

Programação Linear Inteira

Rui Alves
Catarina Delgado

Setembro de 1997

APRESENTAÇÃO

Este texto concretiza uma ideia que já tem alguns anos, mas que vinha sendo adiada devido a afazeres de diversa natureza.

Dois factos ocorridos no ano lectivo de 1996/97 foram determinantes na concretização deste projecto: (i) a adopção, nas disciplinas de Investigação Operacional de ambas as licenciaturas, de um livro (*Investigação Operacional*, de L. Valadares Tavares et al., McGraw-Hill, 1996) que, embora cobrindo a matéria de Programação Linear e de Filas de Espera, é omissa no que toca à Programação Linear Inteira e às Cadeias de Markov; (ii) a contratação da licenciada Catarina Delgado como assistente estagiária das referidas disciplinas.

O facto de os alunos disporem de elementos de estudos (no livro adoptado) sobre alguns pontos do programa tornou mais premente a conclusão destes textos com o objectivo de uma integral cobertura do programa. A disponibilidade da licenciada Catarina Delgado foi na realidade crucial (sem o seu trabalho e o seu entusiasmo creio que os textos não teriam ficado prontos), e o seu contributo justifica plenamente a co-autoria que lhe é devida, pois a ela se devem a primeira versão dos textos, todos os exemplos profusamente ilustrados, e a inclusão de uma maior variedade de problemas típicos de Programação Inteira.

Resta-nos desejar que os alunos, destinatários últimos destes trabalhos, deles possam vir a tirar o desejado proveito. Todas as críticas e sugestões são bem-vindas, salvaguardando que todos os erros e imprecisões que os textos possam ter são da inteira responsabilidade dos autores.

Faculdade de Economia do Porto, Setembro de 1997

Prof. Doutor Rui Alves

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	CONDIÇÕES EXPRESSAS ATRAVÉS DE VARIÁVEIS BINÁRIAS	2
2.1.	Generalidades	2
2.2.	Restrições Mutuamente Exclusivas	2
2.3.	Respeitar k de m Restrições	2
2.4.	Funções com N Valores Possíveis	3
2.5.	Restrições Condicionadas	4
2.6.	Representação de Custos Fixos	4
2.7.	Máximo de N Variáveis	5
3.	ALGUNS PROBLEMAS TÍPICOS DE PI	5
3.1.	Problema de Afectação	5
3.2.	Problema do Caixeiro Viajante	6
3.3.	Problema da Mochila	8
3.4.	Problema da Cobertura e da Partição de Conjuntos	9
3.5.	Problema de Selecção de Projectos	10
3.6.	Problema de Localização	11
4.	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	12
4.1.	Generalidades	12
4.2.	Método dos Planos de Corte	14
4.3.	Método de Partição e Avaliação Sucessivas	17
5.	BIBLIOGRAFIA	22

1. INTRODUÇÃO

Um problema de Programação Linear Inteira (PLI) é um problema de Programação Linear (PL) em que todas ou alguma(s) das suas variáveis são discretas (têm de assumir valores inteiros). Quando todas as variáveis estão sujeitas à condição de integralidade estamos perante um problema de Programação Linear Inteira Pura (PLIP); e se apenas algumas o estão trata-se de um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM). Embora a Programação Inteira (PI) inclua também a Programação Não-Linear Inteira, em praticamente todos os modelos da vida real se preserva a estrutura linear das funções, pelo que quase não existe diferença entre a PI e a PLI.

Os modelos de PLI serão então do tipo dos modelos de PL, sujeitos a restrições adicionais indicando que algumas ou todas as variáveis são discretas, conforme se pode ver no exemplo seguinte:

$$\begin{array}{l|l} & \max F = 4x_1 - 5x_2 \\ & \text{sujeito a:} \\ (PI) & 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiras} \end{array}$$

O correspondente problema de PL (relaxação do PI, dado que se “alarga” o domínio das variáveis de decisão de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{R}$) é:

$$\begin{array}{l|l} & \max F = 4x_1 - 5x_2 \\ & \text{sujeito a:} \\ (PL) & 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Existe um caso especial de variáveis inteiras: as variáveis binárias que apenas podem tomar os valores 0 (zero) ou 1 (um). Quando todas as variáveis de um modelo são binárias, o modelo diz-se de Programação Inteira Binária. As variáveis binárias são muito úteis para exprimirem situações dicotómicas (sim ou não, fazer ou não fazer, etc.), conforme se verá nos pontos 2 e 3.

Este texto encontra-se organizado da seguinte forma: no ponto 2 são estudadas diversas condições que podem ser expressas com o auxílio de variáveis binárias e no ponto 3 são apresentados alguns problemas típicos de Programação Inteira. O ponto 4 é dedicado a passar em revista os métodos de resolução de modelos de PLI, sendo dada atenção especial ao método de partição e avaliação sucessivas. Finalmente, no ponto 5 é listada a bibliografia consultada para a elaboração do texto e considerada mais relevante nesta matéria.

2. CONDIÇÕES EXPRESSAS ATRAVÉS DE VARIÁVEIS BINÁRIAS

2.1. GENERALIDADES

Conforme foi referido no ponto 1, as variáveis binárias são muito úteis para representar situações dicotómicas, podendo desempenhar dois papéis distintos: (i) como variáveis principais ou de decisão (decisões do tipo fazer ou não fazer, construir ou não construir, etc.); (ii) como variáveis auxiliares, sendo utilizadas para exprimir certas condições.

As situações em que as variáveis binárias são utilizadas como variáveis de decisão são apresentadas no ponto 3. Neste ponto veremos a sua utilização para exprimir diversas condições, tais como restrições mutuamente exclusivas, funções com vários valores possíveis, restrições condicionadas, representação de custos fixos, etc.

2.2. RESTRIÇÕES MUTUAMENTE EXCLUSIVAS

A situação normal de qualquer problema de PI ou de PLI é a de as restrições serem satisfeitas simultaneamente (daí falar-se no sistema de restrições, tratando-se de um sistema de (in)equações simultâneas).

Pode acontecer, contudo, que haja duas restrições mutuamente exclusivas, ou seja, das duas apenas uma tem de ser respeitada. Existe aqui uma dicotomia (uma restrição ou a outra), que pode ser expressa por recurso a uma variável binária. Vejamos o seguinte exemplo para duas restrições do tipo $\leq$:

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ \text{ou} \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{array}$$

Definindo a variável binária $y \in \{0, 1\}$, e redefinindo as restrições como se segue (sendo M um número tão grande quanto se queira), as duas restrições constarão do modelo mas apenas uma das duas será garantidamente respeitada (dependendo do valor que a variável y assumir).

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 + My \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 + M(1-y) \end{cases}$$

É fácil deduzir como deveriam ser redefinidas as restrições se as mesmas fossem do tipo $\geq$. Se uma ou ambas as restrições forem do tipo $=$ podem as mesmas ser desdobradas em duas desigualdades simultâneas ($\leq$ e $\geq$), aplicando-se então os princípios enunciados.

2.3. RESPEITAR k DE m RESTRIÇÕES

No caso anterior pretendia-se respeitar uma de duas restrições (podendo as restrições ser do tipo $\leq$ ou do tipo $\geq$). Uma extensão dessa situação consiste em ter de respeitar k de m restrições ($k < m$). Neste caso devem-se definir tantas variáveis binárias quantas as restrições, com o seguinte significado (para o caso das restrições serem do tipo $G_j(x) \leq 0$):

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{se restrição } j \text{ é válida } (G_j(x) \leq 0) \\ 1, & \text{se não } (G_j(x) \leq M \rightarrow \text{restrição redundante}) \end{cases}$$

As restrições devem ser redefinidas de modo semelhante ao apresentado no ponto 2.2., ou seja,

$$\begin{aligned} G_1(x) &\leq M y_1 \\ G_2(x) &\leq M y_2 \\ &\dots \\ G_m(x) &\leq M y_m \end{aligned}$$

e para garantir que apenas k restrições têm de ser satisfeitas acrescenta-se a condição

$$\sum_{j=1}^m y_j = m - k .$$

2.4. FUNÇÕES COM N VALORES POSSÍVEIS

Habitualmente as restrições apenas têm um valor para o termo independente. Se houver N valores possíveis para o termo independente, essa restrição pode ser escrita com recurso a N variáveis binárias, como se pode ver no seguinte exemplo:

$$\text{Restrição } j: \sum_j a_{ij} x_j = b_{i1} \text{ ou } b_{i2} \text{ ou } \dots b_{iN}$$

Definem-se as variáveis binárias y_k tais que:

$$\sum_{k=1}^N y_k = 1, \text{ com cada } y_k \in \{0, 1\}$$

A restrição será então alterada para $\sum_j a_{ij} x_j = \sum_{k=1}^N b_{ik} \cdot y_k$

2.5. RESTRIÇÕES CONDICIONADAS

Suponhamos que a restrição 1 só se pode verificar se a restrição 2 se verificar, ou seja, restrição 1 $\Rightarrow$ restrição 2. Esta situação é facilmente resolvida se lembrarmos que uma implicação pode ser sempre representada por uma disjunção,

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$$

pelo que [restrição 1 $\Rightarrow$ restrição 2] é equivalente a [não-restrição 1 **ou** restrição 2]. Trata-se então de exprimir restrições mutuamente exclusivas, conforme foi já visto no ponto 2.1.

