

DESENHAR ENTRE FRONTEIRAS
*Aprendizagem, Investigação e Comunicação
pelo Desenho na Universidade*

DRAWING ACROSS BORDERS
*Learning, Research and Communication
through Drawing in the University*

Editores / Editors

Mário Bismarck

Paulo Luís Almeida

Sílvia Simões

Vítor Silva

(i2ADS/FBAUP)

Autores / Authors

Cláudia Amandi (i2ADS/FBAUP)

Helena Mena Matos (CMUP/FCUP)

Jorge Marques (i2ADS/FBAUP)

Marina Vale Guedes (i2ADS/FBAUP)

Mário Bismarck (i2ADS/FBAUP)

Paulo Luís Almeida (i2ADS/FBAUP)

Pedro Alegria (i2ADS/FBAUP)

Sílvia Simões (i2ADS/FBAUP)

Vasco Cardoso (i2ADS/FBAUP)

Vítor Silva (i2ADS/FBAUP)

Tradução / Translation

Fernanda Maio / Kevin Rose

Revisão de texto / Text review

Maria Catarina Silva

Paulo Luís Almeida

i2ADS edições

i2ADS – Instituto de Investigação
em Artes, Design e Sociedade
Faculdade de Belas Artes
da Universidade do Porto

i2ADS – Institute of Research
in Art, Design and Society
Faculty of Fine Arts,
University of Porto

i2ads.up.pt

2023

Design editorial / Editorial Design

Joana Lourencinho Carneiro

ISBN

978-989-9049-38-3

Depósito Legal

524879/23

Impressão / Printing

Penagráfica

Tiragem / Print Run

150

Este trabalho é financiado por fundos nacionais
através da FCT – Fundação para a Ciência
e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto
UIDP/04395/2020 e Drawing Across University
Borders (PTDC/ART-OUT/3560/2021).

This work is financed by national funds through
the Portuguese funding agency, FCT – Fundação
para a Ciência e a Tecnologia, within the project
UIDP/04395/2020 and Drawing Across University
Borders (PTDC/ART-OUT/3560/2021).

Desenhar para visualizar na matemática

Helena Mena Matos, Vasco Cardoso

“A matemática, como criação humana e cultural, lidando com objetos e entidades bastante diferentes do fenómeno físico (...), depende muito (...) da visualização nas suas diferentes formas e a diferentes níveis, muito além do óbvio campo visual da geometria e da visualização espacial”

Arcavi

Conceitos, resultados e métodos matemáticos são mentalmente apreendidos de muitas formas diferentes, dando lugar a representações visuais muito diversas de informação figurativa ou não figurativa e de relações abstratas. Os matemáticos têm uma variedade de imagens mentais de natureza intuitiva, para entender e manipular conceitos e métodos na área específica em que trabalham. Essas imagens ajudam-nos a lidar com factos e resultados frequentemente muito abstratos e complexos. Como muito bem apontou Massironi (1989, p. 17) “... os pesquisadores de quase todas as disciplinas que, chegados a determinados limites nos próprios conhecimentos expressos pela palavra, encontram com um sinal não verbal a possibilidade de irem mais além...”

Sendo a percepção humana fortemente visual, não é inesperado que o recurso visual esteja tão presente na matemática, não só em áreas como a geometria, abordando conteúdo espacial, mas também em áreas mais abstratas em que são frequentemente usados esquemas e diagramas, envolvendo a imaginação, para ajudar a lidar com a abstração. O uso do desenho (no seu sentido mais lato) é, sem dúvida, importante nos diferentes contextos da atividade matemática, seja na investigação, no ensino ou na comunicação.

O desenho e a prova matemática

No ensino superior e na investigação, a prova desempenha um papel primordial na matemática. Uma prova matemática é uma demonstração lógica de que uma afirmação é verdadeira. Partindo de um facto conhecido (ou de uma suposição que se presume ser verdadeira) é realizada uma sequência de deduções, cada uma obtida logicamente da anterior e culminando na afirmação desejada. Matemáticos contemporâneos formulam conjecturas envolvendo conceitos abstratos que devem ser depois suportados pela prova. Como Steven Krantz (2007) escreveu:

A característica identitária e diferenciadora da matemática relativamente às outras ciências, à filosofia e, de facto, a todas as outras formas de discurso intelectual, é o uso da prova rigorosa. É o conceito de prova que torna o assunto coeso, que lhe confere sua intemporalidade e universalidade. (p. 1)

No percurso histórico de depuração dos processos dedutivos levados a cabo pela matemática em busca da prova, observa-se uma gradual abstração realizada a partir da realidade. Consequentemente, é de entender que os processos de depuração e sedimentação do conhecimento tenham arrancado no seio do exercício de práticas, nomeadamente profissionais, e convergido durante o tempo para a construção

de teorias gerais, de uma sistematização científica. Veja-se o caso da teoria geométrica sobre o Desenho (Santo, 1984):

...muitas das projecções não surgiram historicamente como tal, mas sim como processos ou métodos, mais ou menos simplificados ou sistematizados, de traçado ou execução, com vista a facilitar os desenhadores ou artistas. Apenas posteriormente, com o desenvolvimento da Geometria, (...), é que «as peças foram sendo juntadas» num todo coerente, e que se pôde identificar processos de execução existentes com os tipos de projecção a que correspondiam. (pp. 185-186)

É bem sabido que a agrimensura era uma preocupação tanto para os egípcios quanto para os gregos, e a matemática nos seus tempos primordiais estava frequentemente ligada a esses problemas geométricos práticos. Tratavam-se estes exemplos daquilo a que se chama

geometria prática ou de fábrica: geometria *fabrorum*. Neste contexto, entende-se o facto de que, na Grécia da antiguidade, uma “verdade” matemática só precisava ser justificada por uma imagem plausível e uma descrição convincente. Os gregos usavam texto e diagramas de forma interdependente para derivar muitas asserções, sendo espacial, em vez de lógico, o princípio orientador no desenvolvimento da prova (Netz 1999, pp. 27-30). Os diagramas eram frequentemente esquemáticos representando as características qualitativas das configurações geométricas e eram o cerne das proposições matemáticas (Netz 1999, pp. 18-35).

