

Boletim



**SOCIEDADE PORTUGUESA
DE ESTATÍSTICA**

Publicação semestral

Outono de 2008



Processos Estocásticos

Séries temporais e decisão dinâmica	
Nazaré Mendes Lopes	26
Processos estocásticos aplicados às finanças	
João Nicolau	35
Algumas noções de dependência positiva	
Paulo Eduardo Oliveira	43
Processos estocásticos em dinâmica de estrutura de engenharia	
Paula Milheiro Oliveira	53
Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas	
Carlos A. Braumann	61

Editorial	1
Mensagem do Presidente	2
Notícias	3
Episódios na História da Estatística	11
SPE e a Comunidade	13
Ciência Estatística	
• Artigos Científicos Publicados	70
• Livros	70
• Teses de Doutoramento	71
• Prémios Estatístico Júnior 2008	72

Informação Editorial

Endereço: Sociedade Portuguesa de Estatística,
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4,
1749-016 Lisboa, Portugal.

Telefone: +351.217500120

e-mail: spe@fc.ul.pt

URL: <http://www.spestatistica.pt>

ISSN: 1646-5903

Depósito Legal: 249102/06

Tiragem: 1000 exemplares

Execução Gráfica e Impressão: Gráfica SobreireNSE

Editor: Fernando Rosado, fernando.rosado@fc.ul.pt

Este Boletim tem o apoio da **FCT** Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Processos estocásticos em dinâmica de estruturas de engenharia

Paula Milheiro Oliveira, *poliv@fe.up.pt*

CEC, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 Introdução

Em estudos sobre o comportamento dinâmico de estruturas na engenharia civil e mecânica, considera-se habitualmente fontes de aleatoriedade ou incerteza, que se repartem em 3 tipos: (a) a aleatoriedade devida a causas naturais ou operacionais; (b) a incerteza sobre as propriedades mecânicas dos materiais utilizados na construção; (c) as incertezas sobre os modelos matemáticos adoptados quer para a resposta da estrutura quer para a resistência dos mecanismos estruturais.

Para produzir conhecimento de modo a reduzir a variabilidade que resulta destas incertezas são realizadas simulações e, sobretudo, testes sobre as próprias estruturas ou modelos físicos (à escala reduzida) destas estruturas.

Os testes que se realizam para estudar o comportamento de uma estrutura podem ser de vários tipos. Os testes em que se simulam condições várias de funcionamento real envolvem a reprodução de meios aleatórios, nomeadamente acções de ventos, cargas devidas ao movimento dos veículos no caso das pontes ou do funcionamento de máquinas pesadas no caso de instalações industriais e, nomeadamente, a acção de sismos, entre outras acções. Podemos distinguir dois tipos de acções: acções de natureza ambiental (como o vento, a temperatura, a humidade, os sismos, as ondas do mar) e acções de natureza operacional (como as cargas a que estão sujeitas). É aqui que aparecem de imediato os primeiros processos estocásticos, logo à entrada. Na teoria de sistemas diríamos que são o *input* do sistema. No contexto da engenharia de estruturas preferem chamar-lhes excitação. Na sua forma mais simples estes processos podem surgir como ruído branco gaussiano. Significa isto, portanto, que um dos testes a que se sujeita uma estrutura, quando se pretende estudar a sua dinâmica, é um teste em que se simula uma excitação de entrada segundo um ruído branco gaussiano. Este teste, muitas vezes realizado em laboratório sobre modelos físicos, permite observar e avaliar respostas da estrutura e algo que interessa especialmente aos engenheiros de estruturas, que é estimar parâmetros que descrevem a estrutura. São exemplo destes parâmetros os chamados modos de vibração, que não são mais do que transformações dos parâmetros do modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico da estrutura. Um dos aspectos que interessa também ao engenheiro de estruturas é a análise de indicadores de degradação da estrutura.

Podemos distinguir vários tópicos que nos permitem clarificar áreas de conhecimento e áreas de trabalho para quem pretende investigar ou simplesmente articular saberes, a um nível avançado, no campo da dinâmica de estruturas: é, primeiro que tudo, necessário conhecer ou desenvolver modelos de excitação e de resposta adequados à situação concreta em estudo; é necessário conhecer e adaptar métodos existentes de simulação da resposta; é necessário ser capaz de aplicar, e sobretudo desenvolver, métodos de estimação de parâmetros e de estado e, finalmente, podemos ainda encontrar-nos perante problemas de controlo da estrutura, para os quais é necessário explorar técnicas de controlo estocástico.

2 Modelos para a excitação

Pode dizer-se que acções como o vento, os sismos ou as ondas do mar são duplamente aleatórios, no sentido em que a sua ocorrência é estocástica no tempo mas também as trajetórias que caracterizam

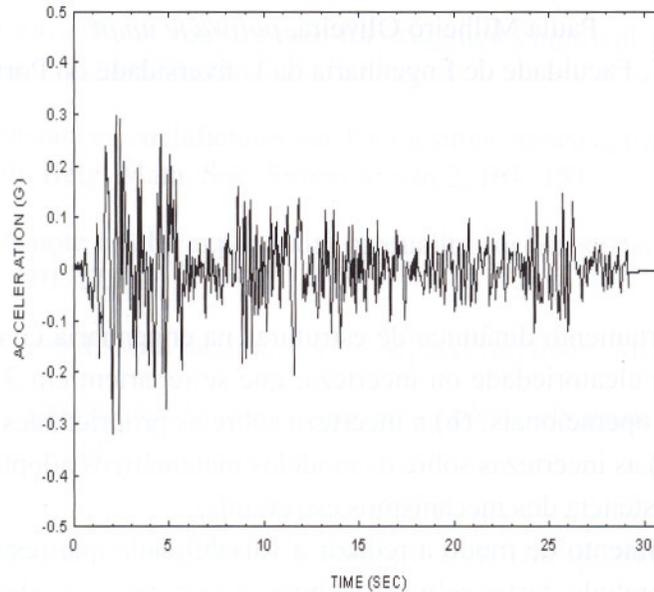


Figura 1: Registo do terramoto El Centro (Imperial Valley, EUA, costa do Pacífico). A aceleração foi medida na base do edifício El Centro Terminal Substation e está representada em cm/s^2 .

estas acções exibem padrões aleatórios. Acções como a temperatura, a humidade ou as cargas a que a estrutura está sujeita na sua operação são mais naturalmente vistas como processos contínuos no tempo.

Ao longo das últimas décadas, estas acções têm vindo a ser examinadas na engenharia estrutural sobretudo do ponto de vista estocástico. Naturalmente que encontramos quer processos estocásticos estacionários quer não estacionários, talvez com uma maior predominância destes últimos. Os registos sísmicos, por exemplo, permitem-nos dizer que as acções sísmicas são processos estocásticos hoje reconhecidos como fortemente não estacionários (e.g. Figura 1), devido a diferenças entre frequências e tempos de chegada das suas ondas componentes. Podem ser modelados de duas formas distintas: (a) processos estocásticos não estacionários unicamente em amplitude (resultam da transformação de um processo estacionário através de uma função determinística do tempo, na prática estimada com base nos registos sísmicos); (b) processos estocásticos com uma densidade espectral de potência evolutiva (como resultado de diferentes velocidades e energias das diversas ondas que compõem o movimento e de múltiplas reflexões, refrações e difracções).

No primeiro caso, temos modelos da forma:

$$A_t = \xi(t)M_t$$

onde A_t representa a aceleração do solo no instante t , $\xi(t)$ é a função de modelação (determinística) e $\{M_t\}_t$ é um processo estocástico gaussiano estacionário. São muito usados os modelos de Shinozuka-Sato (1967), em que $\xi(t)$ é da forma

$$\xi(t) = \frac{1}{c}(e^{-at} - e^{-bt}),$$

Aming-Ang (1966):

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & t \leq t_1 \\ 1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{-c(t-t_2)}, & t_2 \leq t \end{cases}$$

e Yeh–Wen (1990):

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{at^{-b}e^{-ct}}{d+t^h}},$$

em que a, b, c, d, h, t_1 e t_2 são parâmetros, cujos valores são atribuídos com base em argumentos de natureza física ou em registos, perante cada situação concreta.

No segundo caso, temos modelos muito variados, dos quais destacamos o modelo de Yeh–Wen (1990):

$$A_t = \xi(t)M_{k(t)},$$

agora com $k(t) = \frac{n(t)}{\dot{n}(t_s)}$, onde $n(t)$ é uma função polinomial que pretende representar a acumulação de passagens por 0 no registo sísmico e t_s o instante em que as fortes movimentações do solo ocorrem (Figura 2). Outros modelos podem ser encontrados em Priestley (1981), Grigoriu *et al.* (1988), Spanos *et al.* (1992), Fan–Ahmadi (1990), Kameda–Nojima (1988), Faravelli (1988) e Carli (1992, 1995), entre outros.

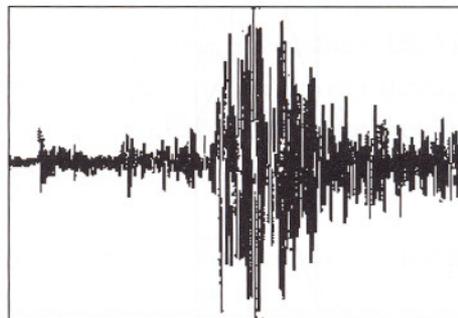


Figura 2: Registo do terramoto de 1971 na Baía de São Francisco (EUA). A aceleração foi medida em San Fernando e está representada em cm/s^2 .

3 Modelos para a resposta

A dinâmica de uma estrutura com comportamento linear e N graus de liberdade¹, pode ser modelada pelo seguinte sistema diferencial estocástico no sentido de Ito (Clough e Penzien, 1993):

$$\begin{cases} dx_t^{(1)} &= x_t^{(2)} dt \\ dx_t^{(2)} &= M^{-1}(-Cx_t^{(2)} - Kx_t^{(1)})dt + M^{-1}dW_t \end{cases}, \quad (1)$$

em que $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ são vectores de deslocamento e velocidade, respectivamente, M é a matriz de massa da estrutura, C a sua matriz de amortecimento viscoso, K a sua matriz de rigidez e $\{W_t\}_t$ é o processo estocástico que modela a excitação externa a que está sujeita a estrutura.

No entanto, nem todas as estruturas apresentam um comportamento linear, encontrando-se por exemplo modelos da forma (Wen, 1973):

$$\begin{cases} dx_t^{(1)} &= x_t^{(2)} dt \\ dx_t^{(2)} &= M^{-1}(-Cx_t^{(2)} - \alpha Kx_t^{(1)} - (1 - \alpha)Kz_t) dt + M^{-1}dW_t, \\ dz_t &= (Ax_t^{(2)} - \beta|x_t^{(2)}||z_t|^{n-1}z_t - \gamma x_t^{(2)}|z_t|^n) dt \end{cases}, \quad (2)$$

¹Se se tratar da estrutura muito elementar como uma estrutura porticada, os N graus de liberdade corresponderão a N pisos. Em estruturas mais complexas como edifícios, cada piso, só por si, corresponderá a vários graus de liberdade.

em que $\{z_t\}_t$ é um processo estocástico habitualmente designado por componente histerética do sistema, α é um coeficiente relacionado com a rigidez pós-cedência e A, n, β e γ são parâmetros que caracterizam o tamanho e forma dos ciclos de histeresis, que são estocásticos.

Nos modelos (1) e (2) o tempo é considerado como contínuo. No entanto as medições da resposta da estrutura são de facto obtidas em instantes discretos. Pode haver conveniência em que o modelo da estrutura seja também descrito em tempo discreto. Os defensores desta abordagem usam modelos em espaço de estados e por vezes modelos ARMA, que provêm de uma formulação prévia da dinâmica da estrutura via Elementos Finitos (ver, por exemplo, Peeters–Ventura, 2003). Um exemplo desta abordagem consiste no modelo seguinte, que respeita a uma estrutura em mastro (Figura 3):

$$X_k = FX_{k-1} + GU_k. \quad (3)$$

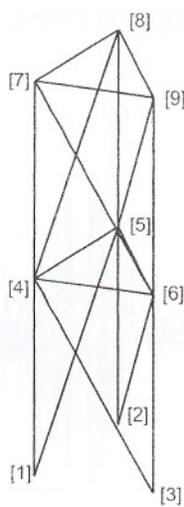


Figura 3: Exemplo de uma estrutura em mastro.

A estrutura é composta por 9 nós ligados por barras, dos quais os 3 primeiros estão ligados ao solo, e sofre o efeito de uma acção aleatória, representada pelo processos estocástico $\{U_k\}_k$, em todos os seus nós, quer na direcção horizontal quer na vertical, de forma independente. F é uma matriz 18×18 construída a partir das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez. G é uma matriz construída a partir da matriz de massa, de uma matriz 18×12 consistindo de zeros e uns nas posições apropriadas e de uma matriz nula. $\{X_k\}_k$ é um processo estocástico vectorial de dimensão 18, cujas coordenadas representam deslocamentos e velocidades no instante t_k . Nos modelos ARMA são as acelerações nos nós da estrutura que são modeladas.

É muito comum encontrarmos aplicações práticas em que a dimensão dos processos estocásticos envolvidos é elevada, colocando-nos perante problemas computacionais consideráveis.

4 Simulação da excitação e da resposta

Os métodos de simulação da resposta são muitas vezes usados para análise da estrutura, uma vez que a simulação de um grande número de trajetórias no tempo permite efectuar resumos, com valor estatístico, úteis para o engenheiro.

Dependendo do tipo de modelo adoptado para a excitação e para a dinâmica da estrutura encontramos métodos adequados à simulação da excitação e da resposta. Sempre que se parte de um modelo em tempo contínuo há, naturalmente, que o discretizar primeiro. É assim que aparecem métodos já nossos conhecidos da discretização de equações diferenciais estocásticas a serem usados neste

contexto, como por exemplo, os esquemas de Euler, Milshtein e Runge-Kutta estocástico (Milstein, 1995; Kloeden–Platen, 1999; Tocino–Ardanuy, 2002) mas aparecem também novos métodos, como o esquema de Newmark estocástico (Roy–Dash, 2005; Zhang et al., 1999), que explora particularidades dos processos estocásticos envolvidos na modelação da estrutura vibratória, procurando fazer intervir no procedimento de discretização parâmetros com significado físico, que são cuidadosamente calibrados segundo a aplicação a que se destinam.

5 Estimação de parâmetros

No caso das estruturas com comportamento linear, são de particular importância para os engenheiros de estruturas os chamados parâmetros modais. Nestes casos admite-se que a estrutura está sujeita a uma excitação do tipo ruído branco, da qual não se observa a trajectória. No exemplo de uma torre como a estrutura citada na Secção 3 (equação (3) e Figura 3), os parâmetros modais são alguns dos valores próprios da matriz F , matriz esta que é desconhecida e que teremos de estimar.

Mais uma vez, dependendo do tipo de modelo adoptado para a dinâmica da estrutura, teremos diferentes métodos de estimação. São muito populares, pela qualidade que demonstraram em aplicações práticas, os chamados métodos de sub-espço (Van Overschee–De Moor, 1996; Ljung, 1999).

De entre os métodos baseados no espectro da resposta destaca-se o método Peak-Picking, pela sua simplicidade (Bendat–Piersol, 1993). A ideia chave deste método reside na estimação das frequências próprias da estrutura (valores próprios da matriz de deriva na equação (1)) através dos picos da representação espectral.

O Método de Máxima Verosimilhança tem também sido usado para estimar parâmetros de modelos no domínio da frequência (Guillaume *et al.*, 1998).

6 Estimação de estado

Este problema está de facto, muitas vezes, relacionado com o anterior, uma vez que alguns dos métodos de estimação de parâmetros incorporam uma fase de estimação de estado.

Na formulação de problemas de estimação do estado de uma estrutura, ou da resposta de uma estrutura, ao modelo de dinâmica da estrutura, do tipo dos apresentados na Secção 3, é acrescentado um modelo para as observações obtidas dos sensores:

$$y_k = DX_k + v_k,$$

onde D é uma matriz que especifica a localização dos sensores e $\{v_k\}_k$ é um processo estocástico que representa o ruído de medição (ou erro de medida). Embora seja menos comum², o modelo das observações também pode ser escrito em tempo contínuo:

$$dY_t = DX_t + dV_t$$

e podemos, embora mais raramente, encontrar-nos perante modelos de observação não lineares.

A estimação do estado, X_k (ou X_{t_k} , nos modelos contínuos), faz-se sobre a σ -álgebra das observações até ao instante t_k , da qual dispomos de uma trajectória, resultante da recolha das observações dos sensores ao longo do tempo.

O problema de estimação de estado pode ser resolvido de forma óptima pelo Filtro de Kalman, se o modelo for linear, e de forma sub-óptima, sob determinadas condições, pelo Filtro de Kalman

²Também porque será menos realista.

Estendido (EKF), se o modelo for não linear (Ljung, 1999). Outros métodos aproximados como o Filtro de Partículas (Ching *et al.*, 2006; Tang–Sato, 2005) podem ser também usados, com vantagens em termos computacionais e com menos restrições do que o EKF.

7 Controlo da estrutura

Os problemas de controlo da estrutura são talvez aqueles em que o investimento do esforço de investigação é mais recente. Porque as excitações a que uma estrutura está habitualmente sujeita no meio em que está inserida se comportam como processos estocásticos, o controlo terá de ter em conta um comportamento estocástico, devendo por isso ser entendido como um controlo estocástico também. Quando falamos em controlo estocástico estamos a falar em acções (processos estocásticos) que são provocadas pelo controlador (equipamento de controlo), ao longo do tempo, para levar a estrutura a um determinado estado desejado, geralmente um estado que garante estabilidade e outras condições optimizadas de funcionamento (ver, por exemplo, Ikhouane–Rodellar, 2007).

8 Comentários finais

Em muitos domínios, modelos estocásticos representando uma dinâmica complexa são necessários para descrever processos que se desenvolvem no tempo de forma aleatória, exibindo interacções no tempo que se tornam fundamentais para um verdadeiro conhecimento do fenómeno em estudo e algumas vezes apresentando ainda interacções com outros processos. Muitas vezes a premência do estudo vem da necessidade de adequar alguma previsibilidade sobre o comportamento do sistema. Exemplos concretos de processos estocásticos deste tipo encontram-se na dinâmica das estruturas da engenharia da construção (ver, por exemplo, Muscolino, 2001).

As elevadas velocidades permitidas pelos computadores dos nossos dias não fizeram mais do que tornar o uso de modelos estocásticos bastante sofisticados cada vez mais praticáveis, ao mesmo tempo que desenvolvimentos importantes na teoria das probabilidades, em particular na área do cálculo estocástico, foram explorados por estatísticos e outros profissionais apenas numa sua pequena extensão, no desenvolvimento de métodos estatísticos para processos estocásticos.

Há pois muito espaço para contribuições de jovens investigadores e para equipas que se queiram dedicar a estes aspectos dos processos estocásticos e da estatística. O comportamento dinâmico de estruturas deixa desafios vários para quem sobre esses problemas se queira debruçar.

BIBLIOGRAFIA

- Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1993). *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, 2nd Ed., John Wiley.
- Carli, F. (1995). Smooth frequency modulating functions for strong ground motions, *Proc. 10th Eur. Conf. Earthquake Engineering*, Vienna, 1994, Balkema, 155–160.
- Carli, F. (1992). Nonstationary models of earthquake accelerograms *Proc. of the World Conf. on Earthquake Engineering*, Madrid, 1992, Balkema, 829–834.
- Ching, J., Beck, J.L. and Porter, K.A. (2006). Bayesian state and parameter estimation of uncertain dynamical systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **21**(1), 81–96.
- Chiostrini, S. and Facchini, L. (1999). Response analysis under stochastic loading in presence of structural uncertainties, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 853–870.

- Clough, R.W. and Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*, 2nd edition, Civil Engineering Series, Mc-Graw Hill Int. Ed.
- Fan, F.G. and Ahmadi, G. (1990). Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquakes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **5**(4), 171–181.
- Faravelli, L. (1988). Source-to-site seismic models in structural dynamics. *Proc. of the 3rd International Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton (UK), 1021–1032.
- Grigoriu, M., Ruiz, S.E. and Rosenblueth, E. (1988). Mexico earthquake of September 19, 1985 — nonstationary models of seismic ground acceleration, *Earthquake Spectra*, **4**(3), 551–568.
- Guillaume, P., Verbove, P. and Vanlanduit, S. (1998). Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals, *Proc. of the 23rd International Conf. on Noise and Vibration Engineering*, ISMA, 955–962.
- Hampl, N.C. and Shueller, G.I. (1989). Probability densities of the response of nonlinear structures under stochastic dynamic excitation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **4**, 1–9.
- Ikhrouane, F. and Rodellar, J. (2007). *Systems with Hysteresis: Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model*, Wiley.
- Iwan, W.D. and Huang, C.T. (1996). On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainties, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31**, 631–645.
- Jensen, H. and Iwan, W.D. (1991). Response variability in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 949–959.
- Jensen, H. and Iwan, W.D. (1992). Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, **118**, 1012–1025.
- Kameda, H. and Nojima, N. (1988). Simulation of risk-consistent earthquake motion, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **16**(7), 1007–1019.
- Kloeden, P.E. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin.
- Lin, Y.K. (1976). *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Krieger, Malabar (USA).
- Ljung L. (1999). *System Identification — Theory for the User*, 2nd ed., PTR Prentice Hall.
- Lutes, L.D. and Sarkani, S. (1997). *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, N.J.
- Milstein, G.N. (1995). *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Muscolino, G. (2001). Stochastic dynamics for structural engineering problems: a review. *Civil and Structural Engineering Computing: 2001*, B.H. Topping, Ed., Saxe-Coburg Publications, 287–318.
- Nigam, N.C. (1983). *Introduction to Random Vibrations*, MIT Press, Cambridge MA.
- Peeters, B. and Ventura, C.E. (2003). Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **17**(5), 965–988.
- Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press.
- Roy, D. and Dash, M.K. (2005). Explorations of a family of stochastic Newmark methods in engineering dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(45–47), 4758–4796.
- Schüeller, G.I. (1997). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics — Simulation techniques. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Special issue IASSAR Report, **12**, 203–229.
- Soong, T.T. and Grigoriu, M. (1993). *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice Hall Englewood Cliffs, N. J.

Spanos, P.D., Tein, W.Y. and Ghanem, R. (1992). Spectral estimation of bivariate non-stationary processes. *Proc. of the World Conf. on Earthquake Engineering*, 839.

Tang, H.S. and Sato, T. (2005). Auxiliary particle filtering for structural system identification, *Proc. SPIE*, **5765** (710).

Tocino, A. and Ardanuy, R. (2002). Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **138**, 219-241.

Van Overschee, P. and De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory Implementation — Applications*, Kluwer Academic Publishers.

Zhang, L., Zu, J.W. and Zheng, Z. (1999). The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree-of-freedom non-linear systems, *Computers and Structures*, **70**, 557-568.

