

“Sistemas de Controle Automático”

J. L. Martins de Carvalho,
LTC Editora, Rio de Janeiro, ISBN 85-216-1210-9

Errata

Capítulo 2

Local	Onde está	Deve ler-se
Pag. 12, segunda linha antes do exercício 2.1	V/R _c	V/RC
Pag. 25, terceira e quarta linhas	estator	rotor
Pag.28, expressão (2.27)	F _r	Fr
Pag. 28, quarta e sexta linhas depois do exercício 2.14	estator	rotor
Pag. 29, expressão (2.28)		$\begin{cases} J_m \ddot{\theta}_m + d_m \dot{\theta}_m + d(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + k(\theta_m - \theta_l) = \Gamma = k_m u \\ J_l \ddot{\theta}_l + d_l \dot{\theta}_l + d(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) + k(\theta_l - \theta_m) = 0 \end{cases}$
Pag. 29, expressão seguinte a (2.28)		$\begin{cases} \theta_m = \theta_l \\ (J_l + J_m) \ddot{\theta}_m + (d_l + d_m) \dot{\theta}_m = \Gamma \end{cases}$
Pag. 30, expressão (2.30)	$n(k+1)=An(k)$	$n(k+1)=An(k)$

Capítulo 3

Local	Onde está	Deve ler-se
Pag. 34, quinta linha do fim	(2.29)	(2.28)
Pag. 35, expressão (3.7)		$\Theta_l(s) = \frac{(ds + k)}{J_l s^2 + (d_l + d)s + k} \Theta_m(s)$
Pag. 35, expressão (3.11)		$\frac{d^3 \theta_l}{dt^3} = \frac{d}{J_l J_m} e \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} = \frac{1}{J_m}$
Pag. 35, primeira e segunda	ϑ_m e ϑ_l	θ_m e θ_l

linhas depois de (3.11)		
Pag. 35, primeira e segunda linhas depois de (3.12)	$\vartheta_m e \vartheta_l$	$\theta_m e \theta_l$
Pag 36, expressão (3.13)		$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b_0 u \end{cases}$
Pag 38, expressão (3.16)		$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$
Pag.48, 2ª e 3ª linha		<p>Define-se ultrapassagem percentual, para entradas em degrau, como</p> $M_p = \frac{\text{valor máximo da resposta} - \text{valor final da resposta}}{\text{valor final da resposta}} \times 100\%$

Capítulo 4

Local	Onde está	Deve ler-se
Pag.69, Fig.4.6 (a)	$\frac{K}{1+K}$	$20 \frac{K}{1+K}$
Pag.70, primeira linha, secção 4.2.1	, porque	. Uma vez que
Pag.71, Título da tabela 4.1		Erros, em estado estacionário, para um sistema realimentado estável
Pag.71, tabela 4.1, última linha	Parábola	Parábola unitária
Pag.73, Exemplo 4.1, terceira linha do exemplo	$-1 \pm \sqrt{(1-4K)}$	$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$
Pag.75, sexta linha	reais o polinômio	reais, o polinômio

Capítulo 5

Local	Onde está	Deve ler-se
Pag. 114, quinta linha	0,99	1,01
Pag. 115, segunda linha	$\dots + \frac{4\omega^2 p^2}{4(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{4}$	$\dots + \frac{4\omega^2 p^2}{4(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{4}$
Pag. 115, expressão (5.14)	KB	K_B
Pag. 118, quinta linha depois de 5. $e^{-j\omega t}$		tante K_g apenas provoca uma translação da curva do módulo, segundo o eixo vertical, de valor $20 \log_{10} K_B dB$.

Actualizações e Aditamentos

Capítulo 2

Actualização da secção 2.1.7

2.1.7 Amplificador Operacional

O amplificador operacional (amp op) é um dispositivo electrónico de uso geral, consistindo essencialmente num gerador de tensão controlado por tensão, conforme ilustrado na Fig. 2.13(a).

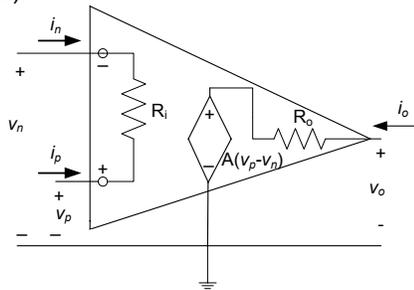


Fig. 2.13(a)
Circuito equivalente para o amp op.

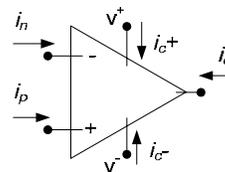


Fig. 2.13(b)
Correntes nos terminais do amp op.
 v^+ e v^- designam as tensões de alimentação.

A resistência de entrada, R_i , é muito elevada e a resistência de saída, R_o , é muito baixa, com valores típicos

$$R_i > 10^6 \Omega \text{ e } R_o < 100 \Omega$$

Uma vez que na Fig.2.13(a) não está representada a alimentação do amp op, a lei de Kirchhoff dos nós não se verifica, pois a soma das correntes i_p , i_n e i_o não será nula em todos os instantes. Contudo essa lei já é válida se representarmos o amp op, embora de forma simplificada, tal como na Fig. 2.13(b).

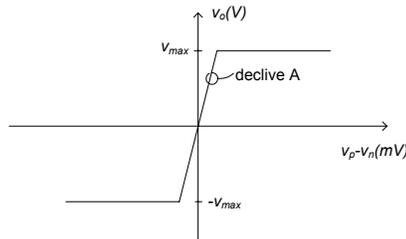


Fig. 2.13(c)
Relação de transferência para o amp op em malha aberta.

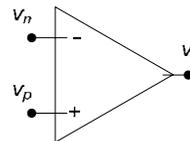


Fig. 2.13(d)
Diagrama simplificado do amp op.

Neste caso teremos

$$i_n + i_p + i_o + i_c^+ + i_c^- = 0$$

O ganho de tensão A é uma função não-linear com uma característica do tipo saturação, conforme indicado na Fig. 2.13(c).

Na zona linear o ganho é função da frequência embora, na prática, se possa considerar constante, com valores superiores a 10^4 , até frequências do ordem de 10^3 rad/s . De

realçar que a gama de funcionamento linear é muito estreita. Por exemplo se $|v_o| < 10V$ e $A > 10^4$ então a zona de funcionamento linear fica reduzida a $|v_p - v_n| < 10^{-3}V = 1mV$. Se na Fig.2.13(c) tivessemos adoptado a mesma escala em ambos os eixos, a zona de funcionamento linear não seria perceptível e o gráfico seria constituído apenas por duas semi-rectas paralelas ao eixo das abcissas, com uma descontinuidade na origem. Dado que a zona de funcionamento linear é muito estreita, e da mesma ordem de grandeza do ruído presente na entrada do amp op, a sua utilização em malha aberta (open-loop) é inútil pois, na prática, o amp op entraria imediatamente em saturação, comportando-se como dispositivo com dois estados de saída i.e. $v_o = \pm v_{max}$.

A utilidade do amp op reside na sua utilização na zona de funcionamento linear, o que só é possível recorrendo à realimentação (feedback) negativa, como adiante se verá. Daí resultarão circuitos lineares, cujas características serão determinadas pelos elementos que realizam a realimentação (resistências, condensadores e bobines) desde que o amp op se mantenha na zona linear, e com ganho A muito elevado.

Na prática é usual utilizar-se uma representação simplificada do amp op conforme indicado na Fig.2.13(d).

No que se segue iremos usar um modelo de amp op ideal a fim de nos facilitar os cálculos. O amp op ideal corresponde à Fig 2.13(a) com as seguintes características:

i) $R_i = \infty, R_o = 0$. A primeira condição implica uma impedância de entrada infinita e portanto $i_p = i_n = 0$; a segunda implica uma impedância de saída nula o que permite ao dispositivo fornecer a corrente i_o que for necessária no terminal de saída, sem alterar v_o , corrente essa que será determinada pelos elementos exteriores ao amp op.

ii) $A \approx \infty$. O amp op ideal tem um ganho tão elevado quanto o necessário, e responderá instantaneamente, pois A é independente da frequência.

iii) $v_o = 0$ quando $v_p - v_n = 0$. Daqui resulta que o amp op ideal não apresenta “off-set”.

Os amplificadores operacionais têm um papel muito importante no desenvolvimento de circuitos para aplicações em controlo, alguns dos quais serão analisados de seguida, com base no modelo ideal.

A Fig.2.14 representa uma das montagens mais simples: o amplificador inversor.

