U.PORTO

FEP FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Processos Estocásticos

Rui Alves

Catarina Delgado

Setembro de 1997

APRESENTAÇÃO

Este texto concretiza uma ideia que já tem alguns anos, mas que vinha sendo adiada devido a afazeres de diversa natureza.

Dois factos ocorridos no ano lectivo de 1996/97 foram determinantes na concretização deste projecto: (i) a adopção, nas disciplinas de Investigação Operacional de ambas as licenciaturas, de um livro (*Investigação Operacional,* de L. Valadares Tavares et al., McGraw-Hill, 1996) que, embora cobrindo a matéria de Programação Linear e de Filas de Espera, é omisso no que toca à Programação Linear Inteira e às Cadeias de Markov; (ii) a contratação da licenciada Catarina Delgado como assistente estagiária das referidas disciplinas.

O facto de os alunos disporem de elementos de estudos (no livro adoptado) sobre alguns pontos do programa tornou mais premente a conclusão destes textos com o objectivo de uma integral cobertura do programa. A disponibilidade da licenciada Catarina Delgado foi na realidade crucial (sem o seu trabalho e o seu entusiasmo creio que os textos não teriam ficado prontos), e o seu contributo justifica plenamente a co-autoria que lhe é devida, pois a ela se devem a primeira versão dos textos, todos os exemplos profusamente ilustrados, e a inclusão de uma maior variedade de problemas típicos de Programação Inteira.

Resta-nos desejar que os alunos, destinatários últimos destes trabalhos, deles possam vir a tirar o desejado proveito. Todas as críticas e sugestões são benvindas, salvaguardando que todos os erros e imprecisões que os textos possam ter são da inteira responsabilidade dos autores.

Faculdade de Economia do Porto, Setembro de 1997

Prof. Doutor Rui Alves

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

Qualquer sistema real opera sempre em ambientes onde a incerteza impera, principalmente quando o sistema envolve, pela sua natureza, acções humanas imprevisíveis ou avarias de máquinas. Os modelos determinísticos certamente contribuem para a compreensão, a um nível básico, do comportamento dinâmico de um sistema. No entanto, por não poderem lidar com a incerteza, acabam por ser insuficientes nos processos de tomada de decisão. Assim, recorre-se a Processos Estocásticos como uma forma de tratar quantitativamente estes fenómenos, aproveitando certas características de regularidade que eles apresentam para serem descritos por modelos probabilísticos.

Pode definir-se um Processo Estocástico (em inglês, “Stochastic Process” ou “Random Process”) como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente a variável tempo), sendo representado por $\{X(t), t \in T\}$. Estabelecendo o paralelismo com o caso determinístico, onde uma função f(t) toma valores bem definidos ao longo do tempo, um processo estocástico toma valores aleatórios ao longo do tempo. Aos valores que X(t) pode assumir chamam-se *estados* e ao seu conjunto $\mathcal{X}$ *espaço de estados*.

Como exemplos de processos estocásticos, poderemos considerar:

1) X(t) representa o estado de uma máquina (ligada/desligada) no momento t;
2) X(t) representa o número de clientes numa loja no instante t;
3) X(t) representa o número de máquinas avariadas no fim do dia t;
4) X(t) representa a cotação de uma acção no fim do dia t;
5) X(t) representa o nível de stock de um determinado artigo no fim do dia t;
6) X(t) representa a condição de funcionamento dum componente no instante t.

Como se pode constatar pelos exemplos apresentados, há casos em que o tempo é considerado de forma discreta (… no fim do dia t) e outros em que é tomado de modo contínuo (… no momento t). A variável tempo é, por definição, uma variável contínua, a qual pode ser “discretizada” se os fenómenos forem observados a intervalos regulares. Outra constatação que se pode fazer é que os “estados” tanto são valores que a variável X(t) pode assumir (número de clientes, número de máquinas, etc) como são estados (máquina avariada, a funcionar, etc).

1.2. CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Para classificar os processos estocásticos analisam-se (i) o espaço de estados, (ii) a natureza do conjunto T e (iii) as características estatísticas das variáveis aleatórias que definem o processo.

(i) Espaço de estados

Se $\mathcal{X}$ for um conjunto de estados finito ou contável ($\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, ou seja, o conjunto de inteiros não-negativos), X(t) é um “processo de estados discretos” ou, como é usualmente referido, uma “cadeia”. Para qualquer outro caso, o processo é designado por “processo de estados contínuos”.

Dos exemplos atrás referidos os três primeiros são cadeias, enquanto que os restantes podem ser processos de estados contínuos.

(ii) A variável temporal

Se o conjunto T, que especifica os valores da variável t, for finito ou contável, X(t) é um “processo em tempo discreto” e a notação usada é $\{X(t) , t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Neste caso, T é normalmente o conjunto dos inteiros não-negativos. Em caso contrário X(t) é designado por “processo em tempo contínuo”, sendo usada a notação $\{X(t) , t \geq 0\}$.

Dos exemplos apresentados, os exemplos 3, 4 e 5 são processos em tempo discreto uma vez que representam quantidades observadas dia a dia, enquanto que os restantes são processos estocásticos em tempo contínuo por representarem fenómenos observados em qualquer momento do tempo.

(iii) Características estatísticas das variáveis aleatórias

Um processo estocástico diz-se *estacionário* se o seu comportamento estocástico for independente do tempo, ou seja, se a função distribuição da(s) v.a. que o define(m) não variar no tempo.