2.6. REPRESENTAÇÃO DE CUSTOS FIXOS

Outra situação que pode ser expressa através de variáveis binárias é a representação de custos fixos. Suponhamos que o custo de produção de um certo produto tem duas componentes: um custo fixo (independente da quantidade produzida) e um custo variável que é proporcional à quantidade fabricada. Trata-se de uma situação diferente da habitual, na qual o custo fixo é incorrido mesmo que não haja produção; aqui, se não houver produção o custo é zero (em inglês é chamado de “fixed charge” para o distinguir de “fixed cost”). Como exemplo podemos considerar a situação em que o custo fixo corresponde ao custo de preparação das máquinas, que não depende da quantidade que vai ser fabricada mas só é incorrido se houver produção.

Suponhamos que a quantidade a fabricar é representada pela variável x . Definimos a variável binária

$$y = \begin{cases} 1, & \text{se houver produção } (x > 0) \\ 0, & \text{se não houver produção } (x = 0) \end{cases}$$

pelo que a função custo se escreverá

$$CT = (C_M + C_P x) y, \text{ ou } CT = C_M y + C_P x = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = 0 \\ C_M + C_P x & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

É necessário acrescentar uma restrição para garantir que quando $x > 0$ então $y = 1$ e que quando $y = 0$ então $x = 0$:

$$x \leq M y, \text{ com } M \text{ muito grande}$$

A própria natureza da função objectivo faz com que se $x = 0$ então $y = 0$, uma vez que se pretende minimizar o custo.

2.7. MÁXIMO DE N VARIÁVEIS

O máximo de N variáveis, $X_{\max} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ pode ser expresso recorrendo-se a N variáveis binárias. Definem-se as variáveis binárias y_k , $k=1, \dots, N$, tais que:

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{se } X_k \text{ é máximo} \\ 0, & \text{se } X_k \text{ não é máximo} \end{cases}$$

e acrescenta-se a condição

$$\sum_{k=1}^N y_k = 1, \text{ com cada } y_k \in \{0, 1\}$$

que garante que $X_{\max}$ apenas assume um valor. As restrições seguintes

$$\begin{aligned} (1) \quad X_{\max} &\geq X_k \\ (2) \quad X_{\max} &\leq X_k + M(1 - y_k) \end{aligned} \quad \forall_{k=1..N}$$

garantem que $X_{\max}$ virá igual ao máximo das variáveis consideradas.

3. ALGUNS PROBLEMAS TÍPICOS DE PI

3.1. PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

O Problema de Afectação (em inglês, Assignment Problem) é conhecido por este nome por ser a representação de inúmeras situações em que é necessário afectar pessoas a lugares, a tarefas ou a zonas de trabalho, máquinas a tarefas, etc. Aparece muitas vezes como se tratasse de um problema de PL mas, como veremos, as suas variáveis de decisão são binárias.

Suponhamos que se pretende afectar n indivíduos a n tarefas, sabendo que a medida de eficiência de afectar o indivíduo i à tarefa j é c_{ij} (que tanto pode representar um lucro como um custo). Pretende-se determinar a afectação dos indivíduos às tarefas de modo a optimizar a eficiência total.

As variáveis de decisão são as seguintes:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo } i \text{ for afectado à tarefa } j \\ 0, & \text{se o indivíduo } i \text{ não for afectado à tarefa } j \end{cases}$$
$$i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n$$

O modelo de PLI é como se segue :

$$\min \text{ ou } \max \left(\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot X_{ij} \right) \rightarrow \text{ otimizar a eficiência total}$$

sujeito a:

1. cada indivíduo só pode estar afectado a uma tarefa:

$$\sum_j X_{ij} = 1, \quad \forall i: i=1,2,3,4$$

2. cada tarefa só deve ser desempenhada por um indivíduo:

$$\sum_i X_{ij} = 1, \quad \forall j: j=A, B, C, D$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}$$

Trata-se, como se pode ver, de um modelo muito simples e cujo sistema de restrições tem uma estrutura particular com certas propriedades. Situações em que o número de indivíduos é diferente do número de tarefas podem também ser representadas.

Um problema que seja representado por um modelo com esta estrutura chama-se problema de afectação, independentemente da situação que estiver a ser considerada. Conforme veremos mais adiante, os problemas de afectação dispõem de um método de resolução próprio graças à sua estrutura especial.

3.2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O Problema do Caixeiro Viajante (em inglês, Traveling Salesman Problem) é outro tipo de problema que pode ser representado por um modelo de PLI. Este problema é facilmente visto numa rede, em que as cidades correspondem aos nós ou vértices e os arcos representam as ligações entre as cidades. Consiste em encontrar um circuito que liga todas as cidades, ou seja, um conjunto de arcos que, partindo de um determinado vértice, passa por todos os outros uma e uma só vez e termina no vértice de partida. Conhecendo-se a distância ou o custo entre cada par de cidades (vértices), pretende-se determinar o circuito óptimo.

As variáveis de decisão são as seguintes:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a cidade } j \text{ é visitada imediatamente após a cidade } i \\ 0, & \text{se a cidade } j \text{ não é visitada imediatamente após a cidade } i \end{cases}$$

$$i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n$$

O modelo de PLI é como se segue:

$$\min \left(\sum_i^n \sum_j^n d_{ij} \cdot X_{ij} \right) \rightarrow \text{minimizar o percurso total}$$

suj. a:

- (1) cada uma das cidades é visitada uma e só uma vez, ou seja, cada vértice é entrado uma só vez e saído uma só vez:

$$\sum_j^n X_{ij} = 1, \quad \forall i: i=1, \dots, n$$

$$\sum_i^n X_{ij} = 1, \quad \forall j: j=1, \dots, n$$

- (2) entre dois quaisquer subconjuntos complementares de cidades (S e $\bar{S}$) há pelo menos um arco de ligação:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} X_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset \text{conjunto total das cidades a visitar}$$

As restrições (1) não garantem por si só que a solução resultante seja um circuito, podem ser 2 ou mais sub-circuitos como se vê na Figura 3.1. Por isso são necessárias as restrições (2), que garantem que a solução é do tipo da da Figura 3.2.

