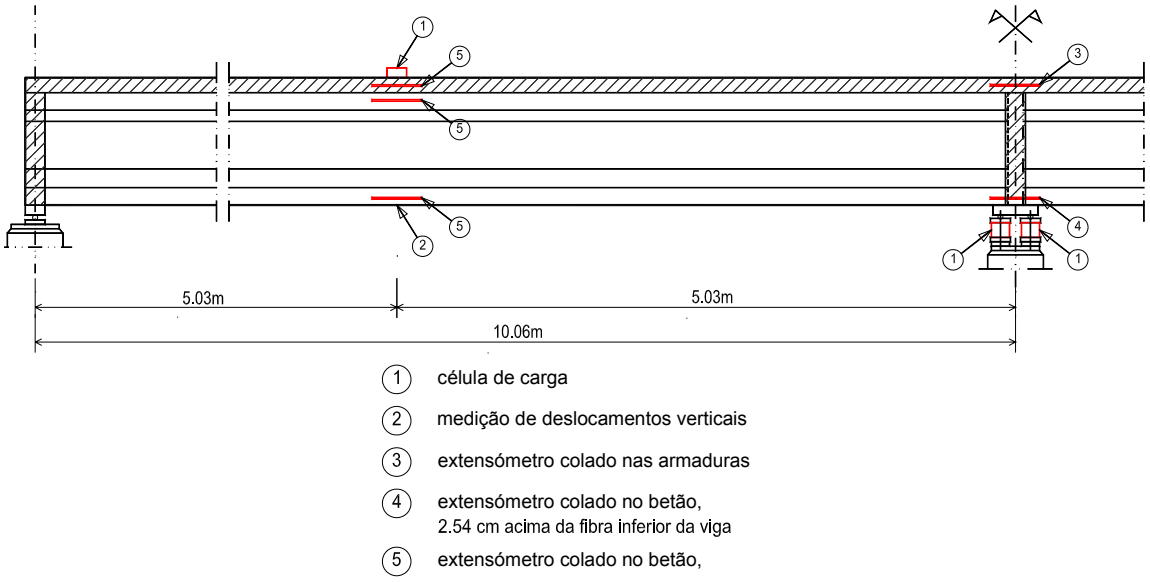


Figura 5-6 – Instrumentação efectuada.

5.2.3 Resultados experimentais obtidos

A seguir descrevem-se sucintamente os resultados obtidos experimentalmente. A discussão dos resultados obtidos será complementada no sub-capítulo 5.4, onde se faz a comparação entre os resultados experimentais e os resultados obtidos pela via numérica através dos modelos utilizados no presente trabalho.

5.2.3.1 Medições de longa duração

Nas Figuras 5-7 a 5-9 apresenta-se a variação ao longo do tempo das seguintes grandezas:

- reacção de apoio central (soma do valor medido pelas duas células de carga representadas na Figura 5-6) e variação do momento flector na secção de apoio central;
- extensão na armadura de continuidade para momentos negativos, na secção de apoio central;
- deslocamento vertical a meio vão.

A variação dessas grandezas foi medida, experimentalmente, apenas a partir do instante de remoção da cofragem (7 dias após a betonagem da laje e da carlinga).

A evolução do valor do momento flector na secção de apoio central foi calculada a partir do valor da reacção nesse mesmo apoio. Verifica-se que, nos primeiros tempos após o estabelecimento da continuidade, instala-se na secção de apoio central um momento flector negativo. Mattock (1961) verificou que isto é uma consequência da preponderância do efeito da retracção diferencial entre a laje e a viga pré-fabricada. A partir dos 70 dias, a tendência de evolução inverteu-se, ficando a longo prazo instalado na secção de apoio central um momento flector positivo, como consequência da preponderância do efeito da deformação por fluência devida à acção do pré-esforço.

Verificou-se a abertura de uma fenda, na fibra inferior da secção de apoio central da viga 1/2, aos 364 dias. O valor da reacção no apoio central da viga 3/4 apresentava, no final do período de monitorização, uma diminuição de 4.90 kN (relativamente ao seu valor antes do estabelecimento da continuidade), o que corresponde à existência de um momento flector positivo na secção de apoio central com o valor de 24.7 kNm.

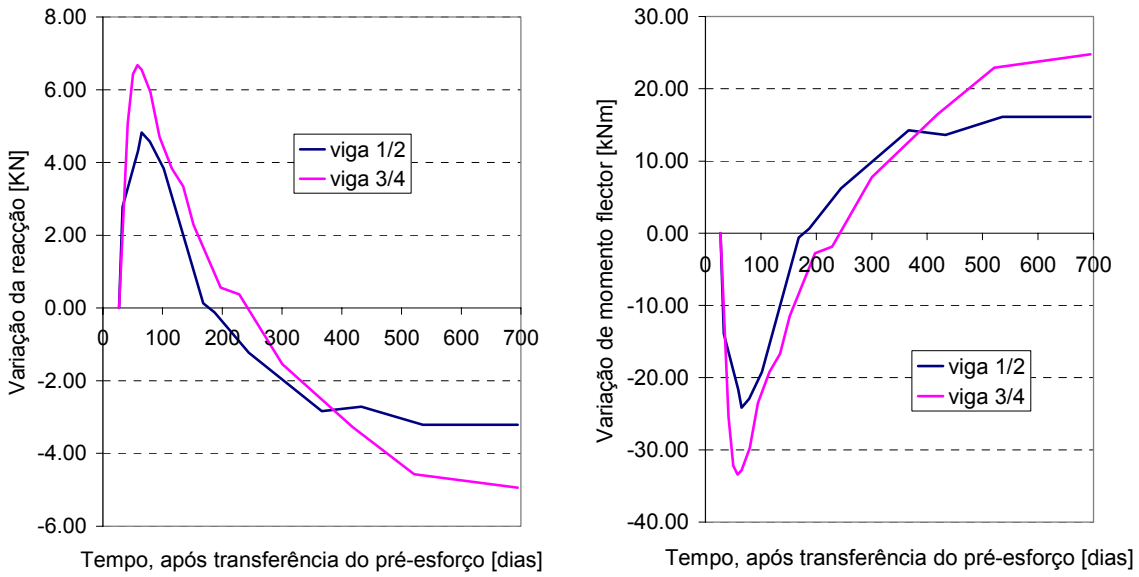


Figura 5-7 – Variação ao longo do tempo da reacção de apoio central (adaptado de Mattock (1961)) e do momento flector na secção de apoio central.

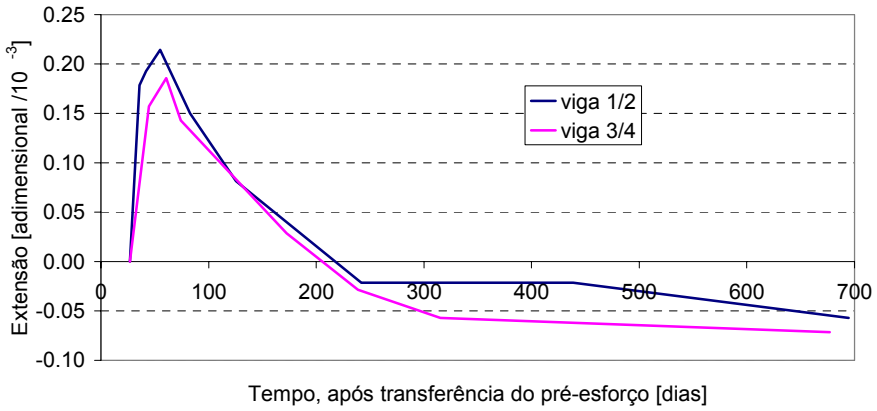


Figura 5-8 – Variação ao longo do tempo da extensão na armadura de continuidade para momentos negativos, na secção de apoio central (adaptado de Mattock (1961)).

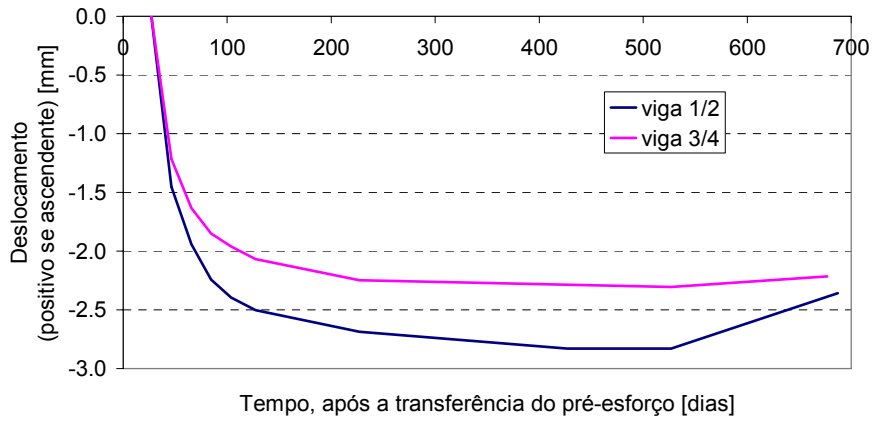


Figura 5-9 – Variação ao longo do tempo do deslocamento vertical a meio vão (adaptado de Mattock (1961)).

5.2.3.2 Testes de carga intermitentes

Nos gráficos da Figura 5-10 apresenta-se a evolução do momento flector na secção de apoio central devido à aplicação de duas forças concentradas, cada uma actuando na secção de meio vão das vigas. Os carregamentos foram efectuados em vários instantes de tempo ao longo do período de monitorização. Foram realizados 5 ensaios de carga sobre a viga 1/2, nos seguintes instantes de tempo (medidos em dias, após a transferência de pré-esforço): 47, 364, 427, 535 e 686. Os ensaios de carga sobre a viga 3/4 foram realizados nos seguintes instantes de tempo (medidos também em dias, após a transferência de pré-esforço): 37, 351, 414, 522 e 676. Nesses gráficos apresenta-se também o valor do momento flector na secção em análise resultante de uma análise linear elástica considerando o módulo de elasticidade do betão aos 28 dias. Por simplificação de linguagem, os valores que resultam de uma análise deste tipo serão à frente designados por momentos flectores elásticos.

Nos gráficos da Figura 5-11 apresentam-se os valores medidos para o encurtamento da fibra inferior da secção de apoio central em função da carga aplicada. Estes valores foram medidos com um extensómetro com uma base de medida de 254 mm (ver Figura 5-6). O valor do encurtamento só foi medido depois do aparecimento, na viga 1/2, de uma fenda na fibra inferior da secção sobre o apoio central.

Nos gráficos da Figura 5-10 verifica-se que o momento flector na secção de apoio foi sempre inferior ao momento flector elástico. O aparecimento da fenda na fibra inferior da viga 1/2, na secção de apoio central, influenciou significativamente a evolução do momento flector e do encurtamento da fibra inferior na secção de apoio central. O ponto de quebra nos gráficos da Figura 5-11 a) correspondem, segundo Mattock (1961), ao fecho dessa fenda. Verifica-se que, antes do fecho da fenda, há um aumento lento do momento flector e um aumento rápido do encurtamento da fibra inferior, traduzindo a baixa rigidez da zona de ligação antes do fecho da fenda. Após o fecho da fenda, a rigidez (traduzida pelo declive dos diagramas momento-força e encurtamento-força) aumenta para valores semelhantes aos que existiam antes da formação da referida fenda. Verifica-se que a perda de rigidez é maior em idades mais avançadas em virtude do aumento da fenda na fibra inferior, por fluência do betão, ao longo do tempo (registou-se, sem actuação da sobrecarga, uma abertura de 0.1 mm aos 364 dias e de 0.3 mm aos 686 dias).

Mattock (1961) salienta que o comportamento da fibra inferior na zona de ligação pode ter sido influenciado pelo atrito existente entre o betão e o apoio em aço representado na Figura 5-2. Este efeito poderá ser responsável pelo facto de não ter existido uma diminuição acentuada do momento flector na secção de apoio da viga 1/2 (como se pode concluir a partir

da observação da Figura 5-7, após a fendilhação, por volta dos 364 dias, ainda se deu um ligeiro aumento do momento flector nessa secção).

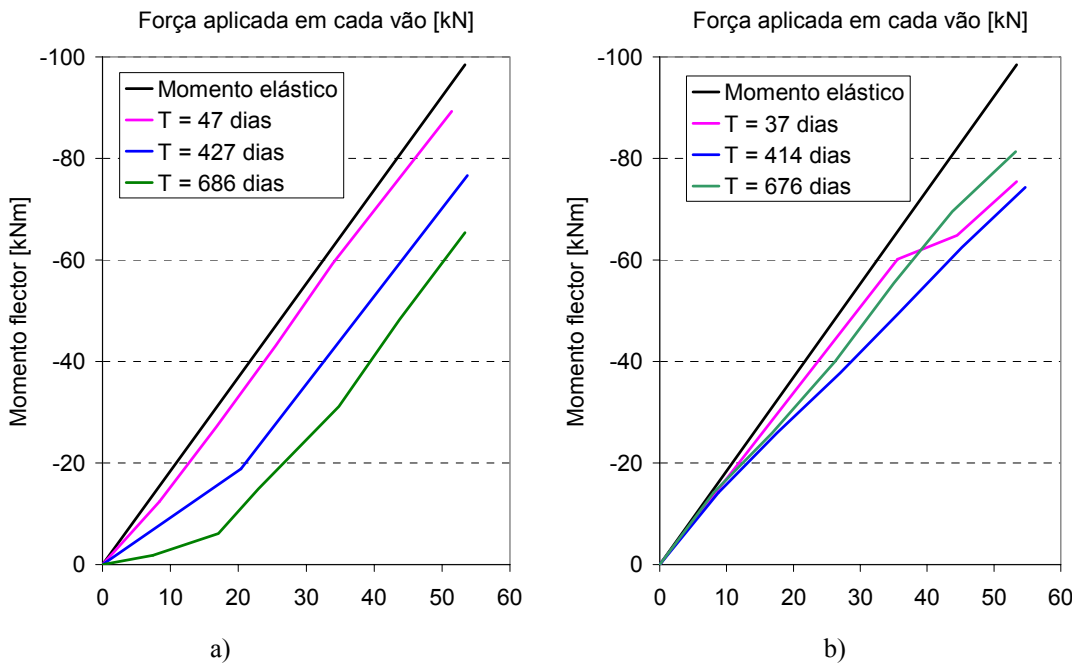


Figura 5-10 – Variação do momento flector na secção de apoio central em função da carga aplicada: a) viga 1/2; b) viga 3/4 (adaptado de Mattock (1961)).

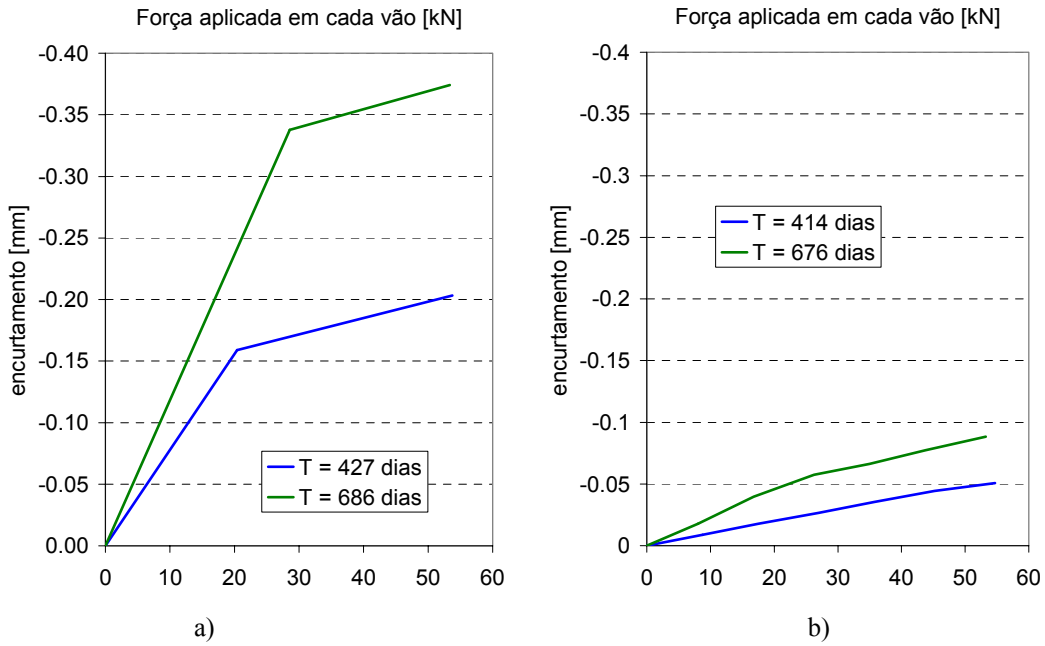


Figura 5-11 – Encurtamento da fibra inferior da secção de apoio central em função da carga aplicada (base de medida igual a 254 mm): a) viga 1/2; b) viga 3/4 (adaptado de Mattock (1961)).

A evidência da redução do valor do momento flector na secção de apoio central (relativamente ao momento flector elástico), com consequente aumento do momento flector na zona do vão, em virtude da fendilhação das fibras inferiores na secção de ligação, deu origem a estudos realizados por vários autores, tal como foi referido no Capítulo 2.

A descontinuidade do diagrama da Figura 5-10 b), correspondente ao carregamento realizado aos 37 dias, deve-se à fendilhação da laje na zona sobre o apoio central. Nessa figura verifica-se também que o carregamento realizado aos 676 dias originou um momento flector negativo com maior valor absoluto do que aquele que foi efectuado aos 414 dias, podendo este facto ser o resultado do aumento da compressão na fibra superior da secção de apoio central, ao longo do tempo, por efeito da fluência. A diferença de inclinação entre as duas curvas representadas na Figura 5-11 b) evidencia a existência de fendilhação (que não foi visível a olho nu) na fibra inferior da secção de apoio, na viga 3/4.

5.2.3.3 Carregamento até à rotura

Os resultados do carregamento até à rotura das vigas 1/2 e 3/4 foram comparados com os obtidos no ensaio de uma viga contínua, idêntica à viga 1/2, que foi submetida a um ensaio de carga até à rotura 14 dias após a betonagem da laje. Essa viga será adiante designada por viga 7/8. Os resultados do seu ensaio foram publicados por Mattock e Kaar (1960).

Na Figura 5-12 representa-se a relação entre o deslocamento vertical na secção de meio vão e o valor da carga aplicada, obtida no ensaio das três vigas até à rotura. A resposta estrutural das três vigas ensaiadas é semelhante. A diferença, registada na Figura 5-12, entre a carga última da viga 7/8 e a carga última das outras duas vigas é atribuída por Mattock (1961) à menor tensão de cedência da armadura de continuidade para momentos flectores negativos utilizada na viga 7/8 e também a diferenças existentes entre as tensões resistentes dos betões utilizados nos diferentes ensaios. Segundo Mattock (1961), a armadura de continuidade para momentos flectores negativos atingiu a cedência para uma carga total aplicada de:

- 95 Kips (422.6 kN), no caso da viga 7/8;
- 104 Kips (462.6 kN), no caso das vigas 1/2 e 3/4.

Observando a Figura 5-12 verifica-se que as três vigas apresentaram grande ductilidade, uma vez que existe uma grande diferença entre o deslocamento no instante em que se dá a cedência das armaduras na secção de apoio central e o deslocamento correspondente à rotura. Mattock (1961) concluiu que a deformação do betão por fluência e retracção não altera o

valor da carga de rotura de vigas contínuas do tipo daquelas que estão em estudo neste capítulo.

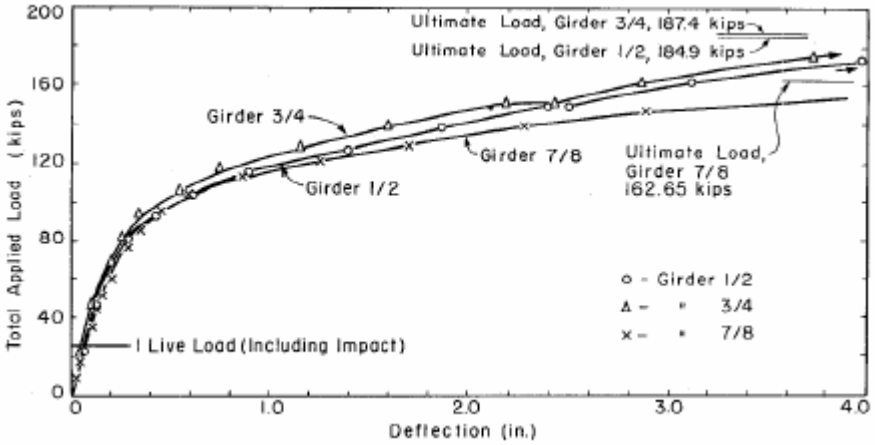


Figura 5-12 – Variação do deslocamento vertical a meio vão em função da carga aplicada durante o carregamento até à rotura (Mattock 1961). Nota: 1 in. = 25.4 mm; 1 kip = 4.45 kN.

5.3 Modelação numérica

Neste sub-capítulo apresenta-se o modelo numérico que foi elaborado para simulação do comportamento da viga 3/4. Optou-se por modelar apenas esta viga, uma vez que nas estruturas reais, actualmente construídas, deverá existir sempre alguma armadura inferior na zona de ligação entre vigas.

5.3.1 Descrição do modelo

No modelo numérico utilizado recorre-se a elementos finitos do tipo viga, estando a estrutura e os deslocamentos possíveis localizados num único plano. É utilizado o programa, baseado no método dos elementos finitos, DIANA (2002).

Elemento finito utilizado

A formulação do elemento de viga utilizado é baseada na teoria de Mindlin, sendo o elemento designado por elemento de Mindlin. Neste elemento, a deformação por corte é tida em conta, sendo abandonada a hipótese de Bernoulli, ou seja, uma secção plana inicialmente perpendicular ao eixo do elemento, mantém-se plana mas não necessariamente perpendicular a esse eixo, após a deformação. Consequentemente, a extensão normal varia linearmente ao

longo de uma secção transversal do elemento e a deformação de corte, ou distorção, é constante ao longo de uma secção transversal.

Tratam-se de elementos bidimensionais, com 3 nós, baseados numa formulação isoparamétrica. As variáveis básicas são as translações e a rotação no plano do elemento. Quando o eixo do elemento não é rectilíneo, os eixos locais no primeiro nó do elemento servem para definir os graus de liberdade de translação nos restantes nós do elemento (ver Figura 5-13). No elemento de viga de Mindlin, as translações e as rotações são independentes, sendo obtidas por interpolação, a partir das translações e das rotações nodais, respectivamente.

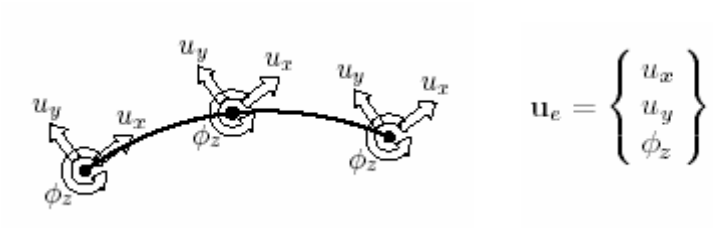


Figura 5-13 – Deslocamentos nodais no elemento de viga (DIANA 2002).

Os elementos são integrados numericamente ao longo do eixo da viga e na secção transversal. Uma vez que se trata de um elemento de viga simétrico em relação a um eixo baricêntrico vertical, a integração na secção transversal é realizada apenas na direcção vertical. A quadratura de Gauss é usada ao longo do eixo da viga, com dois pontos de integração por elemento. A secção transversal é dividida em zonas, sendo cada uma integrada numericamente através da quadratura de Gauss ou do método de Simpson. Para a definição da viga pré-fabricada são usadas cinco zonas e para a modelação da laje é usada uma zona, tal como se representa na Figura 5-14. Na Figura 5-15 representa-se a discretização da estrutura ao longo do comprimento da viga, apresentando-se os elementos e os apoios activos numa primeira e numa segunda fase. Numa primeira fase, a estrutura consiste na viga pré-fabricada simplesmente apoiada. Numa segunda fase, que tem início um dia após a betonagem da laje e da carlinga, estão activos os elementos que simulam a viga pré-fabricada, a laje e a carlinga. Modelou-se apenas metade da estrutura, tirando-se assim partido da simetria das características geométricas, das propriedades materiais e do carregamento da estrutura.

A carlinga apresenta, no plano perpendicular ao eixo da viga, uma área superior à área da secção transversal da viga pré-fabricada. No entanto, a carlinga tem um desenvolvimento de apenas 10.2 cm, segundo a direcção do eixo da viga. Por esse motivo, considera-se neste estudo que a secção transversal do elemento que representa a carlinga tem uma forma igual à forma da viga pré-fabricada, uma vez que a restante área da carlinga não será efectiva, isto é,

estará sujeita a tensões de valor reduzido. Note-se que, quando a carlinga, ou parte dela, estiver sujeita a tensões normais de tracção, a fendilhação ocorrerá, em princípio, na junta de betonagem entre o topo da viga pré-fabricada e a carlinga (em princípio, a resistência à tracção na junta de betonagem não é superior à resistência à tracção dos dois betões em contacto), justificando-se também por este aspecto a modelação da carlinga com uma secção transversal igual à da viga pré-fabricada.

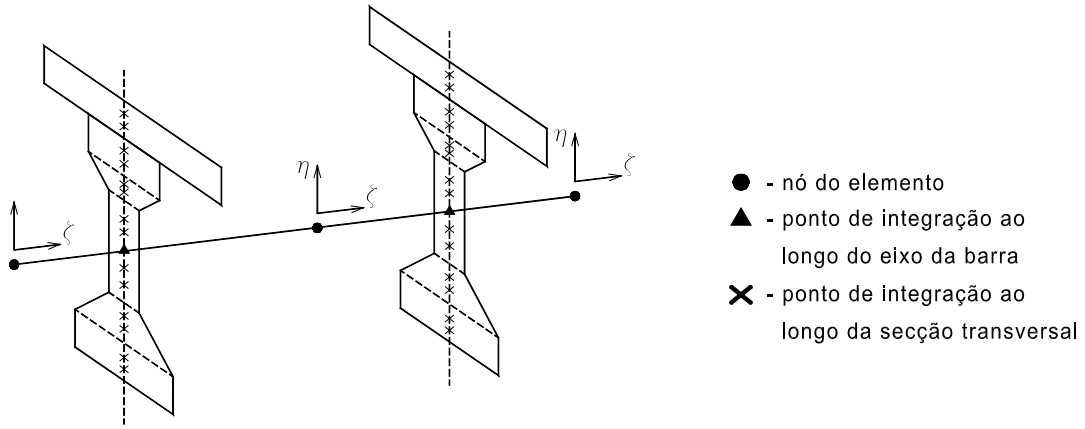


Figura 5-14 – Esquema de integração usado no elemento de viga.

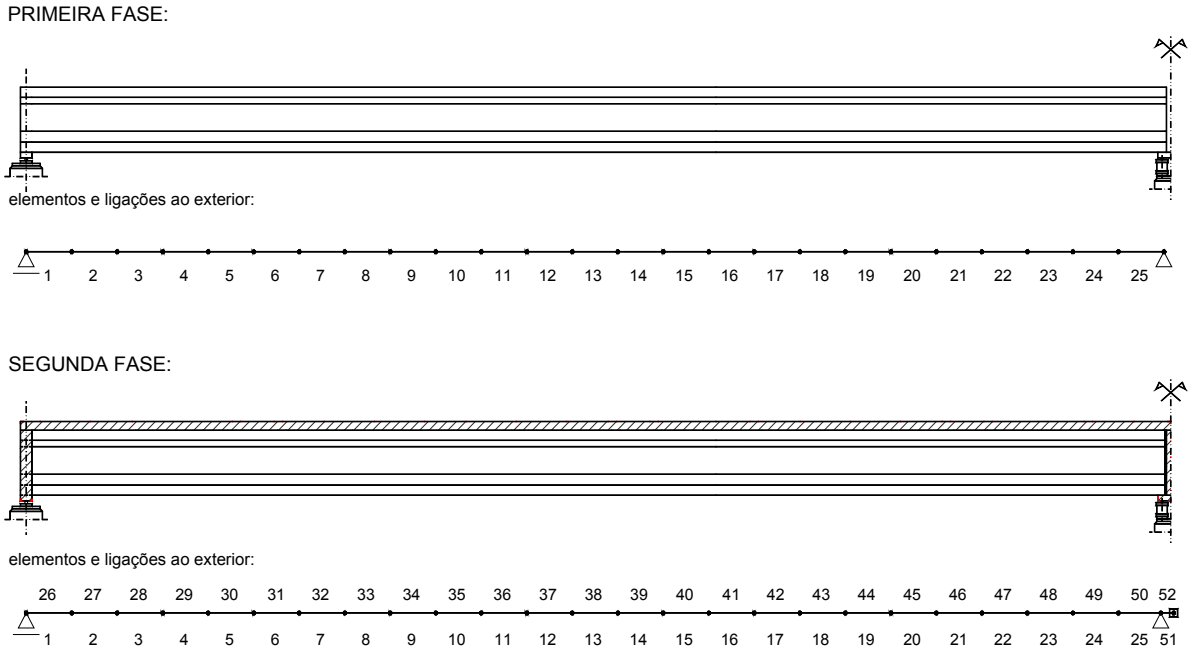


Figura 5-15 – Discretização da estrutura.

Armaduras ordinárias e de pré-esforço

A armadura, ordinária e de pré-esforço, é incluída no modelo, por forma a ser contabilizado o acréscimo de rigidez e a modificação da distribuição de tensões normais nos elementos de betão que a sua existência origina. Os elementos de armadura são embebidos no elemento de viga que os envolve, designado por *elemento mãe*. Os elementos de armadura não possuem graus de liberdade próprios. As suas deformações derivam do campo de deslocamentos do *elemento mãe*. Assim, é considerada na modelação a aderência perfeita entre a armadura e o betão. Um elemento de armadura é definido pela área da sua secção transversal e pela sua posição no interior do *elemento mãe*.

A tensão inicial instalada nas armaduras de pré-esforço é dada pela diferença entre a tensão de esticamento (1197 MPa) e as perdas instantâneas de pré-esforço. As perdas instantâneas de pré-esforço são devidas:

- à reentrada das cunhas nos maciços de ancoragem provisória dos cordões, tendo-se admitido neste caso um valor de 40 MPa, correspondente a uma reentrada de 5 mm e um comprimento de 25 m para o cordão tensionado;
- à relaxação do aço entre o instante de esticamento e o instante de transferência do pré-esforço para o betão (intervalo de tempo de 9 dias) que, no presente caso tem um valor de cerca de 35 MPa (valor calculado de acordo com o MC90 (CEB 1993), considerando que o aço utilizado tem características normais de relaxação);
- à deformação elástica do betão, cujo valor é calculado automaticamente em virtude da igualdade, em cada ponto da estrutura, entre a deformação elástica do betão e a deformação da armadura de pré-esforço.

O valor da tensão na armadura de pré-esforço, a longo prazo, é ainda diminuído pelas perdas diferidas resultantes da deformação do betão por fluência e retracção (valor calculado automaticamente) e pela relaxação do aço de pré-esforço (valor que não é calculado automaticamente pelo programa DIANA (2002)). No gráfico da Figura 5-16 apresenta-se a evolução da perda por relaxação ao longo do tempo, de acordo com o MC90 (CEB 1993), verificando-se que a perda diferida de tensão, por relaxação do aço, é de cerca de 25 MPa durante o período de ensaio (o cálculo foi efectuado considerando, simplificadamente, uma deformação constante do aço de pré-esforço igual a 5.5‰, pois não será justificável a realização de um cálculo mais elaborado uma vez que se desconhecem as características exactas de relaxação do aço utilizado). Para ultrapassar a limitação do programa utilizado, reduz-se 25 MPa ao valor da tensão inicial de pré-esforço, ou seja, simula-se uma situação em

que toda a perda de relaxação que ocorre durante o ensaio se processa antes da transferência do pré-esforço para o betão.

Considera-se uma variação linear da tensão inicial de pré-esforço ao longo do comprimento de transferência (desde zero até ao seu valor máximo) e um valor constante ao longo do restante comprimento do cordão. Considera-se um comprimento de transferência de 377 mm (valor calculado de acordo com o estipulado no MC90 (CEB 1993)).

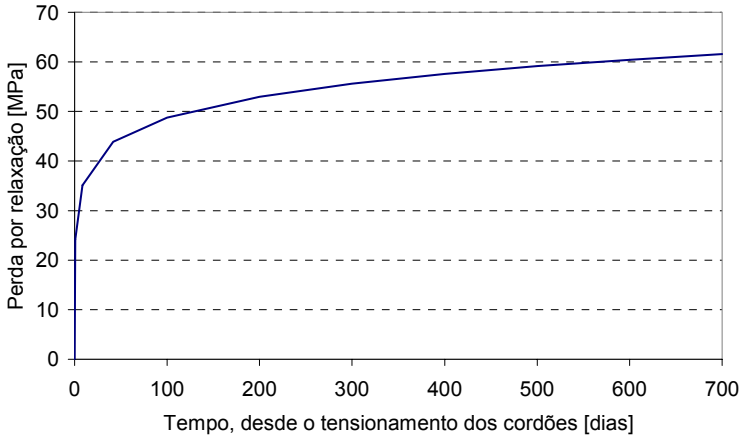


Figura 5-16 – Perda de pré-esforço por relaxação, calculada de acordo com o MC90 (CEB 1993).

O comportamento dos aços foi modelado através de um diagrama bilinear, tendo o primeiro ramo um declive igual ao módulo de elasticidade do aço, indicado na Tabela 5-2, e sendo o segundo ramo constituído por um patamar com tensão constante.

Faseamento construtivo

O faseamento construtivo descrito no sub-capítulo 5.2.1 foi considerado através de uma análise por fases, sendo em cada nova fase alterado o modelo de elementos finitos, por inclusão de novos elementos, por adição de novas partes à secção transversal e por modificação das ligações ao exterior. Na Figura 5-15 é apresentada a discretização da estrutura utilizada nas duas fases distintas de cálculo.

5.3.2 Propriedades materiais consideradas

A partir dos valores da resistência à compressão dos betões utilizados na construção da viga 3/4, obtidos em ensaios realizados sobre provetes cilíndricos (Tabela 5-1), foram estimados os

valores do módulo de elasticidade e da resistência média à tracção, a partir das expressões [3-3] e [3-19], respectivamente. Esses valores são apresentados na Tabela 5-4.

Relativamente ao valor da resistência à tracção do betão da carlinga, note-se o seguinte.

Nos ensaios realizados por Mattock (1961), verificou-se que ocorreu fendilhação na face inferior da carlinga num instante de tempo em que o momento flector instalado na secção de apoio central era igual a cerca de 14 kNm. Por outro lado, o valor do momento de fendilhação, isto é, o momento flector que provoca uma tensão normal igual a 2.59 MPa na fibra inferior da carlinga, tem o valor 56.1 kNm (valor obtido considerando simplificadamente um coeficiente de homogeneização, isto é, uma razão entre os módulos de elasticidade do aço e do betão, igual a 10). A carlinga apresentou então uma resistência à tracção bastante inferior a 2.59 MPa, e não é a restrição oferecida pela armadura à retracção do betão (ver sub-capítulo 5.4.1) que justifica essa diferença. Este facto poderá ser justificado pela fragilidade introduzida pela junta de betonagem no topo das vigas, ou por particularidades do esquema de ensaio utilizado, tais como:

- o reduzido espaço entre o topo das vigas (7.6 cm), o que poderá ter conduzido a uma betonagem da carlinga com pior qualidade;
- o impedimento da deformação do betão resultante do atrito entre o betão e os apoios em aço (ver Figura 5-2).

Para ter em conta este facto, considerou-se na modelação numérica uma redução de 50% da resistência à tracção do betão da carlinga, relativamente ao valor indicado na Tabela 5-4.

Tabela 5-4 – Propriedades dos betões.

	Viga 3/4		
	Viga pré-fabricada	Laje	Carlinga
$f_{cm}\,(\mathrm{MPa})$ (1)	37.5	33.2	33.2
$E_{ci}\,(\mathrm{GPa})$ (2)	33.4	32.1	32.1
$f_{ctm}\,(\mathrm{MPa})$ (2)	2.88	2.59	2.59 (3)

(1) - valores resultantes de ensaios aos 28 dias em cilindros com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura
(2) - valores estimados a partir da resistência média à compressão
(3) - adoptou-se, em vez deste valor, o valor 1.30 MPa, em virtude do comportamento das vigas 1/2 e 3/4 observado experimentalmente por Mattock (1961)

Para a modelação do comportamento do betão traccionado, foi utilizado o modelo de fendilhação distribuída com decomposição de extensões descrito no Capítulo 4. O efeito de *tension stiffening* foi considerado através da definição da relação tensão-extensão ilustrada na

Figura 4.10 para a zona envolvente das armaduras de tracção. A limitação do efeito de *tension stiffening* após a cedência da armadura na secção da fenda foi modelada através da modificação da lei constitutiva do aço, da forma descrita no sub-capítulo 4.3.1.3.

Para a modelação do comportamento à tracção das zonas sem armaduras, nomeadamente para modelação da carlinga na zona entre a laje e a área efectiva que envolve a armadura inferior, é utilizado um diagrama de amolecimento com variação linear, definido a partir das propriedades de fractura do betão simples, tal como foi exposto no sub-capítulo 4.3.1.2. A energia de fractura, G_F, do betão da carlinga, foi quantificada a partir da equação [3-20], sendo a resistência média à compressão, f_{cm}, aquela que, segundo as equações [3-16] e [3-19] corresponde a um betão com uma resistência média à tracção $f_{ctm} = 1.30\,\text{MPa}$. Considera-se para a modelação do betão simples da carlinga, uma largura da zona de fractura, h, de 76 mm (dimensão dupla do comprimento do elemento finito, uma vez que está a ser modelada apenas metade da estrutura).

No presente trabalho considera-se, simplificadamente, que o módulo de elasticidade transversal toma um valor constante, igual ao seu valor elástico, antes e após a fendilhação. Note-se que o tipo de elementos finitos utilizados neste trabalho pressupõe a existência de distorção constante em toda a secção transversal, o que constitui uma simplificação da realidade. Para o estudo de problemas em que seja importante a consideração da não-linearidade associada ao corte, deverá ser utilizado outro tipo de elementos finitos.

Relativamente à modelação do comportamento do tirante de betão armado constituído pela armadura de continuidade para momentos positivos e pela área efectiva de betão que envolve essa armadura, note-se o seguinte.

Quando se dá a fendilhação na zona de ligação entre vigas por causa da actuação de um momento flector positivo, pode acontecer que os únicos pontos de integração onde seja ultrapassada a resistência à tracção, sejam aqueles que pertencem à carlinga (uma vez que a viga pré-fabricada tem uma resistência à tracção superior e está sujeita a tensões normais de compressão devidas ao pré-esforço). Nessa situação, a deformação adicional dos varões de aço, ao longo do comprimento l_s representado na Figura 5-17 (comprimento entre a secção da fenda e o ponto de deslizamento nulo, ao longo do qual a tensão no aço diminui de σ_{s2} para σ_{s1}) não é contabilizada. Para que as características de deformabilidade da ligação para momentos positivos sejam modeladas correctamente, é necessário corrigir a relação entre tensões e deformações do tirante que contem a armadura inferior da carlinga (é nesse elemento que se pode intervir, uma vez que é nesse elemento que ocorre fendilhação).