Como o amplificador é ideal, temos a mesma corrente através de R_1 e de R_2 uma vez que a corrente de entrada no terminal (-) do amplificador operacional é nula. Por outro lado $v_p = v_n = 0$. Consequentemente

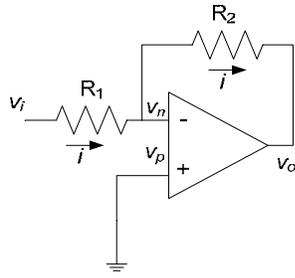


Fig. 2.14 Amplificador inversor ideal

A impedância de entrada do circuito é R_1 e a impedância de saída é zero.

Como vimos no Cap. 1, um sinal importante em qualquer sistema de controle com realimentação (feedback) é o *erro* que consiste na diferença entre o sinal de saída pretendido e o sinal de saída presente. O circuito representado na Fig. 2.15 produz um sinal que é proporcional à diferença das entradas como mostra a análise seguinte:

Como

$$v_o = (i_2 - i_1)R_2$$

e

$$v_2 - v_1 = (i_2 - i_1)R_1$$

então

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

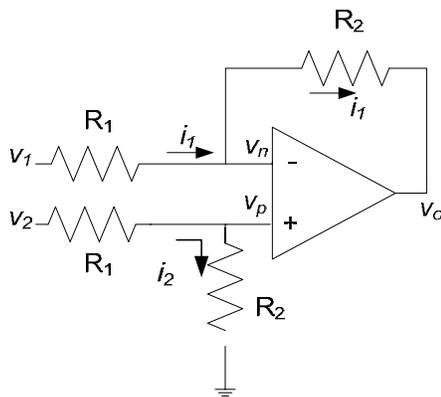


Fig. 2.15 Amplificador diferencial

Já tivemos oportunidade de nos apercebermos da importância do integrador nos sistemas dinâmicos. Um integrador pode ser facilmente implementado com um amplificador operacional como mostra a Fig. 2.16.

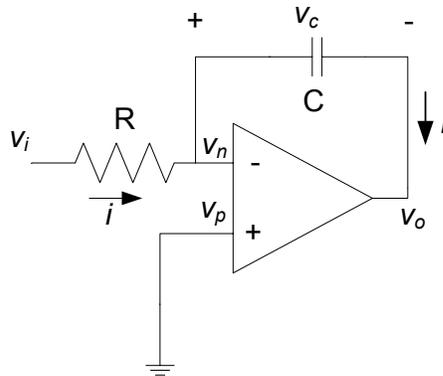


Fig. 2.16 Integrador

Uma vez que a corrente de entrada do amplificador é nula, podemos escrever

$$\frac{v_i}{R} = -C \frac{dv_o}{dt}$$

ou de forma equivalente

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t') dt' + v_o(0) \quad (2.15)$$

É óbvio que v_o não aumentará indefinidamente pois está limitado superiormente pela tensão de alimentação do amplificador.

O leitor já deverá ter notado que o componente de realimentação (feedback) está sempre ligado à entrada negativa (-) do amp op. Como o ganho do amp op é muito elevado, a realimentação a partir do terminal de entrada (+) leva-lo-á imediatamente para a saturação, ou seja, para a zona de funcionamento não linear. Algumas vezes este efeito é deliberadamente usado para implementar circuitos especiais, como por exemplo comparadores com histerese (consultar: Manuel Medeiros da Silva, “Introdução aos Circuitos Eléctricos e Electrónicos”, Fundação Calouste Gulbenkian, 2001) .

Exercício 2.9 Determine a relação entre v_o e v_i e a impedância de entrada do circuito da Fig.2.17.

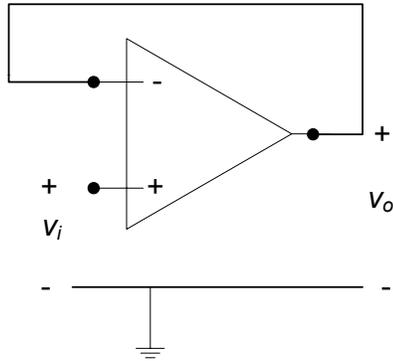


Fig. 2.17 Seguidor de tensão

Exercício 2.10 Em motores de corrente contínua, de ímã permanente, o torque é proporcional à corrente do motor i_m . Consequentemente se pretendermos controlar o torque torna-se necessário saber como controlar a corrente no motor, de forma a assegurar o torque desejado. Mostre que uma possível montagem para atingir esse objetivo é o circuito ilustrado na Fig.2.18, onde $R_1 \gg R$, $v_i = -i_d R$ e i_d designa o valor pretendido para i_m .

Resposta: $i_m = i_d \left(1 + \frac{R}{R_1}\right) \approx i_d$.

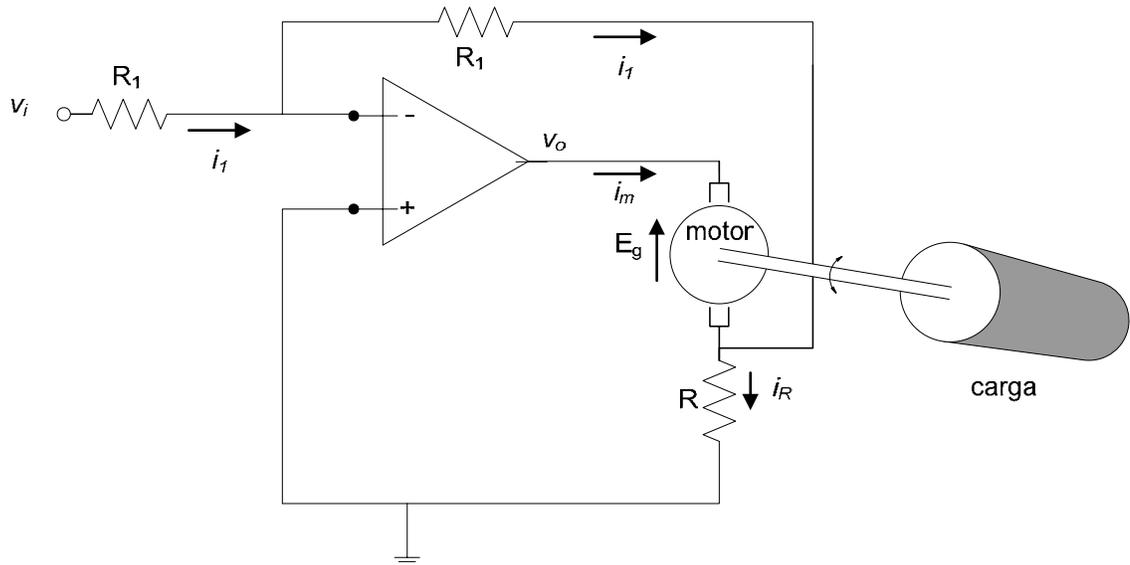


Fig. 2.18 Sistema de controle de torque

Aditamento p26 após exercício 2.12

As constantes K_g e K_T , utilizadas neste exemplo para relacionar grandezas elétricas com grandezas mecânicas, são de facto iguais, como a seguir se demonstra.

Vimos que a potência eléctrica transformada em potência mecânica é dada por

$E_g I_a$, e que a potência mecânica fornecida pelo motor é $T_g \omega$.

Igualando então estas duas potências, e tendo em conta que

$$E_g = K_g \omega \text{ e } T_g = K_T I_a ,$$

obtemos

$$K_g = K_T .$$

No Cap.11 iremos mostrar que esta propriedade é característica de um dispositivo designado por “girador”.

O motor de corrente contínua representado na figura 2.23 também pode funcionar como gerador. De facto, se desligarmos a alimentação elétrica, mantendo no ar os respectivos terminais, e fizermos rodar o veio, com velocidade ω , constata-se o aparecimento de uma tensão E_g nos terminais do motor obedecendo à relação.

$$E_g = K_g \omega .$$

Como $I_a=0$, o motor não gera qualquer binário de oposição ao movimento; para manter a rotação, apenas será necessário aplicar um binário para vencer os atritos de natureza mecânica.

Se agora ligarmos uma impedância Z_L aos terminais do motor, de forma a permitir a circulação de uma corrente I_a , verifica-se que este passará a opor-se ao movimento através do binário

$$T_g = K_T I_a ,$$

e que a corrente será determinada pela relação

$$I_a = \frac{K_g \omega}{Z_L + R}$$

Consideremos agora o caso $R = Z_L = 0$ (terminais em curto-circuito e resistência interna nula). A lei das malhas de Kirchhof determina então $E_g = 0$. Daqui decorre $\omega = 0$. Nesta situação o motor funciona como um travão, bloqueando totalmente a rotação, qualquer que seja o binário aplicado ao veio.