Um processo estocástico diz-se *Markoviano ou de Markov* se for estacionário e gozar da propriedade de Markov ou da “perda de memória”, isto é, se o seu comportamento futuro apenas for condicionado pelo estado presente, independentemente do seu historial ou dos estados visitados no passado. De facto, para um processo de Markov é completamente irrelevante qualquer informação sobre estados passados ou sobre o tempo de permanência no estado presente. Num processo estocástico as transições entre estados são causadas pela ocorrência de acontecimentos ou eventos, pelo que a variável aleatória directamente restringida pela propriedade de ausência de memória é o tempo entre acontecimentos sucessivos (em inglês “interevent time”). Dado que, como iremos ver mais à frente, a única distribuição contínua que apresenta esta propriedade é a distribuição exponencial, num processo de Markov todos os tempos entre acontecimentos sucessivos têm de ser exponencialmente distribuídos.

Um processo estocástico *de Semi-Markov* é uma generalização de um processo de Markov, já que, para aquele, a informação sobre o tempo de permanência no estado actual deixa de ser irrelevante; continua, contudo, a ser irrelevante para o comportamento futuro qualquer informação sobre os estados visitados no passado. A consequência é que os tempos entre acontecimentos sucessivos deixam de estar “restringidos” à distribuição exponencial, podendo seguir qualquer distribuição de probabilidade.

Não é nossa intenção abordar aqui todos os tipos de processos estocásticos existentes, mas sim analisar, com algum detalhe, uma pequena parcela, bastante relevante para o estudo de alguns problemas interessantes, desde problemas de jogos a sistemas de filas de espera: as Cadeias de Markov (tanto em tempo discreto como em tempo contínuo) e os Processos de Nascimento-Morte. Apesar da propriedade de Markov nem sempre ter aderência à realidade, os processos de Markov são, de longe, os processos estocásticos mais utilizados graças à sua facilidade de tratamento.

Este texto encontra-se organizado da seguinte forma: no ponto 2 são estudadas Cadeias de Markov em Tempo Discreto e no ponto 3 as Cadeias de Markov em Tempo Contínuo. No ponto 4 é analisado um caso especial de Processos Estocásticos, os Processos de Nascimento-Morte. Finalmente, no ponto 5 é listada a bibliografia consultada para a elaboração do texto e considerada mais relevante nesta matéria.

2. CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO DISCRETO

2.1. Definição

Uma Cadeia de Markov em Tempo Discreto é um processo estocástico em que a variável t representa intervalos de tempo, $\{X(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e que goza da propriedade de Markov, ou seja, a probabilidade de X(t) estar no estado j no próximo período depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em períodos passados:

$$\boxed{\begin{array}{c} P_{ij} = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i, X(t-1) = k_{t-1}, \ldots, X(1) = k_1, X(0) = k_0\} = \\ P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\}\ ,\ \forall\, t = 0, 1, 2, \ldots\ \forall i, j, k_0, k_1, \ldots, k_{t-1} \in \mathcal{X} \end{array}}$$

No nosso estudo apenas vamos considerar Cadeias de Markov com as seguintes características:

1) O espaço de estados $\mathcal{X}$ é finito ou contável (estados discretos).
2) As probabilidades de transição entre estados são constantes no tempo (cadeia de Markov estacionária), ou seja,

$$\boxed{P_{ij} = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\} = P\{X(1) = j \mid X(0) = i\}\ ,\ \forall_{t = 0, 1, 2, \ldots}\ \forall_{i,\, j \in \mathcal{X}}}$$

2.2. Representação

Uma Cadeia de Markov em tempo discreto fica completamente definida se conhecermos os estados $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ e as probabilidades de transição entre os estados em um período. Existem duas formas de representação: graficamente, através do "diagrama de transições", ou através da matriz quadrada **P** que contem as probabilidades de transição em um período.

Num diagrama de transições cada estado é representado por um vértice, e cada arco orientado ligando dois vértices representa uma transição possível entre dois estados em um período, a qual tem uma certa probabilidade de ocorrência (o coeficiente associado ao arco).

Na matriz **P**, cada linha i representa o estado actual e cada coluna j representa o estado futuro (a ordem dos estados actuais deve ser igual à dos estados futuros, respectivamente, nas linhas e nas colunas de **P**). Deste modo, o elemento p_{ij} da matriz representa a probabilidade de ocorrência da transição do estado i para o estado j em um período. A matriz **P** é uma matriz *estocástica,* pois sendo os seus elementos probabilidades, $p_{ij} \geq 0$, e contendo cada linha i uma distribuição de probabilidade, $\sum_j p_{ij} = 1$.

Para melhor ilustrar o que foi dito, considere-se o exemplo seguinte.

No pequeno país Verdscamp'sfloridos, a bebida tradicional, um estranho licor de flores silvestres, é produzida apenas por duas famílias concorrentes, a família Florescente e a família Petalado. Cada família introduziu, ao longo das gerações, diferentes alterações na fórmula original, de forma a conferir ao "seu" licor um sabor especial. Embora as fórmulas sejam guardadas no "segredo dos deuses", descobriu-se que uma porção de pétalas de malmequeres pode realmente "fazer a diferença", garantindo à família Florescente a primazia nas preferências dos verdscamp'sflorideses. De facto, verificou-se que, para cada pessoa que compre o licor Florescente há 90% de probabilidade de o próximo licor que comprar seja licor Florescente; já para cada pessoa que compre o licor Petalado há só 80% de probabilidade de a essência de miosótis o tornar tão inesquecível que o próximo licor comprado seja ainda o licor Petalado.