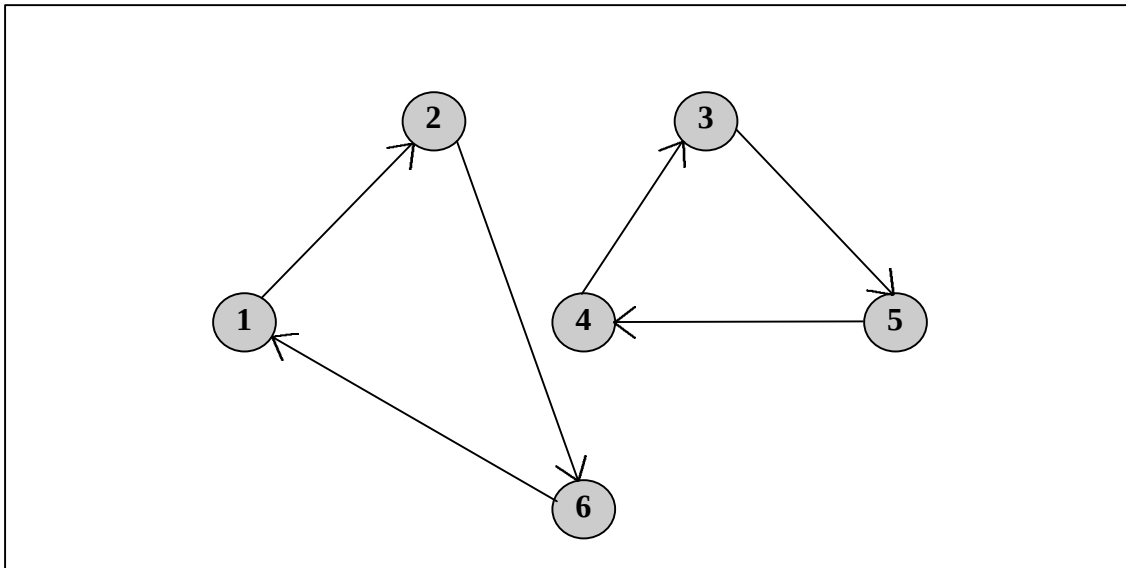


Figura 3.1 - Caso em que as restrições (1) são satisfeitas ($X_{12} = X_{26} = X_{61} = 1$; $X_{43} = X_{35} = X_{54} = 1$) mas não existe um circuito que ligue as seis cidades

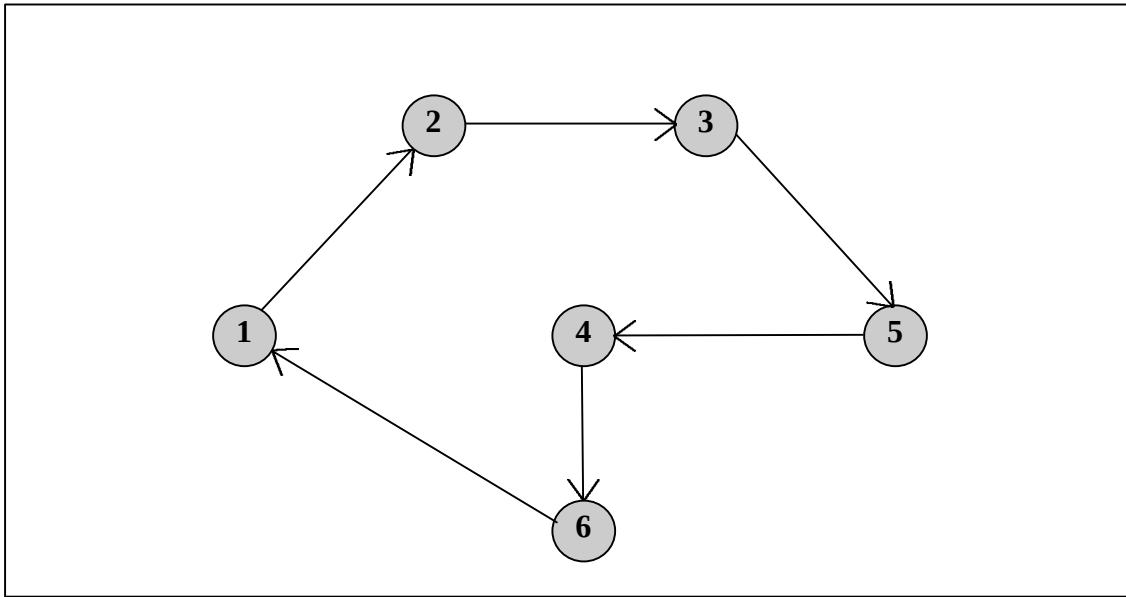


Figura 3.2 - As restrições (1) são satisfeitas ($X_{12}=X_{23}=X_{35}=X_{54}=X_{46}=X_{61}=1$) e as restrições (2) são satisfeitas (qualquer subconjunto que se tome tem ligação com o seu complementar, por exemplo: $\{1,2,3\}$ e $\{4,5,6\}$). Assim, tem-se a garantia de se obter um circuito que liga os seis vértices.

Repare-se que o modelo apresentado corresponderia a um problema de afectação se não fossem as restrições (2), cuja função é evitar o aparecimento de sub-circuitos. O problema do caixeiro viajante constitui um problema de difícil resolução, para o qual foram propostos vários métodos heurísticos (que não garantem a obtenção da solução óptima).

3.3. PROBLEMA DA MOCHILA

Outro problema típico de PLI é o Problema da Mochila (Knapsack Problem em inglês). A situação representada por este problema é a seguinte: um alpinista dispõe de uma mochila e de diversos objectos que podem ser “carregados” na mochila; para cada objecto é conhecido o seu peso (p_i) e o benefício que dele se tira (v_i). Conhecida a capacidade da mochila em termos de peso máximo, quais os objectos, dos n existentes, que devem ser escolhidos para colocar na mochila?

Repare-se que o problema seria extremamente simples de resolver, não fora a condição de as variáveis apenas poderem assumir os valores 0 (objecto não escolhido) ou 1 (objecto escolhido). Na realidade as variáveis de decisão são as seguintes:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objecto } i \text{ for escolhido} \\ 0, & \text{se o objecto } i \text{ não for escolhido} \end{cases}$$

$i=1, \dots, n$

e o modelo de PLI é:

$$\max \left(\sum_{i=1}^n v_i \cdot X_i \right) \rightarrow \text{maximizar o proveito global}$$

suj. a:

$$\text{não se ultrapassar o peso máximo: } \sum_{i=1}^n p_i \cdot X_i \leq P_{\max}$$

$$X_i \in \{0, 1\}$$

À semelhança do que acontecia com o problema de afectação, é a sua estrutura e não a situação representada que caracterizam o problema da mochila.

3.4. PROBLEMA DA COBERTURA E DA PARTIÇÃO DE CONJUNTOS

Estes problemas caracterizam-se também pela estrutura das restrições, sendo conhecidos em inglês por Set Covering e por Set Partitioning Problems. A sua apresentação será mais facilmente feita através de um exemplo.

Suponhamos que se pretendem instalar armazéns para fornecer m clientes, existindo n locais possíveis para instalar os armazéns. Conhecido o custo de instalação de cada armazém, quais os locais que devem ser escolhidos por forma a que todos os clientes sejam servidos e o custo total de instalação seja mínimo?

As variáveis de decisão são as seguintes:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{se o local } j \text{ é escolhido para a instalação de um armazém} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

$$j=1, \dots, n$$

Se se admitir que um qualquer cliente pode ser servido por mais do que um armazém, estamos perante um problema de cobertura do conjunto dos clientes e o modelo é:

$$\min \left(\sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \right) \rightarrow \text{minimizar o custo total de instalação}$$

suj. a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \geq 1, \quad \forall_{\text{cliente } i} \rightarrow \text{cada cliente servido por, pelo menos, um armazém}$$

$$X_i \in \{0, 1\}$$

em que:

c_j = custo de instalação de um armazém no local j

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o local } j \text{ pode servir o cliente } i \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

$$i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$$

Se se admitir que um qualquer cliente apenas pode ser servido por um armazém, estamos perante um problema de partição do conjunto dos clientes e o modelo é praticamente igual ao anterior, passando as restrições a ser escritas da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = 1, \forall_{\text{cliente } i} \rightarrow \text{cada cliente servido por um e só um armazém}$$

3.5. PROBLEMA DE SELECÇÃO DE PROJECTOS

Outro problema típico de PLI é o problema de selecção de projectos de investimento. Se se admitir que os projectos são perfeitamente divisíveis, o problema pode ser representado por um modelo de PL; se pelo contrário, se supuser que os projectos são indivisíveis, então as variáveis de decisão são binárias (o projecto ou é escolhido ou é rejeitado) e o modelo será de PLI.

A descrição do problema é a seguinte: que projectos escolher, de entre n possíveis, de forma a maximizar o proveito global e não ultrapassando os fundos disponíveis em cada período? Para cada projecto são conhecidos os fundos requeridos em cada período e o proveito resultante da sua escolha.