Capítulo 3

Pag 39, Secção 3.2-novo texto

3.2 Função de Transferência e Integral de Convolução

Os sistemas lineares, e invariantes no tempo (SLIT), são caracterizados pela sua *resposta impulsional*. Por resposta impulsional, entende-se a resposta temporal $\omega(t), t \in \mathbb{R}$, de um sistema, inicialmente repouso, ao impulso unitário de Dirac, $\delta(t)$, aplicado no instante $t = 0$.

A resposta $y(t)$ de um SLIT a uma entrada $u(t)$, será então dada pela *convolução* entre $u(t)$ e $\omega(t)$, ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t - t') u(t') dt' \quad (3.20A)$$

Se estivermos perante um sistema causal, então $\omega(t) = 0, t < 0$, e nesse caso a expressão anterior fica

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t - t')u(t')dt' \quad (3.20B)$$

Apesar destas expressões não serem muito atraentes para cálculos à mão, estão particularmente talhadas para simular o sistema num computador digital; por outro lado $\omega(t)$ é relativamente simples de obter experimentalmente. Métodos especialmente concebidos para a determinação da resposta impulsional podem ser encontrados em Godfrey (1980).

A Fig.3.2 é um exemplo de aplicação da expressão (3.20B); a partir dela podemos concluir que:

-O sistema é "causal" i.e. a resposta y , no instante t , não depende de valores futuros da entrada u .

-O sistema tem “memória” porque a resposta, no instante t , depende também de valores da entrada em instantes distintos do instante t .

-O sistema tem um “factor de esquecimento” pois a contribuição dos valores da entrada para a resposta no instante t , têm tanto menos peso quanto mais “antigos” forem: da figura é patente que $u(t'_k), t'_k < t$, contribui para a resposta no instante t pesado pelo factor $\omega(t - t'_k)$; e, à medida que recuamos no tempo, este peso tende para zero (veremos mais adiante que isto acontece pelo facto do sistema ser estável). De facto se aproximarmos (3.20B) por

$$\sum_{k=1}^n \omega(t - t'_k)u(t'_k)\Delta; \Delta = \frac{t}{n} \quad (3.21)$$

essa constatação é evidente. Na Fig. 3.3 a resposta exacta é comparada com uma aproximação obtida via (3.21), com $\Delta = 0,2$.

Na prática, quando o sistema é estável, podemos considerar $\omega(t) = 0$ para $t > t_s$, onde t_s é o *tempo de assentamento*. A sua definição será dada mais adiante.

Exercício 3.5

a) Mostre o integral de convolução é um operador linear em $u(t)$.

b) Compare as respostas do sistema da Fig.3.2 às entradas $u_1(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)$ e

$u_2(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right)$ assumindo que $T_1 \gg t_s \gg T_2$.

Sugestão: Se T_2 for muito pequeno, a função $\omega(t)$ será quase constante durante um período de u_2 . Então as áreas positivas e negativas limitadas por u_2 praticamente cancelarão o efeito de cada uma delas em (3.20), sendo o resultado uma saída (sinusoidal) com uma amplitude muito pequena. Por outro lado, se o período de u_1 for muito maior que o tempo de assentamento, teremos o efeito inverso, com a entrada u_1 a comportar-se como

quase constante durante intervalos relativamente longos, conduzindo a uma saída com uma grande amplitude.

No nosso estudo iremos considerar apenas sistemas lineares e causais (também conhecidos por sistemas dinâmicos) e invariantes, de *dimensão finita*, ou seja, sistemas causais descritos por equações diferenciais lineares ordinárias e de coeficientes constantes.

Tais sistemas estão particularmente talhados para o uso da Transformada de Laplace unilateral, uma vez que esta conduz a uma representação do sistema por frações racionais na variável complexa s , frações essas normalmente designadas por *Funções de Transferência*. Temos assim uma alternativa à representação pelo integral de convolução. Contudo enquanto este é uma representação não-paramétrica de dimensão infinita, na medida em que a resposta impulsional é um elemento do espaço de funções de variável real, a representação por funções de transferência racionais facilita a análise do sistema, na medida em que é uma representação paramétrica e de dimensão finita, pois é especificada à custa de um conjunto finito de números.

A fim de melhor compreendermos a noção de dimensão de um SLIT causal, analisemos os dois sistemas seguintes, definidos pelas respectivas respostas impulsionalis $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$:

$$\omega_1(t) = \begin{cases} e^{-at}, t \geq 0, a > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad \omega_2(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1] \\ 0, t \notin [0,1] \end{cases}$$

Como veremos em seguida o primeiro é de dimensão finita e o segundo é de dimensão infinita.

No primeiro caso a resposta num instante $t, t > 0$, será

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^0 e^{a(t-t')} u(t') dt' + \int_0^t e^{a(t-t')} u(t') dt'$$

Uma vez que

$$y_1(0) = \int_{-\infty}^0 e^{a(-t')} u(t') dt'$$

podemos escrever

$$y_1(t) = e^{at} y_1(0) + \int_0^t e^{a(t-t')} u(t') dt'$$

Este resultado revela que para o cálculo da resposta a partir do instante zero não é necessário “guardar” a função $u(t)$ no intervalo $[-\infty, 0]$, mas apenas o valor $y_1(0)$. Este valor engloba tudo aquilo que é necessário saber do comportamento passado do sistema para calcular a sua resposta, a partir do instante zero. Daí se dizer que estamos perante um sistema de *dimensão finita*.

Neste ponto convém alertar o leitor que, se considerarmos este sistema apenas para $t \geq 0$ e com condição inicial $y_1(0)$ não nula, temos de reformular o nosso conceito de linearidade:

neste caso teremos um sistema *linear por incrementos ou incrementalmente linear* ou um sistema linear no espaço produto (condição inicial \times entrada).

No segundo caso teremos

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^0 \omega_2(t-t')u(t')dt' + \int_0^t \omega_2(t-t')u(t')dt'$$

onde

$$\int_{-\infty}^0 \omega_2(t-t')u(t')dt' = \begin{cases} 0, t > 1 \\ \int_{t-1}^0 u(t')dt', 0 < t < 1 \end{cases}$$

Daqui se conclui que, para calcularmos a resposta deste sistema para $t > 0$, teremos que guardar a função u no intervalo $[-1,0]$; como esta função é um elemento de um espaço de dimensão infinita, dizemos que estamos perante um sistema de *dimensão infinita*.

(recordar que um espaço é de dimensão infinita quando não possui um conjunto finito de elementos a partir dos quais se possam gerar, por combinação linear, todos os elementos desse espaço). Naturalmente que um tal sistema não pode ser representado por uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes.

Convém ainda clarificar que, neste contexto, um sistema causal descrito por uma equação diferencial linear ordinária e de coeficientes constantes só é um sistema linear se o analisarmos desde $t = -\infty$. Se o analisarmos a partir de $t \geq 0$, e com condições iniciais não nulas, termos então um sistema linear por incrementos ou incrementalmente linear, como já foi referido.

Pag 48-Novo texto para o princípio da página:

$$y(t_p) = 1 + \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (3.38)$$

Define-se ultrapassagem percentual, para entradas em degrau, como

$$M_p = \frac{\text{valor máximo da resposta} - \text{valor final da resposta}}{\text{valor final da resposta}} \times 100\%$$

Então

$$M_p = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% \quad (3.39)$$

A partir de agora, e salvo ...