Na exposição que se segue, usa-se o Newton como unidade de força e o mm como unidade de comprimento. A tensão no aço na secção da fenda, σ_{s2}, e na secção de deslizamento nulo, σ_{s1}, vale:

$$\sigma_{s2} = \frac{N}{284}; \qquad \sigma_{s1} = \frac{N}{1650.6} \qquad [5\text{-}1]$$

onde N representa o esforço axial, actuante sobre o tirante constituído pela armadura de continuidade para momentos positivos e pela área de betão efectivo que envolve essa armadura. Considerando uma tensão de aderência $\tau_{bk} = 1.35 \cdot f_{ctm} = 3.89\,\text{MPa}$, obtém-se o seguinte valor para o comprimento l_s:

$$l_s = 0.001783 \cdot N \qquad [5\text{-}2]$$

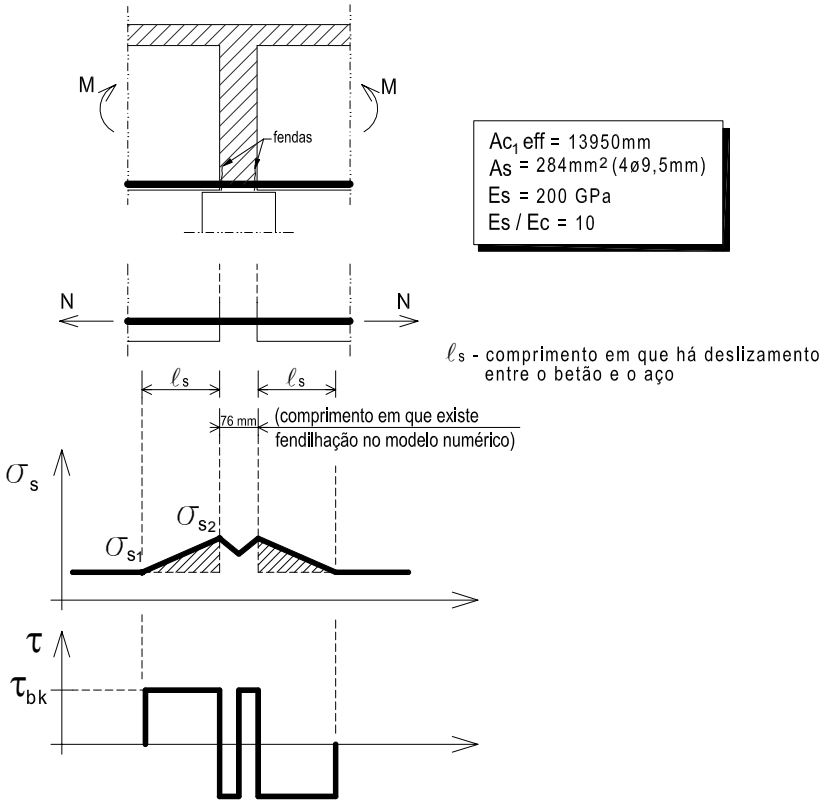


Figura 5-17 – Comportamento, após a fendilhação, da parte inferior da zona de ligação.

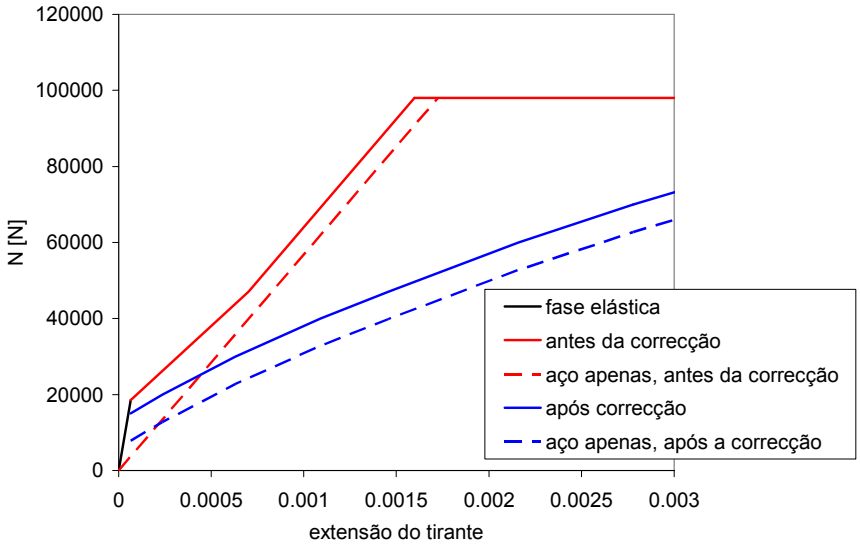


Figura 5-18 – Relação força-deformação para o tirante constituído pela armadura inferior da carlinga e pelo betão envolvente.

O acréscimo de deformação do aço (deformação associada à área tracejada do diagrama de tensões no aço representado na Figura 5-17), $\Delta l^{adicional}$, tem o valor:

$$\Delta l^{adicional} = 2.5984 \cdot 10^{-11} \cdot N^2 \qquad [5\text{-}3]$$

No gráfico da Figura 5-18 representa-se a vermelho a relação força-extensão no tirante, sem qualquer correcção. A relação força-extensão corrigida para atender à deformação adicional do aço (representada no gráfico da Figura 5-18 a azul) respeita a seguinte condição:

$$76 \cdot \varepsilon_m^{corrigido}(N) = 76 \cdot \varepsilon_m(N) + \Delta l^{adicional} \qquad [5\text{-}4]$$

em que $\varepsilon_m(N)$ representa a relação extensão-força no tirante antes da correcção e $\varepsilon_m^{corrigido}(N)$ representa essa relação após a correcção para atender à deformação adicional do aço.

Para avaliação da importância deste efeito, esta correcção foi implementada no modelo numérico através da modificação da lei constitutiva do aço, após a fendilhação. Assim, após a fendilhação, foi atribuída ao aço a lei força-deformação representada no gráfico da Figura 5-18 pela linha a traço interrompido de cor azul.

Para a modelação das deformações diferidas do betão, procede-se do seguinte modo:

- são consideradas no cálculo as curvas de retracção obtidas experimentalmente, apresentadas na Figura 5-5;

- a deformação por fluência é estimada de acordo com o modelo do EC2 (CEN 2002).

Para a quantificação da deformação por fluência, considera-se que os cimentos utilizados são de endurecimento normal ou rápido e que os elementos de betão foram conservados num ambiente com uma humidade relativa de 50% e uma temperatura média de 20ºC (ver 5.2.1). Considera-se uma espessura equivalente de 116 mm para a viga pré-fabricada, e de 78 mm para a laje. Considera-se, simplificadamente, que a espessura equivalente da carlinga é igual à da viga pré-fabricada.

No anexo II do trabalho de Mattock (1961) são apresentados resultados de ensaios de fluência realizados sobre provetes cilindricos de betão com 15.2 cm de diâmetro e 30.5 cm de altura, construídos com um betão de resistência média à compressão, $f_{cm} = 41.3\,\text{MPa}$ e submetidos a condições ambientais (humidade relativa e temperatura) semelhantes aquelas a que foram sujeitas as vigas 1/2 e 3/4 ensaiadas. Na Tabela 5-5 comparam-se os valores da deformação por fluência (sob uma tensão constante de 1 MPa) estimados através do modelo do EC2 (CEN 2002) com aqueles que se obtêm a partir dos resultados experimentais (Mattock 1961). Apesar de existirem algumas diferenças entre os resultados obtidos pelas duas vias (o que seria de esperar como consequência do desconhecimento da constituição do betão utilizado e da variabilidade associada à fluência), considera-se aceitável a utilização no cálculo da estimativa fornecida pelo modelo do EC2 (CEN 2002).

Tabela 5-5 – Extensões de fluência estimadas a partir do modelo do EC2 (CEN 2002) e obtidas a partir de resultados experimentais.

Idade de carregamento, t_0 (dias)	Extensão de fluência (adimensional / 10^{-5})			
	Modelo do EC2 (CEN 2002)		Resultados experimentais (Mattock 1961)	
	Duração do carregamento (dias)		Duração do carregamento (dias)	
	100	500	100	500
4	6.79	9.08	8.89	10.4
28	4.71	6.29	4.08	4.61
441	2.77	3.70	1.48	-

5.3.3 Análises efectuadas

São efectuadas análises para avaliar numericamente o comportamento da estrutura durante a fase de serviço, isto é, para avaliar a evolução ao longo do tempo do estado de tensão e do estado de deformação da estrutura, bem como a sua resposta face à actuação de sobrecargas (testes de carga intermitentes). Usam-se várias abordagens para a modelação do comportamento do betão traccionado e avalia-se a sua influência sobre os resultados obtidos.

É também efectuada uma análise paramétrica para avaliação da importância da variabilidade da fluência e da retracção sobre a evolução do estado de tensão e do estado de deformação da estrutura ao longo do tempo.

5.4 Comparação entre resultados experimentais e numéricos

Nos gráficos em que se comparam os resultados obtidos por via numérica com aqueles que foram obtidos pela via experimental, apresentam-se também os resultados experimentais relativos à viga 1/2, uma vez que a única diferença entre as vigas 1/2 e 3/4 reside na existência ou não de armadura de continuidade para momentos positivos e na ligeira diferença entre as propriedades dos betões utilizados (ver Tabela 5-1).

Apresenta-se também a evolução de algumas grandezas, prevista numericamente, para durações de carregamento superiores à duração do ensaio, uma vez que o ensaio teve uma duração significativamente inferior ao período de serviço de uma obra real.

5.4.1 Medições de longa duração

Neste sub-capítulo apresentam-se os resultados obtidos utilizando diferentes abordagens para a modelação do comportamento do betão traccionado. As abordagens utilizadas foram as seguintes:

- inclusão do efeito de *tension stiffening* nos elementos de betão que envolvem as armaduras traccionadas, e do efeito de *tension softening* nos restantes elementos de betão (resultados legendados com "DIANA");
- consideração de um comportamento linear, como se não existisse fendilhação (resultados legendados com "DIANA linear");
- consideração de um comportamento frágil para o betão traccionado, sem qualquer retenção de tensões de tracção pelo betão após a fendilhação (resultados legendados com "DIANA sem retenção");
- inclusão dos efeitos de *tension softening* e de *tension stiffening*, corrigindo o comportamento do tirante localizado junto à face inferior da carlinga, para atender à deformação adicional do aço, tal como foi referido no sub-capítulo 5.3.2 (resultados legendados com "DIANA com correcção").

Os resultados numéricos apresentados neste sub-capítulo resultam de cálculos em que não se fazem actuar as sobrecargas relativas aos testes de carga intermitentes, uma vez que se verifica que a realização desses testes nos primeiros tempos não origina fendilhação significativa, não condicionando, portanto, a evolução da resposta estrutural ao longo do tempo, de forma significativa.

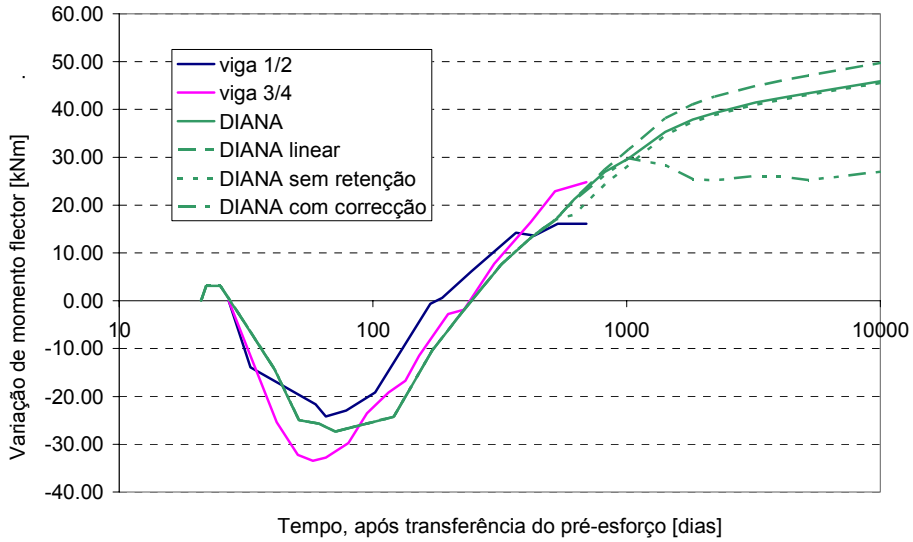


Figura 5-19 – Variação ao longo do tempo do momento flector na secção de apoio central.

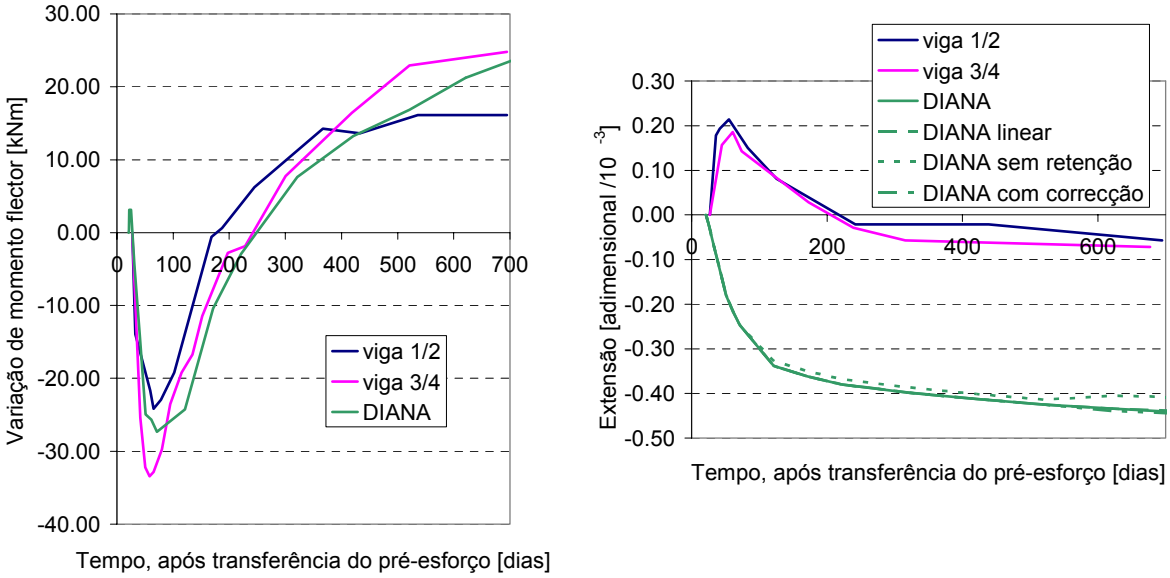


Figura 5-20 – Variação ao longo do tempo do momento flector e da extensão na armadura de continuidade para momentos negativos, na secção de apoio central.

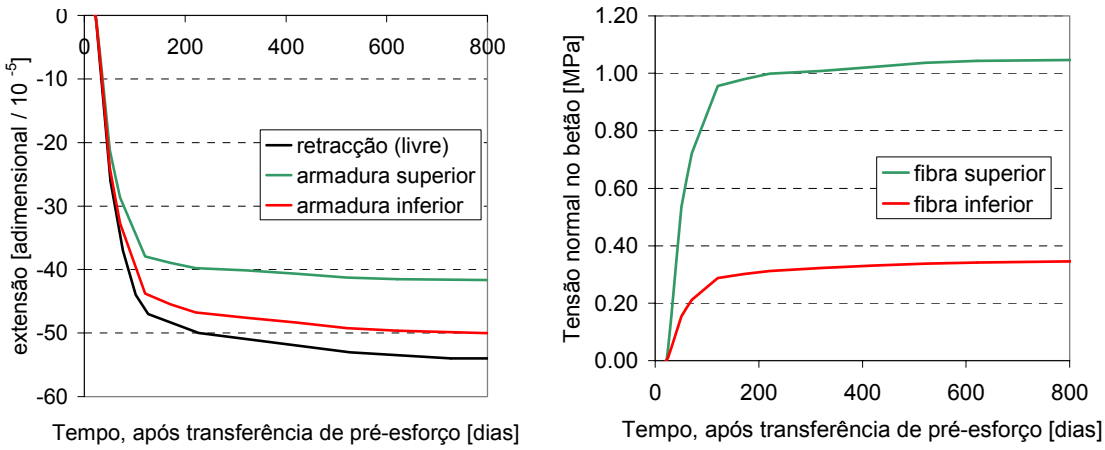


Figura 5-21 – Efeito da restrição da deformação por retracção, exercida pela armadura, na secção de apoio central: extensões ao nível das armaduras inferior e superior e tensões normais no betão, nas fibras superior e inferior.

Nos gráficos em que se apresenta a evolução ao longo do tempo do momento flector na secção de apoio central (Figura 5-19 e Figura 5-20), verifica-se uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. Verifica-se que são reduzidas as diferenças entre os resultados obtidos com o modelo que inclui o efeito da retenção de tensões de tracção pelo betão, o modelo que não inclui esse efeito e o modelo com comportamento linear do betão traccionado. As curvas relativas aos diferentes modelos afastam-se a partir do momento em que é atingida a tensão resistente à tracção, junto da face inferior da carlinga. A partir dessa altura, o modelo com comportamento linear do betão conduz a maiores momentos flectores positivos, uma vez que esse momento flector resulta do impedimento de deformações, dependendo portanto da rigidez da estrutura. Os resultados dos modelos legendados com "DIANA" e "DIANA sem retenção" conduzem a resultados semelhantes (e pouco diferentes daqueles que foram obtidos com o modelo com comportamento linear) uma vez que a fendilhação ocorre apenas na carlinga, que tem um comprimento muito reduzido (3.8 cm no modelo em que, por simplificação de simetria, se considera apenas metade da estrutura). A redução da rigidez do betão nesse elemento tem pouca influência sobre o comportamento global da estrutura, em termos de evolução do momento flector ao longo do tempo. Isto pode ser confirmado com um simples cálculo manual.

Por outro lado, a correcção efectuada no modelo legendado com "DIANA com correcção" teve uma importância significativa sobre a evolução do momento flector na secção de apoio central, tal como se pode verificar na Figura 5-19. Neste cálculo em que, tal como foi referido no sub-capítulo 5.3.2, o modelo traduz de uma forma mais correcta a realidade, verifica-se após a fendilhação uma maior perda de rigidez na zona de ligação, com consequências em termos do funcionamento global da estrutura, nomeadamente em termos da evolução do diagrama de momentos flectores instalado na estrutura. Este aspecto só poderia ser verificado

experimentalmente se as medições de longa duração tivessem sido efectuadas ao longo de um maior período de tempo.

No que foi exposto até agora não foi feita qualquer referência à solução utilizada no ensaio para a emenda das armaduras de continuidade para momentos positivos, tendo-se admitido que essa emenda garante um comportamento igual aquele que aconteceria se não existisse qualquer emenda. Ora, na realidade não se espera que isso aconteça, pois, tal como foi referido no Capítulo 2, este tipo de emenda, realizado num espaço entre os topos das vigas pré-fabricadas muito curto (76 mm) e com diâmetros de dobragem muito reduzidos (ver Figura 5-4) não garante a resistência a um momento flector igual aquele que provocaria a cedência das armaduras (60 kNm). Uma modelação mais correcta do comportamento da ligação para momentos positivos, incluindo o efeito do aumento da deformabilidade, para cargas elevadas, devido à existência da emenda, poderia ser conseguida utilizando resultados de ensaios da solução de emenda utilizada.

Para avaliação da importância do momento flector que surge, ao longo do tempo, na secção de apoio central, note-se que as cargas permanentes (peso da viga pré-fabricada, blocos suspensos e laje) provocam, numa viga isostática, um momento flector a meio vão de 100 kNm. Note-se também que os momentos de fendilhação da secção de apoio central, que provocam uma tensão de tracção igual a 2.59 MPa nas fibras inferior e superior (admitindo um módulo de elasticidade do betão igual a 1/10 do módulo de elasticidade do aço) têm os valores +56 kNm e -106 kNm, respectivamente.

Na Figura 5-20 apresenta-se a evolução ao longo do tempo da extensão na armadura de continuidade para momentos negativos. Verificam-se grandes diferenças entre os valores obtidos pela via experimental e pela via numérica. No entanto, os resultados numéricos obtidos neste trabalho são coerentes com os pressupostos assumidos e podem ser explicados com o auxílio dos gráficos apresentados na Figura 5-21, onde se representa o efeito da restrição da deformação por retracção, exercida pela armadura, na secção de apoio central, se essa secção não estivesse sujeita a qualquer esforço exterior aplicado. Considera-se que as extensões e as tensões são positivas quando correspondem a aumentos de comprimento e a tracções, respectivamente.

Experimentalmente, foi verificada aos 70 dias uma extensão na armadura em questão, de cerca de $20 \cdot 10^{-5}$, correspondendo a um aumento de comprimento da armadura. Nessa altura, o momento flector instalado na secção em questão é igual a cerca de -28 kNm. Esse momento flector provoca, de facto, a extensão verificada experimentalmente, se for ignorado o betão traccionado. No entanto, nos resultados obtidos pela via numérica, não é ultrapassada, antes

dos 70 dias, a tensão resistente à tracção na fibra superior da secção em questão. Aos 70 dias, a tensão normal nesse ponto, que resulta da soma do efeito do momento flector actuante (-28kNm) e do efeito do impedimento da livre deformação por retracção exercido pela armadura (ver Figura 5-21), tem um valor igual a 1.39 MPa. A soma dos dois efeitos referidos origina o diagrama de extensões, obtido pela via numérica, representado na Figura 5-20. A tensão de tracção no ponto em questão atingiu, ao longo do tempo, sem actuação da sobrecarga, o valor máximo de 1.42 MPa.

O motivo das diferenças entre os resultados experimentais e os resultados numéricos prende-se então com a existência ou não de fendilhação significativa, na secção de apoio, provocada pela actuação de momentos flectores negativos. No trabalho experimental foi registada abertura de fendas na laje, no teste de carga intermitente realizado aos 37 dias, efeito esse que condicionou a forma do diagrama relativo a esse teste, representado na Figura 5-10 b). No trabalho numérico, foi também atingida a tensão resistente à tracção no ponto em questão, no teste de carga intermitente realizado aos 37 dias, mas apenas no último incremento de carga, havendo uma redução muito ligeira da rigidez do betão da laje, em virtude da sua capacidade de retenção de tensões de tracção após a fendilhação (ver sub-capítulo 5.4.2).

Conclui-se então que uma maior aproximação entre os resultados experimentais e os resultados numéricos poderia ser obtida através da modificação da lei constitutiva que caracteriza o comportamento à tracção do betão da laje, considerando, nomeadamente, uma tensão resistente à tracção mais baixa.

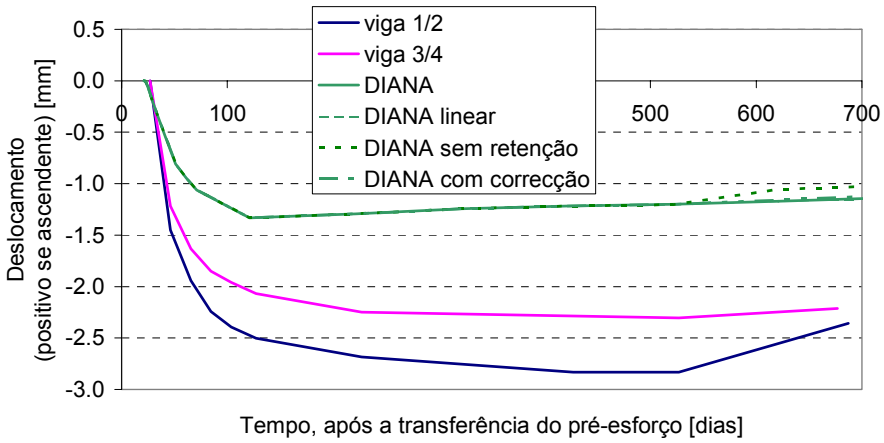


Figura 5-22 – Evolução ao longo do tempo do deslocamento vertical a meio vão (escala temporal linear).

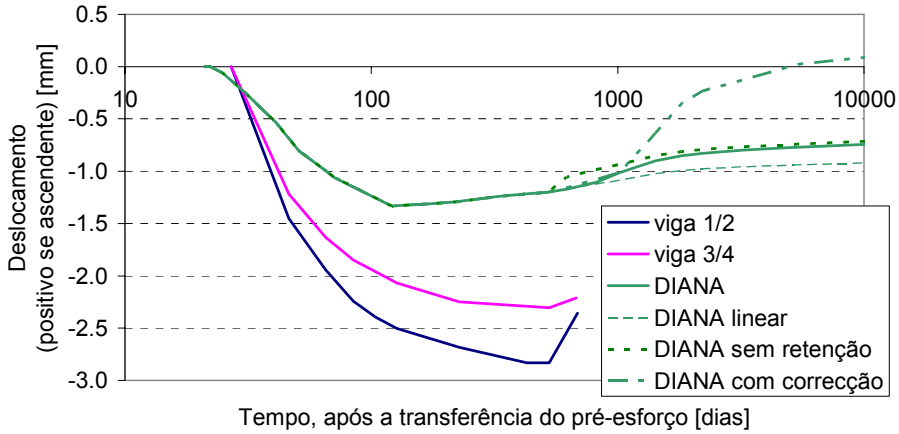


Figura 5-23 - Evolução ao longo do tempo do deslocamento vertical a meio vão (escala temporal logarítmica).

Na Figura 5-22 e na Figura 5-23 comparam-se os valores obtidos pela via experimental e pela via numérica para a evolução ao longo do tempo do deslocamento vertical, a meio vão das vigas. Verifica-se que foram registadas experimentalmente maiores variações de deslocamento, ao longo do tempo. Essa diferença entre os resultados experimentais e numéricos pode ser justificada pela perda de rigidez das vigas ensaiadas, associada à fendilhação da laje na zona sobre o apoio central, tal como foi referido anteriormente. Além disso, a variabilidade associada à previsão das deformações diferidas do betão pode também ter contribuído para justificar tal diferença.

Nos gráficos que representam a evolução dos deslocamentos registada experimentalmente, é visível a tendência de inversão do sentido dos deslocamentos no final do período de monitorização. Essa tendência verifica-se também nos resultados numéricos, de uma forma mais acentuada nos resultados do cálculo com correcção de rigidez, legendado com "DIANA com correcção". Os restantes cálculos conduziram a resultados semelhantes entre si, tal como aconteceu no caso das outras grandezas avaliadas.

5.4.1.1 Efeito da variabilidade da fluência e da retracção

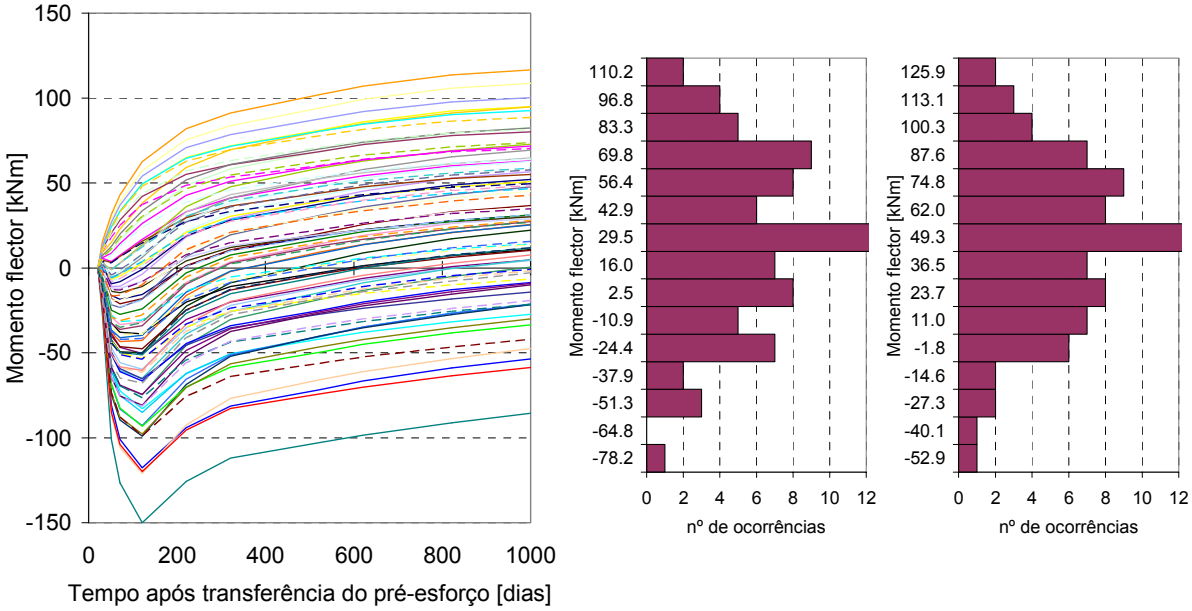
Vários são os factores que podem contribuir para a variabilidade da resposta estrutural ao longo do tempo. Entre esses, destacam-se as deformações por fluência e por retracção do betão, pela influência que têm sobre a evolução ao longo do tempo das tensões e deformações neste tipo de estruturas, e pela variabilidade que está associada à sua quantificação. Neste sub-capítulo apresenta-se o resultado de uma análise paramétrica em que se considera a variação de quatro parâmetros:

- extensão de retracção do betão da viga pré-fabricada;

- extensão de retracção do betão da laje;
- coeficiente de fluência do betão da viga pré-fabricada;
- coeficiente de fluência do betão da laje.

Estes parâmetros não são na realidade um valor único mas antes uma curva temporal que expressa a evolução do parâmetro ao longo do tempo. Para cada um dos parâmetros foram considerados três valores possíveis: o valor médio; um valor superior ao médio em 40%; um valor inferior ao médio em 40%. O valor médio do parâmetro consiste na curva temporal considerada nos cálculos apresentados anteriormente. O valores superior e inferior do parâmetro obtêm-se multiplicando, em cada instante de tempo, o valor médio por 1.40 ou 0.60, respectivamente. Fizeram-se todas as combinações possíveis entre os diversos valores de cada um dos quatro parâmetros, tendo-se realizado, portanto, 81 cálculos.

Nos cálculos efectuados foi considerado um comportamento linear para o betão traccionado, por forma a serem quantificados os esforços que tenderiam a ser gerados por efeito das deformações diferidas.



a) b) c)

Figura 5-24 - Momento flector na secção de apoio central: a) evolução ao longo do tempo; b) histograma de momentos flectores aos 1000 dias; c) histograma de momentos flectores aos 10000 dias.

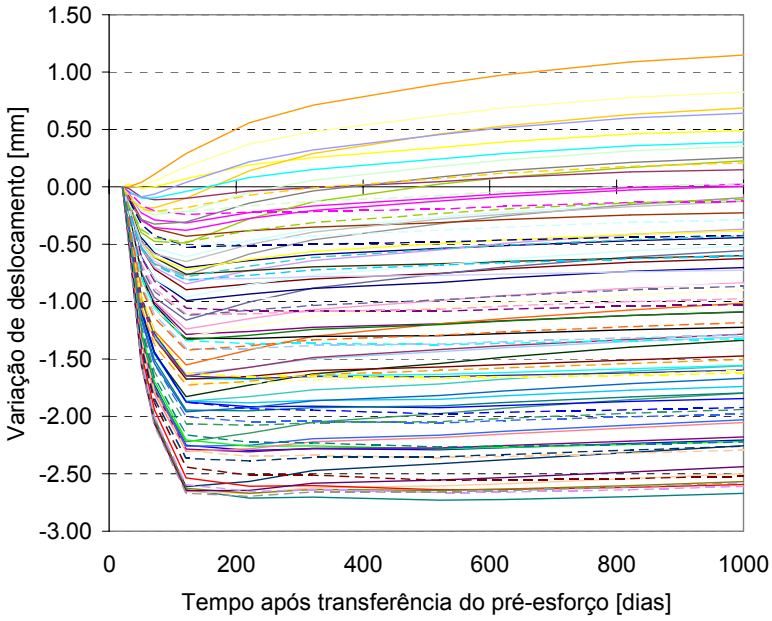


Figura 5-25 – Evolução ao longo do tempo do deslocamento vertical na secção de meio vão.

Nos gráficos apresentados na Figura 5-24 e na Figura 5-25, verifica-se uma grande dispersão de resultados. Na Figura 5-25 apresenta-se a variação de deslocamento vertical, na secção de meio vão da viga, a partir do instante em que se estabelece a continuidade. A dispersão dos deslocamentos totais (incluindo a parcela que ocorre antes do estabelecimento da continuidade) é ainda maior.

O máximo momento flector positivo ocorre no cálculo em que é considerada a seguinte combinação de parâmetros:

- grande retracção da viga e pequena retracção da laje;
- grande fluência da viga e pequena fluência da laje.

Esta é também a combinação de parâmetros que conduz à maior variação de deslocamento com sentido ascendente.

A combinação de parâmetros que origina o máximo momento flector negativo é a seguinte:

- grande retracção da laje e pequena retracção da viga;
- pequena fluência da viga e da laje.

Esta é também a combinação de parâmetros que conduz à maior variação de deslocamento com sentido descendente.

Apesar de se ter verificado uma grande dispersão de resultados e, portanto, uma grande diferença entre os valores extremos que uma determinada grandeza tomou, não é possível, com base no trabalho agora efectuado, dizer qual a probabilidade associada à ocorrência desses valores extremos. Esse aspecto será abordado no Capítulo 7.

5.4.2 Testes de carga intermitentes

Tal como foi referido anteriormente, os testes de carga intermitentes consistem na aplicação, em determinados instantes de tempo, de duas forças de 53.376 kN, cada uma aplicada no centro de um dos vãos, forças essas que simulam uma sobrecarga de utilização.

No modelo numérico, considera-se a actuação da sobrecarga em três instantes de tempo: 37, 676 e 5000 dias. Considera-se esta última data para avaliação do efeito da fendilhação junto da face inferior da carlinga (que será mais acentuada em idades mais avançadas) sobre a resposta da estrutura face à actuação de sobrecargas. O modelo numérico utilizado inclui os efeitos de *tension stiffening* e de *tension softening* (modelo legendado com "DIANA" no sub-capítulo 5.4.1).

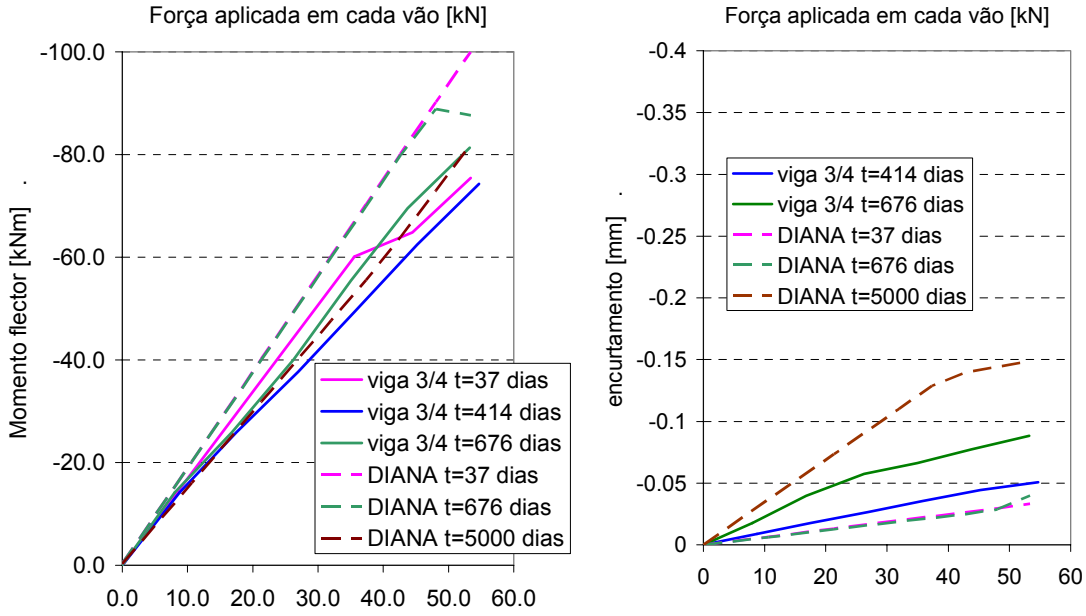


Figura 5-26 – Variação do momento flector e do encurtamento da fibra inferior (base de medida de 254 mm), na secção de apoio central, em função da carga aplicada.

Nos gráficos da Figura 5-26 apresenta-se a variação do momento flector e do encurtamento da fibra inferior (referente a uma base de medida com comprimento de 254 mm), na secção de apoio central, devidos à actuação da sobrecarga nos instantes de tempo referidos.

Apresentam-se também os resultados experimentais. O valor do encurtamento calculado pela via numérica é obtido à custa das deformações registadas nos pontos de integração existentes ao longo do comprimento da base de medida, de 254 mm.

Nos gráficos da Figura 5-27, apresenta-se a evolução da tensão normal na fibra superior da secção de apoio central, durante os testes de carga intermitentes.

No teste de carga realizado aos 37 dias verifica-se, no modelo numérico, fendilhação da fibra superior da secção de apoio no último incremento de carga. A perda de rigidez da estrutura, em resultado dessa fendilhação, é muito reduzida por causa da capacidade de retenção de tracções pelo betão, após a fendilhação. O valor do momento flector na secção de apoio central, resultante deste carregamento é praticamente igual ao momento flector elástico. Pelo contrário, nos resultados experimentais, dá-se a fendilhação da laje quando a sobrecarga aplicada atinge os 36 kN, daí resultando a não-linearidade do diagrama momento-força (experimental) apresentado na Figura 5-26. Esta diferença, entre os resultados obtidos pela via experimental e pela via numérica, deve-se possivelmente ao facto de a resistência à tracção do betão da laje ser, na realidade, inferior ao valor considerado no cálculo.

O carregamento realizado aos 676 dias provoca, quando comparado com o carregamento realizado aos 37 dias, uma maior redução do valor da tensão média retida pelo betão (calculada numericamente), como é visível no diagrama da Figura 5-27 b), e uma consequente alteração da forma do diagrama momento-força representado na Figura 5-26.

O diagrama momento-força, resultante do carregamento efectuado no modelo numérico aos 5000 dias, apresenta um declive idêntico àquele que se verifica nos diagramas obtidos pela via experimental nos carregamentos efectuados aos 414 dias e aos 676 dias. A redução de rigidez da zona de ligação entre vigas, verificada no diagrama momento-força da Figura 5-26 relativo ao carregamento realizado no modelo numérico aos 5000 dias, comparativamente aos carregamentos realizados no modelo numérico em idades anteriores, deve-se, por um lado, à fendilhação na fibra superior (tal como se pode ver na trajectória de tensões da Figura 5-27 c)) e, por outro lado, à fendilhação da fibra inferior (tal como se pode ver no diagrama encurtamento-força representado na Figura 5-26). Nesse diagrama encurtamento-força verifica-se que, após o fecho da fenda (que acontece para uma sobrecarga de cerca de 40 kN), a estrutura passa a apresentar, no ponto em questão, uma rigidez semelhante à rigidez linear-elástica. Essa alteração de rigidez após o fecho da fenda na fibra inferior da secção de apoio é também visível no diagrama encurtamento-força obtido experimentalmente no carregamento efectuado aos 676 dias (Figura 5-26). Os encurtamentos mais elevados são registados no

diagrama relativo ao carregamento efectuado aos 5000 dias, uma vez que nesse instante é maior a abertura da fenda (ou fendas) existente na fibra inferior da carlinga.

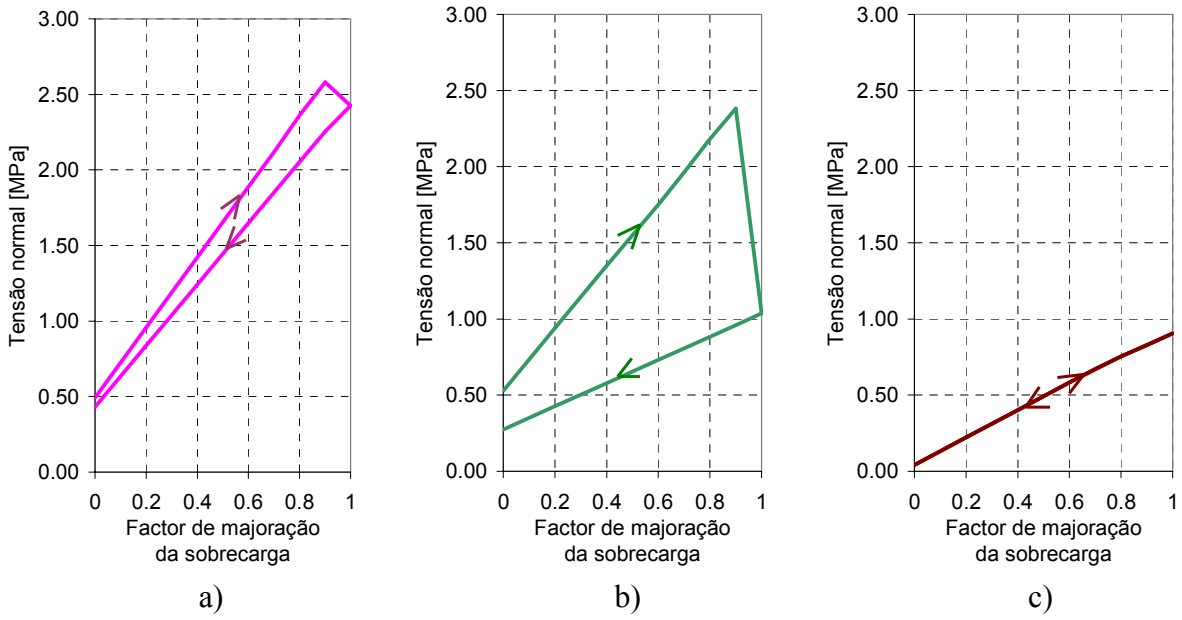


Figura 5-27 – Trajectórias de tensões na fibra superior da secção de apoio durante os testes de carga intermitentes: a) t= 37 dias; b) t= 676 dias; c) t= 5000 dias.

Verificou-se, nos cálculos efectuados, uma redistribuição máxima de momento flector na secção de apoio de 20%, relativamente ao momento flector elástico, redistribuição essa que ocorreu no carregamento efectuado aos 5000 dias. Este valor é próximo do valor da redistribuição de momentos flectores obtida experimentalmente, como se pode verificar na Figura 5-26.

5.5 Considerações finais

Neste capítulo compararam-se os resultados numéricos com os obtidos experimentalmente por Mattock (1961), que ensaiou modelos, à escala 1:2, compostos por duas vigas pré-fabricadas ligadas em continuidade sobre um apoio intermédio. O modelo numérico utilizado revelou-se adequado para a avaliação de esforços, tensões e deformações em estruturas do tipo daquelas que foram analisadas neste capítulo, pois foram obtidas boas aproximações aos resultados experimentais para algumas grandezas. Quando isso não aconteceu, foram comentadas e justificadas as diferenças.

Para além de servir como validação do modelo numérico utilizado, o trabalho apresentado neste capítulo serviu para evidenciar particularidades de funcionamento do tipo de obras em estudo, nomeadamente:

- o efeito da fendilhação, que condiciona a distribuição de esforços provocada pela sobrecarga de utilização, conduzindo a uma distribuição de esforços diferente daquela que é calculada considerando um comportamento linear elástico para o betão;
- os cuidados a ter com a rigidez da ligação para momentos positivos, aspecto que é significativo neste caso em que a carlinga tem uma dimensão reduzida;
- a importância da evolução temporal do estado de tensão e de deformação na estrutura;
- a modificação significativa da evolução da resposta estrutural que acontece quando se consideram valores diferentes para o coeficiente de fluência ou para a extensão de retracção.

O ensaio experimental, apesar de ter uma duração significativamente inferior ao período de serviço de uma obra real, permitiu a obtenção de conclusões relativamente ao funcionamento estrutural de uma obra real, pois, para durações de carregamento maiores a evolução das grandezas é menos acentuada, como se conclui pela via numérica. O trabalho experimental permitiu concluir que o efeito das deformações por retracção e fluência não tem influência significativa sobre o valor da carga última da estrutura estudada.

6 Análise de um caso prático

6.1 Introdução

Neste capítulo analisa-se o comportamento, durante a fase de serviço, do tabuleiro de uma ponte, com dois vãos de 25 m, construído a partir de vigas pré-fabricadas ligadas em continuidade sobre o apoio central, através de uma solução de ligação usando armaduras ordinárias apenas.

É utilizado o programa DIANA (2002) para a análise estrutural. A estrutura é discretizada utilizando elementos finitos de viga e elementos de armadura embebida. A modelação inclui o faseamento construtivo e o comportamento não linear dos materiais, nomeadamente a fendilhação em tracção, a fluência e a retracção do betão e ainda a plastificação das armaduras.

O estudo aqui apresentado constitui uma análise de carácter determinístico, em que todas as propriedades do betão tomam o seu valor médio. Este caso será alvo de uma análise de natureza probabilística no capítulo seguinte.

Após a descrição do caso em análise, apresenta-se o modelo numérico utilizado e, por fim, apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos.

6.2 Descrição do caso em análise

Tendo em vista a caracterização do caso prático em análise, são descritas as características geométricas da estrutura, as propriedades dos materiais empregues na sua construção, as acções consideradas, e o faseamento construtivo. São consideradas as formas geométricas e os materiais correntemente utilizados.

6.2.1 Geometria e armaduras

O tabuleiro em análise é constituído por dois vãos contínuos de 25 m, sem viés, construídos com vigas pré-fabricadas com 1.20 m de altura. Na Figura 6-1 representam-se os cortes transversal e longitudinal (representado parcialmente) do tabuleiro em análise. Transversalmente, as vigas são ligadas entre si por uma laje com espessura constante de 0.22 m e por carlingas localizadas nos alinhamentos de apoio. O tabuleiro é revestido por um pavimento betuminoso com 6 cm de espessura e dispõe de passeios localizados junto das bordaduras. Na Figura 6-2 representa-se a secção transversal da viga pré-fabricada e uma secção transversal, com formas simplificadas, com propriedades geométricas semelhantes às da viga real. No cálculo foi considerada esta secção, com forma geométrica simplificada.

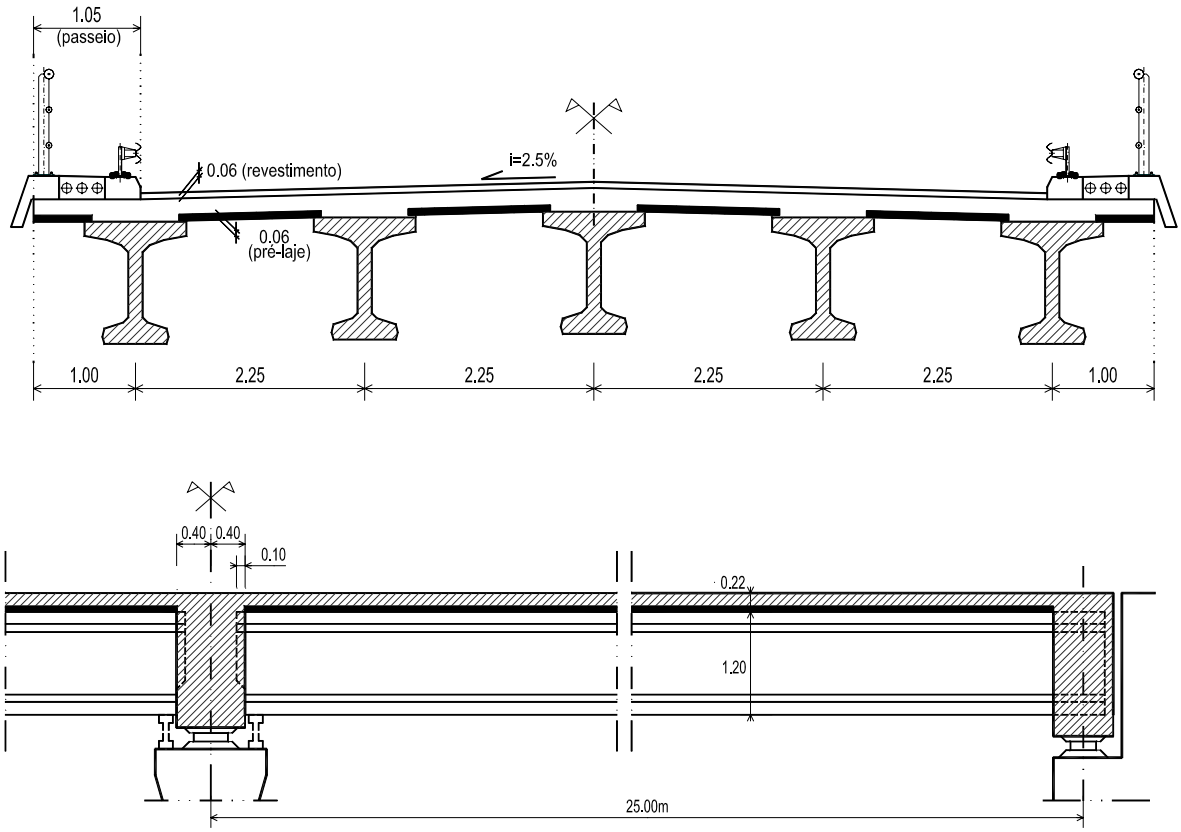


Figura 6-1 - Corte transversal e corte longitudinal (parcial) do tabuleiro em análise (dimensões em metros).

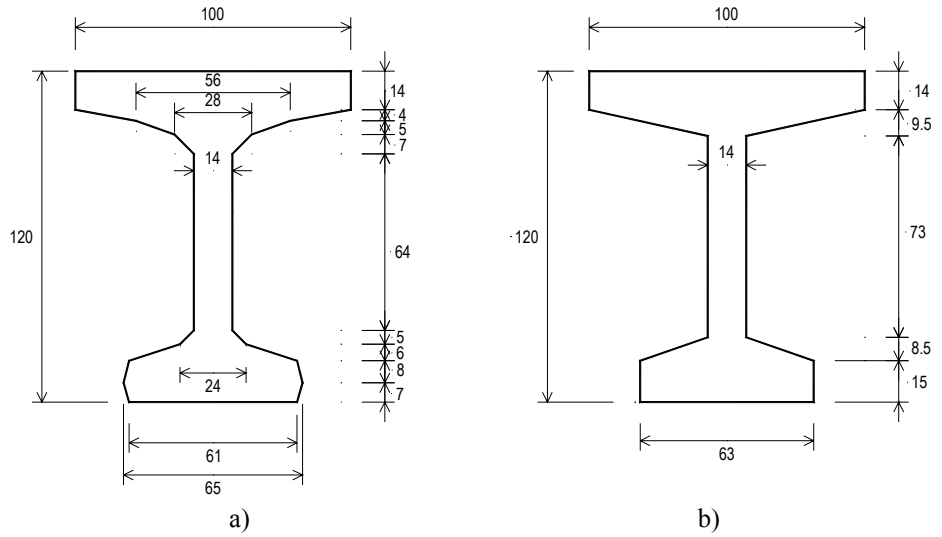


Figura 6-2 - Secção transversal da viga pré-fabricada (dimensões em cm): a) geometria real; b) geometria simplificada considerada no cálculo.

Na Figura 6-3 e na Figura 6-4 representam-se as armaduras ordinárias e as armaduras de pré-esforço utilizadas.

A armadura de pré-esforço é constituída por 22 cordões com 0.6'' de diâmetro, com a área de 1.5 cm^2, dos quais 20 estão alojados no banzo inferior da viga pré-fabricada e dois estão no seu banzo superior, como se representa na Figura 6-4. Todo o pré-esforço é introduzido por pré-tensão, em fábrica. Para evitar a existência de um pré-esforço excessivo nas extremidades das vigas pré-fabricadas, alguns cordões são envolvidos por uma bainha em plástico, ao longo de um determinado comprimento. Nesses cordões, a transmissão do pré-esforço ao betão, por aderência, só acontecerá na parte do cordão não embainhada. Na Figura 6-3, os cordões de pré-esforço estão representados a traço interrompido ao longo da extensão em que são embainhados.

A armadura de pré-esforço foi estimada com base nos resultados do trabalho de Osterle *et al.* (1989) que concluíram que o valor máximo do momento flector positivo na zona do vão, em fase de serviço, é sensivelmente idêntico ao que existiria num tabuleiro semelhante, mas simplesmente apoiado.

A quantidade de armadura de continuidade para momentos flectores positivos, sobre o apoio intermédio, foi estimada de acordo com o seguinte pressuposto: uma vez que o momento flector positivo instalado na zona de ligação resulta essencialmente do impedimento de deformações, é provável que o seu valor não ultrapasse o valor do esforço de fendilhação, M_{cr}. A quantidade de armadura considerada ($6f20$) garante que a abertura de fendas não ultrapassa o valor de 0.3 mm sob actuação do momento flector M_{cr} (quantificado

considerando as características geométricas da viga pré-fabricada e da laje, e a resistência média à tracção do betão da carlinga). A validade deste pressuposto será confirmada adiante. A armadura a prever em projecto, deverá ainda satisfazer a disposição construtiva imposta no REBAP (1983) e no EC2 (CEN 2002): $As_{apoio} \geq (1/4) \cdot As_{vão}^{equivalente}$. Além disso deverá ser suficiente para desempenhar, em ELU, as funções referidas em 2.5.1.3.

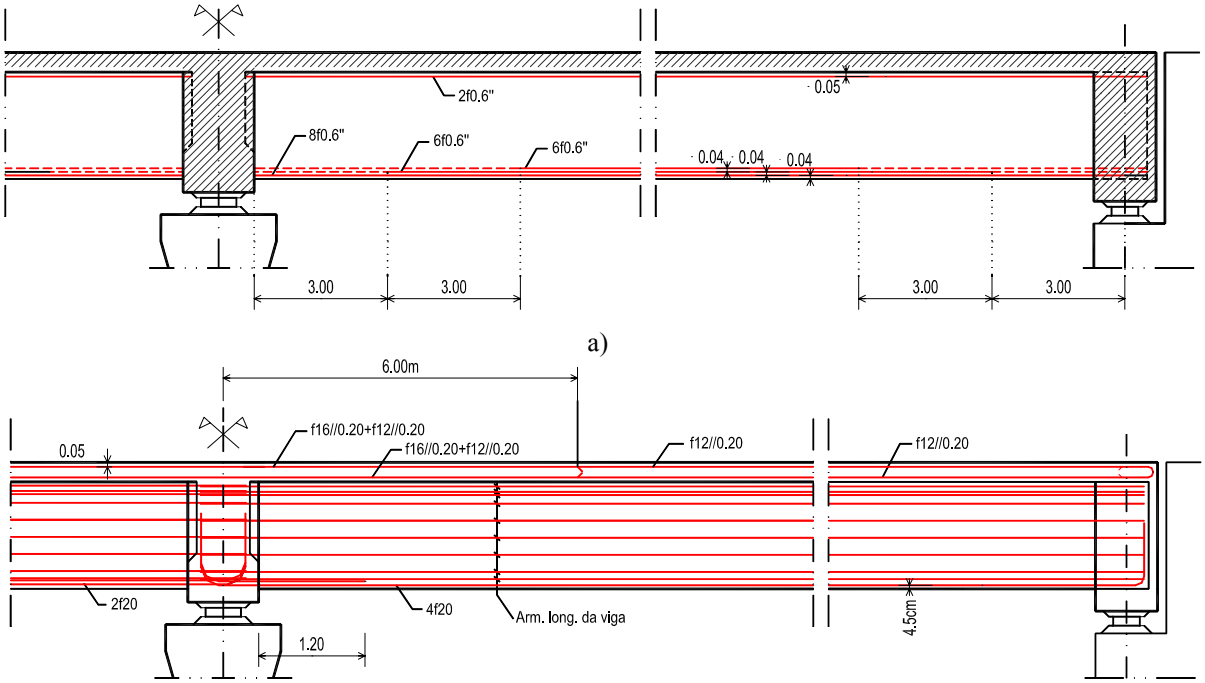


Figura 6-3 - Corte longitudinal representando as armaduras (dimensões em metros): a) armaduras de pré-esforço; b) armaduras ordinárias longitudinais.

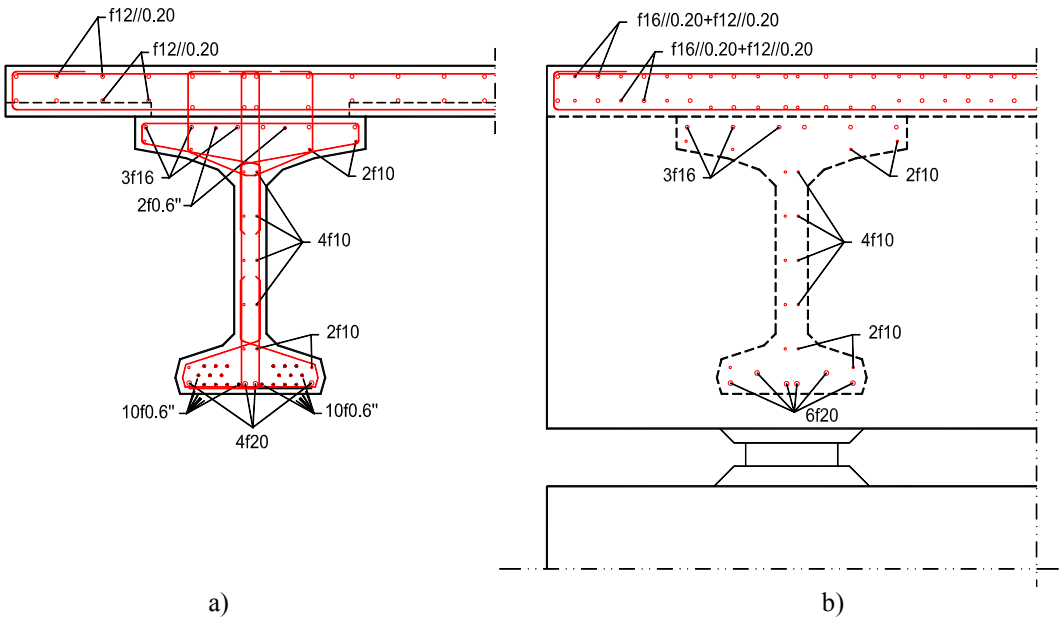


Figura 6-4 - Cortes transversais representando as armaduras: a) secção de meio vão; b) secção sobre o apoio central.

A armadura de continuidade para momentos flectores negativos é constituída por varões com diâmetro de 12 mm e de 16 mm ($f12 // 0.20 + f16 // 0.20$) junto das faces superior e inferior da laje, como se pode ver na Figura 6-3 e na Figura 6-4.

Considera-se que as armaduras alojadas nas vigas pré-fabricadas têm um recobrimento de betão de 2.50 cm, enquanto que as armaduras alojadas nos restantes elementos do tabuleiro (laje e carlingas) possuem um recobrimento de 3.00 cm.

6.2.2 Propriedades dos materiais

As propriedades materiais consideradas para os betões utilizados na construção das vigas pré-fabricadas, da laje e das carlingas estão indicadas na Tabela 6-1. Considera-se que o ambiente a que está exposta a estrutura pode ser caracterizado por uma temperatura média de 15 ºC e uma humidade relativa média de 70%.

Tabela 6-1 - Propriedades dos betões.

	Viga	Laje e carlinga
Classe de resistência (segundo o MC90 (CEB 1993))	C45	C30
Dimensão máxima dos inertes [mm]	20	20
Tipo de cimento	Endurecimento rápido e alta resistência	Endurecimento rápido e alta resistência
f_{cm} [MPa]	53	38
E_{ci} [MPa]	37486	33551
f_{ctm} [MPa]	3.82	2.91
G_F [Nmm/mm^2]	0.1189	0.0942
h_{eq} [mm]	167	291
α_{cT} [ºC^{-1}]	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$

Para as armaduras ordinárias e de pré-esforço foi considerada, simplificadamente, uma relação tensão-extensão do tipo bilinear, definindo um comportamento elástico-perfeitamente plástico. Note-se que está a ser estudado o comportamento da obra durante a fase de serviço, não sendo, portanto, relevante a consideração do endurecimento do aço após a cedência. Na Tabela 6-2 apresentam-se as propriedades consideradas para os aços.

Tabela 6-2 - Propriedades dos aços.

	Armadura ordinária	Armadura de pré-esforço
E_s [GPa]	200	200
f_{sy} [MPa]	500	-
$f_{p0.1k}$ [MPa]	-	1674
f_{puk} [MPa]	-	1860

Para a modelação do comportamento do betão traccionado, foi utilizado o modelo de fendilhação distribuída com decomposição de extensões descrito no Capítulo 4. O efeito de *tension stiffening* foi considerado através da definição da relação tensão-extensão ilustrada na Figura 4.10 para a zona envolvente das armaduras de tracção. A limitação do efeito de *tension stiffening* após a cedência da armadura na secção da fenda foi modelada através da modificação da lei constitutiva do aço, da forma descrita no sub-capítulo 4.3.1.3.

6.2.3 Acções actuantes

Neste trabalho é utilizado um modelo de elementos finitos de viga para estudar o comportamento de uma das vigas que compõem o tabuleiro. Como a estrutura tem, na realidade, uma configuração tridimensional, torna-se necessária a quantificação de acções que geram, na viga modelada, esforços idênticos aqueles a que ela está sujeita na estrutura real. A seguir apresenta-se a quantificação dessas acções.

Neste trabalho é analisada apenas a viga mais próxima da bordadura do tabuleiro (viga extrema), uma vez que é neste viga que ocorrem os maiores esforços provocados pelas acções exteriores. De facto:

- o peso próprio da viga e da laje e o efeito do pré-esforço produzem esforços semelhantes em todas as vigas do tabuleiro;
- as cargas permanentes não estruturais, que incluem o peso dos passeios e o peso do revestimento betuminoso, provocam esforços mais elevados na viga extrema, tal como será justificado adiante;
- a sobrecarga rodoviária provoca esforços mais elevados na viga extrema.

A acção resultante do peso próprio dos materiais estruturais é obtida através da multiplicação do seu volume pelo peso específico do betão armado, que se considera ser 25 kN/m^3. É desprezado, simplificadamente, o efeito da sobrecarga actuante sobre os passeios.

6.2.3.1 Pré-esforço

A tensão inicial de pré-esforço, σ'_{P0}, é a tensão de esticamento dos cordões de pré-esforço e corresponde a 75% do valor característico da tensão de rotura do aço, f_{puk}. Após a transferência do pré-esforço para o betão, a tensão instalada nos cordões será igual ao valor de σ'_{P0} reduzido das perdas por:

- reentrada das cunhas nos maciços de amarração da mesa de pré-esforço que, no caso em análise, têm o valor 10 MPa (considerando uma mesa de pré-tensão com comprimento de 100 m e uma reentrada das cunhas com o valor de 5 mm);
- relaxação do aço, antes da transferência de pré-esforço que, no caso em análise, têm o valor 13 MPa (valor calculado de acordo com o estipulado no EC2 (CEN 2002));
- deformação elástica do betão, cujo valor é calculado automaticamente.

O comprimento de transferência do pré-esforço, quantificado de acordo com o estipulado no MC90 (CEB 1993), é igual a 1100 mm.

6.2.3.2 Cargas permanentes não estruturais

As cargas permanentes não estruturais, são habitualmente designadas por Restantes Cargas Permanentes (RCP). Na área do tabuleiro sob os passeios, a carga aplicada é maior do que na restante área, portanto, as cargas RCP originam esforços desiguais nas diversas vigas que compõem o tabuleiro. A quantificação desses esforços foi efectuada num modelo tridimensional de elementos finitos que simula o tabuleiro, sendo as vigas pré-fabricadas e as carlingas discretizadas com elementos de barra e a laje discretizada com elementos de casca. Nesse modelo não foram incluídas as armaduras e foi considerado um comportamento linear elástico para o betão, caracterizado pelo seu módulo de elasticidade aos 28 dias. A excentricidade das vigas pré-fabricadas em relação à laje é considerada. Na Figura 6-5 apresenta-se uma imagem (vista superior) desse modelo.

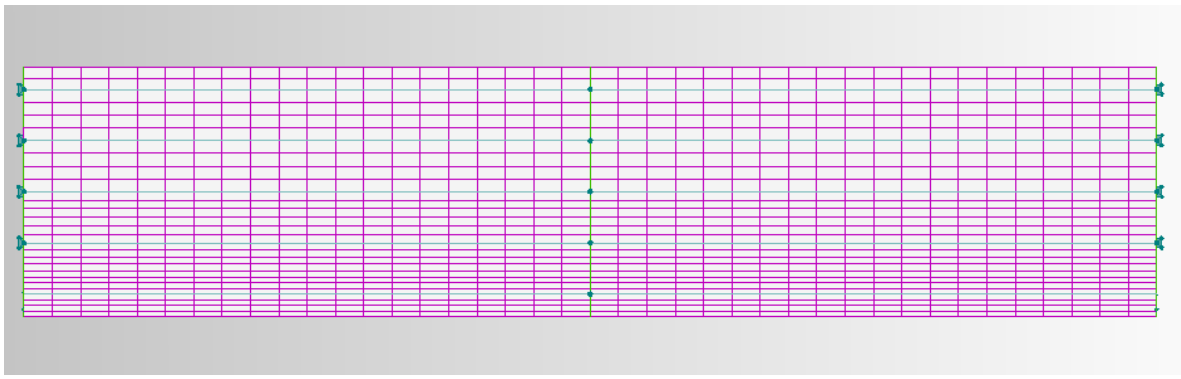


Figura 6-5 - Representação em planta da malha de elementos finitos do modelo tridimensional.

Na Figura 6-6 apresenta-se o diagrama de momentos flectores instalados na viga extrema do tabuleiro, obtido através do modelo tridimensional. Representa-se apenas o diagrama num dos dois tramos, em virtude da simetria do carregamento.

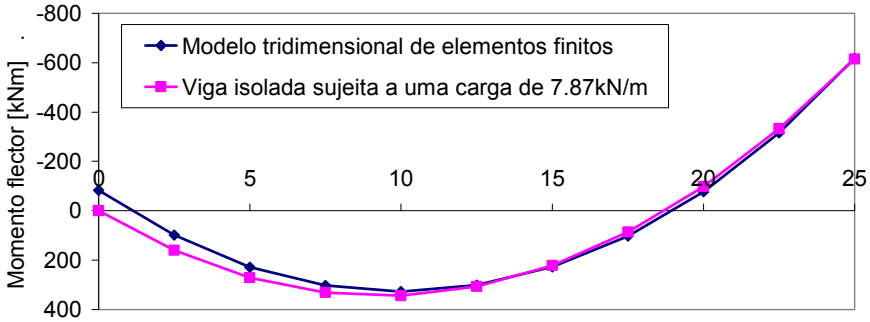


Figura 6-6 - Diagrama de momentos flectores, no tramo da esquerda da viga extrema do tabuleiro, devido à carga permanente não estrutural.

Na Figura 6-6 representa-se também o diagrama de momentos flectores de uma viga isolada, com dois tramos, submetida à actuação de uma carga uniformemente distribuída de 7.87 kN/m. Essa carga origina um momento flector negativo máximo igual aquele que foi obtido através do modelo tridimensional, e um momento flector positivo máximo ligeiramente superior. Então, no modelo de elementos finitos de viga, a RCP é simulada através de uma carga uniformemente distribuída de 7.87 kN/m. Este valor corresponde a 86% do peso da RCP directamente aplicada sobre a faixa de laje com 2.125 m de largura sobre a viga extrema do tabuleiro, isto é, constitui 86% da carga actuante na largura de influência da viga extrema do tabuleiro.

6.2.3.3 Sobrecarga rodoviária

A sobrecarga rodoviária é constituída pelo veículo para pontes da classe I, definido no RSA (1983), constituído por três eixos, tendo cada eixo duas rodas, transmitindo cada roda uma acção de 100 kN, tal como se representa na Figura 6-7.

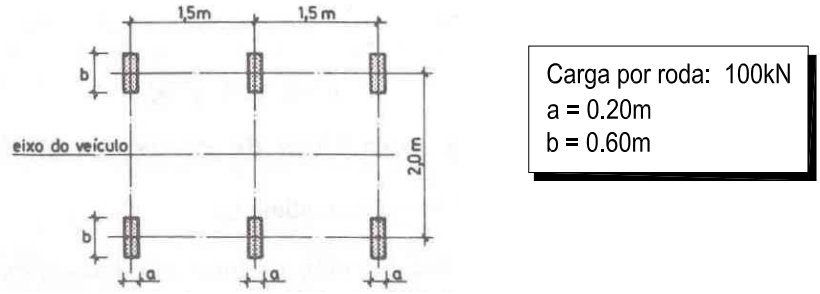


Figura 6-7 - Veículo tipo 1 definido no RSA (1983).

Para a obtenção do efeito da sobrecarga rodoviária sobre cada uma das vigas que compõem o tabuleiro, foi utilizado o modelo tridimensional de elementos finitos referido no sub-capítulo 6.2.3.2. Para a obtenção dos esforços mais desfavoráveis em cada viga, foi considerada a actuação do veículo tipo ao longo de três percursos diferentes, que se representam na Figura 6-8:

- o alinhamento VT1, em que o veículo está encostado ao passeio;
- o alinhamento VT2, em que o veículo está sobre a segunda viga do tabuleiro;
- o alinhamento VT3, em que o veículo está sobre a terceira viga do tabuleiro.

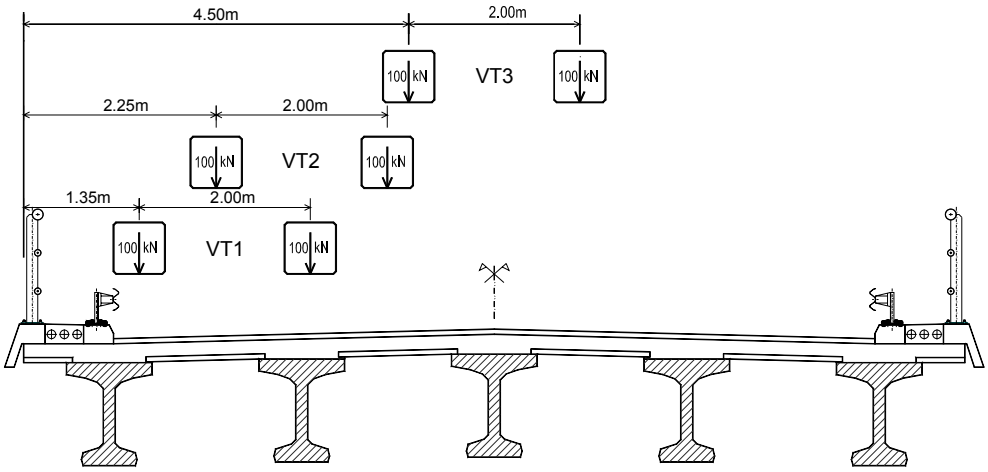


Figura 6-8 - Alinhamentos percorridos pelo veículo tipo.

Ao longo de cada percurso, o veículo ocupa posições afastadas entre si de 0,50 m. Para cada percurso, é determinado automaticamente o diagrama envolvente de momentos flectores em

cada viga, diagrama esse que contém os valores máximo e mínimo do momento flector em cada ponto ao longo do eixo da viga, quando o veículo percorre tal percurso. Na Figura 6-9 representa-se, para cada percurso (VT1 a VT3) e para cada viga (1 a 5, sendo a viga 1 aquela que ocupa a posição mais à esquerda na Figura 6-8), o valor extremo do momento flector que ocorre na região do vão e o valor extremo que ocorre sobre o apoio central. Os resultados apresentados na Figura 6-9 b) correspondem a uma situação de cálculo em que a rigidez à torção da viga pré-fabricada é reduzida, passando a ter 10% da rigidez em fase linear elástica, isto é, da rigidez calculada com base no módulo de elasticidade aos 28 dias. Com esta redução é tido em conta o efeito da fendilhação, que origina um agravamento dos esforços máximos actuantes sobre cada viga.

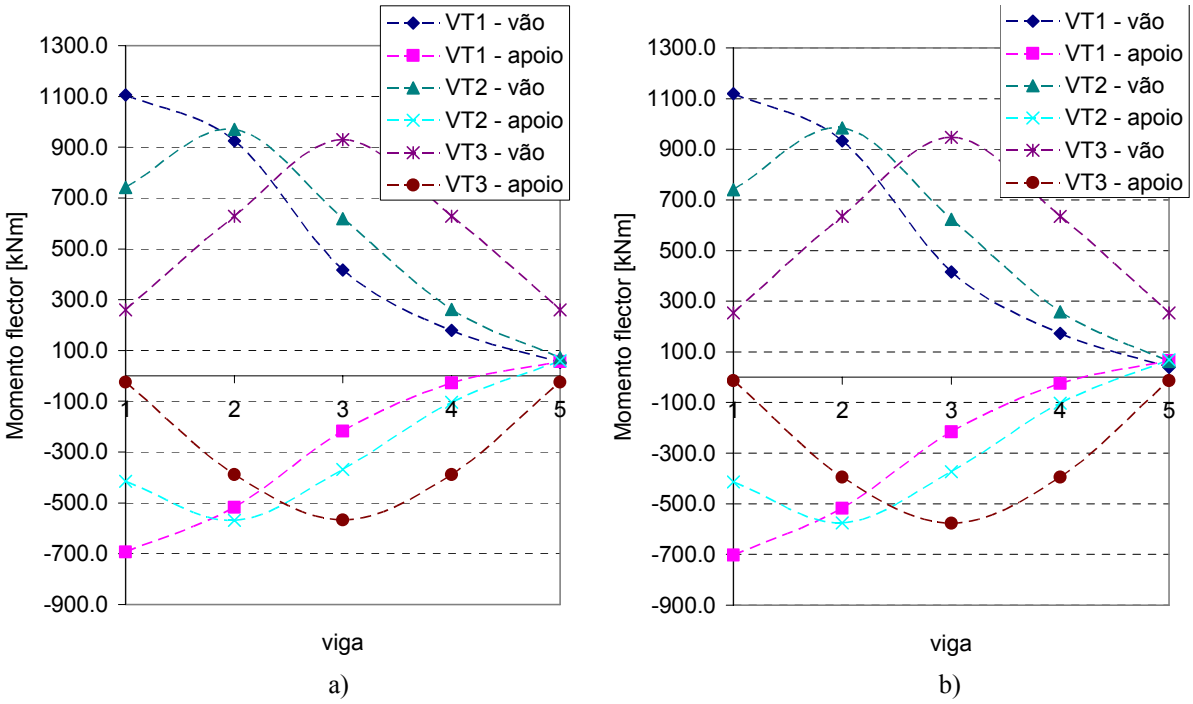


Figura 6-9 - Valores extremos do momento flector, nas vigas do tabuleiro, quando o veículo percorre os percursos VT1 a VT3: a) rigidez dos elementos estruturais calculada com base no módulo de elasticidade aos 28 dias; b) com redução da rigidez à torção da viga pré-fabricada.

Através da análise da Figura 6-9, verifica-se que os maiores esforços de flexão ocorrem na viga extrema (viga mais próxima da bordadura do tabuleiro) e resultam do cálculo com redução da rigidez de torção, tendo os seguintes valores:

- o momento flector positivo máximo, na região do vão, tem o valor +1130,4 kNm;
- o momento flector negativo mínimo, sobre o apoio central, tem o valor -695.5 kNm.

Para a tradução do efeito da sobrecarga rodoviária no modelo de viga através de um carregamento simples (compatível com a realização de uma análise não linear neste capítulo e

de uma análise probabilística no capítulo seguinte) foram consideradas três forças concentradas, com direcção vertical, afastadas do apoio mais à esquerda de, respectivamente, 10.8 m, 12.3 m e 13.8 m, tendo cada uma o valor 100 kN. Este carregamento produz, no modelo de viga contínua com dois tramos, os seguintes esforços extremos (numa análise linear-elástica):

- momento flector positivo máximo, na região do vão, igual a +1384 kNm;
- momento flector negativo mínimo, sobre o apoio central, igual a -693 kNm.

O carregamento simplificado considerado, origina um momento flector, na secção de apoio, idêntico aquele que foi obtido através do modelo tridimensional de elementos finitos, provocando um momento flector, na região do vão, ligeiramente superior ao que é obtido com o modelo tridimensional.

Os valores quase-permanente e frequente da sobrecarga rodoviária, de acordo com o RSA (1983), são obtidos multiplicando o seu valor máximo (valor característico) por, respectivamente, $\psi_2 = 0.2$ e $\psi_1 = 0.4$.

6.2.3.4 Variação de temperatura

A variação diária e sazonal da temperatura ambiente, a radiação solar e outros efeitos dão origem à variação da temperatura instalada nos diferentes elementos que compõem a estrutura. A distribuição de temperatura num elemento estrutural pode ser decomposta nas seguintes componentes:

- componente uniforme, ΔT_u, que conduz a um aumento do comprimento ao nível do eixo médio do elemento, sem alteração da sua curvatura;
- componente linear, variável linearmente segundo a direcção vertical OZ, ΔT_{Mz}, que conduz a alterações de curvatura no plano vertical, sem se verificar uma variação do comprimento ao nível do eixo médio das peças;
- componente linear, variável linearmente segundo a direcção horizontal OY, ΔT_{My}, que conduz a alterações de curvatura no plano horizontal, sem se verificar uma variação do comprimento ao nível do eixo médio das peças;
- componente não-linear, ΔT_E, que dá origem a um sistema se tensões auto-equilibradas na secção, sem ocorrência de deformações (curvaturas ou variação de comprimento do eixo médio das peças).

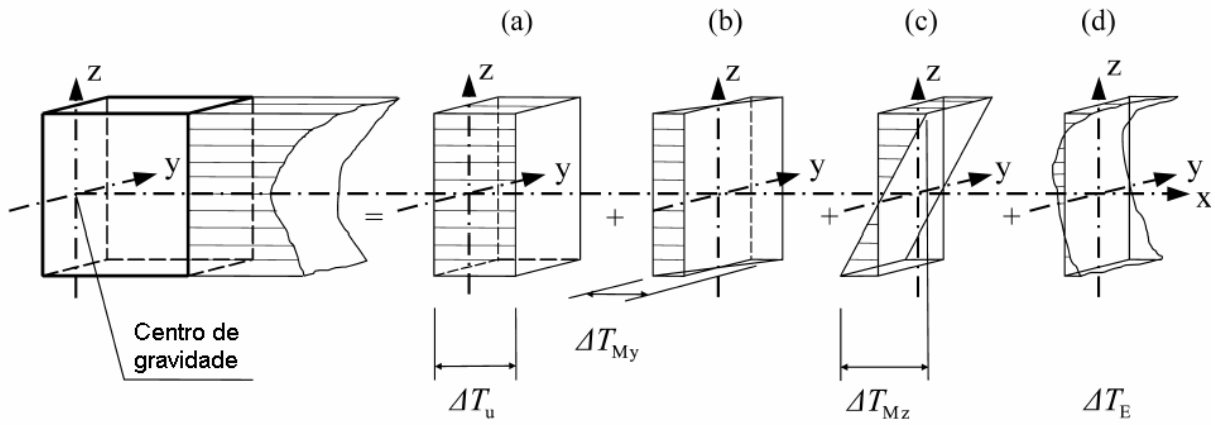


Figura 6-10 - Representação esquemática das componentes de uma variação de temperatura: a) componente uniforme; b) variação linear segundo a direcção horizontal; c) variação linear segundo a direcção vertical; d) componente não linear.

Em secções simétricas em relação ao eixo vertical, submetidas a uma distribuição de temperatura variável segundo a direcção vertical, as componentes da distribuição de temperatura são calculadas através das seguintes expressões:

$$\Delta T_u = \frac{1}{A}\int_A \Delta T(z)dA \qquad [6\text{-}1]$$

$$\Delta T_{Mz} = \frac{h}{I_y}\int_A [\Delta T(z)\cdot z]dA \qquad [6\text{-}2]$$

$$\Delta T_E(z) = \Delta T(z) - \Delta T_u - \Delta T_{Mz}\cdot\frac{z}{h} \qquad [6\text{-}3]$$

representando A, h e I_y, a área da secção transversal, a sua altura e o seu momento de inércia em relação ao eixo horizontal que contém o centro de gravidade, respectivamente.

O efeito da componente uniforme da variação de temperatura não foi considerado neste trabalho, porque não causaria esforços significativos uma vez que, no caso concreto em análise, se considera que os aparelhos de apoio do tabuleiro não causam uma restrição significativa à sua deformação axial.

Tal como foi referido no Capítulo 2, o efeito da variação diferencial de temperatura, com aquecimento da fibra superior em relação à inferior, influencia de forma significativa o comportamento deste tipo de obras. Na Figura 6-11 a) apresenta-se o diagrama com os valores característicos da variação de temperatura, segundo a direcção vertical, quantificado de acordo com o EC1 (CEN 2003) para a estrutura em análise. Este diagrama inclui, para além da componente linearmente variável da distribuição de temperatura, a componente não-linear e uma pequena parcela da componente uniforme.

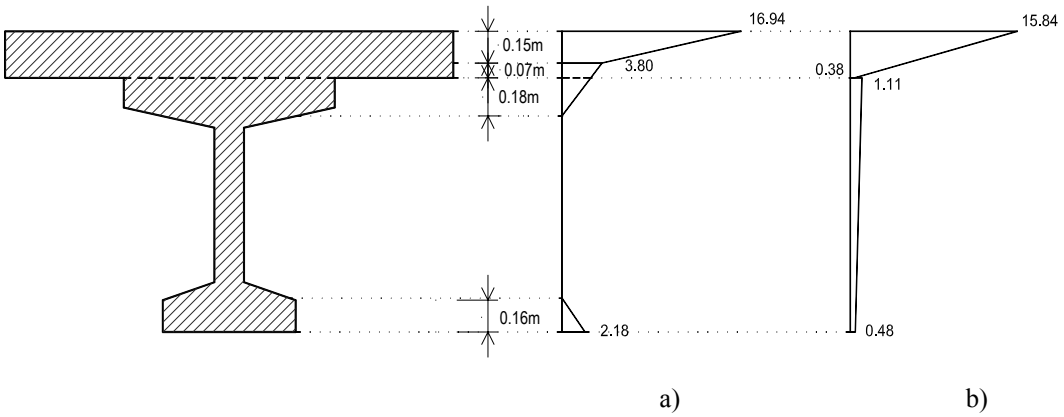


Figura 6-11 - Variação de temperatura ao longo da altura da secção: a) valores prescritos no EC1 (CEN 2003) para o caso em análise (ºC); b) distribuição de temperatura considerada no cálculo (ºC).

Nos cálculos efectuados, considera-se uma distribuição de temperatura diferente, uma vez que, o modelo de elementos finitos utilizado apenas admite distribuições de temperaturas com variação linear em cada elemento (viga pré-fabricada e laje). A distribuição de temperaturas considerada é a que está representada na Figura 6-11 b), que produz na viga pré-fabricada e na laje a mesma deformação (variação de comprimento ao nível do centro de gravidade e curvatura) que a distribuição de temperatura preconizada pelo EC1 (CEN 2003).

Para a obtenção dos valores quase-permanente e frequente da variação de temperatura, consideram-se, na falta de mais informação, os coeficientes $\psi_2 = 0.3$ e $\psi_1 = 0.5$, definidos no RSA (1983) para a variação uniforme de temperatura.

6.2.3.5 Resumo das acções consideradas

Na Tabela 6-3 resumem-se os valores das acções consideradas no cálculo.

Tabela 6-3 Acções consideradas.

Acção	Valor
Tensão inicial de pré-esforço, σ'_{P0}	1395 MPa
Peso próprio da viga (PPviga)	10.59 kN/m
Peso próprio da laje (PPlaje)	11.69 kN/m
Restante carga permanente (RCP)	7.87 kN/m
Variação de temperatura (dT)	diagrama representado na Figura 6-11 b)
Sobrecarga correspondente ao veículo tipo (VT)	3 forças concentradas de 100 kN, aplicadas no tramo da esquerda, distando 10,8 m, 12.3 m e 13.8 m do apoio mais à esquerda

6.2.4 Faseamento construtivo

Na Tabela 6-4 apresenta-se a sequência de operações consideradas e o instante de tempo em que ocorrem. A escala temporal considerada tem início no instante de transferência do pré-esforço para o betão. Distingue-se uma primeira fase (antes da continuidade) e uma segunda fase (após a continuidade), que tem início no instante em que a laje e a carlinga começam a funcionar como elementos estruturais. Neste trabalho considera-se que isso acontece um dia após a betonagem da laje e da carlinga.

Foi definida uma idade de 3,5 dias para o betão das vigas, na data de aplicação do pré-esforço, para que, após o esticamento, a tensão de compressão máxima não ultrapasse 70% da resistência característica do betão, nessa data, tal como especificado regulamentarmente no EC2 (CEN 2002). Assim, se o betão possuir, na data de transferência do pré-esforço, as características resistentes que resultam da aplicação das equações [3-4] e [3-16] para uma idade de 3.5 dias, a tensão máxima de compressão após a transferência de pré-esforço não deve ser superior ao valor indicado na expressão [6-4]:

$$\sigma_{c,max} = 0.7 \cdot f_{ck}(3.5) = 0.7 \cdot [\beta_{cc}(3.5) \cdot f_{cm} - 8] = 20.1\,\text{MPa} \qquad [6\text{-}4]$$

Tabela 6-4 - Faseamento construtivo.

Fase	Tempo decorrido [dias]	Acção
1 (antes da continuidade)	-3.5	Betonagem das vigas.
	0	Aplicação do pré-esforço por pré-tensão.
	30	Betonagem da laje e da carlinga.
2 (após a continuidade)	31	Início do funcionamento estrutural da laje e da carlinga.
	46	Aplicação das restantes cargas permanentes.

Na Figura 6-12 representa-se graficamente a sequência de aplicação das acções variáveis, isto é, da sobrecarga rodoviária e da variação de temperatura. Essas acções são aplicadas inicialmente, entre os 46 e os 47 dias, por forma a ser contabilizada a influência da fendilhação (que pode ser provocada pela actuação dessas acções) sobre a evolução ao longo do tempo do estado de tensão e de deformação da estrutura. Após um período de tempo de 20000 dias, essas acções são aplicadas novamente, por forma a ser avaliado o efeito da sua

actuação a longo prazo. A sequência de carregamento adoptada inclui, no seu final, as seguintes combinações de acções:

- combinação quase permanente de acções, sendo a Acção Variável Base (AVB) a variação de temperatura, actuando aos 20047.85 dias;
- combinação quase permanente de acções, com as acções variáveis variação de temperatura e sobrecarga rodoviária, actuando aos 20047.85 dias (após o ciclo de carga e descarga parcial da sobrecarga rodoviária, representado na Figura 6-12);
- combinação quase permanente de acções, sendo a AVB a sobrecarga rodoviária, actuando aos 20048 dias.

O efeito da actuação das acções variáveis com o seu valor quase permanente (nomeadamente em termos de abertura de fendas) é avaliado após essas mesmas acções terem actuado sobre a estrutura com o seu valor característico.

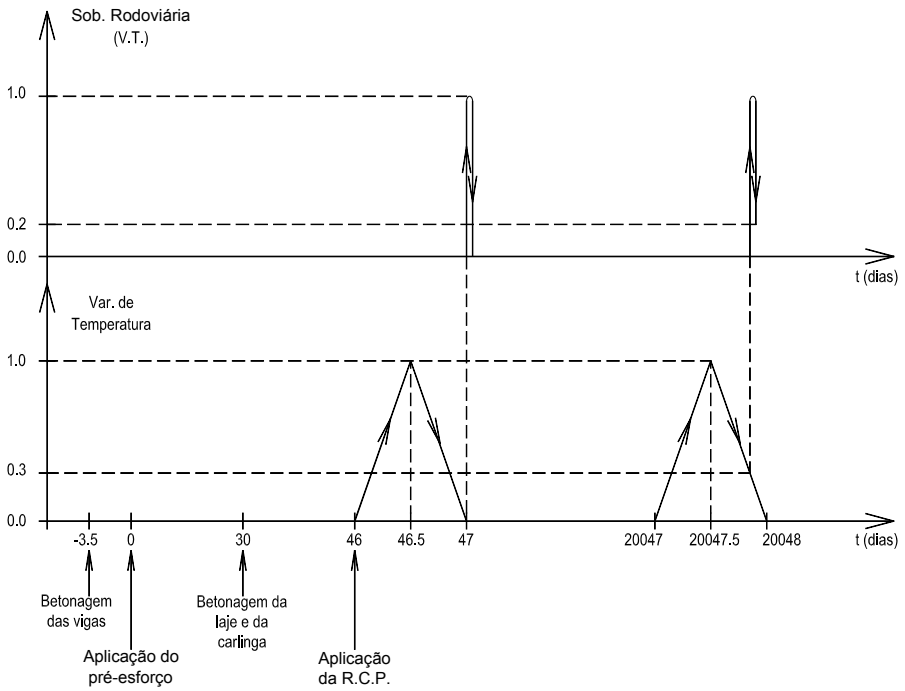


Figura 6-12 – Faseamento construtivo e sequência de aplicação das acções variáveis.

6.3 Descrição do modelo numérico

Tal como foi referido anteriormente, para a realização do estudo numérico apresentado neste sub-capítulo foi utilizado um modelo de elementos finitos de viga. Foi utilizado o programa DIANA (2002). O tipo de elementos finitos utilizado foi descrito no Capítulo 5. Na Figura

6-13 representa-se a discretização da estrutura ao longo do comprimento da viga, relativa à primeira e à segunda fase descritas no sub-capítulo 6.2.4. Foram modelados os dois vãos da estrutura, isto é, não foi tirado partido da simetria da estrutura uma vez que a acção exercida pela sobrecarga rodoviária não é simétrica. Na Figura 6-13 representa-se, por simplicidade, apenas metade do modelo de elementos finitos.

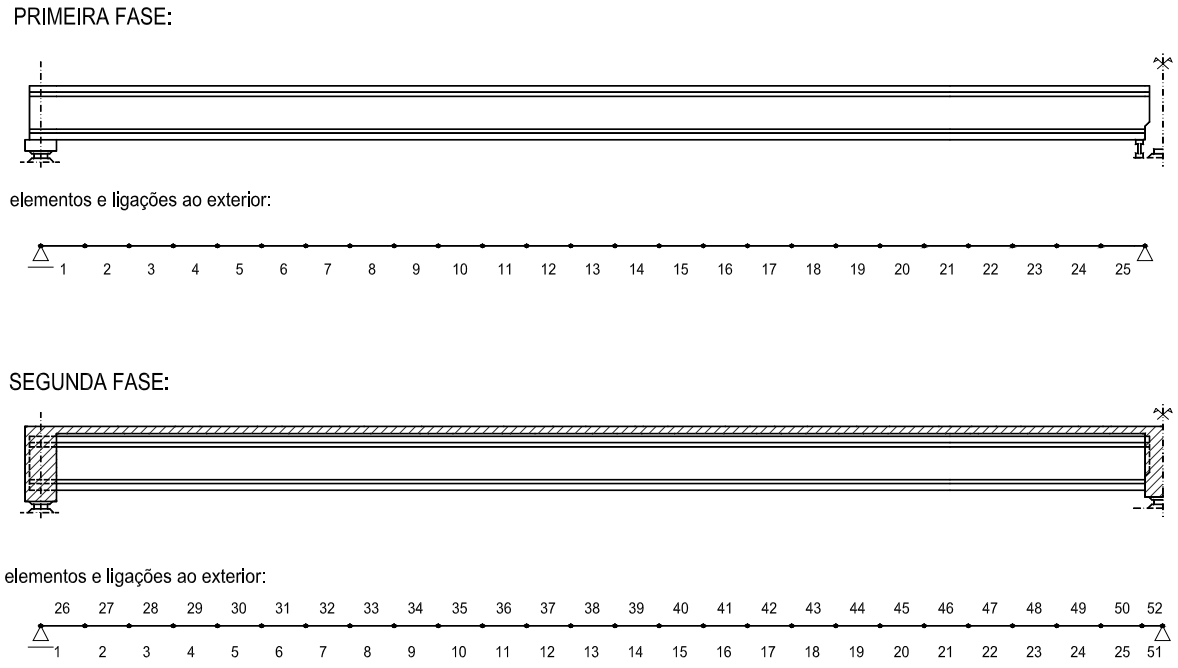


Figura 6-13 -Discretização da estrutura (representa-se apenas metade do modelo).

A secção transversal da viga pré-fabricada e da laje está representada a sombreado na Figura 6-14. Note-se que, a largura efectiva de laje, sobre a viga extrema do tabuleiro (largura em que, na zona sobre o apoio central, pode ser considerada uma distribuição uniforme de tensões) é, de acordo com o EC2 (CEN 2002), de 2.04 m, considerando uma espessura da alma da secção igual a 0.14 m. Atendendo ao efeito favorável, em termos de uniformização das tensões normais instaladas na laje, da existência do banzo superior da viga pré-fabricada, considera-se uma largura efectiva igual a 2.125 m (limite superior para a largura efectiva da laje).

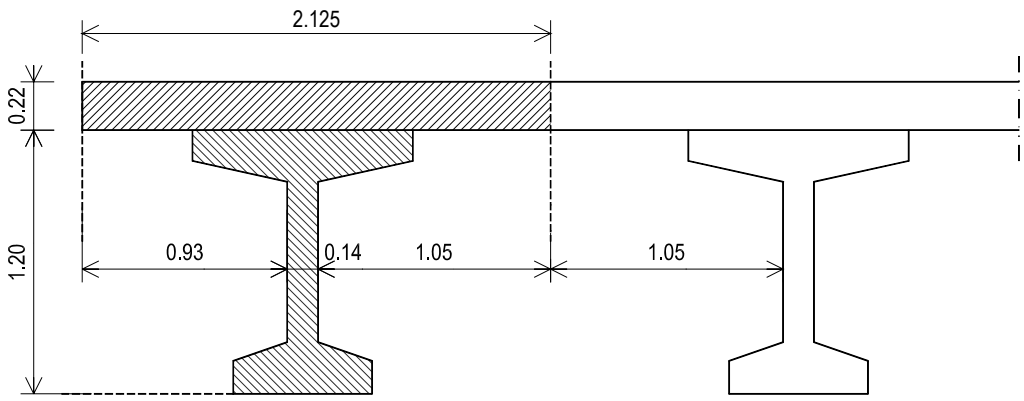


Figura 6-14 – Secção transversal da viga pré-fabricada e da laje (dimensões em metros).

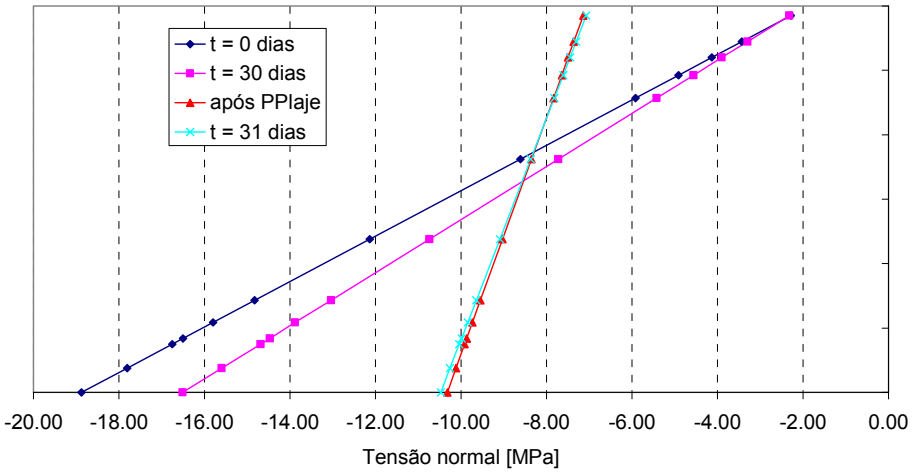
A secção transversal do elemento que representa a carlinga tem uma forma igual à da viga pré-fabricada, pelos motivos apresentados no sub-capítulo 5.3.1.

6.4 Análise dos resultados

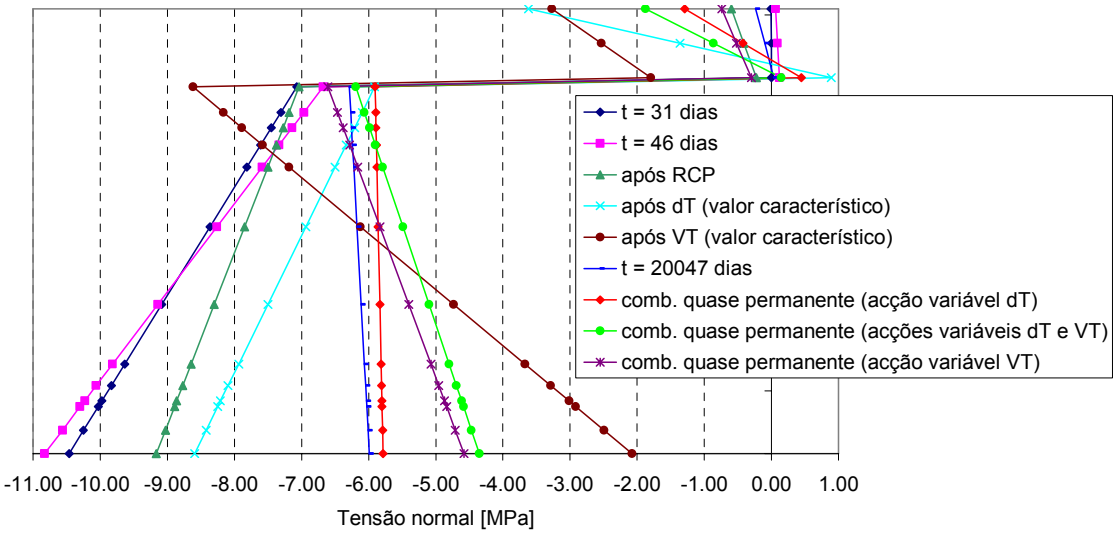
Apresentam-se os resultados na seguinte forma:

- diagramas de tensões normais na secção de meio vão do tramo da esquerda e na secção de apoio central, após diversos incrementos de carga ou de tempo, representados na Figura 6-15;
- gráficos que ilustram a variação ao longo do comprimento do tramo da esquerda, do valor da tensão normal na fibra inferior da viga e na fibra superior da laje, em determinados instantes, representados nas Figuras 6-16 a 6-18;
- gráficos que ilustram a evolução da tensão normal nas fibras inferior e superior da secção de apoio central, e ainda na fibra inferior da secção de meio vão do tramo da esquerda, representados na Figura 6-19 e na Figura 6-20;
- gráficos que ilustram a evolução do momento flector na secção de apoio central, representados na Figura 6-19 e na Figura 6-20.

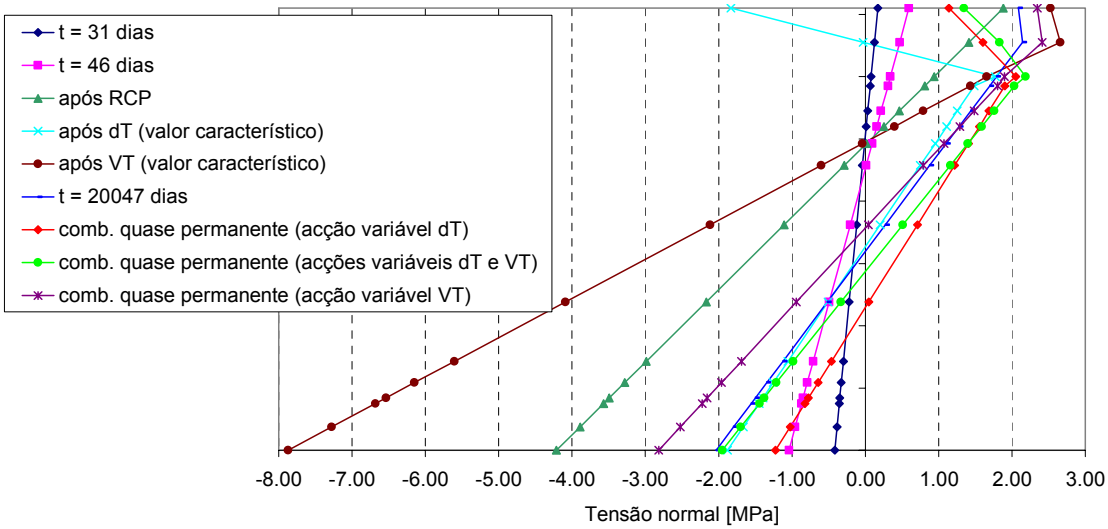
Analisam-se os resultados relativos à fase anterior ao estabelecimento da continuidade e aqueles que são relativos à fase após o estabelecimento da continuidade (após a entrada em funcionamento estrutural da laje e da carlinga).



a)



b)



c)

Figura 6-15 - Diagramas de tensões normais: a) na secção de meio vão, antes da continuidade; b) na secção de meio vão, após a continuidade; c) na secção de apoio central, após a continuidade.

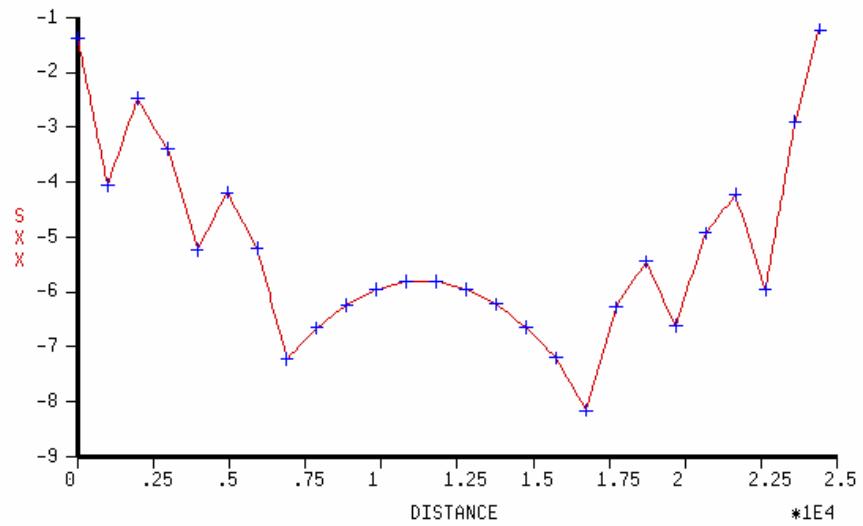


Figura 6-16 – Diagrama de tensões normais na fibra inferior da viga, na combinação quase permanente de acções com a acção variável variação de temperatura (MPa).

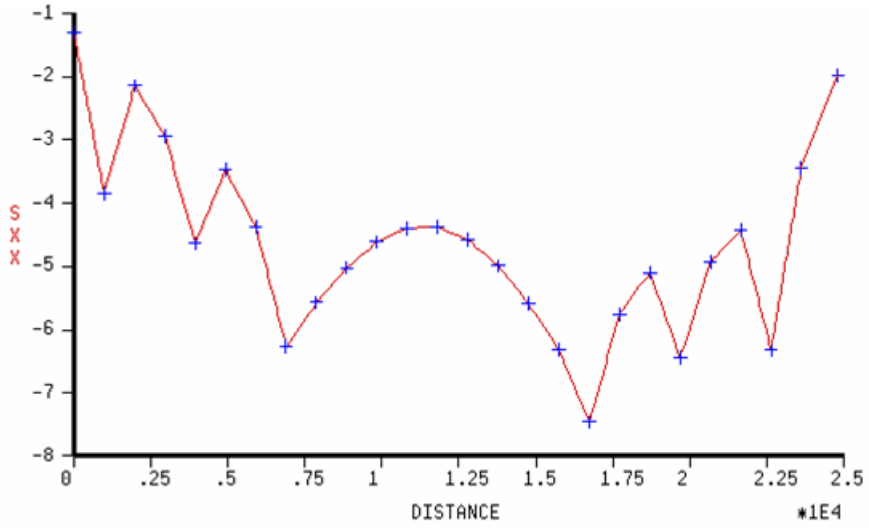


Figura 6-17 – Diagrama de tensões normais na fibra inferior da viga, na combinação quase permanente de acções com as acções variáveis sobrecarga rodoviária e variação de temperatura (MPa).

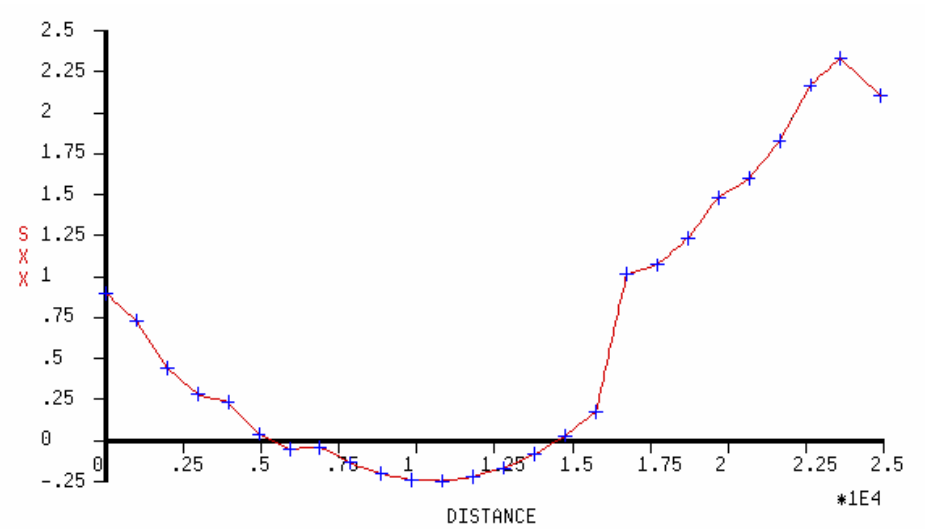
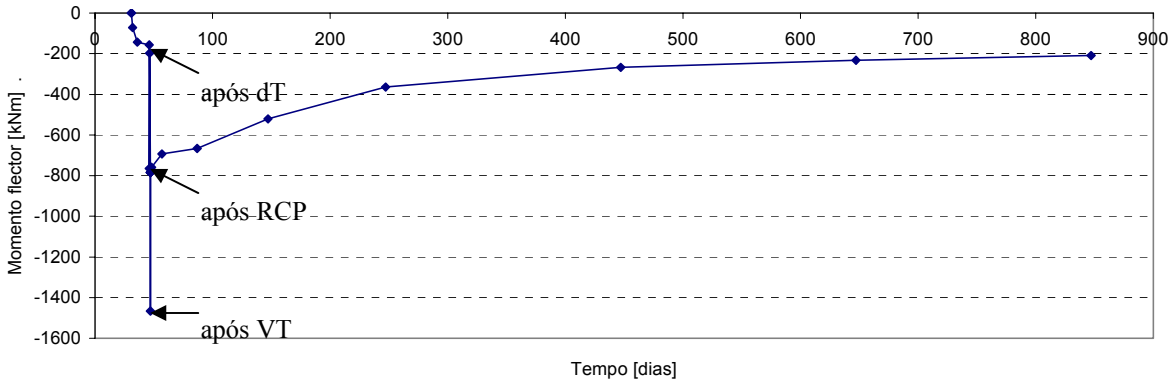
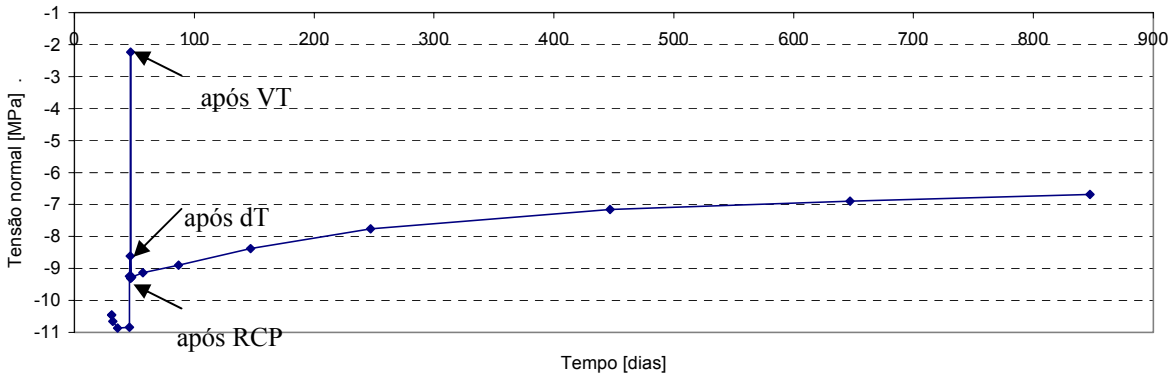


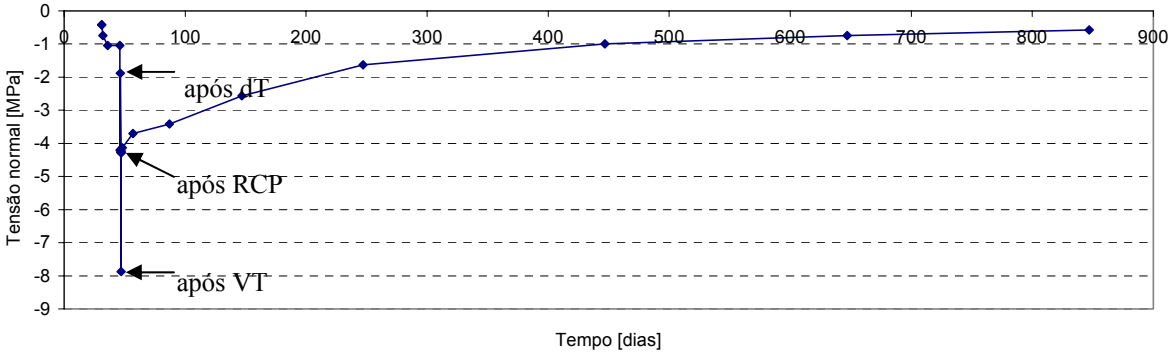
Figura 6-18 – Diagrama de tensões normais na fibra superior da laje, no fim do incremento de tempo de 20000 dias (MPa).



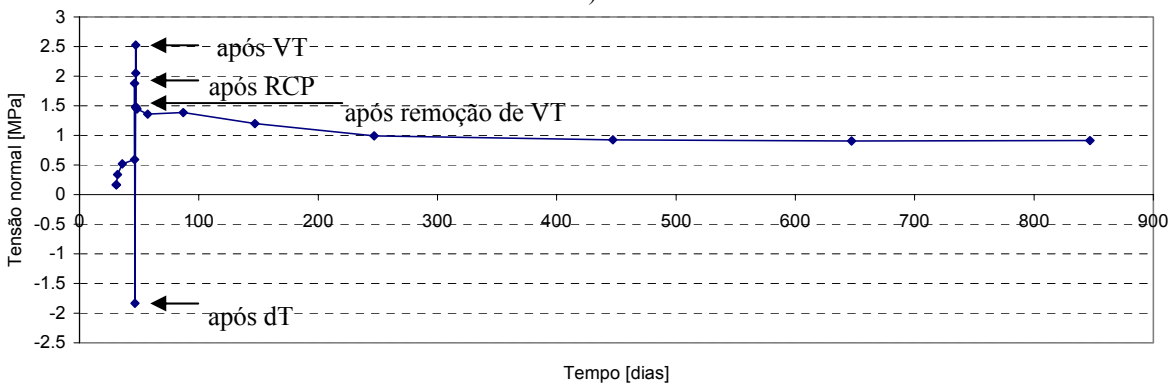
a)



b)

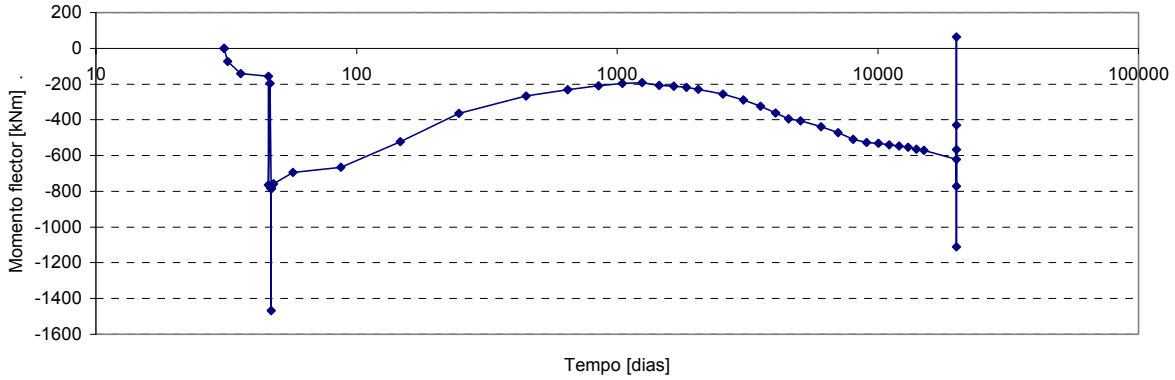


c)

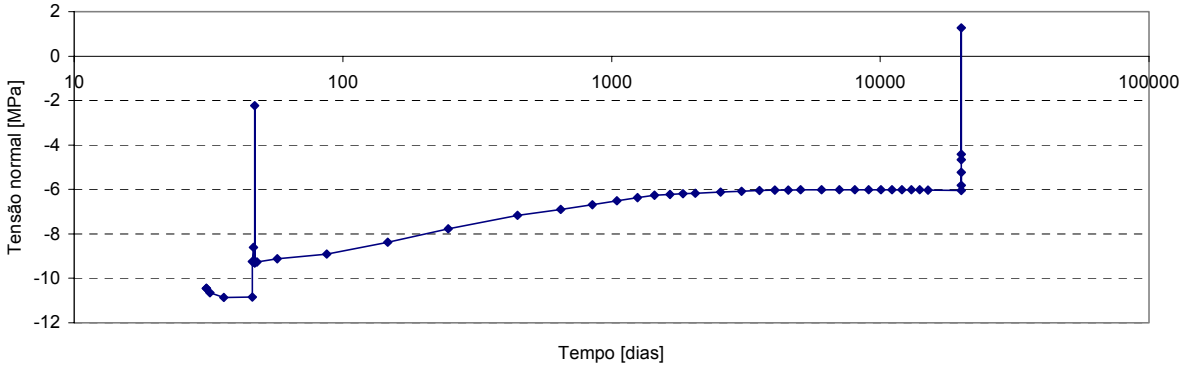


d)

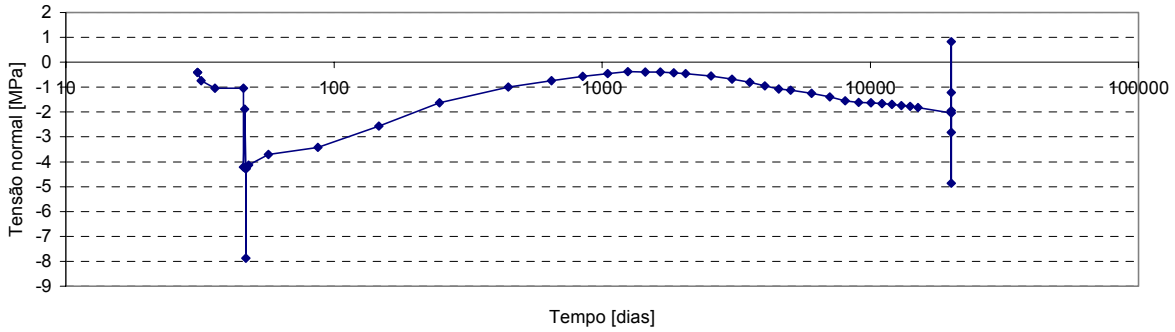
Figura 6-19 – Evolução ao longo do tempo: a) do momento flector na secção de apoio central; b) da tensão normal na fibra inferior da secção de meio vão; c) da tensão normal na fibra inferior da secção de apoio central; d) da tensão normal na fibra superior da secção de apoio central.



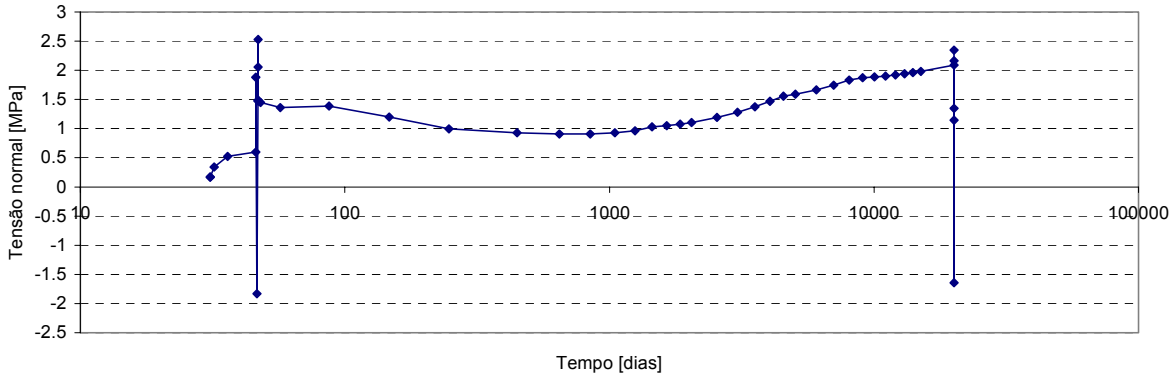
a)



b)



c)



d)

Figura 6-20 - Evolução ao longo do tempo, em escala logarítmica: a) do momento flector na secção de apoio central; b) da tensão normal na fibra inferior da secção de meio vão; c) da tensão normal na fibra inferior da secção de apoio central; d) da tensão normal na fibra superior da secção de apoio central.

Antes do estabelecimento da continuidade

Na Figura 6-15 a) representam-se os diagramas de tensões normais na secção de meio vão da viga pré-fabricada, antes do estabelecimento da continuidade. Através da observação desses gráficos podem ser retiradas várias conclusões.

Após a transferência de pré-esforço para o betão (instante legendado com "t = 0 dias") a tensão máxima de compressão no betão atinge, na fibra inferior da secção de meio vão, o valor -18.9 Mpa. A maior tensão de compressão instalada na viga pré-fabricada é, nesse instante, 19.7 MPa. É então respeitada a limitação imposta pelo EC2 (CEN 2002) para a tensão de compressão no betão aquando da aplicação do pré-esforço ($0.70 \cdot f_{ck}(t) = 20.1\text{MPa}$). No entanto é ultrapassado o nível de tensão até ao qual o betão comprimido se comporta como um material visco-elástico linear ($0.45 \cdot f_{cm}(t) = 16.5\text{MPa}$ segundo o EC2 (CEN 1991) ou $0.40 \cdot f_{cm}(t)$ segundo o MC90 (CEB 1993)). No entanto, este limite é ultrapassado de forma localizada, apenas no banzo inferior da viga, e passados 30 dias já é respeitado, tal como se vê na Figura 6-15 a), pois a deformação do betão por fluência e retracção origina uma evolução de tensões ao nível da secção, com diminuição das tensões de compressão no betão. No modelo numérico utilizado não é considerado o fenómeno de fluência não-linear referido no sub-capítulo 3.3.1.2.

Entre os $0\,\text{dias}$ e os $30\,\text{dias}$, a tensão de compressão diminui significativamente na fibra inferior (2.37 MPa), e aumenta ligeiramente na fibra superior (0.03 MPa). Esta variação de tensão é motivada pela restrição que as armaduras exercem à deformação do betão, por fluência e retracção. O efeito da retracção provoca um acréscimo de tensão de tracção maior na fibra inferior do que na fibra superior, pois o centro geométrico das armaduras (a 41 cm da fibra inferior da viga) está a uma cota inferior à cota do centro geométrico da secção de betão (a 68 cm da fibra inferior da viga).

Entre os $30\,\text{dias}$ e os $31\,\text{dias}$, após a betonagem da laje, a variação de tensões no betão é ligeira, mas tem sentido contrário à que se verificou no intervalo de tempo anterior (a compressão aumenta na fibra inferior e diminui na fibra superior). Esta variação deve-se ao efeito preponderante, neste intervalo, da deformação por fluência associada ao acréscimo de tensão motivado pelo carregamento exercido pelo peso próprio da laje. Por exemplo, na fibra inferior da viga, o aumento da tensão de compressão deve-se à restrição exercida pelas armaduras sobre a deformação, positiva, por fluência do betão.

Não se verifica fendilhação em nenhum dos pontos da estrutura até aos 31 dias.

Após o estabelecimento da continuidade

Imediatamente após o estabelecimento da continuidade (instante legendado com "t = 31 dias" na Figura 6-15 b) e c)), a secção de apoio central é sujeita a tensões normais provocadas pela acção de remoção dos apoios provisórios (ver Figura 6-13). Note-se que a operação de remoção dos apoios provisórios é simulada, no cálculo, num instante de tempo em que o betão da laje e da carlinga tem apenas 1 dia de idade, o que não pode acontecer na realidade. Esta simulação simplifica as operações de cálculo e não introduz erro significativo, uma vez que a operação de remoção dos apoios provisórios origina tensões normais com valor muito reduzido.

A evolução do valor do momento flector instalado nos vários pontos da estrutura, ao longo do incremento de tempo de 20000 dias, é significativa. Entre os 47 dias e os 847 dias, existe, na secção de apoio central, um acréscimo de momento flector positivo de 575 kNm. Este acréscimo de momento flector positivo, provocado pela deformação diferida do betão, atinge, no cálculo, um máximo de 593 kNm aos 1047 dias. Este valor é cerca de 85% do momento flector na secção de apoio central provocado pela acção VT (resultante de um cálculo com comportamento linear-elástico do betão).

A evolução do momento flector, ao longo do período de tempo entre os 47 e os 20047 dias, não segue uma tendência única (Figura 6-20 a)). Após os 1047 dias, o acréscimo de momento flector tem sinal negativo, resultando uma variação de momento flector, na secção de apoio central, entre os 47 e os 20047 dias, de 163 kNm. Tal como se vê na Figura 6-21, entre os 10047 dias e os 20047 dias, processa-se uma retracção diferencial de cerca de $10 \cdot 10^{-5}$, o que origina uma variação de momento flector, com valor negativo, na secção de apoio central. Esta mudança de tendência verifica-se também na evolução das tensões normais na secção de apoio central e, de uma forma menos acentuada, na secção de meio vão.

A variação de tensão normal, devida à deformação diferida do betão entre os 47 e os 20047 dias, é maior na fibra inferior da secção de apoio central do que na fibra inferior da secção de meio vão. Por exemplo, entre os 47 e os 847 dias, o acréscimo de tensão de tracção na fibra inferior é de 3.71 MPa na secção de apoio central e de 2.61 Mpa na secção de meio vão. Isto acontece porque a variação de tensão se deve, por um lado a uma redistribuição de tensões ao nível da secção e, por outro lado, ao aparecimento de um momento flector hiperstático, que tem variação linear ao longo da viga, com valor nulo na secção de apoio extremo e valor máximo na secção de apoio central. Assim, o momento flector hiperstático tem na secção de meio vão metade do valor que tem na secção de apoio central.

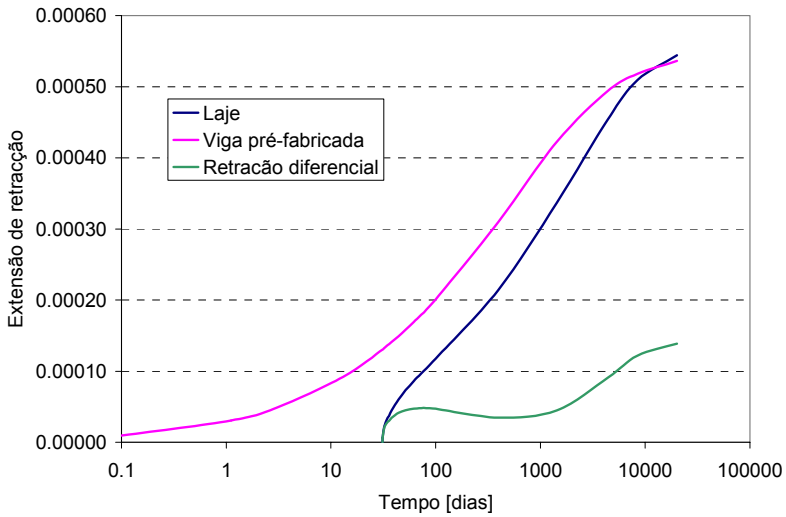


Figura 6-21 - Curvas de retracção dos betões da viga e da laje, e ainda da retracção diferencial entre a viga e a laje.

A acção da variação diferencial de temperatura provoca um momento flector positivo na secção de apoio central, com valor de 568 kNm e 685 kNm, quando é aplicada aos 46 e aos 20047 dias, respectivamente. Esta diferença resulta essencialmente da evolução do módulo de elasticidade do betão, mas também do facto de a deformação por fluência, resultante de uma acção aplicada aos 20047 dias, ser inferior aquela que resulta da aplicação da mesma acção aos 46 dias. Note-se que a variação de temperatura acontece ao longo de meio dia e, portanto, origina esforços mais reduzidos do que aqueles que aconteceriam se essa acção fosse aplicada de forma instantânea.

Na Figura 6-22, onde se representam os diagramas de tensões devidos à acção da variação de temperatura (aplicada aos 46 dias), verifica-se o importante efeito das tensões auto-equilibradas, que se devem à componente não linear da variação de temperatura. Esse efeito origina tensões de compressão com valor significativo, na fibra superior da laje.

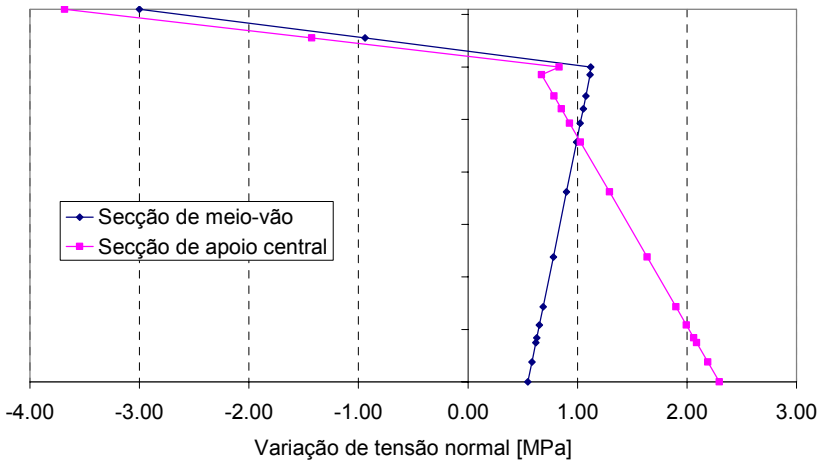


Figura 6-22 - Diagramas de tensões normais, nas secções de meio vão e de apoio central, provocados pela acção da variação diferencial de temperatura, aplicada aos 46 dias.

Relativamente à abertura de fendas, verifica-se que:

- a aplicação da variação de temperatura aos 46 dias não origina fendilhação em nenhum dos pontos da estrutura;
- a fendilhação surge pela primeira vez na fibra superior da laje, na secção de apoio central, quando se encontra aplicada 60% da sobrecarga rodoviária (VT);
- durante o incremento de tempo de 20000 dias, não acontece a abertura de novas fendas nem o fecho das existentes;
- após a aplicação da variação de temperatura aos 20047 dias, existem novas fendas abertas, na fibra inferior dos elementos de laje, sobre as extremidades da viga pré-fabricada, dando-se o fecho das fendas que tinham aberto previamente na fibra superior da laje (veja-se o acréscimo de tensões normais induzido na laje pela acção da variação de temperatura, representado na Figura 6-22);
- a aplicação da acção correspondente à sobrecarga rodoviária (VT), em simultâneo com 30% da acção da variação de temperatura, provoca a reabertura das fendas existentes na fibra superior da laje.

Na Tabela 6-5 apresenta-se a quantificação da abertura de fendas, na fibra superior da secção de apoio central, para as 3 combinações quase permanentes de acções consideradas, após o incremento de tempo de 20000 dias. O valor apresentado corresponde ao produto da distância máxima entre fendas (calculada através da expressão [3-42]), pela extensão média relativa entre as armaduras e o betão, ε_{nn}^{cr}. A distância máxima entre fendas tem o valor:

$$l_{s,max}^{k} = 3.4c + 0.425 k_1 k_2 \phi / \rho_{p,eff} = 317 \text{mm} \qquad [6\text{-}5]$$

sendo $c = 43\,\text{mm}$; $k_1 = 0.8$; $k_2 = 0.5$; $\phi = \phi_{eq} = 14.3\,\text{mm}$; $\rho_{p,eff} = 0.01427$.

Tabela 6-5 - Quantificação da abertura de fendas, na fibra superior da secção de apoio central.

Acção variável	ε_{nn}^{cr}	$w_k = \varepsilon_{nn}^{cr} \cdot 317\ [\text{mm}]$
dT	$1.775 \cdot 10^{-5}$	0.0056
VT + dT	$2.067 \cdot 10^{-5}$	0.0066
VT	$3.399 \cdot 10^{-5}$	0.0108

Verifica-se que o valor da abertura de fendas é muito reduzido.

Durante a análise de resultados efectuada anteriormente, foram referidas essencialmente as secções de meio vão (do tramo esquerdo, onde actua a sobrecarga rodoviária) e a secção de apoio central. No caso concreto em análise estas são as secções mais significativas, tal como se pode concluir a partir da observação dos gráficos das Figuras 6-16 a 6-18:

- na zona do vão, a secção de meio vão pode ser considerada como sendo representativa dos problemas de descompressão ou abertura de fendas, pois nas secções ao lado dessa, a tensão de compressão é superior;
- na zona do apoio central (zona de ligação entre vigas pré-fabricadas), é na secção de apoio central (já na carlinga) que a fibra inferior está sujeita a uma tensão de compressão mais baixa.

A secção de apoio central é representativa dos problemas de fendilhação na laje, uma vez que é nessa secção que surgem maiores extensões de fendilhação.

Nas Figuras 6-16 a 6-18 observam-se dois aspectos que resultam da disposição longitudinal das armaduras que foi adoptada:

- ao longo do comprimento da viga, na fibra inferior, existem variações pontuais de tensão normal, que resultam da introdução gradual de pré-esforço após o fim da extensão em que os cordões são embainhados;
- na fibra superior da laje são mais ténues as variações de tensão que resultam desse efeito, sendo mais acentuada a variação de tensão que acontece no ponto em que há alteração da quantidade de armadura da laje (os elementos de laje com maior quantidade de armadura têm uma maior tensão de tracção instalada porque nesses elementos existe uma maior restrição ao encurtamento do betão por efeito da retracção).

6.5 Considerações finais

Foram apresentados neste capítulo os resultados de um cálculo de natureza determinística, realizado com os valores médios dos parâmetros envolvidos e os valores característicos das acções variáveis. Verifica-se que a fibra inferior da viga se encontra comprimida, na secção de apoio central, em todas as situações correspondentes a uma combinação quase permanente de acções. Na zona do vão é satisfeito o estado limite de descompressão.

A análise efectuada permitiu verificar particularidades do funcionamento estrutural deste tipo de obras, nomeadamente:

- a variação de temperatura pode dar origem a uma distribuição de tensões, auto-equilibradas ao nível da secção, de valor significativo;
- acontecem importantes redistribuições de tensões ao nível da secção, ao longo do tempo, devido ao carácter evolutivo da secção transversal e à existência de armaduras;
- apesar de não existir pré-esforço na zona de ligação, desenvolve-se ao longo do tempo um momento flector hiperstático positivo (devido ao efeito do pré-esforço por pré-tensão existente na zona do vão), que comprime a laje, o que é benéfico em termos de controlo da fendilhação na laje;
- o momento flector positivo, de natureza hiperstática, que se desenvolve ao longo do tempo, em virtude da deformação por fluência associada às cargas que actuam inicialmente apenas sobre a viga pré-fabricada, é contrariado parcialmente pelo momento flector negativo que se desenvolve em consequência do efeito da retracção diferencial.

7 Análise probabilística utilizando o método de Monte Carlo

7.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se efectuar uma caracterização mais rigorosa do comportamento durante a fase de serviço da estrutura tratada no Capítulo 6. Tal como foi concluído anteriormente, o estado de tensão e de deformação neste tipo de obras evolui ao longo do tempo, sendo fortemente dependente da deformação do betão por fluência e retracção, em virtude do faseamento envolvido na sua construção. Por outro lado, a fluência e a retracção são das propriedades do betão cuja quantificação é mais incerta, dependendo da variabilidade dos parâmetros ambientais (humidade relativa e temperatura), da composição do betão e da incerteza associada aos modelos teóricos de previsão dessas propriedades. Assim, a resposta estrutural deste tipo de obras terá também uma variabilidade significativa. Uma determinada grandeza, por exemplo uma tensão ou uma deformação, num determinado ponto e num determinado instante, não deverá ser caracterizada por um valor único, de natureza determinística, mas antes por um intervalo onde se espera que, com uma determinada probabilidade, esteja contida a grandeza procurada.

A verificação do comportamento de estruturas de betão armado ou pré-esforçado em estado limite de utilização é geralmente efectuada com base em cálculos de natureza determinística, utilizando os valores esperados (valores médios) de diversos parâmetros envolvidos, tanto do lado da acção como do lado da resistência. Este procedimento será adequado para estruturas que não são sensíveis à variação desses parâmetros. No entanto, em estruturas sensíveis à variabilidade da fluência e da retracção, uma análise de natureza determinística pode não ser

satisfatória, uma vez que a resposta estrutural pode afastar-se dos valores médios. Tal como referiu Santos (2001), vários autores tais como Tsubaky, Bazant e Kim, Oh e Yang, têm alertado para as vantagens dos estudos do comportamento diferido das pontes de betão serem efectuados com base numa abordagem probabilística das propriedades do betão.

Neste capítulo é apresentada uma análise probabilística do comportamento da estrutura tratada no capítulo anterior, efectuada com recurso ao método de Monte Carlo, utilizando-se a técnica de redução da variância designada de Hipercubo Latino. Este procedimento tem sido utilizado por vários autores, tais como Bazant e Liu (1985), Bazant e Kim (1989) ou Takács (2002).

O método de Monte Carlo consiste na simulação das variáveis aleatórias básicas de acordo com a sua distribuição de probabilidade, na avaliação da resposta estrutural correspondente a cada grupo de variáveis básicas geradas e no tratamento dessas respostas como sendo uma amostra do universo das respostas. É um processo intuitivo cujo principal inconveniente é a necessidade de realizar um elevado número de cálculos. Como se pretende estudar o comportamento estrutural durante a fase de serviço, quer-se caracterizar uma zona relativamente central da função densidade de probabilidade (intervalo de 90%), ao contrário do que sucede, por exemplo, em problemas de fiabilidade estrutural em que se procuram valores extremos, correspondentes a probabilidades de rotura da ordem, ou inferiores a 10^{-5}. Isto faz com que o número de cálculos a realizar não seja demasiado elevado.

Neste capítulo começa-se por apresentar sucintamente algumas propriedades estatísticas e conceitos que são posteriormente aplicados. Depois descreve-se o modelo probabilístico utilizado, baseado no método de Monte Carlo. Por fim, apresentam-se os resultados da análise probabilística da estrutura tratada no Capítulo 6.

7.2 Medidas estatísticas e definições

As medidas estatísticas são usadas para estimar propriedades de uma população a partir de amostras aleatórias. Apresenta-se uma descrição sucinta de algumas medidas estatísticas e de definições que serão posteriormente aplicadas. Uma exposição mais extensa pode ser encontrada em Montgomery e Runger (2003), Oliveira (2003) e Henriques (1998a; 1998b).

7.2.1 Variável estatística e variável aleatória

Durante o tratamento e a classificação de dados, usa-se o conceito de variável estatística. Uma variável estatística corresponde aos valores que um determinado atributo (por exemplo, a temperatura ou a humidade relativa) pode tomar em cada um dos indivíduos de uma população. Uma variável estatística diz-se contínua quando toma valores num conjunto não numerável, por exemplo, num intervalo. Para classificar as observações faz-se o seu agrupamento em classes (ou modalidades), que deverão ser mutuamente exclusivas entre si.

Quando se estudam os atributos de uma população, usa-se o conceito de variável aleatória. Uma variável aleatória é uma variável com valores imprevisíveis, mas que toma certos valores numéricos, ou em certos intervalos, com determinadas probabilidades.

7.2.2 Função de distribuição de probabilidade e função densidade de probabilidade

A função de distribuição de probabilidade, $F(x)$, de uma variável aleatória X, associa a cada intervalo $]-\infty, x]$ a probabilidade de ocorrer qualquer acontecimento nesse intervalo. Uma função de distribuição de probabilidade é uma função não decrescente e toma valores entre 0 e 1.

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua é a função $f = F'$, isto é, trata-se da primeira derivada da função de distribuição dessa variável. Tem as seguintes propriedades:

$$\text{i) } f \geq 0 \qquad \text{ii) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1 \qquad \text{iii) } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

Na Figura 7-1 representa-se a função de distribuição e a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua.

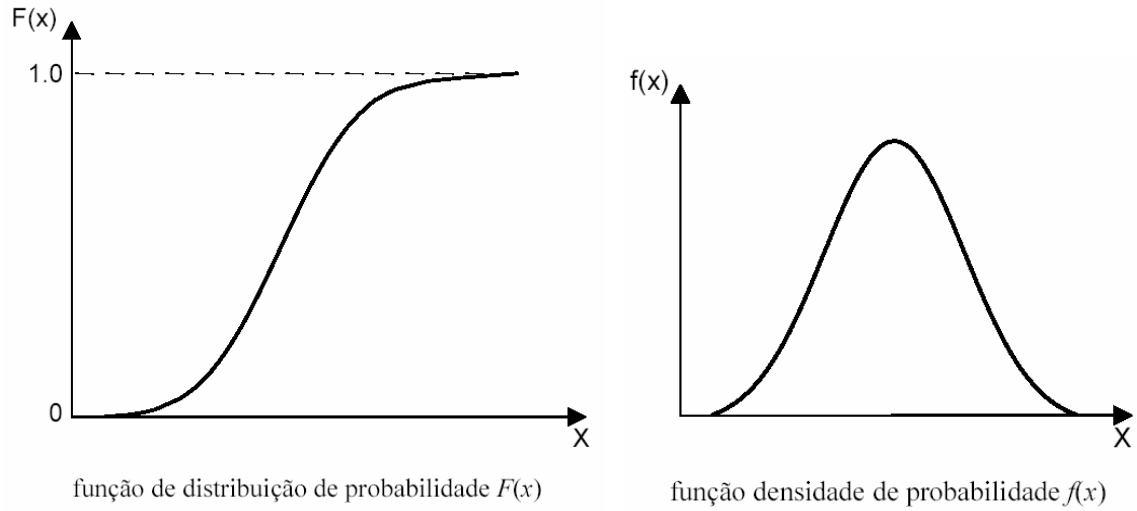


Figura 7-1 – Função de distribuição de probabilidade e função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua, X.

7.2.3 Quantis

O quantil é uma medida de localização muito utilizada em engenharia civil, pois o valor característico de um parâmetro é o valor correspondente a um determinado quantil, geralmente 5% ou 95%. Por definição, Q_α é o quantil α da distribuição observada se e só se $F(Q_\alpha) = \alpha$.

7.2.4 Média aritmética

A média é uma medida de tendência central. É uma propriedade de uma população e representa-se pelo símbolo μ. A média calculada numa amostra, $\overline{x}$, não é a verdadeira média da população, mas antes uma estimativa. O seu valor é dado por:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad [7\text{-}1]$$

sendo n a dimensão da amostra (número de observações) e x_i o valor que a variável em estudo toma em cada uma das observações.

7.2.5 Desvio padrão, variância e coeficiente de variação

O desvio padrão é uma medida de dispersão, representando o grau de variabilidade de um fenómeno. O desvio padrão de uma amostra, S, é um estimador do verdadeiro desvio padrão da população, σ. O desvio padrão amostral é dado por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \qquad [7\text{-}2]$$

Este estimador diz-se enviesado porque o seu valor esperado não coincide com o parâmetro desconhecido que ele pretende estimar, σ. A estimativa não enviesada do desvio padrão é dada por:

$$S' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \qquad [7\text{-}3]$$

A variância é igual ao quadrado do desvio padrão.

O coeficiente de variação, CV, é definido como o quociente do desvio padrão pela média. Quando calculado numa amostra, é dado por:

$$CV = \frac{S}{\overline{x}} \qquad [7\text{-}4]$$

O coeficiente de variação é, por vezes, expresso em percentagem, bastando para tal multiplicar por 100% o segundo membro da equação [7-4].

7.2.6 Intervalo de confiança da média, da variância e do desvio padrão

Pretende-se, a partir do estudo de uma amostra, tirar conclusões sobre a população de onde ela foi retirada. O procedimento de inferência estatística permite não só chegar a essas conclusões como também usar a probabilidade para determinar até que ponto elas são fiáveis, pois um efeito observado sobre uma amostra pode ser simplesmente devido a uma flutuação e não ser característico da população. Um intervalo de confiança para uma estimativa é um intervalo, centrado na estimativa, que contém o verdadeiro valor do parâmetro desconhecido com uma

determinada probabilidade. Ele permite analisar a incerteza da estimativa, e será tanto mais pequeno quanto maior for a dimensão da amostra.

Neste trabalho, lida-se essencialmente com variáveis que seguem distribuições normais, e cujos verdadeiros valores da média e da variância são desconhecidos. Neste caso, o intervalo de confiança da média, para um nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$ é obtido através da expressão (Montgomery e Runger 2003):

$$\langle \mu \rangle_{1-\alpha} = \left[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S'}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S'}{\sqrt{n}} \right] \qquad [7\text{-}5]$$

isto é, a probabilidade de a verdadeira média da população estar contida no intervalo apresentado acima é de $100(1-\alpha)\%$. Na equação [7-5], $\bar{x}$, S' e n representam a média da amostra, a estimativa não enviesada do desvio padrão e a dimensão da amostra respectivamente, enquanto que $t_{\alpha/2,n-1}$ é o valor do argumento da distribuição t de Student para uma probabilidade de excedência de $\alpha/2$ e $n-1$ graus de liberdade.

Para variáveis com distribuição normal, o intervalo de confiança da variância, para um nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$, é obtido através da expressão:

$$\langle \sigma^2 \rangle_{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} ; \frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-1}} \right] \qquad [7\text{-}6]$$

sendo $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ e $\chi^2_{(1-\alpha/2),n-1}$ os valores do argumento da distribuição de Qui-quadrado para as probabilidades de excedência indicadas e $n-1$ graus de liberdade (Montgomery e Runger 2003). O valor dos limites inferior e superior do intervalo de confiança do desvio padrão são dados pela raiz quadrada dos limites correspondentes na equação [7-6].

Assim, para uma amostra composta por 99 indivíduos e para um nível de confiança de 95%, resultam os seguintes intervalos de confiança para a média, para a variância e para o desvio padrão:

$$\langle \mu \rangle_{0.95} = \left[\bar{x} - 0.20S' ; \bar{x} + 0.20S' \right] \qquad [7\text{-}7]$$

$$\langle \sigma^2 \rangle_{0.95} = \left[0.77S'^2 ; 1.35S'^2 \right] \qquad [7\text{-}8]$$

$$\langle\sigma\rangle_{0.95} = [0.88S';1.16S'] \qquad [7\text{-}9]$$

A qualidade das estimativas pode ser avaliada de outra forma. A estimativa para a média, calculada com base numa amostra, é também uma variável aleatória. De facto, a estimativa obtida varia de amostra para amostra, de acordo com a distribuição de probabilidade do próprio estimador. Assim, se se dispuser de um determinado número de amostras, L, obtem-se L valores para $\bar{x}$, que constituem uma amostra de dimensão L para a variável aleatória *estimativa da média*. O tratamento estatístico dessa amostra permite a obtenção do valor esperado para a estimativa e a sua variância.

No parágrafo anterior foi referido como exemplo o caso da estimativa para a média, podendo ser aplicado o mesmo procedimento para a avaliação da qualidade das estimativas de outras medidas estatísticas, tais como o desvio padrão ou a variância.

7.2.7 Testes de hipóteses

Para verificar se uma distribuição observada segue uma determinada lei teórica são utilizados testes. Estes testes podem ser divididos em duas classes: gráficos e numéricos (Henriques 1998a).

Os testes gráficos consistem na representação das distribuições simuladas e das respectivas leis teóricas através de diagramas. Os casos mais simples consistem em traçar os histogramas e as curvas dos valores acumulados, de forma a permitir a rápida visualização do ajuste por comparação com as curvas das respectivas leis teóricas. Estes testes são puramente qualitativos, devendo por isso ser complementados com outras verificações.

Um dos testes mais correntes para verificar se uma determinada distribuição tem características gausseanas é o teste de normalidade, baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento. O teste baseia-se em duas propriedades características da lei de distribuição normal: os coeficientes de assimetria, γ_1, e de achatamento, γ_2, são nulos. O procedimento de verificação da normalidade consiste em calcular inicialmente a estimativa dos coeficientes de assimetria, $\hat{\gamma}_1(n)$, e de achatamento, $\hat{\gamma}_2(n)$, e os respectivos desvios padrão, $\sigma_{\hat{\gamma}_1}$ e $\sigma_{\hat{\gamma}_2}$:

$$\hat{\gamma}_1(n) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2\right]^{3/2}} \qquad [7\text{-}10]$$

$$\hat{\gamma}_2(n) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2\right]^2} - 3 \qquad [7\text{-}11]$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \qquad [7\text{-}12]$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \qquad [7\text{-}13]$$

em que n designa a dimensão da amostra, z_i os valores tomados pela variável estatística em questão e $\bar{z}$ a estimativa da sua média.

Considera-se que a variável estatística segue uma distribuição normal se forem verificadas as duas seguintes condições:

$$\begin{cases} |\hat{\gamma}_1(n)| < 1.5\sigma_{\hat{\gamma}_1} \\ \left|\hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1}\right| < 1.5\sigma_{\hat{\gamma}_2} \end{cases} \qquad [7\text{-}14]$$

Rejeita-se a hipótese de normalidade se, pelo contrário, se verificar uma das duas seguintes condições:

$$\begin{cases} |\hat{\gamma}_1(n)| \geq 2.0\sigma_{\hat{\gamma}_1} \\ \left|\hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1}\right| \geq 2.0\sigma_{\hat{\gamma}_2} \end{cases} \qquad [7\text{-}15]$$

Nos restantes casos será necessário fazer uma verificação complementar usando testes mais rigorosos, por exemplo o teste de Kolmogorov-Smirnov modificado (Henriques 1998a).

7.2.8 Intervalo de tolerância de uma variável aleatória

Os procedimentos apresentados nos dois sub-capítulos anteriores permitem averiguar:

- se as estimativas da média e do desvio padrão de uma determinada distribuição estatística, calculadas com base numa amostra, constituem uma boa indicação da

verdadeira média, variância e desvio padrão da população, o que acontecerá se o intervalo de confiança dessas grandezas tiver pequena amplitude;

- se a distribuição observada tem características gausseanas.

Assumindo que é conhecida a verdadeira média e desvio padrão da população (isto é, que os valores calculados a partir da amostra são os verdadeiro e não os estimados) e que a variável aleatória em estudo segue uma distribuição normal ou de Gauss, é possível calcular os valores que limitam o intervalo que contém a variável aleatória com uma determinada probabilidade. Esse intervalo designa-se por intervalo de tolerância e os valores que o limitam designam-se por limites de tolerância. Os limites de tolerância não são mais do que os valores correspondentes a um determinado quantil (ver Figura 7-2). Assim, o intervalo de tolerância de 90% contém, com uma probabilidade de 90%, a variável aleatória, e os seus limites de tolerância são os valores correspondentes aos quantis de 5% e de 95%, também designados em várias situações da engenharia civil por valores característicos. Esses valores são dados por:

$$C_{0.05} = \mu - 1.645\sigma \qquad [7\text{-}16]$$

$$C_{0.95} = \mu + 1.645\sigma \qquad [7\text{-}17]$$

O intervalo de tolerância de 95%, que contém a variável aleatória com uma probabilidade de 95%, é limitado pelos valores:

$$C_{0.025} = \mu - 1.960\sigma \qquad [7\text{-}18]$$

$$C_{0.975} = \mu + 1.960\sigma \qquad [7\text{-}19]$$

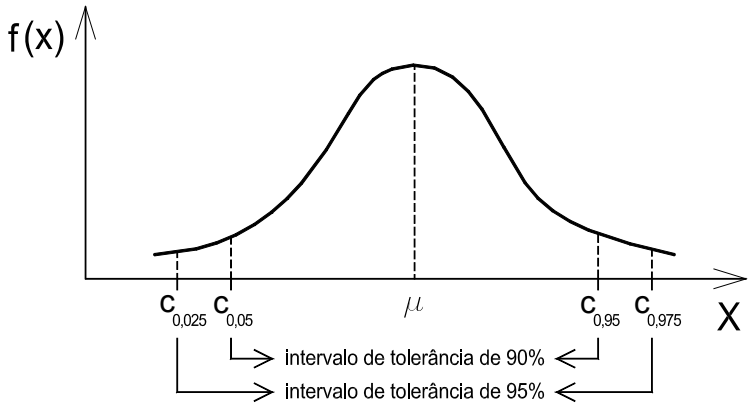


Figura 7-2 - Intervalos de tolerância de 90% e 95% de uma variável aleatória com distribuição normal.

7.3 Simulação de Monte Carlo

7.3.1 Generalidades

A simulação do comportamento estrutural através do método de Monte Carlo é efectuada em três fases:

- Simulação das variáveis aleatórias básicas, de acordo com as suas distribuições de probabilidades, gerando-se conjuntos aleatórios de valores dos parâmetros do sistema;
- análise estrutural, calculando a resposta estrutural para cada um desses conjuntos de valores;
- tratamento estatístico da amostra constituída pelo conjunto de observações obtido para cada resultado, seja ele um esforço, uma tensão ou uma deformação, por forma a estimar a distribuição de probabilidade desse resultado.

7.3.2 Variáveis aleatórias e suas propriedades estatísticas

Um aspecto importante da simulação de Monte Carlo é a identificação dos parâmetros críticos que devem ser considerados como variáveis aleatórias e a quantificação das suas propriedades estatísticas. Essas propriedades podem ser determinadas com base em informação existente ou assumidas como pressuposto.

Nesta análise pretende-se avaliar a importância da variabilidade dos diversos parâmetros envolvidos, com especial destaque para aqueles que afectam as deformações por fluência e por retracção do betão. Consideram-se como variáveis aleatórias os seguintes parâmetros:

- humidade relativa;
- temperatura média;
- resistência à compressão, f_{cm}, do betão;
- parâmetro Ψ^F que traduz a incerteza do modelo de fluência;
- parâmetro Ψ^R que traduz a incerteza do modelo de retracção;
- tensão de pré-esforço;

Os três primeiros parâmetros referidos estão relacionados com a incerteza externa associada à quantificação das deformações diferidas do betão, sendo considerados como variáveis aleatórias para ser tida em conta a sua variação estatística e os erros associados à sua estimativa.

Os dois parâmetros seguintes traduzem a incerteza interna e os erros dos modelos teóricos de previsão, isto é, contabilizam a variabilidade associada aos modelos de previsão das deformações por fluência e retracção do betão. Essa variabilidade é tida em conta, então, aplicando os parâmetros Ψ^F e Ψ^R às expressões teóricas de previsão da fluência (equação [3-9]) e da retracção (equação [3-13]), respectivamente. O coeficiente de fluência passa a ser dado por:

$$\phi(t, t_0) = \Psi^F \cdot \phi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \qquad [7\text{-}20]$$

e a extensão de retracção passa a ser dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t) = \Psi^R \left[\varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s)\right] \qquad [7\text{-}21]$$

Os parâmetros Ψ^F e Ψ^R têm um valor médio de 1 e são independentes do tempo, tendo sido este o procedimento adoptado por autores tais como Madsen e Bazant (1983), Bazant e Liu (1985) e Takács (2002).

O último parâmetro considerado como variável aleatória (tensão de pré-esforço) permite a consideração da variabilidade associada ao pré-esforço.

Relativamente à variabilidade espacial dos diversos parâmetros envolvidos no cálculo, considera-se que a temperatura média e a humidade relativa têm o mesmo valor em todos os elementos de betão. Consideraram-se dois betões diferentes, o betão da viga pré-fabricada e o betão da laje e carlinga, sendo independentes entre si os valores da resistência à compressão, da fluência e da retracção em cada um desses betões. Esta opção justifica-se pelo facto de cada um desses elementos ser executado numa única fase de betonagem.

Assume-se que as propriedades geométricas, as propriedades dos aços e as acções variáveis (sobrecarga rodoviária e variação de temperatura) têm natureza determinística e são conhecidos.

Propriedades estatísticas

A humidade relativa e a temperatura média são parâmetros ambientais que apresentam uma variação diária e sazonal e, além disso, apresentam uma variabilidade estatística. Na análise estrutural não é usual a consideração dos efeitos da variação diária e sazonal sobre as deformações por fluência e retracção do betão, sendo utilizado para a quantificação dessas deformações o valor médio anual da humidade relativa e da temperatura. É esse o procedimento utilizado neste trabalho. Consideram-se valores médios de 15ºC e de 70% para a temperatura e a humidade relativa, respectivamente, e um coeficiente de variação de 15% para qualquer dos parâmetros.

Caracteriza-se a variabilidade da resistência à compressão do betão considerando uma distribuição normal para essa variável e uma diferença de 8 MPa entre o valor médio e os valores característicos correspondentes aos quantis de 5% e de 95% (equação [3-16]). Nestas condições, o desvio padrão da resistência à compressão é de 4.863 MPa.

Para a caracterização da variabilidade associada aos modelos de fluência e de retracção do EC2 (CEN 2002), considera-se, na ausência de mais informação, os coeficientes de variação previstos no MC90 (CEB 1993), referidos no Capítulo 3 (20% para a função de fluência e 35% para a retracção). Com a introdução do parâmetro Ψ^F, a função de fluência toma a forma:

$$J(t,t_0) = \frac{1}{E_{ci}(t_0)} + \frac{\Psi^F \cdot \phi(t,t_0)}{E_{ci}} \qquad [7\text{-}22]$$

Uma vez que o coeficiente de variação de 20% é relativo à função de fluência e não ao coeficiente de fluência, ele tem que ser convertido. Considerando, simplificadamente, $E_{ci}(t_0) = E_{ci}$ e utilizando as propriedades da média e do desvio padrão, resulta:

$$CV(\Psi^F) = CV(\phi) = CV(J) \cdot \frac{1+\phi}{\phi} \qquad [7\text{-}23]$$

Efectuando a conversão por forma a obter igual variabilidade quando o coeficiente de fluência toma o valor 2.0 (o que corresponderá, de uma forma simples, a um valor médio do coeficiente de fluência a longo prazo), resulta um coeficiente de variação para o parâmetro Ψ^F igual a 30% (ver Tabela 7-1).

Tabela 7-1 – Coeficiente de variação do parâmetro Ψ^F para vários valores do coeficiente de fluência.

ϕ	1.5	2.0	2.5	3.0
$CV(\Psi^F) = CV(\phi)\ (\%)$	33.3	30	28	26.7

Os códigos de dimensionamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado indicam valores característicos, superior e inferior (correspondendo, respectivamente, aos quantis de 95% e de 5%) para a força de pré-esforço. Na Tabela 7-2 apresentam-se os valores indicados no EC2 (CEN 2002) para a razão entre os valores característicos e o valor médio da força de pré-esforço. Apresenta-se também o coeficiente de variação associado a esses valores, assumindo uma distribuição gausseana. Nos cálculos realizados considera-se, conservativamente, um coeficiente de variação de 5% para a força de pré-esforço.

Tabela 7-2 - Razão entre os valores característicos e o valor médio da força de pré-esforço (CEN 2002) e coeficiente de variação correspondente.

	Quantil de 5%	Quantil de 95%	Coeficiente de variação
Pré-tensão	0.95	1.05	3.04%
Pós-tensão	0.90	1.10	6.08%

Assume-se que todas as variáveis aleatórias envolvidas seguem uma distribuição normal ou de Gauss, caracterizadas pelo seu valor médio e pelo seu coeficiente de variação, e que todas as variáveis aleatórias são independentes. Na Tabela 7-3 resumem-se os valores considerados para a média e para o coeficiente de variação de cada uma das variáveis.

Tabela 7-3 - Média e coeficiente de variação de cada uma das variáveis aleatórias básicas.

Variável aleatória	Valor médio	Coeficiente de variação
humidade relativa	70 %	15 %
temperatura média	15 ºC	15 %
f_{cm} (viga)	53 MPa	9.18 %
f_{cm} (laje e carlinga)	38 MPa	12.80 %
incerteza do modelo de fluência, Ψ^F (viga)	1	30 %
incerteza do modelo de fluência, Ψ^F (laje e carlinga)	1	30 %
incerteza do modelo de retracção, Ψ^R (viga)	1	35 %
incerteza do modelo de retracção, Ψ^R (laje e carlinga)	1	35 %
tensão de pré-esforço	1372 MPa	5 %

7.3.3 Amostragem pelo método do Hipercubo Latino

Um aspecto importante da simulação de Monte Carlo é o método de amostragem usado para gerar os conjuntos aleatórios de valores que as variáveis aleatórias básicas tomam em cada cálculo. Designam-se por variáveis aleatórias básicas aquelas que constam da Tabela 7-3.

Os métodos de amostragem estratificada, de que é exemplo o método do Hipercubo Latino, permitem, quando comparados com a simples amostragem aleatória, uma redução do número de cálculos a efectuar para a obtenção de estimativas dos parâmetros estatísticos (média, desvio padrão ou outros) que caracterizam a resposta estrutural, com a mesma precisão (Bazant e Liu 1985; Florian 1992). O método do Hipercubo Latino é implementado da forma que se expõe a seguir.

Sejam X_k $(k = 1, 2, ..., K)$ as variáveis aleatórias básicas. Cada uma dessas variáveis é caracterizada pela sua função de distribuição de probabilidade, $F_{X_k}(x_k)$. Para seleccionar o conjunto de valores tomados pelas variáveis em cada um dos N cálculos a realizar, começa-se por dividir o intervalo de valores que cada variável aleatória, X_k, pode tomar em N intervalos distintos (tantos quantos os cálculos a realizar) de igual probabilidade (igual a $1/N$), tal como se representa na Figura 7-3. Cada intervalo é representado por um parâmetro representativo que, se o número de cálculos, N, é elevado, pode ser tomado ao centro do intervalo. Nessa situação, o parâmetro representativo de cada intervalo i é obtido através da seguinte expressão:

$$x_k^i = F_{X_k}^{-1}\left(\frac{i - 0.5}{N}\right) \qquad [7\text{-}24]$$

sendo $F_{X_k}^{-1}$ a função inversa da função de distribuição de probabilidade da variável em questão. Cada parâmetro representativo é utilizado num único cálculo. Na Tabela A-1, constante do Anexo A, apresentam-se os parâmetros gerados para uma simulação com 9 variáveis aleatórias básicas e 99 cálculos, que constitui um exemplo.

A selecção do intervalo a ser utilizado em cada cálculo é feita por um processo aleatório. Os N valores que toma cada variável aleatória básica, X_k, são associados a uma sequência de inteiros (representando uma permutação aleatória dos números inteiros, $1, 2, ..., N$) devendo ser mutuamente independentes as permutações geradas para cada uma das variáveis aleatórias básicas. A permutação aleatória dos números inteiros, relativa a cada variável aleatória, é obtida da seguinte forma:

- geram-se N números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1 (para tal é utilizado um algoritmo de geração, tendo sido, no âmbito deste trabalho, utilizado o algoritmo incluído no programa EXCEL);
- a permutação de inteiros corresponde à posição (*ranking*) de cada um dos números gerados entre 0 e 1.

Na Tabela A-2 apresentam-se as permutações de inteiros geradas para o caso que serve como exemplo. Para cada variável aleatória X_k, será considerado no cálculo n, o valor representativo do intervalo com a posição (*ranking*) indicada na Tabela A-2. Na Tabela A-3 apresenta-se uma matriz que contém em cada uma das N linhas o valor de cada variável aleatória básica a ser considerado no cálculo n.

Na Figura 7-4 expõe-se graficamente o método do Hipercubo Latino, numa situação em que $K = 2$ e $N = 7$.

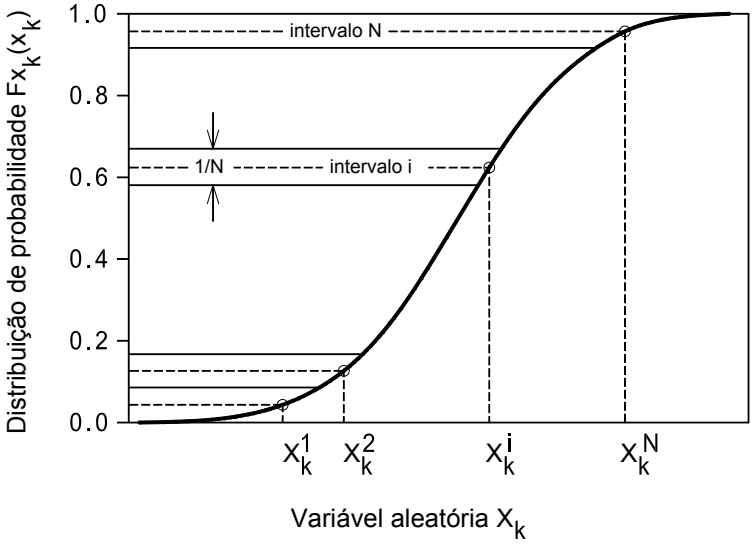


Figura 7-3 - Divisão do intervalo de valores que pode tomar a variável aleatória X_k, em intervalos de igual probabilidade.

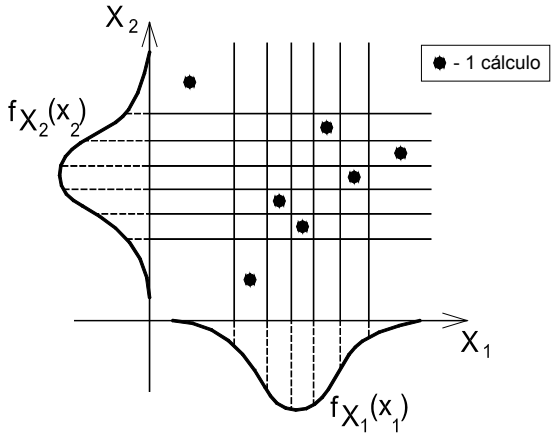


Figura 7-4 – Método do Hipercubo Latino.

7.3.4 Análise estrutural

Após a realização de N cálculos determinísticos, sendo utilizado em cada um deles um conjunto de valores das variáveis aleatórias básicas constando de uma linha da matriz apresentada na Tabela A-3, obtém-se um conjunto de N observações para cada resultado Y $(y_1, y_2, ..., y_N)$, resultado esse que pode ser uma tensão, um esforço, uma extensão ou outro parâmetro.

Cada cálculo é realizado, neste trabalho, com um modelo numérico semelhante aquele que foi descrito no Capítulo 6.

As variáveis aleatórias básicas afectam outros parâmetros:

- o valor da resistência à compressão do betão afecta o seu módulo de elasticidade, a resistência à tracção, o diagrama de retenção de tensões de tracção, a extensão de retracção e o coeficiente de fluência;
- a temperatura afecta a extensão de retracção e o coeficiente de fluência;
- a humidade relativa afecta a extensão de retracção e o coeficiente de fluência.

Para a automatização da simulação, foi desenvolvida uma aplicação que interage com o programa DIANA (2002), lançando sucessivos cálculos, tomando como base a matriz apresentada na Tabela A-3.

7.3.5 Tratamento estatístico da resposta

O tratamento estatístico da resposta da estrutura permite obter o valor médio e a variabilidade das diversas grandezas, bem como a respectiva evolução ao longo do tempo.

O tratamento dos resultados é efectuado considerando que eles constituem uma amostra do universo das respostas. Nos casos em que se verifica, através do teste da normalidade, que a distribuição estatística do resultado em questão tem características gausseanas, são calculados intervalos de confiança (relativos a um nível de confiança de 95%) para as estimativas da média e do desvio padrão, através das expressões apresentadas no sub-capítulo 7.2.6. Os intervalos de confiança assim calculados são conservativos, isto é, têm uma amplitude maior do que a real, pois o hipercubo latino conduz a uma redução da variância dos estimadores

(Bazant e Liu 1985; Florian 1992) comparativamente a uma simples amostragem aleatória. Isto acontece sempre que a resposta é uma função monótona das variáveis aleatórias básicas, o que é geralmente é verdade para os efeitos da fluência, da retracção e das perdas de pré-esforço (Bazant e Liu 1985). Segundo Bazant e Liu (1985), para análise dos efeitos diferidos em estruturas, é suficiente um número de cálculos determinísticos igual ao dobro do número de variáveis aleatórias básicas (estes autores não consideraram na análise os efeitos da fendilhação).

Neste trabalho, realiza-se um maior número de cálculos, nomeadamente nas simulações em que é considerado o efeito da fendilhação pois, nesses casos, a resposta pode não ser uma função monótona das variáveis aleatórias básicas.

Atendendo ao número elevado de cálculos determinísticos incluídos nas simulações realizadas neste trabalho, comparativamente ao número proposto por Bazant e Liu (1985), calculam-se os valores relativos aos quantis de 5% e de 95% (limites inferior e superior do intervalo de tolerância) a partir das expressões [7-16] e [7-17], assumindo que é conhecida a verdadeira média e o verdadeiro desvio padrão do resultado em estudo. Isto só pode ser feito nos casos em que a distribuição estatística do resultado em estudo tem características gausseanas. Nos restantes casos, os valores relativos aos quantis de 5% e de 95% são calculados a partir da curva dos valores acumulados, da amostra.

7.4 Análise probabilística de um caso prático

7.4.1 Generalidades

O caso analisado é aquele que foi tratado no Capítulo 6. O procedimento utilizado na simulação de Monte Carlo, com amostragem realizada pelo método do Hipercubo Latino, foi descrito no sub-capítulo 7.3.

Serão apresentados resultados que ilustram a evolução da resposta estrutural ao longo do tempo, e também aqueles que resultam da actuação, a longo prazo, das acções variáveis com o seu valor característico e com o seu valor quase permanente. Além disso será discutido sucintamente o efeito da idade das vigas pré-fabricadas no momento em que é estabelecida a continuidade estrutural.

Serão apresentados e discutidos os seguintes resultados:

- tensões normais na secções de meio vão e na secção de apoio central (zona de ligação);
- momento flector na secção de apoio central;
- deslocamento vertical na secção de meio vão;
- abertura de fendas na secção de apoio central.

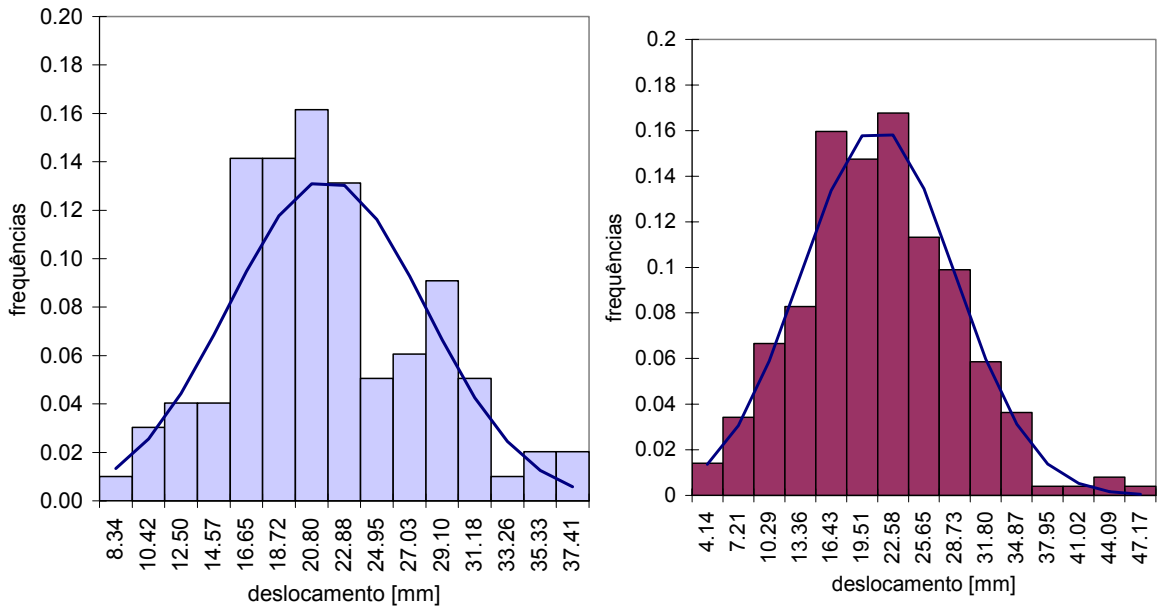
No Capítulo 6 foi concluído que, no caso concreto em análise, as secções de apoio central e de meio vão são secções representativas da zona de apoio e da zona do vão, respectivamente, pois nessas secções estão instalados, senão os esforços máximos, esforços muito próximos dos máximos.

Os resultados são apresentados em gráficos onde se sobrepõe o histograma representativo da distribuição estatística dos valores obtidos na simulação, com a função densidade de probabilidade de uma variável com distribuição normal e com a média e o desvio padrão estimados para o resultado em questão. Em todos os histogramas apresentados, a amplitude do intervalo de observação é dividida em 15 classes de igual amplitude. No eixo das ordenadas apresenta-se a razão entre o valor da função densidade de probabilidade e a amplitude de cada classe. Assim, a área sob a função densidade de probabilidade não tem valor unitário (está escalada), mas a soma da altura de todas as colunas do histograma tem um valor unitário. Consequentemente, todos os eixos das ordenadas têm valores com a mesma ordem de grandeza. Não se apresenta a função densidade de probabilidade dos resultados que não seguem uma distribuição normal.

7.4.2 Evolução da resposta estrutural ao longo do incremento de tempo de 20000 dias

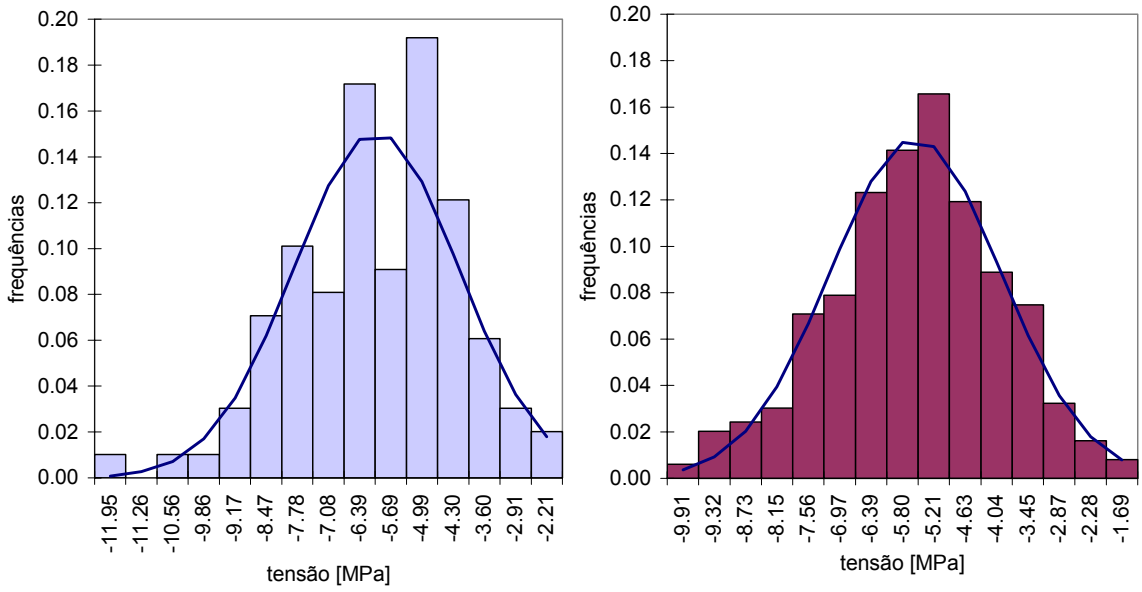
Neste capítulo apresentam-se os resultados de uma análise em que se considera um comportamento visco-elástico linear com envelhecimento para o betão, sem modelação do efeito da fendilhação (adiante designada, por simplificação de linguagem, por análise linear). Apresentam-se também os resultados de uma análise em que se consideram os efeitos da fendilhação. A comparação dos resultados obtidos por essas duas vias permite:

- a avaliação da variabilidade dos resultados de uma análise linear;
- a avaliação da influência da fendilhação sobre os esforços instalados na estrutura.



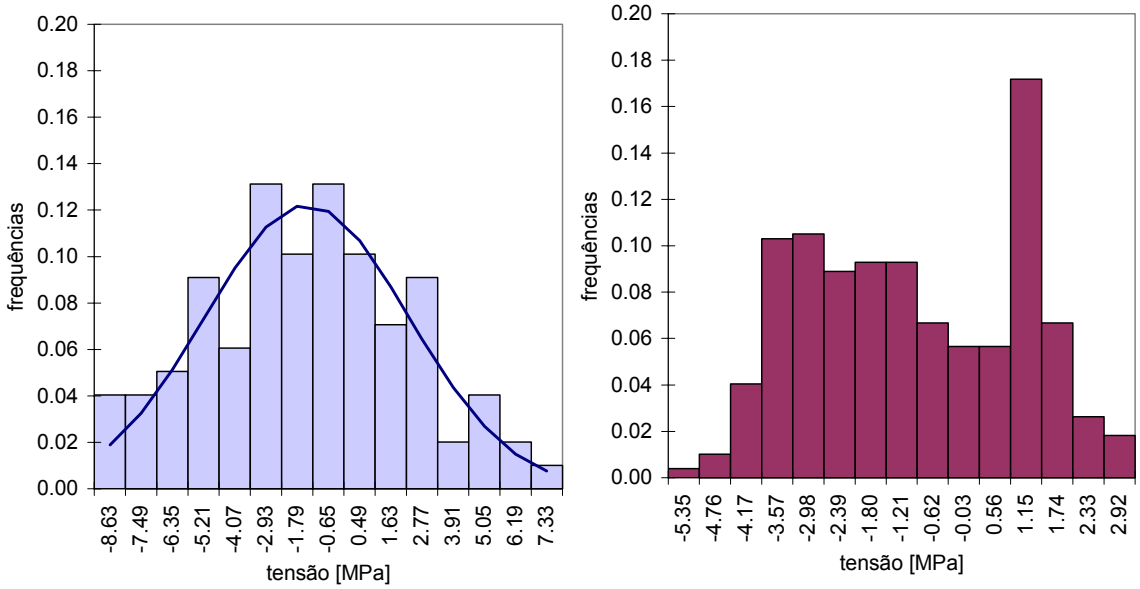
a) b)

Figura 7-5 - Deslocamento vertical a meio vão, após o incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.



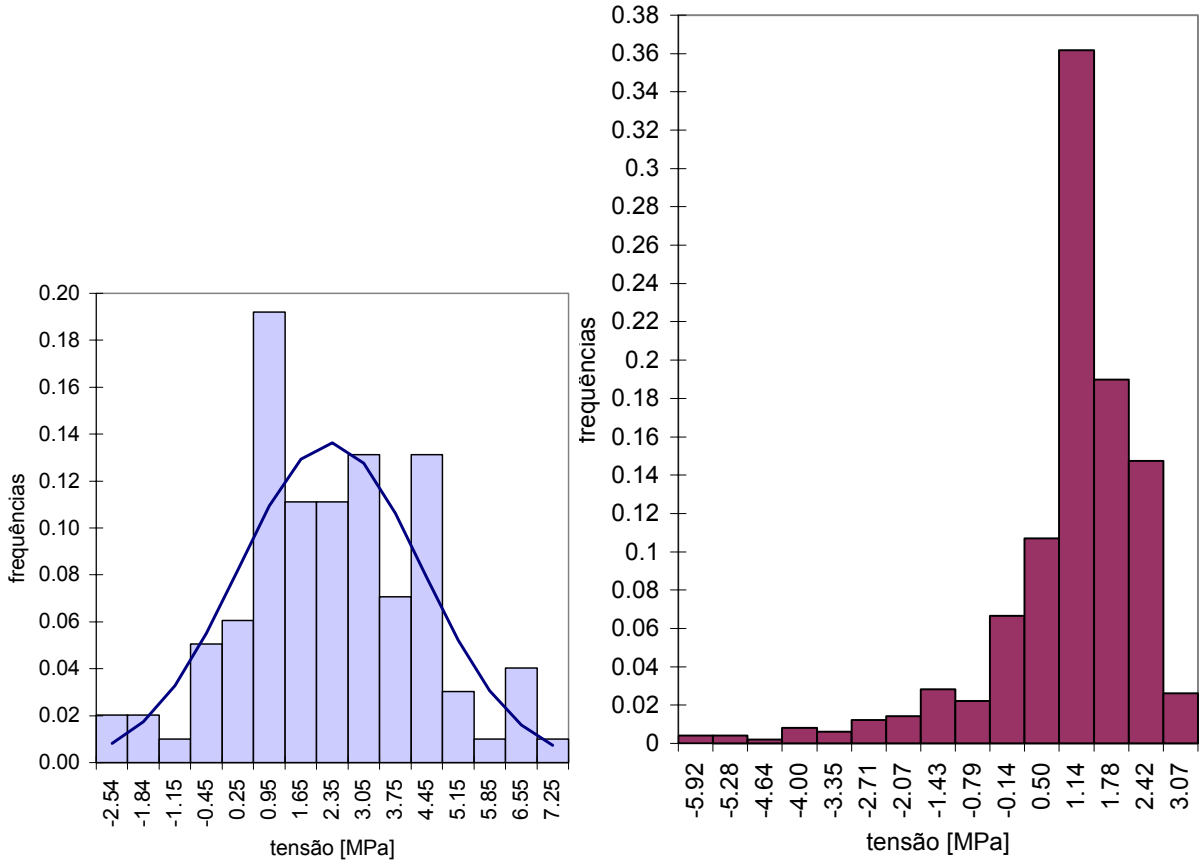
a) b)

Figura 7-6 - Tensão normal na fibra inferior na secção de meio vão, após o incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.



a) b)

Figura 7-7 - Tensão normal na fibra inferior na secção sobre o apoio central, após o incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.



a) b)

Figura 7-8 - Tensão normal na fibra superior na secção sobre o apoio central, após o incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.

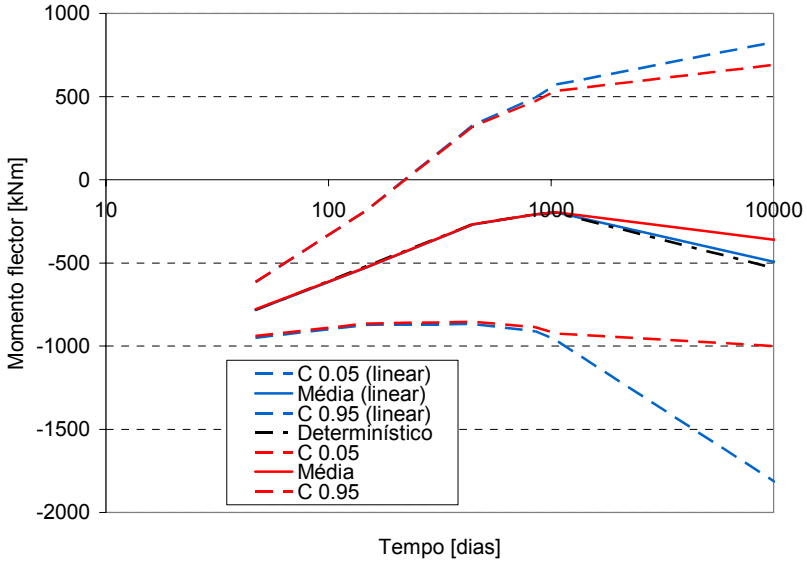
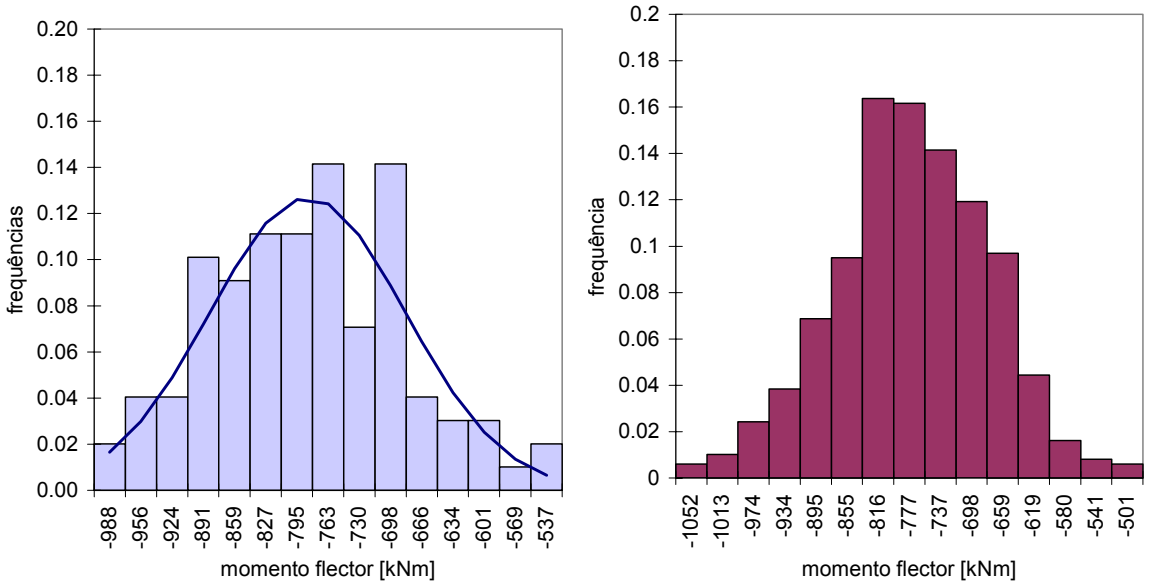
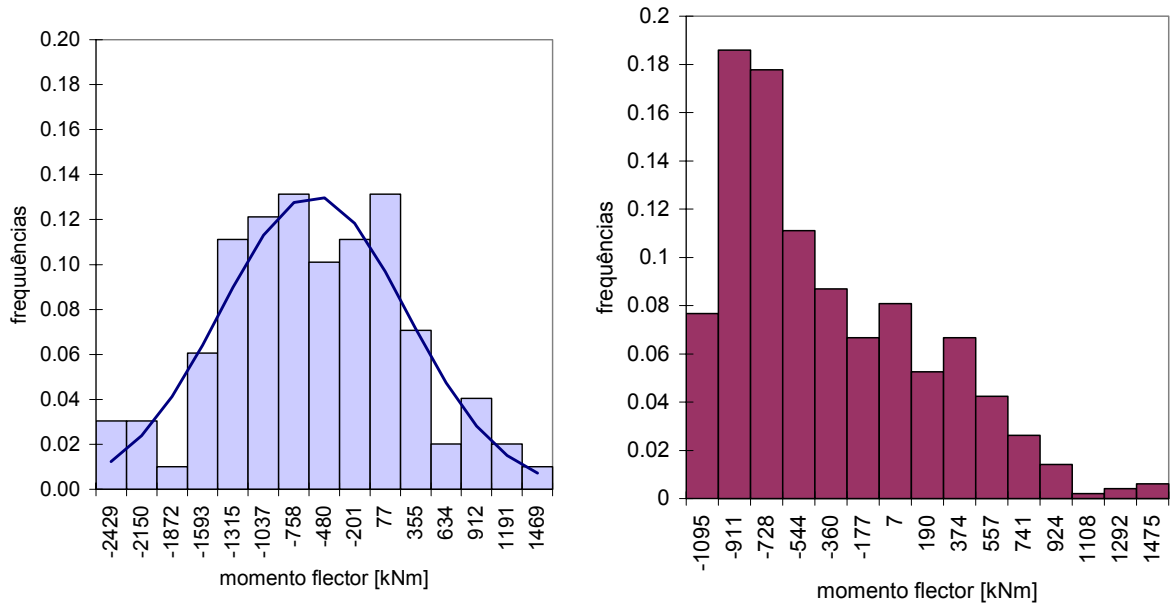


Figura 7-9 - Evolução ao longo do tempo do momento flector na secção de apoio central, resultante de uma análise linear e de uma análise com consideração da fendilhação.



a) b)

Figura 7-10 - Momento flector na secção de apoio central, antes do incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.



a) b)

Figura 7-11 - Momento flector na secção de apoio central após o incremento de tempo de 20000 dias: a) análise linear; b) análise com fendilhação.

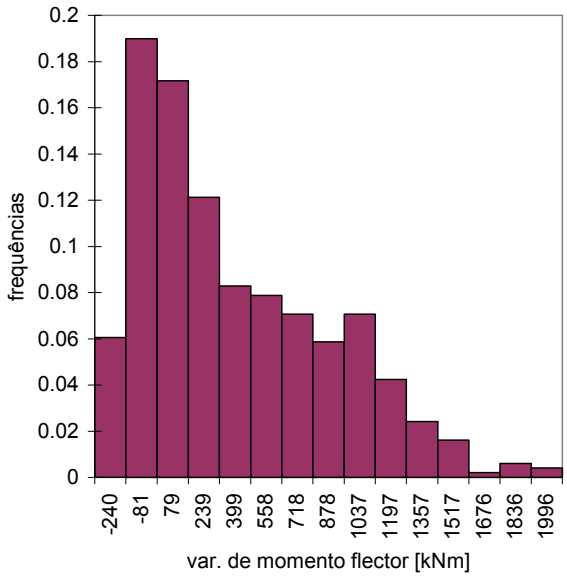


Figura 7-12 Variação de momento flector na secção de apoio central devida ao incremento de tempo de 20000 dias (análise com fendilhação).

Os resultados apresentados relativos a uma análise linear, resultam de uma simulação com 99 cálculos (11 vezes o número de variáveis aleatórias básicas), enquanto que os resultados relativos a uma análise com consideração da fendilhação do betão resultam de uma simulação com 495 cálculos (55 vezes o número de variáveis aleatórias básicas). Foi realizado um maior número de cálculos na simulação com consideração da fendilhação porque:

- as estimativas resultantes desta simulação são mais importantes (por ser esta simulação que traduz com mais rigor a realidade), conseguindo-se com um maior número de cálculos estimativas mais rigorosas;
- a consideração da fendilhação do betão faz com que a resposta estrutural não seja uma função monótona das variáveis aleatórias básicas, não podendo assim ser aproveitadas todas as potencialidades do método do Hipercubo Latino em termos de redução da variância das estimativas.

A forma mais irregular dos histogramas onde se apresentam os resultados da simulação com análise linear resulta, portanto, do menor número de cálculos realizados, comparativamente com a simulação em que foi considerada a fendilhação do betão.

Na Figura 7-5 verifica-se que a variabilidade do deslocamento vertical na secção de meio vão resultante de uma análise em que é considerado o efeito da fendilhação é maior do que aquela que resulta de uma análise linear. Na Figura 7-6, na Figura 7-7 e na Figura 7-8 verifica-se que, em termos de tensões normais, é maior a variabilidade que resulta de uma análise linear. Tal pode ser comprovado através dos valores estimados para o desvio padrão, apresentados na Tabela 7-4 (análise linear) e na Tabela 7-5 (análise com fendilhação).

Na Figura 7-9 apresenta-se a evolução, ao longo do incremento de tempo de 20000 dias, do momento flector na secção de apoio central. Para além dos resultados de um cálculo de natureza determinística utilizando os valores médios das variáveis aleatórias básicas (ver Capítulo 6), apresentam-se os resultados da simulação com análise linear e da simulação com consideração da fendilhação. Para cada simulação apresentam-se as estimativas calculadas para o valor médio e para os valores característicos correspondentes aos quantis de 5% e de 95%. Em cada instante de tempo, os valores relativos aos quantis de 5% e de 95% definem um intervalo, onde se pode dizer que está contido o valor do momento flector na secção de apoio central desta estrutura, com uma probabilidade de 90% (assumindo que o número de cálculos efectuados na simulação é suficiente para fornecer estimativas rigorosas).

Aos 47 dias verifica-se alguma variação estatística do momento flector na secção em análise, resultante da deformação diferida do betão entre os 31 e os 47 dias. No entanto, a variação estatística deste resultado é significativamente superior a longo prazo, traduzida pela grande diferença entre os valores correspondentes aos quantis de 5% e de 95%. Por exemplo aos 10000 dias, o intervalo de tolerância de 90% tem uma amplitude de 2641 kNm quando resulta de uma análise linear, e de 1690 kNm quando resulta de uma análise com consideração da fendilhação do betão. Note-se que, as variáveis aleatórias básicas que traduzem a variabilidade associada aos modelos teóricos de previsão da deformação por retracção e da

deformação por fluência, são multiplicadas pela deformação média em cada instante de tempo, conduzindo, portanto, a uma maior dispersão de resultados a longo prazo (quando a deformação média tem um valor mais elevado).

A consideração da fendilhação do betão conduz a uma redução da dispersão dos resultados, pois a perda de rigidez que acontece com a fendilhação reduz a evolução temporal do momento flector na secção de apoio central. Note-se que, os momentos flectores que provocam a fendilhação na fibra superior e inferior da secção de apoio central têm os valores – 1415 kNm e + 579 kNm, respectivamente (valores calculados com o valor médio de f_{ctm}, considerando um coeficiente de homogeneização entre o betão e o aço de 10 e desprezando as tensões auto-equilibradas na secção resultantes da retracção do betão).

Quando é considerado o efeito da fendilhação, a evolução ao longo do incremento de tempo de 20000 dias conduz a uma distribuição estatística do momento flector na secção de apoio central com grande assimetria (Figura 7-11 b)), ao contrário do que se verifica antes desse incremento de tempo (Figura 7-10 b)). Comparando os histogramas apresentados na Figura 7-11 verifica-se que o efeito da fendilhação impede que se instalem na secção de apoio momentos flectores negativos com valor elevado.

Da análise linear resulta uma distribuição estatística do momento flector na secção de apoio central com características gausseanas (Figura 7-11 a)). Na Figura 7-13 apresenta-se a evolução da estimativa da média e do desvio padrão desse esforço em função da dimensão da amostra, isto é, em função do número de cálculos considerados na quantificação da estimativa. Verifica-se que um número de cálculos inferior ao considerado (99) seria suficiente para obter estimativas com qualidade. Note-se que o gráfico apresentado na Figura 7-13 resulta de uma simulação com 99 cálculos com amostragem realizada pelo método do Hipercubo Latino. Portanto, os valores apresentados para amostras com menos de 99 "indivíduos" não representam uma amostragem pelo método do Hipercubo Latino, uma vez que nesses casos não são considerados todos os intervalos em que é dividida a função de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias básicas.

Na Tabela 7-5 não se apresentam os intervalos de confiança da média e do desvio padrão dos resultados da análise com consideração do efeito da fendilhação, porque as suas distribuições estatísticas não têm características gausseanas.

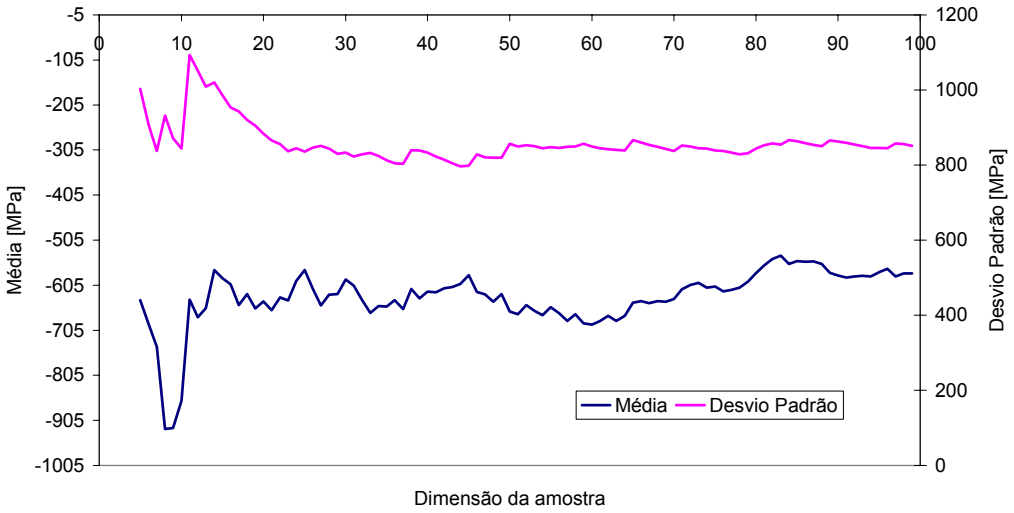


Figura 7-13 - Evolução da média e do desvio padrão do momento flector na secção de apoio central após o incremento de tempo de 20000 dias (análise linear).

Tabela 7-4 – Resultados no final do incremento de tempo de 20000 dias (análise linear).

Result.	$\bar{x}$	S'	$\langle\mu\rangle_{0.95}$	$\langle\sigma\rangle_{0.95}$	$\lvert\hat{\gamma}_1(n)\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_1}$	$\left\lvert\hat{\gamma}_2(n)+\frac{6}{n+1}\right\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_2}$
$u_y^{meio-vão}$ [mm]	21.76	6.25	[20.51;23.01]	[5.49;6.99]	0.38	0.36	0.00	0.69
$\sigma_{inf}^{meio-vão}$ [MPa]	-6.01	1.84	[-6.38;-5.65]	[1.62;2.06]	0.46	0.36	0.54	0.69
σ_{inf}^{apoio} [MPa]	-1.43	3.73	[-2.18;-0.69]	[3.27;4.17]	0.06	0.36	0.30	0.69
σ_{sup}^{apoio} [MPa]	2.31	2.05	[1.90;2.72]	[1.80;2.29]	0.09	0.36	0.04	0.69

Tabela 7-5 - Resultados no final do incremento de tempo de 20000 dias (análise com fendilhação).

Result.	$\bar{x}$	S'	$\langle\mu\rangle_{0.95}$	$\langle\sigma\rangle_{0.95}$	$\lvert\hat{\gamma}_1(n)\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_1}$	$\left\lvert\hat{\gamma}_2(n)+\frac{6}{n+1}\right\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_2}$
$u_y^{meio-vão}$ [mm]	21.08	7.61	-	-	0.34	0.16	0.38	0.33
$\sigma_{inf}^{meio-vão}$ [MPa]	-5.56	1.60	-	-	0.20	0.16	0.05	0.33
σ_{inf}^{apoio} [MPa]	-0.99	2.00	-	-	0.05	0.16	1.15	0.33
σ_{sup}^{apoio} [MPa]	0.99	1.38	-	-	1.94	0.16	5.55	0.33

7.4.3 Resposta estrutural face à actuação, a longo prazo, da sobrecarga rodoviária e da variação de temperatura com os seus valores característicos

Neste sub-capítulo apresentam-se os resultados da actuação, após o incremento de tempo de 20000 dias, da variação de temperatura e da sobrecarga rodoviária com os seus valores característicos. Os resultados são apresentados em termos do momento flector na secção de apoio central devido a essas acções, e foram calculados considerando o efeito da fendilhação.

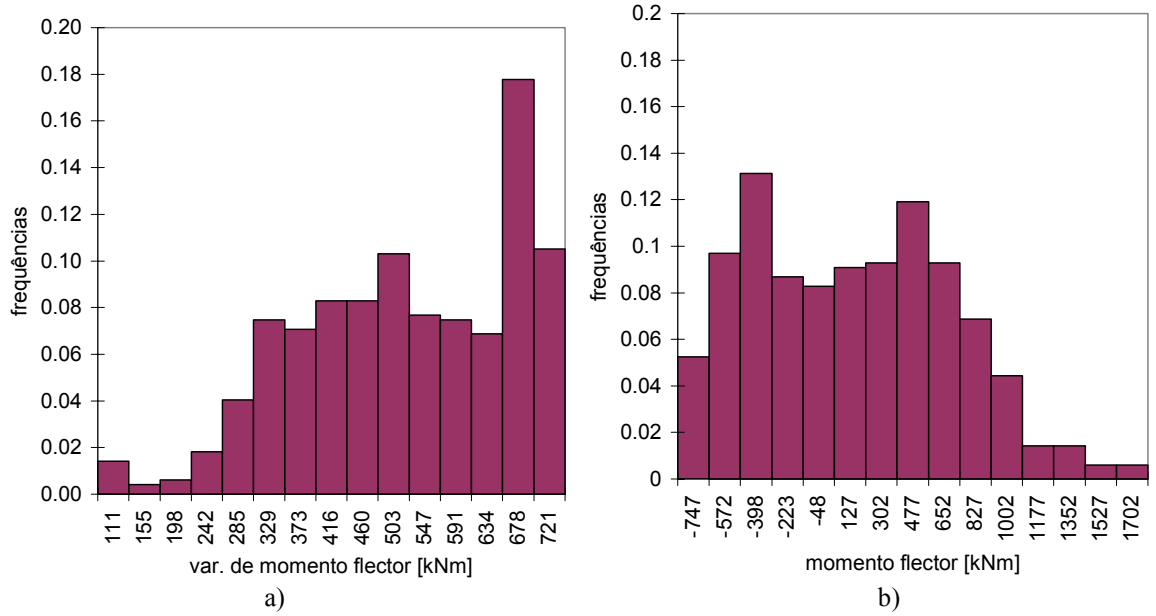


Figura 7-14 – Momento flector na secção de apoio central: a) variação de momento devida ao efeito da variação de temperatura com o seu valor característico; b) momento total após a actuação dessa acção.

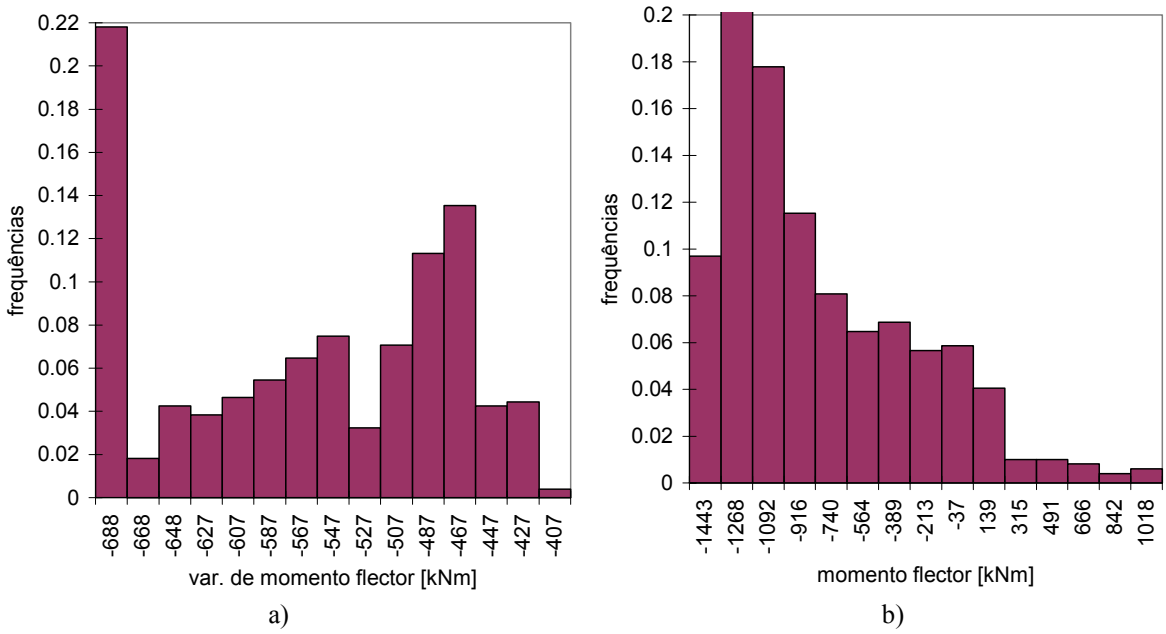
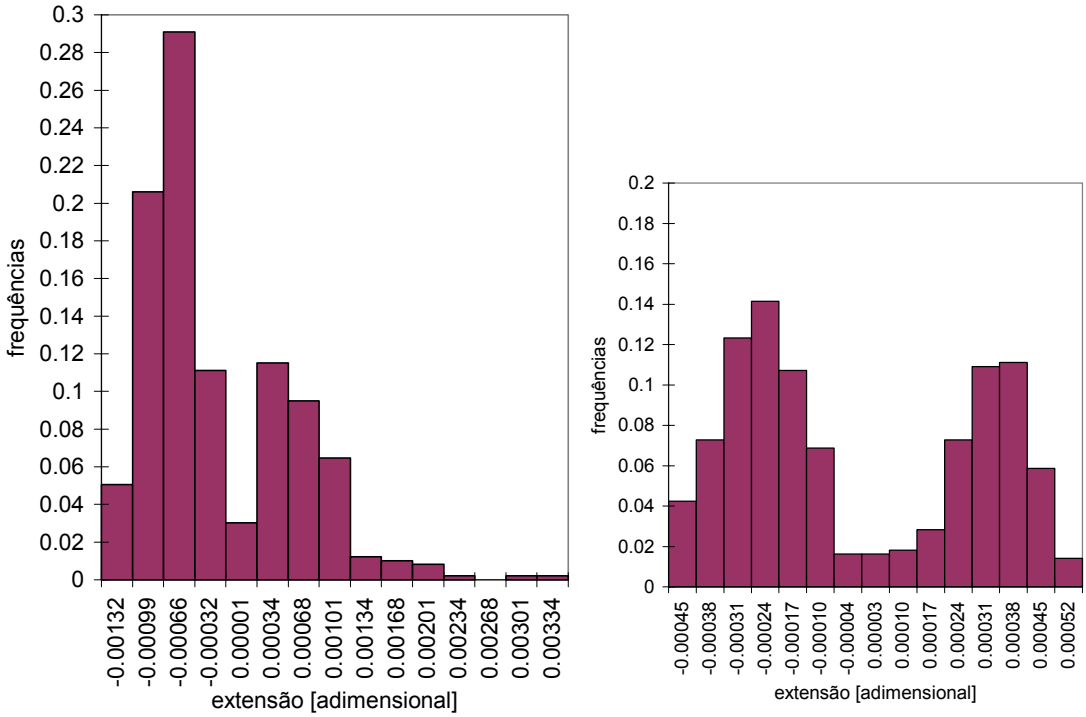


Figura 7-15 - Momento flector na secção de apoio central: a) variação de momento devida ao efeito da sobrecarga rodoviária, com o seu valor característico; b) momento total após a actuação dessa acção.



a) b)

Figura 7-16 - Extensão total nas fibras extremas da secção de apoio central: a) fibra inferior, após actuação, a longo prazo, da variação de temperatura com o seu valor característico; b) fibra superior, após actuação, a longo prazo, da sobrecarga rodoviária com o seu valor característico.

O cálculo do efeito das acções variáveis num modelo com comportamento linear elástico do betão (com a sua rigidez aos 28 dias), incluindo as armaduras, conduz aos seguintes valores do momento flector na secção do apoio central:

- +655 kNm sob a actuação da variação de temperatura com o seu valor característico;
- -685 kNm sob a actuação da sobrecarga rodoviária com o seu valor característico.

Na Figura 7-14 apresentam-se os resultados relativos à acção da variação de temperatura. No histograma apresentado na Figura 7-14 a) verifica-se uma grande dispersão nos valores observados para o momento flector devido à acção da variação de temperatura. Verifica-se que o valor do momento flector provocado pela variação de temperatura pode ser muito diferente daquele que se obtém através de uma análise linear elástica. Como esta acção constitui uma deformação imposta à estrutura, os esforços resultantes dependem evidentemente das características de rigidez da estrutura. Os valores reduzidos observados para o esforço em análise têm duas causas:

- existência de fendilhação da laje, antes da aplicação da variação diferencial de temperatura, em situações de cálculo com grande retracção na laje e pequena retracção

na viga, o que faz com que parte do aumento de temperatura na laje (ver Figura 6-11) seja dispendido no fecho dessas fendas;

- existência de fendilhação nas fibras inferiores na zona de ligação, o que conduz a uma redução de rigidez da estrutura na zona de ligação.

Na Figura 7-15, apresentam-se os resultados relativos à acção da sobrecarga rodoviária. No histograma apresentado na Figura 7-15 a), verifica-se que a classe mais frequentemente observada é aquela que contém os valores do momento flector semelhantes aquele que resulta de uma análise linear-elástica. Os restantes valores observados são inferiores, resultando de uma redistribuição de momentos flectores, com diminuição do esforço na secção de apoio central e aumento do esforço no vão. O valor médio do momento flector devido à acção da sobrecarga rodoviária corresponde a uma redistribuição de 18% relativamente ao momento flector que resulta de uma análise linear-elástica.

Na Figura 7-16 apresenta-se, para a secção de apoio central, a distribuição estatística da extensão média na fibra inferior e na fibra superior provocada pela actuação da variação de temperatura e pela sobrecarga rodoviária, respectivamente. A cedência da armadura na secção da fenda ocorre quando a extensão média atinge os valores de 0.00214 e de 0.00209, sendo o primeiro valor relativo à armadura próxima da fibra inferior e o segundo valor relativo à armadura próxima da fibra superior. Não se verifica a plastificação da armadura superior em qualquer valor observado, enquanto que a armadura inferior atingiu a cedência na secção da fenda em 0.7% das observações.

7.4.4 Resposta estrutural sob actuação das combinações quase permanentes de acções

Neste sub-capítulo caracteriza-se a resposta estrutural em combinações quase permanentes de acções, em termos de tensões normais na secção de meio vão e em termos de abertura de fendas na secção de apoio central. Os resultados apresentados resultam de uma análise em que é considerado o efeito da fendilhação.

Comparam-se os valores obtidos com os limites impostos pelo EC2 (CEN 2002) para estruturas localizadas em ambientes onde a corrosão pode ser provocada pela carbonatação do betão. Para os elementos em betão armado, como é o caso da laje, o EC2 (CEN 2002) preconiza iguais limitações para os casos em que a corrosão pode ser provocada pela carbonatação do betão (classes de exposição XC2, XC3 e XC4) e para os casos em que a corrosão pode ser provocada por cloretos (classes de exposição XD1, XD2, XS1, XS2 e XS3).

Tensão normal na secção de meio vão

Através do controlo da tensão normal na secção de meio vão garante-se a satisfação do estado limite de descompressão e do estado limite de fendilhação no betão envolvente dos fios de pré-esforço. Quando a corrosão pode ser provocada pela carbonatação do betão, o estado limite de descompressão deve, segundo o EC2 (CEN 2002), ser verificado para as combinações quase permanentes de acções. Além disso, a abertura de fendas não deve ultrapassar 0.2 mm quando se consideram as combinações frequentes de acções. Apresentam-se os resultados relativos à fibra inferior uma vez que as tensões de compressão são menores nessa fibra.

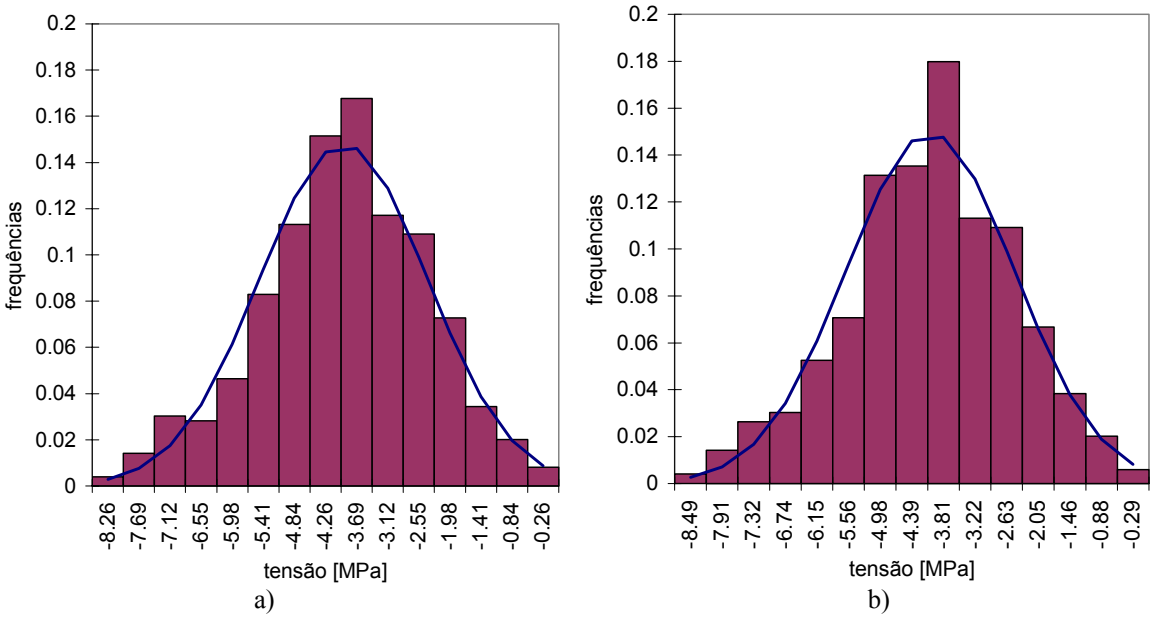


Figura 7-17 - Tensão normal na fibra inferior da secção de meio vão numa combinação quase permanente de acções com as acções variáveis: a) sobrecarga rodoviária e variação de temperatura; b) sobrecarga rodoviária.

Tabela 7-6 - Tensão normal na fibra inferior da secção de meio vão em combinações quase permanentes de acções.

AVB	$\bar{x}$ [MPa]	S' [MPa]	$\langle\mu\rangle_{0.95}$ [MPa]	$\langle\sigma\rangle_{0.95}$ [MPa]	$\lvert\hat{\gamma}_1(n)\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_1}$	$\left\lvert\hat{\gamma}_2(n)+\frac{6}{n+1}\right\rvert$	$1.5\sigma_{\hat{\gamma}_2}$
dT	-5.50	1.54	[-5.64;-5.36]	[1.45;1.64]	0.23	0.16	0.04	0.33
dT+VT	-3.93	1.54	[-4.07;-3.79]	[1.45;1.64]	0.22	0.16	0.04	0.33
VT	-4.05	1.56	[-4.19;-3.91]	[1.47;1.66]	0.20	0.16	0.00	0.33

Tabela 7-7 – Valor médio e valores correspondentes aos quantis de 5% e de 95% da tensão normal na fibra inferior da secção de meio vão, em combinações quase permanentes de acções, assumindo uma distribuição normal para a variável em estudo.

AVB	$C_{0.05}$ [MPa]	$\overline{x}$ [MPa]	$C_{0.95}$ [MPa]
dT	-8.03	-5.50	-2.97
dT+VT	-6.46	-3.93	-1.40
VT	-6.62	-4.05	-1.48

Na Tabela 7-6 verifica-se que o coeficiente de assimetria, $\hat{\gamma}_1(n)$, da distribuição estatística das tensões apresentadas é superior ao valor limite para que se possa considerar que a variável aleatória em questão segue uma distribuição normal, segundo o teste da normalidade. No entanto, verifica-se que os histogramas apresentados na Figura 7-17 exibem um razoável ajuste à função densidade de probabilidade da distribuição normal. Na Tabela 7-7 apresenta-se o valor médio e os valores característicos (valores correspondentes aos quantis de 5% e de 95%) calculados assumindo que a variável aleatória em estudo segue uma distribuição normal. Verifica-se um desvio de cerca de $2.5\,\text{MPa}$ entre os valores característicos e o valor médio.

Na Tabela 7-6 verifica-se que é semelhante o desvio padrão estimado para as três variáveis em estudo. Sendo assim, as funções densidade de probabilidade das três variáveis, têm forma semelhante, sendo apenas transladadas. Isto revela que a variabilidade dos valores da tensão normal, no ponto em estudo, se deve essencialmente à variabilidade do comportamento diferido da estrutura.

Comparando os valores médios das variáveis em estudo (apresentados na Tabela 7-7) com os valores obtidos no cálculo de natureza determinística apresentado no Capítulo 6, verifica-se que o cálculo de natureza determinística conduz a tensões normais ligeiramente superiores (em valor absoluto) aos valores médios calculados na análise probabilística. Esta conclusão é coerente com o facto de resultar da análise probabilística uma distribuição estatística do momento flector na secção de apoio central, a longo prazo, cujo valor médio é ligeiramente inferior (em valor absoluto) ao valor que resulta do cálculo de natureza determinística (ver Figura 7-9).

A probabilidade de existirem fendas com abertura superior a 0.2 mm, na secção de meio vão, numa combinação frequente de acções, é inferior a 0.05.

Abertura de fendas na secção de apoio central

Para as classes de exposição consideradas, o EC2 (CEN 2002) impõe que a abertura de fendas em elementos de betão armado seja inferior a 0.3 mm, em combinações quase permanentes de acções.

A abertura característica de fendas quantificada pelos regulamentos (CEB 1993; CEN 2002), w_k, é obtida através da multiplicação do valor característico da distância entre fendas, $l_{s,max}^k$, pela extensão média de fendilhação, resultando:

$$w_k = l_{s,max}^k \cdot \left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right)_{média} \qquad [7\text{-}25]$$

Neste trabalho, considera-se que $l_{s,max}^k$ tem natureza determinística, sendo dado pela equação [3-42] (CEN 2002). A análise efectuada na presente dissertação permite obter a distribuição estatística da variável de resposta ε_{nn}^{cr} e, consequentemente, a distribuição estatística do parâmetro w_k.

Na Tabela 7-8 apresentam-se as estimativas calculadas para a probabilidade da abertura de fendas, w_k, na secção de apoio central, exceder os valores 0.20 mm e 0.30 mm, nas combinações quase permanentes de acções.

No caso concreto em análise, a probabilidade de ser excedido o valor limite regulamentar é de 0.042 para a fibra inferior da secção de apoio central e de 0.079 para a fibra superior dessa secção.

Tabela 7-8 – Valores estimados para a probabilidade da abertura de fenda na secção de apoio central exceder os valores 0.20 mm e 0.30 mm.

AVB	Fibra inferior		Fibra superior	
	$P(w_k > 0.20mm)$	$P(w_k > 0.30mm)$	$P(w_k > 0.20mm)$	$P(w_k > 0.30mm)$
dT	0.111	0.042	0.188	0.038
dT+VT	0.089	0.032	0.246	0.057
VT	0.055	0.022	0.327	0.079

Na Figura 7-18 e na Figura 7-19 apresenta-se a evolução das estimativas em função da dimensão da amostra (número de cálculos considerados para a quantificação dessa estimativa). A Figura 7-18 é relativa à combinação de acções mais desfavorável para a fibra inferior e a Figura 7-19 é relativa à combinação mais condicionante para a fibra superior. Note-se que, tal como foi referido a propósito da Figura 7-13, os valores apresentados para

amostras com menos de 495 indivíduos não representam uma amostragem pelo método do Hipercubo Latino. A partir da observação das figuras pode-se concluir que um número de cálculos inferior ao considerado na simulação (495) seria suficiente para a obtenção de estimativas com boa qualidade. Dito de outro modo, o número de cálculos efectuados conduz a estimativas com reduzida variância.

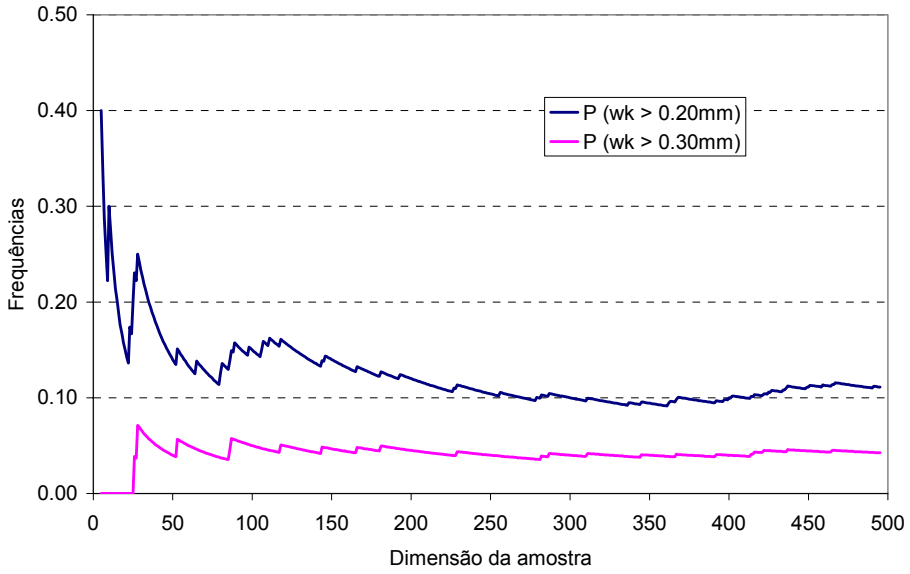


Figura 7-18 - Abertura de fendas na fibra inferior da secção de apoio em combinação quase permanente de acções, sendo a acção variável a variação de temperatura.

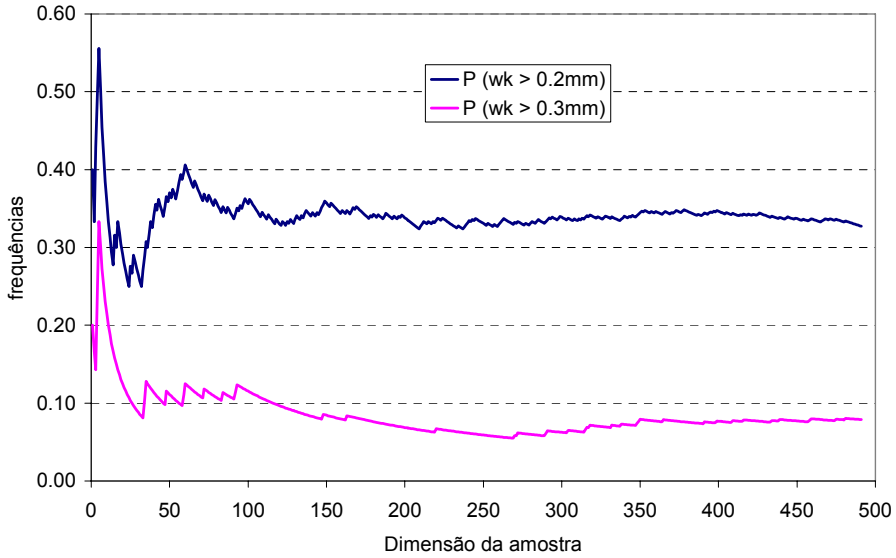


Figura 7-19 - Abertura de fendas na fibra superior da secção de apoio em combinação quase permanente de acções, sendo a acção variável a sobrecarga rodoviária.

7.4.5 Influência da idade em que é estabelecida a continuidade

Para avaliação da importância da idade em que é estabelecida a continuidade, comparam-se resultados de 2 simulações com distinto faseamento construtivo:

- continuidade estabelecida aos 30 dias, em que se considera o faseamento construtivo e a sequência de aplicação das acções variáveis ilustrada na Figura 6-12;
- continuidade estabelecida aos 90 dias, em que é modificado, em relação ao exposto na Figura 6-12, o intervalo de tempo entre a aplicação do pré-esforço e a betonagem da laje e da carlinga, passando esse intervalo a ser de 90 dias.

Comparam-se os resultados de uma simulação em que não se consideram os efeitos da fendilhação, para assim se avaliar a importância do faseamento construtivo sobre a evolução dos esforços devida à deformação do betão por fluência e retracção.

Tabela 7-9 – Tensões normais resultantes do estabelecimento da continuidade aos 30 dias e aos 90 dias (MPa).

Resultado	Continuidade aos 30 dias		Continuidade aos 90 dias	
	após RCP	após 2000 dias	após RCP	após 2000 dias
$\sigma_{inf}^{meio-vão}$	$\overline{x}$ = -9.26 S'=1.20	$\overline{x}$ = -6.01 S'=1.84	$\overline{x}$ = -8.70 S'=1.25	$\overline{x}$ = -6.26 S'=1.83
σ_{inf}^{apoio}	$\overline{x}$ = -3.77 S'=0.47	$\overline{x}$ = -1.43 S'=3.73	$\overline{x}$ = -4.48 S'=0.46	$\overline{x}$ = -3.10 S'=3.62
σ_{sup}^{apoio}	$\overline{x}$ = 2.04 S'=0.25	$\overline{x}$ = 2.31 S'=2.05	$\overline{x}$ = 2.33 S'=0.26	$\overline{x}$ = 2.99 S'=2.03

Nos resultados apresentados na Tabela 7-9 verifica-se que, quando a continuidade é estabelecida aos 90 dias, a tensão de tracção na fibra superior da secção de apoio é maior e a tensão de compressão na fibra inferior dessa secção aumenta também (em valor absoluto). Este efeito seria de esperar uma vez que, quando a continuidade é estabelecida mais tarde, o valor da retracção diferencial entre a laje e a viga pré-fabricada é maior (a laje retrai mais do que a viga), aumentando portanto o valor do momento negativo na secção de apoio.

Na Tabela 7-9 verifica-se que, na secção de apoio central, a distribuição estatística da tensão normal apresenta uma maior dispersão após o incremento de tempo de 20000 dias, aspecto este que foi já comentado. Na fibra inferior da secção de meio vão, a variabilidade da tensão normal é significativa antes do incremento de tempo de 20000 dias, devido às redistribuições de tensões, ao nível da secção, que se dão até essa data (entre o betão e as armaduras e entre

os betões da viga e da laje). Tal como seria de esperar, essa variabilidade é maior quando a continuidade é estabelecida aos 90 dias.

7.5 Considerações finais

Apesar das suas limitações, a metodologia utilizada na simulação numérica do comportamento estrutural revela potencialidades para ser utilizada na análise do comportamento em fase de serviço de estruturas sensíveis aos efeitos da fluência e da retracção. Esta metodologia permite uma caracterização da resposta estrutural, através da quantificação de um intervalo de valores onde se espera que esteja contido um determinado parâmetro com uma determinada probabilidade.

Relativamente ao comportamento estrutural de obras com a tipologia daquela que se analisou neste capítulo (tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas ligadas em continuidade na zona dos apoios) conclui-se o seguinte:

- a resposta estrutural apresenta uma variabilidade acentuada, que é traduzida pela grande dispersão dos resultados obtidos;
- a fendilhação condiciona, de forma determinante, o valor dos esforços instalados na estrutura;
- a resposta estrutural é influenciada pela idade das vigas pré-fabricadas no instante em que é estabelecida a continuidade.

Relativamente ao caso concreto em análise, conclui-se que:

- existe uma grande dispersão nos valores observados para os esforços e para as tensões instaladas na secção de apoio central; veja-se, por exemplo, que o desvio padrão da tensão normal na fibra inferior da secção de apoio, resultante de um cálculo sem consideração da fendilhação, é de 3.73 MPa, o que corresponde a um intervalo de tolerância (intervalo cujos limites são os valores correspondentes aos quantis de 5% e 95% da distribuição estatística em questão) de 12.3 MPa;
- a variabilidade do valor da tensão normal (resultante de um cálculo linear) é menor na secção de meio vão do que na secção de apoio central, em consequência do facto de o momento flector, de natureza hiperstática, que se desenvolve ao longo do tempo, ter valor máximo na secção de apoio central e valor nulo na secção sobre os apoios de extremidade;

- apesar da elevada dispersão dos valores que caracterizam a resposta estrutural, é satisfeito o estado limite de descompressão no betão que envolve os cordões de pré-esforço, considerando os valores das tensões correspondentes aos quantis de 5% e 95% e não apenas o valor médio da resposta estrutural (como é corrente no projecto de estruturas);
- na zona de ligação, em betão armado, a probabilidade estimada para a existência de fendas com abertura, w_k, superior a 0.3 mm é inferior a 0.08 (note-se que, na análise de natureza determinística cujos resultados foram apresentados no Capítulo 6, foram obtidos valores muito reduzidos para a abertura de fendas na secção de apoio).

Pode dizer-se, com um grau de confiança superior aquele que resulta das análises usualmente efectuadas no projecto de estruturas, que a estrutura analisada apresenta um bom comportamento em fase de serviço. Revelou-se importante a existência de uma força de pré-esforço superior aquela que era estritamente necessária para a satisfação do estado limite de descompressão na zona do vão, num cálculo de natureza determinística.

Seria interessante refinar a caracterização das variáveis aleatórias básicas com base em resultados de medições e comparar os resultados obtidos numericamente com resultados obtidos por via experimental em obras sujeitas a monitorização.

Seria também interessante o uso das potencialidades da metodologia utilizada para o estudo de obras com vãos com outros comprimentos e com um número de tramos diferente do considerado, com o objectivo de avaliar se os critérios de pré-dimensionamento da armadura de pré-esforço e da armadura de continuidade para momentos positivos podem ser utilizados como critério de projecto neste tipo de obras.

8 Conclusões e perspectivas para futuros desenvolvimentos

8.1 Conclusões

As vantagens do estabelecimento da continuidade em tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas, fizeram com que esta solução seja actualmente muito utilizada. Tal como acontece na generalidade das estruturas pré-fabricadas, também nos tabuleiros de pontes deve merecer especial atenção a zona de ligação. No entanto, no caso das pontes construídas com vigas pré-fabricadas com continuidade estrutural, a efectivação da ligação tem consequências ao nível da resposta de toda a estrutura, uma vez que, em virtude do faseamento construtivo envolvido na sua construção e da deformação diferida do betão, ocorre uma evolução dos esforços instalados na estrutura. Por outro lado, a zona de ligação não pode ser isolada, em termos de análise, da restante estrutura, pois as acções que lhe estão aplicadas só podem ser determinadas considerando a totalidade da estrutura e todas as fases da sua "vida". Então, o estudo da zona de ligação entre vigas não pode ser dissociado do estudo do comportamento estrutural de toda a construção.

No presente trabalho foi abordado o comportamento durante a fase de serviço de tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-esforçadas, pré-fabricadas, com continuidade estabelecida na zona dos apoios, sem utilizar para tal pré-esforço de continuidade.

No Capítulo 2, foram sintetizados aspectos relevantes para o comportamento estrutural deste tipo de obras, como sejam o faseamento construtivo, a geometria da zona de ligação, a emenda das armaduras inferiores na zona de apoio e o funcionamento da ligação sob actuação de momentos flectores negativos. Foram apresentadas, com uma visão crítica, as conclusões

obtidas por autores que estudaram este tema. Salienta-se que, autores de estudos sobre este tipo de obras, referem que a avaliação do seu comportamento estrutural (nomeadamente em fase de serviço) deve atender à incerteza associada à quantificação da fluência e da retracção. No entanto, parecem não existir trabalhos em que seja quantificada, para este tipo de obras, a distribuição estatística da resposta estrutural, considerando também outro aspecto relevante: a modelação do comportamento do betão fendilhado. Foram apresentados e discutidos os procedimentos utilizados para dimensionamento e emenda da armadura de continuidade para momentos flectores positivos. No Capítulo 2 é também feita uma breve referência a outras soluções possíveis para a construção de tabuleiros contínuos com recurso a vigas pré-fabricadas.

No Capítulo 3, foram apresentados modelos para caracterização do comportamento instantâneo e diferido do betão. Abordaram-se, com maior desenvolvimento, os aspectos relevantes para a caracterização do comportamento estrutural durante a fase de serviço: a quantificação das deformações instantânea e diferida do betão sob actuação de tensões de nível moderado; o comportamento do betão simples e do betão armado traccionado. Nas aplicações numéricas apresentadas nesta dissertação, o comportamento deformacional do betão ao longo do tempo, foi estimado com base nos modelos de fluência e de retracção do EC2 (CEN 2002), uma vez que esses modelos constituem versões revistas dos modelos incluídos no MC90 (CEB 1993). Estas revisões foram introduzidas para que seja garantido um melhor ajuste em relação ao comportamento real de betões com resistências elevadas. No âmbito do presente trabalho, foi implementada uma sub-rotina para inclusão do modelo do EC2 (CEN 2002) no programa DIANA (2002). Para traduzir o comportamento do betão armado traccionado, foram adoptados modelos de *tension stiffening* (retenção de tensões de tracção pelo betão entre fendas) definidos de forma coerente com o procedimento utilizado para a quantificação da abertura de fendas segundo o MC90 (CEB1993) e o EC2 (CEN 2002).

No Capítulo 4, foram expostas as metodologias usualmente empregues para analisar o comportamento diferido das estruturas. Para a realização de uma análise rigorosa através do MEF, incluindo o efeito da fendilhação, foi apresentado um modelo baseado no conceito de fenda distribuída, com decomposição da deformação em duas componentes (uma relativa às fendas e outra relativa ao betão entre fendas). Este modelo permite a combinação do efeito da fendilhação com os efeitos da fluência e da retracção.

A aplicação do método do módulo efectivo ajustado (método simplificado para análise do comportamento diferido de estruturas) permitiu a obtenção de um procedimento expedito para o cálculo simplificado dos efeitos da fluência e da retracção diferencial em tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas e pré-esforçadas, ligadas em

continuidade sobre os apoios. Os resultados fornecidos pelo cálculo com este método são de natureza aproximada, tal como se concluiu na aplicação efectuada para confrontação com os resultados fornecidos por um cálculo recorrendo ao método dos elementos finitos. No entanto, o procedimento simplificado exposto pode ser utilizado, com grande utilidade, quando não seja desejado grande rigor nos cálculos, ou para validação de cálculos mais complexos realizados com recurso a métodos mais rigorosos.

No estudo realizado, foram efectuadas duas aplicações numéricas, utilizando para tal um modelo de elementos finitos de viga, considerando o faseamento construtivo e o comportamento não linear dos materiais.

Na primeira aplicação numérica, compararam-se os resultados numéricos com aqueles que foram obtidos experimentalmente por Mattock (1961), que ensaiou modelos, à escala 1:2, compostos por duas vigas pré-fabricadas ligadas em continuidade na zona sobre o apoio central. O modelo numérico revelou-se apto para traduzir o comportamento de estruturas do tipo daquelas que foram ensaiadas por Mattock (1961), uma vez que a concordância entre os resultados numéricos e os experimentais foi, em geral, boa (nomeadamente em termos de evolução temporal dos esforços), e quando isso não aconteceu, foram expostas justificações possíveis para as diferenças encontradas. Para além de servir como validação do modelo numérico utilizado, o trabalho apresentado no Capítulo 5 serviu para evidenciar particularidades de funcionamento do tipo de obras em estudo, nomeadamente: a evolução temporal significativa do estado de tensão e de deformação na estrutura; o efeito da fendilhação e o papel desempenhado pelas armaduras inferior e superior da zona de ligação.

Na segunda aplicação numérica, apresentada nos Capítulos 6 e 7, analisou-se o tabuleiro de uma ponte, do tipo correntemente utilizado na construção de passagens desniveladas com recurso à pré-fabricação. Trata-se de uma estrutura com dois tramos contínuos (após a materialização da continuidade) de 25 m. Com o estudo deste exemplo, pretendia-se contribuir para o conhecimento da resposta estrutural do tipo de obras em análise nesta dissertação. Além disso, pretendia-se verificar se a utilização de uma ligação entre vigas sem pré-esforço de continuidade permite a satisfação do estado limite de descompressão (no betão envolvente das armaduras de pré-esforço das vigas pré-fabricadas) e a existência de aberturas de fendas suficientemente pequenas para não comprometer a durabilidade da estrutura. Pretendia-se também avaliar a variabilidade da resposta deste tipo de estruturas, durante a fase de serviço.

No Capítulo 6, foram apresentados os resultados de um cálculo de natureza determinística, realizado com valores médios dos parâmetros envolvidos e os valores característicos das

acções variáveis. No Capítulo 7, foi descrito o procedimento utilizado numa análise probabilística, recorrendo ao método de Monte Carlo, utilizando a técnica de redução da variância designada de Hipercubo Latino. Este processo permite a caracterização da distribuição estatística esperada para a resposta estrutural.

O estudo efectuado permitiu obter as seguintes conclusões, relativamente ao comportamento estrutural de tabuleiros de pontes construídos com recurso a vigas pré-fabricadas ligadas em continuidade na zona dos apoios:

- a resposta estrutural apresenta uma variabilidade acentuada, que é traduzida pela grande dispersão dos resultados obtidos; sendo acentuada, essa variabilidade deve ser tida em conta no estudo deste tipo de estruturas;
- a fendilhação do betão afecta, de forma significativa, a resposta estrutural em termos de esforços: atenua a variabilidade da evolução dos esforços provocados pela deformação diferida do betão; conduz a um aumento da variabilidade da evolução das deformações provocadas pela fluência e pela retracção do betão; condiciona o valor dos esforços provocados pela sobrecarga rodoviária e pela variação de temperatura (a resposta face a esta última acção, é mais sensível aos efeitos da fendilhação, uma vez que se trata de uma deformação imposta à estrutura);
- se não for considerado, na análise, o efeito da fendilhação, a distribuição estatística da resposta estrutural tem características gausseanas (tipo de distribuição que foi admitido para as variáveis aleatórias básicas); tal não acontece quando é considerado o efeito da fendilhação sendo, neste caso, necessária a realização de um maior número de cálculos determinísticos (numa simulação de Monte Carlo) para a obtenção de estimativas com qualidade;
- a resposta estrutural é influenciada pela idade das vigas pré-fabricadas no instante em que é estabelecida a continuidade.

Relativamente ao caso concreto em análise no Capítulo 7, foram caracterizadas as distribuições estatísticas esperadas para os parâmetros da resposta estrutural considerados mais relevantes. Relativamente à viabilidade da solução estudada pode dizer-se que:

- apesar da elevada dispersão dos valores que caracterizam a resposta estrutural, é satisfeito o estado limite de descompressão no betão que envolve os cordões de pré-esforço, considerando os valores das tensões correspondentes aos quantis de 5% e 95% e não apenas o valor médio da resposta estrutural (como é corrente no projecto de estruturas);

- na zona de ligação, em betão armado, a probabilidade estimada para a existência de fendas com abertura, w_k, superior a 0.3 mm, é inferior a 0.08;
- a armadura de continuidade para momentos positivos adoptada, revelou-se suficiente para garantir um bom desempenho da estrutura durante a fase de serviço;
- revelou-se importante a existência de uma força de pré-esforço superior aquela que era estritamente necessária para a satisfação do estado limite de descompressão na zona do vão, num cálculo de natureza determinística.

Concluiu-se que a análise efectuada, de natureza probabilística, permite uma caracterização do comportamento estrutural em fase de serviço mais rigorosa, comparativamente com aquela que é usualmente efectuada no projecto de estruturas. É especialmente adequada para a análise do comportamento de estruturas sensíveis aos efeitos da fluência, da retracção e da fendilhação. O procedimento utilizado deverá ser alvo de desenvolvimento, nomeadamente na fase de escolha e caracterização das variáveis aleatórias básicas.

8.2 Perspectivas para futuros desenvolvimentos

Enumeram-se a seguir algumas perspectivas para futuros desenvolvimentos, como sequência do trabalho iniciado nesta dissertação:

- estudo experimental do comportamento (em fase de serviço e em estado limite último) das soluções utilizadas habitualmente em Portugal para estabelecimento da continuidade entre vigas pré-fabricadas;
- desenvolvimento do procedimento utilizado na análise probabilística;
- realização de estudos numéricos, que contribuam para o conhecimento do comportamento de obras do tipo das que se estudaram nesta dissertação e para o desenvolvimento de critérios de dimensionamento das armaduras de continuidade (armadura superior, inferior e de alma) neste tipo de obras.

Relativamente ao primeiro ponto referido, parece necessário estudar a influência, em termos de comportamento estrutural da ligação, de aspectos tais como: a forma geométrica do topo das vigas; o comprimento ao longo do qual a viga pré-fabricada está embebida na carlinga; a solução utilizada para emendar a armadura de continuidade para momentos flectores positivos; a utilização de cordões de pré-esforço como armadura de continuidade para momentos positivos. O estudo da ligação não pode ser feito sem o conhecimento dos esforços actuantes. Os procedimentos utilizados no presente trabalho podem ser utilizados para a determinação de tais esforços. O trabalho experimental pode ser feito ensaiando em

laboratório modelos, em escala reduzida, onde seja isolada a zona de ligação (juntamente com um troço de viga de ambos os lados da ligação). Deve ser abordado o comportamento estrutural sob actuação de cargas cíclicas, para estudo do problema da fadiga. O trabalho experimental deve ser acompanhado por simulações numéricas.

Relativamente ao segundo ponto referido, a análise probabilística pode ser desenvolvida em vários aspectos, tais como:

- escolha das variáveis aleatórias básicas e caracterização das respectivas distribuições estatísticas;
- avaliação do número de cálculos necessários para obter estimativas com rigor suficiente para análises em fase de serviço (quando é considerado o efeito da fendilhação), por forma a ser optimizado o tempo de cálculo (aspecto importante para a utilização alargada da análise probabilística);
- realização de análises de sensibilidade, por forma a determinar os parâmetros de entrada mais influentes sobre a variabilidade da resposta estrutural.

Relativamente ao terceiro ponto referido no início deste sub-capítulo, a análise probabilística pode ser aplicada ao estudo de obras com diferentes vãos e diferentes números de tramos, com o objectivo de avaliar se os critérios de pré-dimensionamento da armadura de pré-esforço e da armadura de continuidade para momentos positivos utilizados no presente trabalho (com ou sem rectificações) podem ser utilizados como critério de projecto neste tipo de obras. De facto, uma alternativa à realização de análises de natureza probabilística em fase de projecto (em estruturas cujo comportamento em serviço apresente acentuada variabilidade), poderá ser a utilização de regras simples de (pré-)dimensionamento que atendam a essa variabilidade, tal com propuseram Clark e Sugie (1997).

Além disso, parece ser importante o desenvolvimento de estudos que contribuam para o conhecimento do comportamento de pontes, com tabuleiros construídos com recurso a vigas pré-fabricadas, com continuidade estrutural com os pilares e encontros. Reduzindo o número de juntas de dilatação e de aparelhos de apoio, podem ser conseguidas vantagens em termos de durabilidade, qualidade estética e desempenho estrutural das obras.

Por fim, realça-se o interesse da monitorização ao longo do tempo de obras reais, deste tipo, para confrontação dos resultados numéricos com a evolução de esforços e deformações observada experimentalmente.

Os dois boletins, elaborados pela comissão do FIB que estuda a pré-fabricação (um sobre ligações em estruturas pré-fabricadas e outro sobre pontes pré-fabricadas), cuja publicação se espera para breve, para além de realçarem a actualidade do tema, contribuirão certamente para traçar novos rumos de investigação neste domínio.

Referências bibliográficas

ACI Committee 209. (1982), "Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures." American Concrete Institute.

Abdalla, O. A., Ramirez, J. A. e Lee, R. H. (1993), "Strand debonding in pretensioned beams - Precast prestressed concrete bridges with debonded strands - Continuity Issues." Indiana Department of Transportation and Purdue University.

Abdel-Karim, A. M. e Tadros, M. K. (1992), "State-of-the-art of precast-prestressed concrete spliced-girder-brigdes." Precast Prestressed Concrete Institute.

Azenha, M. (2004), *Comportamento do betão nas primeiras idades. Fenomenologia e análise termo-mecânica*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil da Universidade do Porto, Porto.

Barros, J. (1995), *Comportamento do betão reforçado com fibras. Análise experimental e simulação numérica*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Bazant, Z. P. e Kim, J.-K. (1989), "Segmental box girder: deflection probability and Bayesian Updating", *Journal of Structural Eng., ASCE*, Vol. 115, Nº 10, pp. 2528-2547.

Bazant, Z. P. e Liu, K.-L. (1985), "Random creep and shrinkage in structures: sampling", *Journal of Structural Eng., ASCE*, Vol. 111, Nº 5, pp. 1113-1134.

Bazant, Z. P. e Panula, L. (1978), "Practical prediction of time-dependent deformations of concrete", *RILEM Materials and Structures*, Vol. 11, Nº 65, pp. 307-328; Vol. 11, Nº 66, pp. 415-434; Vol. 12, Nº 69, pp. 169-183.

Bordadagua, F. e Ferreira, J. (1999), "Sistemas construtivos", 3as Jornadas de Estruturas de Betão, Porto.

Borst, R. (1991), "Computational methods in non-linear solid mechanics. Part 2: Physical Non-Linearity." Delft University of Technology.

Calavera Ruiz, J. e Hernández, D. Fernández-Ordóñez (2002), "Precast bridges in Europe", Seminário sobre pré-fabricação de estruturas de betão, Lisboa.

CEB, Comité Euro-International du Béton (1993), "CEB-FIP Model Code 1990", Thomas Telford.

CEN, Comité Européen de Normalisation (1991), "Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1: Regras gerais e regras para edifícios".

CEN, Comité Européen de Normalisation (2002), "Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1: General rules and rules for buildings".

CEN, Comité Européen de Normalisation (2003), "Eurocode 1: Actions on structures - Part 1: General actions - Thermal actions - English version".

Clark, L. A. e Sugie, I. (1997), "Serviceability limit state aspects of continuous bridges using precast concrete beams", Leicester.

Coutinho, A. S. e Gonçalves, A. (1994), "Fabrico e propriedades do betão", Lisboa, Edições LNEC.

DGC, Dirección General de Carreteras (2000), "Guía para la concepción de puentes integrales de carreteras", Madrid, M. d. Fomento.

DIANA, Finite Element Analysis (2002), "DIANA User's Manual release 8.1", Delft, The Netherlands, TNO Building and Construction Research. Department of Computational Mechanics.

England, G. L., Tsang, N. C. M. e Bush, D. I. (2000), "Integral bridges. A fundamental approach to the time-temperature loading problem", Thomas Telford.

Favre, R., Jaccoud, J.-P., Burdet, O. e Charif, H. (1997), "Dimensionement des structures en béton. Aptitude au service et elements de structures".

Feenstra, P. H. (1993), *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*, Ph. D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

FIB, Fédération Internationale du Béton. (1999), "Structural Concrete. Volume 1. Bulletin nº 1."

FIB, Fédération Internationale du Béton. (2000), "Guidance for good bridge design. Bulletin nº 9."

Figueiras, J. A. (1983), *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*, Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea.

Florian, A. (1992), "An efficient sampling scheme: updated latin hypercube sampling", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 7, pp. 123-130.

Hambly, E. C. e Nicholson, B. (1991), "Prestressed beam integral bridges." Prestressed Concrete Association, Leicester.

Hanson, N. W. (1960), "Precast-prestressed concrete bridges 2. Horizontal shear connections", *J. PCA Res. Devel. Lab*, Vol. 2, Nº 2, pp. 38-58.

Hastak, M., Mirmiran, A., Miller, R., Shah, R. e Castrodale, R. (2003), "State of practice for positive moment connections in prestressed concrete girders made continuous", *J. Bridge Engineering ASCE*, Vol. 8, Nº 5, pp. 267-272.

Henriques, A. A. R. (1998a), *Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento estrutural*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Henriques, A. A. R. (1998b), "Estatística. Cópias de acetatos", Departamento de Engenharia Civil - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Hilsdorf, H. K. (1995), "Concrete", Concrete structures euro-design handbook, Berlin, J. Eibl, Ernst & Sohn.

Jaafar, M. S. (1998), *Time-dependent analysis of continuous precast presstressed concrete beams*, Ph.D. Thesis, Sheffield University, Sheffield.

Kaar, P. H., Kriz, L. B. e Hognestad, E. (1960), "Precast-prestressed concrete bridges 1: Pilot tests of continuous girders", *J. PCA Res. Devel. Lab.*, Vol. 2, Nº 3, pp. 51-78.

Ma, Z., Huo, X., Tadros, M. K. e Baishya, M. (1998), "Restraint moments in precast/prestressed concrete continuous bridges", *PCI Journal*, Vol. 43, Nº 6, pp. 40-57.

Madsen, H. O. e Bazant, Z. P. (1983), "Uncertainty analysis of creep and shrinkage effects in concrete structures", *ACI Journal*, Vol. 80, Nº 2, pp. 116-127.

Martins, J. L. C. (2000), "Alguns exemplos de pré-fabricação em pontes e viadutos", 1º congresso nacional da indústria de pré-fabricação em betão, Porto.

Mathworld, http://mathworld.wolfram.com. (1999), "Woodbury Formula."

Mattock, A. H. e Kaar, P. H. (1960), "Precast-prestressed concrete bridges 3: Further tests of continuous girders", *J. PCA Res. Devel. Lab*, Vol. 2, Nº 2, pp. 21-37.

Mattock, A. H. e Kaar, P. H. (1961a), "Precast-prestressed concrete bridges 4: Shear tests of continuous girders", *J. PCA Res. Devel. Lab*, Vol. 3, Nº 1, pp. 19-46.

Mattock, A. H. e Kaar, P. H. (1961b), "Precast-prestressed concrete bridges 6: Test of half-scale highway bridge continuous over two spans", *J. PCA Res. Devel. Lab*, Vol. 3, Nº 3, pp. 30-70.

Mattock, A.H. (1961), "Precast-prestressed concrete bridges 5: Creep and shrinkage studies", *J. PCA Res. Devel. Lab*, Vol. 3, Nº 2, pp. 32-66.

Menn, Christian (1986), "Prestressed concrete bridges", Springer-Verlag.

Meyer, Julien (1997), "Deformation capacity of the concrete compression zone - Stress-strain curves for nonlinear calculation", *LACER*, pp. 87-102.

Miller, R., Castrodale, R., Mirmiran, A. e Hastak, M. (2003), "Connection between simple span precast concrete girders made continuous. Project 12-53 - Final report." National Research Council - Transportation Research Board, Washington, D. C.

Minderico, C. (1998), "Tabuleiros prefabricados de pontes com comportamento em serviço de estruturas contínuas", 2as Jornadas de Estruturas de Betão - Comportamento em Serviço de Estruturas de Betão, Porto.

Mirmiran, A., Kulkarni, S., Castrodale, R., Miller, R. e Hastak, M. (2001a), "Nonlinear continuity analysis of precast, prestressed concrete girders with cast-in-place decks and diaphragms", *PCI Journal*, pp. 60-80.

Mirmiran, A., Kulkarni, S., Castrodale, R., Miller, R., Hastak, M. e Shahrooz, B. (2001b), "Positive moment cracking in diaphragms of simple-span prestressed girders made continuous", Design and construction practices to mitigate cracking, United States.

Montaner, J., López, J., Lleyda, J. L. e Cruz, P. J. S. (2000), "Pontes pré-fabricadas com tabuleiro em caixão contínuo", 1º congresso nacional da indústria de pré-fabricação em betão, Porto.

Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (2003), "Applied statistics and probability for engineers", John Wiley & Sons, Inc.

Mumber, J., Foster, D. M., Lambert, E. D. e Saunders, C. A. (2003), "Ocean City-Longport replacement bridge requires precast concrete durability for Harsh marine conditions", *PCI Journal*, Vol. 48, Nº 6.

Oliveira, P. M. (2003), "Estatística", Departamento de Engenharia Civil - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Osterle, R. G., Gilkin, J. D. e Larson, S. C. (1989), "Design of precast-prestressed bridge girders made continuous. NCHRP Rep. Nº 322." National Research Council - Transportation Research Board, Washington, D. C.

PCI, Precast/Prestressed Concrete Institute (2001), "The state of the art of Precast/prestressed integral bridges".

Póvoas, R. (1991), *Modelos não lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia Civil da Universidade do Porto,

Pritchard, B. P. (1992), "Precast concrete beam continuity: benefits of continuity plus factory qualities", Bridge design for economy and durability. Concepts for new, strengthened and replacement bridges., Thomas Telford.

Pritchard, B. P. e Smith, A. J. (1991a), "Investigation of methods of achieving continuity in composite concrete bridge decks. Contractor Report 247." Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Crowthorn.

Pritchard, B. P. e Smith, A. J. (1991b), "A survey of composite concrete bridge decks made continuous. Contractor Report 294." Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Crowthorn.

REBAP, Regulamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado (1983), "Decreto-Lei nº 349-C/83, de 30 de Julho".

Reis, A. J. (1999), "Concepção de tabuleiros contínuos pré-fabricados", 3as jornadas de estruturas de betão - pré-fabricação em betão, Porto.

Rots, J. G. e Blaauwendraad, J. (1989), "Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?" *Heron*, Vol. 34, Nº 1.

RSA, Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (1983), "Decreto de lei nº 235/83", Lisboa, Imprensa Nacional - Casa da Moeda.

Saleh, M. A., Einea, A. e Tadros, M. K. (1995), "Creating continuity in precast girder bridges", *Concrete International*, Vol. 17, Nº 8, pp. 27-32.

Salmons, J. R. (1974), "End Connections of Pretensioned I-Beam Bridges. Final Report 73-5C." Missouri Cooperative Highway Research Program, Missouri State Highway Department, Missouri, 51 p.

Salmons, J. R. (1980), "Behaviour of untensioned-bonded prestressing strand. Final Report 77-1." Missouri Cooperative Highway Research Program, Missouri State Highway Department, Missouri, 73 p.

Santos, L. M. (2001), *Observação e análise do comportamento diferido de pontes de betão*, Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

Sesar, P., Velan, D., Tkalcic, D. e Krecak, A. (2004), "Construction of prestressed structure obove Kupa and Dobra Rivers on the Zagreb - Rijeka Motorway", Fib symposium 2004 - Concrete structures: the challenge of creativity, Avignon.

Shamir, E. (1999), "Restraint moments in precast/prestressed concrete continuous bridges - reader comments", *PCI Journal*, Vol. 44, Nº 3.

Sousa, C. F., Serra Neves, A., Ferreira, A. e Lello, J. C. (2002), "Ponte sobre o Rio Leça na Via Interna de Ligação ao Porto de Leixões. Concepção e execução", Encontro Nacional - Betão Estrutural 2002, Lisboa, LNEC.

Tadros, M. K., Ficenec, J. A., Einea, A. e Holdsworth, S. (1993), "A New Technique to create continuity in Prestressed Concrete Members", *PCI Journal*, Vol. 38, Nº 5, pp. 30-37.

Takács, P. F. (2002), *Deformations in concrete cantilever bridges: observations and theoretical modelling*, Doctoral Thesis, The Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.

Tsubaki, T. (1988), "Probabilistic models", Mathematical modelling of creep and shrinkage of concrete, Z. P. Bazant, John Wiley & Sons Ltd.

Vecchio, F. J. e Collins, M. P. (1986), "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear", *ACI Journal*, Vol. 83, Nº 22, pp. 219-231.

ANEXO A: Amostragem segundo o método do Hipercubo Latino. Tabelas auxiliares

Neste anexo incluem-se as tabelas elaboradas durante o processo de amostragem segundo o método do Hipercubo Latino. As tabelas apresentadas são relativas à simulação em foi considerado um comportamento linear para o betão traccionado, e cujos resultados se apresentam no Capítulo 7. Esta simulação inclui 99 cálculos ($N = 99$), com 9 variáveis aleatórias básicas ($K = 9$).

Tabela A-1 – Parâmetros representativos de cada intervalo.

intervalo (i)	$\frac{i-0.5}{N}$		X_1 HR [%]	X_2 f_{cm}^{Viga} [MPa]	X_3 f_{cm}^{Laje} [MPa]	X_4 $\Psi^{F\ Viga}$ adim.	X_5 $\Psi^{F\ Laje}$ adim.	X_6 $\Psi^{R\ Viga}$ adim.	X_7 $\Psi^{R\ Laje}$ adim.	X_8 T [ºC]	X_9 σ_P [MPa]
		μ	70	53	38	1	1	1	1	15	1372
		CV [%]	15	9.175	12.797	30	30	35	35	15	5
		σ	10.5	4.863	4.863	0.3	0.3	0.35	0.35	2.25	68.6
1	0.00505		42.990	40.491	25.491	0.2283	0.2283	0.0997	0.0997	9.212	1195.537
2	0.01515		47.256	42.466	27.466	0.3502	0.3502	0.2419	0.2419	10.126	1223.405
3	0.02525		49.466	43.490	28.490	0.4133	0.4133	0.3155	0.3155	10.600	1237.842
4	0.03535		51.023	44.211	29.211	0.4578	0.4578	0.3674	0.3674	10.933	1248.016
5	0.04545		52.248	44.779	29.779	0.4928	0.4928	0.4083	0.4083	11.196	1256.023
6	0.05556		53.271	45.252	30.252	0.5220	0.5220	0.4424	0.4424	11.415	1262.705
7	0.06566		54.156	45.662	30.662	0.5473	0.5473	0.4719	0.4719	11.605	1268.486
8	0.07576		54.941	46.025	31.025	0.5697	0.5697	0.4980	0.4980	11.773	1273.614
9	0.08586		55.650	46.354	31.354	0.5900	0.5900	0.5217	0.5217	11.925	1278.244
10	0.09596		56.298	46.654	31.654	0.6085	0.6085	0.5433	0.5433	12.064	1282.482
11	0.10606		56.899	46.932	31.932	0.6257	0.6257	0.5633	0.5633	12.193	1286.404
12	0.11616		57.459	47.192	32.192	0.6417	0.6417	0.5820	0.5820	12.313	1290.064
13	0.12626		57.986	47.436	32.436	0.6567	0.6567	0.5995	0.5995	12.425	1293.505
14	0.13636		58.484	47.666	32.666	0.6710	0.6710	0.6161	0.6161	12.532	1296.759
15	0.14646		58.957	47.885	32.885	0.6845	0.6845	0.6319	0.6319	12.634	1299.852
16	0.15657		59.409	48.095	33.095	0.6974	0.6974	0.6470	0.6470	12.730	1302.805
17	0.16667		59.842	48.295	33.295	0.7098	0.7098	0.6614	0.6614	12.823	1305.635
18	0.17677		60.259	48.488	33.488	0.7217	0.7217	0.6753	0.6753	12.913	1308.356
19	0.18687		60.660	48.674	33.674	0.7332	0.7332	0.6887	0.6887	12.999	1310.981
20	0.19697		61.049	48.854	33.854	0.7443	0.7443	0.7016	0.7016	13.082	1313.519
21	0.20707		61.425	49.029	34.029	0.7550	0.7550	0.7142	0.7142	13.163	1315.979
22	0.21717		61.791	49.198	34.198	0.7655	0.7655	0.7264	0.7264	13.241	1318.370
23	0.22727		62.147	49.363	34.363	0.7756	0.7756	0.7382	0.7382	13.317	1320.697
24	0.23737		62.495	49.524	34.524	0.7856	0.7856	0.7498	0.7498	13.392	1322.966
25	0.24747		62.834	49.681	34.681	0.7953	0.7953	0.7611	0.7611	13.464	1325.183
26	0.25758		63.166	49.835	34.835	0.8047	0.8047	0.7722	0.7722	13.536	1327.353
27	0.26768		63.492	49.986	34.986	0.8140	0.8140	0.7831	0.7831	13.605	1329.478
28	0.27778		63.811	50.133	35.133	0.8232	0.8232	0.7937	0.7937	13.674	1331.563
29	0.28788		64.124	50.279	35.279	0.8321	0.8321	0.8041	0.8041	13.741	1333.612
30	0.29798		64.433	50.422	35.422	0.8409	0.8409	0.8144	0.8144	13.807	1335.627
31	0.30808		64.736	50.562	35.562	0.8496	0.8496	0.8245	0.8245	13.872	1337.611
32	0.31818		65.036	50.701	35.701	0.8582	0.8582	0.8345	0.8345	13.936	1339.567
33	0.32828		65.331	50.838	35.838	0.8666	0.8666	0.8444	0.8444	14.000	1341.496
34	0.33838		65.623	50.973	35.973	0.8749	0.8749	0.8541	0.8541	14.062	1343.402
35	0.34848		65.911	51.106	36.106	0.8832	0.8832	0.8637	0.8637	14.124	1345.286
36	0.35859		66.196	51.238	36.238	0.8913	0.8913	0.8732	0.8732	14.185	1347.150
37	0.36869		66.479	51.369	36.369	0.8994	0.8994	0.8826	0.8826	14.246	1348.996
38	0.37879		66.759	51.499	36.499	0.9074	0.9074	0.8920	0.8920	14.306	1350.826
39	0.38889		67.037	51.628	36.628	0.9153	0.9153	0.9012	0.9012	14.365	1352.640
40	0.39899		67.312	51.755	36.755	0.9232	0.9232	0.9104	0.9104	14.424	1354.441
41	0.40909		67.586	51.882	36.882	0.9310	0.9310	0.9195	0.9195	14.483	1356.230
42	0.41919		67.858	52.008	37.008	0.9388	0.9388	0.9286	0.9286	14.541	1358.008
43	0.42929		68.129	52.134	37.134	0.9465	0.9465	0.9376	0.9376	14.599	1359.777
44	0.43939		68.399	52.258	37.258	0.9542	0.9542	0.9466	0.9466	14.657	1361.538
45	0.44949		68.667	52.383	37.383	0.9619	0.9619	0.9556	0.9556	14.714	1363.292
46	0.45960		68.935	52.507	37.507	0.9696	0.9696	0.9645	0.9645	14.772	1365.040
47	0.46970		69.202	52.630	37.630	0.9772	0.9772	0.9734	0.9734	14.829	1366.784
48	0.47980		69.468	52.754	37.754	0.9848	0.9848	0.9823	0.9823	14.886	1368.525
49	0.48990		69.734	52.877	37.877	0.9924	0.9924	0.9911	0.9911	14.943	1370.263
50	0.50000		70.000	53.000	38.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	15.000	1372.000

Tabela A-1 – Parâmetros representativos de cada intervalo (continuação).

intervalo (i)	$\frac{i-0.5}{N}$		X_1 HR [%]	X_2 f_{cm}^{Viga} [MPa]	X_3 f_{cm}^{Laje} [MPa]	X_4 $\Psi^{F\ Viga}$ adim.	X_5 $\Psi^{F\ Laje}$ adim.	X_6 $\Psi^{R\ Viga}$ adim.	X_7 $\Psi^{R\ Laje}$ adim.	X_8 T [ºC]	X_9 σ_P [MPa]
		μ	70	53	38	1	1	1	1	15	1372
		CV [%]	15	9.175	12.797	30	30	35	35	15	5
		σ	10.5	4.863	4.863	0.3	0.3	0.35	0.35	2.25	68.6
51	0.51010		70.266	53.123	38.123	1.0076	1.0076	1.0089	1.0089	15.057	1373.737
52	0.52020		70.532	53.246	38.246	1.0152	1.0152	1.0177	1.0177	15.114	1375.475
53	0.53030		70.798	53.370	38.370	1.0228	1.0228	1.0266	1.0266	15.171	1377.216
54	0.54040		71.065	53.493	38.493	1.0304	1.0304	1.0355	1.0355	15.228	1378.960
55	0.55051		71.333	53.617	38.617	1.0381	1.0381	1.0444	1.0444	15.286	1380.708
56	0.56061		71.601	53.742	38.742	1.0458	1.0458	1.0534	1.0534	15.343	1382.462
57	0.57071		71.871	53.866	38.866	1.0535	1.0535	1.0624	1.0624	15.401	1384.223
58	0.58081		72.142	53.992	38.992	1.0612	1.0612	1.0714	1.0714	15.459	1385.992
59	0.59091		72.414	54.118	39.118	1.0690	1.0690	1.0805	1.0805	15.517	1387.770
60	0.60101		72.688	54.245	39.245	1.0768	1.0768	1.0896	1.0896	15.576	1389.559
61	0.61111		72.963	54.372	39.372	1.0847	1.0847	1.0988	1.0988	15.635	1391.360
62	0.62121		73.241	54.501	39.501	1.0926	1.0926	1.1080	1.1080	15.694	1393.174
63	0.63131		73.521	54.631	39.631	1.1006	1.1006	1.1174	1.1174	15.754	1395.004
64	0.64141		73.804	54.762	39.762	1.1087	1.1087	1.1268	1.1268	15.815	1396.850
65	0.65152		74.089	54.894	39.894	1.1168	1.1168	1.1363	1.1363	15.876	1398.714
66	0.66162		74.377	55.027	40.027	1.1251	1.1251	1.1459	1.1459	15.938	1400.598
67	0.67172		74.669	55.162	40.162	1.1334	1.1334	1.1556	1.1556	16.000	1402.504
68	0.68182		74.964	55.299	40.299	1.1418	1.1418	1.1655	1.1655	16.064	1404.433
69	0.69192		75.264	55.438	40.438	1.1504	1.1504	1.1755	1.1755	16.128	1406.389
70	0.70202		75.567	55.578	40.578	1.1591	1.1591	1.1856	1.1856	16.193	1408.373
71	0.71212		75.876	55.721	40.721	1.1679	1.1679	1.1959	1.1959	16.259	1410.388
72	0.72222		76.189	55.867	40.867	1.1768	1.1768	1.2063	1.2063	16.326	1412.437
73	0.73232		76.508	56.014	41.014	1.1860	1.1860	1.2169	1.2169	16.395	1414.522
74	0.74242		76.834	56.165	41.165	1.1953	1.1953	1.2278	1.2278	16.464	1416.647
75	0.75253		77.166	56.319	41.319	1.2047	1.2047	1.2389	1.2389	16.536	1418.817
76	0.76263		77.505	56.476	41.476	1.2144	1.2144	1.2502	1.2502	16.608	1421.034
77	0.77273		77.853	56.637	41.637	1.2244	1.2244	1.2618	1.2618	16.683	1423.303
78	0.78283		78.209	56.802	41.802	1.2345	1.2345	1.2736	1.2736	16.759	1425.630
79	0.79293		78.575	56.971	41.971	1.2450	1.2450	1.2858	1.2858	16.837	1428.021
80	0.80303		78.951	57.146	42.146	1.2557	1.2557	1.2984	1.2984	16.918	1430.481
81	0.81313		79.340	57.326	42.326	1.2668	1.2668	1.3113	1.3113	17.001	1433.019
82	0.82323		79.741	57.512	42.512	1.2783	1.2783	1.3247	1.3247	17.087	1435.644
83	0.83333		80.158	57.705	42.705	1.2902	1.2902	1.3386	1.3386	17.177	1438.365
84	0.84343		80.591	57.905	42.905	1.3026	1.3026	1.3530	1.3530	17.270	1441.195
85	0.85354		81.043	58.115	43.115	1.3155	1.3155	1.3681	1.3681	17.366	1444.148
86	0.86364		81.516	58.334	43.334	1.3290	1.3290	1.3839	1.3839	17.468	1447.241
87	0.87374		82.014	58.564	43.564	1.3433	1.3433	1.4005	1.4005	17.575	1450.495
88	0.88384		82.541	58.808	43.808	1.3583	1.3583	1.4180	1.4180	17.687	1453.936
89	0.89394		83.101	59.068	44.068	1.3743	1.3743	1.4367	1.4367	17.807	1457.596
90	0.90404		83.702	59.346	44.346	1.3915	1.3915	1.4567	1.4567	17.936	1461.518
91	0.91414		84.350	59.646	44.646	1.4100	1.4100	1.4783	1.4783	18.075	1465.756
92	0.92424		85.059	59.975	44.975	1.4303	1.4303	1.5020	1.5020	18.227	1470.386
93	0.93434		85.844	60.338	45.338	1.4527	1.4527	1.5281	1.5281	18.395	1475.514
94	0.94444		86.729	60.748	45.748	1.4780	1.4780	1.5576	1.5576	18.585	1481.295
95	0.95455		87.752	61.221	46.221	1.5072	1.5072	1.5917	1.5917	18.804	1487.977
96	0.96465		88.977	61.789	46.789	1.5422	1.5422	1.6326	1.6326	19.067	1495.984
97	0.97475		90.534	62.510	47.510	1.5867	1.5867	1.6845	1.6845	19.400	1506.158
98	0.98485		92.744	63.534	48.534	1.6498	1.6498	1.7581	1.7581	19.874	1520.595
99	0.99495		97.010	65.509	50.509	1.7717	1.7717	1.9003	1.9003	20.788	1548.463

Tabela A-2 – Permutações dos inteiros 1, 2, …, 99 geradas aleatoriamente.

Cálculo	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	79	50	92	5	43	60	93	58	3
2	90	91	71	90	44	96	9	44	52
3	68	8	73	10	36	36	67	70	78
4	78	77	4	13	14	13	26	15	83
5	10	49	22	17	5	41	32	89	73
6	9	10	16	8	69	25	39	30	47
7	42	12	17	61	90	77	90	27	42
8	22	96	59	48	75	54	96	69	82
9	29	52	86	95	82	73	84	17	23
10	27	95	54	33	9	16	11	7	69
11	5	51	38	67	60	61	1	68	87
12	33	68	28	31	57	70	75	93	72
13	82	46	89	56	39	52	56	20	38
14	71	74	96	60	24	76	21	29	74
15	88	94	82	14	88	38	61	84	55
16	73	34	37	86	67	63	82	18	26
17	47	99	79	57	73	79	88	61	18
18	74	83	18	59	50	65	40	33	90
19	64	90	33	44	6	72	77	78	24
20	70	89	8	40	11	40	29	12	96
21	41	23	5	6	35	30	43	71	58
22	89	27	53	94	23	50	60	53	97
23	61	63	34	36	47	58	66	6	75
24	57	72	3	80	97	45	3	31	68
25	59	87	60	62	87	48	13	43	8
26	37	42	90	12	19	7	52	47	93
27	50	82	66	1	3	5	19	80	95
28	58	84	45	91	1	90	44	52	2
29	35	93	40	2	7	93	59	56	51
30	92	11	83	97	91	95	76	98	92
31	11	92	57	72	96	20	48	92	89
32	20	40	31	76	34	14	69	65	64
33	84	58	78	26	71	1	64	26	66
34	93	64	7	51	22	26	20	96	28
35	77	57	61	47	70	12	22	83	1
36	67	28	32	37	92	64	36	45	70
37	81	21	62	78	15	18	83	77	7
38	46	80	55	9	51	81	4	25	67
39	45	1	56	28	85	35	94	9	98
40	72	66	68	68	62	55	25	88	36
41	21	75	87	98	48	75	70	99	71
42	99	97	44	52	33	44	24	62	63
43	91	35	1	66	55	2	12	67	4
44	63	47	63	24	30	10	10	23	56
45	14	3	27	77	38	56	18	73	50
46	51	60	51	23	89	34	98	28	54
47	18	55	41	92	32	51	65	3	48
48	12	81	80	58	72	42	72	87	25
49	30	37	49	50	45	86	37	59	65
50	26	20	2	71	25	62	99	32	44

Tabela A-2 – Permutações dos inteiros 1, 2, …, 99 geradas aleatoriamente (continuação).

Cálculo	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
51	49	6	52	20	4	68	73	60	17
52	8	69	81	54	66	53	14	14	86
53	17	43	42	88	12	28	68	5	39
54	23	73	14	29	52	39	53	75	19
55	55	22	46	64	64	69	16	63	20
56	69	53	20	30	8	15	63	46	85
57	40	25	39	32	94	17	79	38	5
58	6	38	13	7	27	88	31	37	61
59	38	18	69	39	58	19	87	36	40
60	65	67	48	42	53	91	89	42	53
61	96	70	67	69	61	23	46	2	46
62	39	41	50	41	16	9	6	72	80
63	15	19	64	84	56	33	78	35	21
64	86	30	88	73	49	99	91	95	91
65	94	31	21	55	78	98	2	54	84
66	3	26	23	45	59	3	5	55	32
67	60	7	36	65	46	92	95	51	29
68	87	2	98	81	20	37	57	49	6
69	53	65	75	93	99	11	49	66	94
70	97	5	97	83	26	4	80	24	81
71	43	4	19	22	83	97	23	86	99
72	80	15	70	99	80	82	62	10	60
73	56	45	85	96	98	67	54	8	33
74	66	88	47	25	17	47	74	91	57
75	24	86	6	79	77	46	27	48	34
76	76	79	26	87	65	24	85	57	11
77	98	54	91	43	86	49	92	4	49
78	34	24	93	82	74	29	28	22	62
79	44	61	58	38	2	57	15	41	76
80	1	48	25	49	84	80	7	11	88
81	52	9	11	74	28	94	17	16	16
82	83	78	29	16	37	85	8	39	30
83	36	44	74	89	54	87	42	74	10
84	4	17	10	15	81	6	71	90	15
85	7	29	72	21	76	74	34	50	41
86	2	98	15	85	68	59	38	94	37
87	54	85	94	34	63	66	50	82	43
88	48	36	65	3	31	32	47	13	77
89	19	14	30	19	13	22	86	85	79
90	62	39	24	11	93	27	58	21	12
91	85	16	12	18	79	8	45	97	31
92	32	71	43	53	21	78	51	76	45
93	16	32	9	63	18	84	55	64	22
94	31	76	76	46	42	31	35	34	27
95	13	59	77	4	10	89	33	79	35
96	75	33	35	70	29	71	30	40	59
97	25	13	84	35	40	43	97	1	9
98	28	56	95	27	41	83	41	19	13
99	95	62	99	75	95	21	81	81	14

Tabela A-3 – Conjuntos de parâmetros de entrada gerados aleatoriamente para os diversos cálculos.

Cálculo	X_1 HR [%]	X_2 f_{cm}^{Viga} [MPa]	X_3 f_{cm}^{Laje} [MPa]	X_4 $\Psi^{F\ Viga}$ adim.	X_5 $\Psi^{F\ Laje}$ adim.	X_6 $\Psi^{R\ Viga}$ adim.	X_7 $\Psi^{R\ Laje}$ adim.	X_8 T [ºC]	X_9 σ_P [MPa]
1	78.575	53.000	44.975	0.4928	0.9465	1.0896	1.5281	15.459	1237.842
2	83.702	59.646	40.721	1.3915	0.9542	1.6326	0.5217	14.657	1375.475
3	74.964	46.025	41.014	0.6085	0.8913	0.8732	1.1556	16.193	1425.630
4	78.209	56.637	29.211	0.6567	0.6710	0.5995	0.7722	12.634	1438.365
5	56.298	52.877	34.198	0.7098	0.4928	0.9195	0.8345	17.807	1414.522
6	55.650	46.654	33.095	0.5697	1.1504	0.7611	0.9012	13.807	1366.784
7	67.858	47.192	33.295	1.0847	1.3915	1.2618	1.4567	13.605	1358.008
8	61.791	61.789	39.118	0.9848	1.2047	1.0355	1.6326	16.128	1435.644
9	64.124	53.246	43.334	1.5072	1.2783	1.2169	1.3530	12.823	1320.697
10	63.492	61.221	38.493	0.8666	0.5900	0.6470	0.5633	11.605	1406.389
11	52.248	53.123	36.499	1.1334	1.0768	1.0988	0.0997	16.064	1450.495
12	65.331	55.299	35.133	0.8496	1.0535	1.1856	1.2389	18.395	1412.437
13	79.741	52.507	44.068	1.0458	0.9153	1.0177	1.0534	13.082	1350.826
14	75.876	56.165	46.789	1.0768	0.7856	1.2502	0.7142	13.741	1416.647
15	82.541	60.748	42.512	0.6710	1.3583	0.8920	1.0988	17.270	1380.708
16	76.508	50.973	36.369	1.3290	1.1334	1.1174	1.3247	12.913	1327.353
17	69.202	65.509	41.971	1.0535	1.1860	1.2858	1.4180	15.635	1308.356
18	76.834	57.705	33.488	1.0690	1.0000	1.1363	0.9104	14.000	1461.518
19	73.804	59.346	35.838	0.9542	0.5220	1.2063	1.2618	16.759	1322.966
20	75.567	59.068	31.025	0.9232	0.6257	0.9104	0.8041	12.313	1495.984
21	67.586	49.363	29.779	0.5220	0.8832	0.8144	0.9376	16.259	1385.992
22	83.101	49.986	38.370	1.4780	0.7756	1.0000	1.0896	15.171	1506.158
23	72.963	54.631	35.973	0.8913	0.9772	1.0714	1.1459	11.415	1418.817
24	71.871	55.867	28.490	1.2557	1.5867	0.9556	0.3155	13.872	1404.433
25	72.414	58.564	39.245	1.0926	1.3433	0.9823	0.5995	14.599	1273.614
26	66.479	52.008	44.346	0.6417	0.7332	0.4719	1.0177	14.829	1475.514
27	70.000	57.512	40.027	0.2283	0.4133	0.4083	0.6887	16.918	1487.977
28	72.142	57.905	37.383	1.4100	0.2283	1.4567	0.9466	15.114	1223.405
29	65.911	60.338	36.755	0.3502	0.5473	1.5281	1.0805	15.343	1373.737
30	85.059	46.932	42.705	1.5867	1.4100	1.5917	1.2502	19.874	1470.386
31	56.899	59.975	38.866	1.1768	1.5422	0.7016	0.9823	18.227	1457.596
32	61.049	51.755	35.562	1.2144	0.8749	0.6161	1.1755	15.876	1396.850
33	80.591	53.992	41.802	0.8047	1.1679	0.0997	1.1268	13.536	1400.598
34	85.844	54.762	30.662	1.0076	0.7655	0.7722	0.7016	19.067	1331.563
35	77.853	53.866	39.372	0.9772	1.1591	0.5820	0.7264	17.177	1195.537
36	74.669	50.133	35.701	0.8994	1.4303	1.1268	0.8732	14.714	1408.373
37	79.340	49.029	39.501	1.2345	0.6845	0.6753	1.3386	16.683	1268.486
38	68.935	57.146	38.617	0.5900	1.0076	1.3113	0.3674	13.464	1402.504
39	68.667	40.491	38.742	0.8232	1.3155	0.8637	1.5576	11.925	1520.595
40	76.189	55.027	40.299	1.1418	1.0926	1.0444	0.7611	17.687	1347.150
41	61.425	56.319	43.564	1.6498	0.9848	1.2389	1.1856	20.788	1410.388
42	97.010	62.510	37.258	1.0152	0.8666	0.9466	0.7498	15.694	1395.004
43	84.350	51.106	25.491	1.1251	1.0381	0.2419	0.5820	16.000	1248.016
44	73.521	52.630	39.631	0.7856	0.8409	0.5433	0.5433	13.317	1382.462
45	58.484	43.490	34.986	1.2244	0.9074	1.0534	0.6753	16.395	1372.000
46	70.266	54.245	38.123	0.7756	1.3743	0.8541	1.7581	13.674	1378.960
47	60.259	53.617	36.882	1.4303	0.8582	1.0089	1.1363	10.600	1368.525
48	57.459	57.326	42.146	1.0612	1.1768	0.9286	1.2063	17.575	1325.183
49	64.433	51.369	37.877	1.0000	0.9619	1.3839	0.8826	15.517	1398.714
50	63.166	48.854	27.466	1.1679	0.7953	1.1080	1.9003	13.936	1361.538

Tabela A-3 – Conjuntos de parâmetros de entrada gerados aleatoriamente para os diversos cálculos (continuação).

Cálculo	X_1 HR [%]	X_2 f_{cm}^{Viga} [MPa]	X_3 f_{cm}^{Laje} [MPa]	X_4 $\Psi^{F\ Viga}$ adim.	X_5 $\Psi^{F\ Laje}$ adim.	X_6 $\Psi^{R\ Viga}$ adim.	X_7 $\Psi^{R\ Laje}$ adim.	X_8 T [ºC]	X_9 σ_P [MPa]
51	69.734	45.252	38.246	0.7443	0.4578	1.1655	1.2169	15.576	1305.635
52	54.941	55.438	42.326	1.0304	1.1251	1.0266	0.6161	12.532	1447.241
53	59.842	52.134	37.008	1.3583	0.6417	0.7937	1.1655	11.196	1352.640
54	62.147	56.014	32.666	0.8321	1.0152	0.9012	1.0266	16.536	1310.981
55	71.333	49.198	37.507	1.1087	1.1087	1.1755	0.6470	15.755	1313.519
56	75.264	53.370	33.854	0.8409	0.5697	0.6319	1.1174	14.772	1444.148
57	67.312	49.681	36.628	0.8582	1.4780	0.6614	1.2858	14.306	1256.023
58	53.271	51.499	32.436	0.5473	0.8140	1.4180	0.8245	14.245	1391.360
59	66.759	48.488	40.438	0.9153	1.0612	0.6887	1.4005	14.185	1354.441
60	74.089	55.162	37.754	0.9388	1.0228	1.4783	1.4367	14.541	1377.216
61	88.977	55.578	40.162	1.1504	1.0847	0.7382	0.9645	10.126	1365.040
62	67.037	51.882	38.000	0.9310	0.6974	0.5217	0.4424	16.326	1430.481
63	58.957	48.674	39.762	1.3026	1.0458	0.8444	1.2736	14.124	1315.979
64	81.516	50.422	43.808	1.1860	0.9924	1.9003	1.4783	18.804	1465.756
65	86.729	50.562	34.029	1.0381	1.2345	1.7581	0.2419	15.228	1441.195
66	49.466	49.835	34.363	0.9619	1.0690	0.3155	0.4083	15.286	1339.567
67	72.688	45.662	36.238	1.1168	0.9696	1.5020	1.5917	15.057	1333.612
68	82.014	42.466	48.534	1.2668	0.7443	0.8826	1.0624	14.943	1262.705
69	70.798	54.894	41.319	1.4527	1.7717	0.5633	0.9911	15.938	1481.295
70	90.534	44.779	47.510	1.2902	0.8047	0.3674	1.2984	13.392	1433.019
71	68.129	44.211	33.674	0.7655	1.2902	1.6845	0.7382	17.468	1548.463
72	78.951	47.885	40.578	1.7717	1.2557	1.3247	1.1080	12.064	1389.559
73	71.601	52.383	43.115	1.5422	1.6498	1.1556	1.0355	11.773	1341.496
74	74.377	58.808	37.630	0.7953	0.7098	0.9734	1.2278	18.075	1384.223
75	62.495	58.334	30.252	1.2450	1.2244	0.9645	0.7831	14.886	1343.402
76	77.505	56.971	34.835	1.3433	1.1168	0.7498	1.3681	15.401	1286.404
77	92.744	53.493	44.646	0.9465	1.3290	0.9911	1.5020	10.933	1370.263
78	65.623	49.524	45.338	1.2783	1.1953	0.8041	0.7937	13.241	1393.174
79	68.399	54.372	38.992	0.9074	0.3502	1.0624	0.6319	14.483	1421.034
80	42.990	52.754	34.681	0.9924	1.3026	1.2984	0.4719	12.193	1453.936
81	70.532	46.354	31.932	1.1953	0.8232	1.5576	0.6614	12.730	1302.805
82	80.158	56.802	35.279	0.6974	0.8994	1.3681	0.4980	14.365	1335.627
83	66.196	52.258	41.165	1.3743	1.0304	1.4005	0.9286	16.464	1282.482
84	51.023	48.295	31.654	0.6845	1.2668	0.4424	1.1959	17.936	1299.852
85	54.156	50.279	40.867	0.7550	1.2144	1.2278	0.8541	15.000	1356.230
86	47.256	63.534	32.885	1.3155	1.1418	1.0805	0.8920	18.585	1348.996
87	71.065	58.115	45.748	0.8749	1.1006	1.1459	1.0000	17.087	1359.777
88	69.468	51.238	39.894	0.4133	0.8496	0.8345	0.9734	12.425	1423.303
89	60.660	47.666	35.422	0.7332	0.6567	0.7264	1.3839	17.366	1428.021
90	73.241	51.628	34.524	0.6257	1.4527	0.7831	1.0714	13.163	1290.064
91	81.043	48.095	32.192	0.7217	1.2450	0.4980	0.9556	19.400	1337.611
92	65.036	55.721	37.134	1.0228	0.7550	1.2736	1.0089	16.608	1363.292
93	59.409	50.701	31.354	1.1006	0.7217	1.3530	1.0444	15.815	1318.370
94	64.736	56.476	41.476	0.9696	0.9388	0.8245	0.8637	14.062	1329.478
95	57.986	54.118	41.637	0.4578	0.6085	1.4367	0.8444	16.837	1345.286
96	77.166	50.838	36.106	1.1591	0.8321	1.1959	0.8144	14.424	1387.770
97	62.834	47.436	42.905	0.8832	0.9232	0.9376	1.6845	9.212	1278.244
98	63.811	53.742	46.221	0.8140	0.9310	1.3386	0.9195	12.999	1293.505
99	87.752	54.501	50.509	1.2047	1.5072	0.7142	1.3113	17.001	1296.759