As variáveis de decisão são as seguintes:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o projecto } i \text{ for aprovado} \\ 0, & \text{se o projecto } i \text{ não for aprovado} \end{cases}$$

$$i=1, \dots, m$$

O modelo de PLI é como se segue:

$$\max \left(\sum_i p_i \cdot X_i \right) \rightarrow \text{maximizar o proveito global}$$

suj. a:

$$\text{não se ultrapassam os fundos disponíveis: } \sum_i C_{it} \cdot X_i \leq d_t, \quad \forall t: t=1, \dots, n$$

$$X_i \in \{0, 1\}$$

em que:

C_{it} = orçamento para o projecto i no período t

d_t = fundos disponíveis no período t para gastar nos vários projectos

p_i = proveito resultante da aprovação do projecto i

O modelo é muito simples, mas permite introduzir com facilidade restrições que reflectam a situação de projectos mutuamente exclusivos e de projectos condicionados. Mais difícil, mas também possível, é a situação de projectos com cash-flows condicionados que pode ser representada recorrendo a variáveis binárias auxiliares (que representem projectos fictícios).

3.6. PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

O Problema de Localização será também apresentado através de um exemplo. Pretendem-se instalar armazéns fornecedores para servir m clientes, que podem não ser integralmente abastecidos pelo mesmo armazém; dos n locais possíveis para os instalar, quais devem ser escolhidos de forma a que o custo total de instalação e de abastecimento seja mínimo?

As variáveis de decisão são as seguintes:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{se o local } j \text{ é escolhido para a instalação de um armazém} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

$$i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$$

Y_{ij} = fracção da procura do cliente i satisfeita pelo local j (var. real)

e o modelo de PLI é como se segue:

$$\min \left(\sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m h_{ij} \cdot Y_{ij} \right) \rightarrow \text{minimizar o custo total}$$

suj. a:

$$\sum_{j=1}^m Y_{ij} = 1, \forall \text{ cliente } i \quad \text{a procura do cliente } i \text{ deve ser satisfeita}$$

$$Y_{ij} \leq X_j$$

$$X_i \in \{0, 1\}$$

em que:

- c_j = custo de instalação de um armazém no local j
- h_{ij} = custo de satisfazer a procura total de i a partir de j

Uma variante deste problema considera quantidades transportadas em vez de fracção da procura satisfeita, combinando o problema de localização dos armazéns ou das fábricas com o problema de transportes.

4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

4.1. GENERALIDADES

Poderia parecer à primeira vista que os problemas de PLI são relativamente fáceis de resolver: os problemas de PL são resolvidos de forma extremamente eficiente e, entre os problemas de PL e de PLI, a única diferença é haver, no caso da PLI, muito menos soluções a serem consideradas (soluções inteiras e não reais). Acontece mesmo que os problemas de PLIP cujo conjunto das soluções possíveis seja fechado têm um número finito de soluções possíveis.

Nada mais falso! A verdade é que a simples introdução das restrições de integralidade das variáveis num problema de PL, transforma-o num problema de características diferentes, ao qual não podem aplicadas as técnicas de resolução de PL mas sim técnicas necessariamente específicas. Remover as soluções possíveis não-inteiras de um problema de PL vem *dificultar a resolução do problema*, pois era a existência dessas soluções que garantia a existência das soluções básicas (pontos extremos do conjunto das soluções possíveis) e garantia, assim, a simplicidade e eficiência do Método Simplex.

Quando um problema de PLI tem um número finito de soluções possíveis, pode surgir (erradamente) a ideia da enumeração exaustiva como abordagem simples e eficiente para a determinação da solução óptima: é que um número finito não é necessariamente um número pequeno! De facto, e ao contrário do que acontece com os problemas de PL, quanto maior for o conjunto das soluções possíveis, maior a dificuldade de resolução: o número de soluções possíveis pode facilmente tornar-se demasiado grande (dezenas de milhar, por exemplo), inviabilizando do ponto de vista computacional a sua enumeração exaustiva. Torna-se portanto necessário usar métodos que examinem apenas uma parte do conjunto de soluções possíveis.

Por outro lado, também é ineficaz uma outra abordagem comum, o arredondamento das soluções obtidas por relaxação (i.e., as soluções do modelo de PL correspondente). Apesar da sua simplicidade aparente, esta técnica não é recomendável por três ordens de razões:

- 1ª) O trabalho envolvido pode ser muito grande, pois o número de soluções arredondadas pode ser muito elevado; para cada solução arredondada é necessário verificar se se trata de uma solução possível e, em caso afirmativo, calcular o valor correspondente da função objectivo; só desta maneira se encontrará a melhor de todas as soluções arredondadas. Suponhamos um modelo de PLIP com 10 variáveis inteiras, cuja solução obtida por relaxação dá origem a 10 valores não inteiros; cada variável pode ser arredondada por defeito ou por excesso, pelo que haverá $2^{10}=1024$ soluções arredondadas!

- 2ª) A solução óptima do problema de PL após o arredondamento pode não ser admissível para o modelo de PLI (embora o modelo de PLI tenha soluções). Considere-se o seguinte modelo cuja representação gráfica se encontra na Figura 4.1:

$$\begin{aligned} \max \quad & F = 11x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & 2.75x_1 + 10x_2 \leq 21 \\ & -2x_1 + 6x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiras} \end{aligned}$$

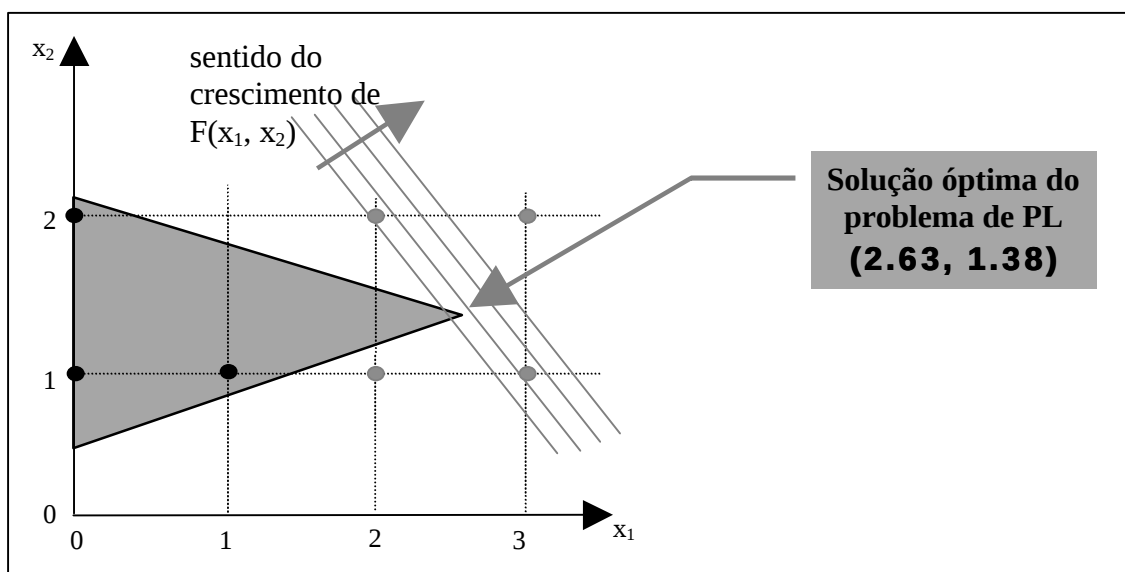


Figura 4.1 - Nenhuma das quatro soluções obtidas por arredondamento é possível

- 3ª) A solução inteira (resultante do arredondamento da solução óptima do problema de PL) pode estar relativamente “afastada” da solução óptima do problema de PLI (sendo o “afastamento” medido em termos da função objetivo). Considere-se o seguinte modelo cuja representação gráfica está na Figura 4.2:

$$\begin{aligned} \max \quad & F = 35x_1 + 70x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & 3x_1 + 7x_2 \leq 17 \\ & 14x_1 - 11x_2 \leq 18.2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiras} \end{aligned}$$