Pag 39, Secção 3.6-novas figuras

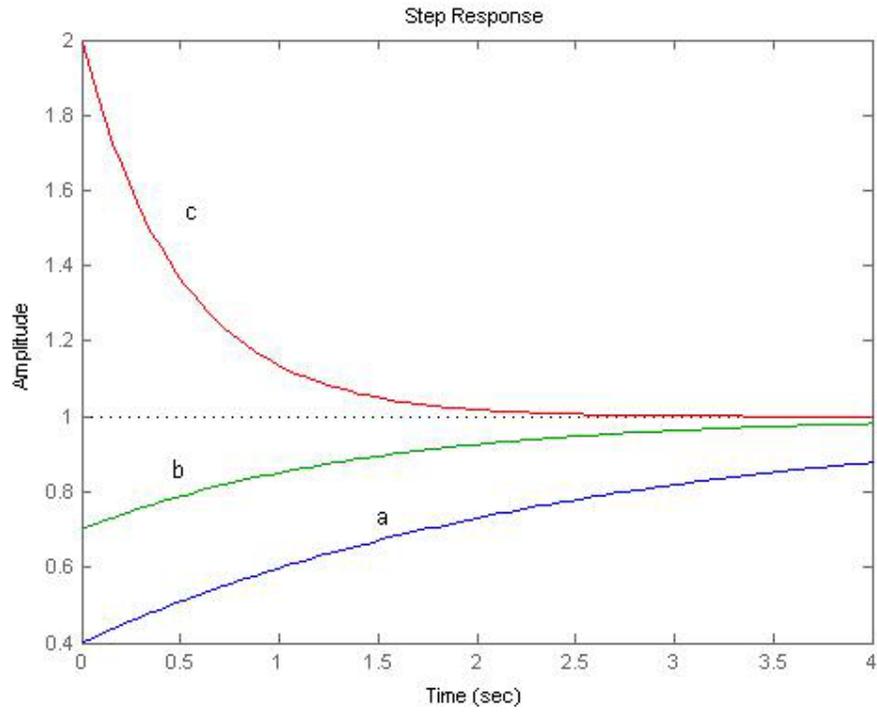


Fig 3.13

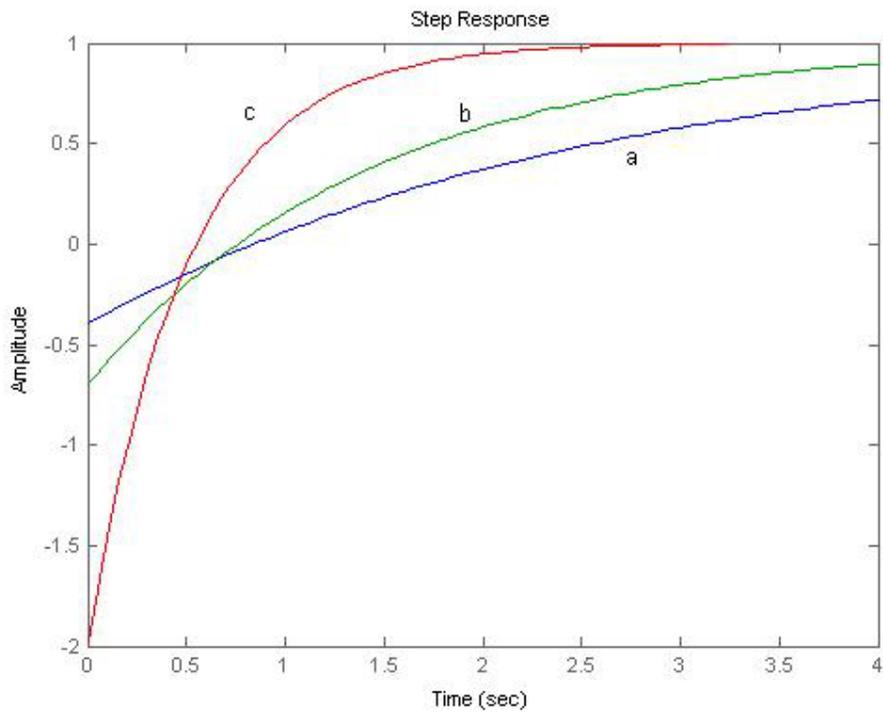


Fig 3.14

Capítulo 4

Pag 65-Secção 4.1 Aditamento no início da secção:

Uma forma, cómoda e intuitiva, de representar as interligações entre os subsistemas constituintes de um dado sistema é através de diagramas de blocos. No essencial, as ligações representam o fluxo de sinal, e cada bloco representa um subsistema como um operador agindo sobre o sinal de entrada. No caso de sistemas lineares esse operador será simplesmente um “ganho”, que designamos por função de transferência, quando os sinais estiverem representados no domínio de Laplace.

A análise de sistemas com *retroação*, também conhecidos por sistemas com *retorno* ou *realimentados*, pode ser bastante simplificada se reduzirmos o seu diagrama de blocos a um outro mais simples, como se representa na Fig.4.1(a); esta estrutura é designado por *forma canónica* de um sistema com retroação.

A função de transferência $G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$ é designada por função de transferência

directa (forward transfer function) e $H(s)$ é conhecida por *função de transferência de retorno* (feedback transfer function). $G(s)H(s)$ é a *função de transferência em anel*

aberto (open-loop transfer function) e $\frac{Y(s)}{R(s)}$ é a *função de transferência em anel*

fechado (closed-loop transfer function). A situação mais frequente é aquela em que

$H(s) = 1$. Neste caso dizemos que estamos perante um sistema com *retroação*

unitária negativa. Quando $E(s) = R(s) + H(s)Y(s)$ dizemos que temos um sistema com realimentação positiva.

Na manipulação de diagramas de blocos, de sistemas lineares, a função de transferência de uma série de blocos consecutivos, será dada pelo produto das respectivas funções de transferência. Neste procedimento está implícita a hipótese que não há “efeito de carga” entre blocos, ou seja os diagramas de blocos representam apenas fluxo de informação e não fluxo de energia. Quando o fluxo de energia não for desprezável então o efeito de carga do bloco a jusante sobre o bloco a montante tem de ser tomado em consideração. Esta situação está ilustrada no capítulo 6, no exercício 6.4.

pag. 73-Texto adicional no fim da secção 4.2:

Os resultados da tabela 4.1 são um corolário de um resultado mais geral, que estabeleceremos na capítulo 8 (fato 8.1, seção 8.1.4). Esse resultado afirma que um sistema com retroação unitária e estável seguirá sem erro, em regime permanente, uma entrada de referência $r(t)$ desde que os pólos da sua transformada de Laplace, $R(s)$, sejam também pólos de $K(s)W(s)$. A exigência de pólos na origem a $K(s)W(s)$, na tabela 4.1, é pois uma consequência do fato das referências consideradas possuírem apenas pólos na origem.

Exercício 4.3.A Considere o sistema da figura 4.5 com $H(s)=1$ e

$$K(s)W(s) = \frac{s+2}{(s-j)(s+j)}$$

Calcule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

quando $r(t) = \sin(t)$.

Resposta: Esse limite é zero. Notar que $e(t)$ terá de convergir necessariamente para zero.

Se $e(t)$ convergisse para uma sinusóide do tipo $A \sin(t + \alpha)$ caminharíamos para uma situação de ressonância, o que estaria em contradição com o fato do sistema com retroação ser estável. Deste modo a saída $y(t)$ acabará por estar em fase com $r(t)$

Pag 76-Regra 7-Novo texto:

Se os eixos real e imaginário tiverem escalas idênticas, então o ângulo da tangente ao lugar das raízes, num pólo ou zero de malha aberta, pode ser obtido somando ou subtraindo os ângulos de todos os outros zeros e pólos, respectivamente, com o pólo ou o zero em questão e adicionando 180° a esta soma.

Pag 77-Exemplo 4.3-Novo texto:

Exemplo 4.3

Considere

$$H(s) = 1 \text{ e } W(s) = \frac{1}{(s - p)^m}$$

na Fig.4.5. Queremos representar os ramos do lugar das raízes para $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Como as regras estudadas até agora não são muito úteis neste caso, temos que retornar aos fundamentos do método. Seja

$$(s - p) = r \exp(j\theta);$$

Então

$$\angle KH(s)W(s) = -m\theta$$

e

$$|KH(s)W(s)| = \frac{K}{r^m}.$$

Seja

$$(s_0 - p) = r_0 \exp(j\theta_0),$$

onde s_0 é um ponto pertencente ao lugar das raízes. Então a condição de ângulo (4.14) implica que

$$-m\theta_0 = (2l + 1)180^\circ,$$

Como esta condição é independente de r_0 , podemos então concluir que os ramos são constituídos por linhas retas que se interceptam em p fazendo ângulos com o eixo real de

$$\frac{(2l + 1)180^\circ}{m}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Estes ângulos estão representados na Fig. 4.13, para $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Pag 79 Primeira linha:

$$KW(s)H(s) = \frac{K}{s^{d-n} - \left(\sum_{i=1}^d p_i - \sum_{i=1}^n z_i\right)s^{d-n-1} + \dots}$$

Pag 80-texto adicional antes da secção 4.4-LGR Inverso:

O método que acabamos de analisar é o chamado método dos lugares geométricos direto, em virtude da restrição $K \geq 0$.

Se a restrição mudar para $K \leq 0$, e mantendo a estrutura da expressão (4.10), teremos o chamado método dos lugares geométricos inverso. As regras anteriormente enunciadas para o lugar geométrico das raízes direto continuam válidas no caso dos lugares geométricos inversos, exceto as regras 5, 7 e 8.

De fato a condição (4.14) deixa de ser válida quando $K \leq 0$. Neste caso passamos a ter

$$\angle W(s_0) H(s_0) = 2\pi l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.18A)$$

Consequentemente as regras 5, 7 e 8 serão alteradas pois fazem uso desta condição. O seu enunciado será o seguinte:

Regra 5 (lugar geométrico inverso): Um ponto s_0 no eixo real pertence ao lugar das raízes se à sua direita tiver um número par de pólos mais zeros da função de transferência em anel aberto.

