

**MÉTODOS SEM MALHA EM PROBLEMAS
DE MECÂNICA COMPUTACIONAL.
APLICAÇÃO A PROCESSOS DE
ENFORMAÇÃO PLÁSTICA**

Cristina Maria C. F. de Faria Miranda Guedes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORAMENTO EM CIÊNCIAS
DE ENGENHARIA

Porto, Julho de 2006

MÉTODOS SEM MALHA EM PROBLEMAS DE MECÂNICA COMPUTACIONAL. APLICAÇÃO A PROCESSOS DE ENFORMAÇÃO PLÁSTICA

Cristina Maria C. F. de Faria Miranda Guedes

Tese submetida para obtenção do grau de
Doutor em Ciências de Engenharia pela Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto
realizada sob a orientação do
Prof. Doutor José M. A. César de Sá

RESUMO

Os métodos sem malha têm tido um desenvolvimento acentuado nos últimos anos, surgindo como uma alternativa ao tradicional método dos elementos finitos, em diversas áreas da Engenharia. Nesse contexto, neste trabalho estuda-se a aplicabilidade do método sem malha *Element Free Galerkin* (EFG) para simulação numérica de processos de enformação plástica.

Estes métodos podem ser considerados uma nova geração de métodos numéricos que se caracterizam basicamente pelo seguinte: discretização de um domínio de interesse por um conjunto de nós, colocados arbitrariamente, sem que exista explicitamente uma malha estruturada de elementos, no sentido convencional, definindo funções de aproximação em termos dos nós da discretização. Sucintamente, o método EFG consiste em definir funções de forma baseadas no método dos mínimos quadrados móveis as quais são incorporadas numa formulação de Galerkin da equação variacional, associada ao problema particular em estudo.

Neste estudo utiliza-se o método EFG para fazer uma análise de processos de enformação plástica em que se considera uma aproximação baseada na formulação do escoamento plástico para materiais incompressíveis. Na implementação numérica detalham-se diversos aspectos com o objectivo de ilustrar as principais diferenças com a habitual utilização do método dos elementos finitos. De entre estes, destacam-se: construção das funções de forma, imposição das condições de fronteira e a formulação proposta para tratamento do atrito na zona de contacto entre a peça e a matriz.

São estudados alguns exemplos de aplicações em forjamento conjuntamente

com uma implementação numérica através dos elementos finitos para efeitos comparativos. Os resultados obtidos são comparados com valores experimentais e valores publicados na literatura.

Palavras chave: métodos sem malha, EFG, formulação de Galerkin, enformação plástica.

MESHLESS METHODS IN COMPUTATIONAL MECHANICS PROBLEMS. APPLICATION TO PLASTIC FORMING PROCESSES

Cristina Maria C. F. de Faria Miranda Guedes

PhD thesis supervised by
Prof. Doutor José M. A. César de Sá

ABSTRACT

The meshless methods have had a great development in the last years, appearing as an alternative to the finite element method in several engineering areas. In this work, the applicability of the meshless method Element Free Galerkin (EFG) for plastic forming processes is studied.

These methods can be considered a new generation of numerical methods that are characterized basically by the following: discretization of an interest domain by a set of nodes, localized arbitrarily without using a structured mesh of elements (element mesh), in the conventional sense and defining approximating functions only through the discretization nodes. Briefly, the EFG method defines shape functions based on the moving least squares method, which are incorporated on the Galerkin formulation of the variational equation, associated with the particular problem addressed.

In this work, EFG method was evaluated to analyze plastic forming processes by using an approximation based on the flow formulation for incompressible materials. In the numerical implementation, different aspects were detailed for illustrative purposes in order to enlighten the main differences between EFG and the classical finite element method approaches. The most significant among them are: construction of shape functions, imposition of the essential boundary conditions and the proposed formulation to deal with frictional effects along the contact interface between the matrix and the workpiece.

Some examples of application in forging are analyzed together with a numerical implementation by the finite element method for comparative purposes. The obtained results are compared with experimental values and values published in the literature.

Keywords: meshless methods, meshfree methods, EFG, Element Free Galerkin,

Galerkin formulation, plastic metal forming.

MÉTHODES SANS MAILLAGE DANS DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE COMPUTATIONNELLE. APPLICATION AUX PROCÉDÉS DE MISE EN FORME PLASTIQUE

Cristina Maria C. F. de Faria Miranda Guedes

directeur de thèse

Prof. Doutor José M. A. César de Sá

RESUME

Les méthodes sans maillage ont eu un grand développement, devenant dans les dernières années une alternative à la méthode d'éléments finis dans plusieurs secteurs d'ingénierie. Dans ce travail la validité d'application de la méthode sans maillage, EFG, pour les procédés de mise en forme plastique a été étudiée.

Ces méthodes peuvent être considérées une nouvelle génération de méthodes numériques qui sont fondamentalement caractérisées par le suivant: discrétisation d'un domaine d'intérêt par une série de noeuds, localisés arbitrairement sans utiliser un maillage d'éléments structurés, dans le sens conventionnel et définition des fonctions approximatives à partir seulement des noeuds de discrétisation. Succinctement, la méthode de EFG définit les fonctions de forme basées sur la méthode de moindres carrés mouvants, qui sont incorporées sur la formulation de Galerkin de l'équation variationnel.

Dans ce travail, cette méthode de EFG a été évaluée pour analyser les procédés de mise en forme plastique en utilisant une approximation basée sur la formulation de flux pour les matériaux incompressibles. Dans l'implémentation numérique, les différents aspects ont été détaillés pour des buts explicatifs afin d'éclairer les différences principales entre EFG et les approches de méthode d'éléments finis classiques. Le plus significatif parmi eux: la construction de fonctions de forme, l'implémentation des conditions limite essentielles et la formulation proposée pour traiter des effets de friction le long de l'interface de contact entre la matrice et la pièce de fabrication.

On présente quelques exemples d'application de forgeage pour montrer l'application du modèle développe. Ces exemples on été aussi analysés avec une implémentation numérique par la méthode des éléments finies pour des buts

comparatifs. Les résultats obtenus sont comparés avec des valeurs expérimentales et des valeurs publiés dans la littérature.

Mots clés: Méthodes sans maillage, Méthode EFG, formulation de Galerkin, mise en forme plastique des métaux .

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objectivos	1
1.2	Apresentação da tese	2
2	Métodos sem malha: Estado da Arte	4
2.1	Introdução	4
2.2	Métodos sem malha	10
2.3	Imposição das condições de fronteira do tipo essencial	13
2.4	Noções fundamentais na formulação dos métodos sem malha . . .	14
2.4.1	Funções de peso	14
2.4.2	Consistência	19
2.4.3	Partição da unidade	20
2.5	<i>Smoothed Particle Method</i> (SPH)	20
2.5.1	Conceitos básicos do método SPH	21
2.5.2	Formulação SPH	22

2.6	<i>Reproduced Kernel Particle Method</i> (RKPM)	24
2.7	Aproximações baseadas no método dos mínimos quadrados	28
2.7.1	Método dos mínimos quadrados	30
2.7.2	Método dos mínimos quadrados ponderados	31
2.7.3	Método dos mínimos quadrados móveis	31
2.7.4	Método de Shepard	35
2.7.5	Relação entre o interpolador de Shepard e o método dos mínimos quadrados móveis	35
2.8	<i>Element Free Galerkin</i> (EFG)	36
2.8.1	Formulação EFG	37
2.8.2	Propriedades do método EFG	42
2.9	Método Petrov-Galerkin Local (MLPG)	44
2.10	Método da Partição da Unidade (PUM)	46
2.10.1	Método dos Elementos Finitos Generalizado (GFEM)	48
2.10.2	Método das nuvens HP (HP-Clouds)	50
2.11	Método do Elemento Natural (NEM)	51
2.12	Método dos Pontos Finitos (FPM)	54
2.13	Funções de base radial (RBF)	55
2.14	Aspectos relevantes na implementação numérica dos métodos sem malha	57
2.14.1	Imposição das condições de fronteira essenciais	57

2.14.2	Integração numérica	58
3	Exemplos Numéricos em Problemas Lineares	61
3.1	Aplicação do método EFG à equação de Poisson	62
3.1.1	Formulação variacional para a equação de Poisson	62
3.1.2	Imposição das condições de fronteira do tipo essencial . . .	63
3.1.3	Resolução da equação de Poisson pelo método EFG	67
3.1.4	Resolução de uma equação de Laplace $2D$ pelo método EFG	70
3.2	Equações para elasticidade bidimensional	75
3.2.1	Equações de equilíbrio	75
3.2.2	Formulação variacional	75
3.2.3	Aplicação ao caso de uma viga em consola com tensão tangencial parabólica na extremidade livre	80
3.2.4	Aplicação a um caso de uma placa infinita com orifício circular central	88
4	Aplicação do Método sem Malha EFG na Simulação de Processos de Enformação Plástica	95
4.1	Introdução	95
4.2	Modelo constitutivo para o escoamento plástico	97
4.2.1	Imposição da condição de incompressibilidade	98
4.2.2	Imposição das condições de fronteira	100
4.2.3	Formulação do escoamento plástico	101

4.3	Tratamento do contacto e do atrito	104
4.3.1	Modelação do contacto	104
4.3.2	Modelação do atrito	105
4.3.3	Elementos de contacto	106
4.4	Sistema final	112
4.4.1	Integração Numérica	114
4.4.2	Resolução do sistema de equações	116
5	Aplicações e Exemplos	120
5.1	Introdução	120
5.2	Exemplos Numéricos	124
5.2.1	Exemplo 1: Compressão de um cilindro metálico	124
5.2.2	Exemplo 2: Compressão de um varão metálico semi-encastado	141
5.2.3	Exemplo 3: Compressão de um varão oco metálico semi- encastado	151
6	Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimento	163
6.1	Síntese e Conclusões do Trabalho Desenvolvido	163
6.2	Propostas de Trabalho Futuro:	165
7	Nomenclatura	167

Lista de Figuras

2.1	Representação da função de peso $w(\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_I\)$ <i>spline</i> cúbica, em que se considerou $\mathbf{x}_I = (0, 0)$	18
2.2	Ilustração de domínios de influência no caso bidimensional. A lista de vizinhos para \mathbf{x} inclui os nós 1, 2 e 4 dado que os domínios de influência destes contêm o ponto \mathbf{x} ; os nós 1, 2 e 4 são usados para definir a aproximação em \mathbf{x} . O nó 3 é excluído da lista.	39
2.3	Construção de vizinhos naturais: (a) diagrama de Voronoi original; (b) células de Voronoi de ordem 1 e ordem 2 para o ponto \mathbf{x}	54
3.1	Representação das distribuições nodais consideradas na análise do problema, respectivamente para $6 \times 11 = 66$, $11 \times 11 = 121$ e $11 \times 21 = 231$ nós.	72
3.2	Solução analítica da equação de Laplace (eq. 3.43).	73
3.3	Solução numérica obtida para o caso 1: ($6 \times 11 = 66$ nós).	73
3.4	Solução numérica obtida para o caso 2: ($11 \times 11 = 121$ nós).	74
3.5	Solução numérica obtida para o caso 3: ($11 \times 21 = 231$ nós).	74
3.6	Problema de valor na fronteira elastostático.	76
3.7	Exemplo de um problema bidimensional-viga em consola.	83

3.8	Discretização nodal para o modelo da viga em consola (105 nós).	83
3.9	Deslocamento horizontal u_x no topo da viga.	85
3.10	Deslocamento vertical u_y no topo da viga.	85
3.11	Tensão normal σ_{xx} no topo da viga. I é o momento de inércia e P a carga aplicada.	86
3.12	Tensão de corte σ_{xy} em $x = L/2$ no exemplo da viga.	86
3.13	Tensão normal σ_{xx} em $x = L/2$ no exemplo da viga.	87
3.14	Geometria de uma placa com orifício central; tracção e corte são prescritos de acordo com a solução da placa infinita.	91
3.15	Caso 1: distribuição nodal do tipo I (99 nós).	92
3.16	Caso 2: distribuição nodal do tipo I (135 nós).	92
3.17	Caso 3: distribuição nodal do tipo II (101 nós).	93
3.18	Caso 4: distribuição nodal do tipo II (361 nós).	93
3.19	Tensão normal σ_{11} em $x = 0$ para o problema da placa com um orifício circular central. As distribuições nodais consideradas nesta solução correspondem às das figuras 3.15 e 3.16.	94
3.20	Tensão normal σ_{11} em $x = 0$ para o problema da placa com um orifício circular central. As distribuições nodais consideradas nesta solução correspondem às das figuras 3.17 e 3.18.	94
4.1	Elemento de interface 2D.	108
4.2	Elemento de contacto.	108
4.3	Elemento quadrilátero linear.	119

5.1	Exemplificação de domínios de influência circular do tipo A ($k = 3$ e $d_{max} = 2, 0$).	122
5.2	Exemplificação de domínios de influência circular do tipo B ($n_I = 20$).	122
5.3	Compressão de um cilindro metálico. Geometria inicial e discretização nodal não uniforme.	125
5.4	Evolução das cargas calculadas no topo e das reacções na base da peça pelo método EFG, para os 3 casos analisados num domínio do tipo A ($m_f = 0, 0$). Considerou-se respectivamente $npq = 4$ e $npq = 16$	131
5.5	Evolução das cargas calculadas no topo e das reacções na base da peça pelo método EFG, para os 3 casos analisados num domínio do tipo B ($m_f = 0, 0$). Considerou-se respectivamente $npq = 4$ e $npq = 16$	132
5.6	Evolução do erro relativo das carga de enformação, calculadas pelo método EFG para os 3 casos analisados em cada um dos domínio de influência. Considerou-se: $m_f = 0, 0$, $npq = 16$ e a solução obtida pelo MEF como referência para o cálculo do erro.	133
5.7	Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou um domínio de influência do tipo A ($k = 4; d_{max} = 2, 5$) com $m_f = 1, 0$	134
5.8	Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou um domínio de influência do tipo A ($k = 4; d_{max} = 3, 0$) com $m_f = 1, 0$	135
5.9	Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou $N_I = 22$ e $m_f = 1, 0$.	136
5.10	Forma inicial da peça.	137

5.11	Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG e pelo MEF para o seguinte valor de atrito: $m_f = 0,0$	137
5.12	Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG e pelo MEF para o seguinte valor de atrito: $m_f = 1,0$	138
5.13	Geometrias correspondentes a uma redução em altura igual a 50% obtidas respectivamente pelo método EFG e pelo MEF, em que se considerou $m_f = 1,0$	138
5.14	Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG para $m_f = 1,0$	139
5.15	Deformação efectiva para uma redução em altura de 50% ($m_f = 1,0$) obtida pelo método EFG.	140
5.16	Deformação efectiva para uma redução em altura de 50% ($m_f = 1,0$) obtida pela solução MEF.	140
5.17	Compressão de um varão metálico semi-encastado. Geometria inicial e discretização nodal.	142
5.18	Evolução das carga de enformação em função da percentagem de redução em altura. Valores calculados e experimentais. A_0 —Área inicial da peça em contacto com a matriz superior A —Área da peça em contacto com a matriz superior no instante considerado.	145
5.19	Evolução do perfil geométrico da superfície da peça em contacto com a matriz superior em função da redução em altura. Valores calculados e experimentais.	146

- 5.20 Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 30%, c) 45%, d) 60%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$. Em cada geometria a parte esquerda representa a solução obtida pelo método MEF e parte direita pelo método EFG. 147
- 5.21 Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 30%, c) 45%, d) 60%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,0$ 148
- 5.22 Campo de deformação efectiva obtido para o MEF e EFG, respectivamente no instante correspondente a 15% e 30% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$ 149
- 5.23 Campo de deformação efectiva obtido para o MEF e EFG, respectivamente no instante correspondente a 45% e 60% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$ 150
- 5.24 Compressão de um varão oco metálico semi-encastado. Geometria inicial e discretização nodal. 152
- 5.25 Evolução das carga de enformação em função da percentagem de redução em altura. Valores calculados e experimentais. 155
- 5.26 Evolução do perfil geométrico da superfície exterior da peça em contacto com a matriz superior quantificada pela variação do raio exterior. Valores calculados e experimentais. 156
- 5.27 Evolução do perfil geométrico da superfície da peça em contacto com a matriz superior quantificada pela variação do raio interior. Valores calculados e experimentais. 156

5.28	Evolução das cargas de enformação em função da percentagem de redução em altura, para uma situação em que os factores de atrito entre a peça e a ferramenta correspondem ao caso 3.	157
5.29	Evolução do raio exterior da peça na zona de contacto com a matriz superior. Valores obtidos pelo MEF e pelo EFG para o caso 3. . .	158
5.30	Evolução do raio interior da peça na zona de contacto com a matriz superior. Valores obtidos pelo MEF e pelo EFG para o caso 3. . .	158
5.31	Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 35%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,5$. Em cada geometria a parte esquerda representa a solução obtida pelo método MEF e parte direita pelo método EFG.	159
5.32	Geometria da peça, nas condições descritas na figura anterior (fig. 5.32), no instante correspondente a 55% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão.	160
5.33	Campo de deformação efectiva, respectivamente para o MEF e EFG no instante correspondente a 15% e 35% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,5$	161

Lista de Tabelas

3.1	Erro relativo R_u para a equação de Laplace.	72
3.2	Comparação dos valores obtidos para o quociente de deflexão no estudo feito para o exemplo da viga. Os valores assinalados com * foram retirados da referência [14].	84

Agradecimentos

Ao Professor César de Sá, pela disponibilidade constante durante este trabalho e o excelente dom que tem em transmitir o gosto pelo saber e pelo rigor. Durante o desenvolvimento da tese, apercebi-me que neste processo de aprendizagem, para além da vertente científica e técnica, há muitos outros aspectos, não menos importantes, cruciais para quem quer fomentar o conhecimento. Foi muito enriquecedor ter tido um orientador que sempre deu o bom exemplo nesse sentido, valorizando o trabalho das outras pessoas, não se limitando apenas àqueles que colaboram directamente com ele, sendo particularmente construtivo e dinamizador relativamente aos investigadores e alunos mais novos.

A todos os colegas da secção de Matemática o incentivo e apoio que sempre me dispensaram. Durante este percurso houve algumas pessoas da secção que me ajudaram em situações pontuais. Acreditaram em mim, tiveram atitudes e gestos ao nível do estímulo, de confiança e evitando claramente criar situações de mal estar e de desconforto pessoal. Não vou nomear nomes, acho desnecessário e não o faço por ingratidão mas porque estou convencida que o grande agradecimento é sempre aquele que acontece quando nos cruzamos.

À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, muito em especial ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e à secção de Matemática agradeço a dispensa de serviço concedida bem como as condições e os recursos disponibilizados.

Ao CENUME - Unidade de Métodos Numéricos em Mecânica e Engenharia Estrutural a estadia e participação do autor em conferências nacionais e internacionais.

À Fernanda Grandão pelo seu apoio no secretariado, boa vontade e disponibilidade constante para ajudar.

À Joana, cujo percurso profissional começou comigo, aqui na FEUP, no CICA

em que partilhamos o gabinete e trabalhamos conjuntamente durante seis anos. Alterado o rumo, ficou o que é verdadeiramente importante, a amizade. Os pequenos intervalos para o café e o almoço semanal permitiram tantas vezes recuperar forças e seguir em frente com optimismo.

Aos meus amigos, que sempre tiveram disponibilidade para os jantares de sábado e para as nossas tertúlias, que foram sem dúvida uma fonte de energia.

Aos meus pais, pelo seu apoio incondicional e pelo seu incentivo.

Ao Rui, pelo constante encorajamento, pela motivação, pelos momentos de ternura e partilha, fundamentais na dia a dia e sem os quais teria sido bem mais difícil chegar ao fim deste trabalho com tanta satisfação.

À minha família

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivos

O objectivo principal desta tese é o estudo da aplicabilidade do método sem malha EFG (*Element Free Galerkin*) para simulação numérica de processos de enformação plástica. Desde há muito tempo que o método dos elementos finitos é desenvolvido e aplicado de forma exaustiva na área da simulação de processos de enformação plástica. De uma forma geral, este tem-se revelado robusto, versátil e contribuiu sem dúvida, de forma decisiva para o desenvolvimento da tecnologia da deformação plástica. Uma das grandes vantagens do método dos elementos finitos, relativamente a outros métodos emergentes relaciona-se com o facto de existir no mercado uma grande variedade de programas comerciais muito bem consolidados. Nos últimos anos, as novas tecnologias computacionais e a existência de equipamentos informáticos com elevada capacidade permitiu um avanço significativo no desenvolvimento e optimização de programas de elementos finitos para simulação numérica de processos de enformação plástica, quer seja no caso bidimensional ou tridimensional. O aparecimento de novos métodos, designados por métodos sem malha para resolução numérica de equações em derivadas parciais, e que tiveram um desenvolvimento muito significativo nos últimos anos, tem sido visto como uma alternativa promissora, em diversas

áreas ao método dos elementos finitos. Como tal, parece sugestivo averiguar a viabilidade destes métodos na enformação plástica e a sua competitividade face ao convencional método dos elementos finitos.

1.2 Apresentação da tese

A presente tese encontra-se dividida em 6 capítulos incluindo esta introdução.

No capítulo 2 faz-se um estudo global sobre métodos sem malha e características principais dos diferentes métodos. A partir da exploração efectuada para os vários métodos é apresentada uma descrição sucinta para os mais relevantes. Alguns aspectos fundamentais são abordados, tais como a imposição de condições de fronteira, técnicas de integração numérica e escolha de funções de peso. Este capítulo corresponde ao trabalho feito numa fase inicial, mas crucial no desenvolvimento do programa de doutoramento.

No capítulo 3, a partir do levantamento feito no capítulo anterior, opta-se por seleccionar o método EFG, razão pela qual houve um enfoque neste método. Foi feito um estudo numérico para alguns testes de referência no caso bidimensional, em particular para problemas de elasticidade, cuja solução analítica é conhecida. O principal objectivo deste estudo numérico foi consolidar conceitos, validar o código desenvolvido e comparar os resultados obtidos com os existentes na literatura.

No capítulo 4 desenvolve-se um modelo baseado no método EFG para analisar de processos de enformação plástica. Considerou-se a formulação de escoamento plástico para materiais incompressíveis. As formulações baseadas nos métodos sem malha, aplicadas a processos de enformação plástica, levantaram novas questões em aspectos cruciais, tais como: construção das funções de forma, imposição das condições de fronteira do tipo essencial e tratamento do contacto e do atrito na zona de contacto entre as peças e as ferramentas. Na formulação desenvolvida, detalharam-se estes aspectos com o objectivo de ilustrar as principais diferenças com a habitual utilização do método dos elementos finitos.

Para tratar o problema do contacto e do atrito apresenta-se um novo modelo proposto, que considera uma interface de elementos entre a peça e a ferramenta, acoplando o método dos elementos finitos com o método sem malha EFG numa formulação mista.

No capítulo 5 apresentam-se alguns exemplos numéricos de aplicações em forjamento, obtidos a partir do programa que foi desenvolvido, de raíz, em linguagem Matlab. Conjuntamente, também foi implementado, de raíz, em Matlab, a simulação numérica dos exemplos apresentados, através do método dos elementos finitos. São feitas comparações dos resultados obtidos com os apresentados por outros autores usando soluções através do método dos elementos finitos ou ainda resultados experimentais.

Finalmente, no capítulo 6 faz-se uma análise aos resultados obtidos e são apresentadas as principais conclusões referentes ao trabalho desenvolvido, sendo igualmente apresentadas algumas propostas para a sua continuação e refinamento.

Capítulo 2

Métodos sem malha: Estado da Arte

2.1 Introdução

Em muitos problemas de Engenharia, nomeadamente em aplicações industriais, em que o tempo é um parâmetro crítico e a eficiência tem de ser equilibrada com a precisão, a simulação numérica tem um papel fundamental, até porque é vantajosa em termos económicos. Nos últimos 30 anos, houve um desenvolvimento significativo nesta área e a evolução na tecnologia computacional teve um papel crucial neste progresso.

Para resolução numérica de equações diferenciais (PDEs), associados à Mecânica Computacional, consideram-se basicamente três grupos clássicos de métodos numéricos,

- Métodos das diferenças finitas
- Métodos de volumes finitos
- Métodos dos elementos finitos

A resolução de equações diferenciais pelo método das diferenças finitas permite obter uma aproximação da solução num conjunto de pontos do domínio. A extensão da solução para outros pontos nem sempre é óbvia ou mesmo possível. O métodos de volumes finitos e o método dos elementos finitos, ambos recorrem a uma malha de elementos e permitem obter uma função que aproxima a solução em todo o domínio.

De entre os métodos indicados, destaca-se o método dos elementos finitos, que tem sido aplicado de forma exaustiva a uma grande variedade de problemas de diversas áreas da Ciência. O desenvolvimento do método dos elementos finitos, iniciou-se na última metade do século passado e é difícil de identificar o seu precursor. Durante muito tempo, o método dos elementos finitos e técnicas directamente relacionadas foram simplesmente referidos como métodos em mecânica dos sólidos e mecânica dos fluidos. Apesar do método dos elementos finitos ter uma grande aplicabilidade e ser considerado muito robusto ainda há problemas com perfil muito específico que não são resolvidos eficientemente por este método, tais como: geometrias complexas, geometrias móveis ao longo do tempo, descontinuidades do domínio, grandes deformações, deformação localizada e necessidade de refinamento e remalhamento o que encarece a solução do ponto de vista computacional.

Para Bathe [11], nos próximos anos um dos grandes desafios, entre outros, ao nível da modelação numérica e matemática, é o desenvolvimento de um método sem malha que seja eficiente e generalista para a mecânica dos sólidos e dos fluidos. Os métodos sem malha, tal como o clássico método dos elementos finitos, são métodos de aproximação numérica para resolução numérica de equações diferenciais. Os métodos sem malha recorrem a novas metodologias de aproximação, pressupondo a discretização do domínio por nós colocados arbitrariamente sem que exista qualquer tipo de interligação topológica entre estes. Como tal, as novas metodologias de aproximação usadas permitem definir as funções de aproximação unicamente em termos dos nós. Os métodos sem malha têm sido vistos como alternativa de resolução a alguns problemas da mecânica computacional que o tradicional método dos elementos finitos não resolve adequadamente. A grande expectativa que tem havido relativamente

a estes métodos relaciona-se com o facto de estes eliminarem ou reduzirem significativamente o uso de uma malha no sentido clássico e a possibilidade de definir funções de aproximação locais não necessariamente polinomiais.

Estes métodos tornaram-se alvo de crescente interesse e desenvolvimento, desde os anos 70, tendo-se acentuado nos últimos anos. Relativamente a técnicas sem malha, um trabalho pioneiro sobre estado da arte foi apresentado por Belytschko *et al.* [13] e que ainda hoje é considerado de certa forma carismático. Posteriormente surgiram diversos trabalhos sobre estado da arte, artigos de revisão e livros, destacando-se as seguintes referências [13, 64, 69, 2, 49, 5, 45, 63, 54, 65].

Uma grande parte dos problemas em mecânica computacional envolve em determinada fase do processo a resolução numérica de uma equação diferencial ou sistema de equações em derivadas parciais (PDE). Suponhamos que o problema em estudo, definido num domínio Ω é caracterizado pela seguinte equação diferencial:

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (2.1)$$

em que \mathcal{L} é por simplicidade um operador diferencial linear e f uma função conhecida. Suponhamos ainda que à equação anterior se associa um conjunto de condições fronteira representadas numa forma geral, por

$$\mathcal{A}u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.2)$$

e

$$\mathcal{A}u = k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_t, \quad (2.3)$$

em que \mathcal{A} é, por hipótese, também um operador linear, \bar{u} e \bar{q} são respectivamente os valores prescritos da função u e da sua derivada. Suponhamos também que a fronteira do domínio Ω é representada por Γ em que $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$. De uma forma geral o que se pretende obter é uma função que aproxima a solução do problema

no domínio Ω e que verifique as condições de fronteira referidas.

Considere-se uma função ψ que satisfaça as condições fronteira, i.e.,

$$A\psi = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.4)$$

e um conjunto de funções Φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$\mathcal{A}\Phi_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.5)$$

Considere-se então a seguinte função u^h :

$$u^h = \psi + \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i, \quad (2.6)$$

que satisfaz as condições de fronteira do problema e aproxima a solução u , i.e.

$$u \approx u^h. \quad (2.7)$$

As funções Φ_i designam-se em geral por funções tentativa. Os coeficientes a_i devem então ser determinados por forma a se obter uma solução aproximada u^h para u , existindo processos diferentes para os determinar.

A partir da equação (2.6) podem-se obter diferentes aproximações para a solução da equação (2.1). A determinação de uma solução específica para (2.6) depende do princípio de discretização que se vai usar [6]. Alguns princípios de discretização mais utilizados, como por exemplo, o método dos elementos finitos são baseados no método dos resíduos ponderados. O método dos resíduos ponderados adquiriu o estatuto de método simples e eficaz para a construção de modelos de aproximação dos mais variados problemas. O princípio básico do método dos resíduos ponderados consiste em substituir u^h na equação (2.1) obtendo-se em cada ponto do domínio Ω , o seguinte resíduo

$$\epsilon_n = \mathcal{L}u^h - f = \mathcal{L}\psi + \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\Phi_i - f \approx 0, \quad (2.8)$$

e determinar os coeficientes a_i no sentido de tornar ϵ_n mínimo. A metodologia associada ao método dos resíduos pesados consiste em escolher $v_i, i = 1, 2, \dots, n$, n funções de peso arbitrário, de tal forma que o erro residual ϵ_n seja ortogonal a v_i impondo que:

$$\int_{\Omega} v_i \epsilon_n d\Omega \equiv \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L}\psi + \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{L}\Phi_j - f \right\} v_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

As funções de peso v_i são habitualmente designadas por funções teste. Relativamente aos métodos baseados em resíduos pesados, destacam-se os que se obtêm quando se escolhe para funções de peso (ou teste) as funções tentativa e que se designam por métodos de Galerkin ou de Bubnov-Galerkin. Além destes, existem ainda outros métodos tais como, por exemplo, o método de Petrov-Galerkin e o método do subdomínio. O método clássico da colocação pontual pode ser visto como um caso particular do método dos resíduos pesados, quando neste método se escolhe para funções de peso (ou teste) a função delta de Dirac. O tradicional método dos elementos finitos (MEF) é considerado um caso representativo do método de Galerkin ou de Bubnov-Galerkin. Para ilustrarmos os procedimentos usuais na construção deste método consideremos a sua aplicação à seguinte equação diferencial

$$\nabla^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (2.10)$$

com as seguintes condições fronteira

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.11)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_t, \quad (2.12)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira Γ . Neste caso, o operador $\mathcal{L} \equiv \nabla^2$ é definido em 2D por $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

Suponhamos que se utiliza

$$u^h = \psi + \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i, \quad (2.13)$$

e que u^h satisfaz as condições fronteira em Γ_u , i.e. $u^h = \bar{u}$ em Γ_u . De forma semelhante ao que foi feito para a equação geral, tem-se o seguinte resíduo no domínio:

$$\epsilon_n^\Omega = \nabla^2 u^h - f \quad \text{em } \Omega, \quad (2.14)$$

e resíduo na fronteira Γ_t

$$\epsilon_n^{\Gamma_t} = k \frac{\partial u^h}{\partial n} - \bar{q}. \quad (2.15)$$

Os parâmetros a_i são determinados no sentido de anular o integral dos resíduos no domínio e na fronteira, i.e.

$$\int_{\Omega} v_i \epsilon_n^\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{v}_i \epsilon_n^{\Gamma_t} d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

em que v_i e \bar{v}_i são funções de peso (ou teste) arbitrárias. No caso particular da equação (2.10) o integral dos resíduos no domínio e na fronteira é dado por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial^2 y} \right) v_i dx dy - \int_{\Omega} f v_i dx dy + \int_{\Gamma_t} \left(k \frac{\partial u^h}{\partial n} - \bar{q} \right) \bar{v}_i d\Gamma = 0, \quad (2.17)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicando ao primeiro membro da equação anterior a seguinte identidade, que resulta do teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial^2 y} \right) v_i dx dy = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left(k \frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma, \quad (2.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

obtem-se a seguinte forma global:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega} f v_i dx dy - \int_{\Gamma} \left(k \frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_i} \left(k \frac{\partial u^h}{\partial n} - \bar{q} \right) \bar{v}_i d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

As n equações algébricas nos coeficientes $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, resultantes de 2.19 permitem-nos obter a solução aproximada u^h . De notar que durante este desenvolvimento fizeram-se as seguintes restrições:

1. $\psi = \bar{u}$ em Γ_u
2. $\Phi_i = 0$ em Γ_u .

Como referimos, convém ainda realçar que no método de Galerkin escolhem-se as funções de teste $v_i = \Phi_i, i = 1, 2, \dots, n$ tal que:

- a aplicação do teorema da divergência no desenvolvimento feito permitiu alterar as expressões integrais, através da diminuição da ordem das derivadas das funções tentativa.
- As funções Φ_i que foram referidas por funções peso (ou teste) têm um papel totalmente diferente das funções de peso $w_I(\mathbf{x})$ que serão frequentemente usadas neste trabalho, num contexto dos métodos sem malha.

2.2 Métodos sem malha

Nesta introdução optou-se por fazer uma descrição dos métodos sem malha, que tem sido seguida por vários autores [24], baseada no tipo de metodologia que é, em cada caso, usada para definir as funções de forma. Consideraram-se os seguintes tipos de aproximação:

- Núcleo Reprodutor
- Mínimos quadrados móveis
- Partição da unidade

Um trabalho pioneiro na área dos métodos sem malha foi o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), desenvolvido por Lucy [76]. Este baseia-se no conceito do núcleo reprodutor e inicialmente foi aplicado em problemas da astrofísica e em dinâmica dos fluidos. Posteriormente, surgiram outros métodos baseados na formulação SPH. Liu *et al.* [71] apresentaram o método *Reproduced Kernel Particle Method* (RKPM) que foi desenvolvido a partir do conceito do núcleo reprodutor, resultado de várias correcções que foram efectuadas ao SPH. Uma função correctiva foi introduzida para as funções de peso, em ambas as situações, nos casos contínuo e discreto. Kulasegaram [60] apresentou o *Corrected Smooth Particle Hydrodynamic*, CSPH, que se baseia no SPH original mas introduz algumas correcções ao nível da função de peso e do processo de integração numérica, através da utilização de uma técnica de estabilização baseada no cálculo finito incremental. Este método foi essencialmente aplicado a processos de enformação plástica. A família dos RKPM tem tido uma aplicação muito abrangente e actualmente é vista como uma generalização da formulação SPH.

Em 1992, Nayroles *et al.* [86] apresentaram o *diffuse element method*(DEM). Este método definiu funções de aproximação que se baseavam no conceito de mínimos quadrados móveis, as quais eram usadas na formulação fraca de Galerkin. Uma descrição detalhada sobre mínimos quadrados móveis tinha sido apresentada anteriormente em 1981 por Lancaster [61]. De facto, no contexto dos métodos sem malha, o DEM pode ser visto como a primeira aplicação dos mínimos quadrados móveis. Posteriormente, Belytschko *et al.* [14], a partir de algumas correcções ao DEM e por refinamento de alguns aspectos, tais como a melhoria do cálculo das derivadas e a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para imposição das condições de fronteira essenciais, apresentaram um novo método designado por *Element Free Galerkin Method* (EFGM).

As aproximações baseadas na formulação SPH, em termos da discretização são usualmente combinadas com técnicas de colocação ou de integração nodal. Esta é uma das grandes diferenças com o RKPM que usa procedimentos de tipo Galerkin. As aproximações baseadas no conceito de mínimos quadrados móveis são em geral aplicadas na formulação de Galerkin, o que envolve a avaliação numérica de um integral. Este cálculo requer uma estrutura de células, por vezes designada por malha auxiliar de integração (*mesh background*, na designação inglesa). No entanto, mesmo em formulações de Galerkin tem um havido uma maior utilização de técnicas de colocação.

O método dos pontos finitos (FPM) proposto por Oñate e Idelsohn [88], baseia-se na aproximação dos mínimos quadrados ponderados, mas recorre a um procedimento de colocação. O método *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG), proposto por Atluri e Zhu [3] define a aproximação baseada nos mínimos quadrados móveis mas aplica a formulação de Galerkin só localmente, em subdomínios simples (esferas, elipses) como forma de facilitar as integrações e de evitar o uso de uma estrutura de elementos para o domínio global.

O conceito de aproximação pela partição da unidade, pressupõe a discretização do domínio de interesse Ω por N nós em que as funções de aproximação ϕ_I verificam a propriedade : $\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1$.

Para Babuška [6] o conceito de aproximação pela partição da unidade foi usado pela primeira vez na referência [7]. A partir das ideias expostas [7], o *Generalized Finite Element Method* (GFEM) foi elaborado por Babuška e Melenk [9, 80, 8] e referenciado como *Partition Unity Method* (PUM). Posteriormente, GFEM foi formalmente apresentado por Strouboulis *et al.* [107, 105]. O GFEM usa essencialmente os seguintes conceitos [6]:

- define espaços locais de aproximação, os quais podem incluir funções não necessariamente polinomiais.
- usa o facto da aproximação formar uma partição da unidade para interligar os espaços locais definidos no ponto anterior, definindo um subespaço que permite definir boas aproximações globais.

Actualmente o conceito de aproximação pela partição da unidade é usado em vários sentidos, segundo nomes diferentes: *Extended Finite Element method*, (XFEM) proposto por Sukumar *et al.* [108], o *Meshless Finite Element method* [57], o método das esferas finitas [35] e o próprio método das nuvens HP (Hp-Clouds) [41]. Estes métodos diferem basicamente no tipo das funções que são usadas para formar a partição da unidade e na escolha de espaços locais diferentes e praticamente seguem o *Generalized Finite Element method* (GFEM). Nos últimos anos, houve uma grande tendência no sentido de desenvolver aproximações, de certa forma consideradas mistas, que combinam propriedades vantajosas de ambos os métodos, elementos finitos e métodos sem malha. É uma conjugação natural e alguns exemplos de métodos deste tipo são apresentados nas seguintes referências [70, 74, 56].

As primeiras análises sobre a utilização de métodos sem malha a processos de conformação plástica, em que se considerava o modelo elasto-plástico foram feitas por Chen *et al.* [25, 27, 29], através do método RKPM. Posteriormente, o método CSPH que foi desenvolvido por Kulasegaram [60] foi aplicado para simular processos de conformação plástica de materiais puramente plásticos. Guedes e César de Sá [50] aplicaram o método EFG para alguns exemplos de aplicações em forjamento. Shangwu *et al.* [99, 98] utilizaram o método RKPM para simulação numérica de laminagem em condições de estado plano de deformação, comparando os resultados obtidos com a solução dada pelo método dos elementos finitos.

2.3 Imposição das condições de fronteira do tipo essencial

Os métodos sem malha, quer se baseiem em aproximações do tipo núcleo reprodutor, mínimos quadrados móveis ou partição da unidade, em geral, definem funções de forma que não têm carácter interpolatório, razão pela qual não se usa o termo funções interpoladoras pela ambiguidade que daí pode surgir.

Quanto ao tratamento das condições de fronteira do tipo essencial, dos

métodos referidos, por exemplo os métodos SPH, RKPM, EFG, Hp-Clouds, requerem técnicas específicas para impor as condições de fronteira essenciais. Existem no entanto alguns métodos sem malha que definem aproximações cujas funções de forma são interpoladoras, por exemplo o NEM, XFEM, *Moving Particle Finite Element Method* (MPFEM) [52], *Moving Finite Element Method* (MFEM) [57] e o *Reproducing Kernel Element Method* (RKEM) [70]. Quanto ao tratamento das condições de fronteira do tipo essencial existem praticamente dois grupos de métodos [43]: (1) os que se baseiam na modificação da forma fraca, tal como o método dos multiplicadores de Lagrange [14], método de penalidade [117], método de Nitsche's e (2) os métodos que de alguma forma introduzem modificações no sentido de obter funções de forma interpoladoras [15, 26, 55, 24]. Neste último grupo incluem-se vários métodos: os que introduzem alterações ao nível das funções de forma, de tal maneira que estas verifiquem a propriedade de Kronecker na fronteira essencial [48, 24], os métodos de transformação que basicamente permitem obter funções de forma interpoladoras [29, 26] e ainda os métodos que fazem acoplamento da formulação sem malha com os elementos finitos na zona da fronteira essencial [59, 15, 55].