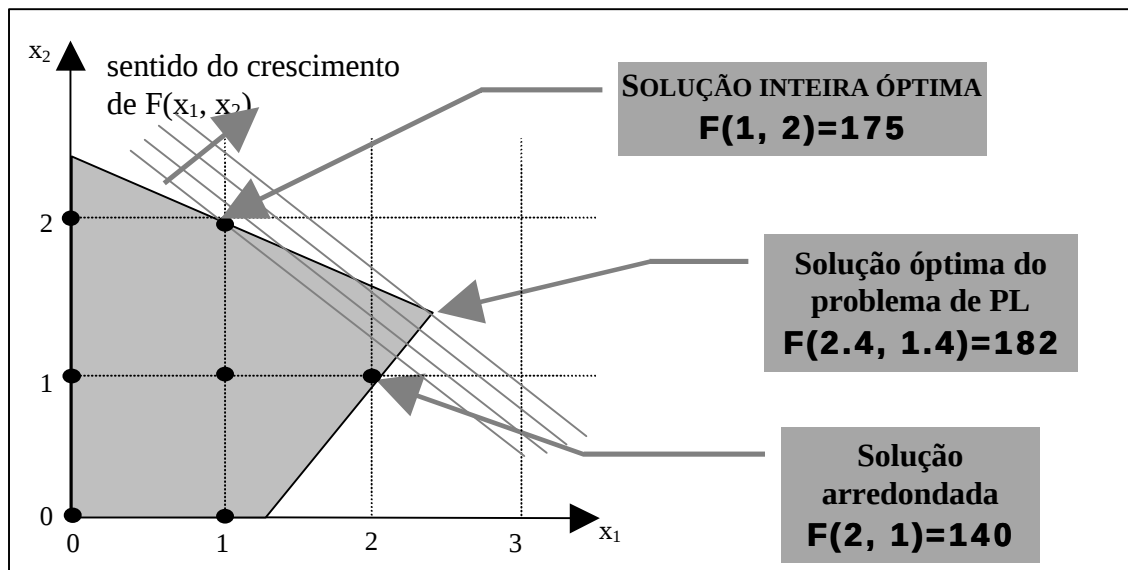


Figura 4.2 - A solução inteira (obtida por arredondamento) não é a solução ótima do problema de PLI

Conclui-se assim pela necessidade de métodos que examinem apenas uma parte do conjunto de soluções admissíveis e que aproveitem as vantagens do algoritmo Simplex. Exactamente com estas características, existem dois métodos: o Método dos Planos de Cortes (Cutting Planes) e o Método de Partição e Avaliação Sucessivas (Branch and Bound). De facto, ambos utilizam o algoritmo Simplex para chegar à solução ótima de problemas de PL cuja região admissível vai sendo sucessivamente reduzida até se alcançar a solução do problema de PLI. Estes métodos são gerais, pois podem ser aplicados a qualquer modelo de PLI.

Existem também métodos específicos, que apenas permitem resolver o tipo de problemas para os quais foram concebidos. É o caso, por exemplo, do Método Húngaro para o Problema de Afectação. Este método tira partido da estrutura especial do problema, sendo por isso mais eficiente que os métodos gerais.

Finalmente, existem também métodos heurísticos para certos tipos de problemas. Estes algoritmos são bastante eficientes para certos problemas muito difíceis de resolver, embora a solução por eles encontrada não seja garantidamente ótima. Existem, por exemplo, várias heurísticas para o Problema do Caixeiro Viajante. Hoje em dia, graças aos avanços da tecnologia informática e a um continuado esforço de melhoria de eficiência dos algoritmos, é possível resolver de forma ótima problemas cada vez maiores.

4.2. MÉTODO DOS PLANOS DE CORTE

O método dos Planos de Corte (Cutting Planes, em inglês) foi o primeiro método a ser desenvolvido e deve-se a Gomory (1958). Consiste em introduzir sucessivamente novas restrições na relaxação linear do PLI, restrições essas que cortam o conjunto das soluções possíveis eliminando algumas delas e a própria solução ótima do PL (por isso se chamam planos de corte), sem contudo eliminar qualquer solução inteira.

Consideremos o seguinte exemplo. António, proprietário da empresa de brinquedos “Toys ’r’ Tony”, decidiu criar uma secção de brinquedos tradicionais de madeira, começando por apenas dois tipos de brinquedos: pequenos cavalos de baloiço (lucro unitário de 2400\$) e comboios antigos (lucro unitário de 1500\$). Cada cavalo requer uma hora de trabalho e 9 m² de madeira, enquanto que cada comboio requer uma hora de trabalho e 5 m² de madeira. Supondo que estão disponíveis 6 horas de trabalho e 45 m² de madeira, que quantidades fabricar de forma a maximizar o lucro?

Variáveis de Decisão:

x_1 = número de cavalos de baloiço fabricados

x_2 = número de comboios fabricados

O problema (de PI) será:

$$\max F = 2400 x_1 + 1500 x_2$$

subj. a:

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{horas de trabalho})$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{madeira})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

O primeiro passo consiste na resolução da relaxação linear do PLI, que corresponde ao quadro simplex da Figura 4.3 e à representação gráfica da Figura 4.4:

	x_1	x_2	f_1	f_2	
x_1	1	0	-1.25	0.25	3.75
x_2	0	1	2.25	-0.25	2.25
$-F$	0	0	375	0.75	-12375

Figura 4.3 - Quadro SIMPLEX óptimo para a relaxação linear do problema de PLI

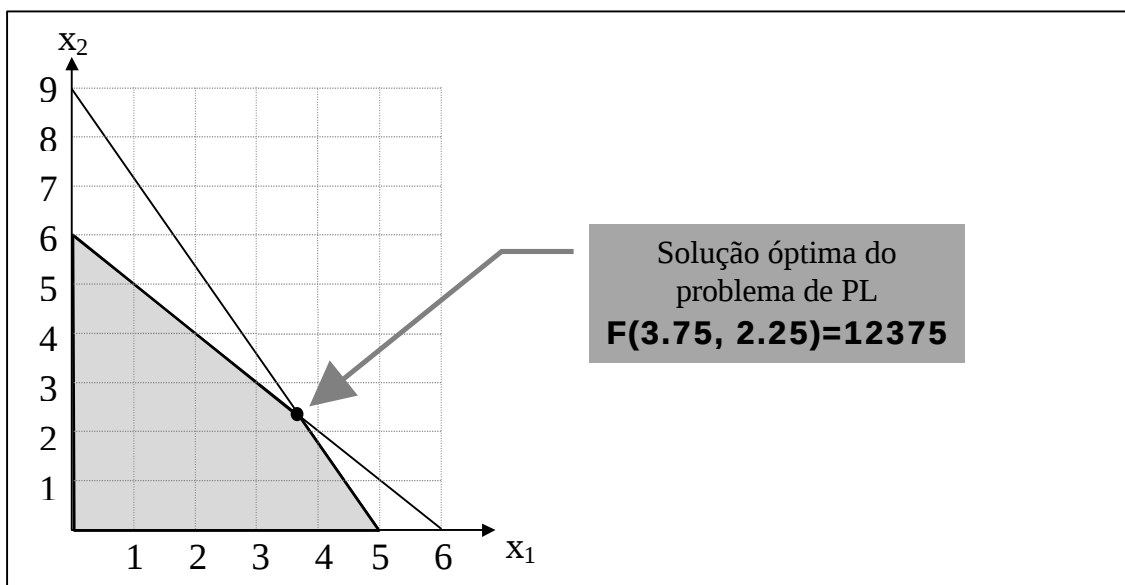


Figura 4.4 - Resolução da relaxação linear do problema de PLI

Como na solução óptima da relaxação linear os valores das variáveis não são inteiros, há que gerar um plano de corte. Para tal, basta considerar a restrição do quadro simplex óptimo da relaxação linear cujo termo independente tenha a parte fraccionária mais próxima de 0.5, e reescrever essa restrição separando a parte inteira da parte fraccionária. No exemplo considerado, qualquer das restrições pode ser considerada, uma vez que as partes fraccionárias de 3.75 e de 2.25 se encontram igualmente próximas de 0.5. Escolhendo a primeira restrição $x_1 - 1.25f_1 + 0.25f_2 = 3.75$ e reescrevendo-a sob a forma [membro com coeficientes inteiros = membro com coeficientes fraccionários] fica-se com $x_1 - 2f_1 - 3 = 0.75 - 0.75f_1 - 0.25f_2$. O novo plano de corte a acrescentar ao modelo traduz a restrição *membro com coeficientes fraccionários* ≤ 0 , ou seja,