Regra 7 (lugar geométrico inverso): Se os eixos real e imaginário tiverem escalas idênticas, então o ângulo da tangente ao lugar geométrico num pólo ou zero de malha aberta pode ser obtido somando ou subtraindo, os ângulos de todos os outros zeros e pólos, respectivamente, com o pólo ou zero em questão.

Regra 8 (lugar geométrico inverso): Os $d-n$ pólos de malha fechada que tendem para infinito, quando $K \rightarrow -\infty$, convergem para linhas retas fazendo ângulos com o eixo real de $2\pi l / (d-n)$, $l = 0, 1, 2, \dots, d-n-1$, e que intersectam o eixo real no ponto

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^d p_i - \sum_{i=1}^n z_i}{d-n}$$

Na figura 4.14.A estão também representados os lugares geométricos inversos para o sistema do exercício 4.5. Comparando-os com os diretos, na mesma figura, constatamos que as diferenças são o resultado das alterações sofridas pelas regras 5 e 8.

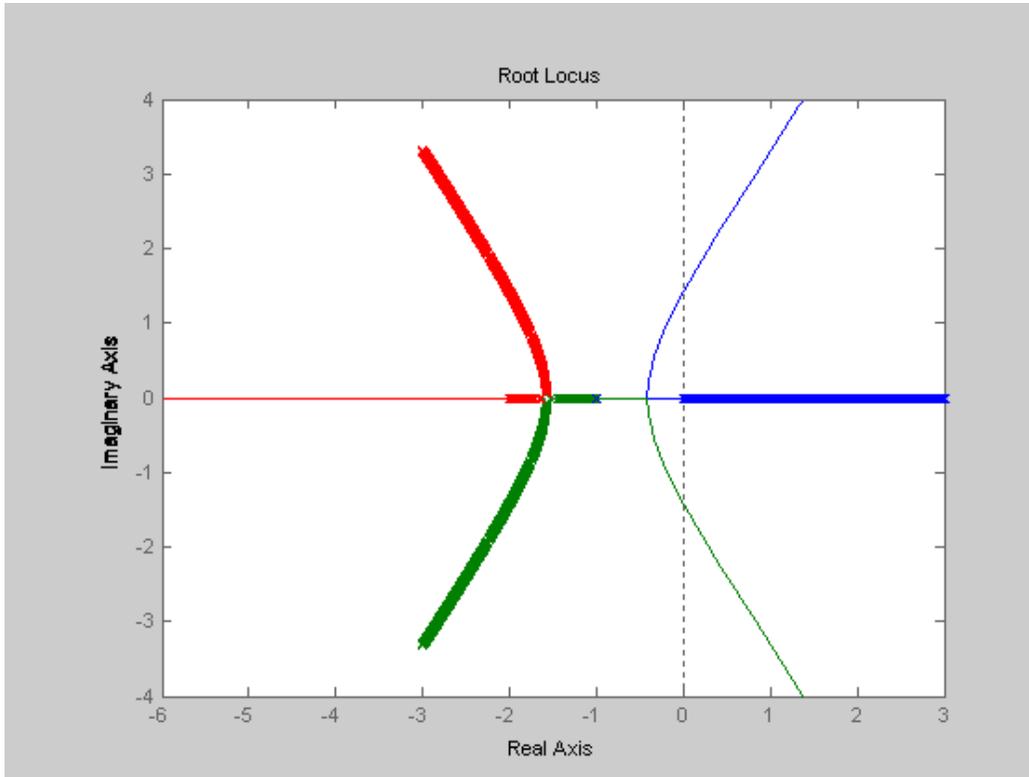


Fig 4.14A Lugares das raízes inverso e direto para o sistema do exercício 4.5.

Pag 81- Exercício 4.6-novo texto:

Com respeito ao sistema da Fig. 4.16 mostre que:

- (a) Com $K=0,5$ obtemos um “amortecimento de um quarto de amplitude” na resposta impulsional.
- (b) É possível uma oscilação senoidal, $m(t)=A \text{ sen}\pi t/T$, com $K=1$, $r=0$ e A uma constante.

Sugestão: note que a esta frequência um atraso de fase de 180° acontece no elemento de retardo puro.

Pag 88-secção 4.5.1-novo texto:

4.5.1 Controle Proporcional

Quando $T_d = 0$ e $T_i = \infty$ temos um controlador *proporcional*; o seu efeito no

comportamento estacionário e transitório de um sistema com retroação foi já discutido nas secções 4.2 e 4.3. Basicamente, mostrámos que este modo de controle não consegue eliminar o erro estacionário, ou *offset*, quando se controlam processos do tipo 0 (ou auto-regulados); também foi mostrado que a magnitude do erro estacionário era uma função da carga (cf. Fig. 4.6) e que este erro podia ser reduzido por um aumento do ganho; contudo, este aumento provoca em geral um aumento do tempo de assentamento e pode mesmo levar à instabilidade, como se pode concluir através da análise dos lugares das raízes.

Na prática existem limitações às amplitudes dos sinais de saída (m) e de entrada (e) do controlador, ou seja

$$|m(t)| \leq \frac{M}{2} \text{ e } |e(t)| \leq \frac{E}{2},$$

para todos os valores de t , onde M e E designam a extensão do conjunto dos valores de m e de e .

Esta restrição implica imediatamente que os modelos (lineares) usados até agora só são válidos quando e e m estão dentro destes intervalos. Por outro lado, um aumento do ganho K do controlador acarretará a redução da extensão do intervalo onde e se pode movimentar para um funcionamento linear. Quer isto dizer que para ganhos elevados o controlador pode passar a funcionar como um relé. Daí que na prática se utilize uma medida de acção proporcional que nos informe a que distância nos encontramos da saturação. Tal medida é designada por *banda proporcional percentual* (BP) e é definida como sendo a percentagem de variação de erro que produz uma variação de 100% na saída m do controlador.

Com respeito à Fig. 4.25 podemos portanto definir um ganho adimensional, K_a , do seguinte modo:

$$K_a = \frac{100\%}{BP} \quad (4.27A)$$

Qual será então a relação entre K_a e K (grandeza dimensional) da expressão (4.27)?

Como

$$BP = \frac{\text{percentagem de variação do erro}}{\text{percentagem de variação da saída do controlador}} \times 100\% = \frac{\frac{\text{variação do erro}}{E}}{\frac{\text{variação da saída do controlador}}{M}} \times 100\%$$

$$= \frac{1}{K} \times \frac{M}{E} \times 100\%$$

Portanto

$$K = \frac{M}{E} K_a \quad (4.27B)$$

Embora possamos ter Bandas Proporcionais superiores a 100%, é obvio que as variações do erro não poderão exceder a extensão, E , do seu intervalo de variação. Por exemplo BP=170% significa que uma variação de 100% no erro produzirá apenas

uma variação de $\frac{100}{170} \times 100\% = 58,83\%$ no actuador, como se pode verificar na Fig.

4.25.

Certamente que o leitor já se apercebeu que na prática $e=0$ não significa necessariamente o anulamento da variável manipulada (entrada do processo). Se tal fosse o caso, e tomando como exemplo um sistema de controlo de temperatura com controlo proporcional, teríamos que o fornecimento de calor à planta seria interrompido sempre que a temperatura do processo igualasse o sinal de referência. Na prática o sinal fornecido à planta é

$$m_c(t) = m_s + m(t) = m_s + K e(t) \quad (4.27C)$$

onde m_s designa um valor constante, ajustável manualmente, de forma a anular o erro para uma dada referência (constante), e

$$m(t) = K e(t)$$

A saída do controlador não será então uma função linear do erro mas sim uma função *afim* ou *linear por incrementos*. O modelo linear (4.27) representará portanto os desvios, $m(t)$, relativamente à situação de equilíbrio. Naturalmente que o mesmo raciocínio se aplica ao modelo do processo a controlar (ver Fig.4.28) onde $m'(t)$ e $e(t)$ representam os desvios relativamente à situação de regime permanente induzida por

m_s . Se assim não acontecesse $W(s)$ nunca poderia ser um modelo linear, nomeadamente uma função de transferência. Finalmente é suposto que o actuador foi escolhido de tal modo que m_s corresponde a 50% da extensão do seu conjunto de valores. Por exemplo se o actuador for uma válvula estamos a admitir que quando $e=0$ a válvula estará 50% aberta.