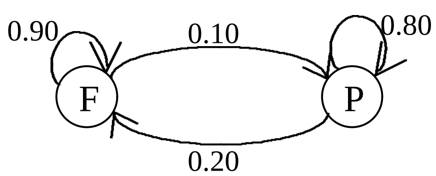
Com base nestes dados, pretende-se construir uma cadeia de Markov que represente a situação descrita.

Se X(t) representar o tipo de licor comprado por uma pessoa na sua t-ésima compra, então a cadeia de Markov limita-se a assumir um dos dois valores seguintes: F (último licor comprado foi o Florescente) ou P (último licor comprado foi o Petalado). O espaço de estados será, deste modo, $X = \{F, P\}$.

A cadeia de Markov pode então ser descrita pela seguinte matriz (estocástica) de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ (F) \\ (P) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (F) & (P) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Uma outra forma de representar a cadeia é através do diagrama de transições:



2.3. PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO

O conhecimento das probabilidades de transição entre os estados é de grande importância nas cadeias de Markov. Conforme foi referido anteriormente, as probabilidades de transição em um período fazem parte da "definição" da cadeia de Markov. É igualmente importante conhecer as probabilidades de transição em n períodos ou passos.

Define-se a probabilidade de transição em n passos como

$$\boxed{p_{ij}^{(n)} = P\{X(t+n) = j \mid X(t) = i\} = P\{X(n) = j \mid X(0) = i\}\ ,\ \forall_{t\,=0,\,1,\,2,\,\dots}\ \forall_{i,\,j\in\mathcal{X}}}$$

Uma das formas de obter o valor de $p_{ij}^{(n)}$ é calcular as probabilidades de cada um dos caminhos que, partindo do estado i, conduzem ao estado j em n passos, e somá-las. Apesar da aparente simplicidade deste método, à medida que n aumenta também aumenta a possibilidade de esquecimento de caminhos alternativos e o cálculo da probabilidade torna-se mais complexo. Alternativamente pode-se calcular o elemento (i,j) da matriz $\mathbf{P}^n$, método bastante mais eficiente.

Para demonstrar a equivalência dos dois métodos, retomar-se-á o exemplo definido no ponto anterior. Suponhamos que se pretende conhecer a probabilidade de a terceira compra futura de um habitante de Verdscamp'sfloridos ser licor Petalado, sabendo que, no momento presente, comprou licor Florescente, ou seja, $p_{FP}^{(3)}$.

Uma hipótese seria calcular as probabilidades de todas as sequências de compras, de forma que a transição FP ocorra em três aquisições ou passos. Assim, verifica-se que só há quatro sequências diferentes de transições em três passos tais que, partindo do estado F, se acaba no estado P:

(1) $F \to P \to P \to P$
(2) $F \to F \to P \to P$
(3) $F \to F \to F \to P$
(4) $F \to P \to F \to P$

Relembrando que, se A e B forem independentes, $P\{A \text{ e } B\} = P\{A\} \times P\{B\}$, podemos então calcular a probabilidade de cada sequência:

(1) $P\{F\to P \text{ e } P\to P \text{ e } P\to P\} = 0.1 \times 0.8 \times 0.8 = 0.064$
(2) $P\{F\to F \text{ e } F\to P \text{ e } P\to P\} = 0.9 \times 0.1 \times 0.8 = 0.072$
(3) $P\{F\to F \text{ e } F\to F \text{ e } F\to P\} = 0.9 \times 0.9 \times 0.1 = 0.081$
(4) $P\{F\to P \text{ e } P\to F \text{ e } F\to P\} = 0.1 \times 0.2 \times 0.1 = 0.002$

Do mesmo modo, $P\{A \text{ ou } B\} = P\{A\} + P\{B\}$, pelo que

$$p_{FP}^{(3)} = 0.064 + 0.072 + 0.081 + 0.002 = 0.219$$

Houve aqui a aplicação directa das *equações de Chapman-Kolmogorov:*

$$\boxed{p_{ij}^{(q+m)} = \sum_k p_{ik}^{(q)}\, p_{kj}^{(m)}}$$

De facto, assumindo q = 1 e m = 2 aquisições,

$$p_{FP}^{(3)} = P\{F \to P\} \times P^{(2)}\{P \to P\} + P\{F \to F\} \times P^{(2)}\{F \to P\},$$

sendo

$$P^{(2)}\{P \to P\} = P\{P \to P\} \times P\{P \to P\} + P\{P \to F\} \times P\{F \to P\} \text{ e}$$
$$P^{(2)}\{F \to P\} = P\{F \to P\} \times P\{P \to P\} + P\{F \to F\} \times P\{F \to P\}.$$

Este resultado pode ser obtido por outra via, pois o elemento da linha que corresponde ao estado F (estado actual) e da coluna que corresponde ao estado P (estado futuro) da matriz $\mathbf{P}^3$ é exactamente 0.219, como se poderá ver seguidamente.

$$\mathbf{P}^3 = \begin{array}{c} \\ (F) \\ (P) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (F) & (P) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} \end{array}$$

Na verdade, a forma usada para calcular o valor anterior (somar as probabilidades de caminhos alternativos) corresponde exactamente à operação de multiplicação de matrizes que nos conduz a $\mathbf{P}^3$, tendo correspondência directa com as equações de Chapman-Kolmogorov.

É importante referir que se **P** for uma matriz estocástica, então qualquer potência de **P** também o é, pois $P^n = [p_{ij}^{(n)}]$, sendo $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ e $\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$.

2.4. Classificação dos Estados

Um caminho do estado i para o estado j é uma sequência de transições com probabilidades de ocorrência positivas que ligam os dois estados (do exemplo anterior: $F \to P \to F \to P$). Não existe qualquer limite ao número de transições nem há a obrigação de a sequência ser a mais curta entre os dois estados.

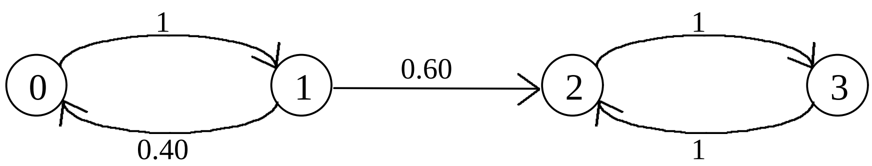
Diz-se que o estado j é atingível a partir do estado i se e só se houver pelo menos um caminho de i para j. Dois estados i e j são *comunicantes* se e só se j for atingível a partir de i e i for atingível a partir de j.

Diz-se que uma Cadeia de Markov é *irredutível* se e só se qualquer estado j for atingível a partir de qualquer estado i, ou seja, se todos os estados forem comunicantes.

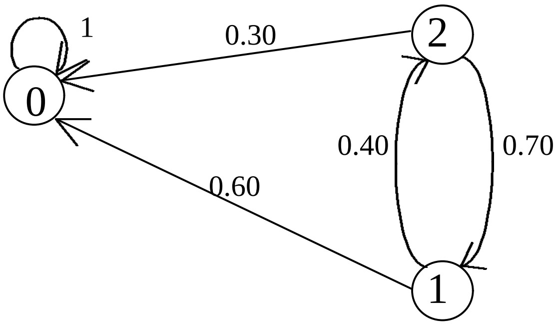
Um estado j diz-se *transiente* se existir um estado k que seja atingível a partir de j, mas não sendo j atingível a partir de k. Por outras palavras, se j for transiente não há a garantia de, saindo de j, voltar lá.

Um estado j diz-se *recorrente* se não for transiente, ou seja, se for sempre possível regressar a j.

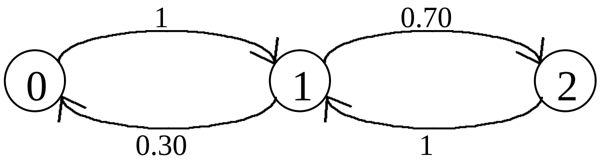
No exemplo seguinte os estados 0 e 1 são transientes enquanto os estados 2 e 3 são recorrentes.



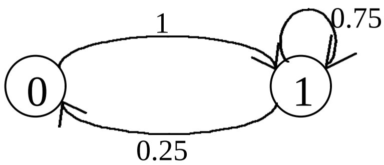
Um estado j diz-se *absorvente* se após o processo lá entrar não mais voltar a sair, ou seja, se $p_{jj} = 1$. No exemplo seguinte o estado 0 é absorvente enquanto os estados 1 e 2 são transientes.



Um estado recorrente j diz-se *periódico* com período k > 1 se k for o menor inteiro tal que todos os caminhos de j para j tiverem um comprimento múltiplo de k (ou seja, k é o máximo divisor comum dos comprimentos de todos os caminhos do estado j para o estado j). No exemplo seguinte os estados 0 e 1 têm período k = 2.



Um estado recorrente diz-se *aperiódico* se k = 1. Uma cadeia de Markov diz-se *ergódica* se todos os estados forem recorrentes, aperiódicos e comunicantes. A cadeia seguinte é ergódica.



2.5. Probabilidades Estacionárias

Numa Cadeia de Markov irredutível e ergódica, decorrido um número muito elevado de períodos de tempo ($n \to \infty$), a probabilidade de o processo estar no estado j é constante e independente do estado inicial i, como se pode observar através da matriz $\mathbf{P}^{16}$, que contem as probabilidades de transição em dezasseis períodos:

$$\mathbf{P}^{16} = \begin{array}{c} \\ (F) \\ (P) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (F) & (P) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6677 & 0.3323 \\ 0.6644 & 0.3356 \end{bmatrix} \end{array}$$

A esta probabilidade chama-se *probabilidade estacionária* do estado j e representa-se por π_j. Por outras palavras,

$$p_{ij}^{(n+1)} \approx p_{ij}^{(n)} \approx \pi_j \quad \text{quando } n \to \infty .$$

Tendo esta característica presente, e como (pelas equações de Chapman-Kolmogorov) $p_{ij}^{(n+1)}$ pode ser escrito como o produto [linha i de $\mathbf{P}^n$] × [coluna j de **P**], então, para n muito elevado, podemos escrever

$$\pi_j = \pi \text{ [coluna j de } \mathbf{P}\text{], sendo } \pi \text{ o vector linha } [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_s].$$

Isto corresponde a um sistema de equações ($\pi = \pi\, \mathbf{P}$) em que o número de equações é igual ao número de variáveis, sendo ambos iguais ao número de estados. No entanto este sistema é indeterminado, pois uma das equações é redundante; a indeterminação é resolvida acrescentando a equação que garante que a solução seja uma distribuição de probabilidades. Assim, para conhecer as probabilidades estacionárias π_j resolve-se o sistema

$$\begin{array}{ll} \pi_j = \sum_i \pi_i\, p_{ij} & (1) \\ \sum_j \pi_j = 1 & (2). \end{array}$$

Subtraindo $\pi_j\, p_{ij}$ a ambos os membros das equações (1) do sistema, elas podem ser re-escritas da seguinte forma

$$\pi_j\, (1 - p_{jj}) = \sum_{i \neq j} \pi_i\, p_{ij} ,$$

tendo a seguinte interpretação:

[Probabilidade de uma transição para fora do estado j] =   = [Probabilidade de uma transição para o estado j].

Relembrando o exemplo que nos acompanha desde o início, quais as probabilidades estacionárias?

$$\begin{array}{lcl} \pi_F = 0.90\, \pi_F + 0.20\, \pi_P & & \pi_F = 0.6666 \\ \pi_P = 0.10\, \pi_F + 0.80\, \pi_P & \Rightarrow & \\ \pi_F + \pi_P = 1 & & \pi_P = 0.3333 \end{array}$$

O que estes valores significam é que, após bastante tempo, cerca de dois terços das pessoas, em média, comprarão o licor Florescente, enquanto que só um terço delas irá comprar o licor Petalado. Deste modo as probabilidades estacionárias podem ser usadas como indicadores das quotas de mercado de cada marca e ser muito úteis em processos de tomada de decisão. De facto, a família Petalado sabe que se conseguir aumentar o grau de fidelização dos clientes que compram o seu licor aumentará a sua quota de mercado, servindo o modelo para quantificar estes aumentos.

2.6. TEMPOS DE TRANSIÇÃO

O tempo (medido em número de períodos) que decorre até que o processo, partindo do estado i, atinja o estado j pela primeira vez, é chamado *tempo de transição* (em inglês, "first passage time"). Se o estado final coincidir com o estado inicial (j = i), este tempo é chamado de *tempo de recorrência* para o estado i. O tempo de transição do estado i para o estado j é representado por t_{ij}.

Trata-se de uma variável aleatória, uma vez que assumirá diferentes valores com diferentes probabilidades, consoante o caminho percorrido entre os dois estados. Conhecer a distribuição de probabilidade das variáveis t_{ij} pode não ser fácil. É, no entanto, relativamente simples conhecer o seu valor esperado ($E[t_{ij}] = \mu_{ij}$), chamado tempo esperado de transição (ou de recorrência, consoante o caso).

Para calcular o tempo esperado da transição de i para j não é preciso encontrar todos os caminhos entre i e j e as respectivas probabilidades de ocorrência. Além de fastidioso, seria praticamente impossível obter o valor desejado desta forma. Qualquer que seja a cadeia de Markov, a transição do estado i para o estado j é feita em um período com probabilidade p_{ij}, e em todos os outros casos ($k \neq j$) o número esperado de períodos será igual a $(1+\mu_{kj})$ com probabilidade p_{ik}. Então podemos escrever a seguinte expressão

$$\mu_{ij} = p_{ij}\,(1) + \sum_{k\neq j} p_{ik}\,(1 + \mu_{kj}),$$

a qual, depois de simplificada, dá origem ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik}\,\mu_{kj}\;.$$

Voltando novamente ao exemplo anterior:

$$\begin{array}{lcl}
\mu_{FF} = 1 + 0.10\,\mu_{PF} & & \mu_{FF} = 1.5 \\
\mu_{FP} = 1 + 0.90\,\mu_{FP} & \Rightarrow & \mu_{FP} = 10 \\
\mu_{PF} = 1 + 0.80\,\mu_{PF} & \Rightarrow & \mu_{PF} = 5 \\
\mu_{PP} = 1 + 0.20\,\mu_{FP} & & \mu_{PP} = 3
\end{array}$$

No caso dos tempos médios de recorrência verifica-se que $\mu_{ii} = 1/\pi_i$. No exemplo considerado, μ_{FP} significa que uma pessoa que compre o licor Florescente demora, em média, 10 períodos até passar a comprar licor Petalado.

2.7. CADEIAS DE MARKOV COM ESTADOS ABSORVENTES

Consideremos agora o caso das cadeia de Markov com estado(s) absorvente(s). Uma vez que um estado absorvente j tem $p_{jj} = 1$, uma vez visitado a Cadeia de Markov não mais sai deste estado. Assim, numa cadeia de Markov com estados absorventes qualquer estado que comunique com um estado absorvente é um estado transiente.

Se pensarmos no que acontece à medida que o número de períodos vai aumentando ($n \to \infty$), concluimos que a probabilidade de o processo estar num estado transiente (obviamente) tende para zero. Ou seja, no longo prazo o processo estará num estado absorvente. Neste caso interessa conhecer a probabilidade de, estando num dado estado transiente, o processo vir a entrar (mais tarde ou mais cedo) num estado absorvente. Estas probabilidades são chamadas *probabilidades estacionárias de absorção*, ou seja, as probabilidades de o processo passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente num qualquer número de períodos.

Para ilustrar este tipo de cadeia de Markov, consideremos o seguinte exemplo:

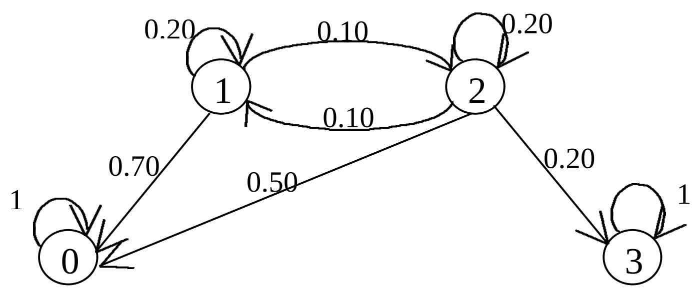
Na loja de artigos informáticos do Sr. Pague-Depressa, os clientes são divididos em categorias, consoante o nível dos pagamentos já efectuados: pagou (categ. 0), atrasado não mais de 30 dias (categ. 1), atrasado não mais de 60 dias (categ. 2) ou caloteiro (categ. 3). As contas são verificadas mensalmente e o estado de cada cliente é determinado. Segundo as regras do Sr. Pague-Depressa, os clientes deverão pagar uma conta dentro de 30 dias mas, pagando prestações, podem-se atrasar no máximo 60 dias; a partir dessa data o Sr. Pague-Depressa entrega os dados do cliente a uma empresa especializada em cobrança de dívidas.

Após a análise dos dados históricos da loja, construiu-se a seguinte matriz de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ (0) \\ (3) \\ (1) \\ (2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0) & (3) & (1) & (2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Com base nestes dados, pretende-se conhecer a probabilidade de um cliente acabar, eventualmente, na categoria 3 (caloteiro), dado estar actualmente quer na categoria 1 quer na categoria 2.

O diagrama de transições é o seguinte:



Consideremos as seguintes partições na matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

em que: **I** é a matriz (identidade) que contem as probabilidades de transição entre estados absorventes; **0** é a matriz nula, indicando que não existem transições dos estados absorventes para os estados transientes; **R** é a matriz que contem as probabilidades de transição dos estados transientes para os estados absorventes; **Q** é a matriz que contem as probabilidades de transição entre estados transientes.

As probabilidades de passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente

- em 1 período são dadas por $\mathbf{R}$;
- em 2 períodos são dadas por $\mathbf{QR}$;
- em 3 períodos são dadas por $\mathbf{Q}^2\mathbf{R}$;

… … … … …

- em n+1 períodos são dadas por $\mathbf{Q}^n\mathbf{R}$.

Para obter as probabilidades de passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente num *qualquer* número de períodos temos que considerar a soma

$$\mathbf{R} + \mathbf{QR} + \mathbf{Q}^2\mathbf{R} + \mathbf{Q}^3\mathbf{R} + \ldots = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \,,$$

Ou seja, os elementos da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}$ são as probabilidades estacionárias de absorção. Alternativamente, chegava-se à mesma conclusão se se considerasse a matriz $\mathbf{P}^n$ quando $n \to \infty$.

A matriz $(I - Q)^{-1}$ é chamada a matriz fundamental da cadeia de Markov, tendo os seus elementos um significado especial: o elemento (i,j) representa o número esperado de vezes que o estado transiente j é visitado antes de o processo entrar num estado absorvente qualquer, partindo do estado transiente i. No exemplo anterior

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.968 & 0.032 \\ 0.747 & 0.254 \end{bmatrix}$$

Assim, a probabilidade de um cliente ser, eventualmente, caloteiro é igual a 0.032 se o seu débito não tiver mais de 30 dias e é igual a 0.254 se o seu débito tiver entre 30 e 60 dias. Por outro lado,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.27 & 0.16 \\ 0.16 & 1.27 \end{bmatrix}$$

o que significa que uma conta com um débito até 30 dias demora 1.27 + 0.16 = 1.43 meses até estar totalmente liquidada. Note-se que é possível uma conta “rejuvenescer”, ou seja, ter um débito entre 30 e 60 dias num mês e no mês seguinte ter um débito até 30 dias (por pagamento do débito antigo e novas compras).

3. CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO

3.1. DEFINIÇÃO

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é, como a designação indica, uma cadeia de Markov em que a variável tempo é contínua, representando instantes ou momentos do tempo (e não períodos no tempo como no ponto anterior). Assim, uma cadeia de Markov em tempo contínuo é um processo estocástico $\{X(t),\ t \geq 0\}$ com a propriedade de Markov, ou seja, a probabilidade de o processo estar no estado j num momento futuro depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em qualquer momento passado:

$$\boxed{\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\ ,\ X(u) = k \ \text{ para }\ 0 \leq u \leq s\} = \\ &P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}, \quad \forall_{i,\, j,\, k\, \in \mathcal{X}} \end{aligned}}$$

Apenas vamos considerar cadeias de Markov com as seguintes características:

1) O espaço de estados $\mathcal{X}$ é finito ou contável.

2) As probabilidades de transição de um estado para outro não dependem do tempo de permanência nesse estado (cadeia estacionária), ou seja,

$$\boxed{P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \ \forall_{s\, \geq 0}\ \ \forall_{i,\, j \in \mathcal{X}}}$$

3.2. TEMPO DE PERMANÊNCIA NO ESTADO

O tempo que o processo permanece em cada estado passa a ser uma consideração importante, pois o processo é em tempo contínuo e não em tempo discreto. Este tempo é, naturalmente, incerto ou aleatório. Seja τ_i a variável aleatória “tempo de permanência no estado i”, isto é, o tempo necessário para que o sistema saia do estado i, efectuando uma transição para outro estado.

Então, facilmente se conclui que o processo permanece no estado i entre os instantes 0 e t se e só se o tempo de permanência no estado i for superior a t, ou seja,

$$\boxed{P\{X(t) = i \mid X(0) = i\} = P\{\tau_i > t \mid \tau_i > 0\} = P\{\tau_i > t\},\ \forall_{t\ \geq 0}\ \ \forall_{i\, \in \mathcal{X}}.}$$

Por outro lado, o sistema permanece no estado i entre os instantes s e (t + s) se e só se o tempo necessário para que o sistema saia do estado i for superior a (t + s), dado que o tempo de permanência no estado i era superior a s, ou seja,

$$\boxed{P\{X(t+s)=i \mid X(s)=i\} = P\{\tau_i > t + s \mid \tau_i > s\}\ ,\ \forall_{t\, ,\, s\, \geq 0}\ \ \forall_{i\, \in \mathcal{X}}\ .}$$

Como $P\{X(t+s) = i \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = i \mid X(0) = i\}$ então $P\{\tau_i > t+s \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$. Por outras palavras, a distribuição da variável aleatória "tempo de permanência num dado estado" é independente do tempo que o processo tenha já passado nesse estado (propriedade da ausência de memória). Como a única distribuição contínua que goza desta propriedade é a distribuição exponencial, concluimos que τ_i tem distribuição exponencial.

Suponhamos que a variável aleatória $\tau_i \geq 0$ tem distribuição exponencial com parâmetro (taxa) μ_i. Então a função distribuição é dada por $F\tau_i\ (t) = P\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-t\mu i}$ $\forall\ t \geq 0$. O valor esperado é $E[\tau_i] = 1/\ \mu_i$ e a variância é $V[\tau_i] = 1/\ \mu_i^2$, verificando-se sempre que a média é igual ao desvio padrão, sendo ambos iguais ao inverso do parâmetro.

A distribuição exponencial goza de duas propriedades muito importantes no estudo das cadeias de Markov em tempo contínuo, as quais serão apresentadas sem qualquer demonstração. Uma, que foi já referida é a propriedade da "ausência de memória", segundo a qual $P\{\tau_i > t + s \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$, $\forall$ s,t ≥ 0. A outra diz-nos que se a variável aleatória τ_{min} for o mínimo de diferentes variáveis aleatórias independentes (τ_1, τ_2, …, τ_N), cada qual com distribuição exponencial de parâmetro μ_i (i =1, …, N), então τ_{min} tem também distribuição exponencial, sendo o parâmetro dado por $\mu = \sum_i \mu_i$.

3.3. REPRESENTAÇÃO

Uma Cadeia de Markov em tempo contínuo fica completamente definida se conhecermos os estados $X = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$, o parâmetro μ_i da distribuição (exponencial) de cada variável τ_i (tempo de permanência em cada estado i) e as probabilidades de o processo transitar para o estado j, dado que saiu do estado i (p_{ij}). Em alternativa a conhecer os parâmetros μ_i e as probabilidades p_{ij}, basta conhecer as taxas de transição entre os estados, μ_{ij}.

A interpretação intuitiva de μ_i e de μ_{ij} é de que se trata de taxas de transição. Concretamente, μ_i é a taxa de transição para fora do estado i, significando que μ_i é o número esperado de vezes que o processo sai do estado i por unidade de tempo passado no estado i. Assim, μ_i é o inverso do tempo médio de permanência no estado i, ou seja, $E[\tau_i] = 1/\mu_i$. De modo semelhante, μ_{ij} é a taxa de transição do estado i para o estado j, significando isto que μ_{ij} é o número esperado de vezes que o processo efectua uma transição de i para j por unidade de tempo passado no estado i.

Existem duas formas de representação: graficamente, através do "diagrama de transições", ou através de uma matriz quadrada **U** que contem as taxas de transição.

Num diagrama de transições cada estado é representado por um vértice, e cada arco orientado ligando dois vértices representa uma transição possível entre dois estados, sendo o coeficiente associado ao arco a respectiva taxa.

Na matriz **U**, cada linha i representa o estado actual e cada coluna j representa o estado futuro (a ordem dos estados actuais deve ser igual à dos estados futuros, respectivamente, nas linhas e nas colunas de **U**). Deste modo, o elemento μ_{ij} da matriz representa a taxa de transição do estado i para o estado j.

As taxas de transição μ_{ij} são dadas por $\mu_{ij} = \mu_i \, p_{ij}$ ($i \neq j$), e portanto verifica-se que

$$\sum_{j\neq i} \mu_{ij} = \mu_i \sum_{j\neq i} p_{ij} = \mu_i \,.$$

3.4. Probabilidades Estacionárias

No estudo das cadeias de Markov em tempo contínuo interessa conhecer as probabilidades estacionárias ($t\rightarrow\infty$) de o processo estar nos diferentes estados (π_j).

Para se obterem as probabilidades estacionárias, escrevem-se as chamadas "equações de balanço" que traduzem a ideia de que, em equilíbrio, a taxa média de saídas de um qualquer estado deve ser igual à taxa média de entradas nesse mesmo estado. Essas equações constituem o seguinte sistema:

$$\mu_j \, \pi_j = \sum_{i\neq j} \pi_i \, \mu_{ij} \;. \qquad (1)$$

À semelhança do que acontecia nas cadeias em tempo discreto, também o sistema (1) é indeterminado. Encontram-se, então, as probabilidades estacionárias acrescentando a equação seguinte:

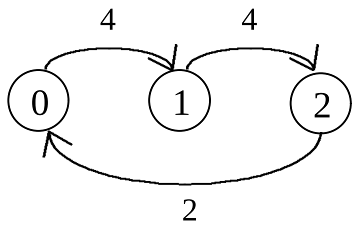
$$\sum_j \pi_j = 1 \;. \qquad (2)$$

Consideremos o exemplo seguinte:

Uma máquina, integrada numa linha de produção, solda duas peças idênticas. Sabe-se que o tempo entre duas chegadas consecutivas de peças à máquina tem uma distribuição exponencial com média igual a um quarto de hora. Da mesma forma, o tempo de soldagem segue uma distribuição exponencial com média igual a meia hora. Pretende-se construir uma cadeia de Markov que represente a situação descrita, determinando as probabilidades estacionárias.

Se X(t) representar o número de peças na máquina no momento t, então X(t) limita-se a assumir um dos três valores seguintes: 0, 1 ou 2 peças. O espaço de estados será, deste modo, $X = \{0, 1, 2\}$. Existem apenas dois tipos de acontecimentos: chegada de uma peça à máquina (μ_{ch}=4 peças/h) e saída das duas peças soldadas (μ_p=2 peças soldadas/h).

As transições são descritas seguidamente no respectivo diagrama. As transições $0\rightarrow1$ e $1\rightarrow2$ correspondem à chegada de uma peça à máquina, enquanto a transição $2\rightarrow0$ corresponde à saída das peças soldadas. Não se considera a possibilidade de haver a transição 0→2 pelo facto de se considerar que só ocorre um evento de cada vez (é possível efectuar a separação temporal de acontecimentos quase simultâneos).



A matriz que contem as taxas de transição é a seguinte:

$$
\mathbf{U} = \begin{array}{c} \\ (0) \\ (1) \\ (2) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} (0) & (1) & (2) \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Para calcular as probabilidades estacionárias, escrevemos as equações de balanço e a equação de normalização:

Equações de balanço:	estado 0:	$4\ \pi_0 = 2\ \pi_2$
	estado 1:	$4\ \pi_1 = 4\ \pi_0$
	estado 2:	$2\ \pi_2 = 4\ \pi_1$
Equação de normalização:		$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

A solução do sistema é $\pi_0 = 0.25$, $\pi_1 = 0.25$ e $\pi_2 = 0.50$. Significa isto que a máquina passa 25% do tempo com 0 ou 1 peça, e 50% com 2 peças.

4. PROCESSOS DE NASCIMENTO-MORTE

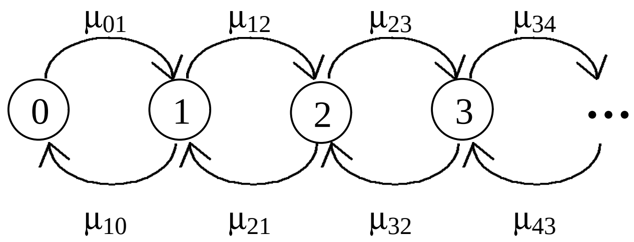
4.1. GENERALIDADES

Os Processos de Nascimento-Morte são processos estocásticos muito utilizados na descrição de Sistemas de Filas de Espera, dada a sua particular estrutura: as transições de um qualquer estado só são possíveis para estados "vizinhos" (i.e., de um estado i para os estados i+1 ou i-1). De facto, adoptando um espaço de estados $X = \{0, 1, \ldots\}$ e representando cada estado um certo "nível de população" (número de clientes numa loja, número de mensagens num atendedor de chamadas, número de produtos a processar, etc) tais transições podem ser facilmente interpretadas: a transição do estado i para o estado i+1 será um "nascimento" (por exemplo, chegada de um cliente), por significar um aumento do "nível da população", enquanto que a transição do estado i para o estado i-1 será uma "morte" (partida de um cliente), por significar um decréscimo do "nível da população".

4.2. EQUAÇÕES DE BALANÇO

As equações de balanço são facilmente escritas a partir do diagrama de transições, pois o facto de as transições de um qualquer estado só serem possíveis para, no máximo, dois estados torna as equações bastante compactas.

Consideremos o seguinte diagrama de transições:



As equações de balanço serão, então:

estado 0:	$\pi_0\ \mu_{01} = \pi_1\ \mu_{10}$
estado 1:	$\pi_1\ (\mu_{10} + \mu_{12}) = \pi_0\ \mu_{01} + \pi_2\ \mu_{21}$
estado 2:	$\pi_2\ (\mu_{21} + \mu_{23}) = \pi_1\ \mu_{12} + \pi_3\ \mu_{32}$
…	… …
estado n:	$\pi_n\ (\mu_{n,n-1} + \mu_{n,n+1}) = \pi_{n-1}\ \mu_{n-1,n} + \pi_{n+1}\ \mu_{n+1,n}$

Da primeira equação concluimos que $\pi_1 = (\mu_{01}/\mu_{10})\ \pi_0$. Da segunda equação, e substituindo π_1 pela sua expressão em termos de π_0, tiramos que $\pi_2 = (\mu_{12}\ \mu_{01}\ /\ \mu_{21}\ \mu_{10})\ \pi_0$. Prosseguindo da mesma forma é possível exprimir as restantes probabilidades em termos de π_0, e através da equação de normalização encontrar o valor de π_0. As restantes probabilidades estacionárias são então muito simples de calcular.

5. BIBLIOGRAFIA

Çinlar, Erhan (1975), *Introduction to Stochastic Processes,* Prentice-Hall, Inc.

Hillier, G. and J. Lieberman (1995), *Introduction to Operations Research,* Sixth Edition, McGraw-Hill.

Kleinrock, Leonard (1975), *Queueing Systems (Vol. I: Theory),* John Wiley & Sons.

Ross, Sheldon M. (1983), *Stochastic Processes,* John Wiley & Sons.

Winston, Wayne L. (1994), *Operations Research – Applications and Algorithms,* Third Edition, Duxbury Press.