$$0.75 - 0.75 f_1 - 0.25 f_2 \leq 0$$

$\Updownarrow$ (pela definição das variáveis de folga, $f_1 = 6 - x_1 - x_2$ e $f_2 = 45 - 9x_1 - 5x_2$)

$$3 x_1 + 2 x_2 \leq 15$$

O novo modelo de PL a resolver é então

$$\begin{aligned} \max F &= 2400 x_1 + 1500 x_2 \\ \text{sujeito a:} \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \quad (\text{horas de trabalho}) \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \quad (\text{madeira}) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 15 \quad (\text{plano de corte}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como se pode analisar na Figura 4.5 a nova restrição “cortou” o conjunto das soluções possíveis, eliminando a solução óptima da relaxação linear, mas não eliminando qualquer solução inteira. Como a solução óptima deste novo modelo de PL é inteira, ela é a solução óptima do PLI. Se a solução encontrada ainda não fosse inteira, gerar-se-ia novo corte, e assim sucessivamente.

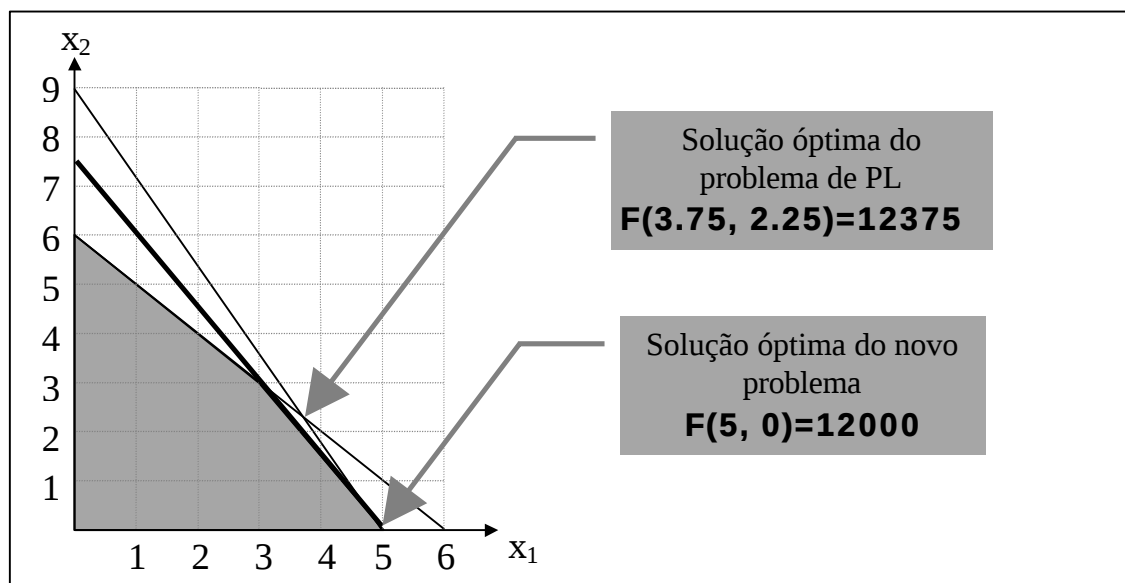


Figura 4.5 - Aplicação do plano de corte: a resolução do novo problema de PL conduz à solução óptima do problema de PLI inicial (5, 0)

Qualquer corte gerado por este método tem, então, duas propriedades:

- 1ª) Qualquer solução possível do PLI satisfaz o corte.
- 2ª) A solução ótima da relaxação linear não satisfaz o corte.

Demonstra-se (Gomory, 1958) que se atinge a solução ótima do PLI após um número finito de cortes. Apesar desta propriedade o método dos planos de corte caiu em desuso, sendo muito pouco utilizado devido ao trabalho computacional envolvido na resolução de problemas de grandes dimensões. Embora o número de cortes seja finito, o seu número pode ser muito elevado (centenas ou milhares); de cada vez que se gera um novo corte acrescenta-se uma nova restrição ao modelo original, o que significa que a complexidade desse modelo é sempre crescente, podendo o trabalho computacional vir a tornar-se proibitivo apesar de se dispor de um algoritmo de resolução muito eficiente como é o simplex. Outra desvantagem deste método (quando comparado com o método de partição e avaliação sucessivas) é que se se interromper o método antes de ele chegar ao fim não se dispõe de qualquer solução inteira, ainda que não seja ótima.

4.3. MÉTODO DE PARTIÇÃO E AVALIAÇÃO SUCESSIVAS

O método “Branch and Bound” (literalmente, método de ramificação e limitação) consiste na partição (ramificação) sucessiva do conjunto de soluções possíveis do problema de PLI em subconjuntos e na limitação (avaliação) do valor ótimo da função objectivo (limite inferior se se tratar de maximização, ou superior se se tratar de minimização), de modo a excluir os subconjuntos que não contenham a solução ótima.

Partindo da constatação de que

se, na solução ótima da relaxação linear dum problema de PLI, as variáveis tomam valores inteiros, então essa solução é a solução ótima do PLI,

começa-se por resolver a relaxação linear do PLI inicial: se as variáveis que no problema de PLI são inteiras tomam, na solução ótima do PL, valores inteiros, então foi encontrada a solução ótima do PLI; caso contrário, divide-se o problema de PL em dois, através da introdução de restrições adicionais que fazem a partição do conjunto das soluções possíveis. Vão-se então resolvendo sucessivos problemas de PL, estabelecendo-se limites para o valor ótimo da função objectivo e, assim, eliminando diversos sub-conjuntos, até se alcançar a solução ótima do PLI.

Ilustra-se seguidamente este método retomando o exemplo já usado anteriormente, no qual António, proprietário da empresa de brinquedos “Toys ’r’ Tony”, decidia criar uma secção de brinquedos tradicionais de madeira, começando por pequenos cavalos de baloiço e comboios antigos. As variáveis e o modelo, atrás definidos, eram os seguintes:

Variáveis de Decisão:

- x_1 = número de cavalos de baloiço fabricados
- x_2 = número de comboios fabricados

$$\begin{aligned}
 \max F &= 2400 x_1 + 1500 x_2 \\
 \text{su. a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{horas de trabalho}) \\
 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{madeira}) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
 \end{aligned}$$

O primeiro passo consiste na resolução da relaxação linear do PLI, o que foi feito graficamente na Figura 4.6:

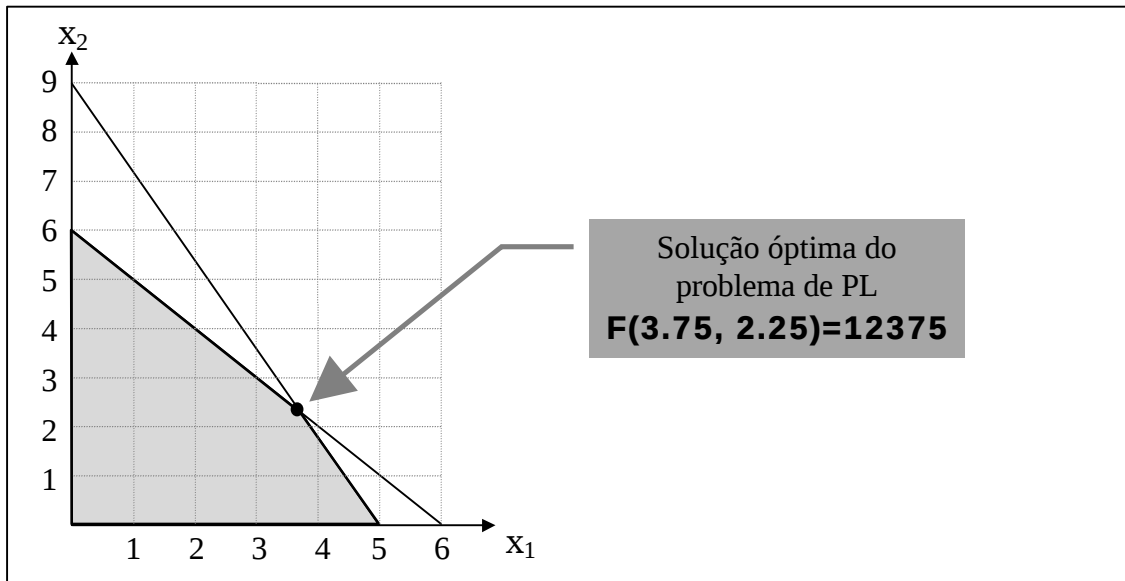


Figura 4.6 - Resolução da relaxação linear do problema PLI

Desde já se sabe que o valor óptimo da função objectivo não pode exceder 12375. Como na solução óptima deste problema x_1 e x_2 não são inteiras, há a necessidade de efectuar a sua partição, dando origem a dois novos subproblemas (A e B), pela introdução de novas restrições de eliminação de soluções não-inteiras: $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$ (Figura 4.7). Poder-se-ia escolher fazer a partição segundo a variável x_2 .