Exemplo 4.3A

Pretende-se regular a temperatura de um processo em redor de $70^\circ C$ com um controlador proporcional. A sonda de temperatura escolhida está preparada para fornecer temperaturas no intervalo $[50^\circ C, 90^\circ C]$. Logo

$$E = 90^\circ C - 50^\circ C = 40^\circ C.$$

A saída do controlador, $m_c(t)$, é um sinal entre 4mA e 20mA. O sistema de controlo foi calibrado de modo a que quando $m_c = m_s = 12mA$ a temperatura do processo seja de $70^\circ C$. Se for escolhida uma Banda Proporcional de 75% podemos concluir que o controlador entrará em saturação quando $|e(t)|$, na expressão (4.27C), exceder 75% de $20^\circ C$ ou seja $15^\circ C$.

Para BP=75% teremos que o ganho adimensional será

$$K_a = \frac{100\%}{75\%} = 1,33.$$

Para o ganho dimensional teremos

$$K = \frac{M}{E} K_a = \frac{16mA}{40^\circ C} \times \frac{100}{75} = 0,533 mA / ^\circ C.$$

Capítulo 5

Pag 112-aditamento antes do último paragrafo.

A mesma conclusão pode ser obtida, e de forma mais elegante, recorrendo ao integral de convolução. Seja então um SLIT causal, estável, com resposta impulsional $g(t)$ e entrada e^{st} , $s \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$. A sua resposta é

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{s(t-t')} g(t') dt' = e^{st} \int_{-\infty}^t e^{-t's} g(t') dt' = H(s) e^{st}, t \in \mathbb{R}.$$

A função de transferência $H(s)$ existe pois o sistema é estável, por hipótese. Notar que neste caso, e contrariamente ao que sucedia no caso acima, não temos termos transitórios pois a a entrada não começa em $t = 0$ mas em $t = -\infty$.

Se fizermos agora $s = j\omega$ teremos

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} e^{j\omega t} = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} = \\ &= |G(j\omega)| (\cos(\omega t + \angle G(j\omega)) + j \text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega))) \end{aligned}$$

Como estamos perante um sistema real, no sentido que entradas reais produzem saídas reais, podemos então concluir que as entradas $\cos(\omega t)$ e $\text{sen}(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, produzem,

respectivamente, as saídas

$$|G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \text{ e } |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega)).$$

Esta conclusão está de acordo a expressão (5.9), que foi obtida para o caso particular de uma função de transferência racional $G(s)$, através da decomposição em fracções simples.

cap5, pag 115, reformulação do 2º e 3º parágrafos

Na Fig. 5.3 podemos ver a posição de $G(j)$ para $p=1$ e $p=10$ revelando que, para uma dada frequência no intervalo de $(0, \infty)$, o ganho aumenta com $|p|$ crescente. Isto não surpreende uma vez que, quanto maior $|p|$, mais rápido o sistema. Também revela que o ganho decresce monotonamente com o aumento da frequência.

Esta conclusão também é imediata se escrevemos $G(j\omega)$ na forma equivalente

$$\frac{1}{1 + j\bar{\omega}}$$

com $\bar{\omega} = \frac{\omega}{p}$. Como $\bar{\omega} \in (0, \infty)$ esta última expressão revela que o traçado polar para

$G(j\omega)$ será independente de p . No tocante à parametrização deste, em função da frequência, se fixarmos um ponto sobre o traçado ($\bar{\omega}$ fixo) vemos que ele corresponderá a uma frequência tanto maior quanto maior p , ou seja, a largura de banda de $G(j\omega)$ aumentará com o aumento de p .

A situação para sistemas de segunda ordem com função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + 1} \tag{5.11}$$

está ilustrada na Fig.5.4, para $\omega_n=1$ e $\zeta \in \{2, 1, 0,7, 0,4, 0,1, 0,005\}$.

Ao contrário do caso anterior, temos agora situações onde a evolução do ganho não é monótona decrescente. De fato, pode ser demonstrado que $|G(j\omega)|$ só é monótona

decrescente para $\zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$. Para $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ verifica-se que $|G(j\omega)|$ apresenta

um máximo à frequência $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Daí a designação de “frequência de ressonância” para ω_r . Não confundir ω_r com $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Como se viu na secção 3.3.2, $\pm j\omega_d$ é a parte imaginária dos pólos de (5.11) quando $\zeta < 1$.

À semelhança do que aconteceu com os traçados do sistema de primeira ordem, que eram independentes do parâmetro p , também aqui podemos concluir que a forma do traçado polar é independente de ω_n . Para tal basta reescrever $G(j\omega)$, definido em

(5.11), na forma

$$\frac{1}{(j\bar{\omega})^2 + 2\zeta j\bar{\omega} + 1} \text{ com. } \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n}$$

De realçar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & \text{para o sistema de primeira ordem} \\ -\pi & \text{para o sistema de segunda ordem} \end{cases}$$

Exemplo 5.1, pag 126

Seja a função de transferência

$$\frac{16(s+1)}{s+0,8 \pm j3,92} = \frac{16(s+1)}{s^2+1,6s+16}$$

onde

$$|p-z| = |\bar{p}-z| = 3,92$$

e

$$|p/z| = 4.$$

A resposta nas frequências tem um máximo igual a 20,1 dB em $\omega_r = 4,12 \text{ rad/s}$,

Por outro lado

$$\frac{40(s+10)}{s+8s+400}$$

exibe uma ressonância de 14,8dB em $\omega_r = 20,5 \text{ rad/s}$,

com

$$|p-z| = |\bar{p}-z| = 20,49. \text{ e } |p/z| = \frac{1}{2}.$$

Constatamos assim que a ressonância não foi ditada pela distância pólo-zero mas sim pelo módulo quociente destes.

Pag 130 e pag 131 até ao exemplo 5.2-Novo texto.

Analisemos mais detalhadamente a parte (a) desta figura onde Γ abraça apenas um pólo, ou seja $Z=0$ e $R=1$. Quando s' está em P_1 temos $\alpha = -\pi$. À medida que s' se desloca ao longo de Γ , no sentido indicado, verificamos que α é igual a

$-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ quando s' está em P_2, P_3, P_4 e P_1 , respectivamente. Conseqüentemente $N = -1$.

Uma vez que $Z=0$ e $R=1$, confirmamos neste exemplo o princípio acima mencionado. Uma análise semelhante é aplicável aos casos (b) e (c).

A utilidade deste resultado é evidente com respeito ao sistema com retroação representado na Fig. 5.16.

Seja então $G(s)H(s)$ uma função racional própria, sem pólos no eixo imaginário.

Se Γ designar agora o caminho representado na Fig. 5.18, com r suficientemente grande de forma a englobar todos os pólos e todos os zeros da função

$F(s) = 1 + G(s)H(s)$ no semi-plano direito (SPD), então o número de zeros de $F(s)$ no interior do SPD (pólos instáveis do sistema realimentado) é igual ao número de pólos de $(1 + G(s)H(s))$ no interior do SPD mais o número de envolvimentos da origem, no sentido dos ponteiros do relógio, da imagem de Γ por $F(s)$.

Se a imagem de Γ por $1 + G(s)H(s)$ passar pela origem o sistema realimentado terá então pólos no eixo imaginário, e será instável.

Dado que geralmente não conhecemos um majorante para os pólos e zeros de $1 + G(s)H(s)$, o semi-círculo de raio r deve englobar todo o SPD, isto é, temos de calcular o limite da imagem deste caminho quando $r \rightarrow \infty$.

Se $G(s)H(s)$ for estritamente própria, então a imagem da semi-circunferência de raio infinito será a origem do plano complexo. Se $G(s)H(s)$ for uma função bi-própria esta imagem será então uma constante finita (cf. exercício 3.1).

Conseqüentemente a imagem do caminho na Fig. 5.18, quando $r = \infty$, pode ser calculada sem o conhecimento da expressão analítica de $G(s)H(s)$, bastando apenas

conhecer esta função no eixo imaginário, ou seja para $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Contudo as simplificações ainda não ficam por aqui. Como $G(s)H(s)$ é um quociente de polinômios de coeficientes reais, então $G(\bar{s})H(\bar{s}) = \overline{G(s)H(s)}$, onde \bar{s} designa o conjugado de s , e portanto apenas será necessário calcular a imagem da parte positiva do eixo imaginário.

Por uma questão de ordem prática representaremos apenas $G(j\omega)H(j\omega)$ em lugar de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$. Uma vez que a primeira resulta da segunda por uma translação para a esquerda, de uma unidade, paralelamente ao eixo real, o número de voltas de $G(j\omega)H(j\omega)$ e de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ em redor dos pontos $-1+j0$ e $0+j0$, respectivamente, será o mesmo.