2.4 Noções fundamentais na formulação dos métodos sem malha

2.4.1 Funções de peso

Tal como foi abordado na introdução deste capítulo, quando se considera a questão de aproximar $u(\mathbf{x})$ por $u^h(\mathbf{x})$ há basicamente dois ingredientes fundamentais envolvidos: as funções teste (ou de peso) e as funções tentativa. A utilização das funções de peso visam a determinação dos coeficientes $a_i, i = 1, n$ (eq. 2.8 e 2.9). No contexto dos métodos sem malha, o conceito de função de peso ou de ponderação também está presente e é um elemento essencial, mas desempenha um papel totalmente diferente daquele que é atribuído às funções de peso descritas em . No âmbito dos métodos sem malha, considera-se para

o domínio Ω um conjunto de nós \mathbf{x}_I , $I = 1, 2 \dots N$. Para cada nó associa-se o parâmetro \hat{u}_I que corresponde ao valor de u em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$ e uma função de peso $w_I(\mathbf{x})$ com suporte compacto. Uma função de peso diz-se com suporte compacto se existe uma vizinhança (por vezes designada por subdomínio) de \mathbf{x}_I na qual a função é não nula, anulando-se fora dessa vizinhança. A esta vizinhança, (subdomínio) do I -ésimo nó, sobre a qual a função de peso é não nula designa-se por suporte da função de peso ou domínio de influência do nó \mathbf{x}_I . As funções de peso w_I , neste contexto, entram de forma directa na definição da função de forma associada a cada nó. O facto de estas funções terem suporte compacto é uma característica essencial porque permite definir funções de aproximação que têm carácter local. Alguns aspectos relativos às funções de peso, usualmente adoptadas são os seguintes:

- $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) > 0$ se $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| < h$.
- $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = 0$, caso contrário.
- As funções de peso dizem-se com suporte compacto quando verificam as condições anteriores.
- Seja \mathbf{x}_I a posição do nó I . Designa-se por domínio de influência do nó I a vizinhança de \mathbf{x}_I na qual a função de peso $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) > 0$.
- A dimensão do domínio de influência do nó I é o valor h para o qual se verifica a seguinte proposição :

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \neq 0, \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| < h. \quad (2.20)$$

2.4.1.1 Alguns exemplos de funções de peso unidimensionais:

As funções de peso mais utilizadas no âmbito dos métodos sem malha em problemas unidimensionais são as seguintes:

- *Spline* **Cúbica**

$$w(x - x_I, h) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{se } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{se } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

- *Spline* **Quártica**

$$w(x - x_I, h) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

- *Spline* de **Quinta ordem**

$$w(x - x_I, h) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 10r^2 + 20r^3 - 15r^4 + 4r^5 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$r = \frac{|x - x_I|}{h}$$

- **Gaussiana**

$$w(x - x_I, h) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{\exp[-(r/c_i)^{2k}] - \exp[-(h/c_i)^{2k}]}{1 - \exp[-(h/c_i)^{2k}]} & \text{se } r \leq h \\ 0 & \text{se } r \geq h; \end{cases} \quad (2.24)$$

$$r = |x - x_I|; c_i = \alpha h$$

Em qualquer dos casos a dimensão do domínio de influência é dado por h . Para as funções *spline* é habitual calcular h por:

$$h = d_{max} d_I. \quad (2.25)$$

Belytschko *et al.* [14] recomendam as seguintes escolhas: para o parâmetro de dilatação d_{max} , um valor que pertence ao intervalo $[2, 4]$ e para d_I uma atribuição que deverá originar uma matriz \mathbf{A} não singular. Para um conjunto de pontos igualmente espaçados é usual atribuir a d_I o valor do espaçamento nodal. Relativamente à função Gaussiana tem-se que $c_i = \alpha h$ em que o parâmetro α permite atribuir pesos relativos dentro do domínio de influência.

2.4.1.2 Funções de peso em \mathbb{R}^n

Sejam \mathbf{x} e $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^n$, em que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}_I = (x_{1I}, \dots, x_{nI})$. As funções de peso $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ para o caso multidimensional, podem ser definidas a partir do caso unidimensional $w(x - x_I)$. Os dois processos mais frequentes são [13, 36]:

1. $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$
2. $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \prod_{j=1}^n w(|x_j - x_{jI}|)$.

O domínio de influência de um ponto $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)$ abrange uma área e a escolha da forma do domínio é arbitrária. No caso bi-dimensional, por exemplo quando se opta pelo primeiro processo para definir a função de peso está-se a usar uma forma circular. No segundo processo tem-se uma forma rectangular, que neste caso é dada por:

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w(r_x) \cdot w(r_y), \quad (2.26)$$

em que

$$r_x = \frac{|x - x_I|}{h_x}, \quad h_x = d_{max}d_x, \quad (2.27)$$

$$r_y = \frac{|y - y_I|}{h_y}, \quad h_y = d_{max}d_y, \quad (2.28)$$

e em que as dimensões do domínio de influência segundo as direcções x e y , d_{mx} e d_{my} calculam-se através da equação (2.25). A figura 2.1 ilustra a função de peso *spline* cúbica, $w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$, caso bidimensional em que se considerou $x_I = (0, 0)$.

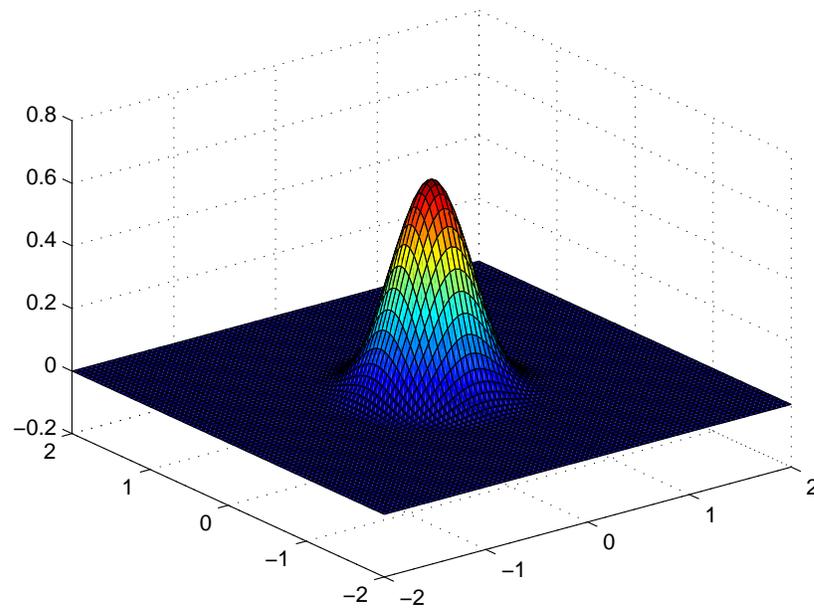


Figura 2.1: Representação da função de peso $w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$ *spline* cúbica, em que se considerou $\mathbf{x}_I = (0, 0)$.

2.4.2 Consistência

Seja $u^h(\mathbf{x})$ a função de aproximação para $u(\mathbf{x})$, dada por :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})u_I, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.29)$$

em que N é o número de nós do domínio, ϕ_I e u_I são respectivamente a função de peso e o parâmetro nodal associados ao I -ésimo nó.

O método que define a aproximação $u^h(\mathbf{x})$ diz-se ter consistência de ordem k se reproduz exactamente uma base de polinómios de grau menor ou igual a k .

Ao conceito de consistência estão associadas as condições de consistência, por vezes, também designadas de condições de reproducibilidade. As condições de consistência de ordem k são dadas por:

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})x_{Ii}^m = x_i^m, \quad 0 \leq m \leq k, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.30)$$

aonde x_{Ii} é a i -ésima coordenada do nó I e x_i a i -ésima coordenada do ponto \mathbf{x} .

No caso bidimensional, $\mathbf{x} = (x, y)$ tem-se consistência de ordem 1 ou consistência linear se as seguintes igualdades são verificadas:

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \quad (2.31)$$

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})x_I = x, \quad (2.32)$$

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})y_I = y. \quad (2.33)$$

Podem-se desenvolver novas aproximação, como aconteceu em alguns métodos sem malha, impondo à priori que a aproximação tenha uma determinada ordem de consistência.

2.4.3 Partição da unidade

As funções de forma ϕ_I definidas por um método de aproximação formam uma partição da unidade, se

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.34)$$

Quando a propriedade anterior se verifica, então a aproximação tem, pelo menos, consistência de ordem zero, isto é, pelo menos o polinómio constante $p(\mathbf{x}) = 1$ é reproduzido de forma exacta. No caso do método dos elementos finitos, as convencionais funções de forma, N_I constituem uma partição da unidade, visto que verificam a equação (2.34). A partir desta equação e para uma dada função $\Psi(\mathbf{x})$ obtém-se ainda

$$\sum_{I=1}^N \phi_I \Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}). \quad (2.35)$$

A propriedade definida em (2.35) é uma propriedade chave para técnicas de enriquecimento usadas em vários métodos sem malha.

2.5 *Smoothed Particle Method (SPH)*

O método SPH foi introduzido por Lucy [76], Gingold e Monaghan [46] na década de 70 e é considerado o pioneiro dos métodos sem malha. Inicialmente foi desenvolvido para problemas de simulação de fenómenos astrofísicos tais como colisões estelares, formação de galáxias e flutuação de gás. As aplicações de SPH para problemas de mecânica dos sólidos, tais como impacto, penetração e grandes deformações só foram analisadas posteriormente nas seguintes referências [66, 67, 17, 104, 92].

2.5.1 Conceitos básicos do método SPH

O método SPH baseia-se na aproximação do tipo do núcleo reprodutor [82]. A aproximação do núcleo reprodutor $u^h(\mathbf{x})$ para $u(\mathbf{x})$ num domínio Ω é dada pela equação integral:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (2.36)$$

em que $w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ é a função de núcleo ou de peso e h é a dimensão do suporte. Num contexto SPH é usual designar-se $w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ por função de amaciamento. Esta função deve verificar as seguintes condições [13]:

Seja Ω_I uma vizinhança do ponto \mathbf{x}_I .

1. $w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$.
2. $w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = 0, \forall \mathbf{x} \notin \Omega_I$.
3. $\int_{\Omega} w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy = 1$.
4. $w_h(s)$ é uma função monótona decrescente em que $s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$.
5. $\lim_{h \rightarrow 0} w_h(s) = \delta(s)$ em que $\delta(s)$ é a função Delta de Dirac.

Das condições anteriores, a equação do item 3,

$$\int_{\Omega} w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy = 1, \quad (2.37)$$

reveste-se de particular interesse visto que corresponde à verificação da condição de consistência de ordem zero da forma contínua do método SPH. Esta condição traduz a capacidade que o método tem em reproduzir exactamente funções constantes.

Para métodos SPH, Monaghan [83] usa a seguinte *spline* cúbica com suporte compacto, definida por:

$$w(\mathbf{x}, h) = \frac{\alpha}{h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^3 & \text{se } \xi \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - \xi)^3 & \text{se } 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{se } \xi \geq 2 \end{cases} ; \quad \xi = \frac{\|\mathbf{x}\|}{h} \quad (2.38)$$

em que d é a dimensão do problema e α é um factor escala que assegurará a condição de consistência da forma contínua, dado por:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } d = 1 \\ \frac{10}{7\pi} & \text{se } d = 2 \\ \frac{1}{\pi} & \text{se } d = 3 \end{cases} \quad (2.39)$$

2.5.2 Formulação SPH

No formalismo do método SPH adopta-se uma representação puramente Lagrangiana e por esta razão há duas ideias básicas [77, 53]. A primeira consiste no seguinte: ao proceder à simulação computacional de um meio contínuo considera-se que este é discretizado por um conjunto de N partículas. Para cada partícula, com localização no espaço dada pela posição \mathbf{x}_I associa-se uma determinada massa m_I e um volume V_I . A segunda ideia baseia-se no seguinte facto: as propriedades num ponto qualquer do meio são estimadas através da sua média pesada numa vizinhança do ponto.

Seja $u(\mathbf{x})$ a representação de um campo físico. A segunda ideia exprime-se, então, matematicamente por :

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) dy, \quad (2.40)$$

em que $u^h(\mathbf{x})$ é uma estimativa para $u(\mathbf{x})$, $w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ é a função de peso ou de amaciamento e h é uma dimensão associada ao volume. A partir do modelo computacional descrito e procedendo à discretização da equação (2.40) resulta:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I V_I w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)u_I. \quad (2.41)$$

A condição de consistência de ordem zero na descrição contínua imposta pela equação (2.37) não garante que a mesma seja verificada na versão discretizada. Como tal, ao discretizar é necessário que a seguinte condição seja verificada,

$$1 \approx \sum_I V_I w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I). \quad (2.42)$$

Martin *et al.* [97] justifica a equação (2.42) dizendo que traduz a situação física de N partículas independentes, distanciadas num valor superior a h em que o volume total descrito por estas deverá ser igual à soma dos volumes individuais de cada uma. A condição (2.42) pode ser satisfeita fazendo a seguinte escolha para V_I ,

$$V_I = \frac{1}{\sum_J w_h(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J)}, \quad (2.43)$$

i.e.,

$$V_I^{-1} = \sum_{J=1}^N w_h(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J). \quad (2.44)$$

Partindo de um conjunto de N partículas distribuídas segundo a função contínua de densidade $\rho(\mathbf{x})$ e aplicando o conceito expresso na equação (2.40) à função $\rho(\mathbf{x})$ tem-se que:

$$\rho^h(x) = \int_{\Omega} w_h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) dy, \quad (2.45)$$

e

$$\rho_h(\mathbf{x}) = \sum_J w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J) V_J \rho_J, \quad (2.46)$$

em que ρ_J é a densidade da partícula J e V_J o respectivo volume. Como $V_J = \omega_J / \rho_J$, substituindo na equação anterior tem-se:

$$\rho_h(\mathbf{x}) = \sum_J \omega_J w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J), \quad \omega_J = V_J \rho_J, \quad (2.47)$$

e portanto :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_J \phi_J(\mathbf{x})u_J; \quad \phi_J(\mathbf{x}) = w_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J)V_J. \quad (2.48)$$

No caso em que as partículas estão distribuídas aleatoriamente a equação (2.48) é uma estimativa numérica do integral de *Monte Carlo*. Como foi referido anteriormente, nos métodos SPH a deterioração da solução em domínios finitos está relacionada com o facto da implementação da equação discretizada (2.41) não verificar as condições de consistência.

2.6 *Reproduced Kernel Particle Method (RKPM)*

Por razões de simplicidade apresenta-se a descrição do método para o caso unidimensional. A partir da aproximação do tipo do núcleo reprodutor dada pela equação:

$$u^a(x) = \int_{\Omega} \bar{w}_a(x-y)u(y) dy, \quad (2.49)$$

o método *Reproduced Kernel Particle Method* (RKPM) apresentado por Liu *et al.* [72] propõem uma escolha apropriada de uma função de peso $\bar{w}_a(x-y)$ de tal forma que a aproximação tenha consistência de ordem N . Como tal, a equação (2.49) deve reproduzir exactamente os polinómios de grau menor ou igual a N .

A função de peso \bar{w}_a a determinar, proposta por Liu *et al.* [72, 71] é:

$$\bar{w}_a = C(x; x-y)w_a(x-y), \quad (2.50)$$

em que $w_a(x-y)$ é a mesma função de peso que foi usada na descrição dos métodos SPH e $C(x; x-y)$ uma função de correcção dada por:

$$C(x; x-y) = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)(x-y) + \dots + \gamma_N(x)(x-y)^N = \gamma^T(x)\mathbf{H}(x-y), \quad (2.51)$$

onde

$$\mathbf{H}^T(x - y) = [1, x - y, \dots, (x - y)^N] \quad (2.52)$$

$$\gamma^T(x) = [\gamma_0(x), \gamma_1(x), \dots, \gamma_N(x)]. \quad (2.53)$$

As funções $\gamma_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, são determinadas impondo que a equação reproduza exactamente polinómios de grau menor ou igual a N . As condições de reproducibilidade de ordem N são as seguintes:

$$x^k = \int_{\Omega} \bar{w}_a(x - y) y^k dy, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (2.54)$$

A função aproximada é dada por:

$$u^a(x) = \int_{\Omega} \bar{w}_a(x - y) u(y) dy. \quad (2.55)$$

A partir do desenvolvimento da série de Taylor para a função $u(y)$:

$$u(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(y - x)^i}{i!} u^i(x), \quad (2.56)$$

em que

$$u^i(x) = \frac{d^i u}{dx^i}, \quad (2.57)$$

e por substituição de (2.56) em (2.55) resulta:

$$u^a(x) = \varphi_0(x) u(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \varphi_i(x) u^i(x), \quad (2.58)$$

em que

$$\varphi_i(x) = \int_{\Omega} (x - y)^i \bar{w}_a(x - y) dy. \quad (2.59)$$

Basicamente, o objectivo do método proposto é definir uma função $\bar{w}_a(x - y)$ que

garanta a reproducibilidade de ordem N em $u^a(x)$ uma vez que nem todas as funções de peso verificam estas condições. Para que a equação (2.58) reproduza exactamente $u(x) = 1$, fazendo a substituição de $u(x)$ tem-se que:

$$\varphi_0(x) = \int_{\Omega} \bar{w}_a(x-y) dy = 1. \quad (2.60)$$

Esta equação é a condição de consistência de ordem zero na forma contínua. Analogamente, para que a função linear $u(x) = a_0 + a_1x$ seja reproduzida exactamente ter-se-á

$$\varphi_1(x) = \int_{\Omega} (x-y)\bar{w}_a(x-y) dy = 0. \quad (2.61)$$

Procedendo de forma semelhante no sentido da equação (2.58) reproduzir de forma exacta polinómios de grau menor ou igual a N , as seguintes condições deverão ser satisfeitas.

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \int_{\Omega} \bar{w}_a(x-y) dy = 1 \\ \varphi_1(x) = \int_{\Omega} (x-y)\bar{w}_a(x-y) dy = 0 \\ \vdots \\ \varphi_N(x) = \int_{\Omega} (x-y)^N \bar{w}_a(x-y) dy = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

O sistema anterior por ser reescrito por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}(x-y)\bar{w}_a(x-y) dy = \mathbf{H}(0), \quad (2.63)$$

em que $\mathbf{H}(x-y)$ é dado por (2.52).

Substituindo em (2.62) \bar{w}_a pela expressão (2.50) e $C(x; x-y)$ por (2.51), resulta o seguinte sistema de equações:

$$\underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{H}(x-y)w_a(x-y)\mathbf{H}^T(x-y) dy \right]}_{\mathbf{M}} \gamma(x) = \mathbf{H}(0). \quad (2.64)$$

A solução do sistema de equações anterior, no caso em que \mathbf{M} é invertível, é dada

por:

$$\gamma(x) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}(0), \quad (2.65)$$

em que

$$\mathbf{M}(x) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(x-y)\mathbf{H}^T(x-y)w_a(x-y) dy. \quad (2.66)$$

As funções γ_i calculadas desta forma, garantem a consistência de ordem N da aproximação. Finalmente a aproximação RKPM para estimar $u(x)$ é dada por:

$$u^R(x) = \int_{\Omega} C(x; x-y)w_a(x-y)u(y) dy \quad (2.67)$$

$$= \mathbf{H}^T(0)\mathbf{M}^{-1}(x) \int_{\Omega} \mathbf{H}(x-y)w_a(x-y)f(y) dy. \quad (2.68)$$

Aproximação RKPM: versão discretizada

Para cálculo computacional, é necessário discretizar as equações anteriores. Procede-se a uma discretização do domínio Ω por um conjunto total de N nós $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ em que \mathbf{x}_I é a posição do nó I . A equação (2.67) pode ser discretizada por uma regra trapezoidal e representada como

$$u^h(x) = \sum_{I=0}^N C(x; x-x_I)w_a(x-x_I)\Delta V_I u_I \quad (2.69)$$

$$= \sum_{I=0}^N \phi_I(x)\Delta V_I u_I, \quad (2.70)$$

em que ΔV_I e u_I são, respectivamente, o volume e a incógnita associados a cada partícula,

$$\phi_I(x) = C(x; x-x_I)w_a(x-x_I), \quad (2.71)$$

e

$$C(x; x - x_I) = \mathbf{H}^T(0)\mathbf{M}^{-1}(x)\mathbf{H}(x - x_I). \quad (2.72)$$

No caso em que $\Delta V_I = 1$, a equação discreta do núcleo reprodutor pode ser interpretada como uma aproximação modificada dos mínimos quadrados móveis [73]. No processo de discretização da equação (2.67), é fundamental que as condições de consistência sejam preservadas, sendo por isso conveniente que a matriz \mathbf{M} da equação (2.66) seja discretizada com o mesmo método de discretização aplicado à equação (2.67).

Aspectos relevantes sobre a implementação numérica deste método são abordados por Chen *et al.* [25], tais como o processo de discretização, a preservação das condições de consistência, cálculo da matriz \mathbf{M} e das derivadas das funções de forma $\phi_I(x)$.

2.7 Aproximações baseadas no método dos mínimos quadrados

Como vimos, a resolução numérica de equações diferenciais em derivadas parciais envolve em determinada fase a construção de uma aproximação. Na forma fraca ou forte associada à equação em derivadas parciais (EDP), resultante de um procedimento aparecem funções não conhecidas, para as quais é necessário construir aproximações.

O método dos mínimos quadrados é uma técnica que permite definir a aproximação de uma função, a partir de um conjunto de valores conhecidos. Neste capítulo descreve-se o método dos mínimos quadrados, com particular ênfase para os mínimos quadrados móveis, porque estes tem tido grande destaque nos últimos anos, no âmbito dos métodos sem malha. O conceito de mínimos quadrados móveis deu origem a vários métodos sem malha, em particular o *diffuse element method* (DEM) [86], *Element Free Galerkin* (EFG) [14, 13, 16, 12, 44] e o método das nuvens HP (HP-Clouds) [41]. O método dos mínimos quadrados

móveis foi introduzido por Lancaster [61], embora muitos autores considerem este método uma extensão do método de Shepard [101], que tinha sido proposto muito anteriormente. O método dos mínimos quadrados móveis define aproximações locais na vizinhança de um determinado ponto, ou seja as aproximações são válidas em determinados subdomínios.

Considere-se o problema de aproximar uma função $u(\mathbf{x}) \in C(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ a partir de um conjunto de dados da forma $(\mathbf{x}_i, u_i)_{i=1,2,\dots,N}$. Seja $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ o conjunto dos pontos para os quais se conhece os valores $u_i, i = 1, 2 \dots N$ em que $u_i = u(\mathbf{x}_i)$. No sentido de determinar a função que interpola os valores nos pontos dados $(\mathbf{x}_i, u_i)_{i=1,2,\dots,N}$ há dois aspectos importantes:

- Especificar qual o tipo de funções $p(\mathbf{x})$ a usar na aproximação.
- Definir o procedimento que estabelece o ajuste aos valores nos pontos dados.

Usando funções polinomiais, a função $u(\mathbf{x})$ pode ser aproximada por $u^h(\mathbf{x})$ em que

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})a_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^T, \quad (2.75)$$

e as componentes da base $p^T(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x})$, são m funções linearmente independentes (monómios ou polinómios de Legendre) que definem uma base completa para o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m . Os coeficientes a_i são as incógnitas. Exemplos de bases completas, lineares e quadráticas, para o caso bidimensional são dadas respectivamente por:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (m = 3, \text{ linear}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (m = 6, \text{ quadrática}). \quad (2.77)$$

Relativamente aos elementos de \mathbf{p}^T , as funções que formam a base, $p_i(\mathbf{x})$ pressupõem-se que tenham as seguintes propriedades [39]:

- $p_1 \equiv 1$
- $p_i \in C^K(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$

2.7.1 Método dos mínimos quadrados

Para aproximar a função $u(\mathbf{x})$ a partir dos dados $(\mathbf{x}_i, u_i)_{i=1..N}$ e evitando usar um número muito elevado de funções de base p_j parece apropriado usar uma aproximação local. Seja $\mathbf{x}_j \in \mathbf{X}$ e $\Omega_j = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_k}\} \subset \mathbf{X}$ a vizinhança de \mathbf{x}_j que tem n_k pontos de \mathbf{X} . A aproximação $u^h(\mathbf{x})$ para $u(\mathbf{x})$, em $\mathbf{x} \in \Omega_j$ pode-se calcular por:

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_j). \quad (2.78)$$

Em particular, para os n_k pontos da vizinhança Ω_j , aplicando (2.78) tem-se que:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_k} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_{n_k}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1(\mathbf{x}_{n_k}) & p_2(\mathbf{x}_{n_k}) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_{n_k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_k} \end{bmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{a}, \quad (2.79)$$

em que a_j são as incógnitas e $u_j^h = u^h(\mathbf{x}_j)$ os valores aproximados. Se $m = n_k$ e \mathbf{M} é não singular então o vector \mathbf{a} pode ser calculado por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}. \quad (2.80)$$

Em geral, $n_k > m$ e resulta o problema de resolver um sistema de equações sobredeterminado. Neste caso, uma das soluções possíveis para a resolução

do sistema é dada pelo método dos mínimos quadrados. Este baseia-se na determinação de \mathbf{a}^* por forma a que o vector resíduo \mathbf{R} dado por :

$$\mathbf{R} = \left[u_1 - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{a}^* \quad u_2 - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{a}^* \quad \cdots \quad u_{n_k} - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_{n_k})\mathbf{a}^* \right], \quad (2.81)$$

tenha norma euclidiana mínima, em que \mathbf{R}_i é o erro cometido ao aproximar $u(\mathbf{x}_i)$ por $u^h(\mathbf{x}_i)$. Na aproximação dos mínimos quadrados considera-se o quadrado da norma euclidiana do vector \mathbf{R} dado por:

$$J(\mathbf{a}^*) = \sum_{I=1}^{n_k} [u_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}^*]^2. \quad (2.82)$$

Os coeficientes \mathbf{a}^* da interpolação podem assim ser obtidos por minimização de J , reduzindo-se à determinação de um ponto estacionário de J .

2.7.2 Método dos mínimos quadrados ponderados

Neste caso o erro a minimizar é dado por:

$$J(\mathbf{a}^*, \mathbf{x}_J) = \sum_{I=1}^{n_k} w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J) [u_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}^*]^2, \quad (2.83)$$

em que $w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J)$ é uma função de peso com suporte compacto que tem as propriedades descritas em 2.4.1. No método dos mínimos quadrados ponderados a i -ésima componente do vector resíduo é ponderada em função da distância de \mathbf{x}_I a \mathbf{x}_J .

2.7.3 Método dos mínimos quadrados móveis

O método dos mínimos quadrados móveis é considerado uma aproximação baseada no método dos mínimos quadrados ponderados, em que é permitido à função de peso w deslocar-se para o ponto \mathbf{x} no qual se está a interpolar.

Neste caso, seguindo o procedimento habitual da técnica do método dos mínimos quadrados, considera-se para $J(\mathbf{x})$ a seguinte expressão:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_k} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}^*]^2, \quad (2.84)$$

em que $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ é a mesma função de peso com suporte compacto referida anteriormente. Neste caso, a i -ésima componente do vector resíduo, dada por $R_i = u_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}^*$ é ponderada por $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$, que toma valores em função da distância de \mathbf{x}_I ao ponto de interpolação \mathbf{x} . Os coeficientes \mathbf{a}^* são determinados no sentido de minimizar J . Para obter um ponto estacionário de J , a equação a resolver é:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^*} = 0. \quad (2.85)$$

No caso bidimensional, usando a base $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]$ a equação (2.85) tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i y_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i y_i & \sum w_i y_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i y_i & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^2 y_i & \sum w_i x_i y_i^2 \\ \sum w_i y_i & \sum w_i y_i x_i & \sum w_i y_i^2 & \sum w_i y_i x_i^2 & \sum w_i x_i y_i^2 & \sum w_i y_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^2 y_i & \sum w_i x_i^4 & \sum w_i x_i^3 y_i & \sum w_i x_i^2 y_i^2 \\ \sum w_i x_i y_i & \sum w_i x_i^2 y_i & \sum w_i x_i y_i^2 & \sum w_i x_i^3 y_i & \sum w_i x_i^2 y_i^2 & \sum w_i x_i y_i^3 \\ \sum w_i y_i^2 & \sum w_i x_i y_i^2 & \sum w_i y_i^3 & \sum w_i y_i^2 x_i^2 & \sum w_i x_i y_i^3 & \sum w_i y_i^4 \end{bmatrix} \mathbf{a}^*(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \\ w_1 x_1 & w_2 x_2 & w_3 x_3 & \dots & w_N x_N \\ w_1 y_1 & w_2 y_2 & w_3 y_3 & \dots & w_N y_N \\ w_1 x_1^2 & w_2 x_2^2 & w_3 x_3^2 & \dots & w_N x_N^2 \\ w_1 x_1 y_1 & w_2 x_2 y_2 & w_3 x_3 y_3 & \dots & w_N x_N y_N \\ w_1 y_1^2 & w_2 y_2^2 & w_3 y_3^2 & \dots & w_N y_N^2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.86)$$

em que por razões de simplificação de escrita w_I representa $w_I = w(x - x_I)$. De

forma geral, (2.85) origina o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.87)$$

em que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (2.88)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \dots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)\mathbf{p}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

A partir de (2.86) constata-se a dependência dos coeficientes \mathbf{a}^* relativamente ao ponto (neste caso \mathbf{x}) no qual se está a interpolar. Esta é a grande diferença do método dos mínimos quadrados móveis face aos anteriores [112]. Se a matriz \mathbf{A} é invertível, a equação (2.87) tem solução única dada por:

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.91)$$

Considerando a solução anterior para \mathbf{a} da equação (2.78) e substituindo, o valor aproximado $u^h(\mathbf{x})$ para $u(\mathbf{x})$ é:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.92)$$

As funções de forma $\phi_I(\mathbf{x})$ podem ser identificadas por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I). \quad (2.93)$$

Propriedades:

2.7.3.1 Consistência de ordem k

Uma propriedade importante no método dos mínimos quadrados móveis é a consistência de ordem k . Para mostrar que o método dos mínimos quadrados tem consistência k , qualquer termo da base \mathbf{p} (ordem k) deverá ser reproduzido de forma exacta. Como tal, é necessário que a seguinte igualdade seja verificada:

$$\sum_{J=1}^{n_p} \phi_J(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}). \quad (2.94)$$

Substituindo as funções de forma ϕ_I em (2.128) tem-se que:

$$\sum_{J=1}^{n_p} \phi_J(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_J) = \sum_{J=1}^{n_p} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J) \mathbf{p}(\mathbf{x}_J) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_J) \quad (2.95)$$

$$= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{J=1}^{n_p} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J) \mathbf{p}(\mathbf{x}_J) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_J) \quad (2.96)$$

$$= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}), \quad (2.97)$$

concluindo-se que a equação é verificada e portanto qualquer função polinomial incluída em $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é interpolada exactamente. Se k é o grau do polinómio de ordem mais elevada da base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ conclui-se que a consistência é de ordem k .

2.7.3.2 Partição da Unidade

Considerando $k = 0$, a consistência de ordem zero, i.e:

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \quad (2.98)$$

corresponde ao conceito da partição da unidade, em que as funções de forma ϕ_I formam uma partição da unidade.

2.7.4 Método de Shepard

A aproximação por mínimos quadrados móveis pode ser vista como a generalização de uma técnica muito popular para interpolar um conjunto de dados e que se designa método de Shepard [101]. Basicamente, no método de Shepard um conjunto de dados dispersos, da forma (\mathbf{x}_I, u_I) é interpolado pela função

$$u^h(\mathbf{x}) = \frac{\sum u_I w_I(\mathbf{x})}{\sum w_I(\mathbf{x})}, \quad (2.99)$$

em que $w_I(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ é uma função de peso com suporte compacto, que é decrescente com a distância de \mathbf{x} a \mathbf{x}_I , tendo um máximo em \mathbf{x}_I .

As funções de forma ϕ_I são dadas por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{w_I(\mathbf{x})}{\sum w_J(\mathbf{x})}. \quad (2.100)$$

O método de Shepard usa funções de interpolação local, válidas apenas numa região. Foi considerado pioneiro nos algoritmos de interpolação que se baseiam na ponderação pelo inverso da distância. As funções de forma definidas pelo método de Shepard formam uma partição da unidade.

2.7.5 Relação entre o interpolador de Shepard e o método dos mínimos quadrados móveis

Uma generalização possível para o método de Shepard consiste em definir u^h , aproximação $u(x)$ por:

$$u^h(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, a_0, a_1, \dots, a_p), \quad (2.101)$$

em que \tilde{u} é um polinómio em \mathbf{x} , com parâmetros a_0, a_1, \dots, a_p (coeficientes do polinómio) e dependentes de \mathbf{x} . A determinação dos coeficientes para cada \mathbf{x} ,

pode ser feita, minimizando o seguinte funcional:

$$\sum_i w_I(\mathbf{x}) [u_I - \tilde{u}(\mathbf{x}, a_0, a_1, \dots, a_p)]^2, \quad (2.102)$$

em que w_I é a função de peso com suporte compacto, a mesma que foi usada na descrição do método de Shepard. Neste caso, o procedimento coincide simplesmente com o método dos mínimos quadrados móveis. No caso particular da escolha $\tilde{u}(\mathbf{x}, a_0) = a_0$ tem-se o método de Shepard. Por este motivo, alguns autores consideram os mínimos quadrados móveis uma generalização deste método.

2.8 *Element Free Galerkin* (EFG)

No início dos anos 90, Nayroles *et al.* [86] introduziram o *diffuse element method* (DEM) que foi considerado na altura um método de aproximação inovador. O DEM usava um polinómio interpolador baseado numa aproximação dos mínimos quadrados móveis, conjuntamente com o método de Galerkin, no sentido de obter uma formulação computacional que prescindia de uma malha. Embora Nayroles *et al.* [86] não o tivessem reconhecido, um método baseado na aproximação dos mínimos quadrados móveis já tinha sido usado por Lancaster e Salkauskas [61] para aproximar curvas e superfícies.

Posteriormente, Belytschko *et al.* [14] desenvolveram e estenderam o DEM resultando um método com melhorias significativas, o qual designaram por *Element Free Galerkin* (EFG). O método EFG usa a forma fraca de Galerkin, tal como o método dos elementos finitos. O domínio de interesse global Ω é discretizado por um conjunto de nós, não sendo necessário que estes definam uma malha no sentido clássico. A partir deste conjunto nodal, uma aproximação baseada no mínimos quadrados móveis é usada para construir as funções tentativa e teste, a incorporar na forma fraca. Na proposta feita por Belytschko *et al.* [14] inclui-se o cálculo das derivadas das funções interpoladoras que tinham sido omitidas no DEM, assim como a utilização de um método de integração

numérica, no sentido de melhorar a solução numérica. As condições de fronteira essenciais são impostas através do método dos multiplicadores de Lagrange. Lu *et al.* [75] apresentaram posteriormente um princípio variacional modificado para implementar as condições de fronteira.

Neste capítulo faz-se uma apresentação da formulação EFG [14, 75, 36] para o caso bidimensional e detalham-se alguns aspectos relevantes na implementação.

2.8.1 Formulação EFG

No método EFG, a aproximação local $u^h(\mathbf{x})$ da função $u(\mathbf{x})$ é definida segundo a técnica dos mínimos quadrados móveis. Considere-se $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\Omega_x \subset \Omega$ uma vizinhança do ponto \mathbf{x} . Seja $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega_x$. A aproximação $u^h(\mathbf{x})$ para $u(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x} \in \Omega$ é dada por:

$$u(\bar{\mathbf{x}}) \simeq u_L^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (2.103)$$

em que

$$\mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} p_0(\bar{\mathbf{x}}) & p_1(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & p_m(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) & a_1(\mathbf{x}) & \dots & a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T. \quad (2.105)$$

As funções $a_i(\mathbf{x})$ não são constantes e $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ inclui uma base completa do subespaço de polinómios de grau menor ou igual a k . Aplicando a técnica dos mínimos quadrados móveis, o vector $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ pode ser determinado para cada \mathbf{x} , através da minimização ponderada da seguinte norma discreta L_2 , definida por:

$$J[\mathbf{a}(\mathbf{x})] = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_I)]^2 \quad (2.106)$$

$$= \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2, \quad (2.107)$$

em que u_I representa o valor nodal de u em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ função de peso ou de ponderação com suporte compacto associada a \mathbf{x}_I e N é o número de nós cujo domínio de influência contem o ponto \mathbf{x} , i.e, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) > 0$. A função $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ tem um papel fundamental na formulação do método.

No sentido de minimizar o funcional J , começa-se por determinar:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{a}} = 0, \quad (2.108)$$

resultando o seguinte sistema de k equações:

$$\frac{dJ}{da_i} = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) 2p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I] = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (2.109)$$

$$\frac{dJ}{d\mathbf{a}} = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)u_I] = 0, \quad (2.110)$$

que se pode escrever da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.111)$$

em que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (2.112)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \dots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)\mathbf{p}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} definem-se da seguinte maneira:

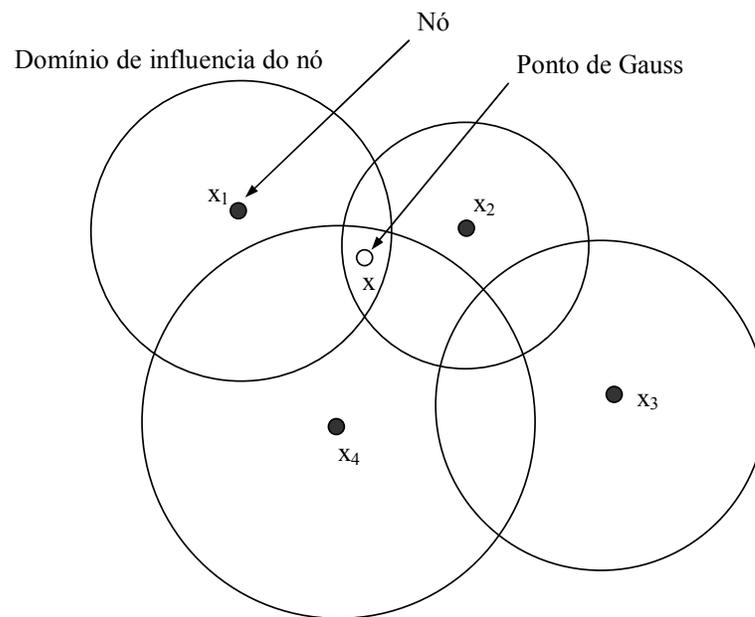


Figura 2.2: Ilustração de domínios de influência no caso bidimensional. A lista de vizinhos para \mathbf{x} inclui os nós 1, 2 e 4 dado que os domínios de influência destes contêm o ponto \mathbf{x} ; os nós 1, 2 e 4 são usados para definir a aproximação em \mathbf{x} . O nó 3 é excluído da lista.

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad (2.115)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}, \quad (2.116)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \dots & \mathbf{p}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left[w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \right], \quad (2.118)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_N) & p_2(\mathbf{x}_N) & \dots & p_m(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Se $\det \mathbf{A} \neq 0$, a solução do sistema da equação (2.111) é única e dada por:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.121)$$

Substituindo $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ na equação (2.103) a aproximação para $u^h(\mathbf{x})$ é:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\phi}^T \hat{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u_I, \quad (2.122)$$

em que $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ é dado por:

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & \dots & \phi_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (2.123)$$

Em particular, a função de forma ϕ_I , associada ao I-ésimo nó, no ponto \mathbf{x} é:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I). \quad (2.124)$$

Cálculo das derivadas das funções de forma

Por razões de simplificação o cálculo das derivadas das funções de forma é desenvolvido só no caso 2D apenas para a variável x . As derivadas parciais de $\phi_I(\mathbf{x})$ podem ser calculadas directamente da equação anterior, obtendo-se:

$$\phi_{I,x} = (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I)_{,x} \quad (2.125)$$

$$= \mathbf{p}_{,x}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,x}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{I,x}. \quad (2.126)$$

A expressão anterior envolve o cálculo de $(\mathbf{A}_{,x}^{-1})$. Aplicando derivação implícita à identidade $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, a derivada em ordem a x da inversa da matriz pode ser calculada por:

$$\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x}\mathbf{A}^{-1}. \quad (2.127)$$

A equação anterior envolve o cálculo da inversa de \mathbf{A} , o que no caso bidimensional ou tridimensional tem um custo computacional significativo. Belytschko *et al.* [13] propõem a seguinte alternativa no cálculo das derivadas.