$$\begin{aligned}
 \textbf{A:} \quad \max F &= 2400 x_1 + 1500 x_2 \\
 \text{su. a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{horas de trabalho}) \\
 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{madeira}) \\
 & x_1 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{B:} \quad \max F &= 2400 x_1 + 1500 x_2 \\
 \text{su. a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{horas de trabalho}) \\
 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{madeira}) \\
 & x_1 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

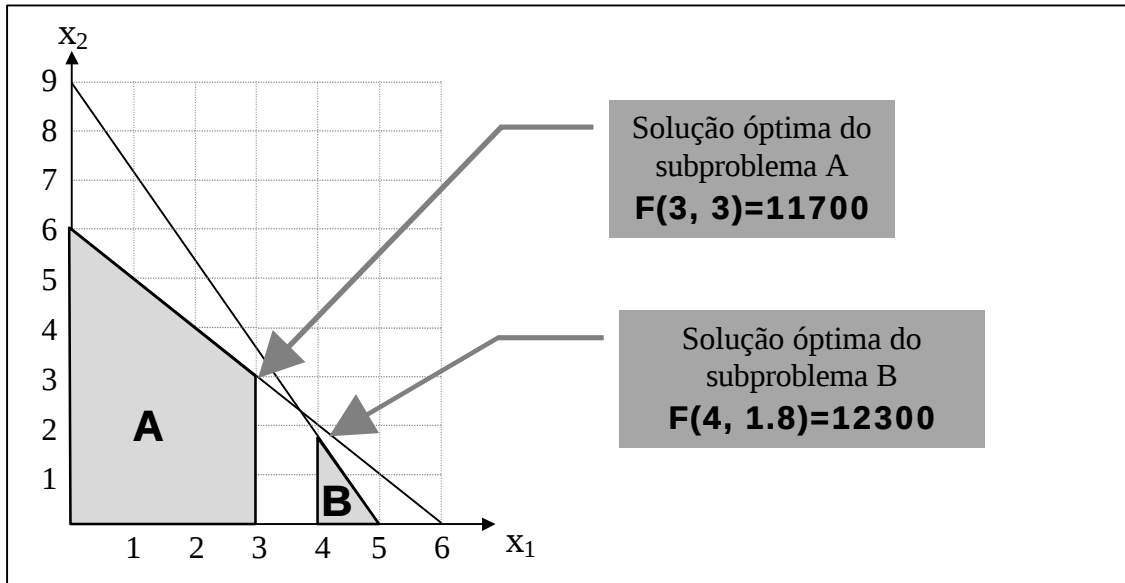


Figura 4.7 - Primeira partição: introduzindo, no problema de PL inicial, a restrição $x_1 \leq 3$ obtém-se o subproblema A (cuja solução óptima é inteira) e introduzindo a restrição $x_1 \geq 4$ obtém-se o subproblema B (cuja solução óptima ainda não é inteira, pelo que se tem de continuar a partição).

A solução óptima do subproblema A é inteira, o que significa que se encontrou uma solução inteira cujo valor da função objectivo é 11700. O valor óptimo da função objectivo estará compreendido entre estes dois limites, $11700 \leq F \leq 12375$. Como a solução óptima do subproblema B não é inteira e o valor da função objectivo é 12300 (>11700), este subproblema pode conter uma solução inteira melhor que a do subproblema A; logo, é necessário efectuar a sua partição, dando origem aos subproblemas B_1 e B_2 , pela introdução das restrições $x_2 \geq 2$ e $x_2 \leq 1$ (Figura 4.8).

Os novos subproblemas são da forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B_1:} \quad & \max F = 2400 x_1 + 1500 x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{(horas de trabalho)} \\
 & \quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad \text{(madeira)} \\
 & \quad x_1 \geq 4 \\
 & \quad x_2 \geq 2 \\
 & \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B_2:} \quad & \max F = 2400 x_1 + 1500 x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{(horas de trabalho)} \\
 & \quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad \text{(madeira)} \\
 & \quad x_1 \geq 4 \\
 & \quad x_2 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

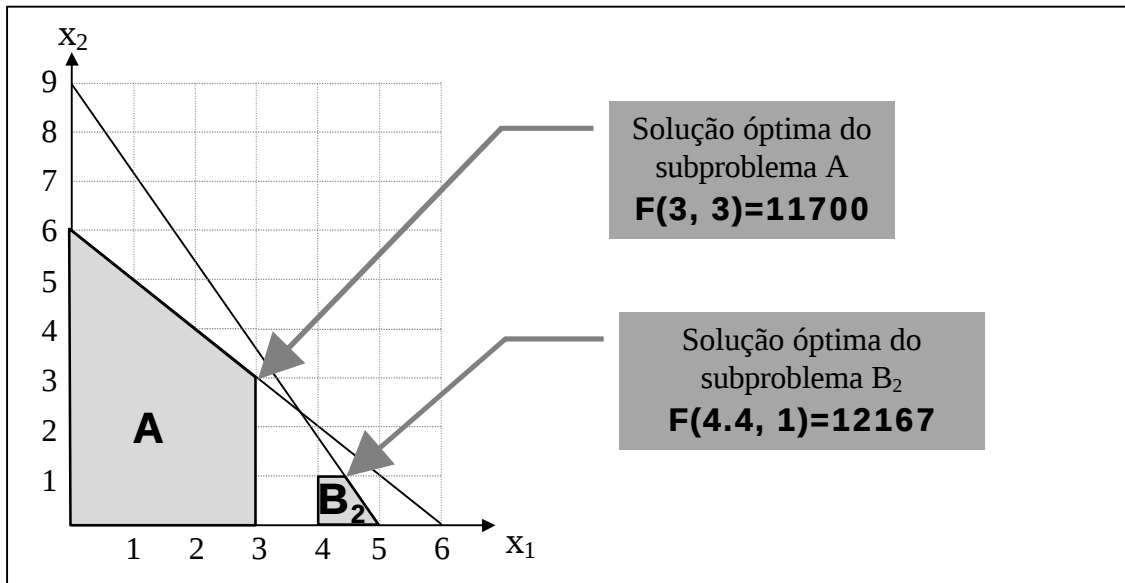


Figura 4.8 - Segunda partição: introduzindo, no subproblema B, a restrição $x_2 \geq 2$ ficamos com o subproblema B_1 (solução impossível) e introduzindo a restrição $x_2 \leq 1$ ficamos com o subproblema B_2 (solução ainda não é inteira, pelo que se tem de continuar a partição).