Estamos agora em condições de enunciar o Critério de Estabilidade de Nyquist para o sistema da Fig. 5.16.

Critério de Estabilidade de Nyquist:

$$Z=N+R,$$

onde $G(s)H(s)$ é uma função de transferência estritamente própria sem pólos no eixo imaginário,

N =Número de voltas de $G(j\omega)H(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, em redor do ponto $-1+j0$, contadas positivamente no sentido dos ponteiros do relógio.

R =Número de pólos de $G(s)H(s)$ no interior do SPD.

Z =Número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no interior do SPD.

Então o sistema realimentado será instável se $Z>0$, onde $Z=N+R$.

Conseqüentemente, se $G(s)H(s)$ for uma função de transferência estável ($R=0$), o sistema realimentado também será estável ($Z=0$) se e só se a curva $G(j\omega)H(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, não rodear o ponto $-1+j0$.

Quando $G(s)H(s)$ tiver R pólos no interior do SPD, a curva $G(j\omega)H(j\omega)$ deve rodear o ponto $(-1+j0)$ R vezes, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio, para assegurar a estabilidade do sistema realimentado. Quando $G(j\omega)H(j\omega)$ passar pelo ponto $-1+j0$ o sistema realimentado será instável pois nesse caso terá pólos no eixo imaginário.

Pode demonstrar-se que o critério de estabilidade de Nyquist continua válido quando $G(s)H(s)$ contiver atrasos puros de transporte, ou seja

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-Ts},$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios na variável s .

Resta agora considerar o caso em que $1 + G(s)H(s)$ tem pólos no eixo imaginário.

Nesta situação o caminho Γ , representado na Fig. 5.18, viola os nossos pressupostos.

Quando $1 + G(s)H(s)$ tem pólos no eixo imaginário torna-se necessário, a fim de prosseguirmos a nossa análise, modificar o caminho Γ de modo a evitar esses pontos singulares. Uma abordagem possível será “desviar” o caminho para o interior do SPD, através de semi-circunferências centradas nesses pontos, com um raio ε , $\varepsilon > 0$, calculando-se depois o limite da imagem deste caminho quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Deste modo todos os zeros e pólos de $1 + G(s)H(s)$ no interior do SPD acabarão por ser englobados no interior de Γ , por muito pequenos que sejam. Com esta modificação do caminho de Nyquist, Γ , o critério de estabilidade acima enunciado continua válido

para o caso em que $G(s)H(s)$ possui pólos no eixo imaginário. Os exemplos que se seguem ajudam a clarificar esta abordagem.

Exemplo 5.1A

Seja $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$. Neste caso $1 + G(s)H(s)$ tem um par de zeros no eixo imaginário, mais precisamente nos pontos $\pm j\sqrt{2}$. O sistema realimentado é pois instável.

Pag 136-Secção 5.2.1 -Novo texto

5.2.1 Estabilidade Relativa

Na prática não estamos só interessados em saber se o sistema é estável mas também a que distância se encontra da instabilidade. Dado que a distância da curva $G(j\omega)H(j\omega)$ ao ponto $(-1+j0)$ é o módulo do denominador da função de transferência (sinusoidal) em malha

fechada $\frac{Y}{R}$ i.e.

$$|1 + G(j\omega)H(j\omega)|,$$

podemos dizer que quanto mais $G(j\omega)H(j\omega)$ se aproximar de $(-1+j0)$, mais oscilatória será a resposta do sistema realimentado. Esta proximidade é normalmente "medida" em termos de margem de fase e de margem de ganho.

Comecemos então por analisar o caso em que $G(s)H(s)$ é uma função de transferência racional própria, sem pólos no interior do SPD.

A Margem de Ganho (MG) indica então de quanto o ganho deverá ser aumentado para levar o sistema à instabilidade, i.e. para levar o ganho de malha aberta ao valor um quando a fase é de -180° .

A Margem de Fase (MF) é o ângulo

$$180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

onde ω_c , a frequência de travessia, é o valor de ω correspondente à intersecção do traçado $G(j\omega)H(j\omega)$ com o círculo unitário centrado na origem. As figuras 5.24 e 5.25 mostram como estas margens podem ser determinadas a partir dos traçados polares e dos traçados de Bode. Os últimos são particularmente apropriados para determinar estas grandezas uma vez que a escala logarítmica converte multiplicações de ganhos em adições, e em particular $1/MG \text{ dB} = -MG \text{ dB}$. Consequentemente um sistema realimentado nas condições acima referidas será estável se tiver uma margem de ganho, em decibéis, positiva.

A estabilidade também requer uma margem de fase positiva; com respeito à Fig.5.24, se multiplicarmos o traçado $G(j\omega)H(j\omega)$ por uma constante positiva K , de tal forma que o ponto $(-1+j0)$ fique rodeado por este, o sistema realimentado será instável e o ângulo

$$180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

será então negativo.

Quando o módulo e a fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ diminuem monotonamente, com ω crescente, como se mostra na Fig.5.24, as noções de Margem de Ganho e Margem de Fase estão claramente definidas, e podem ser usadas como medidas de estabilidade. Esta é a situação na maioria dos casos. Contudo existem exceções. Dois desses casos serão analisados a seguir, a saber:

o caso de vários cruzamentos com o eixo real negativo;

e

o caso de mais do que um cruzamento com o círculo unitário centrado na origem do plano complexo.

Em ambas as situações continuaremos a considerar $G(s)H(s)$ uma função de transferência sem pólos no SPD.

Analisemos então o primeiro caso. A Fig.5.27 mostra a representação polar de uma função de transferência em anel aberto sem pólos no SPD.

Se $P_1 = -1 + j0$ verificamos que o sistema realimentado é estável; se $P_2 = -1 + j0$ o sistema realimentado será instável. Aqui o conceito de margem de ganho referir-se-á ao menor valor de ganho que leva o sistema realimentado à instabilidade. Ou seja, teremos de partir da situação em que o ponto $-1 + j0$ é sempre visto à nossa esquerda quando caminhamos ao longo do traçado polar, no sentido crescente da frequência. O mesmo se aplica para o cálculo da margem de fase. Em termos de LGR, esta situação corresponderá à intersecção, pela primeira vez, de ramos do LGR com o eixo imaginário.

Passemos agora à análise do segundo caso. Quando existe mais do que uma intersecção com a circunferência unitária centrada na origem, é possível obter também uma definição para a margem de fase relacionando-a com o atraso puro máximo de transporte que o sistema pode suportar sem perder estabilidade. Consideremos por exemplo

$$G(s)H(s) = \frac{1000(s^2 + 0.7s + 1600)}{s(s + 100)(s + 160)}$$

Os respectivos traçados de Bode e polar estão representados nas Figuras 5.28 e 5.29. Uma vez que existem três valores de frequência, nomeadamente 32.33 rad/s, 50.47 rad/s e 979.4 rad/s para os quais $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$, temos como valores candidatos para a margem de fase 63° , $223,58^\circ$ e $105,07^\circ$ respectivamente. A estas frequências, os valores de T tais que ωT iguala as margens de fase candidatas são, respectivamente, 0,034s, 0,077s e 0,001873s.

Portanto, o atraso de transporte puro que o sistema pode suportar sem perder estabilidade deve ser menor do que 0,001873s. Na Fig.5.30 podemos ver o traçado polar para

$$G(j\omega)H(j\omega)e^{-j\omega(0,001873)}$$

com $G(j\omega)H(j\omega)$ tal como na Fig.5.29: o sistema realimentado ficou instável, como era de esperar. Consequentemente a margem de fase é de $105,07^\circ$.

Consideremos agora o caso de sistemas realimentados negativamente, com funções de transferência em malha aberta, racionais e estritamente próprias mas com R pólos, $R > 0$, no interior do SPD. Nestes casos o sistema realimentado será estável se o número de envolvimentos do ponto $-1 + j0$ for $(-R)$, ou seja no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio.

Uma tal situação está representada na Fig.5.26(a) correspondente a $R=1$: apesar de estar representada apenas a imagem do eixo imaginário positivo, é fácil de ver que a imagem da totalidade do eixo imaginário contorna o ponto $(-1 + j0)$ uma vez, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio. Portanto $N = -1$. Dado que, por hipótese, temos um pólo no interior do semi-plano direito, $R=1$. Consequentemente $Z = 0$, i.e. o sistema em malha fechada não tem pólos no interior do semi-plano direito. Também podemos concluir que o sistema realimentado não terá pólos no eixo imaginário pois o traçado polar não passa pelo ponto $-1 + j0$. Logo o sistema realimentado é estável.

No entanto a margem de ganho não está definida pois o sistema realimentado é instável para valores de ganho abaixo de um dado valor.

Exercício 5.10: Esboce o LGR directo para o sistema realimentado negativamente cuja função de transferência, em anel aberto, é

$$\frac{s + 1}{(s + 0.2)(s - 1)}$$

Pag144-Secção 5.2.3-Funções de transferência de fase não mínima-Novo texto

Uma função de transferência $G(s)$ diz-se de *fase não-mínima* quando possui zeros no interior do semi-plano direito (SPD) ou um factor da forma $\exp(-Ts)$ i.e. um atraso puro de transporte de T unidades de tempo.

No que se segue iremos considerar apenas funções de transferência $G(s)$ tais que $G(0) > 0$. Esta normalização é necessária a fim de evitar diferenças de π radianos

aquando da comparação de fases de funções de transferência com o mesmo módulo como acontece, por exemplo, com

$$\frac{1}{s+1} \text{ e } \frac{-1}{s+1}.$$

Aquando do estudo dos traçados de Bode pudemos constatar que o módulo de uma função de transferência, com um zero em z_0 , se mantém se o zero for alterado para $-z_0$. A situação é contudo diferente no que respeita à fase. Por exemplo as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{1}{s+0.2}$$

e

$$G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+0.2)}$$

apresentam idênticos traçados de Bode para o módulo. Contudo a fase de $G_2(j\omega)$ é “mais negativa” que a fase de $G_1(j\omega)$. Daí a designação de “fase não-mínima” para $G_2(s)$.

Esta situação é causada pelo zero de $G_2(s)$ no SPD que vai contribuir com uma fase negativa, ao contrário do que aconteceria se estivesse no semi-plano esquerdo (SPE). Deste modo o traçado de Bode, para a fase, de $G_2(j\omega)$ será idêntico ao da função

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+0.2)}.$$

Em termos de traçado de Nyquist esta situação corresponde a aproximar o traçado polar do ponto $-1+j0$. Como resultado deste processo o controlo de $G_2(s)$ ficará mais difícil devido à redução na margem de fase.

Esta situação está patente na resposta ao degrau da função de transferência $G_2(s)$ ilustrada na Fig. 5.36: A “resposta inversa” nos instantes imediatamente a seguir à aplicação do degrau revela que os “ganhos” às altas frequências têm sinal oposto aos das baixas frequências. Assim sendo um controlador para esta planta, mesmo que apresente um bom desempenho no tratamento de sinais lentos, terá de “refrear” a sua acção às altas frequências a fim de não destabilizar o sistema realimentado; ou seja neste caso temos uma limitação estrutural que nos impede de ter uma largura de banda superior a um dado valor, valor esse dependente do zero no SPD. Em geral as plantas com funções de transferência cujos inversos são instáveis são sempre mais difíceis de controlar.

Nesta altura o leitor estará certamente a interrogar-se das razões pelas quais se incluem nesta classe as funções de transferência que possuem um fator da forma $\exp(-Ts)$. A razão assenta no facto de ser possível aproximar este fator, com uma precisão tão grande quanto se queira, por uma função de transferência racional biprópria e estável, com todos os zeros no SPD (cf. aproximantes de Padé na secção 6.5).

Capítulo 6

pag 156-Exercício 6 4 - resposta à alínea c)

(c) Temos que

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} \neq \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \times \frac{1}{R_2 C_2 s + 1},$$

devido ao efeito de carga de R_2 e de C_2 nos terminais de C_1 . Contudo se a tensão nos terminais de C_1 fosse aplicada à entrada de um amplificador isolador ideal, com ganho unitário, que por sua vez entregaria a tensão à série de R_2 com C_2 , então teríamos

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \times \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

Pag 194-novo texto para o penúltimo parágrafo (“Pode ser demonstrado...eixo imaginário”).

No caso geral, um aproximante de Padé de uma função $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i,$$

é uma função racional

$$P_{m,n} = \frac{N_m(s)}{D_n(s)}$$

onde $N_m(s)$ e $D_n(s)$ são polinômios de graus m e n , respectivamente, tais que

$$P_{m,n} = \sum_{i=0}^{m+n} a_i s^i + \sum_{i=m+n+1}^{\infty} b_i s^i.$$

Ou seja, os coeficientes da divisão ascendente de $N_m(s)$ por $D_n(s)$ coincidem com os coeficientes do desenvolvimento em série de Taylor de $f(s)$ até à ordem $(m+n)$.

No caso de

$$f(s) = e^s$$

Demonstra-se (ver R.W. Daniels, “Approximation Methods for Electronic Filter Design”, McGraw-Hill) que:

$$N_m(s) = 1 + \frac{m}{n+m} \frac{s}{1!} + \frac{m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)} \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{m(m-1)\dots 2 \cdot 1}{(n+m)(\dots(n+1))} \frac{s^m}{m!}$$

$$D_n(s) = 1 - \frac{n}{n+m} \frac{s}{1!} + \frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)} \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n m(m-1)\dots 2 \cdot 1}{(n+m)(\dots(m+1))} \frac{s^n}{n!}$$

Para $n=m$, como é o caso dos exemplos acima, temos

$$N_n(s) = D_n(-s).$$

Esta propriedade assegura um ganho unitário a todas as frequências, uma vez que os zeros são simétricos dos pólos com respeito ao eixo imaginário do plano complexo.

Pag 196-Exercício 6.18-novo texto:

Exercício 6.18

(a) Mostre que na Fig. 6.54(b):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p \exp(-T_p s)}{1 + G_c G_m (1 - \exp(-T_m s)) + G_c G_p \exp(-T_p s)}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p \exp(-T_p s) (1 + G_c G_m (1 - \exp(-T_m s)))}{1 + G_c G_m (1 - \exp(-T_m s)) + G_c G_p \exp(-T_p s)}$$

(b) Mostre que, quando o modelo de processo está correcto i.e.

$$G_p = G_m \quad \text{e} \quad T_p = T_m,$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p \exp(-T_p s)}{1 + G_c G_p}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p \exp(-T_p s) (1 + G_c G_p (1 - \exp(-T_p s)))}{1 + G_c G_p}$$

Neste caso o controlador de Smith desloca o retardo puro para fora da malha de retroacção.

No exercício anterior verificamos que no numerador da função de transferência Y/D , referente à Fig 6.54(b), aparece uma parcela função de G_p^2 . Como G_p é, por hipótese, uma fracção racional, então o denominador de G_p será um factor do denominador dessa parcela. Em particular se G_p for instável, então Y/D será também instável.

Podemos então concluir que o predictor de Smith só pode ser usado com plantas estáveis.

Por exemplo se na Fig 6.54, $G_c = k$ e $G_p = \frac{1}{s}$, teremos então

$$\frac{Y}{D} = \left(\frac{1}{s+k} + \frac{k(1 - \exp(-T_p s))}{s(s+k)} \right) \exp(-T_p s)$$

Trata-se portanto de uma função de transferência instável devido à presença do pólo na origem.

Infelizmente existem também situações em que o controlador de Smith, mesmo com plantas estáveis, só funciona no caso de uma perfeita adaptação do modelo; ...

Capítulo 7

Pag 209-Resultado 7.3-Interpretação geométrica de vectores próprios complexos-
Novo texto

Resultado 7.3:

Dada a equação $\dot{x} = Ax$ e um vector próprio complexo, \mathbf{v} , da matriz A ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + j\mathbf{v}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \exp(j\Theta_2) \\ \vdots \\ r_n \exp(j\Theta_n) \end{bmatrix}$$

com valor próprio $\lambda = \alpha + j\omega$, então $\mathbf{x}(t) = \alpha_{\text{Re}} \mathbf{v}' + \alpha_{\text{Im}} \mathbf{v}''$, $\alpha_{\text{Re}} \in \mathfrak{R}$, $\alpha_{\text{Im}} \in \mathfrak{R}$, implica

$$\mathbf{x}(t) = \frac{r}{2} \exp(\alpha t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \Theta) \\ r_2 \cos(\omega t + \Theta_2 - \Theta) \\ \vdots \\ r_n \cos(\omega t + \Theta_n - \Theta) \end{bmatrix}$$

onde

$$\alpha_{\text{Re}} + j\alpha_{\text{Im}} = r \exp(j\Theta)$$

Este resultado constitui uma generalização de (7.2) quando \mathbf{e}_i é um vector complexo, aqui designado por \mathbf{v} ; também revela que os módulos das componentes $1, r_2, \dots, r_n$ de um vector próprio complexo \mathbf{v} correspondem à distribuição relativa da amplitude do modo oscilatório que lhe está associado, pelas componentes do vector estado do sistema, e os seus argumentos $0, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ com o desfasamento relativo entre essas componentes.