A equação (2.124) pode ser reescrita por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \alpha^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}), \quad (2.128)$$

em que

$$\mathbf{A}\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}). \quad (2.129)$$

Derivando em ordem a x as equações anteriores, resulta:

$$\phi_{,x} = \alpha_{,x}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) + \alpha^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_{I,x}(\mathbf{x}), \quad (2.130)$$

$$\mathbf{A}_{,x}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\alpha_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}), \quad (2.131)$$

em que α é solução da equação (2.129). A equação (2.131) pode ser reescrita da

seguinte maneira:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\alpha_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,x}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}). \quad (2.132)$$

A partir desta equação é possível obter a factorização \mathbf{LU} para a matriz \mathbf{A} . Esta mesma factorização pode ser reutilizada para resolver o sistema de equações em que $\alpha_{,x}$ é calculado com uma única substituição para trás. O produto $\mathbf{A}_{,x}\alpha(\mathbf{x})$ pode então ser calculado computacionalmente de forma eficiente através de:

$$A_{,x}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w_{I,x} \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\alpha(\mathbf{x})], \quad (2.133)$$

visto que esta equação envolve apenas operações com vectores [42].

2.8.2 Propriedades do método EFG

As propriedades do método EFG são, em resumo, as seguintes:

- Consistência de ordem k .
- Na definição da aproximação $u^h(\mathbf{x})$ usa-se a base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, polinomial mas é possível usar outras funções de base. Por exemplo, para problemas singulares pode-se incluir outras funções particulares na base [44].
- Para garantir que as funções de forma ϕ_I sejam C^k , (aditem derivadas contínuas até à ordem k) dever-se-á escolher funções de peso C^k para o cálculo das funções ϕ_I .
- A continuidade C^1 das funções de forma e respectivas derivadas representa uma grande vantagem para o cálculo de deformações e tensões. No MEF, a continuidade C^0 obriga a recorrer a algoritmos de amaciamento e pós-processamento para o cálculo do campo das deformações e tensões.
- A partir da equação (2.128) verifica-se que as funções de forma ϕ_I definidas pelo método EFG não verificam a propriedade Delta de Kronecker pois

$\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$. Neste caso, diz-se que as funções de forma ϕ_I não são interpoladoras. Consequentemente, $u^h(\mathbf{x}_j) \neq \hat{u}_j$, ou seja os valores nodais da aproximação u^h , os $u^h(\mathbf{x}_j)$ não coincidem com os valores \hat{u}_j , designados por parâmetros nodais. Na literatura, por vezes classificam-se os \hat{u}_j como valores nodais fictícios. Em geral, \hat{u}_j não são os valores da aproximação u^h nos nós e para calcular os valores nodais $u^h(\mathbf{x}_j)$ é necessário recorrer a:

$$u^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}_j) \hat{u}_I. \quad (2.134)$$

Os valores $u^h(\mathbf{x}_j)$ dependem dos parâmetros nodais \hat{u}_j e de outros que contribuem indirectamente no cálculo do domínio de influência.

- As condições fronteira do tipo essencial não podem ser impostas directamente, tal como acontece no MEF, pelas razões indicadas no ponto anterior.
- A solução obtida pelo método é susceptível a factores inerentes ao próprio método, tais como: a escolha das funções da base, $p_j(x)$, as funções de peso $w(x)$, o domínio sobre o qual a função de peso é aplicada e o processo do cálculo numérico dos integrais no domínio Ω . A escolha da função de peso $w(\mathbf{x})$ e a dimensão do domínio de influência são decisivos na aproximação. A dimensão do domínio de influência é um aspecto fundamental, visto que não pode ser demasiado pequeno, porque a matriz \mathbf{A} deverá ser não singular (eq. 2.111), mas por outro lado à medida que aumenta vai-se perdendo a esparsidade da matriz de rigidez.
- O processo de cálculo das funções de forma, respectivas derivadas e imposição das condições fronteira do tipo essencial é mais complexo, em termos de implementação, do que no MEF. Uma consequência directa disto é que computacionalmente torna-se mais dispendioso.

2.9 Método Petrov-Galerkin Local (MLPG)

O método *Meshless Local Petrov Galerkin* (MLPG), que foi desenvolvido por Atluri *et al.* [3], baseia-se em termos de formulação na aproximação dos mínimos quadrados móveis caracterizando-se essencialmente pelo seguinte: para cada nó do domínio, *i-ésimo* nó associa um subdomínio $\Omega_I \subset \Omega$ que corresponde ao suporte da função de forma do nó. O método dos resíduos pesados é usado para cada um destes subdomínios obtendo-se uma forma fraca, usualmente designada por forma fraca local porque restringe-se apenas a Ω_I .

Para ilustrar melhor alguns aspectos do método considere-se por exemplo a equação de Poisson,

$$\nabla^2 u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.135)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{em} \quad \Gamma_u, \quad (2.136)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em} \quad \Gamma_t. \quad (2.137)$$

Efectuando um procedimento análogo ao que foi feito no capítulo 2 para esta equação, usando o método dos resíduos pesados e impondo as condições de fronteira através do método da penalidade, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega} f v_i dx dy - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma \\ & + \alpha_u \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) v_i d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.138)$$

em que α_u é o parâmetro de penalidade. A equação anterior é a forma fraca global associada à equação de Poisson considerada.

Seja Ω_I o subdomínio que corresponde ao suporte da função de forma associada ao *I-ésimo* nó. Aplicando o procedimento anterior para o subdomínio Ω_I obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_I} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega_I} f v_i dx dy - \int_{\partial\Omega_I} \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma \\ & + \alpha_u \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) v_i d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Pode-se considerar que $\partial\Omega_I$ apresenta três partes:

1. Γ_I , onde não são impostas condições de fronteira.
2. Γ_I^u onde são impostas condições de fronteira do tipo essencial. $\Gamma_I^u = \partial\Omega_I \cap \Gamma_u$.
3. Γ_I^t onde se tem condições de fronteira do tipo natural. $\Gamma_I^t = \partial\Omega_I \cap \Gamma_t$.

A forma fraca local resultante é dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_I} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega_I} f v_i dx dy - \int_{\Gamma_I} \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_I^u} \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} \right) v_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_I^t} \bar{q} v_i d\Gamma + \alpha_u \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) v_i d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Este método tem sido classificado por alguns autores, nomeadamente Atluri como um método puramente sem malha porque prescinde de uma malha de integração para o domínio Ω , visto que não usa a forma fraca global. Apesar de não ser necessária uma estrutura de elementos para integração do domínio Ω , por observação de (2.140) conclui-se que é preciso integrar em subdomínios, que podem ter geometrias irregulares e que variam visto que resultam das intersecções dos suportes das funções de forma com o domínio Ω .

Essencialmente o que diferencia o método Petrov-Galerkin local, é o facto de as funções teste \mathbf{v} e tentativa \mathbf{u} pertencerem a espaços de funções diferentes. Atluri mostrou que no contexto do MLPG, apesar de se definirem as funções tentativa \mathbf{u} segundo os mínimos quadrados móveis, pode-se escolher diferentes funções teste a partir de outras funções, assim como os subdomínios das funções \mathbf{u} e \mathbf{v} podem ter tamanhos e formas diferentes. Esta flexibilidade, em termos de

escolhas originou algumas variantes do método MLPG. Uma descrição detalhada sobre o método MLPG e derivados é abordada por Atluri [2].

2.10 Método da Partição da Unidade (PUM)

A aproximação pela partição da unidade foi usada pela primeira vez por Babuška *et al.* [7], subsequentemente por Melenk [79, 80] e por Duarte *et al.* [41] e desenvolvida posteriormente em diversos trabalhos [8, 9, 81, 40, 41, 68, 87]. O método da partição da unidade, apresentado formalmente por Babuška e Melenk [9] surgiu como um método sem malha que introduziu um conceito inovador: a possibilidade de definir aproximações que usam outras funções na base, além dos polinómios, as quais podem incluir polinómios de Taylor, polinómios de Lagrange ou outro tipo de funções, convenientemente escolhidas e que não têm de ser necessariamente expressões polinomiais.

O objectivo deste método era ultrapassar uma limitação do método dos elementos finitos: a aproximação feita unicamente por funções polinomiais em que o grau da função polinomial local usada num elemento está limitado pelo número de nós do elemento. Para Babuška, os espaços locais de aproximação polinomial podem não ter as propriedades mais adequadas para resolver certas equações associadas a problemas muito específicos, como por exemplo modelação de compósitos, materiais com microestruturas e problemas com soluções altamente oscilatórias de fronteiras não limitadas. Em certas situações o método dos elementos finitos não é eficiente ou envolve uma implementação que computacionalmente, tem um custo muito elevado. O método PUM, propõe-se a incluir, à priori no espaço da aproximação, informação adicional sobre o comportamento local da solução da equação diferencial a resolver. O PUM/PUFEM pode ser visto como a generalização das versões h , p , e hp do MEF. A aproximação definida pelo PUM/PUFEM baseia-se na formulação variacional e a concepção dos espaços das funções tentativa e das funções teste é feita tendo em consideração o problema a resolver. Uma descrição detalhada sobre a fundamentação matemática dos métodos PU/PUFEM é apresentada por Babuška

e Melenk [8].

Actualmente, segundo Babuška *et al.* [6] a aproximação pela partição da unidade é usada em vários sentidos, segundo nomes diferentes: método das nuvens, Hp-Clouds, XFEM e método das esferas finitas [41, 108, 109, 35]. Estes métodos diferem basicamente na forma das funções que são usadas pela partição da unidade e na escolha de espaços locais diferentes.

Aspectos fundamentais do(s) método(s) PUM/PUFEM

Os aspectos fundamentais do(s) método(s) PUM/PUFEM são:

- Definir a cobertura $\{\Omega_I\}_{I=1}^N$ para o domínio de interesse Ω , em que $\Omega \subset \cup_{I=1}^N \Omega_I$.
- Definir $\{\phi_I\}$ uma partição da unidade para a cobertura $\{\Omega_I\}_{I=1}^N$, i.e.,

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.141)$$

- Para cada Ω_I associa-se χ_I , o espaço de funções no qual $u|_{\Omega_I}$ pode ser bem aproximada. Os espaços χ_I são referidos como espaços de aproximação local. O espaço global de aproximação é dado por:

$$\chi = \sum_{I=1}^N \phi_I \chi_I. \quad (2.142)$$

- A forma de cada Ω_I pode ser uma nuvem, um elemento típico dos que se usam nas malhas dos elementos finitos (triângulo ou quadrado) ou pode ainda ter outra forma geométrica.

A forma mais geral dos métodos PUM e PUFEM pode ser dada por:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}_I) \quad (2.143)$$

$$= \sum_{I=1}^N \phi_I \left(\sum_{j=1}^q a_{jI} p_j(\mathbf{x}) \right), \quad (2.144)$$

em que

$$\mathbf{p}^T = \left[1 \quad x \quad \dots \quad x^k \quad \tilde{p}_{k+2} \quad \dots \quad \tilde{p}_q \right] \quad (2.145)$$

$$\mathbf{a}_I = \left[a_{0I} \quad a_{1I} \quad \dots \quad a_{kI} \quad \tilde{a}_{k+2,I} \quad \dots \quad \tilde{a}_{q,I} \right]. \quad (2.146)$$

Nas equações anteriores a_{iI} representa a i -ésima componente de \mathbf{a}_I e $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ é uma base que tem monómios até uma certa ordem (neste caso k) e as restantes componentes $\tilde{p}_{k+2}, \dots, \tilde{p}_q$ são elementos de χ_I . Os coeficientes a_{iI} e \tilde{a}_{iI} são as incógnitas da aproximação e podem ser calculados por um procedimento de Galerkin ou de colocação. Uma opção habitual, no contexto do método da partição da unidade é escolher para ϕ_I as funções de Shepard:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{w_I(\mathbf{x})}{\sum w_I(\mathbf{x})}, \quad (2.147)$$

em que $w_I(x)$ é uma função de peso com suporte compacto. Por exemplo, para a resolução da equação de Helmholtz, no caso unidimensional, Babuška e Melenk [8] usaram a seguinte base $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{p}^T = \left[1 \quad x \quad \dots \quad x^k \quad \sinh nx \quad \cosh nx \right]. \quad (2.148)$$

Os método das nuvens HP, (HP-Clouds) e o método dos elementos finitos generalizado, (GFEM), referidos nos pontos seguintes, baseiam-se nos conceitos dos métodos da partição da unidade (PUM/PUFEM). Caracterizam-se essencialmente pela possibilidade de introduzir um enriquecimento nodal não homogéneo.

2.10.1 Método dos Elementos Finitos Generalizado (GFEM)

Para Babuška [6], o GFEM foi formulado no trabalho apresentado por Babuška *et al.* [9], aonde foi referido como método da partição da unidade e só mais tarde Strouboulis *et al.* [106, 107] apresentaram formalmente como método dos

elementos finitos generalizado. O método dos elementos finitos generalizado (GFEM) é uma combinação do método dos elementos finitos e do método da partição da unidade (PUM). O clássico MEF é um caso particular do método dos elementos finitos generalizado. O método GFEM tem-se revelado apropriado para problemas que envolvem domínios com fronteiras móveis ou fronteiras indefinidas, nomeadamente em propagação de fendas ou fronteiras livres. Para este tipo de problemas o MEF requer uma malha complexa que se ajuste ao domínio e por vezes é inevitável o processo de remalhamento. A aplicação do GFEM, para estes casos, através do uso de funções especiais permite evitar o remalhamento ou pelo menos reduzi-lo significativamente.

GFEM : Aspectos básicos

Os aspectos básicos do GFEM são:

- Usa uma malha independente (parcialmente ou totalmente) do domínio do problema Ω .
- Define uma malha de elementos, no sentido clássico, para um domínio Ω' em que $\Omega \subset \Omega'$. Escolhe-se preferencialmente para o domínio Ω' uma geometria simples, por exemplo um rectângulo. Esta malha é usada para a construção da base da aproximação e em geral designada por malha de aproximação.
- Permite uma certa liberdade para escolher as funções ϕ_I (desde que formem a partição da unidade). Algumas possibilidades de escolha são: funções de Shepard, as funções de forma usadas no método da partícula RKPM, as funções de forma de outros métodos sem malha ou mesmo as convencionais funções interpoladoras do MEF.
- A malha de integração tem um papel fundamental. Não tem que ser coincidente com a malha de aproximação, mas pode-se definir muito facilmente a partir de cada elemento da malha de aproximação, procedendo a refinamentos. O controlo adaptativo do erro no processo da integração é fundamental para garantir a convergência numérica do método.

2.10.2 Método das nuvens HP (HP-Clouds)

O método das nuvens HP (HP-Clouds), foi apresentado por Duarte e Oden [41, 40], a partir do conceito de aproximação pela partição da unidade, que tinha sido introduzido por Babuška [7]. O método das nuvens HP caracteriza-se pelo seguinte: usa para partição da unidade as funções de aproximação ϕ_I definidas segundo os mínimos quadrados móveis. As funções de aproximação, são definidas da seguinte maneira: multiplica-se a partição da unidade, obtida pelos mínimos quadrados móveis, por outras funções que têm propriedades adequadas ao problema em causa.

A formulação é dada por:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})(u_I + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}_I) \quad (2.149)$$

$$= \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})(u_I + \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{p}_{Ij}^T(\mathbf{x})a_{Ij}), \quad (2.150)$$

em que ϕ_I são as funções definidas segundo o método dos mínimos quadrados móveis, \mathbf{p}_{Ij} são os n_I polinómios de grau maior a k que estão associados a cada nó \mathbf{x}_I e u_I e a_{Ij} são os coeficientes a determinar. Os polinómios \mathbf{p}_{Ij} diferem de nó para nó, e por isso permitem aumentar a dimensão do espaço de aproximação. A utilização das funções ϕ_I , definidas segundo os mínimos quadrados móveis garante que a aproximação tenha consistência de ordem k , em que $k \geq 1$.

- Na cobertura a forma de cada Ω_I pode ser arbitrária. No caso bidimensional, poder ser um rectângulo, uma elipse ou uma circunferência. No contexto *Hp-Clouds*, cada Ω_I é designado por nuvem.
- As funções ϕ_I são definidas segundo a formulação dos mínimos quadrados móveis.
- A imposição das condições de fronteira do tipo essencial é feita através do método dos multiplicadores de Lagrange.
- Usa quadratura gaussiana no processo de integração numérica.

A maior vantagem do método das nuvens HP é permitir que a base varie de nó para nó, facilitando processos de *adaptatividade hp*. É possível aumentar o grau do polinómio que contribui na construção das funções de forma (*adaptatividade p*), assim como a introdução de novos nós (*adaptatividade h*).

2.11 Método do Elemento Natural (NEM)

O método do elemento natural (NEM) [19], baseia-se na formulação de Galerkin, tal como o MEF ou o método EFG e usa o conceito de interpolação por vizinhos naturais para definir as funções tentativa e teste. A técnica de interpolação por vizinhos naturais foi introduzida por Sibson [102] e usa uma construção geométrica muito conhecida, que se designa por diagrama de Voronoi ou arranjo de Dirichlet.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \Omega$ um conjunto de N nós distintos. Por razões de facilidade de exposição, considerar-se-á o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 .

- O diagrama de Voronoi consiste em dividir o plano num conjunto de N regiões ou células ϑ_I , em que cada ϑ_I está associado ao nó \mathbf{x}_I e que se caracteriza pelo seguinte: qualquer ponto da célula ϑ_I está mais perto do nó \mathbf{x}_I do que qualquer outro ao nó $\mathbf{x}_J, J \neq I$.
- Cada ϑ_I designa-se por célula de Voronoi do I -ésimo nó.
- Para um conjunto de N nós é sempre possível definir um único diagrama de Voronoi.
- A triangulação Delaunay, é o dual do diagrama de Voronoi e obtêm-se unindo os nós cujas células de Voronoi têm lados comuns. Em particular, os nós \mathbf{x}_I e \mathbf{x}_J são vizinhos se ϑ_I e ϑ_J têm algum lado comum. Se o ponto $\bar{\mathbf{x}}$ e o nó \mathbf{x}_I têm uma aresta de Voronoi comum, então diz-se que \mathbf{x}_I é o vizinho natural do ponto $\bar{\mathbf{x}}$.

A figura 2.3 tem como objectivo exemplificar alguns dos conceitos básicos descritos e que estão associados à vertente geométrica que caracteriza este método. Nesta figura está representado o diagrama de Voronoi para um domínio Ω em que se consideram 6 nós. A figura ilustra ainda o processo de construção do diagrama de Voronoi, células de Voronoi de primeira e segunda ordem quando se introduz um ponto \mathbf{x} em Ω .

- Na figura 2.3, o ponto \mathbf{x} tem 4 vizinhos naturais, a nomear: \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 e \mathbf{x}_4 .
- A célula de Voronoi (de primeira ordem) do ponto \mathbf{x} passa a ser o polígono $abcd$.

As células de Voronoi de segunda ordem para os nós \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 e \mathbf{x}_4 definem-se respectivamente por polígonos de vértices:

- $abfe$
- $fbce$
- $defc$
- aed .

A função de forma ϕ_I associada ao I -ésimo nó, no ponto \mathbf{x} define-se por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_I(\mathbf{x})}{\kappa(\mathbf{x})}, \quad (2.151)$$

em que κ_I é a área da célula de Voronoi de segunda ordem do I -ésimo nó e κ é a área total da célula de Voronoi de primeira ordem do ponto \mathbf{x} . As funções de forma ϕ_I (2.151) designam-se por funções de Sibson.

Como \mathbf{x} tem 4 vizinhos naturais, então:

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{A_{abfe}}{A_{abcd}}, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = \frac{A_{fbce}}{A_{abcd}}, \quad (2.152)$$

$$\phi_3(\mathbf{x}) = \frac{A_{defc}}{A_{abcd}}, \quad \phi_4(\mathbf{x}) = \frac{A_{aed}}{A_{abcd}}. \quad (2.153)$$

Uma outra alternativa é usar as funções de forma de Laplace, pois os interpoladores de Laplace também se baseiam em vizinhos naturais, definidas por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\varpi_I(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N \varpi_J(\mathbf{x})}, \quad (2.154)$$

em que

$$\varpi_J(\mathbf{x}) = \frac{c_J(\mathbf{x})}{h_J(\mathbf{x})}. \quad (2.155)$$

Na equação anterior, c_J é o comprimento da aresta de Voronoi (comun a \mathbf{x}_J e a \mathbf{x}) e $h_J = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)$ a distância entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_J . Uma das vantagens das funções de forma de Laplace é a sua implementação, pois a equação (2.154) apenas usa medições do comprimento enquanto que as funções de Sibson requerem o cálculo da área de polígonos. As propriedades do método do elemento natural (NEM) são:

- As funções de forma tal como são definidas verificam a propriedade Delta Kronecker e portanto são interpoladoras. Este aspecto é uma vantagem relativamente a outros métodos sem malha, pois simplifica a imposição das condições de fronteira do tipo essencial.
- As funções de forma são não negativas, ($\phi_I \geq 0$), reproduzem de forma exacta um campo linear, sendo no entanto de classe C^0 [110].
- O cálculo das funções de forma é laborioso apesar da sua construção ser puramente geométrica.

Na referência [111], o NEM é aplicado num contexto sem malha, em que as funções teste e tentativa, a incorporar na formulação de Galerkin são construídas a partir da discretização do domínio por um conjunto de nós. A integração numérica faz-se através de uma estrutura de elementos. O método do elemento natural foi usado para resolução de equações diferenciais que surgem em problemas estáticos e dinâmicos da elasticidade bidimensional. No trabalho desenvolvido por Cueto

[34], este método foi aplicado para um problema da mecânica computacional, não linear, tridimensional na área da biomecânica.

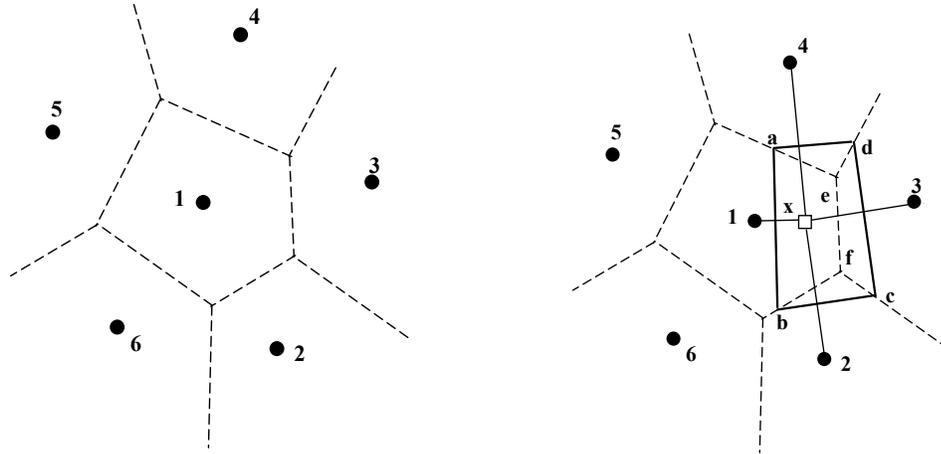


Figura 2.3: Construção de vizinhos naturais: (a) diagrama de Voronoi original; (b) células de Voronoi de ordem 1 e ordem 2 para o ponto \mathbf{x} .

2.12 Método dos Pontos Finitos (FPM)

O método dos pontos finitos (FPM) foi desenvolvido por Oñate *et al.* [89, 90] e define a aproximação u^h para a função u em cada ponto \mathbf{x} do domínio Ω , recorrendo ao método dos mínimos quadrados ponderados fixos. A função u^h que aproxima u é definida por:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (2.156)$$

em que os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são determinados segundo o procedimento habitual do método dos mínimos quadrados.

No FPM a discretização da PDE é feita pela via da colocação. Tal como noutros métodos que usam o procedimento da colocação, surgem algumas deficiências ao nível da convergência numérica. Uma técnica de estabilização,

designada por FIC, baseada no cálculo finito é usada na formulação para melhorar a solução numérica. As derivadas de u^h têm que ser calculadas, pelo menos até à ordem em que aparecem na PDE, para efeitos de substituição o que é uma desvantagem relativamente a outros métodos baseados nas formas fracas. O método do ponto finito usa o conceito de derivada difusa, proposta por Nayroles *et al.* [86]. Este método tem sido usado em várias aplicações de mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, em particular para problemas de difusão e escoamentos incompressíveis [91].

2.13 Funções de base radial (RBF)

As funções de base radial têm sido uma ferramenta poderosa para problemas de cálculo multivariado. Apesar de as funções de base radial terem sido usadas essencialmente para ajuste de dados, as primeiras aplicações destas para resolução de equações diferenciais em derivadas parciais foram feitas a partir dos anos 90. Um trabalho pioneiro foi proposto por Kansa [58]. Posteriormente, Sharan *et al.* [100] usaram o mesmo método para equações diferenciais em derivadas parciais elípticas. Em qualquer dos casos foi usado o método da colocação.

Seja $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^d$. A interpolação de base radial u_f para a função f é dada por:

$$u_f(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \bar{a}_I \Upsilon(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_I), \quad (2.157)$$

em que $\Upsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função fixa, definida positiva e simétrica. Os escalares \bar{a}_I são as incógnitas. Em muitos casos, Υ é radial na medida em que existe uma função $\tilde{\Upsilon}$ univariável tal que:

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \tilde{\Upsilon}(\|\mathbf{x}\|_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.158)$$

Alguns exemplos de funções de base radial são:

- Suporte global

$$\begin{aligned} \Upsilon(r) &= (r^2 + c^2)^{1/2} && \text{multiquádrica} \\ \Upsilon(r) &= (r^2 + c^2)^{-1/2} && \text{multiquádrica inversa} \\ \Upsilon(r) &= \exp^{-c^2 r^2} && \text{gaussiana} \\ \Upsilon(r) &= r^2 \log r && \text{Plate Thin Spline} \end{aligned}$$

- Suporte local

$$\begin{aligned} \Upsilon(s) &= (1-s)^5(8+40s+48s^2+25s^3+5s^4), && s \leq 1 && \text{Spline} \\ \Upsilon(s) &= (1-s)^6(6+36s+82s^2+72s^3+30s^4+5s^5), && s \leq 1 && \text{Spline} \end{aligned}$$

em que c é o parâmetro de forma. A escolha deste parâmetro é um factor importante na precisão numérica do método. No caso das funções de suporte local, $s = r/\delta$ em que δ é o tamanho do suporte. As funções de suporte global, que são as mais usadas não tem suporte compacto. Designam-se usualmente por funções de base radial clássicas. Funções de base radial com suporte compacto ainda estão em desenvolvimento. A interpolação através das funções de base radial têm tido grande aplicação no contexto dos métodos sem malha. No sentido de se obter aproximações com funções de base radial completas, um polinómio $\bar{p}(\mathbf{x})$ é acrescentado à equação, através do termo:

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k a_j p_j(\mathbf{x}), \quad (2.159)$$

em que $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é uma base polinomial completa e a_j são os coeficientes a determinar. A forma geral para a aproximação é dada por:

$$u_f(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N a_I \Phi(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_I) + \sum_{j=1}^k \bar{a}_j p_j(\mathbf{x}). \quad (2.160)$$

Wendland [114] estudou a discretização de Galerkin de equações em derivadas parciais, através da colocação, usando funções de base radial. A aproximação desenvolvida foi classificada como um método sem malha.

Wang e Liu apresentaram o método sem malha radial de interpolação no ponto (PIM). Este método combina a forma fraca de Galerkin com funções de base radial, de suporte global e funções polinomiais básicas. Muito recentemente, Xiao [116] usou funções de base radial com suporte compacto para definir funções tentativa no contexto do método Petrov-Galerkin local (MLPG).

2.14 Aspectos relevantes na implementação numérica dos métodos sem malha

2.14.1 Imposição das condições de fronteira essenciais

As funções aproximadas definidas por diversos métodos sem malha, nomeadamente o SPH, EFG e RKPM, não têm carácter interpolatório, i.e,

$$\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}, \quad (2.161)$$

em que \mathbf{x}_J é o j -ésimo nó, ϕ_I é a função de forma associada ao i -ésimo nó e δ_{IJ} é o símbolo de Kronecker. A equação (2.161) traduz simplesmente que as funções ϕ_I não satisfazem o critério de Kronecker. Consequentemente, na aproximação dada por

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) \hat{u}_I, \quad (2.162)$$

tem-se que

$$\hat{u}_I \neq u^h(\mathbf{x}_I). \quad (2.163)$$

Isto significa que os coeficientes do interpolador não coincidem nos valores nodais. Por esta razão, uma questão importante nos métodos sem malha é a imposição das condições de fronteira essenciais, fundamental na resolução de equações diferenciais, visto que devido a (2.161) não se podem impor directamente. Este

aspecto tem sido apontado como uma grande desvantagem dos métodos sem malha face ao método dos elementos finitos. No método dos elementos finitos as funções são inerentemente interpolatórias e a imposição das condições fronteira essenciais é imediata. Seguidamente indicam-se alguns métodos propostos por diversos autores para impor as condições de fronteira, destacando-se os mais relevantes:

- Método dos multiplicadores de Lagrange [14, 75, 36].
- Método da penalidade [117].
- Método da colocação [13, 117].
- Acoplamento com o método dos elementos finitos [59].
- Método da transformação: completa/mista [28, 30].
- Método do núcleo da fronteira singular [28, 30].

O método dos multiplicadores de Lagrange e da penalidade são os mais usados e são descritos e implementados nos exemplos apresentados no capítulo 3.

2.14.2 Integração numérica

No caso em que o método sem malha usa a forma fraca surge inevitavelmente o cálculo numérico de integrais. Este cálculo tem uma grande influência na solução numérica final e para o efectuar há essencialmente três alternativas:

- Integração nodal
- Estrutura celular (regular)
- Malha auxiliar (*mesh background* na simbologia inglesa)

A integração nodal, por vezes designada de integração nodal directa baseia-se num método de quadratura numérica em que os pontos de integração são os próprios nós \mathbf{x}_I da discretização do domínio. Neste caso o integral é calculado por:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Gamma = \sum_{I=1}^{n_P} f(\mathbf{x}_I) \Delta V_I, \quad (2.164)$$

em que n_P é o número de nós e ΔV_I é o peso associado ao I -ésimo nó. A integração nodal é uma técnica de implementação fácil e rápida. No entanto, há dois aspectos muito importantes associados a esta técnica: a indefinição do valor do peso ΔV_I a atribuir a cada nó e uma grande sensibilidade da solução ao tipo de integração adoptada. Os métodos de integração nodal directa são susceptíveis de apresentar instabilidade numérica. Algumas autores propuseram técnicas de estabilização numérica para integração nodal. Chen *et al.* [31, 32] apresentaram o método de integração nodal estabilizada para métodos sem malha de Galerkin. Esta proposta tem por objectivo eliminar instabilidade numérica que surge quando se aplica integração nodal directa à forma fraca. Os autores consideraram esta técnica eficiente comparativamente à quadratura gaussiana para situações específicas de discretizações de domínios irregulares, problemas de incompressibilidade e de não linearidade.

Alternativamente, quando se opta por uma estrutura celular ou malha auxiliar, para efeitos de integração numérica aplica-se quadratura numérica e o integral é calculado por:

$$\int_{\Omega} f(\xi) d\xi = \sum_{I=1}^{n_q} f(\xi_I) \hat{w}_I, \quad (2.165)$$

em que n_q são os pontos de quadratura, ξ_I é o I -ésimo ponto e \hat{w}_I o respectivo peso. Diferentes escolhas para a localização dos pontos ξ_I e dos valores para \hat{w}_I originam vários métodos de quadratura numérica tais como: quadratura Monte-Carlo, quadratura Gaussiana, a mais usual, e a regra do trapézio.

No caso de se usar uma estrutura celular regular, define-se um conjunto de células regulares para o domínio de integração e aplica-se quadratura numérica

para cada uma destas células. No caso de uma malha auxiliar define-se uma malha para o domínio de integração, não necessariamente regular e que pode conjugar elementos que têm formas e tamanhos diferentes. Este tipo de malha é frequentemente usada porque adapta-se facilmente a domínios com geometrias irregulares. Em ambos os casos, estrutura (malha) de células ou malha auxiliar há dois aspectos importantes: os vértices que definem as células (ou elementos) não têm de depender dos nós da discretização, i.e., a malha pode ser completamente independente da distribuição nodal. O outro aspecto, é o facto de o número de pontos de integração para cada uma das células poder ser variável. Para determinar o número de pontos a usar em cada célula pode-se usar vários critérios, alguns dos quais são descritos por Belytschko *et al.* [14] e Zhu *et al.* [117].

Capítulo 3

Exemplos Numéricos em Problemas Lineares

A partir do estudo feito no capítulo anterior, optou-se por seleccionar o método EFG. Para o efeito, implementou-se o método num código, usando como linguagem de programação o Matlab para analisar alguns problemas no caso bidimensional cuja solução analítica é conhecida. Pretendeu-se desta forma validar o código e comparar os resultados obtidos com os apresentados na literatura. Como tal, os seguintes exemplos de aplicação foram considerados: resolução de uma equação de Laplace, problema de uma viga em consola com tensão tangencial parabólica na extremidade livre e de uma placa infinita com um orifício central. Inicialmente abordaram-se alguns aspectos relativos à implementação do método para estes exemplos de aplicação, tais como: a formulação variacional e a imposição das condições de fronteira do tipo essencial.

3.1 Aplicação do método EFG à equação de Poisson

Como exemplo de um problema de valor na fronteira considera-se a seguinte equação de Poisson com condições do tipo Dirichlet:

$$\nabla^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma. \quad (3.2)$$

De acordo com o desenvolvimento feito no capítulo 2 a forma fraca para a equação (3.1) é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega - \int_{\Gamma} v (\mathbf{n} \nabla u) \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (3.3)$$

3.1.1 Formulação variacional para a equação de Poisson

Considera-se o seguinte espaço de solução para as funções tentativa

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) = \left\{ u \in H_1(\Omega) \mid u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma \right\}, \quad (3.4)$$

e o espaço para as funções teste,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H_1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{em } \Gamma \right\}, \quad (3.5)$$

em que $H^1(\Omega)$, espaço de Sobolev de grau 1, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \, i = 1, 2 \right\}, \quad (3.6)$$

e

$$L_2(\Omega) = \left\{ f : \int_{\Omega} f^2(x) \, dx < \infty \right\}. \quad (3.7)$$

O problema variacional associado à equação (3.1) é formalizado da seguinte

maneira:

$$\text{determinar } u \in H^1_\Gamma(\Omega),$$

tal que:

$$\alpha(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad (3.8)$$

em que

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, d\Omega, \quad (3.9)$$

$$F(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega. \quad (3.10)$$

Neste caso a forma bilinear α é simétrica e contínua e o problema descrito é equivalente à minimização do seguinte funcional quadrático [96]:

$$J(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u \, d\Omega - \int_\Omega f u \, d\Omega \quad u \in H^1(\Omega). \quad (3.11)$$

3.1.2 Imposição das condições de fronteira do tipo essencial

Como já foi referido, aplicando o método dos elementos finitos à formulação desenvolvida no ponto anterior, é possível seleccionar funções u e v que pertençam respectivamente a H^1_Γ e a H^1_0 , o que permite a imposição directa das condições de fronteira essencial $u = \bar{u}$ em Γ .

Para os métodos sem malha cujas funções de forma não têm carácter interpolatório, é difícil seleccionar um subespaço de $S \subset H^1(\Omega)$ tal que S possa ser usado como espaço de solução para as funções tentativa (espaço de aproximação) e ao mesmo tempo estas funções verificarem a condição de fronteira Dirichlet em S . Consequentemente torna-se necessário recorrer a outras alternativas para imposição das condições de fronteira do tipo essencial.

3.1.2.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

A solução do problema descrito pelas equações (3.1) e (3.2) pode ser obtido como a solução do seguinte problema de minimização com restrição:

Minimizar o funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, d\Omega - \int_{\Gamma} v(\mathbf{n} \nabla u) \, d\Gamma - \int_{\Omega} f u \, d\Omega, \quad (3.12)$$

sujeito à restrição

$$u = \bar{u} \quad \text{em} \quad \Gamma. \quad (3.13)$$

Recorrendo ao método do multiplicador de Lagrange define-se o seguinte funcional L em $H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ por:

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, u - \bar{u} \rangle, \quad (3.14)$$

$$= J(u) + \int_{\Gamma} \lambda(u - \bar{u}) \, d\Gamma, \quad (3.15)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno definido em $L^2(\Omega)$ (3.7). O novo princípio variacional associado às equações anteriores é dado por:

determinar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega - \int_{\Gamma} v(\mathbf{n} \nabla u) - \int_{\Gamma} v \lambda \, d\Gamma = \int_{\Omega} v f \, d\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.16)$$

$$\int_{\Gamma} \gamma(u - \bar{u}) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (3.17)$$

em que γ é a variação do multiplicador de Lagrange ($\gamma = \delta\lambda$). Para discretizar o princípio variacional anterior é necessário escolher um espaço de interpolação para o multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$, em que Γ_u representa a fronteira onde

as condições essenciais são impostas. Seguidamente apresentam-se algumas alternativas [42]:

- interpolação ao longo de Γ_u baseada no método dos elementos finitos:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I \in I_{EF}} N_I(s) \lambda_I, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (3.18)$$

em que I_{EF} é o conjunto de índices dos nós da malha de elementos finitos em Γ_u , $N_I(s)$ é o interpolador de Lagrange e s é o comprimento do arco ao longo da fronteira. Para um ponto s do e -ésimo elemento de fronteira definido por s_e e s_{e+1} , o interpolador linear é definido por

$$N_1(s) = \frac{s - s_e}{s_{e+1} - s_e}, \quad N_2(s) = 1 - N_1(s). \quad (3.19)$$

- interpolação baseada nas funções de forma associadas exclusivamente aos nós localizados em T_u . Neste caso,

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I \in I_u} \phi_I(\mathbf{x}) \lambda_I. \quad (3.20)$$

I_u é o conjunto de índices dos nós localizados em Γ_u . Em geral, as funções ϕ_I são as mesmas (não têm de ser necessariamente) que se usam para a aproximação de u^h no domínio.

- na interpolação considera-se todas as funções de forma associados aos nós (não se restringe apenas aos pertencentes a Γ_u) cujo suporte intersecta Γ_u .

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I \in I_{\Omega_u}} \phi_I(\mathbf{x}) \lambda_I. \quad (3.21)$$

I_{Ω_u} é o conjunto de índices dos nós do domínio Ω cujo domínio de influência intersecta Γ_u .

- método de colocação directa, considera-se:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I \in I} \tilde{\phi}_I(\mathbf{x}) \lambda_I, \quad (3.22)$$

em que $\tilde{\phi}_I(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$, δ é a função delta de Dirac.

Nesta descrição optou-se pela aproximação definida em (3.18) porque é consistente e de fácil implementação. De facto, para problemas bidimensionais a definição de uma malha de elementos para a fronteira Γ_u (malha de elementos unidimensional) não envolve grande custo computacional. A imposição das condições de fronteira essenciais, através do método dos multiplicadores de Lagrange, tem no entanto, a desvantagem de aumentar o número de incógnitas do problema. No âmbito dos métodos sem malha, quando se usa este método para impor as condições de fronteira essenciais é necessário definir separadamente, como foi referido, um conjunto de funções para os multiplicadores de Lagrange. Segundo Babuška para se obter uma aproximação numérica convergente é necessário que os espaços de aproximação para o multiplicador Lagrange λ e para os deslocamentos \mathbf{u} verifiquem a condição *inf-sup* e a condição de estabilidade Babuska-Brezzi [4, 20]. Por esta razão, é preciso conjugar a selecção apropriada de funções de forma para o multiplicador de Lagrange e para os deslocamentos, garantindo que as condições de convergência são verificadas. Mendez *et al.* [43] reforçam esta ideia, constatando que a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para impor as condições de fronteira essenciais não é um processo simples.