O subproblema B_1 não tem soluções possíveis, sendo por isso excluído. O subproblema B_2 , pelas mesmas razões do subproblema B, é objecto de partição e dá origem aos subproblemas B_{21} e B_{22} , pela introdução das restrições $x_1 \leq 4$ e $x_1 \geq 5$ (Figura 4.9):

B_{21} : $\max F = 2400 x_1 + 1500 x_2$
 suj. a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 && \text{(horas de trabalho)} \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 && \text{(madeira)} \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = 4}$$

B_{22} : $\max F = 2400 x_1 + 1500 x_2$
 suj. a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 && \text{(horas de trabalho)} \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 && \text{(madeira)} \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 \geq 5}$$

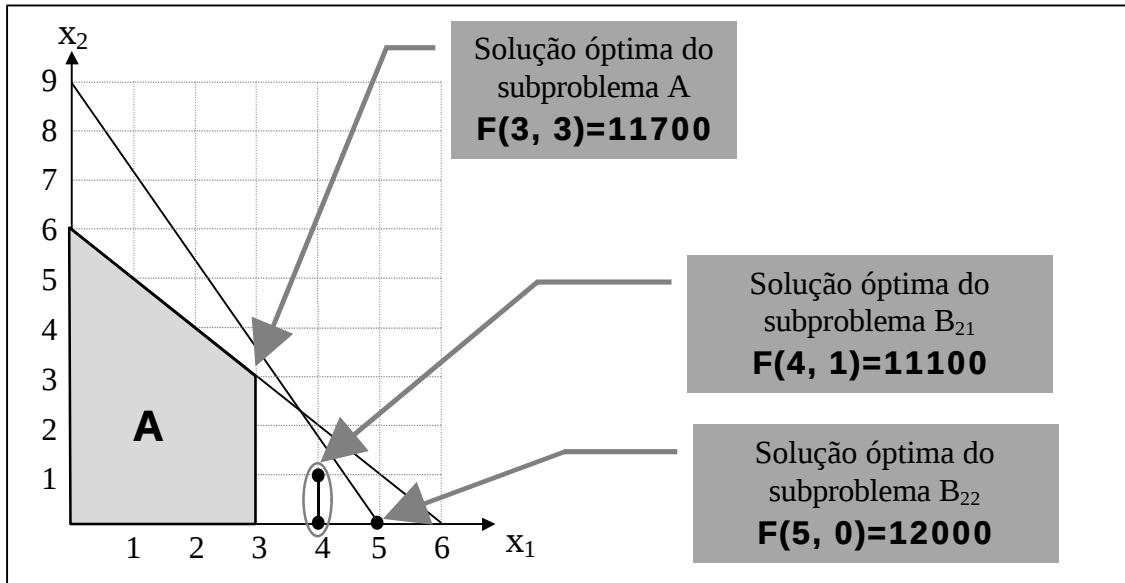


Figura 4.9 - Terceira partição: introduzindo, no subproblema B_2 , a restrição $x_1 \geq 5$ ficamos com o subproblema B_{21} e introduzindo a restrição $x_1 \leq 4$ ficamos com o subproblema B_{22} : todas as soluções são já inteiras, não havendo a necessidade de efectuar mais nenhuma partição. A solução óptima do problema de PLI é $(x_1, x_2) = (5, 0)$.

Quer o subproblema B_{21} quer o subproblema B_{22} têm soluções inteiras. O valor óptimo da função objectivo do subproblema B_{21} é 11100, menor que 11700, ou seja, pior do que a solução de que já dispúnhamos. O valor óptimo da função objectivo do subproblema B_{22} é 12000, logo actualizamos os limites e teremos $12000 \leq F \leq 12000$. A sequência total das partições é particularmente evidente no seguinte diagrama, estruturado em forma de árvore (Figura 4.10):

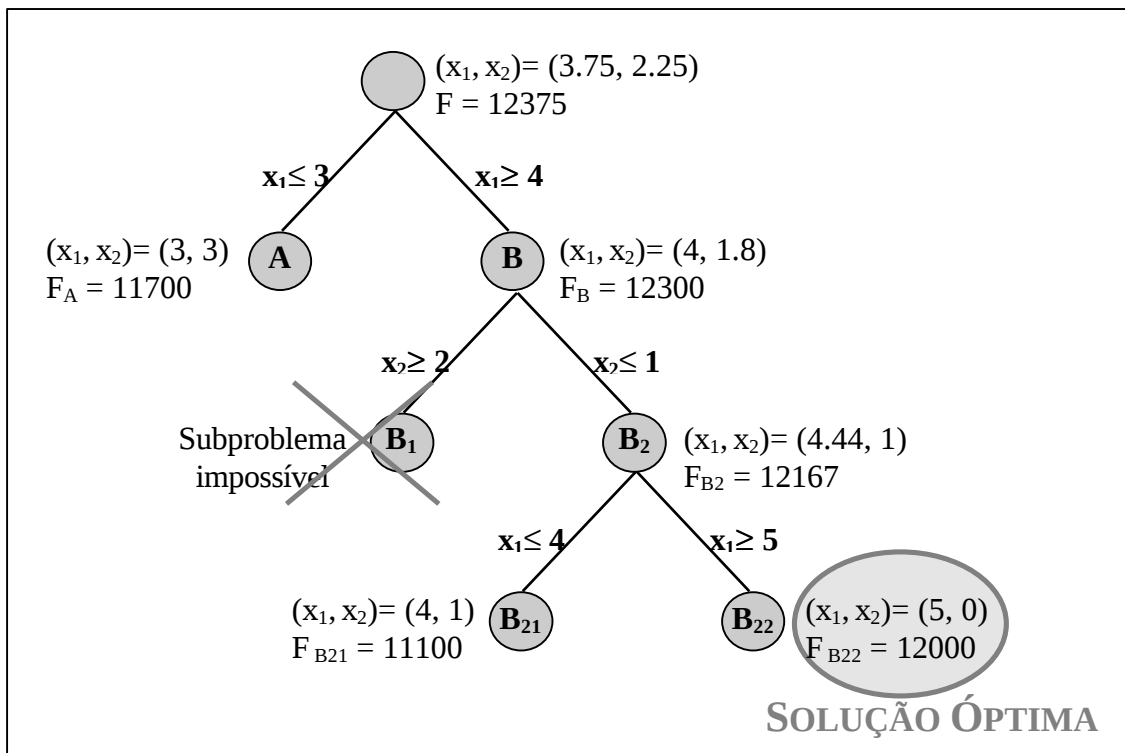


Figura 4.10 - Árvore final do método “Branch and Bound” para o exemplo apresentado

À medida que se vai “descendo” na árvore da Figura 4.10 vão-se actualizando os limites inferior e superior ao valor óptimo da função objectivo (F^*). No nó inicial (raiz da árvore), $0 \leq F^* \leq 12375$. Ao nível dos subproblemas A e B, $11700 \leq F^* \leq 12300$. No nível imediatamente inferior, $11700 \leq F^* \leq 12167$. Por fim, no quarto e último nível, $12000 \leq F^* \leq 12000$. Podemos então concluir que $(x_1, x_2) = (5, 0)$, $F^* = 12000$ é a solução óptima, não fazendo sentido efectuar qualquer nova partição.

Vemos assim que:

- (1) É efectuada a partição de um subproblema em cuja solução óptima exista pelo menos uma variável que, sendo uma variável inteira no PLI inicial, assuma valores não-inteiros, se esse subproblema puder conter uma solução inteira melhor do que a já existente.
- (2) São logo eliminados os subproblemas que não tenham soluções possíveis ou que não possam conter uma solução possível melhor do que a já existente.

Para além de ser, de um modo geral, menos trabalhoso resolver um modelo de PLI através deste método do que através do método dos planos de corte, ele apresenta a vantagem de ser possível interromper o método antes de encontrar a solução óptima e de dispor de uma solução inteira, em relação à qual se pode ter uma ideia de quão próxima estará da solução óptima graças aos limites que se vão determinando.

5. BIBLIOGRAFIA

Garfinkel, Robert S. and George L. Nemhauser (1972), *Integer Programming*, John Wiley & Sons, Inc.

Hadley, George (1974), *Linear Programming*, Eighth Printing, Addison-Wesley.

Hadley, George (1972), *Nonlinear and Dynamic Programming*, Second Printing, Addison-Wesley.

Hillier, G. and J. Lieberman (1995), *Introduction to Operations Research*, Sixth Edition, McGraw-Hill.

Ramalhete, Manuel, Jorge Guerreiro e Alípio Magalhães (1984), *Programação Linear*, Vol. I e Vol. II, Editora McGraw-Hill de Portugal.

Winston, Wayne L. (1994), *Operations Research – Applications and Algorithms*, Third Edition, Duxbury Press.

Wu, Nesa and Richard Coppins (1981), *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill.