Esquemas de Euler Estocásticos para a Discretização de Modelos Histeréticos

Pedro Vieira
UTAD - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, pmfvieira@hotmail.com
Paula Milheiro
FEUP - Departamento Engenharia Civil, poliv@fe.up.pt
Álvaro Cunha
FEUP - Departamento Engenharia Civil, acunha@fe.up.pt

Palavras–chave: Equações diferenciais estocásticas, esquemas de convergência fraca, modelos histeréticos

Resumo: A necessidade de reproduzir em computador soluções de equações diferenciais estocásticas não lineares surge em problemas de diversas áreas. É o caso dos problemas que surgem no âmbito da Engenharia Sísmica, envolvendo modelos histeréticos. A simulação das soluções destas equações passa pela sua discretização obrigando à adopção de um esquema de discretização. No estudo de modelos histeréticos sujeitos a excitações do tipo ruído branco gaussiano avaliamos as diferenças / semelhanças produzidas na resposta do sistema usando dois esquemas de Euler para a discretização da equação diferencial estocástica. Na literatura podem ser encontrados variados esquemas, exibindo diferentes níveis de precisão. Neste artigo analisa-se o modelo de Noori-Baber-Wen, de 1 grau de liberdade, com introdução do efeito de pinching para diferentes valores dos parâmetros da parte não linear do modelo: coeficiente de não linearidade (α); parâmetros que caracterizam o efeito de histerése (β e γ); parâmetros que têm em conta os efeitos de degradação de resistência (δ_ν) e rigidez (δ_η); parâmetros que têm em conta a introdução do efeito de pinching. Tal como acontece no modelo linear, conclui-se que os resultados produzidos por ambos os esquemas de discretização são semelhantes em termos das estimativas do desvio padrão da resposta. Portanto, é indiferente o uso de qualquer um dos dois esquemas de Euler de convergência fraca apresentados.

1 Introdução

Estamos interessados especialmente numa classe de modelos que descrevem comportamentos não lineares de estruturas de Engenharia Civil sob acção

sísmica: os modelos não lineares com comportamento histerético. Consideramos o modelo geral não linear histerético de 1 grau de liberdade do tipo Noori-Baber-Wen descrito por Noori et al.[1]:

$$\left\{ \begin{array}{c} m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1-\alpha)\, kz = w\,(t) \\ \dot{z} = \left[1 - \xi_1 exp\left(\frac{-z^2}{2\xi_2}\right)\right] \left[A\dot{x} - \nu\left(\beta\,|\dot{x}|\,|z|^{n-1}\right) z + \gamma\dot{x}\,|z|^n\right] \left(\frac{1}{\eta}\right) \\ \dot{\epsilon} = (1-\alpha)\, kz\dot{x} \end{array} \right. , \quad (1)$$

correspondente a um pórtico sujeito a uma acção aleatória, $w\,(t)$, do tipo ruído branco gaussiano. As variáveis de resposta no modelo são: x, que designa o deslocamento; $\dot{x}$, que designa a velocidade e z, que designa o deslocamento explicado pela parte não linear do modelo. Separamos os parâmetros em dois conjuntos, os parâmetros respeitantes à parte linear do modelo: a massa (m); o amortecimento (c) e a rigidez (k) e os parâmetros de interesse no estudo que são respeitantes à parte não linear do modelo: A, β e γ (que caracterizam o comportamento histerético); ν, η (que têm em conta, respectivamente, os efeitos de degradação de resistência e de rigidez) e ξ_1, ξ_2 (que têm em conta do efeito de pinching). O estudo que elaboramos usando o método de Monte Carlo permite investigar as diferenças ou semelhanças que possam existir entre os resultados numéricos obtidos por diferentes esquemas de discretização. Neste estudo aqui apresentado recorremos a dois esquemas de Euler estocásticos que foram escolhidos por serem de fácil implementação. Para isto começamos por reescrever o modelo (1) na forma de Ito, obtendo-se o vector de drift e a matriz de difusão seguintes:

$$\Theta\,(X\,(t)) = \left[\begin{array}{c} x_2 \\ -m^{-1}\left(\alpha kx_1 + cx_2 + (1-\alpha)\, kx_3\right) \\ \frac{\left[1-\xi_1 exp\left(\frac{-x_3^2}{2\xi_2}\right)\right]\left[Ax_2 - \nu\left(\beta|x_2||x_3|^{n-1}\right)x_3 + \gamma x_2|x_3|^n\right]}{\eta} \\ (1-\alpha)\, kx_3x_2 \end{array} \right] \quad (2)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $X\,(t) = [x, \dot{x}, z]^T$ é o vector de resposta.

2 Comparação dos esquemas de discretização

Usando o facto da matriz de difusão não depender do processo X, os quatro esquemas de convergência fraca expostos por Tocino[4], resultam em dois esquemas mais simples: o esquema de Euler Melhorado e o esquema de Euler Modificado, respectivamente,

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2}\left(\Theta_0^k + \Theta_1^k\right)\Delta t + \Psi \Delta \widehat{W}_k \tag{3}$$

e

$$X_{k+1} = X_k + \Theta_1^k \Delta t + \Psi \Delta \widehat{W}_k. \tag{4}$$

Para o esquema de Euler Melhorado as quantidades Θ_0^k e Θ_1^k são definidas por:

$$\Theta_0^k = \Theta\left(X_k\right) \text{ e } \Theta_1^k = \Theta\left(X_k + \Theta_0^k \Delta + \Delta \widehat{W}_k \Psi\right) \tag{5}$$

e para o esquema de Euler Modificado são definidas por:

$$\Theta_0^k = \Theta\left(X_k\right) \text{ e } \Theta_1^k = \Theta\left(X_k + \frac{1}{2}\Theta_0^k \Delta t + \left(\frac{2-\sqrt{6}}{4}\Delta \widehat{W}_k + \frac{\sqrt{6}}{12}\frac{\left(\Delta \widehat{W}_k\right)^3}{\Delta t}\right)\Psi\right), \tag{6}$$

em que $\Delta \widehat{W}_k$ representa o incremento do processo de Wiener no instante t_k. Comparamos as soluções obtidas por estes dois esquemas usando diferentes combinações dos parâmetros da parte não linear do modelo (1) que correspondem a diferentes modelos histeréticos.

3 Conclusões

Para passos de discretização suficientemente pequenos, ambos os esquemas de Euler estocásticos produzem estimativas semelhantes para o segundo momento estatístico da resposta de sistemas histeréticos com 1 grau de liberdade do tipo Noori-Baber-Wen. Portanto é indiferente a escolha do esquema de discretização no tratamento deste tipo de sistemas estocásticos.

Referências

[1] Noori, Mohammad N., Padula, Mark D., Hamid Davoodi. (1992). Application of an Itô-Based Approximation Method to Random Vibration of a Pinching Hysteretic System. *Nonlinear Dynamics* 3, 305–327.

[2] Desmond, J. Higham. (2001). An algorithm introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review* 43(3), 525-546.

[3] Tocino, A., Vigo-Aguiar, J. (2002). Weak Second Order Conditions for Stochastic Runge-Kutta Methods. *Journal of Scientific Computations* 24,2,507-523.

[4] Tocino, A. (2005). Mean-square stability of second-order Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. *Journal of Computations and Applied Mathmatics* 175,355–367.