3.1.2.2 Método da função de penalidade

Considere-se o problema de minimizar o funcional $J(u)$ (3.12) sujeito à restrição $u = \bar{u}$ em Γ . O problema de minimização com restrições pode ser resolvido com o método da função de penalidade. Seja P um funcional que satisfaz a condição $u = \bar{u}$ em Γ , por exemplo:

$$P(u) = \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (u - \bar{u})^2 d\Gamma. \quad (3.23)$$

$P(u)$ é designado por função de penalidade. A partir de $P(u)$, define-se um novo funcional:

$$\tilde{J}(u) = J(u) + \frac{\alpha_u}{2} \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u})^2 d\Gamma, \quad (3.24)$$

no qual o escalar $\alpha_u \gg 1$ é designado por parâmetro de penalidade. O problema de minimização reduz-se então à seguinte forma fraca:

determinar $u \in H^1(\Omega)$ tal que :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega + \alpha_u \int_{\Gamma} v u \, d\Gamma = \int_{\Omega} v f + \alpha_u \int_{\Gamma} v \bar{u} \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.25)$$

Este método, apesar de se basear num princípio variacional modificado não introduz nenhuma variável adicional, o que não acontece no método dos multiplicadores de Lagrange. A solução do princípio variacional obtido tende para a solução correcta quando $\alpha_u \rightarrow +\infty$.

3.1.3 Resolução da equação de Poisson pelo método EFG

Seja S^h um subespaço de Hilbert de dimensão finita gerado pelas funções de forma ϕ_I . Considere-se a discretização da forma variacional (3.16), segundo a formulação de Galerkin em que as funções tentativa e teste pertencem ao mesmo subespaço S^h . As aproximações u^h e v^h , respectivamente para funções tentativa e teste definem-se segundo o método EFG por:

$$u \simeq u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Omega} \phi_I(\mathbf{x}) u_I = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.26)$$

$$v \simeq v^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Omega} \phi_I(\mathbf{x}) v_I = \mathbf{N}_v \hat{\mathbf{v}}, \quad (3.27)$$

e as variações δu e δv , são respectivamente dadas por:

$$\delta u \simeq \sum_{I \in \Omega} \phi_I(\mathbf{x}) \delta u_I = \mathbf{N}_u \delta \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.28)$$

$$\delta v \simeq \sum_{I \in \Omega} \phi_I(\mathbf{x}) \delta v_I = \mathbf{N}_v \delta \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.29)$$

3.1.3.1 Caso 1: Método dos multiplicadores de Lagrange

Para o multiplicador de Lagrange, tem-se de forma geral que:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (3.30)$$

$$\delta \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (3.31)$$

e no sentido de minimizar o funcional $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}}^T (\nabla \mathbf{N}_u)^T (\nabla \mathbf{N}_u) \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T f d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{N}_\lambda^T (\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u \mathbf{N}_\lambda \hat{\boldsymbol{\lambda}} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \delta L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_u)^T (\nabla \mathbf{N}_u) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T f d\Omega \\ & + \delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}_\lambda^T (\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u \mathbf{N}_\lambda d\Gamma \hat{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nesta descrição opta-se para espaço de interpolação do multiplicador de Lagrange uma aproximação baseada no método dos elementos finitos, dada pela equação (3.18). A equação anterior verifica-se para qualquer $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\lambda}$, resultando no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

em que

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} (\phi_{I,x} \phi_{I,y} + \phi_{J,x} \phi_{J,y}) d\Omega, \quad I, J = 1, 2, \dots, N, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \phi_I f d\Omega, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{q}_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{u} d\Gamma, \quad (3.38)$$

e em que, no caso bidimensional

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

sendo N_k o interpolador de Lagrange definido na equação 3.19. Os vectores $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ contêm respectivamente os parâmetros nodais associados aos deslocamentos e multiplicadores de Lagrange.

3.1.3.2 Caso 2: Método da penalidade

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, discretização de (3.25), usando o método EFG, neste caso tem-se :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^u)\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{f} + \mathbf{f}^u), \quad (3.40)$$

onde \mathbf{K} , \mathbf{f} são definidos pelas equações (3.35, 3.37) e \mathbf{K}^u e \mathbf{f}^u respectivamente por:

$$\mathbf{K}_{IJ}^u = \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \phi_J d\Gamma, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}_I^u = \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (3.42)$$

3.1.4 Resolução de uma equação de Laplace 2D pelo método EFG

Como exemplo de problema de valor na fronteira, considere-se a seguinte equação de Laplace com condições de fronteira Dirichlet:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u(x, y) &= 0 & (x, y) &\in (0, 5) \times (0, 10) \\
 u(x, y) &= 0 & (x, y) &\in (\{0\} \times [0, 10]) \cup ([0, 5] \times \{0\}) \\
 u(x, y) &= 100 * \sinh(\pi y / 10) / \sinh \pi & (x, y) &\in \{5\} \times [0, 10] \\
 u(x, y) &= 100 * \sin(\pi x / 10) & (x, y) &\in [0, 5] \times \{10\}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

A solução analítica para a equação anterior é:

$$u(x, y) = \left[100 * \sinh\left(\frac{\pi y}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \right] / \sinh \pi. \tag{3.44}$$

Na aplicação do método EFG, para resolução de uma equação de Laplace, descrita pela equação 3.43, consideraram-se 3 distribuições nodais diferentes para o domínio do problema, respectivamente com 66, 121 e 231 nós. As distribuições nodais usadas estão representadas respectivamente na figura 3.1. No primeiro caso usaram-se 66 nós (6×11) com 6 e 11 nós uniformemente distribuídos respectivamente segundo o eixo dos x e y . Para os casos de 121 e 231 nós, consideraram-se distribuições nodais de 11×11 e 11×21 , de forma análoga. Definiram-se funções de forma para diferentes dimensões de domínio de influência, com o objectivo de analisar a influência deste parâmetro na solução final. As condições de fronteira essenciais foram impostas pelo método dos multiplicadores de Lagrange, na versão em que se usa a aproximação dos elementos finitos para definir o espaço de interpolação para o multiplicador (3.18). A partir da solução exacta do problema e da solução numérica obtida, para cada um dos três casos, calculou-se o erro relativo correspondente R_u . Os valores obtidos estão apresentados na Tabela 3.1. Para efeitos de estudo de convergência numérica, usou-se a seguinte norma L_2 :

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

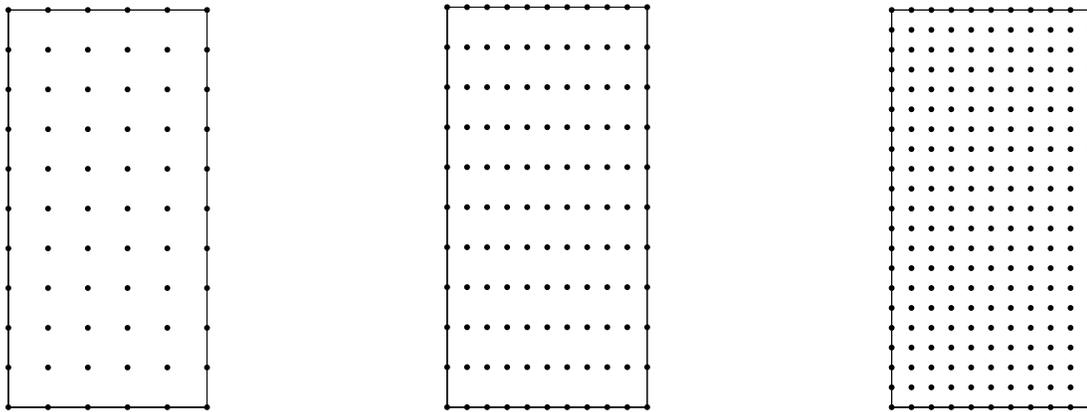
O erro relativo, R_u calculou-se a partir da expressão:

$$R_u = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (3.46)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \, d\Omega, \quad (3.47)$$

em que \mathbf{u} e \mathbf{u}^h representam respectivamente a solução exacta e a aproximada. Neste exemplo, para o cálculo de R_u , todas as normas foram calculadas através da mesma estrutura de células e com o mesmo processo de integração numérica que foi usado para a matriz \mathbf{K} . A partir dos resultados apresentados na tabela 3.1 conclui-se que a solução numérica obtida pelo método EFG para a resolução da equação de Laplace com condições de fronteira Dirichlet é muito satisfatória. A pior solução em termos de erro relativo foi obtida pela utilização de uma discretização de 66 nós, verificando-se no entanto diminuição do erro à medida que o parâmetro d_{max} aumenta. Nas simulações feitas em que se considerou a discretização de 121 nós, por exemplo, é nítido que o aumento progressivo de d_{max} originou diminuição do erro em ordem de grandeza. A figura 3.2 representa a solução exacta da equação 3.43. As figuras 3.3, 3.4 e 3.5 ilustram as soluções numéricas obtidas para a solução da equação 3.43, respectivamente para as distribuições nodais representadas na figura 3.1, em que se considerou $d_{max} = 3, 5$.

Ru			
dmax	66 nós (6 × 11)	121 nós (11 × 11)	231 nós (11 × 21)
2,5	$2,06 \times 10^{-2}$	$1,04 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-3}$
3,0	$4,80 \times 10^{-3}$	$3,10 \times 10^{-3}$	$2,90 \times 10^{-4}$
3,5	$3,10 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$6,0 \times 10^{-5}$

Tabela 3.1: Erro relativo R_u para a equação de Laplace.Figura 3.1: Representação das distribuições nodais consideradas na análise do problema, respectivamente para $6 \times 11 = 66$, $11 \times 11 = 121$ e $11 \times 21 = 231$ nós.

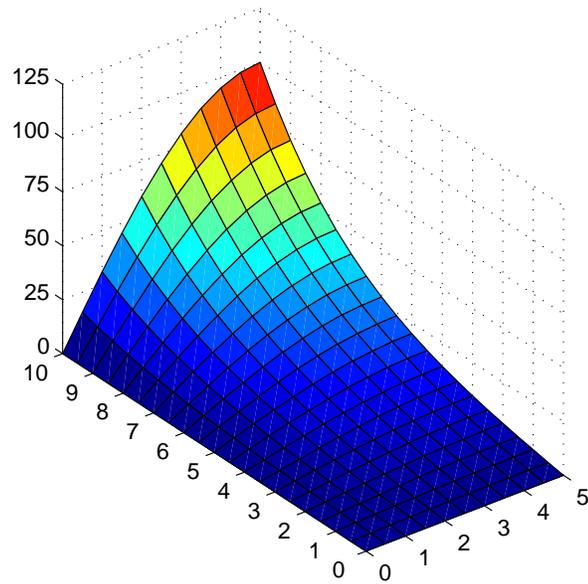


Figura 3.2: Solução analítica da equação de Laplace (eq. 3.43).

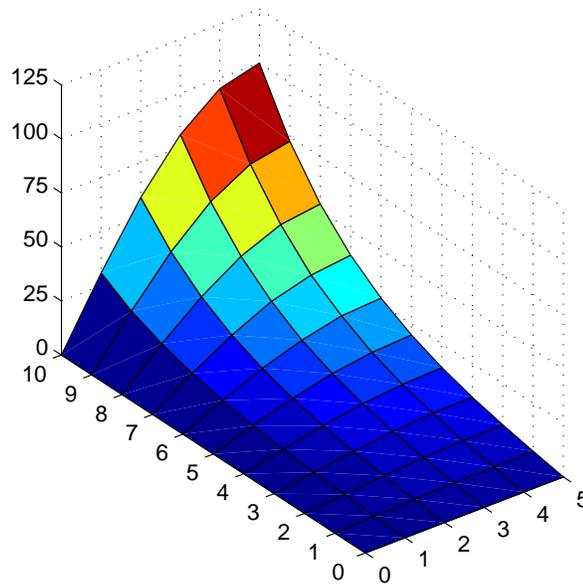


Figura 3.3: Solução numérica obtida para o caso 1: ($6 \times 11 = 66$ nós).

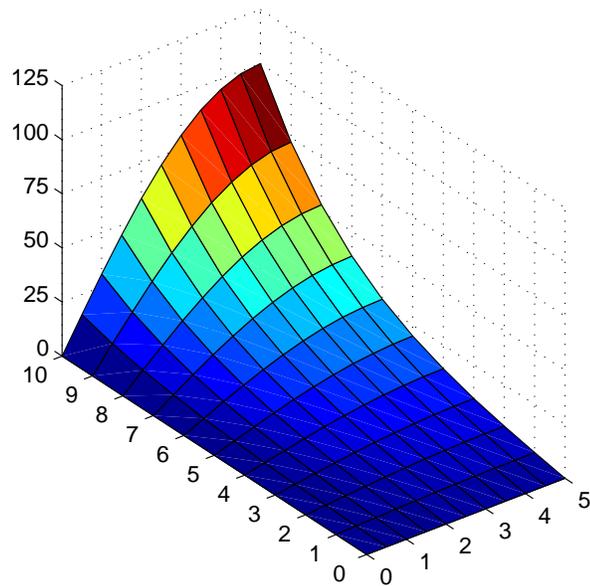


Figura 3.4: Solução numérica obtida para o caso 2: ($11 \times 11 = 121$ nós).

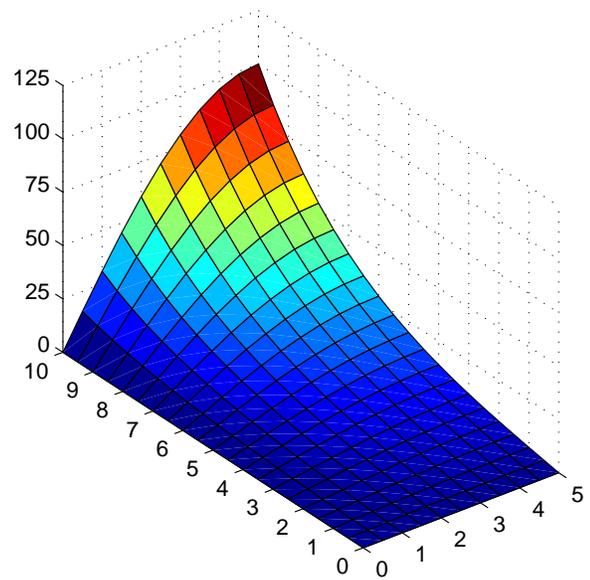


Figura 3.5: Solução numérica obtida para o caso 3: ($11 \times 21 = 231$ nós).

3.2 Equações para elasticidade bidimensional

3.2.1 Equações de equilíbrio

Considere-se o seguinte problema bidimensional associado ao comportamento elástico de um sólido, para o domínio Ω com fronteira Γ . A fronteira Γ é constituída por 2 partes complementares, Γ_u e Γ_t com $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$. As equações de equilíbrio são dadas por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (3.48)$$

sendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ é o tensor das tensões de Cauchy correspondente ao campo de deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{b} é o vector das forças externas que actua no corpo. As condições de fronteira são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.49)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (3.50)$$

em que \mathbf{n} é o vector normal unitário à fronteira Γ_t e $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ são os respectivos valores de tracção e deslocamentos prescritas em Γ_t e Γ_u . Na equação $\nabla \mathbf{u}$ é um tensor de segunda ordem que resulta do produto diádico dos vectores ∇ e \mathbf{u} , i.e:

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \otimes \mathbf{u} = u_{i,j}. \quad (3.51)$$

O tensor \mathbf{C} é o tensor de quarta ordem das constantes elásticas.

3.2.2 Formulação variacional

A formulação fraca para o problema descrito pelas equações 3.48-3.50 consiste em determinar $\mathbf{u} \in V = (H^1_\Gamma(\Omega))^2$ e $\mathbf{v} \in V_0 = (H^1_0(\Omega))^2$ tal que, multiplicando a

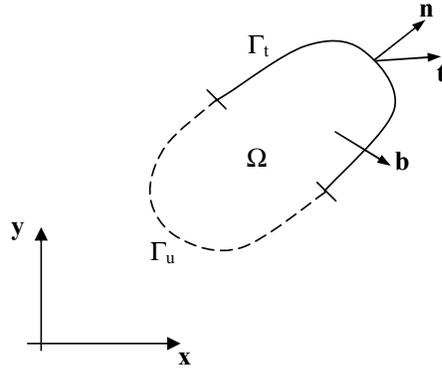


Figura 3.6: Problema de valor na fronteira elastostático.

equação (3.48) por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando por partes, obtem-se:

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega = 0. \quad (3.52)$$

Aplicando o Teorema de Cauchy resulta:

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0. \quad (3.53)$$

O operador $(:)$ é a contracção entre os tensores de segunda ordem, $\nabla \mathbf{v}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ cujo resultado é o escalar dado por:

$$\nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} = v_{i,j} \sigma_{ij}. \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) no primeiro termo de (3.53) resulta:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (3.55)$$

Considerando que $\mathbf{v} = 0$ na fronteira Γ_u , a forma fraca ou variacional associada à equação envolve determinação $\mathbf{u} \in V$ tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0. \quad (3.56)$$

Quando se pretende aplicar um método sem malha cujas funções de forma não tem carácter interpolatório a discretização directa da forma fraca (eq. 3.56), tal como se faz no MEF, não é suficiente porque as condições de fronteira do tipo essencial não são verificadas. Por esta razão, apresentam-se duas implementações alternativas, método dos multiplicadores de Lagrange e método da função de penalidade para impor as condições de fronteira essenciais.

3.2.2.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

Para impor as condições de fronteira essenciais através do método dos multiplicadores de Lagrange, como vimos anteriormente, é necessário reformular a forma fraca associada à equação (3.56), incluindo a restrição:

$$G(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (3.57)$$

obtendo-se

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma. \quad (3.58)$$

Para discretizar a equação da forma fraca (3.58) consideram-se as aproximações definidas pelo método EFG, \mathbf{u}^h e \mathbf{v}^h para as funções tentativa e funções teste, \mathbf{u} e \mathbf{v} respectivamente:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u_I, \quad (3.59)$$

$$v^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) v_I. \quad (3.60)$$

A discretização da equação (3.58) requer uma aproximação para λ , multiplicador

de Lagrange. De forma semelhante ao que foi feito para a equação de Laplace, optou-se por uma interpolação baseada no MEF (3.18).

As equações discretas finais obtêm-se por substituição das funções básicas, funções teste e multiplicador de Lagrange (3.18) na forma fraca resultando o seguinte sistema final:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J d\Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{q}_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (3.65)$$

em que \mathbf{C} , a matriz constitutiva para um material isótrópico estático linear é:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \bar{\nu})/2 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

e

$$\bar{E} = \begin{cases} E, & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{E}{1 - \nu}, & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu, & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{\nu}{1 - \nu}, & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases} \quad (3.68)$$

e em que E e ν são respectivamente o módulo de Young e o coeficiente de Poisson.

A matriz \mathbf{N}_K é definida pela equação 3.39 e a matriz \mathbf{B}_I das derivadas parciais das funções de forma é dada por:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

3.2.2.2 Método da função de penalidade

De forma análoga ao procedimento efectuado para a equação de Poisson, aplicando o método da função de penalidade para impor as condições de fronteira essenciais tem-se que

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \alpha_u (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma. \quad (3.70)$$

Para discretizar a equação da forma fraca (3.70) consideram-se as aproximações definidas pelo método EFG, \mathbf{u}^h e \mathbf{v}^h para as funções tentativa e funções teste, \mathbf{u} e \mathbf{v} definidas pelas equações 3.59 e 3.60. As equações resultantes são:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^u) \hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{f} + \mathbf{f}^u), \quad (3.71)$$

em que o escalar α_u é o parâmetro de penalidade, \mathbf{K} , \mathbf{f} , \mathbf{C} e \mathbf{B}_I são dados respectivamente pelas equações (3.62, 3.64, 3.66 e 3.69). \mathbf{K}^u e \mathbf{f}^u definem-se por:

$$\mathbf{K}_{IJ}^u = \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{S} \phi_J d\Gamma, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{f}_I^u = \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (3.73)$$

em que:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_i = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \text{ está prescrito em } \Gamma_u, \\ 0 & \text{se } u_i \text{ não está prescrito em } \Gamma_u, \quad i=1,2. \end{cases} \quad (3.74)$$

3.2.3 Aplicação ao caso de uma viga em consola com tensão tangencial parabólica na extremidade livre

O comportamento do método EFG, com a formulação da penalidade e multiplicadores de Lagrange foi analisada num problema simples de uma viga em consola em que é possível obter a solução teórica para permitir aferir o desempenho do método EFG. Considere-se uma viga em consola, de comprimento L , altura D e largura unitária, submetida a um carregamento de distribuição parabólica na extremidade livre, conforme representado na figura 3.7.

A solução analítica para os deslocamentos, neste problema é dada por Timoshenko e Goodier [113]:

$$u_x(x, y) = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu}) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right], \quad (3.75)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[3\bar{\nu}y^2(L - x)x + (4 + 5\bar{\nu})\frac{D^2x}{4} + (3L - x)x^2 \right], \quad (3.76)$$

em que I , momento de inércia, que no caso de uma viga de secção transversal rectangular e largura unitária é dada por:

$$I = \frac{D^3}{12}. \quad (3.77)$$

As tensões correspondentes aos deslocamentos obtidos pelas equações são:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{Py(L - x)}{I}, \quad (3.78)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.79)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.80)$$

O problema foi analisado em estado plano de tensão com os seguintes parâmetros:

$$L = 8, D = 1, P = 1$$

$$E = 10^3 \quad \text{Módulo de Young}$$

$$\nu = 0,25 \quad \text{Coeficiente de Poisson}$$

$$\alpha_u = 10^9 \quad \text{Parâmetro de penalidade}$$

e em estado plano de deformação, nas condições descritas anteriormente, em que se considerou também $\nu = 0,499$. Supõe-se que as dimensões dos diferentes parâmetros são consistentes entre si.

As seguintes condições de fronteira foram impostas (figura 3.7): os deslocamentos u_x e u_y são prescritos na fronteira Γ_u (extremidade esquerda) e as tensões σ_{xx} são prescritos em Γ_t (extremidade direita). Os valores prescritos para deslocamentos e tensões são calculadas a partir das equações das respectivas soluções analíticas. As condições de fronteira podem-se representar, neste caso por:

$$\mathbf{u}(x, y) = \bar{\mathbf{u}} \quad (x, y) \in \{0\} \times [-D/2, D/2] \quad (3.81)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (x, y) \in \{L\} \times [-D/2, D/2] \quad (3.82)$$

Para impor as condições de fronteira essenciais usou-se o método da função de penalidade para a análise em estado plano de tensão e o método dos multiplicadores de Lagrange para o estado plano de deformação. Considerou-se o seguinte parâmetro de penalidade: $\alpha_u = 10^9$.

No modelo numérico do problema considerou-se uma discretização regular do domínio por 85 nós, (17×5) , distribuídos respectivamente segundo a direcção do eixo dos x e dos y . Para calcular numericamente a matriz de rigidez usaram-se as células definidas naturalmente pelos nós da discretização, com 4×4 pontos de Gauss por cada célula. A função de peso escolhida foi a *spline* cúbica. Aplicou-se domínio de influência rectangular e h_x e h_y foram calculados através das equações 2.27 e 2.28.

Procedeu-se ao estudo deste exemplo de aplicação, em estado plano de tensão, através da implementação EFG desenvolvida. Considerou-se o valor de

$d_{max} = 3,5$. Nas figuras 3.9 e 3.10, as soluções analíticas para os deslocamentos u_x e u_y , no topo da viga são representados e comparados com os resultados obtidos pelo método EFG, nas condições anteriormente definidas. A solução obtida numericamente aproxima bem a solução exacta. Nas figuras 3.11, 3.12 e 3.13 as soluções analíticas para a tensões normal, σ_{xx} e tensão de corte σ_{xy} , são representadas ao longo do eixo $x = L/2, -D/2 \leq y \leq D/2$ e comparadas com os resultados obtidos.

Na análise em estado plano de deformação considerou-se o modelo numérico descrito anteriormente, optando-se neste caso por $d_{max} = 3,5$. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.2 e os valores assinalados com o símbolo * foram retirados de um estudo feito por Belytschko *et al.* [14]. A solução obtida pelo método EFG, no modelo numérico implementado é ligeiramente diferente da obtida por Belytschko *et al.* [14]. Esta diferença pode ser devida ao facto de ter sido usada a função de peso exponencial com um critério de escolha do domínio de influência bastante diferente, assim como o processo de integração numérica também ser diferente [14].

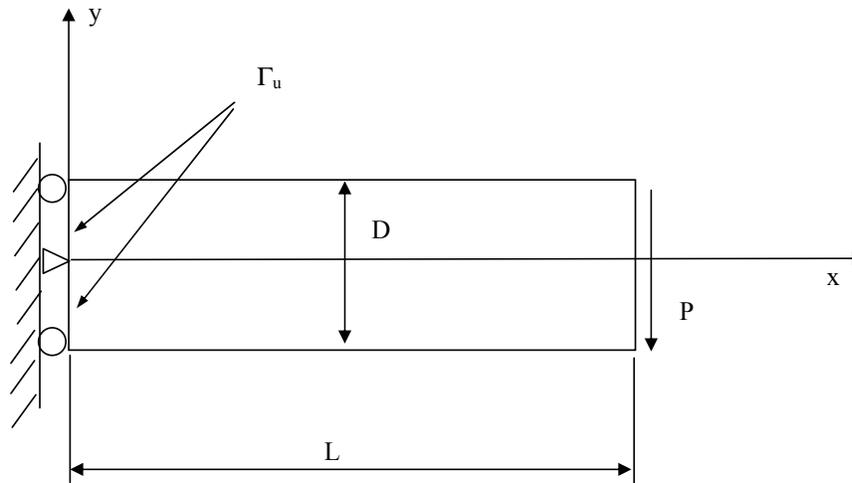


Figura 3.7: Exemplo de um problema bidimensional-viga em consola.

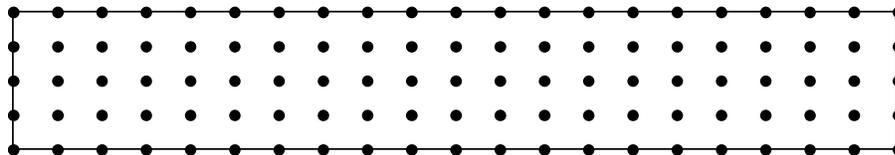
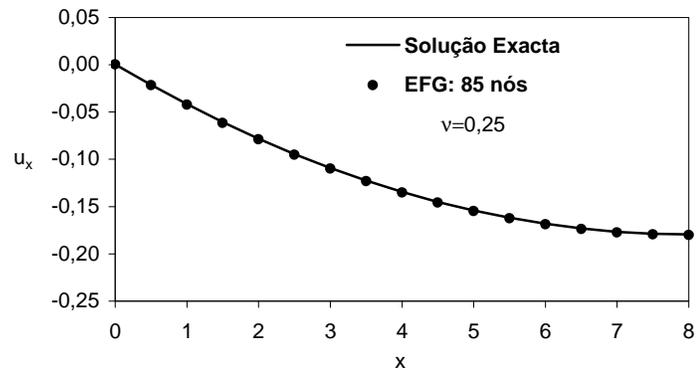
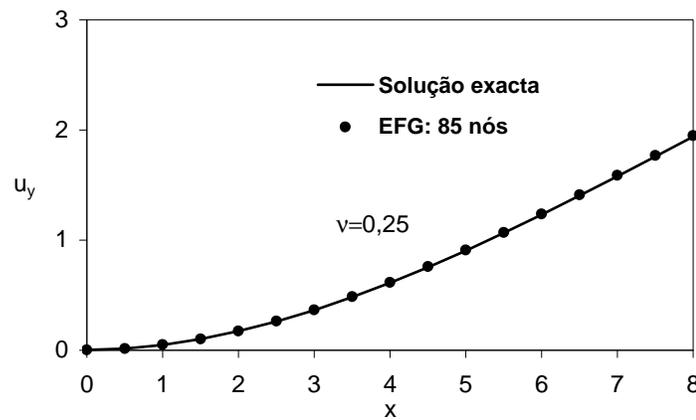


Figura 3.8: Discretização nodal para o modelo da viga em consola (105 nós).

u_y^h/u_y no ponto A		
Estado Plano de Deformação		
Método	Caso 1	Caso 2
	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,4999$
FEM*	0,824	0,027
EFG* : base linear	0,999	1,045
EFG* : base quadrática	1,00	1,002
EFG : base linear	1,004	0,956
EFG : base quadrática	1,004	1,006

Tabela 3.2: Comparação dos valores obtidos para o quociente de deflexão no estudo feito para o exemplo da viga. Os valores assinalados com * foram retirados da referência [14].

Figura 3.9: Deslocamento horizontal u_x no topo da viga.Figura 3.10: Deslocamento vertical u_y no topo da viga.

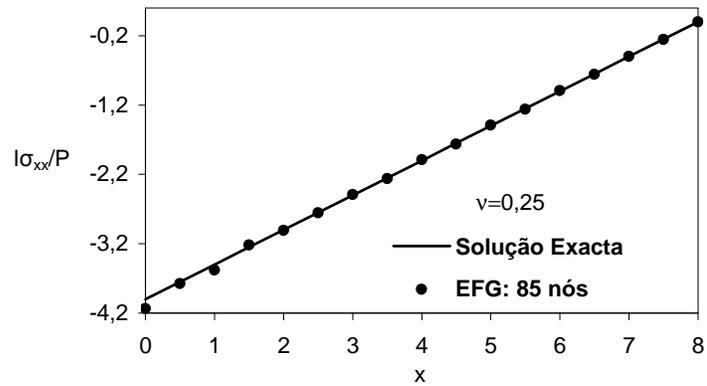


Figura 3.11: Tensão normal σ_{xx} no topo da viga. I é o momento de inércia e P a carga aplicada.

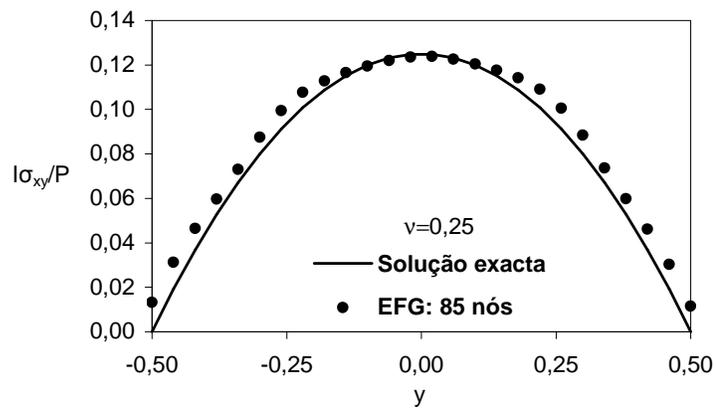


Figura 3.12: Tensão de corte σ_{xy} em $x = L/2$ no exemplo da viga.

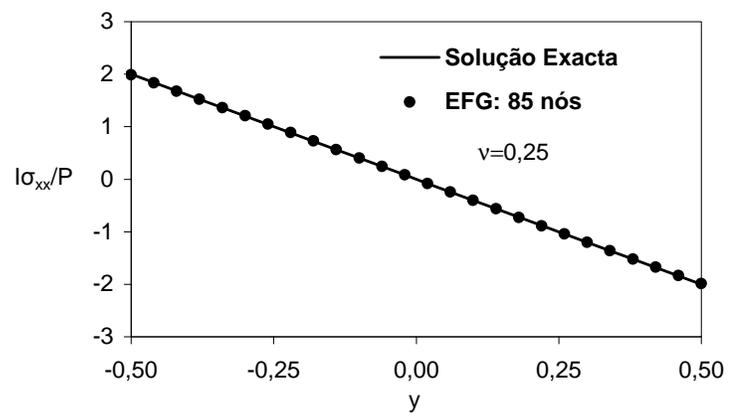


Figura 3.13: Tensão normal σ_{xx} em $x = L/2$ no exemplo da viga.

3.2.4 Aplicação a um caso de uma placa infinita com orifício circular central

Considere-se uma placa infinita com um orifício central, um círculo de raio a ($x^2 + y^2 \leq a^2$). A placa é submetida a uma tensão uniforme $\sigma = 1$ no infinito, segundo a direcção do eixo dos x . A descrição da geometria é apresentada na figura 3.14. A solução exacta para as tensões é [113]:

$$\sigma_{xx} = \sigma \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right], \quad (3.83)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right], \quad (3.84)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right], \quad (3.85)$$

em que (r, θ) são coordenadas polares com $r \geq a$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Os deslocamentos correspondentes são:

$$u_x(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\bar{G}} \left[\left(\frac{1}{1+\bar{\nu}} \right) \cos \theta + \frac{a^2}{r} \left(\frac{2}{1+\bar{\nu}} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta - \frac{a^4}{2r^3} \cos 3\theta \right], \quad (3.86)$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\bar{G}} \left[\left(\frac{-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} \right) r \sin \theta - \frac{a^2}{r} \left(\frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta \right) - \frac{a^4}{2r^3} \sin 3\theta \right], \quad (3.87)$$

em que

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}, \quad (3.88)$$

e \bar{E} e $\bar{\nu}$ são definidos respectivamente pelas equações 3.67 e 3.68.

No estudo apresentado considerou-se o estado plano de deformação, com os

seguintes parâmetros dimensionalmente consistentes:

$E = 1,0$	Módulo de young
$\nu = 0,3$	Coefficiente de Poisson
$\sigma = 1,0$	Tensão axial
$a = 1,0$	Raio do círculo central
$\alpha_u = 10^4$	Parâmetro de penalidade

Considerou-se ainda apenas uma porção finita de placa definida por $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 4$, conforme representado na figura 3.14, impondo nas faces $x = 4$ e $y = 4$ condições de fronteira de tracção e corte dadas pela solução exacta (eq. 3.83, 3.84 e 3.85). Devido à simetria do problema, só se considerou na modelação um quarto da placa, impondo as condições de fronteira: $u_x = 0$ em $x = 0$, $1 \leq y \leq 4$, por $u_y = 0$ em $y = 0$, $1 \leq x \leq 4$. A fronteira interna ($a = 1$) é livre.

Neste exemplo é relevante o facto de se considerar a fronteira do círculo de raio unitário com tracção livre e os deslocamentos, assim como as tensões terem gradientes elevados na vizinhança do orifício circular.

Na simulação numérica deste exemplo, consideraram-se dois tipos diferentes de distribuição nodal para o domínio do problema: distribuição do tipo *I* e do tipo *II*. Na distribuição do tipo *I* definiram-se duas zonas: uma zona inicial, à volta do orifício, em que se colocaram nós distribuídos regularmente segundo as direcções r e θ . No restante domínio, distribuíram-se nós ao longo de cada um dos eixo $\theta = \theta_i$ (θ_i foram definidos na zona inicial), por forma a que cada um destes eixos tivesse um número constante de nós. Na distribuição do tipo *II* definiram-se também duas zonas: na zona à volta do orifício colocaram-se nós de forma regular segundo as direcções r e θ , de maneira semelhante à distribuição do tipo *I*. Na zona restante, distribuíram-se nós uniformemente no canto superior direito do domínio e não uniformemente segundo as direcções x e y , considerando um referencial cartesiano.

As figuras 3.15 e 3.16 ilustram distribuições nodais do tipo *I*, respectivamente para 99 e 135 nós enquanto que nas figuras 3.17 e 3.18 estão representadas distribuições nodais do tipo *II*, respectivamente para 101 e 361 nós.

A figura 3.19 apresenta a tensão normal σ_{11} obtida em $x = 0$. As distribuições nodais usadas nesta solução correspondem às representadas nas figuras 3.15 e 3.16 (do tipo *I*). Para $y \geq 2$ a solução numérica obtida nos dois casos (99 e 135 nós) é semelhante, o que não acontece na zona em que $1 \leq y \leq 2$ em que a solução obtida com 99 nós é fraca comparativamente à obtida com 135 nós. Análogamente à figura 3.19, a figura 3.20 apresenta σ_{11} em $x = 0$, em que se consideraram as distribuições representadas nas figuras 3.17 e 3.18 (do tipo *II*). Por observação desta figura, verifica-se que apesar de o número de nós ser significativamente diferente a solução numérica obtida em qualquer dos casos constitui uma boa aproximação. O estudo deste problema evidencia a importância da distribuição nodal e do número de nós a considerar na discretização domínio de interesse.

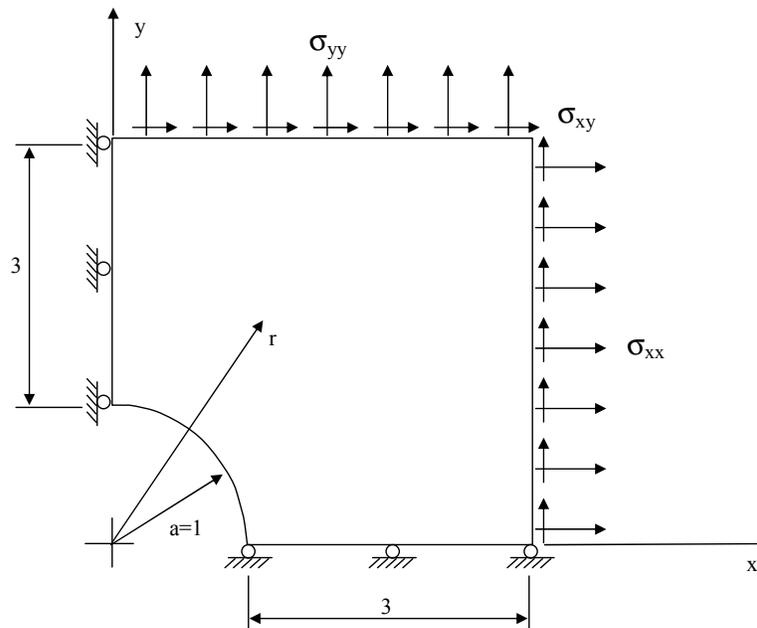


Figura 3.14: Geometria de uma placa com orifício central; tracção e corte são prescritos de acordo com a solução da placa infinita.

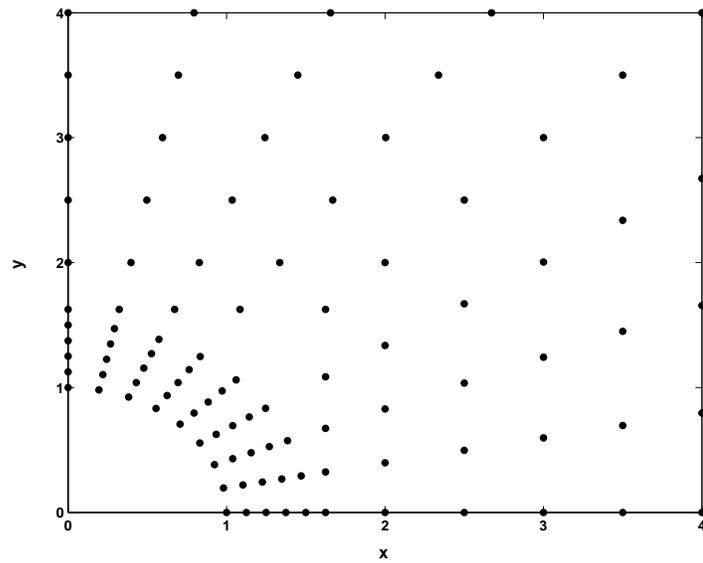


Figura 3.15: Caso 1: distribuição nodal do tipo I (99 nós).

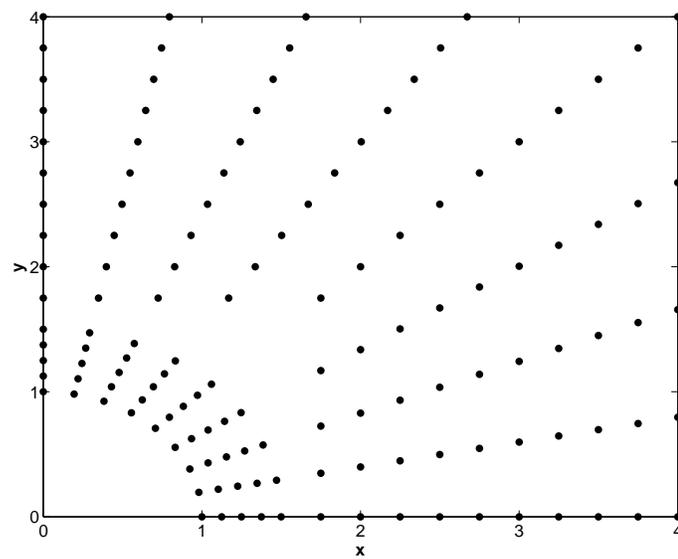


Figura 3.16: Caso 2: distribuição nodal do tipo I (135 nós).

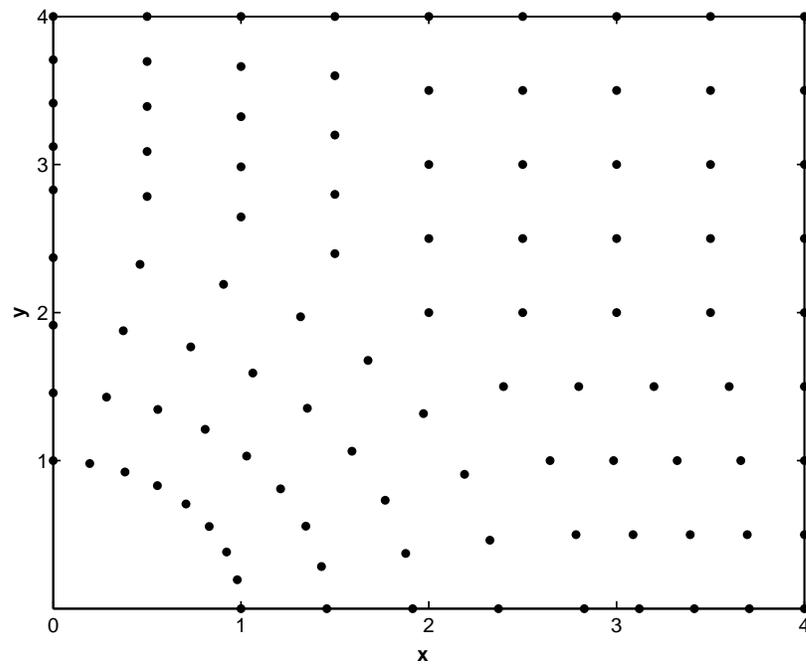


Figura 3.17: Caso 3: distribuição nodal do tipo *II* (101 nós).

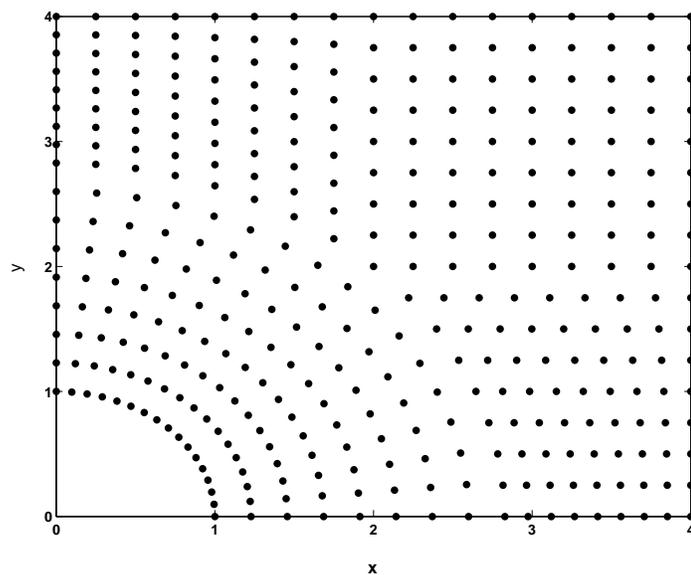


Figura 3.18: Caso 4: distribuição nodal do tipo *II* (361 nós).

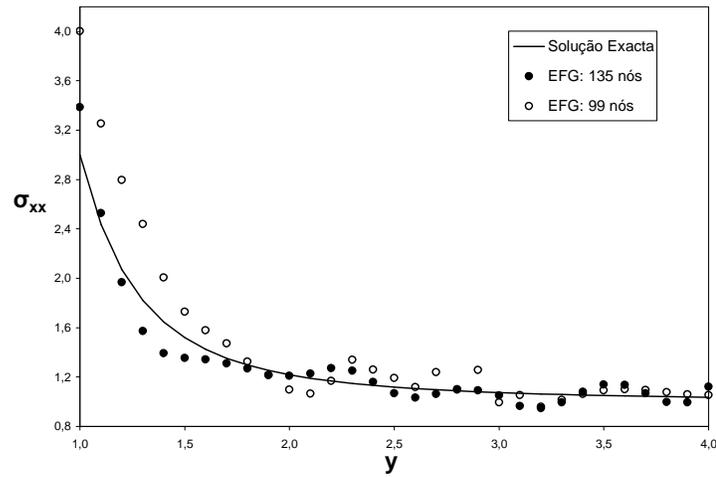


Figura 3.19: Tensão normal σ_{11} em $x = 0$ para o problema da placa com um orifício circular central. As distribuições nodais consideradas nesta solução correspondem às das figuras 3.15 e 3.16.

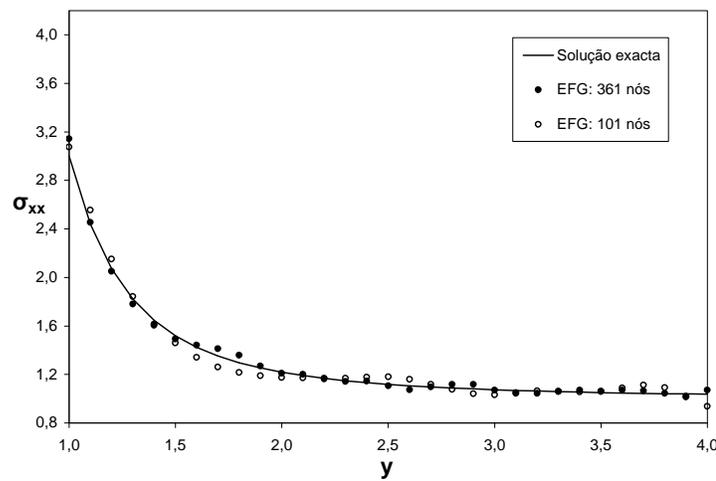


Figura 3.20: Tensão normal σ_{11} em $x = 0$ para o problema da placa com um orifício circular central. As distribuições nodais consideradas nesta solução correspondem às das figuras 3.17 e 3.18.

Capítulo 4

Aplicação do Método sem Malha EFG na Simulação de Processos de Enformação Plástica

4.1 Introdução

A simulação numérica de processos de enformação plástica é em geral, obtida a partir de duas aproximações que se designam por aproximação sólida e aproximação fluida ou de escoamento plástico ("flow approach", na simbologia inglesa). Basicamente, caracterizam-se da seguinte maneira:

- aproximação sólida –
considera que o material se comporta como um sólido elasto-plástico ou elástico visco-plástico;
- aproximação fluida ou de escoamento plástico –
considera que o material tem um comportamento semelhante a um fluido viscoso incompressível (não Newtoniano) ou visco-plástico.

Os primeiros programas para estudo de processos de enformação plástica, foram desenvolvidos na época dos anos 60, aplicavam o método dos elementos finitos e baseavam-se na formulação sólida para deformações infinitesimais. Esta formulação tinha a desvantagem de não permitir analisar as não-linearidades associadas a grandes deformações que são características neste tipo de processos. A formulação fluida ou de escoamento plástico foi apresentada no início dos anos 70 por Goon [47], mais tarde desenvolvida por Lee e Kobayashi [62] para materiais rígidos plásticos e por Zienkiewicz e Godbole para materiais visco-plásticos [119]. Esta formulação era bastante mais apelativa pela simplificação resultante da não consideração das deformações elásticas, o que é admissível visto que nestes processos as deformações elásticas são em geral insignificantes, comparativamente às elevadas deformações plásticas ou visco-plásticas que se produzem. Uma grande vantagem desta formulação versus formulação sólida infinitesimal tem a ver com o facto de poder alcançar grandes níveis de deformação e de rotação.

A principal dificuldade em simular processos de enformação plástica está directamente relacionado com o tratamento em simultâneo de diferentes tipos de não linearidade (cinemáticas, físicas e resultantes do contacto e do atrito), que se podem resumidamente caracterizar da seguinte forma:

- cinemáticas –
são devidas a grandes deslocamentos, rotações e deformações que surgem durante o processo;
- físicas –
são consequência do comportamento plástico e visco-plástico do material em grandes deformações;
- resultantes do contacto e do atrito –
são consequência dos fenómenos do contacto e do atrito que têm lugar nas superfícies de contacto entre a peça e as ferramentas.

A simulação destes processos através do método dos elementos finitos está bem consolidada, quer a partir da formulação de escoamento plástico ou fluido e da formulação sólida. A formulação de escoamento plástico tem sido muito

mais usada para processos de enformação plástica em massa, principalmente para extrusão e forjamento. Esta formulação tem uma implementação mais fácil e computacionalmente não muito dispendiosa.

Neste trabalho optou-se pela formulação de escoamento plástico. No presente capítulo começa-se por descrever as equações constitutivas para o escoamento plástico, optando-se pelo método de penalidade para impor a condição de incompressibilidade de deformação plástica. A partir do princípio variacional associado à formulação irredutível, aplica-se o método EFG e vários aspectos são detalhados, tais como: construção das funções de forma, imposição das condições de fronteira essenciais e tratamento do contacto e do atrito na zona de contacto entre a peça e as ferramentas.

4.2 Modelo constitutivo para o escoamento plástico

Para a modelação dos processos de enformação plástica que se pretende abordar considera-se uma formulação rígido plástica regida pelas equações [93, 94]:

$$\mathbf{s} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.1)$$

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}} \quad (4.2)$$

$$p = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.3)$$

$$\bar{\sigma} = Y_0(\bar{\varepsilon}) \quad (4.4)$$

$$tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad (4.5)$$

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \quad (4.6)$$

onde μ é a viscosidade, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy, p é a pressão hidrostática, \mathbf{s} é o tensor das tensões desviadoras, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é a taxa de deformação, $\bar{\sigma}$ é a tensão efectiva, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ é a taxa de deformação efectiva e $Y_0(\bar{\varepsilon})$ é a função de escoamento plástico.

As equações de equilíbrio, condições de fronteira, condição de incompressibilidade

e equações constitutivas para o problema da enformação plástica podem ser obtidas a partir do princípio variacional associado ao funcional que representa a energia potencial $\Pi(\mathbf{v}, p)$ dada por:

$$\Pi(\mathbf{v}, p) = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V p \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_f} \Delta v_t \tau d\Gamma, \quad (4.7)$$

no qual \mathbf{v} é o vector velocidade, p é a pressão, \mathbf{b} e \mathbf{t} são respectivamente os vectores das forças de volume e de superfície que actuam no corpo. Δv_t e τ são respectivamente a velocidade tangencial relativa e a tensão tangencial em Γ_f , superfície de contacto entre a peça e a ferramenta.

4.2.1 Imposição da condição de incompressibilidade

Existem várias técnicas para impor a condição de incompressibilidade (4.5), sendo as mais usadas as seguintes: método dos multiplicadores de Lagrange e método da função de penalidade.

O segundo termo da segundo membro da equação (4.7) pode ser visto como a imposição da condição de incompressibilidade através do multiplicador de Lagrange p , a pressão. Por aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange, as variáveis principais são as velocidades nodais \mathbf{v} e os multiplicadores de Lagrange λ . Quando se recorre à discretização do princípio variacional associado a $\Pi(\mathbf{v}, p)$, através do método dos elementos finitos, o sistema de equações resultante apresenta termos nulos na diagonal principal, o que origina problemas quando se usa o método de Gauss [103]. Um procedimento habitual para resolver esta questão, consiste em tratar as equações relativas à restrição depois de todos os graus de liberdade aos quais estão ligadas. Outra alternativa é usar o método do Lagrangeano com perturbação [22].

Se a condição de incompressibilidade for imposta pelo método da função de penalidade o segundo termo do segundo membro da equação (4.7) é substituído

pela expressão

$$\alpha \int_V tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})^2 dV, \quad (4.8)$$

em que α , o parâmetro de penalidade, é um número positivo grande. Neste caso, a pressão é eliminada como uma variável de campo e obtém-se então a seguinte formulação irredutível:

$$\Pi(\mathbf{v}) = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_f} \frac{1}{2} \Delta v_t \tau d\Gamma + \alpha \int_V tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})^2 dV. \quad (4.9)$$

O método da função de penalidade tem a vantagem de originar uma forma irredutível, em que a única variável independente é o campo de velocidades \mathbf{v} . Como tal, não aumenta o número de variáveis do problema nem o número de equações. No entanto este método tem os seguintes problemas [22]:

- efeito de bloqueamento da solução do sistema de equações – usando este método, o aumento do valor de α teoricamente conduziria a uma melhoria na aproximação da condição de incompressibilidade. Pode acontecer, no entanto, que a solução real se desvie para a solução trivial (solução nula), obtendo-se o que usualmente se designa por bloqueamento da solução do sistema;
- mau condicionamento no sistema de equações – o termo (4.8) para valores de α muito elevados pode introduzir mau condicionamento da matriz de rigidez global do sistema.

Para evitar o bloqueamento da solução do sistema é usual a utilização de uma técnica de integração numérica selectivamente reduzida. Esta técnica foi usada por Zienkiewicz *et al.* [121, 120], primeiro na análise de elementos casca e posteriormente no estudo de escoamentos plásticos incompressíveis. Para a segunda questão, mau condicionamento do sistema, uma estratégia é aplicar um processo iterativo que permita utilizar valores mais baixos de α [78].

4.2.2 Imposição das condições de fronteira

Na formulação dada pela equação (4.9) as condições de fronteira do tipo essencial não foram introduzidas. Quando esta formulação é usada no contexto do método dos elementos finitos é possível utilizar funções de forma que assegurem a imposição das condições de fronteira essenciais. De facto, as funções de forma definidas segundo o método dos elementos finitos são interpoladoras, visto que satisfazem o critério de Kronecker e conseqüentemente as condições de fronteira essenciais podem ser impostas directamente. No método EFG, tal como foi abordado no capítulo 2, as funções de forma ϕ_I não têm carácter interpolatório ($\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$). Por isso, para esse caso será necessário introduzir aquelas condições.

Neste trabalho escolheu-se o método da função de penalidade para impor as condições de fronteira do tipo essencial, que não envolvem o problema do contacto, que consiste em acrescentar à equação variacional dada pela equação (4.9) o seguinte termo:

$$\frac{\alpha_u}{2} \int_{\Gamma_u} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) d\Gamma. \quad (4.10)$$

O funcional modificado é dado por:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{v}) = & \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_f} \frac{1}{2} \Delta v_t \tau d\Gamma \\ & + \alpha \int_V tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 dV + \frac{\alpha_u}{2} \int_{\Gamma_u} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que α_u é um número positivo grande, um factor de penalidade para impor as condições de fronteira essenciais em Γ_u .

4.2.3 Formulação do escoamento plástico

Considerando a formulação do escoamento plástico, ao efectuar a discretização da forma fraca consideram-se as velocidades como variáveis nodais. Seja Ω o domínio de interesse discretizado por N nós. A aproximação para cada uma das componentes da velocidade, num ponto qualquer \mathbf{x} do domínio, no caso bidimensional, é dada por uma combinação linear das funções ϕ_I tal que:

$$v_x = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})v_{xI}, \quad (4.12)$$

$$v_y = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})v_{yI}, \quad (4.13)$$

em que v_{xI} e v_{yI} são os respectivos coeficientes (parâmetros) das combinações lineares associados a cada um dos nós do domínio. Em cada ponto \mathbf{x} do domínio Ω , o campo de velocidades pode então ser representado matricialmente por:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & \phi_N & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \dots \\ v_{xN} \\ v_{yN} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi} \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.14)$$

em que $\boldsymbol{\phi}$ representa a matriz das funções de forma associadas aos pontos da discretização nodal de Ω e $\hat{\mathbf{v}}$ o vector dos parâmetros nodais. A taxa de deformação $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, define-se a partir das derivadas espaciais da velocidade como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (4.15)$$

em que $v_{i,j} \equiv \partial v_i / \partial x_j$. Matricialmente, a taxa de deformação representa-se por:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}\boldsymbol{\phi}\hat{\mathbf{v}}, \quad (4.16)$$

em que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \cdots & \cdots & \phi_{N,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \ddots & \ddots & 0 & \phi_{N,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \cdots & \cdots & \phi_{N,y} & \phi_{N,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \cdots \\ v_{xN} \\ v_{yN} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}}. \quad (4.18)$$

A partir da equação constitutiva,

$$\mathbf{s} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{v}}, \quad (4.19)$$

em que \mathbf{s} , vector da tensão desviadora, relaciona-se directamente com $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ através da matriz $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$, em que:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad (4.20)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Para problemas axisimétricos tem-se que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_r \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{\gamma}_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,r} & 0 & \phi_{2,r} & 0 & \cdots & \cdots & \phi_{N,r} & 0 \\ 0 & \phi_{1,z} & 0 & \phi_{2,z} & \ddots & \ddots & 0 & \phi_{N,z} \\ \frac{1}{r}\phi_1 & 0 & \frac{1}{r}\phi_2 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{r}\phi_N & 0 \\ \phi_{1,z} & \phi_{1,r} & \phi_{2,z} & \phi_{2,r} & \cdots & \cdots & \phi_{N,z} & \phi_{N,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{z1} \\ v_{r2} \\ v_{z2} \\ \cdots \\ v_{rN} \\ v_{zN} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}}, \quad (4.22)$$

e o vector \mathbf{s} e a matriz $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ são:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_r & s_z & s_\theta & s_{rz} \end{bmatrix}^T, \quad (4.23)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Comparando os princípios variacionais obtidos a partir das equações (4.7) e (4.9) é possível escrever [118, 21]:

$$p \simeq -\alpha \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (4.25)$$

em que α é o factor de penalidade. Usando o método da função de penalidade ponderada [85], α é escrito através da expressão:

$$\alpha = \lambda_\alpha \mu, \quad (4.26)$$

em que λ_α é um número grande ($10^6 - 10^9$).

A tensão hidrostática pode assim ser recuperada a partir da expressão matricial:

$$\sigma_m = -p = \alpha \mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{m}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

4.3 Tratamento do contacto e do atrito

4.3.1 Modelação do contacto

Nos processos de enformação plástica, a modelação do contacto entre a peça e a ferramenta é uma componente fundamental. De facto, as condições de fronteira vão-se alterando durante o processo e à medida que evolui o contacto entre o material e a ferramenta.

A modelação do contacto envolve essencialmente os seguintes aspectos: determinação do contacto entre a superfície da peça e da ferramenta e quando este existe, a necessidade de impedir a penetração, mas garantindo o deslizamento (com ou sem atrito) da peça ao longo da superfície do contacto. A perda do contacto e conseqüente alteração das condições de contacto deverá também ser analisada durante o processo.

Um aspecto importante a ser contemplado no algoritmo de contacto diz respeito à deformabilidade da ferramenta, uma vez que as sucessivas alterações da geometria da peça resultam da interacção com a ferramenta. Considera-se a ferramenta rígida, quando a sua deformação, é muito pequena e por isso desprezável. Caso contrário, quando a deformação é significativa considera-se a ferramenta como um corpo deformável. No algoritmo de contacto desenvolvido neste trabalho, para o caso bidimensional, a ferramenta é considerada rígida e portanto está-se numa situação de contacto entre a peça (corpo deformável) e a ferramenta (corpo rígido).

Um outro aspecto a ter em consideração no algoritmo de contacto é a escolha do método que descreve a interacção entre a peça e a ferramenta. Algumas alternativas são:

- métodos variacionais, tais como o método dos multiplicadores de Lagrange [10], o método da função de penalidade [115] ou a conjugação dos dois, o método Lagrangeano com perturbação [115];

- métodos directos, baseiam-se na integração das trajectórias dos nós colocados na fronteira da peça e na determinação do menor intervalo de tempo para o qual novos nós possam entrar em contacto com a ferramenta [18, 78].

4.3.2 Modelação do atrito

O atrito é um fenómeno importante que está presente nos processos de enformação plástica e que resulta do movimento relativo entre a peça e a ferramenta. Em geral, o efeito do atrito é indesejável, mas em alguns processos, como no caso da laminagem, o atrito é uma parte integrante, necessária e que faz parte do próprio processo.

Na superfície de contacto, o deslocamento tangencial não é restringido, de modo a permitir o deslizamento da peça relativamente à ferramenta. A tensão tangencial, τ que se opõem a esse deslizamento é dado por:

$$\tau = \tau_f \frac{\Delta v_t}{\|\Delta v_t\|}, \quad (4.29)$$

em que τ_f é o valor nominal da tensão tangencial de atrito e Δv_t a componente tangencial da diferença de velocidades entre a peça e a ferramenta.

Dois modelos simples utilizados na modelização do atrito são os modelos de Prandtl e o modelo de Coulomb. No primeiro admite-se uma lei de atrito de factor constante, que é uma lei de comportamento semelhante a um adesivo. Nesse caso, a tensão tangencial τ_f devida ao atrito é dada por:

$$\tau_f = m_f \frac{Y}{\sqrt{3}}. \quad (4.30)$$

em que m_f , factor de atrito, depende das condições de lubrificante consideradas e varia entre 0 (não há atrito) e 1 (atrito total). Y é a tensão de cedência do material.

No segundo caso, lei de Coulomb τ_f é dada por:

$$\tau_f = \begin{cases} \mu_f \sigma_n & \text{se } \mu_f \sigma_n \leq \frac{Y}{\sqrt{3}} \\ \frac{Y}{\sqrt{3}} & \text{se } \mu_f \sigma_n \geq \frac{Y}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (4.31)$$

em que μ_f é o coeficiente de atrito e σ_n é a tensão normal na zona de contacto.

4.3.3 Elementos de contacto

Estabelecido o contacto entre a peça e a ferramenta, define-se

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^F - \mathbf{v}, \quad (4.32)$$

em que \mathbf{v}^F é a velocidade num ponto material da ferramenta e \mathbf{v} a velocidade do ponto material coincidente na peça. O vector da velocidade relativa num ponto da zona de contacto, $\Delta \mathbf{v}$ é representado por:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_t \\ \Delta v_n \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

em que Δv_t e Δv_n são respectivamente as velocidades tangencial e normal relativa. No ponto de contacto entre a peça e a ferramenta, a velocidade normal relativa nesse ponto deve verificar:

$$\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_n^F - \mathbf{v}_n = 0, \quad (4.34)$$

em que \mathbf{n} é a normal à superfície no ponto de contacto. Neste trabalho a condição anterior é imposta pelo método da função de penalidade no princípio variacional. Ao funcional (4.11) é acrescentado então o seguinte termo:

$$\frac{\alpha_f}{2} \int_{\Gamma_f} (\Delta v_n)^2 d\Gamma, \quad (4.35)$$

em que α_f é um número grande, factor de penalidade para impor a condição (4.34), resultando o funcional dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\mathbf{v}) = & \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_f} \frac{1}{2} \Delta v_t \tau d\Gamma \\ & + \alpha \int_V \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 dV + \frac{\alpha_u}{2} \int_{\Gamma_u} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) d\Gamma + \frac{\alpha_f}{2} \int_{\Gamma_f} (\Delta v_n)^2 d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.36)$$

o qual pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\mathbf{v}) = & \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_f} \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f d\Gamma \\ & + \alpha \int_V \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 dV + \frac{\alpha_u}{2} \int_{\Gamma_u} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_f$ é o vector das tensões para pontos da zona de contacto. A partir do princípio variacional associado a este funcional é possível obter σ_n , tensão de contacto normal a partir de

$$\sigma_n = \alpha_f \Delta v_n. \quad (4.38)$$

Considerando que a tensão tangencial τ é dada pela equação (4.29) e σ_n , tensão de contacto normal é imposta pela equação (4.38), o vector das tensões, $\boldsymbol{\sigma}_f$ para pontos da zona de contacto é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \begin{bmatrix} \tau \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_f}{\|\Delta v_t\|} & 0 \\ 0 & \alpha_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_t \\ \Delta v_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}_f \Delta \mathbf{v}. \quad (4.39)$$

O contacto e o atrito tal como foram descritos no ponto anterior são introduzidos através de uma camada de elementos finitos de contacto [23, 51], figura 4.1.

Considera-se assim que as velocidades dos nós do elemento de contacto ligados à peça deformada são aproximadas por uma formulação acoplada entre os elementos finitos de contacto e a formulação EFG construída no domínio da peça.

Sejam n_f e n_p o número de nós para a discretização da ferramenta e da peça, respectivamente. Os índices dos nós na interface, I_f e I_p são dados por:

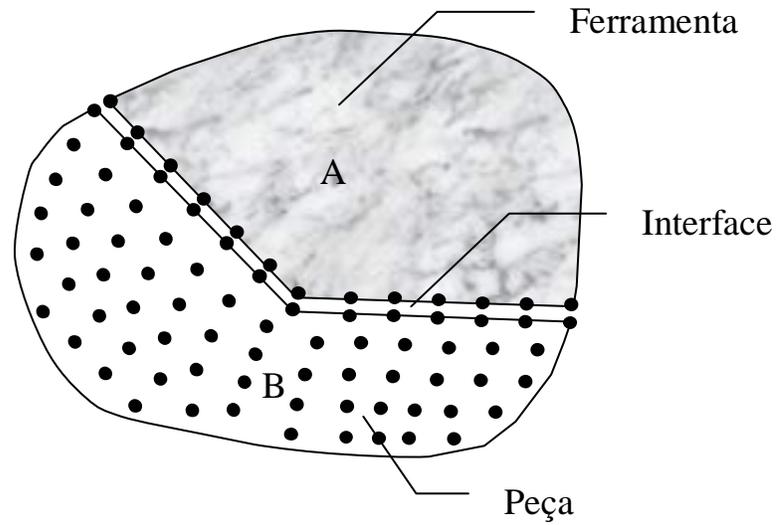


Figura 4.1: Elemento de interface 2D.

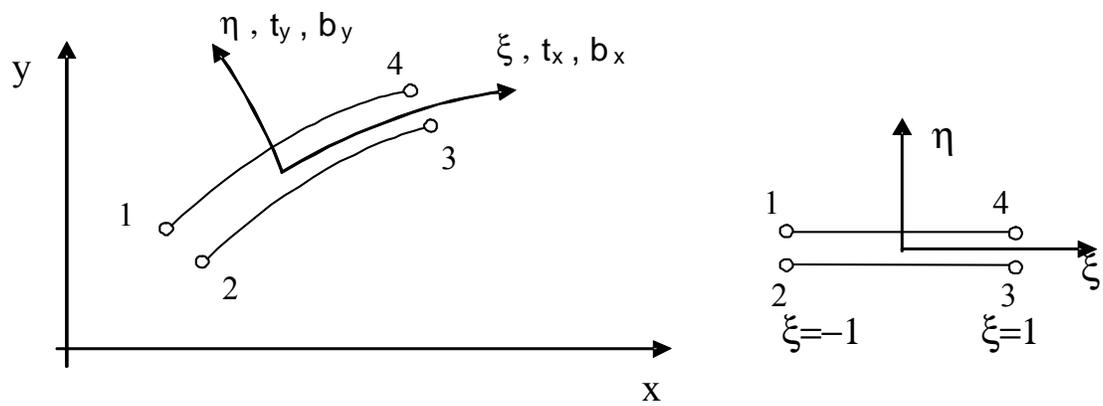


Figura 4.2: Elemento de contacto.

$$I_f = \{i_1, i_2, \dots, i_{n_f}\}, \quad (4.40)$$

$$I_p = \{j_1, j_2, \dots, j_{n_p}\}, \quad (4.41)$$

em que

$$N = n_f + n_p. \quad (4.42)$$

Define-se uma camada de $(n_f - 1)$ elementos de contacto de 4 nós ao longo da superfície, figura 4.2. Para cada elemento de contacto é definido um sistema de coordenadas local na coordenada natural ξ , $-1 \leq \xi \leq 1$, figura 4.2. Seja e um elemento de contacto. A velocidade relativa em qualquer ponto do elemento de contacto e é definida por:

$$\mathbf{r}(\xi) = N_1(\xi)(\mathbf{v}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_2)) + N_2(\xi)(\mathbf{v}(\mathbf{x}_4) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_3)), \quad (4.43)$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}_4)$ são as velocidades nos nós do topo do elemento (ferramenta) e $\mathbf{v}(\mathbf{x}_2)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}_3)$ as velocidades nos nós da base do elemento (peça). N_i é a função de forma associada ao i -ésimo nó (localizado no topo do elemento e), que se exprime em termos da coordenada local ξ por:

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.44)$$

Matricialmente,

$$\mathbf{r}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_1}^l \\ v_{y_1}^l \\ v_{x_2}^l \\ v_{y_2}^l \\ v_{x_3}^l \\ v_{y_3}^l \\ v_{x_4}^l \\ v_{y_4}^l \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{N}\mathbf{v}^l, \quad (4.46)$$

em que \mathbf{v}^l contém as velocidades locais dos nós do elemento. Para um elemento de contacto (espessura nula), através da formulação isoparamétrica tem-se que:

$$x = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2, \quad (4.47)$$

$$y = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2, \quad (4.48)$$

em que x_i e y_i representam as coordenadas nodais para o mesmo elemento. Considerando que as velocidades locais \mathbf{v}^l podem ser obtidas a partir das velocidades globais \mathbf{v}^c e da matriz $\mathbf{A}_\Theta(\xi)$ de transformação por:

$$\mathbf{v}^l \equiv \begin{bmatrix} v_x^l \\ v_y^l \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\Theta(\xi)\mathbf{v}^c, \quad (4.49)$$

em que

$$\mathbf{A}_\Theta(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\partial y / \partial \xi}{\partial x / \partial \xi}\right) \quad (4.50)$$

$$\text{e } \mathbf{v}^c = \begin{bmatrix} v_x^c & v_y^c \end{bmatrix}^T.$$

As velocidades $\mathbf{r}(\xi)$ podem ser reescritas por:

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{N}\mathbf{A}_\Theta(\xi)\mathbf{v}^c, \quad (4.51)$$

em que a matriz \mathbf{N} foi definida anteriormente e o vector \mathbf{v}^c contém as velocidades nodais (nós 1, 2, 3 e 4) em coordenadas globais. No sentido de calcular \mathbf{v}^c , considera-se que para o elemento representado na figura 4.2, as velocidades nos nós 1 e 4 são calculadas segundo a formulação MEF, enquanto que as dos nós 2 e 3 através da aproximação baseada no método EFG. Considerando que as

velocidades nos nós da base do elemento são dadas por:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_2) = \sum_{I \in I_p} \phi_I(\mathbf{x}_2) \mathbf{v}_I, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_3) = \sum_{I \in I_p} \phi_I(\mathbf{x}_3) \mathbf{v}_I, \quad (4.53)$$

em que I_p corresponde aos índices dos nós da peça (discretização da peça) e que $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}_4)$, pelo MEF, o vector \mathbf{v}^c pode ser reescrito por:

$$\mathbf{v}^c = \begin{bmatrix} v_{x_1}^c \\ v_{y_1}^c \\ v_{x_2}^c \\ v_{y_2}^c \\ v_{x_3}^c \\ v_{y_3}^c \\ v_{x_4}^c \\ v_{y_4}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c_1} \\ \mathbf{B}_{c_2} \\ \mathbf{B}_{c_3} \\ \mathbf{B}_{c_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \dots \\ \dots \\ v_{x_N} \\ v_{y_N} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_c \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.54)$$

em que as matrizes $\mathbf{B}_{c_1}, \mathbf{B}_{c_2}, \mathbf{B}_{c_3}, \mathbf{B}_{c_4}, \subset \mathbb{R}^{2 \times 2N}$ são definidas por:

$$\mathbf{B}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(2n_1 - 1)\text{-ésima coluna} \quad (2n_1)\text{-ésima coluna}$

$$\mathbf{B}_{c_2} = \begin{bmatrix} \dots & \phi_{j_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \phi_{j_k} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \phi_{j_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_{j_k} & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{B}_{c_3} = \begin{bmatrix} \dots & \phi_{r_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \phi_{r_l} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \phi_{r_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_{r_l} & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{B}_{c_4} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(2n_4-1)\text{--ésima coluna} \quad (2n_4)\text{--ésima coluna}$

em que n_1, n_2, n_3, n_4 são os índices dos nós 1, 2, 3, 4 respectivamente no mapa de conectividades global. Os conjuntos $I_{n_2} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ e $I_{n_3} = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ contêm respectivamente os índices dos nós que pertencem aos domínios de influência dos nós 2 e 3. Tem-se então que:

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{B}_f \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.59)$$

em que

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{N} \mathbf{A}_\Theta(\xi) \mathbf{B}_c. \quad (4.60)$$

O vector $\hat{\mathbf{v}}$ contém os parâmetros nodais correspondentes à discretização da peça e da ferramenta. A matriz de rigidez associada ao elemento de contacto é então obtida sob a forma usual:

$$\mathbf{K}^f = \int_{\Gamma_f} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f dV. \quad (4.61)$$

4.4 Sistema final

Considerando que o domínio de interesse é discretizado por N nós e usando um procedimento análogo ao que é usual na aplicação do método dos elementos

finitos, substituindo as equações (4.14) a (4.28) no princípio variacional obtido a partir de (4.37) resulta o seguinte sistema de equações não linear:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{f}, \quad (4.62)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}^d + \mathbf{K}^h + \mathbf{K}^u + \mathbf{K}^f, \\ \mathbf{K}_{IJ}^d &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \overset{\circ}{\mathbf{D}} \mathbf{B}_J dV, \\ \mathbf{K}_{IJ}^h &= \int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}_I^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{B}_J dV, \\ \mathbf{K}_{IJ}^u &= \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{S} \phi_J d\Gamma, \\ \mathbf{K}^f &= \int_{\Gamma_f} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f dV, \\ \mathbf{f}_I &= \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha_u \int_{\Gamma_u} \phi_I \mathbf{S} \bar{\mathbf{v}} d\Gamma, \\ \mathbf{B}_I &= \begin{bmatrix} \phi_{I,r} & 0 \\ 0 & \phi_{I,z} \\ \frac{1}{r} \phi_I & 0 \\ \phi_{I,z} & \phi_{I,r} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, S_i = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ está prescrito em } \Gamma_u, \\ 0 & \text{se } v_i \text{ não está prescrito em } \Gamma_u, \end{cases} \quad (4.63)$$

e $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$, \mathbf{D}_f , \mathbf{B}_f , são definidas respectivamente pelas equações (4.24), (4.39), (4.60) e as funções ϕ_I são as funções de forma definidas no método EFG.

4.4.1 Integração Numérica

Para obter a matriz de rigidez global \mathbf{K} e o vector \mathbf{f} que fazem parte das equações discretas, resultantes da aplicação método EFG é necessário calcular integrais sobre o domínio Ω , fronteiras Γ_u , Γ_t e superfície de contacto Γ_f . Para efectuar o cálculo numérico dos integrais envolvidos, domínio e fronteiras são subdivididos em subdomínios, ou células de integração, existindo várias possibilidades, as quais foram descritas no capítulo 2.

A divisão do domínio Ω em células de integração Ω_e pode ser independente da discretização que se considerou para definir a aproximação segundo o método EFG. Neste trabalho, para cálculo numérico de integrais ao longo do domínio, para a matriz \mathbf{K} , considerou-se uma estrutura de integração formada por elementos ou células quadriláteros Ω_e , em que os vértices de cada célula são os nós da discretização para Ω . Neste caso, representa-se por

$$\Omega = \cup_{e=1}^{N_e} \Omega_e. \quad (4.64)$$

A estratégia adoptada, neste trabalho para a malha de integração deve-se ao facto de se tratar de um processo não estacionário, em que em cada intervalo de tempo há uma actualização da geometria e alteração da fronteira do domínio. No código desenvolvido, utilizou-se o Matlab como linguagem de programação. O recurso a um gerador de malhas automático, externo a partir do Matlab não foi viável. De facto, dentro desta aplicação a única possibilidade foi utilização da função interna **pdemesh**, que serve para definir malhas triangulares, mas que oferece pouca flexibilidade porque não é propriamente um gerador de malhas.

Considere-se Ω_e um elemento da malha de integração, conforme apresentado na figura 4.3.

Sejam $\zeta = (\xi, \eta)$ as coordenadas do quadrado unitário, tal que $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Para um elemento isoparamétrico e com N_n^e nós tem-se:

$$x_e = \sum_{i=1}^{N_n^e} N_i(\zeta) x_i, \quad (4.65)$$

$$y_e = \sum_{i=1}^{N_n^e} N_i(\zeta) y_i, \quad (4.66)$$

em que N_i são as funções interpoladoras, em coordenadas naturais (ξ, η) . No caso do elemento quadrilátero ($N_n^e = 4$) são dadas por:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad (4.67)$$

e ξ_i, η_i são os respectivos valores nodais em conformidade com o elemento representado na figura 4.3. Matricialmente, tem-se que:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

e define-se :

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{vmatrix}. \quad (4.69)$$

Para o elemento Ω_e (coordenadas globais) tem-se que:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}) \mathring{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_J(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega_\zeta} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}(\zeta)) \mathring{\mathbf{D}}(\mathbf{x}(\zeta)) \mathbf{B}_J(\mathbf{x}(\zeta)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \right| d\Omega_\zeta. \quad (4.70)$$

O integral sobre o elemento Ω_ζ é calculado numericamente através de uma determinada regra de integração. Neste trabalho usou-se quadratura gaussiana. A submatriz resultante da equação (4.70) corresponde à contribuição do elemento Ω_e para a submatriz \mathbf{K}_{IJ}^d . De facto, \mathbf{K}_{IJ}^d obtém-se somando as contribuições de todas as células Ω_e . Por sua vez, \mathbf{K}_{IJ}^d é não nula só quando os suportes de ϕ_I e ϕ_J têm intersecção diferente do vazio. A contribuição de um ponto de Gauss, \mathbf{x}_g para a matriz de rigidez faz-se por determinação dos nós da discretização que pertencem à vizinhança de \mathbf{x}_g . Em particular, \mathbf{x}_g contribui para \mathbf{K}_{IJ}^d se

$w_I(\mathbf{x}_g) > 0$ e $w_J(\mathbf{x}_g) > 0$, em que w é uma função de peso com suporte compacto, com propriedades semelhantes à função de peso que foi usada na descrição do método EFG.

Outro aspecto relevante, diz respeito ao efeito de bloqueamento do sistema de equações, referido anteriormente, que pode surgir devido à imposição da condição de incompressibilidade através do método da função de penalidade. Este aspecto foi abordado por Dolbow *et al.* [37] e Askes [1] no contexto dos métodos sem malha, que concluíram que, de forma semelhante ao que acontece no método dos elementos finitos, é conveniente usar uma técnica numérica apropriada, por exemplo integração numérica reduzida como forma de evitar este efeito indesejável. Por esta razão, no cálculo de \mathbf{K}^h usou-se integração reduzida, (1×1) ponto de Gauss em cada célula Ω_e , enquanto que para \mathbf{K}^d aplicou-se (4×4) pontos de Gauss. Para os integrais de fronteira, Γ_u e Γ_t consideraram-se subdivisões uniformes da fronteira com 4 pontos de Gauss e um procedimento análogo ao das matrizes \mathbf{K}^d e \mathbf{K}^h . O cálculo da matriz \mathbf{K}^f de cada elemento pode ser efectuado como um integral de linha definido por:

$$\mathbf{K}^f = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi. \quad (4.71)$$

4.4.2 Resolução do sistema de equações

O sistema de equações não lineares obtido, representa as equações de equilíbrio para o sistema num dado instante. A equação (4.62), resulta da aplicação da formulação de escoamento plástico irreduzível, em que se usou o método da função de penalidade para impor:

- condição de incompressibilidade
- condições de fronteira essencial
- restrição do contacto

O sistema de equações não linear (4.62), pode ser resolvido através de vários métodos numéricos, sendo os mais usados, o método iterativo simples, o método de Newton-Raphson e o método de Newton-Raphson modificado. Neste trabalho usou-se o método iterativo simples. Basicamente, a sua aplicação consiste no seguinte: a partir da estimativa \mathbf{v}^i para o campo de velocidades \mathbf{v} , determina-se uma nova aproximação, $\mathbf{v}^{(i+1)}$, calculada por:

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}^i)\mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{f}, \quad (4.72)$$

a qual vai ser usada na iteração seguinte. Para controle do erro numérico durante o processo iterativo considerou-se o seguinte critério de paragem na iteração $i + 1$:

$$\frac{\|\mathbf{v}^{(i+1)} - \mathbf{v}^i\|}{\|\mathbf{v}^{(i+1)}\|} \leq \text{Tol}, \quad (4.73)$$

em que Tol é um majorante admissível, predefinido pelo utilizador, para o erro relativo entre duas aproximações consecutivas. O método iterativo simples converge rapidamente nas iterações iniciais para um valor de Tol minimamente aceitável. Contudo, quando se diminui Tol no sentido de obter uma aproximação mais precisa, o processo torna-se muito lento porque para atingir a solução com a precisão desejada o número de iterações aumenta significativamente. O método de Newton-Raphson é um método, em geral, mais poderoso mas por vezes a sua convergência é sensível à precisão numérica da aproximação inicial, para o campo de velocidades \mathbf{v} . A aproximação inicial deverá ser uma estimativa razoável da solução. É, por isso, frequente usar o método iterativo simples, para obter uma aproximação para \mathbf{v} , em poucas iterações, uma vez que este é rápido nas iterações iniciais e depois a usar a estimativa obtida como aproximação inicial para arranque do método de Newton-Raphson.

4.4.2.1 Integração no tempo

Os processos de deformação plástica em massa, são em geral não estacionários. As equações têm de ser integradas no tempo e normalmente o processo de

enformação é simulado numa sequência de intervalos de tempo. Em cada intervalo de tempo, Δt as coordenadas dos nós (geometria) e principais variáveis têm de ser actualizadas. Para proceder a esta actualização há basicamente dois métodos:

- Método implícito:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + ((1 - \theta)\mathbf{v}_t + \theta\mathbf{v}_{t+\Delta t})\Delta t, \quad 0 < \theta \leq 1. \quad (4.74)$$

- Método explícito:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + \Delta t\mathbf{v}_t. \quad (4.75)$$

Nos métodos implícitos, a geometria num dado instante, $t + \Delta t$, é calculada a partir da configuração no instante t e das velocidades nos instantes $t + \Delta t$ (nesse instante) e t . Em geral, a velocidade nesse instante, $t + \Delta t$, ainda não é conhecida. Por esta razão, a aplicação de métodos implícitos envolve um processo iterativo à equação (4.74), em que se vão definindo em simultâneo aproximações para a geometria $\mathbf{x}_{t+\Delta t}$ e para a velocidade $\mathbf{v}_{t+\Delta t}$. Nos métodos explícitos, a geometria no instante $t + \Delta t$ é calculada a partir da geometria e das velocidades no instante t .

Segundo Zienkiewicz [118], o método implícito é mais robusto e eficiente, em particular para problemas que envolvem um elevado número de variáveis (malhas adaptativas, por exemplo). O método explícito implementa-se facilmente e do ponto de vista computacional não é dispendioso, mas para garantir a convergência deste método há que impor que o intervalo de tempo Δt seja inferior a um dado valor crítico [95, 18, 33].

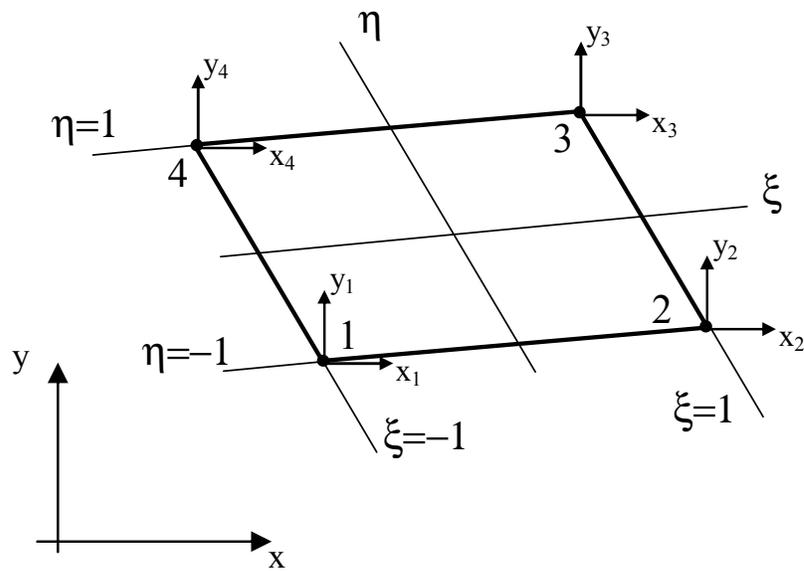


Figura 4.3: Elemento quadrilátero linear.

Capítulo 5

Aplicações e Exemplos

5.1 Introdução

Neste capítulo utiliza-se o modelo desenvolvido, para simular processos de enformação plástica. A partir das equações que descrevem o problema, considerando um comportamento rígido visco-plástico, fez-se uma discretização das equações governativas resultantes através do método sem malha EFG.

Nos exemplos de aplicações em forjamento apresentados consideraram-se as seguintes condições:

- deformação elástica foi negligenciada (adoptou-se a formulação de escoamento plástico);
- efeitos de encruamento foram incluídos;
- efeitos térmicos foram ignorados;

Na implementação do método EFG para os exemplos apresentados usou-se para função de peso a spline cúbica com a seguinte base quadrática $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]$. Para o cálculo numérico dos integrais considerou-se uma malha de integração de elementos quadrangulares lineares em que os

vértices coincidem com os nós considerados na discretização do domínio. Para cada célula de integração usou-se quadratura gaussiana com 4×4 pontos de quadratura de Gauss ($npq = 16$). Na implementação do método EFG para os exemplos apresentados neste capítulo, efectuaram-se dois tipos de discretização para o domínio: discretização nodal uniforme e não uniforme. Em ambas as discretizações usaram-se dois processos diferentes para o cálculo do domínio de influência, descritos em seguida.

Domínio de influência definido a partir do conceito de distância (tipo A)

Para cada nó \mathbf{x}_I escolhe-se o n -ésimo nó (tipicamente o terceiro ou o quinto) mais próximo de \mathbf{x}_I (ver a figura 5.1). Seja k o índice de tal nó. O raio do domínio de influência de \mathbf{x}_I , h_I , é calculado por:

$$h_I = d_{max} \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k\|, \quad (5.1)$$

em que o parâmetro d_{max} toma valores entre 2.0 e 4.0.

Domínio de influência definido a partir de um número fixo de nós vizinhos (tipo B)

Para cada nó \mathbf{x}_I determinam-se os n_I nós mais próximos de \mathbf{x}_I (ver figura 5.2). A partir destes, selecciona-se o nó mais afastado de \mathbf{x}_I . Seja r o índice de tal nó. O raio do domínio de influência de \mathbf{x}_I , h_I é dado por:

$$h_I = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_r\|. \quad (5.2)$$

Na determinação do domínio de influência do tipo A para cada \mathbf{x}_I , o número de nós seleccionado depende de \mathbf{x}_I . A principal diferença relativamente ao domínio de influência do tipo B está no facto de este incluir sempre um número de nós constante, pré-definido para cada \mathbf{x}_I . Ao considerar-se uma discretização nodal não uniforme, os efeitos de aplicar cada um dos domínios são significativamente diferentes, devido à variação da densidade nodal. Na simulação numérica dos exemplos apresentados, em que a geometria e a fronteira vão sendo progressivamente actualizadas, no final de cada intervalo de tempo Δt os domínios de influência são calculados de novo para cada nó.

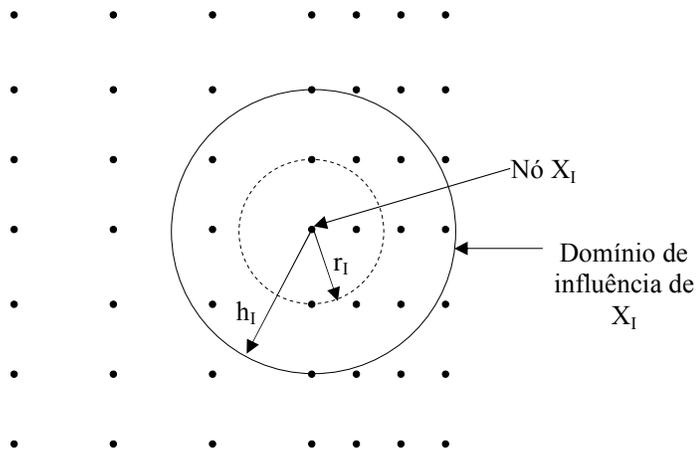


Figura 5.1: Exemplificação de domínios de influência circular do tipo A ($k = 3$ e $d_{max} = 2, 0$).

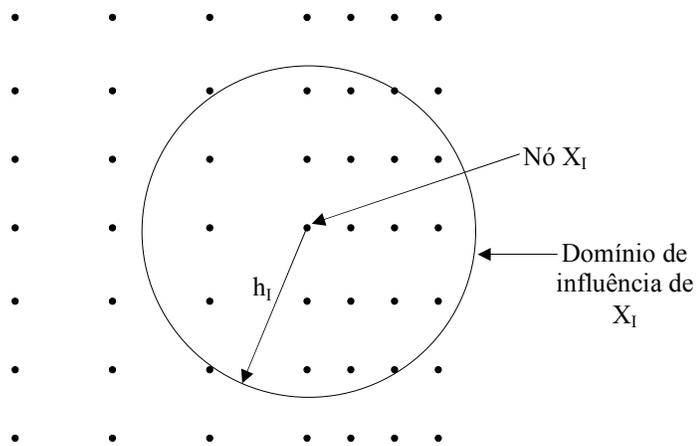


Figura 5.2: Exemplificação de domínios de influência circular do tipo B ($n_I = 20$).

Nas descrições de ambos os tipos de domínio considerou-se a forma circular. Para obter domínios com forma rectangular, basta definir o rectângulo que circunscreve o círculo de raio h_I e que tem cada um dos lados com comprimento dado por $h_I^* = 2h_I$.

Com o objectivo de comparar os resultados com a solução do método dos elementos finitos, todos os exemplos apresentados neste trabalho foram também implementados através do MEF. Nesta implementação, procedeu-se à discretização da geometria inicial da peça e das ferramentas através de elementos quadrangulares lineares e elementos de contacto, com atrito, lineares. Para modelação do contacto e do atrito, seguiu-se a formulação adoptada nas referências [23, 103]. O modelo desenvolvido baseado no MEF, tal como o do EFG, foi implementado através da aplicação Matlab. Todos os módulos foram concebidos de raiz, nomeadamente a geração de malhas estruturadas. Nos diversos gráficos ilustrados as cargas de enformação calculadas através do MEF são sempre apresentadas como elemento de referência. Os resultados obtidos pelo MEF foram comparados com os da literatura [103].

5.2 Exemplos Numéricos

5.2.1 Exemplo 1: Compressão de um cilindro metálico

Neste exemplo considera-se a compressão de um cilindro metálico com altura e diâmetro iguais a $20mm$, à temperatura ambiente, cujo procedimento experimental é descrito por Mori *et al.* [84]. Tomou-se também como referência o estudo numérico através do método dos elementos finitos apresentado por Sousa [103]. A função de escoamento para o material usado, aço ao carbono (25%), à temperatura ambiente é a seguinte:

$$\bar{\sigma} = 748(\bar{\varepsilon} + 0,0397)^{0,21} \quad MPa. \quad (5.3)$$

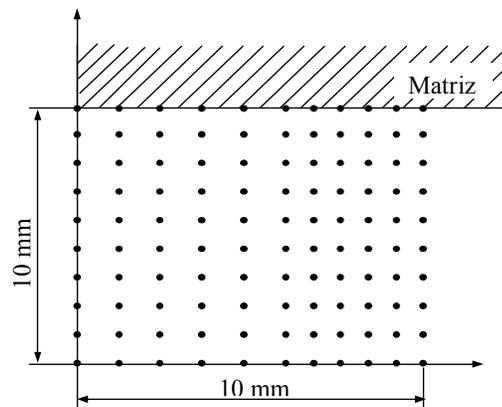
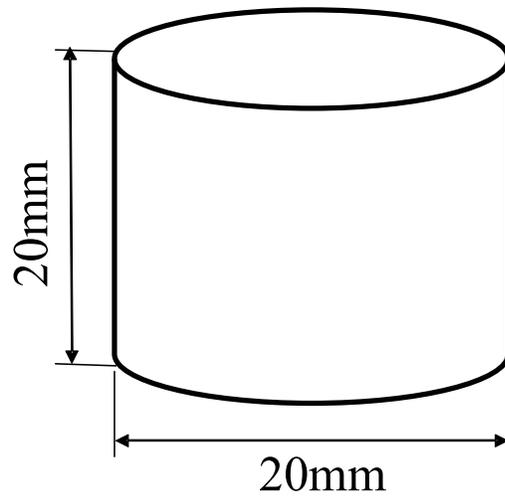


Figura 5.3: Compressão de um cilindro metálico. Geometria inicial e discretização nodal não uniforme.

Na figura 5.3 está representada a geometria inicial da peça. Em todas as situações apresentadas neste exemplo, devido à simetria, apenas um quarto da peça foi modelada. A simulação do processo foi efectuada até 50% de redução em altura do cilindro por um processo incremental. A velocidade da matriz foi de $0,2\text{mm/s}$, o que corresponde a uma redução da altura de 2% relativamente à altura inicial em cada intervalo de tempo.

Os seguintes valores de factor de atrito foram considerados: $m_f = 0,0$ e $m_f = 1,0$. Neste exemplo, caso não seja dito nada em contrário, pressupõe-se que em todas as simulações se considerou numa discretização nodal não uniforme, conforme a da figura 5.3.

5.2.1.1 Solução sem atrito ($m_f = 0,0$)

Procedeu-se à simulação da compressão de um cilindro através da aplicação do modelo computacional desenvolvido, baseado no método EFG. Considerou-se uma lei de atrito de factor constante $m_f = 0,0$ (sem atrito). Os parâmetros de penalidade envolvidos no modelo, respeitantes à condição da incompressibilidade (eq. 4.26), restrição de contacto (eq. 4.34) e imposição das condições de fronteira (que não envolvem o contacto) são os seguintes

$$\lambda_\alpha = 10^4 \quad (5.4)$$

$$\alpha_f = 10^9 \quad (5.5)$$

$$\alpha_u = 10^9. \quad (5.6)$$

Na primeira fase deste estudo, para cada nó \mathbf{x}_I definiu-se um domínio de influência circular do tipo A, em que se considerou o terceiro nó mais próximo de \mathbf{x}_I . Analizaram-se 3 situações correspondentes às seguintes variações do parâmetro d_{max} :

$$\text{Caso 1 : } k = 3, d_{max} = 2,5 \quad (5.7)$$

$$\text{Caso 2 : } k = 3, d_{max} = 3,0 \quad (5.8)$$

$$\text{Caso 3 : } k = 3, d_{max} = 3,5. \quad (5.9)$$

Com o objectivo de averiguar a influência do número de pontos de Gauss,

para cada um destes casos utilizaram-se respectivamente 2×2 ($npq = 4$) e 4×4 ($npq = 16$) pontos em cada célula de integração. Os resultados obtidos estão representados nos dois gráficos que constituem a figura 5.4. Tal como ilustra esta figura, a evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e das reacções na base da peça, em função da redução em altura, são praticamente coincidentes, de forma geral, em qualquer um dos 3 casos analisados, até uma redução em altura de 50%. No entanto, a solução obtida para $npq = 16$ é significativamente melhor relativamente à obtida para $npq = 4$, muito em particular no Caso 1. De facto, quando se usa $npq = 4$ verifica-se que a partir de 35% – 40% de redução em altura há um afastamento da carga de enformação relativamente à solução dada por MEF, resultando nitidamente uma degradação da solução final. Este efeito é mais acentuado no Caso 1.

Um estudo semelhante foi feito com um domínio de influência circular do tipo B. Analisaram-se os seguintes casos:

$$\text{Caso 1 : } n_I = 16 \quad (5.10)$$

$$\text{Caso 2 : } n_I = 20 \quad (5.11)$$

$$\text{Caso 3 : } n_I = 24. \quad (5.12)$$

Analogamente ao que aconteceu na aplicação do domínio de influência circular do tipo A, os resultados obtidos são muito satisfatórios, tal como ilustra a figura 5.5. Na solução obtida correspondente à utilização de 2×2 pontos de Gauss, manifesta-se uma ligeira degradação desta, praticamente irrelevante, à volta de 50% de redução em altura.

A figura 5.6 apresenta o erro relativo para as cargas de enformação calculadas pelo método EFG, para cada um dos casos analisados com um domínio de influência do tipo A e B, respectivamente. No cálculo do erro relativo, considerou-se para melhor aproximação a solução dada pelo MEF. O erro mantém-se estável e baixo até uma redução de cerca de 35% de redução em altura, crescendo com a distorção da malha de integração. No Caso 1 os erros são maiores, sendo praticamente iguais para os outros dois casos.

Simulações análogas foram efectuadas para uma discretização nodal uniforme

e os resultados não mostram diferenças significativas, não sendo por isso aqui apresentadas.

5.2.1.2 Solução para atrito seco ($m_f = 1, 0$)

Procedeu-se à simulação da compressão de um cilindro, nas condições referidas anteriormente, mas desta vez considerou-se uma lei de atrito de factor constante $m_f = 1, 0$. Consideraram-se domínios de influência do tipo A ($k = 4, d_{max} = 2, 5$; $k = 4, d_{max} = 3, 0$) e do tipo B ($n_I = 22$). Para cada um destes, fez-se variar o número de pontos de quadratura em cada célula de integração, de forma análoga ao estudo feito em §5.2.1.1. Os resultados são apresentados nas figuras 5.7 e 5.8.

Quando se considera um domínio de influência do tipo A, ($k = 4, d_{max} = 2, 5$), analisando a figura correspondente, figura 5.7, destaca-se o seguinte aspecto: os valores das cargas calculadas no topo e das reacções na base da peça são coincidentes até próximo de 45% de redução em altura, independentemente de se usar 2×2 ou 4×4 pontos de quadratura em célula de integração. No entanto, a partir de 45% de redução há um afastamento das cargas nos dois casos e verifica-se uma degradação significativa quando se usa 2×2 pontos de quadratura. A utilização de 4×4 pontos de quadratura é pois significativamente vantajosa relativamente à de 2×2 pontos.

Na situação em que se atribuiu $k = 4$ e $d_{max} = 3, 0$, figura 5.8, o afastamento das cargas calculadas no topo e reacções na base da peça, manifesta-se mais cedo, à volta de 25% – 30%. Em termos globais há um empobrecimento da solução quando se usam 2×2 pontos de quadratura, em qualquer dos casos. No MEF, independentemente de se usar 2×2 ou 4×4 pontos de quadratura não há alteração da evolução da carga, o que não acontece no método EFG.

Neste exemplo, nas mesmas condições os resultados com um domínio do tipo B são significativamente melhores, comparativamente aos obtidos com os do tipo A, tal como ilustra a figura 5.9. Esta melhoria, verifica-se, quer se considere para a geometria inicial uma discretização nodal uniforme ou não uniforme.

Por observação da evolução da geometria, quando se considera discretização nodal não uniforme, é visível um grande afastamento entre os nós na zona de menor densidade nodal, à volta da origem. Nesta zona, à medida que vai aumentando a redução em altura verifica-se um empobrecimento no número de nós a ser incluído. Num domínio de influência do tipo B, isto não acontece, mesmo em zonas de menor densidade nodal, porque pela forma como este tipo de domínio é definido, para cada nó é imposto o número de nós (constante ao longo do processo) a incluir.

5.2.1.3 Solução obtida para um nível de redução de 50%

A figura 5.10 representa a geometria inicial da peça, composta por duas partes: a parte superior que corresponde à discretização nodal considerada no método EFG e na parte inferior a malha de elementos usada no MEF. As figuras 5.11 e 5.12 ilustram respectivamente a forma final da peça, correspondente até uma redução em altura de 50% obtidas através do MEF e do modelo baseado no EFG para os seguintes valores de factor de atrito: 0,0 e 1,0. Nestas figuras, analogamente à figura 5.10, a parte superior e inferior estão associadas respectivamente à solução dada pelo EFG e MEF.

A figura 5.13 destaca simplesmente a geometria obtida respectivamente pelo método EFG e MEF, para uma redução em altura de 50% e para um valor de factor de atrito igual a 1,0. A forma final obtida pelos dois métodos são semelhantes, em ambas as situações.

A figura 5.14 representa globalmente a forma final da peça, correspondente a uma redução em altura de 50%, obtida pela solução do modelo baseado no método EFG para o caso em que se considerou um valor de factor de atrito igual a 1,0.

No processo de simulação numérica, em qualquer das situações considerou-se um quarto da peça. Nas figuras 5.11, 5.12 e 5.14, a geometria representada foi obtida por construção, por simetria, a partir dos resultados da simulação.

As figuras 5.15 e 5.16 representam o campo de deformação efectiva que resultam respectivamente da solução dada pelos métodos EFG e MEF, no instante correspondente para uma redução em altura de 50%, em que se considerou $m_f = 1,0$. Tal como estas figuras ilustram, as distribuições de deformação efectiva obtidas pelo modelo numérico desenvolvido baseado no método EFG são semelhantes às obtidas pelo MEF.

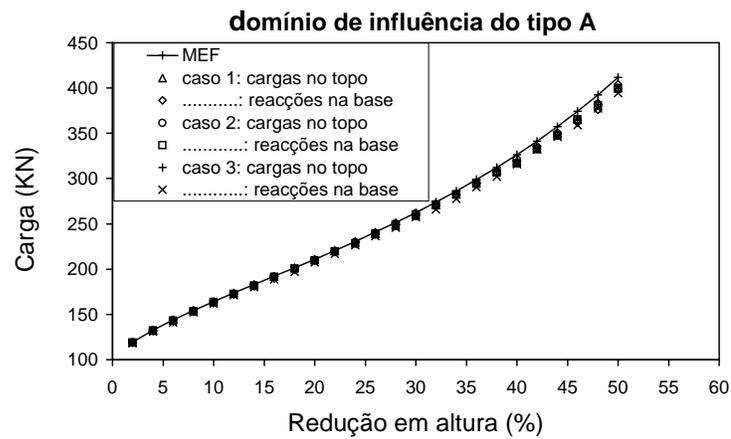
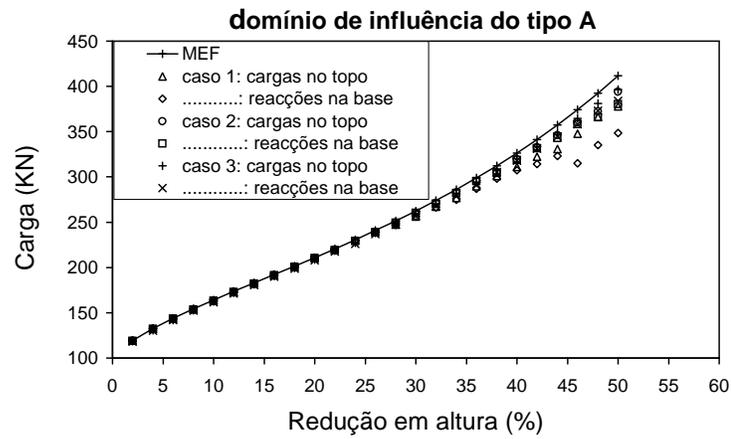


Figura 5.4: Evolução das cargas calculadas no topo e das reacções na base da peça pelo método EFG, para os 3 casos analisados num domínio do tipo A ($m_f = 0, 0$). Considerou-se respectivamente $npq = 4$ e $npq = 16$.

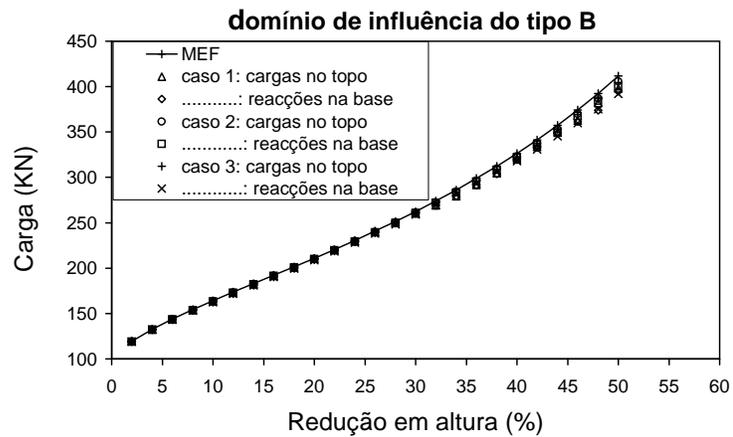
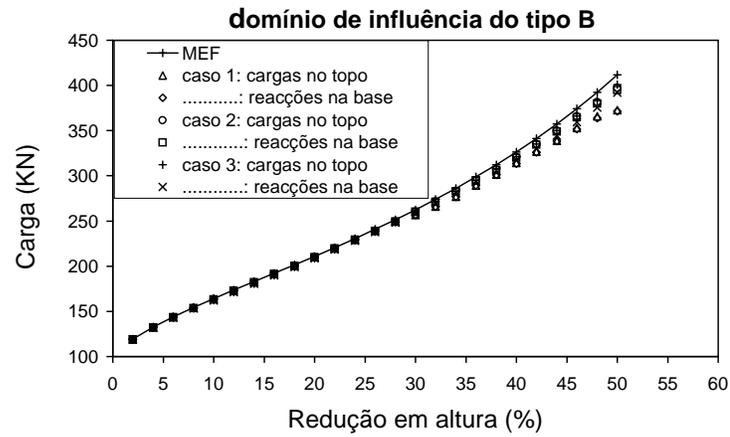


Figura 5.5: Evolução das cargas calculadas no topo e das reacções na base da peça pelo método EFG, para os 3 casos analisados num domínio do tipo B ($m_f = 0, 0$). Considerou-se respectivamente $npq = 4$ e $npq = 16$.

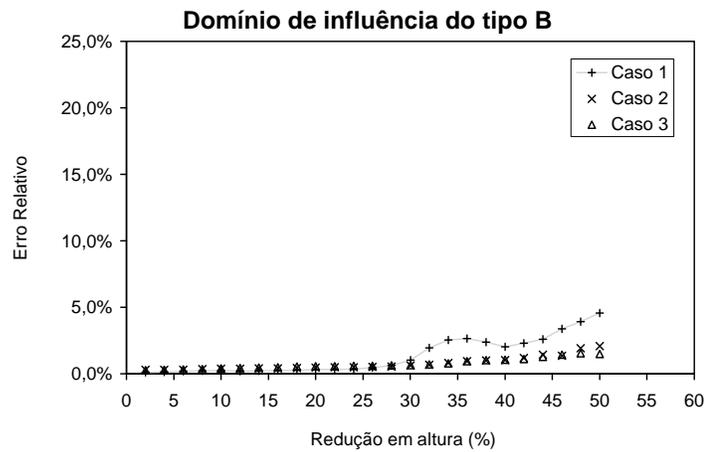
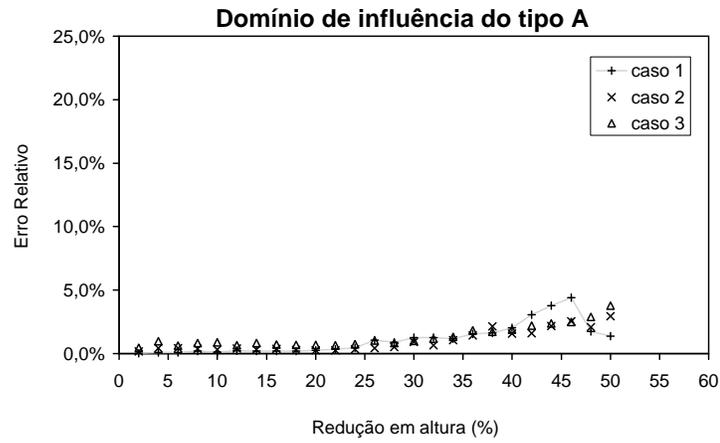


Figura 5.6: Evolução do erro relativo das carga de enformação, calculadas pelo método EFG para os 3 casos analisados em cada um dos domínio de influência. Considerou-se: $m_f = 0,0$, $npq = 16$ e a solução obtida pelo MEF como referência para o cálculo do erro.

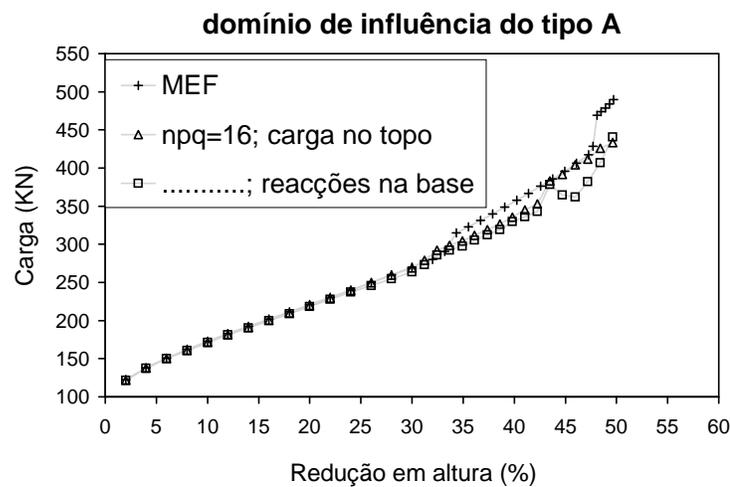
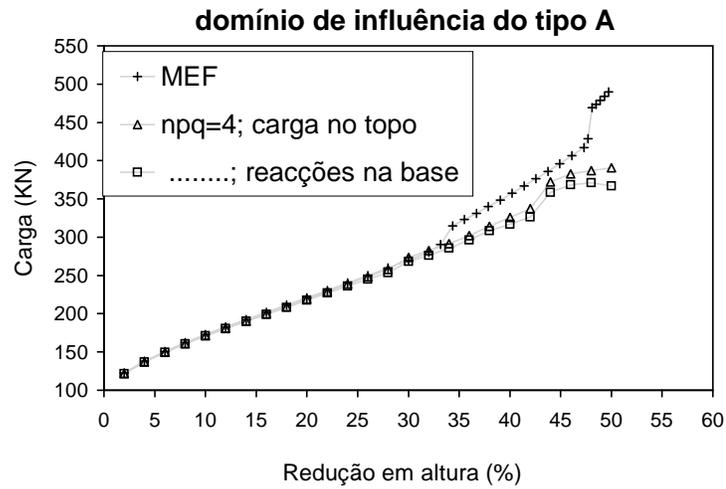


Figura 5.7: Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou um domínio de influência do tipo A ($k = 4$; $d_{max} = 2,5$) com $m_f = 1,0$.

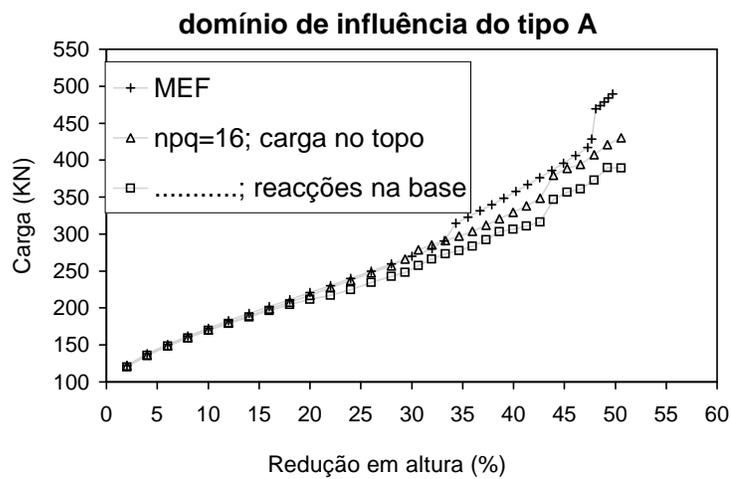
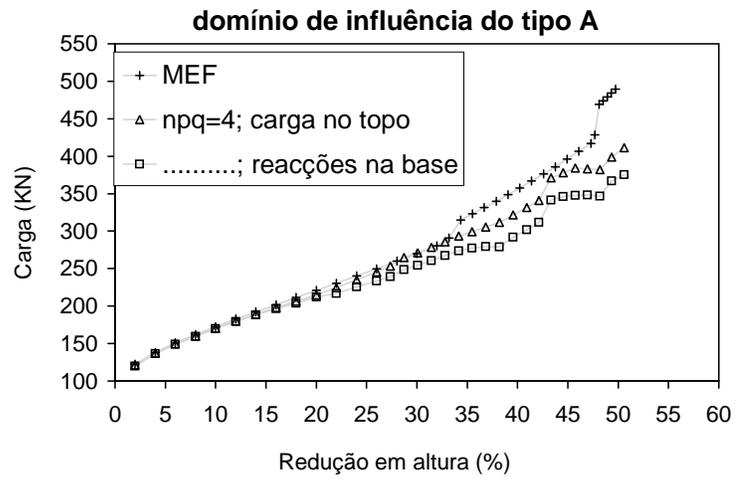


Figura 5.8: Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou um domínio de influência do tipo A ($k = 4$; $d_{max} = 3,0$) com $m_f = 1,0$.

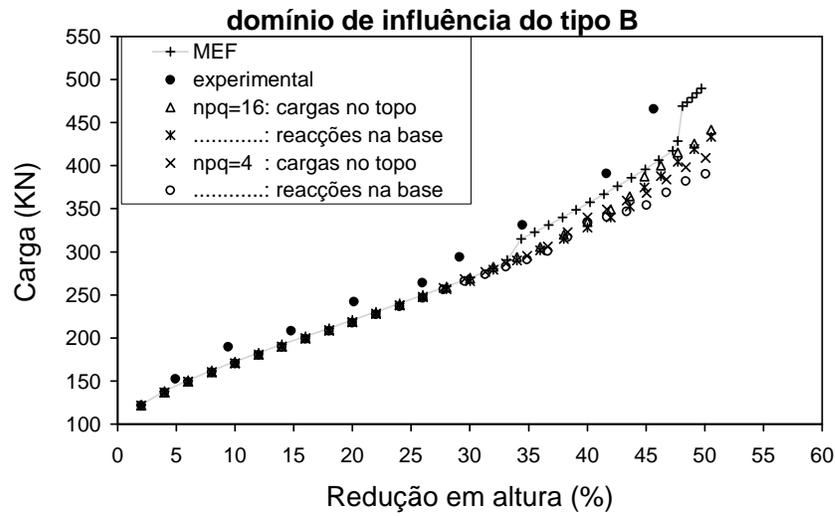


Figura 5.9: Evolução das cargas calculadas pelo método EFG no topo e as reacções na base da peça, em que se considerou $N_I = 22$ e $m_f = 1,0$.

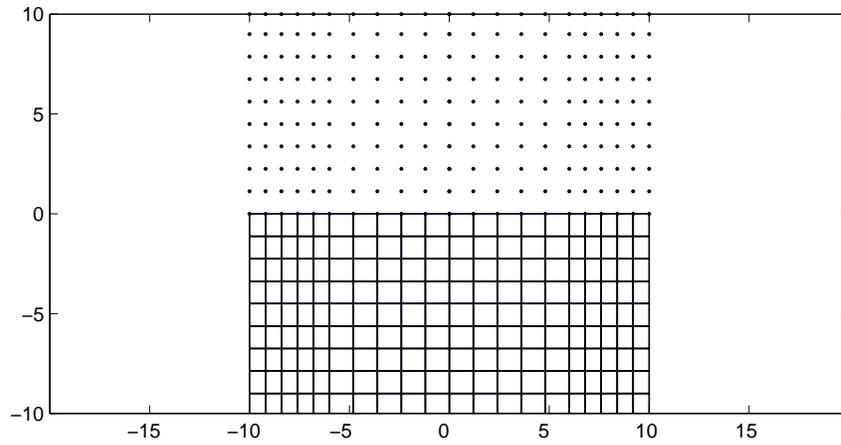
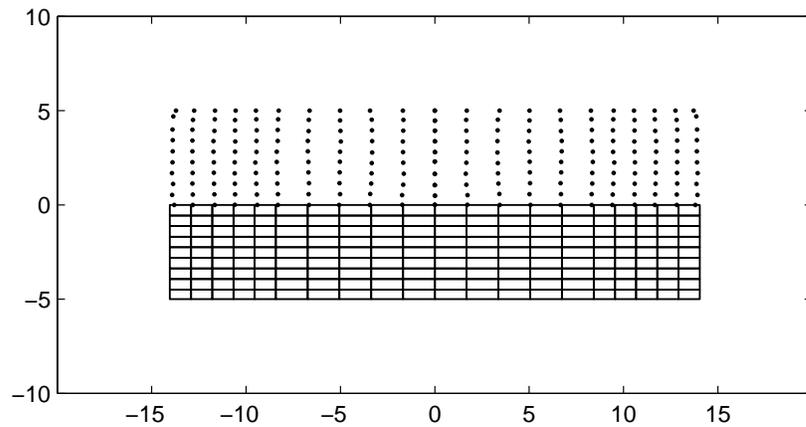


Figura 5.10: Forma inicial da peça.

Figura 5.11: Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG e pelo MEF para o seguinte valor de atrito: $m_f = 0,0$.

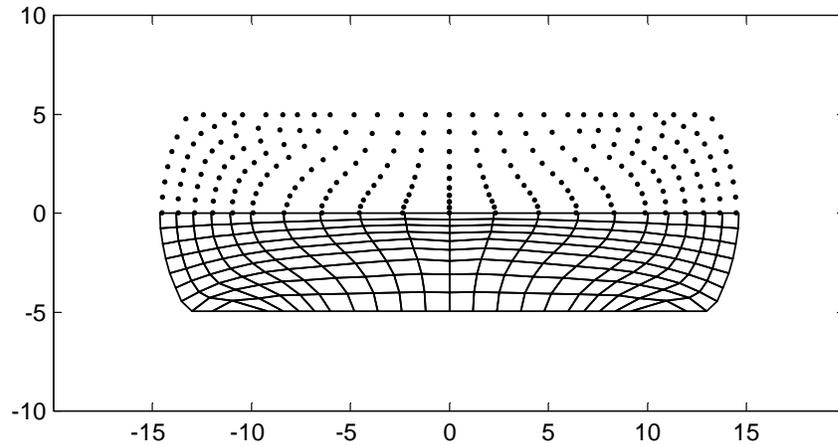


Figura 5.12: Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG e pelo MEF para o seguinte valor de atrito: $m_f = 1,0$.



Figura 5.13: Geometrias correspondentes a uma redução em altura igual a 50% obtidas respectivamente pelo método EFG e pelo MEF, em que se considerou $m_f = 1,0$.

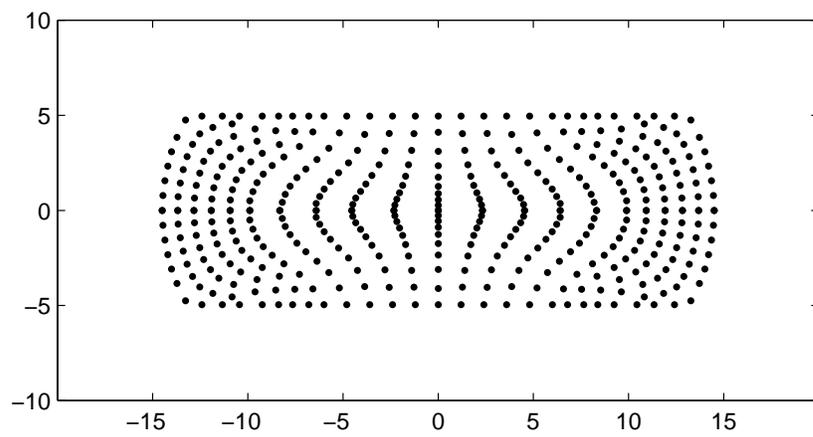


Figura 5.14: Forma final da peça correspondente à redução em altura de 50% pelo método EFG para $m_f = 1,0$.

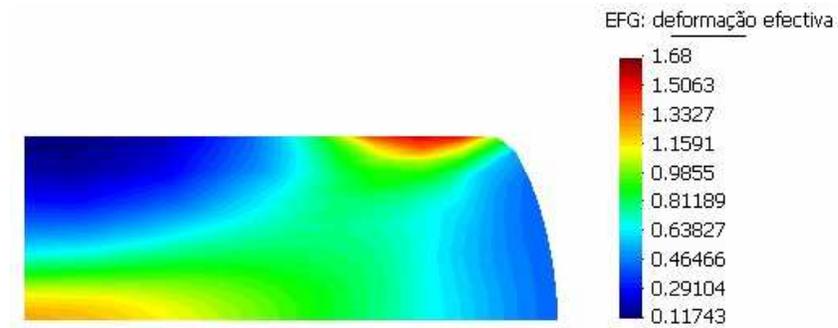


Figura 5.15: Deformação efectiva para uma redução em altura de 50% ($m_f = 1, 0$) obtida pelo método EFG.

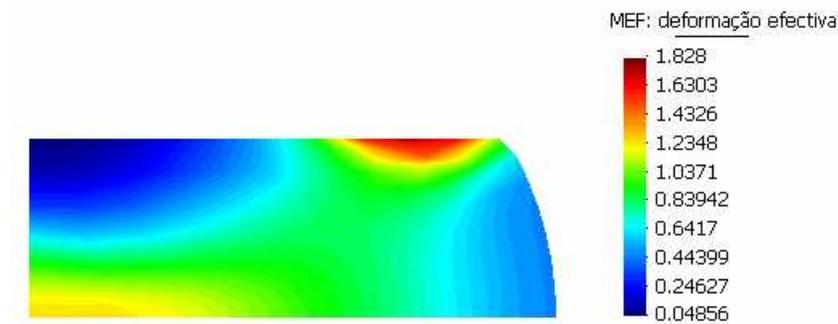


Figura 5.16: Deformação efectiva para uma redução em altura de 50% ($m_f = 1, 0$) obtida pela solução MEF.

5.2.2 Exemplo 2: Compressão de um varão metálico semi-encastrado

Neste exemplo considera-se a compressão de um varão metálico semi-encastrado. A simulação numérica deste exemplo, através do método dos elementos finitos (MEF) foi feita por Martins [78] e Sousa [103]. Na geometria inicial o varão tem diâmetro interno de $12,7mm$ e altura de $31,75mm$. Na implementação numérica apenas se considerou metade da peça devido à sua simetria. A geometria inicial do problema e a discretização efectuada através de 168 nós, está representada na figura 5.17. A função de escoamento para o material usado, aço SAE 1040, à temperatura ambiente é dada por:

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y} = \left[1 + \frac{\bar{\epsilon}}{0,012} \right]^{0,1085}; \quad Y = 574,28MPa. \quad (5.13)$$

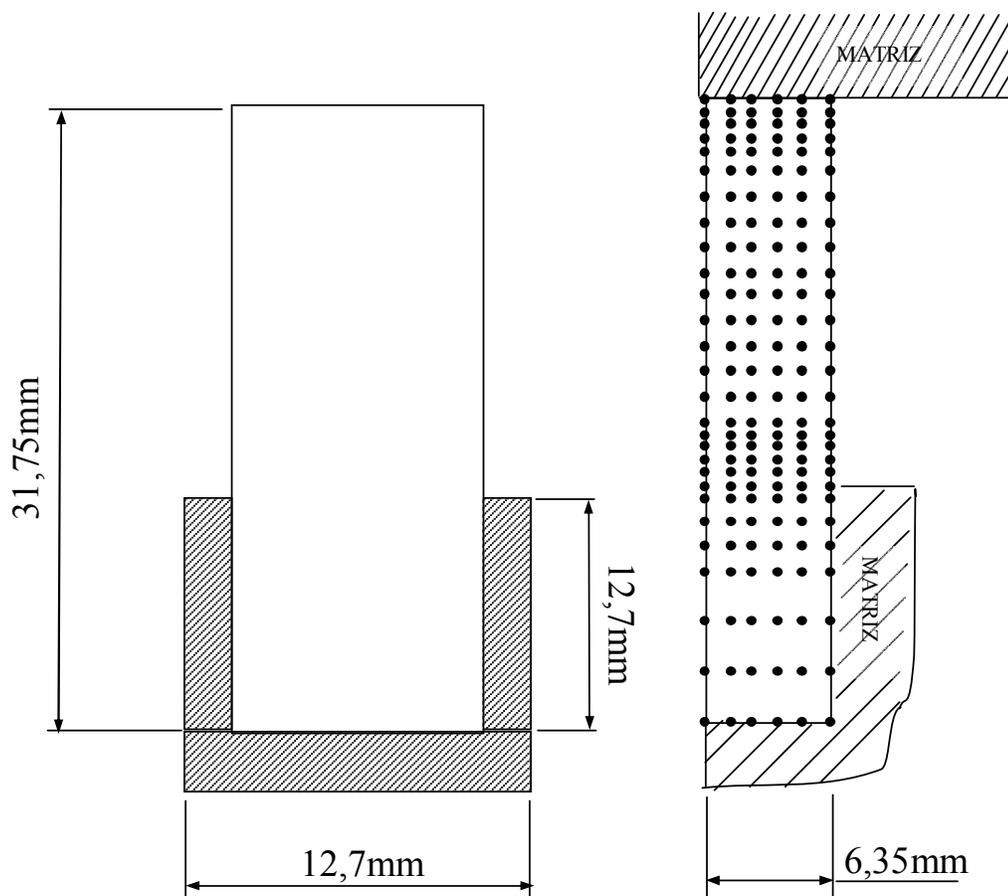


Figura 5.17: Compressão de um varão metálico semi-encastado. Geometria inicial e discretização nodal.

O problema foi analisado de forma incremental, em que a geometria e as condições fronteira vão sendo progressivamente actualizadas. Considerou-se uma velocidade de descida da matriz constante e igual a $1,95\text{mm}/\text{min}$ e escolheu-se o intervalo de tempo Δt de forma a obter uma percentagem de redução em altura da zona do varão não encastrada (altura livre) igual a 1% em cada intervalo de tempo. Considerou-se para cada nó da discretização um domínio de influência do tipo B com $N_I = 22$.

A figura 5.18 apresenta a evolução da carga de enformação calculada através do método EFG, do MEF assim como a carga experimental, respectivamente para os casos em que se considerou $m_f = 0,0$ e $m_f = 0,25$. Por observação desta figura (5.18) constata-se que até ao instante que corresponde a uma redução em altura de 35% há concordância entre os resultados do EFG, do MEF e os valores experimentais.

Na figura 5.19 representa-se a evolução do perfil geométrico da superfície exterior no contacto entre a peça e a matriz superior, quantificada pelo quociente R/R_0 , onde R_0 representa o diâmetro inicial do provete. Analisando esta figura verifica-se que até uma percentagem de redução muito próxima de 50% os valores obtidos pelo modelo desenvolvido são muito semelhantes, em ambos os casos ($m_f = 0,0$ e $m_f = 0,25$) aos obtidos pelo MEF. De facto, só a partir de 45% é que se verifica um afastamento dos valores obtidos pelos dois métodos, que a partir de 50% aumenta de forma acentuada, sendo no entanto este afastamento maior no caso de $m_f = 0,25$.

A evolução da geometria da peça ao longo do processo está representada na figura 5.20 para o caso em que se considerou para valor de factor de atrito $m_f = 0,25$. Nesta figura, a geometria representada num dado instante é formada por duas partes, esquerda e direita que correspondem respectivamente à solução obtida a partir do MEF e do modelo desenvolvido baseado no EFG. Comparando de uma forma global a evolução da geometria obtida pelos dois métodos, há uma semelhança muito grande até um valor de redução em altura à volta de 45%. Na figura em que está representada a geometria correspondente a uma redução em altura de 45% verificam-se algumas diferenças, localmente, muito em particular

na zona de contacto da peça com a matriz inferior. De facto, comparando o processo de redução pelos dois métodos, até um valor de redução em altura de 60% há um aspecto significativo: no MEF, três nós entram em contacto com a matriz inferior nos instantes correspondentes a uma redução em altura de: 33%, 47% e 55%. Na solução dada pelo EFG três nós entram em contacto com a matriz inferior nos instantes correspondentes a uma redução em altura de: 41%, 55% e 57%.

A figura 5.21 representa a evolução da geometria da peça ao longo do processo, analogamente à figura 5.20, mas para o caso em que não se considerou o efeito do atrito ($m_f = 0, 0$).

As figuras 5.22 e 5.23 ilustram a distribuição do campo de deformação efectiva correspondente às geometrias representadas na figura 5.20. De uma forma geral, até ao instante correspondente a 30% de redução em altura a distribuição obtida a partir da solução EFG é semelhante à do MEF. Na figura em que está representada a distribuição correspondente a uma redução em altura de 45%, surgem diferenças na solução, nomeadamente na superfície de contacto da peça com a matriz inferior. Isto deve-se possivelmente ao facto já referido anteriormente, de para este nível de redução, no MEF já existir um nó de contacto com a matriz inferior e um segundo nó prestes a entrar em contacto, enquanto que na solução EFG, só existe um nó de contacto com a matriz inferior, muito recente.

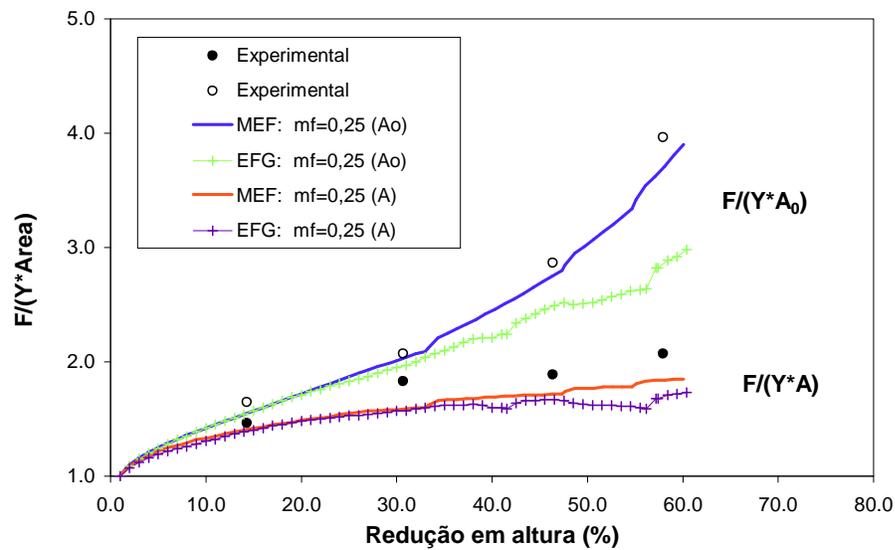
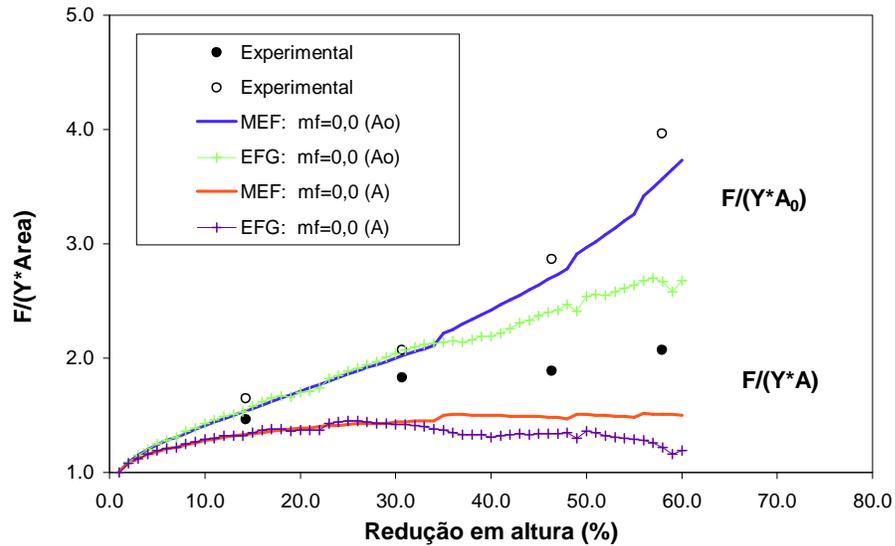


Figura 5.18: Evolução das carga de enformação em função da percentagem de redução em altura. Valores calculados e experimentais.

A_0 —Área inicial da peça em contacto com a matriz superior

A —Área da peça em contacto com a matriz superior no instante considerado.

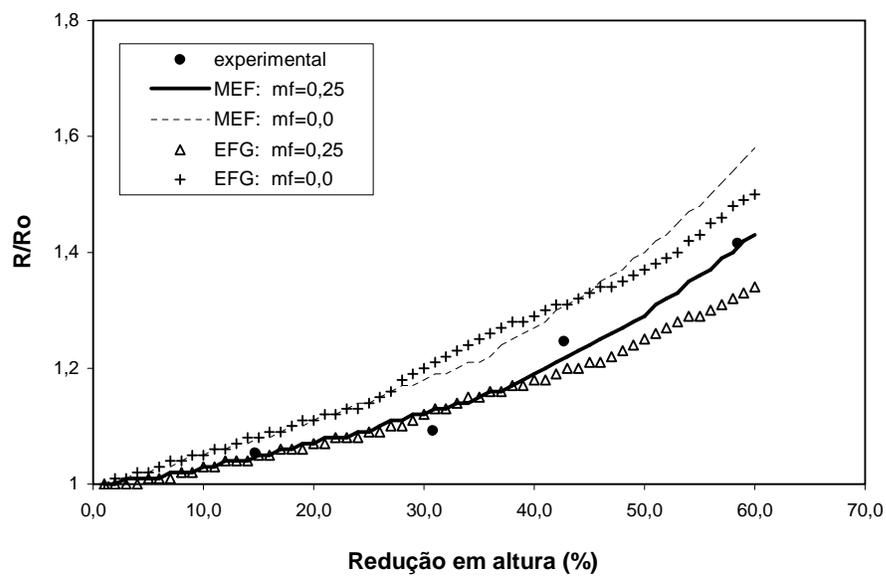


Figura 5.19: Evolução do perfil geométrico da superfície da peça em contacto com a matriz superior em função da redução em altura. Valores calculados e experimentais.

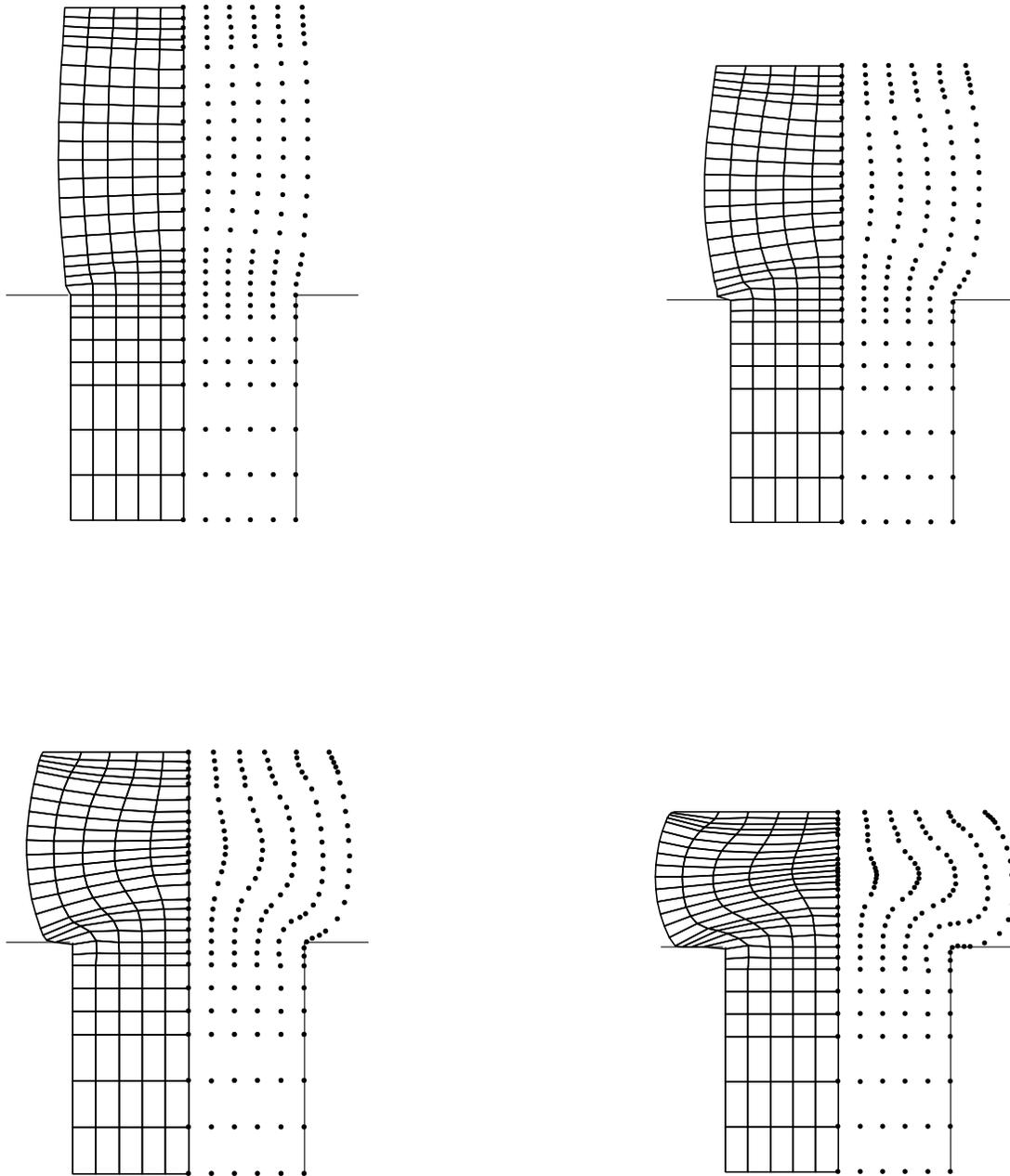


Figura 5.20: Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 30%, c) 45%, d) 60%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$. Em cada geometria a parte esquerda representa a solução obtida pelo método MEF e parte direita pelo método EFG.

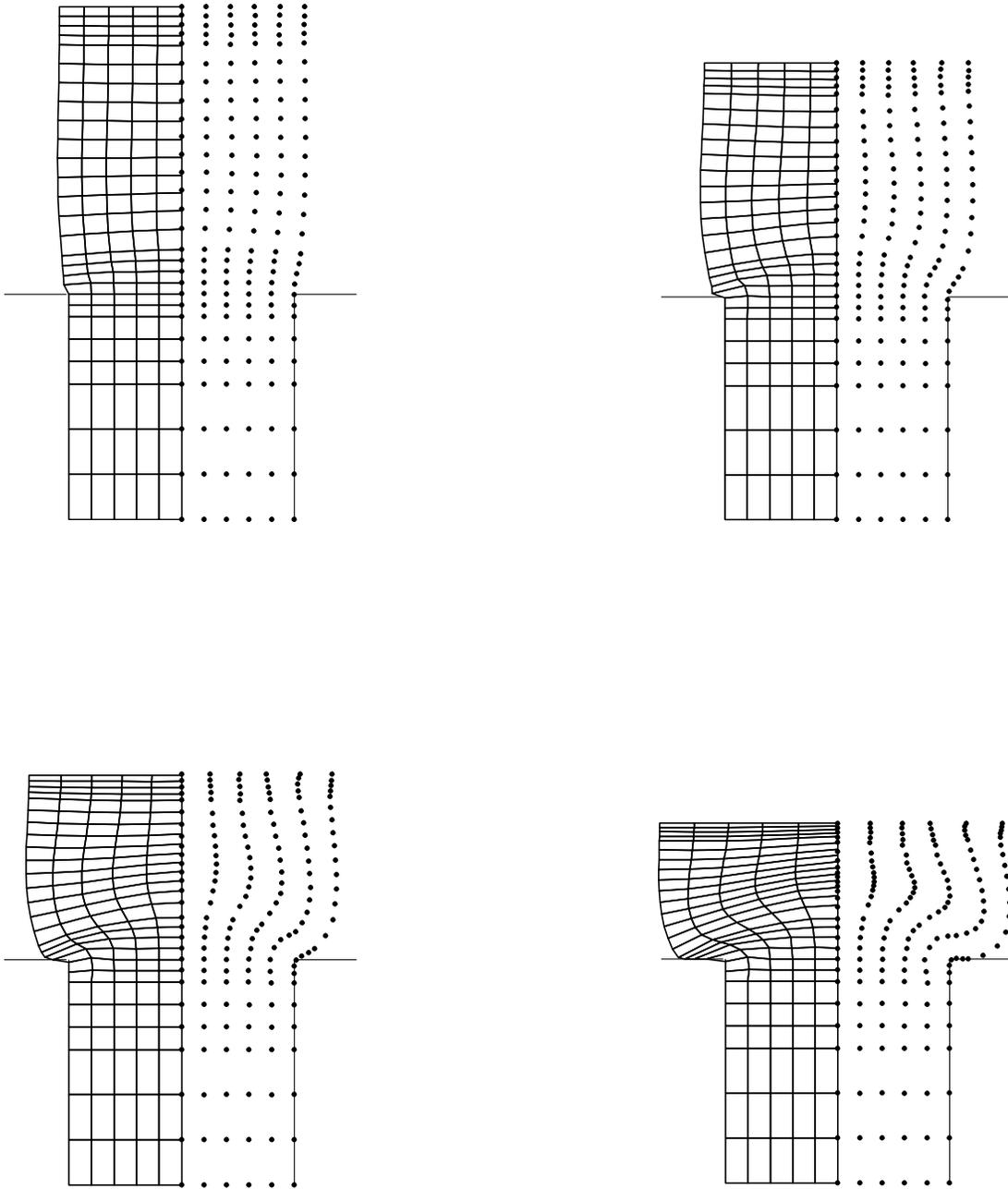


Figura 5.21: Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 30%, c) 45%, d) 60%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,0$.

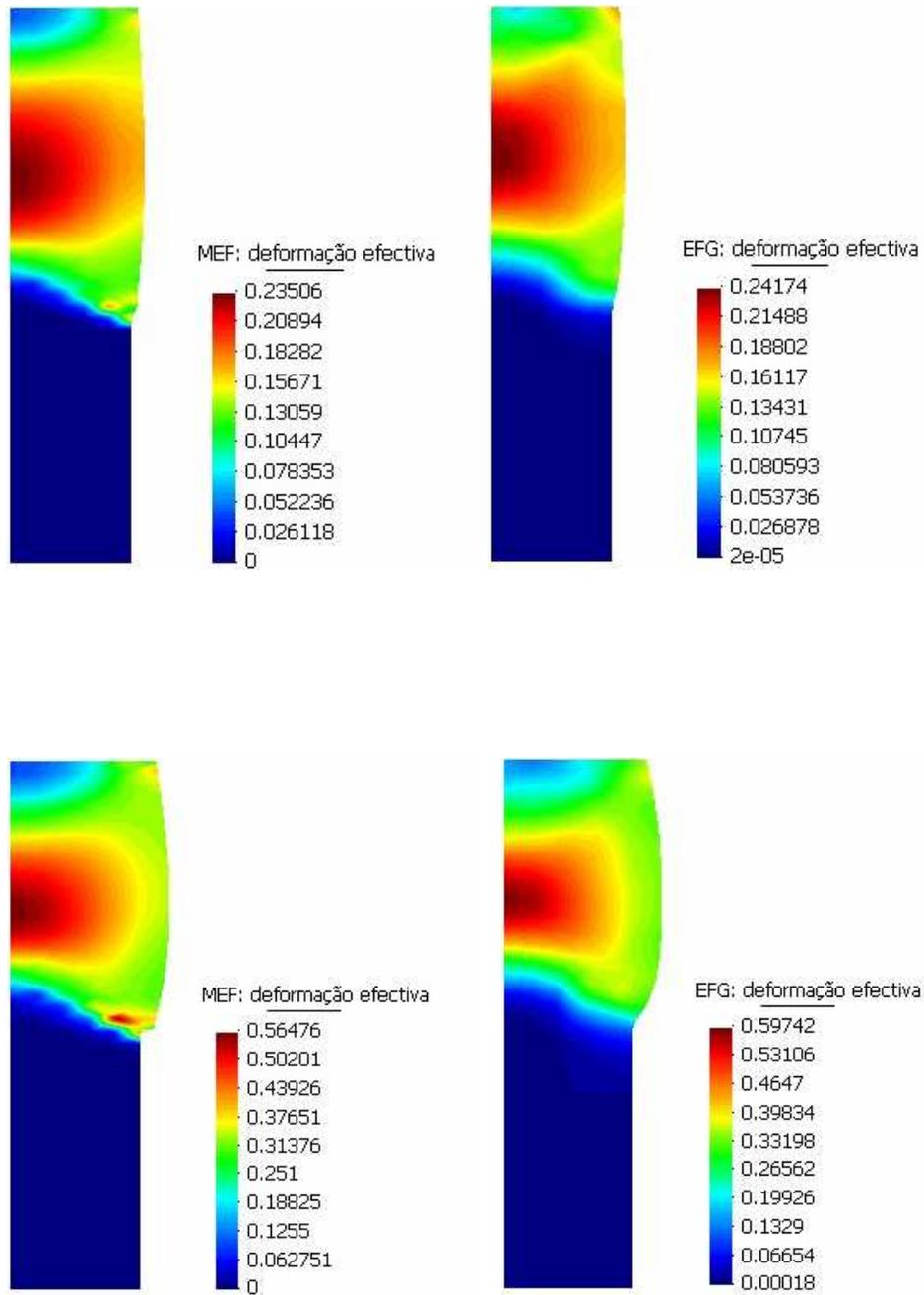


Figura 5.22: Campo de deformação efectiva obtido para o MEF e EFG, respectivamente no instante correspondente a 15% e 30% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$.

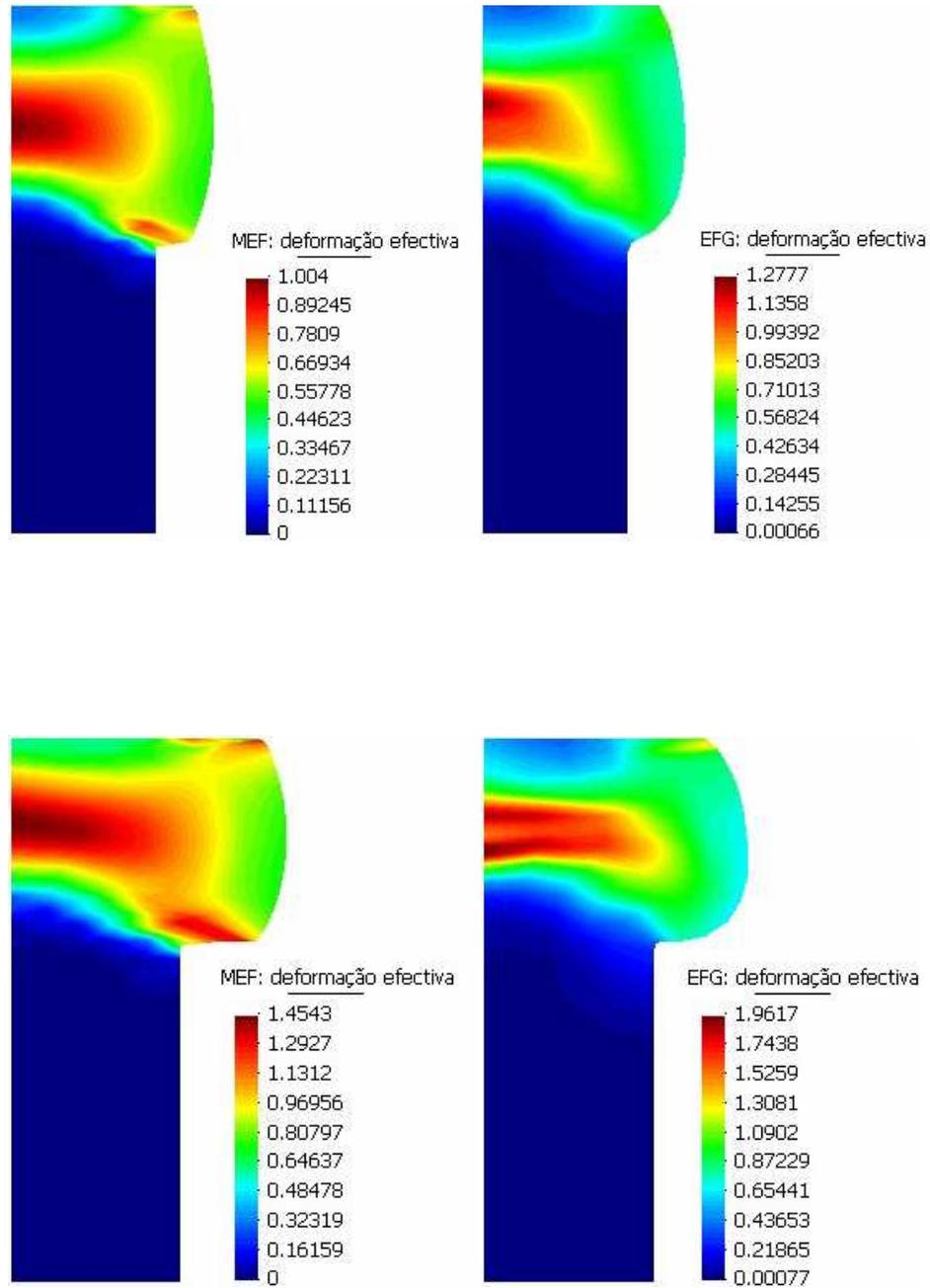


Figura 5.23: Campo de deformação efectiva obtido para o MEF e EFG, respectivamente no instante correspondente a 45% e 60% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,25$.

5.2.3 Exemplo 3: Compressão de um varão oco metálico semi-encastrado

Neste exemplo faz-se o estudo da compressão de um varão oco metálico semi-encastrado através do modelo desenvolvido. A geometria inicial da peça é representada na figura 5.24. Devido à simetria, apenas foi necessário proceder à discretização de metade da geometria inicial tendo para o efeito sido utilizada uma discretização nodal contendo 168 nós. Conjuntamente, a simulação numérica também foi feita através do MEF, em que se considerou uma malha estruturada não uniforme de elementos quadriláteros lineares, conforme apresentada na figura 5.24. O material utilizado foi uma liga de alumínio com a seguinte relação tensão-extensão:

$$\bar{\sigma} = 180,7(\bar{\varepsilon})^{0,183} \quad MPa. \quad (5.14)$$

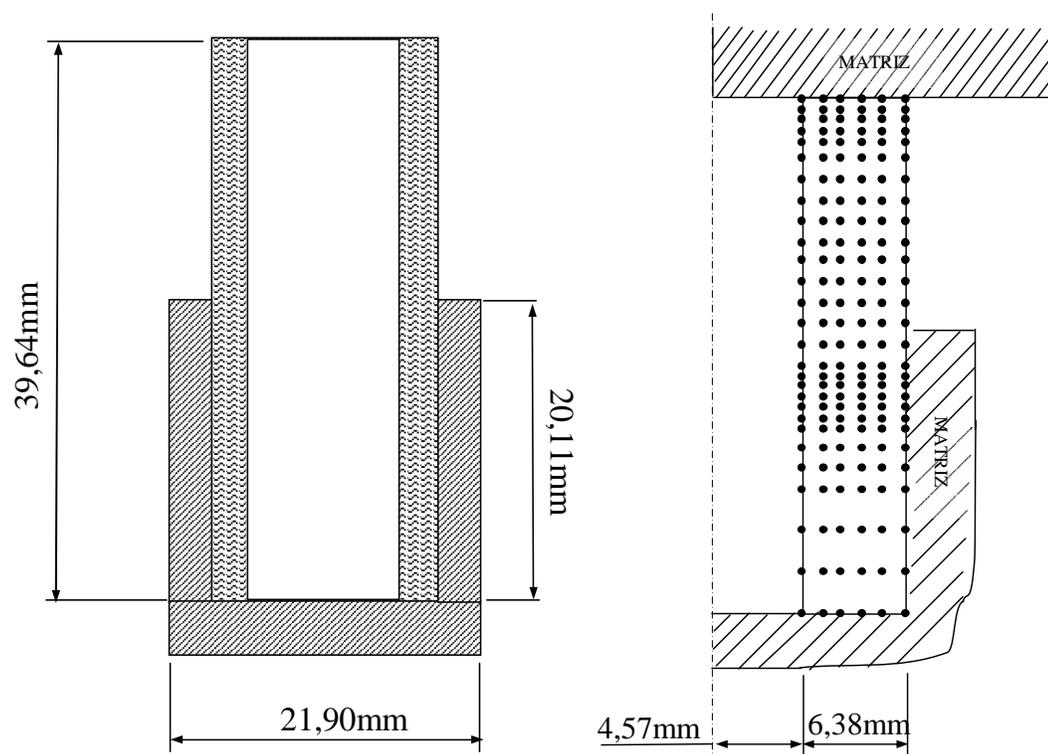


Figura 5.24: Compressão de um varão oco metálico semi-encastado. Geometria inicial e discretização nodal.

Com o objectivo de analisar o problema com os valores existentes na literatura [103], considerou-se o atrito entre a peça e a ferramenta em três situações diferentes. Nos dois primeiros casos considerou-se o factor de atrito na superfície de contacto com a matriz superior igual ao da matriz inferior e no terceiro caso valores diferentes:

$$\text{Caso 1 : } m_f = 0,1 \quad (5.15)$$

$$\text{Caso 2 : } m_f = 0,5 \quad (5.16)$$

$$\text{Caso 3 : } m_f = 0,05 \text{ (matriz superior) e } m_f = 0,5 \text{ (matriz inferior).} \quad (5.17)$$

O processo foi analisado de forma incremental, com uma percentagem de redução em altura relativamente à altura livre inicial dos varões igual a 1% em cada intervalo de tempo.

Nas figuras 5.25, 5.26 e 5.27 analisaram-se alguns aspectos deste problema para as situações correspondentes aos Casos 1 e 2.

Na figura 5.25 é apresentada a carga experimental e os valores obtidos para a carga de enformação no topo e as reacções na base da peça, segundo os modelos desenvolvidos MEF e EFG para as duas primeiras condições de atrito. Por observação desta figura verifica-se que os valores obtidos pelo método EFG, comparativamente aos do MEF têm um afastamento nas reacções a partir de 35% – 40%, que é nitidamente maior para o caso em que se considerou $m_f = 0,5$.

Nas figuras 5.26 e 5.27 estão representadas a evolução do perfil geométrico da superfície exterior no contacto do varão com a matriz superior quantificada pela variação dos raios exterior e interior, respectivamente. Na análise desta evolução, relativamente à variação do raio exterior (ver figura 5.26) constata-se que os valores obtidos pelo EFG são coincidentes com os do MEF até uma redução em altura de 40%. A partir daqui, verifica-se um afastamento nos valores que vai aumentando progressivamente com a redução, sendo este muito mais demarcado no caso em que considerou $m_f = 0,5$.

Nas figuras 5.28, 5.29 e 5.30 estão representadas a carga de enformação, assim como a evolução do perfil geométrico para uma análise em que se considerou o factor de atrito na superfície de contacto com a matriz superior igual a $m_f = 0,05$

e na superfície de contacto com a matriz inferior igual a $m_f = 0,5$ (Caso 3).

A figura 5.28 mostra as cargas de enformação e constata-se que de facto, até uma percentagem de redução de 40% há coincidência dos valores obtidos pelo método EFG e pelo MEF, e a partir daí verifica-se um desvio, tal como já tinha acontecido no estudo feito para os Casos 1 e 2. Na análise da evolução do raio exterior da peça na zona de contacto com a matriz superior, figura 5.29 verifica-se que os valores obtidos pelo método EFG são ligeiramente diferentes do MEF, logo desde o início do processo e essa diferença vai-se mantendo de forma constante à medida que o processo de redução avança.

Na figura 5.30 está representado um estudo feito semelhante ao da figura 5.29, mas relativo à evolução do raio interior e os resultados obtidos pelo método EFG são semelhantes aos do MEF até a um nível de redução em altura próximo de 45%.

A evolução da geometria da peça deformada obtida pelo MEF e pelo método EFG é apresentada nas figuras 5.31 e 5.32 em que se considerou o factor de atrito na superfície de contacto com a matriz superior e inferior igual a 0,5 (Caso 2).

Na figuras 5.33 representa-se a distribuição do campo de deformação efectiva correspondente às geometrias da figura 5.31. Analisando estas figuras, verifica-se que até ao instante correspondente a 35% de redução em altura a distribuição obtida a partir da solução EFG é semelhante à do MEF. No entanto, a distribuição do campo de deformação para a geometria correspondente à da figura 5.32 (55% de redução) é muito diferente para as soluções obtidas pelo EFG e pelo MEF, razão pela qual se optou por não a apresentar. Isto deve-se naturalmente ao facto de a solução obtida pelo EFG estar degradada a partir de 40% – 45% de redução em altura, o que se infere a partir das figuras 5.25, 5.26 e 5.27 e como tal os valores da deformação efectiva não se consideram credíveis.

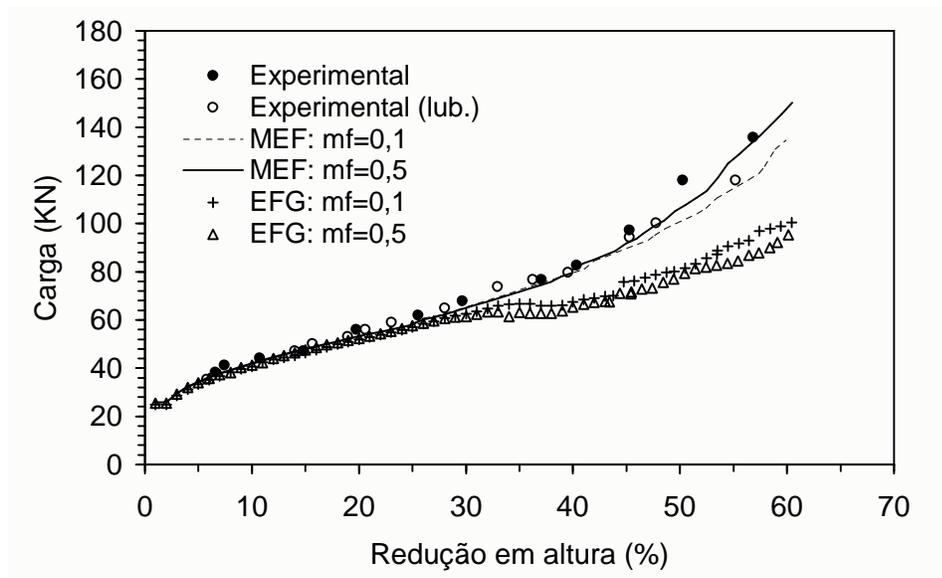


Figura 5.25: Evolução das carga de enformação em função da percentagem de redução em altura. Valores calculados e experimentais.

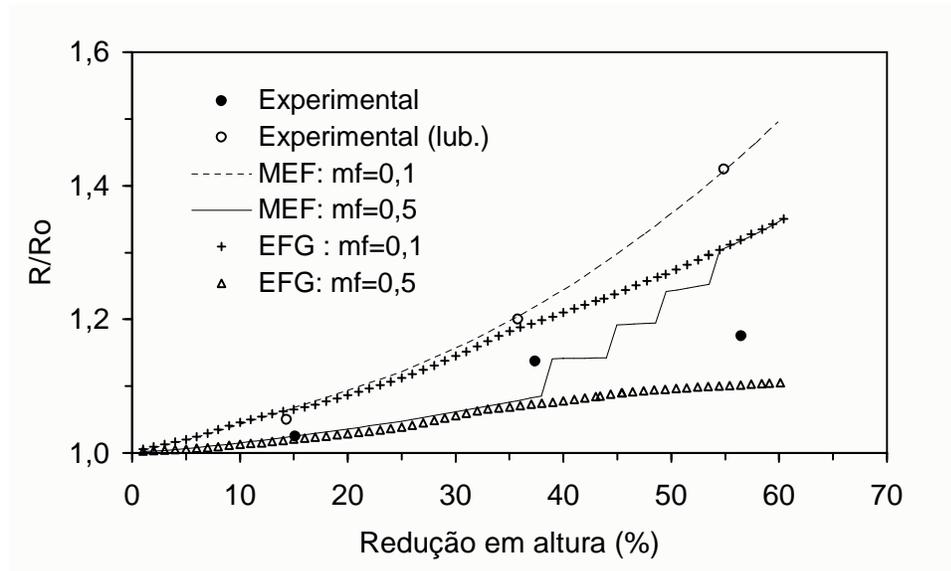


Figura 5.26: Evolução do perfil geométrico da superfície exterior da peça em contacto com a matriz superior quantificada pela variação do raio exterior. Valores calculados e experimentais.

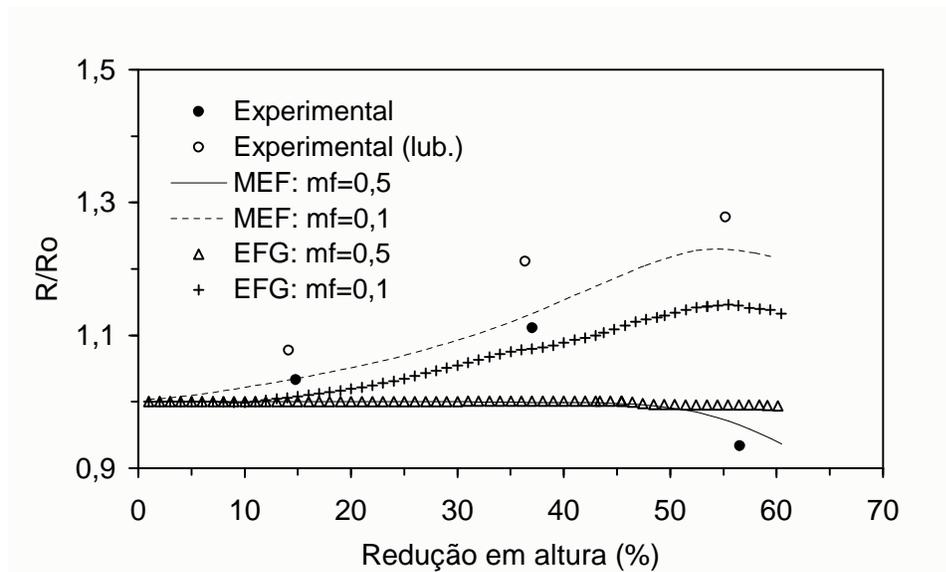


Figura 5.27: Evolução do perfil geométrico da superfície da peça em contacto com a matriz superior quantificada pela variação do raio interior. Valores calculados e experimentais.

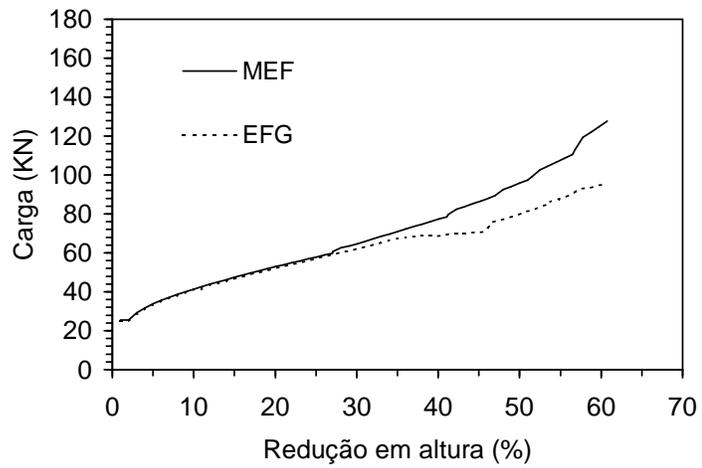


Figura 5.28: Evolução das cargas de enformação em função da percentagem de redução em altura, para uma situação em que os factores de atrito entre a peça e a ferramenta correspondem ao caso 3.

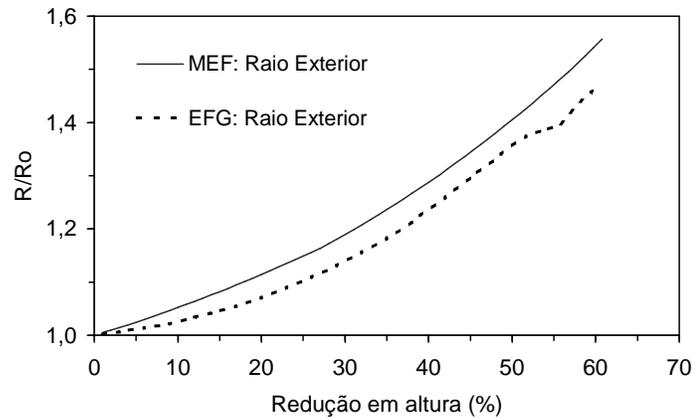


Figura 5.29: Evolução do raio exterior da peça na zona de contacto com a matriz superior. Valores obtidos pelo MEF e pelo EFG para o caso 3.

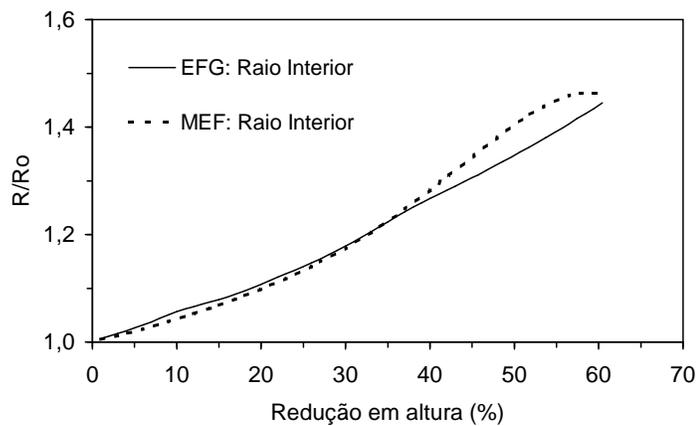


Figura 5.30: Evolução do raio interior da peça na zona de contacto com a matriz superior. Valores obtidos pelo MEF e pelo EFG para o caso 3.

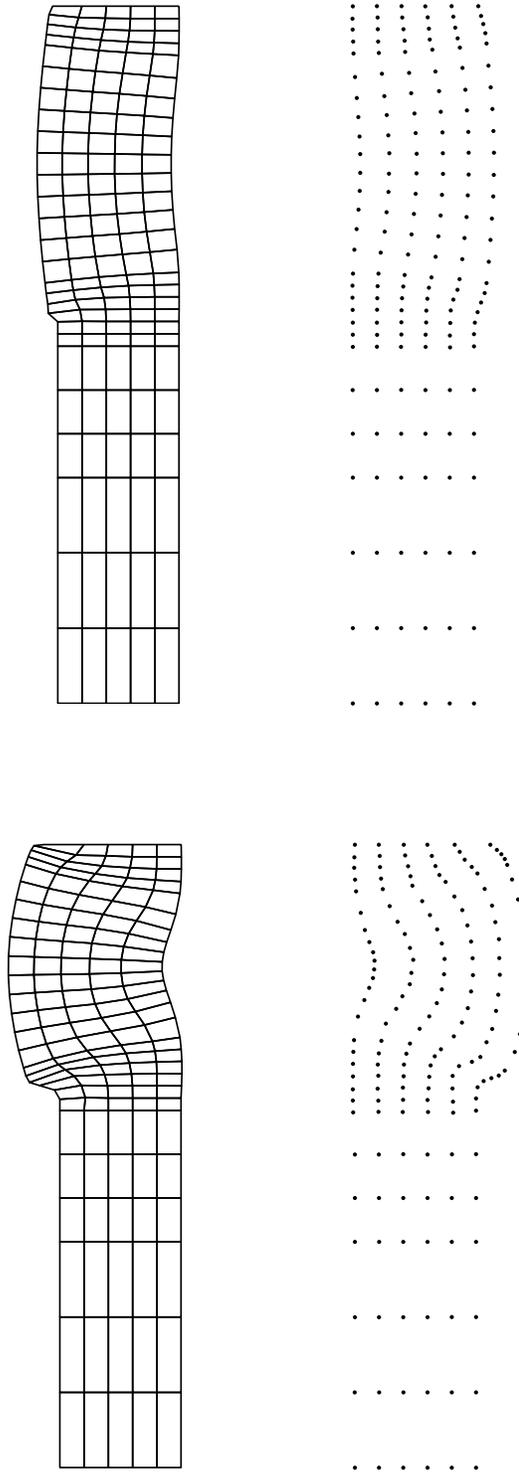


Figura 5.31: Geometria da peça no instante correspondente a uma percentagem de redução em altura igual a: a) 15%, b) 35%, relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,5$. Em cada geometria a parte esquerda representa a solução obtida pelo método MEF e parte direita pelo método EFG.

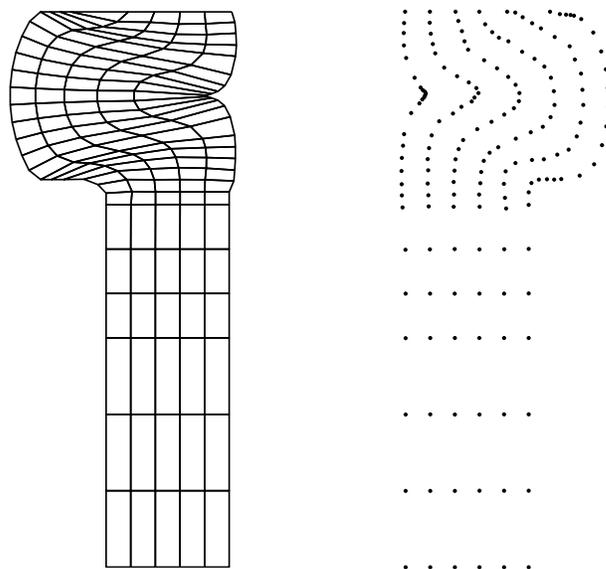


Figura 5.32: Geometria da peça, nas condições descritas na figura anterior (fig. 5.32), no instante correspondente a 55% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão.

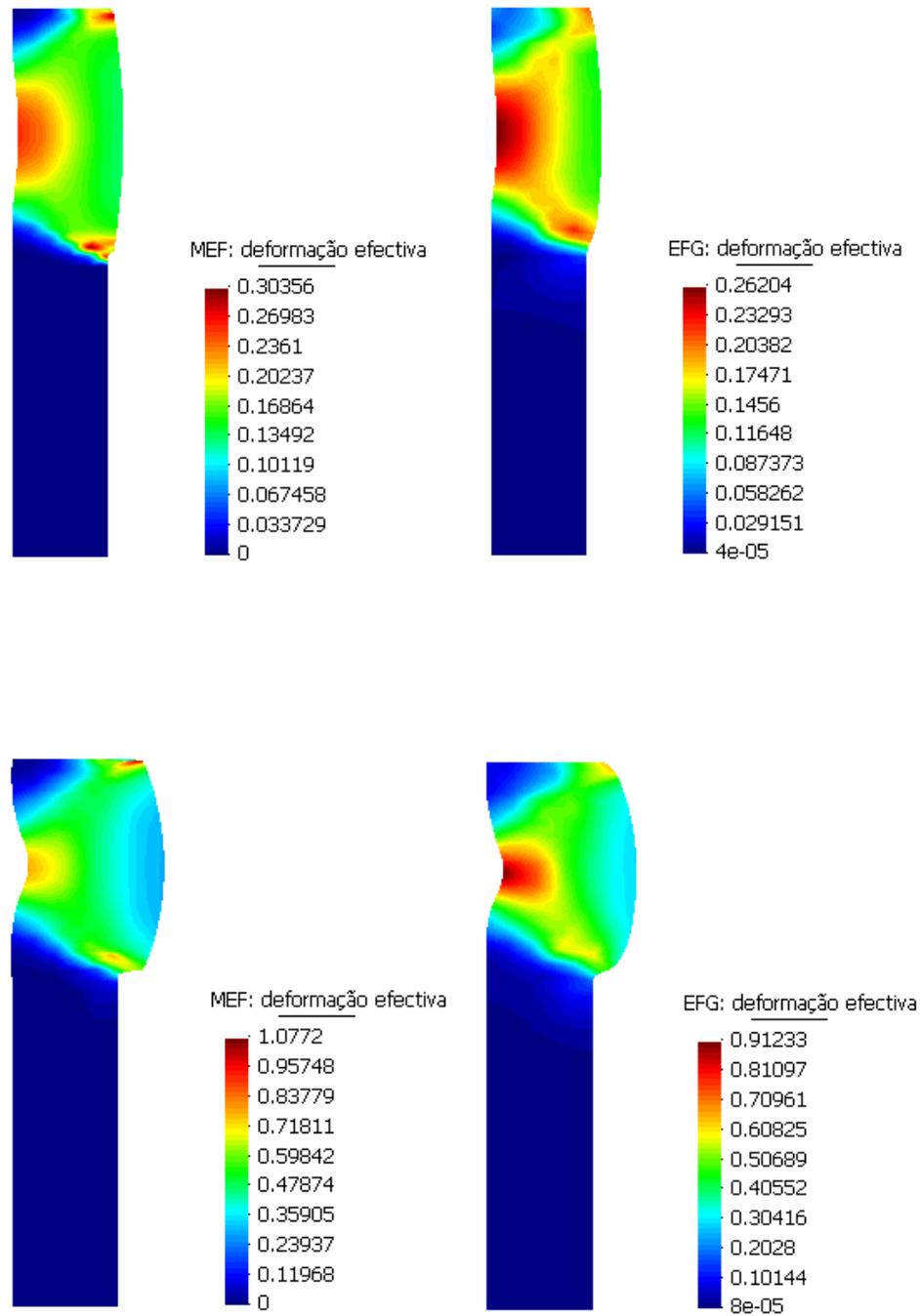


Figura 5.33: Campo de deformação efectiva, respectivamente para o MEF e EFG no instante correspondente a 15% e 35% de redução em altura relativamente à altura livre inicial do varão, em que se considerou $m_f = 0,5$.

Uma conclusão relevante a partir do estudo feito para os exemplos apresentados, relaciona-se com o facto de até uma percentagem de redução à volta dos 40%, garantidamente, ser eficiente utilizar como malha de integração a malha definida naturalmente pelos nós da discretização do domínio. Também não se justifica, neste caso até este nível de redução o recurso a uma malha auxiliar para efeitos de integração numérica. Da mesma forma que anteriormente, o empobrecimento da solução a partir deste valor de redução é devido à grande distorção de elementos da malha de integração.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimento

6.1 Síntese e Conclusões do Trabalho Desenvolvido

A presente dissertação teve como objectivo principal estudar a aplicabilidade do método sem malha de Galerkin, o método EFG, na simulação numérica de processos de enformação plástica. Como tal, foi desenvolvido um modelo computacional, baseado no EFG para simular estes processos, em que se considerou a formulação de escoamento plástico para materiais incompressíveis. Diversos aspectos foram abordados com a finalidade de ilustrar as diferenças com a habitual utilização do método dos elementos finitos. Na simulação de processos de enformação plástica, uma componente muito importante é a modelação computacional do contacto entre a peça e as ferramentas. Destaca-se neste trabalho, a apresentação de uma nova proposta para modelar os fenómenos do contacto e do atrito na zona de interacção entre a peça e as ferramentas, em que se fez um acoplamento do método dos elementos finitos com a formulação EFG para definir as funções de forma associadas aos nós dos elementos desta zona [51].

Conjuntamente com o modelo desenvolvido também foi feita a simulação

numérica dos exemplos de aplicações apresentados através do MEF. De facto, tornou-se necessário proceder a um estudo comparativo dos dois métodos, em várias aspectos, assim como a validação dos resultados com os obtidos por outros autores. A resolução através do MEF, permitiu abordar aspectos básicos, mas cruciais, característicos dos processos de enformação plástica. Constatou-se que simulação de processos de enformação plástica através do método EFG é de facto bastante mais laboriosa, em termos de implementação numérica. A solução dada pelo MEF é mais económica, do ponto de vista computacional. Para o elevado custo computacional do modelo desenvolvido, baseado na formulação EFG contribuem alguns aspectos inerentes à própria implementação do método EFG, tais como:

- Determinação do domínio de influência para cada nó sempre que a geometria é actualizada.
- Cálculo das velocidades nodais a partir da solução do sistema de equações (parâmetros nodais).
- Determinação para cada ponto de Gauss, dos nós da discretização cujos domínios de influência o incluem.
- Imposição das condições de fronteira do tipo essencial.

Foram propostas algumas soluções para questões cruciais dos processos de enformação plástica, num contexto de uma formulação sem malha de Galerkin, tais como:

- Estratégia adoptada para cálculo do domínio de influência de cada nó.
- Imposição das condições de fronteira do tipo essencial.
- Tratamento do contacto e do atrito na zona de interface entre as peças e as ferramentas.

6.2 Propostas de Trabalho Futuro:

O objectivo deste trabalho foi averiguar a aplicabilidade dos métodos sem malha de Galerkin, o método EFG, a processos de enformação plástica e a sua competitividade face ao MEF. De facto, este assunto é ainda uma área recente e com desenvolvimentos numa fase inicial. A simulação numérica de processos de enformação plástica, num contexto dos métodos sem malha originou novas questões. Algumas propostas foram apresentadas neste trabalho, no sentido de as solucionar, as quais foram referidas no ponto anterior. A partir dos resultados obtidos pelo modelo desenvolvido outras novas questões surgiram. Um aspecto importante é a questão da malha de integração numérica. Pelos resultados apresentados, é recomendável a utilização de uma malha auxiliar, para efeitos de integração numérica que seja independente da malha formada pela discretização nodal. Esta proposta, pode ser complementada com a seguinte: estabelecer critérios que permitam reajustar o domínio de influência para cada nó, à medida que a malha formada pela discretização nodal vai ficando muito distorcida.

Parece inevitável alargar o estudo da aplicabilidade do método EFG para:

- Avaliar a competitividade face ao MEF para simular processos que envolvem regeneração adaptativa da malha de elementos e efectuar enriquecimento nodal.
- Simular processos de enformação plástica em que se considera o comportamento (análise) térmica.

O custo computacional do método EFG é significativo, tornando-se mais crítico quando é aplicado na simulação de problemas não lineares e que envolvem a evolução da geometria com o tempo. Um aspecto que encarece do ponto de vista computacional a modelação de processos de enformação plástica através do método EFG é a pesquisa nodal. Para otimizar o modelo computacional implementado, tendo em vista reduzir o tempo de CPU, seria extremamente útil o desenvolvimento de novos algoritmos de pesquisa nodal. Outro factor importante na redução do custo computacional seria a resolução do sistema de equações

através de uma técnica baseada no método de Newton, em alternativa ao método iterativo simples, que é o usado neste trabalho.

A simulação de processos tecnológicos, em particular para problemas bidimensionais, através do método dos elementos finitos, está de facto muito bem consolidada. Além disso, existe uma grande diversidade de software disponível no mercado. Tudo parece indicar que uma alternativa no futuro será o desenvolvimento de modelos que conjugam as vantagens de ambos os métodos, destacando-se a grande flexibilidade que os métodos sem malha apresentam. Esta flexibilidade provém essencialmente da possibilidade de definir aproximações para variáveis de campo, sem recorrer a uma malha de elementos, no sentido usual. Consequentemente, os métodos sem malha são particularmente apropriados para problemas de adaptatividade e refinamento [38].

Capítulo 7

Nomenclatura

a_i	Incógnitas nos seguintes métodos: EFG, FPM
a_{Ij}	Incógnitas no método das nuvens HP
\mathcal{A}	Operador linear
\mathbf{A}_Θ	Matriz de transformação de coordenadas
\mathbf{B}	Matriz das velocidades de deformação
\mathbf{b}	Vector das forças externas que actua no corpo
\mathbf{C}	Tensor que representa a lei constitutiva do material elástico
\mathbf{C}	Tensor de quarta ordem das constantes elásticas
\mathbf{C}^r	Espaço das funções com derivadas contínuas até à ordem r
d_{max}	Factor de escala nos domínios de influência
$\overset{\circ}{\mathbf{D}}$	Matriz que relaciona a tensão desviadora com a velocidade de deformação
e	Elemento de contacto ; Elemento isoparamétrico
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
\mathbf{f}	Vector das cargas nodais
h	Dimensão do domínio de influência
h_I	Raio de um domínio de influência (circular)
I	Momento de inércia
\mathbf{J}	Matriz jacobiana
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathcal{L}	Operador diferencial linear
m_f	Factor de atrito associado à lei de Tresca

\mathbf{n}	Vector normal à superfície do domínio
N_i	Função de forma do MEF associada ao i -ésimo nó.
N_I	interpolador de Lagrange
\mathbf{N}	Matriz das funções interpoladoras
N	Número de nós da discretização do domínio de interesse
N_n^e	Número de nós do elemento e
n_f	Número de nós da discretização da ferramenta
n_p	Número de nós da discretização da peça
n_I	Número de nós incluídos no domínio de influência tipo B
n_I	Número de polinómios de grau maior a k no contexto do método das nuvens HP
p	Pressão hidrostática
\mathbf{p}	Base de funções
P	Função de penalidade
p_j	Função da base
\mathbf{r}	Velocidade relativa num ponto do elemento de contacto
\mathbf{s}	Tensor das tensões desviadoras
t	Instante de tempo genérico
\mathbf{t}	Vector das forças de superfície
u	Função incógnita
u^h	Função aproximada
\hat{u}_I	Parâmetro nodal associado ao I -ésimo nó
\mathbf{u}	Vector dos deslocamentos
$\hat{\mathbf{u}}$	Vector dos parâmetros nodais associados aos deslocamentos
\mathbf{v}	Vector velocidade
\mathbf{v}_I	Vector dos parâmetros associados à velocidade no I -ésimo nó
$\hat{\mathbf{v}}$	Vector dos parâmetros nodais associados à velocidade
V_J	Volume associado à J -ésima partícula
ΔV_I	Peso de integração associado ao I -ésimo nó (integração nodal directa)
Δt	Incremento de tempo
$\Delta \mathbf{v}$	Velocidade vectorial relativa entre a peça e a ferramenta
Δv_n	Velocidade relativa normal à superfície de contacto entre a peça e a ferramenta
Δv_t	Velocidade relativa tangencial à superfície de contacto entre a peça e a ferramenta
\mathbf{x}_g	Vector posição do ponto de Gauss g

\mathbf{x}_I	Vector posição do <i>I-ésimo nó</i>
w	Função de peso no contexto dos métodos sem malha; Também aparece como w_a e w_I
\hat{w}_I	Peso de integração associado ao <i>I-ésimo</i> ponto de quadratura
Y	Tensão limite de elasticidade no ensaio de tracção uniaxial
Y_0	Tensão limite de elasticidade inicial em tracção uniaxial

Simbologia grega

ϕ_I	Função de forma, no contexto métodos sem malha associada ao nó I
ψ	Função tentativa
Φ_i	Função de peso ou teste
Υ	Função de base radial
ϑ_I	Célula de Voronoi associada ao nó I
α	Parâmetro de penalidade (condição de incompressibilidade)
α_f	Factor de penalidade (contacto e atrito)
α_u	Factor de penalidade (condições de fronteira do tipo essencial)
δ	Função delta de Dirac
δ_{ij}	Símbolo de Kronecker
$\bar{\epsilon}$	Deformação efectiva
$\dot{\bar{\epsilon}}$	Taxa de deformação efectiva
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação
Γ	Fronteira do domínio em estudo
Γ_f	Superfície da interface de contacto entre a peça e a ferramenta
λ	Multiplicador de Lagrange
$\hat{\lambda}$	Vector dos parâmetros nodais associados aos multiplicadores de Lagrange
λ_α	Factor de penalidade (método da função de penalidade ponderada)
ν	coeficiente de Poisson

μ	Viscosidade
μ_f	Coefficiente de atrito associado à lei de Coulomb
Ω	Subconjunto de \mathbb{R}^n que ocupa o domínio de interesse
Ω_e	Elemento da malha de integração
Ω_I	Subdomínio que corresponde ao suporte da função de forma do <i>I-ésimo nó</i>
σ_n	Tensão de contacto normal
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_f$	Vector das tensões para pontos da zona de contacto
$\bar{\sigma}$	Tensão efectiva
τ_f	Tensão tangencial de atrito
ξ	Coordenadas do ponto de integração
ξ, η, ζ	Coordenadas isoparamétricas
ξ_i, η_i, ζ_i	Coordenadas isoparamétricas nodais
ρ	função de densidade

Bibliografia

- [1] H. Askes. Everything you always wanted to know about the element-free galerkin method, and more. Technical report, 1997.
- [2] S. N. Atluri and S. Shen. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Tech Science Press, 2002.
- [3] S. N. Atluri and T. Zhu. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127, 1998.
- [4] I. Babuška. The finite element method with lagrange multipliers. *Numerical Mathematical*, pages 179–192, 1973.
- [5] I. Babuška, U. Banerjee, and J. E. Osborn. Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach. *Acta Numérica*, 12:1–125, 2003.
- [6] I. Babuška, U. Banerjee, and J. E. Osborn. Generalized finite element methods: Main ideas, results and perspective. Technical report, TICAM, 2004.
- [7] I. Babuška, G. Caloz, and J. E. Osborn. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 31:945–981, 1994.
- [8] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314, 1996.

- [9] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:727–758, 1997.
- [10] K. J. Bathe and A. Chaudary. A solution method for plane and axisymmetric contact problems. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 21:65–88, 1985.
- [11] L.-J. Bathe. The key challenges in computational mechanics. *Iacm Expressions*, 14, 2003.
- [12] T. Belytschko, Y. Krongauz, M. Fleming, D. Organ, and W. K. Liu. Smoothing and accelerated computations in the element free galerkin method. *Journal Computer Applied Mathematical*, 74(1-2):111–126, May 1996.
- [13] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–48, May 1996.
- [14] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256, 1994.
- [15] T. Belytschko, D. Organ, and Y. Krongauz. A coupled finite element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17(3):186–195, 1995.
- [16] T. Belytschko and M. Tabbara. Dynamic fracture using element-free galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 39:923–938, 1996.
- [17] W. Benz and E. Asphaug. Simulation of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 87:253–265, 1995.
- [18] C. Bohatier and J. L. Chenot. Finite element formulation for non-steady-state large deformations with sliding or evolving contact boundary conditions. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 28:735–768, 1989.

- [19] J. Braun and M. Sambridge. A numerical method for solving equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 376:655–660, 1995.
- [20] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationnelle Ser. Rouge*, 8:129–151, 1974.
- [21] J. M. A. César de Sá. *Numerical modelling of incompressible problems in glass forming and rubber technology*. PhD thesis, Swansea, 1986.
- [22] J. M. A. César de Sá and F. D. Almeida. Métodos de solução por elementos finitos de problemas estruturais incompressíveis e análise de espaços de solução. In *Proc. MECOM 89 X Congr. Ibero Latino Americano Mét. Comp. Eng.*, pages 921–936, Porto, 1989.
- [23] J. M. A. César de Sá and D. R. J. Owen. A study of grain boundary sliding mechanism by the finite element method. Technical Report C/R/448/83, Swansea, UK, December 1983.
- [24] J.-S. Chen, W. Han, Y. You, and X. Meng. A reproducing kernel method with nodal interpolation property. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 56:935–960, 2003.
- [25] J.-S. Chen, C. Pan, C. M. O. L. Roque, and H.-P. Wang. A lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. *Computational Mechanics*, 22:289–307, 1998.
- [26] J.-S. Chen, C. Pan, C.-T. Wu, and W. K. Liu. Reproducing kernel particle method for large deformation analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:195–228, 1996.
- [27] J.-S. Chen, C. Roque, C. Pan, and S. T. Button. Analysis of metal forming process based on meshless method. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81:642–646, 1998.
- [28] J.-S. Chen and H.-P. Wang. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:441–468, 2000.

- [29] J.-S. Chen, H.-P. Wang, and W. L. Liu. Meshfree method with enhanced boundary condition treatments for metal forming simulation. Queen Mary, Long Beach, California, 5-8 January 1999. The 1999 NFS Design & Manufacturing Grantees Conference.
- [30] J. S. Chen, H.-P. Wang, S. Yoon, and Y. You. Some recent improvements in meshfree methods for incompressible finite elasticity boundary value problems with contact. *Computational Mechanics*, 25:137–156, 2000.
- [31] J. S. Chen, C. T. Wu, S. Yoon, and Y. You. A stabilized conforming nodal integration for galerkin meshfree methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:435–466, 2001.
- [32] J.-S. Chen, S. Yoon, and C.-T. Wu. Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for galerkin meshfree-methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2587–2615, 2002.
- [33] J. L. Chenot. Finite element calculation of unilateral contact with friction in non steady processes. In *Proc. NUMETA 87*, pages 1–10, 1987.
- [34] E. Cueto. *El método de los elementos naturales basado en formas alpha: Aplicación a la simulación de la remodelación interna de fracturas de cadera con sistema Éxeter*. PhD thesis, Centro Politécnico Superior de la Universidad de Zaragoza, 2001.
- [35] S. De and K. J. Bathe. The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25(4):329–345, 2000.
- [36] J. Dolbow and T. Belytschko. An introduction to programming the meshless element free galerkin method. *Archives in Computational Mechanics*, 5:207–241, 1998.
- [37] J. Dolbow and T. Belytschko. Volumetric locking in the element free galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:925–942, 1999.

- [38] C. A. Duarte, D.-J. Kim, and D. M. Quaresma. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Article in Press by Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006.
- [39] C. A. M. Duarte and J. T. Oden. hp clouds-a meshless method to solve boundary-value problems. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin, 1995.
- [40] C. A. M. Duarte and J. T. Oden. An h-p adaptative method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262, 1996.
- [41] C. A. M. Duarte and J. T. Oden. Hp clouds -an hp meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12:673–705, 1996.
- [42] S. Fernández-Méndez. *Mesh-free methods and finite elements: Friends or foe?* PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Setember 2001.
- [43] S. Fernández-Méndez and A. Huerta. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1257–1275, 2004.
- [44] M. Fleming, Y. A. Chu, B. Moran, and T. Belytschko. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:1483–1504, 1997.
- [45] T.-P. Fries and H. G. Matthies. Classification and overview of meshfree methods. Technical report, Institute of Scientific Computing Thecnical University Braunschweig, March 2003.
- [46] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977.
- [47] G. Y. Goon, P. I. Poluchin, W. P. Poluchin, and B. A. Prudcowsky. The plastic deformation of metals. *Metallurgica Moscow*, 1968.

- [48] J. Gosz and W. K. Liu. Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, 19(2):120–135, 1996.
- [49] M. Griebel and M. A. Schweitzer. Meshfree methods for partial differential equations. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 26, 2002.
- [50] C. F. Guedes and J. M. A. César de Sá. Aplicação do método EFG (“element free galerkin”) em processos de conformação plástica. In M. Pastor JM Goicolea, C. Mota Soares and G Bugeda, editors, *V Congresso de Métodos Numéricos En Ingenieria*, Madrid, Espana, Junho 2002.
- [51] C. F. Guedes and J. M. A. César de Sá. A new proposal to deal with contact and friction by blending meshfree anf finite element methods in forming processes. *Submitted to International Journal of Forming Processes*, 2006.
- [52] S. Hao, H. S Park, and W. K. Liu. Moving particle finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:1937–1958, 2002.
- [53] L. Hernquist and N. Katz. TREESPH: A unification of SPH with the hierarchical tree method. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 70:419–446, 1989.
- [54] A. Huerta, T. Belytschko, S. Fernández-Méndez, and T. Rabczuk. Meshfree methods. *Encyclopedya of Computational Mechanics*, 1, 2004.
- [55] A. Huerta and S. Fernández-Méndez. Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1615–1636, 2000.
- [56] A. Huerta, S. Fernández-Méndez, and W. K. Liu. A comparison of two formulations to blend finite elements and mesh-free methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1105–1117, 2004.

- [57] S. R. Idelsohn, E. Onate, N. Calvo, and F. Del Pin. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:893–912, 2003.
- [58] E. Kansa. A scattered data approximation scheme with application to computational fluid-dynamics-i and II. *Computers and Mathematics with applications*, 19:127–161, 1990.
- [59] Y. Krongauz and T. Belytschko. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131:133–145, February 1996.
- [60] S. Kulasegaram. *Development of particle based meshless method with applications in metal forming simulations*. PhD thesis, University of Wales Swansea, Department of Civil Engineering, March 1999.
- [61] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematic Computational*, 37:141–158, 1981.
- [62] C. H. Lee and S. Kobayashi. New solutions to rigid-plastic deformation problems using a matrix methods. *Journal of the Engineering for Industry*, 95:865, 1973.
- [63] V. M. A. Leitão. Métodos sem malha. In Joaquim Infante Barbosa, editor, *Mecânica Dos Sólidos e Estrutural*, pages 33–46, Universidade de Évora, 14 a 16 de Abril 2003. CGE e APMTAC.
- [64] S. Li and W. K. Liu. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Review*, 55:1–34, 2002.
- [65] S. Li and W. K. Liu. *Meshfree particle methods*. Springer, 2004.
- [66] L. D. Libersky and A. G. Petscheck. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. *Advanced in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics*, 395, 1990.

- [67] L. D. Libersky, A. G. Petscheck, T. C. Carney, J. R. Hipp, and F. A. Allahdadi. High strain lagrangian hydrodynamics: A three dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109, 1993.
- [68] T. J. Liszka, C. A. M. Duarte, and W. W. Tworzydło. Hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:263–288, 1996.
- [69] G. R. Liu. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2002.
- [70] W. K. Liu, W. Han, H. Lu, S. Li, and J. Cao. Reproducing kernel element method. part I: Theoretical formulation. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 193:933–951, 2004.
- [71] W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee, and T. Belytschko. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 38:1655–1679, 1995.
- [72] W. K. Liu, S. Jun, and Y. F. Zhang. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 120:1081–1106, 1995.
- [73] W. K. Liu, Li Shaofan, and T. Belytschko. Moving least-square reproducing kernel methods. part I: Methodology and convergence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143:113–154, 1997.
- [74] H. Lu, S. Li, D. C. Simkins Jr., W. K. Liu, and J. Cao. Reproducing kernel element method. part III: Generalized enrichment and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:989–1011, 2004.
- [75] Y. Y. Lu, T. Belytschko, and L. Gu. A new implementation of the element free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:397–414, 1994.

- [76] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82(12), 1977.
- [77] T. J. Martin, F. R. Pearce, and P. A. Thomas. An owner's guide to smoothed particle hydrodynamics. 1993.
- [78] P. A. F. Martins. *Modelação numérica de processos de enformação plástica*. PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, IST, 1991.
- [79] J. M. Melenk. Finite element methods with harmonic shape functions for solving laplace's equation. Master's thesis, University of Mariland, College Park, 1992.
- [80] J. M. Melenk. *On generalized finite element methods*. PhD thesis, University of Mariland, College Park, MD, 1995. Advisor: I. Babuška.
- [81] J. M. Melenk and I. Babuška. Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partion of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4:607–632, 1997.
- [82] J. J. Monaghan. Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(4):422–438, 1982.
- [83] J. J. Monaghan. Sph. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30:543–574, 1992.
- [84] K. Mori, S. Shima, and K. Osakada. Analisis of free forging by rigid-plastic for porous metals. *ASME*, 23(178):523–529, 1980.
- [85] S. Nakasawa and O. C. Zienkiewicz. Finite element analysis of flow and coupled heat transfer in polimeric fluids. Swansea, UK, 1981. Press Pineridge.
- [86] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318, 1992.

- [87] J. T. Oden, C. A. M. Duarte, and O. C. Zienkiewicz. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:117–126, 1998.
- [88] E. Oñate and S. Idelsohn. A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanical*, 21(4-5):283–292, 1998.
- [89] E. Onãte, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, and R. L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3839–3866, 1996.
- [90] E. Onãte, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, and R. L. Taylor. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):315–347, 1996.
- [91] E. Onãte, C. Sacco, and S. Idelsohn. A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75, 2000.
- [92] P. Randles and L. D. Libersky. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:375–408, 1996.
- [93] N. Rebelo and S. Kobayashi. A coupled analysis of viscoplastic deformation and heat transfer-i:applications. *International Journal Mechanical Science*, 22:702–718, 1980.
- [94] N. Rebelo and S. Kobayashi. A coupled analysis of viscoplastic deformation and heat transfer-i:theoretical considerations. *International Journal Mechanical Science*, 22:699–705, 1980.
- [95] N. Rebelo, J. C. Nagtegaal, and L. M. Taylor. Comparison of implicit and explicit finite element methods in the simulation of metal forming processes. In *Proc. NUMIFORM'92*, pages 31–43, Sophia Antipolis, França, 1992.

- [96] B. D. Reddy. *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [97] E. Schnetter, S. Kunze, and Roland Speith. Fluid jet simulations using smoothed particle hydrodynamics. *High Performance Computing in Science and Engineering*, pages 99–113, 2000.
- [98] X. Shangwu, W. K. Liu, C. S. Cao, Li, J. M. C. Rodrigues, and P. A. F. Martins. Simulation of bulk metal forming processes using the reproducing kernel particle method. *Computers and Structures*, 83:574–587, 2005.
- [99] X. Shangwu, W. K. Liu, J. Cao, J. M. C. Rodrigues, and P. A. F. Martins. On the utilization of the reproducing kernel particle for the numerical simulation of plane strain rolling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43:89–102, 2003.
- [100] M. Sharan, E. Kansa, and S. Gupta. Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computations*, 84:275–302, 1997.
- [101] D. Shepard. A two-dimensional function for irregularly spaced data. In *AMC National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [102] R. Sibson. A vector identity for the dirichlet tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 87:151–155, 1980.
- [103] L. C. Sousa. *Modelação termodinâmica de processos de enformação plástica por formulações mistas*. PhD thesis, Universidade do Porto, 1993.
- [104] R. F. Stellingwerf and C. A. Wingate. Impact modelling with smoothed particle hydrodynamics. *International Journal Impact Engineering*, 14, 1993.
- [105] T. Strouboulis, I. Babuška, and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181:43–69, 2001.

- [106] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuška. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1401–1417, 2000.
- [107] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuška. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4081–4193, 2001.
- [108] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11):1549–1570, 2000.
- [109] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, and T. Belytschko. An extended finite element with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 31:38–48, 2003.
- [110] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(5):839–887, 1998.
- [111] N. Sukumar, B. Moran, A. Yu. Semenov, and B. B. Belikov. Natural neighbour galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1–27, 2001.
- [112] R. L. Taylor, O.C. Zienkiewicz, E. Onãte, and S. Idelsohn. Moving least square approximations for solution of differential equations. Technical Report 74, International Center for Numerical Methods in Engineering, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain, December 1995.
- [113] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw Hill, 3th edition, 1970.
- [114] H. Wendland. Meshless galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation*, 68(228):1521–1531, 1999.

- [115] P. Wriggers, J. C. Simo, and R. L. Taylor. Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems. In *Proc. Numeta'86*, Swansea, 1985.
- [116] J. R. Xiao. Local heaviside weighted MLPG meshless method for two-dimensional solids using compactly supported radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:117–138, 2004.
- [117] T. Zhu and S. N. Atluri. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free galerkin method. *Computational Mechanics*, 21:211–222, 1998.
- [118] O. C. Zienkiewicz. Flow formulation for numerical solution of forming processes. *Numerical Analysis of Forming Processes*, 1984.
- [119] O. C. Zienkiewicz and P. N. Godbole. Flow of plastic and viscoplastic solids with special reference to extrusion and forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8:3–16, 1974.
- [120] O. C. Zienkiewicz and P.N. Godbole. Viscous, incompressible flow with special reference to non- newtonian (plastic) fluids. *Finite Elements in Fluids*, 1:25–55, 1975.
- [121] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. M. Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290, 1971.