No entanto, com o tempo, foi acontecendo uma gradual sistematização do conhecimento, num processo de filiação ao número, à expressão exata da quantidade. O pensamento e expressão visuais foram sendo afastados da ciência. Visto a partir do campo da arte, um afastamento com sentido oposto também pôde ser detetado, algo a que Cabezas (2002) chamou “divórcio arte-ciência”. O autor apontou historicamente os escritos de Alberti sobre desenho e perspectiva como os primeiros sintomas desse divórcio. E, concluiu que “[a] racionalidade geométrica do linear estava marcada por um rumo assinalado, pelo menos desde o pensamento de Descartes.” (pp. 126-127).

O século XVII foi de atividade e inovação intensas com o desenvolvimento da álgebra simbólica e da geometria analítica, a criação do cálculo diferencial e integral e os avanços no cálculo numérico. Como apontado por Andersen (2007) “para ser realmente interessante naqueles tempos, um tópico tinha que se relacionar com as duas novas disciplinas matemáticas importantes: geometria analítica e cálculo” (p. 718).

Em 1628, René Descartes escreveu a sua primeira grande obra *Regulae ad directionem ingenii*, publicada apenas em 1701, sobre o método adequado para o pensamento científico e filosófico. É composta por vinte e uma regras, algumas delas envolvendo processos de visualização e referindo-se a diferentes papéis de imagens e figuras no pensamento matemático das quais destacamos as seguintes (Descartes [1701] 1954):

Regra XIV: O problema deve ser re-expresso em termos da extensão real dos corpos e deve ser retratado na nossa imaginação inteiramente por meio de figuras simples. Assim será percebido muito mais distintamente pelo nosso intelecto.

Regra XV: Geralmente é útil desenhar estas figuras e exibi-las diante dos nossos sentidos externos. Deste modo será mais fácil mantermos a nossa mente alerta.

Regra XVI: Quanto às coisas que não requerem a atenção imediata da mente, por mais necessárias que sejam para a conclusão, é melhor representá-las por símbolos concisos do que por figuras completas. Assim, será impossível que a nossa memória se engane, e a nossa mente não se distrairá por ter que retê-las enquanto se ocupa com a dedução de outros assuntos.

Naquela época, a interação entre imagem e uma nova prática algébrica era comum na atividade matemática.

No século XIX, o desenvolvimento da matemática rigorosa e formal levou os matemáticos a excluir as ferramentas visuais em favor de uma abordagem linguística da matemática. O uso de desenhos era permitido no contexto da descoberta, assim como para simplificar a cognição, mas não como justificação (Mancosu, 2005). Várias citações sustentando esta ideia podem ser encontradas em Mancosu (2005), das quais destacamos a seguinte:

O apelo a uma figura não é, em geral, nem um pouco necessário. Essencialmente, facilita a compreensão das relações enunciadas no teorema e as construções aplicadas na prova. Além disso, é uma ferramenta profícua para descobrir tais relações e construções. No entanto, se não se recebe o sacrifício de tempo e esforço envolvido, pode-se omitir a figura na prova de qualquer teorema; de facto, o teorema só é verdadeiramente demonstrado se a prova for completamente independente da figura. (Pasch, 1882/1926, como citado em Mancosu, 2005, p. 14)

A construção de Weierstrass em 1872 de uma função contínua mas não derivável em todos os pontos, que confundia a visão, contribuiu certamente nessa altura para a ideia de que os matemáticos confiavam demasiadamente no pensamento visual. Vários matemáticos alegaram que os desenhos podiam ser enganadores e suspeitos e que qualquer prova deveria ser feita exclusivamente através do raciocínio lógico (Mancosu, 2005, Guzman, 2002). A verdade não estava contida na representação visual; em vez disso, só poderia ser estabelecida por meio da capacidade de raciocínio do cérebro humano. Esta mentalidade persistiu durante uma boa parte do século XX. Na literatura cientí-

fica a norma era a formalização estrita, evitando elementos visuais, e os livros didáticos universitários tendiam a seguir os mesmos critérios. O livro de Dieudonné sobre álgebra linear e geometria elementar (*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 1964), sem uma única figura, é um exemplo notável desse espírito.

Concomitantemente, é interessante verificar que, pelo outro lado, o do desenho, a ferramenta matemática é, em muitas expressões, afastada do pensamento artístico. Relembremos o “divórcio arte-ciência”: “Por volta dos primeiros anos do século XIX culmina e estabiliza uma classificação, generalizada, ainda que excessivamente esquemática, para diferenciar o “desenho artístico” do “desenho linear”, como um reconhecimento explícito da divergência de interesses entre a arte e a ciência” (Cabezas, 2002, pp. 126-128).

Mas, desde o final do século XX, a visualização na atividade matemática (ensino, investigação e publicação) tem vindo a crescer, influenciada fortemente pelo desenvolvimento de técnicas de visualização computacional. Diversas áreas da matemática têm beneficiado de imagens geradas por computador como um meio de apoio no processo de investigação, resultando em novas descobertas matemáticas que depois são lógica e consistentemente formuladas e demonstradas, uma tarefa que, por vezes, é extremamente desafiadora e intelectualmente muito exigente.

“Provas sem palavras” passaram a surgir desde 1976 em revistas como *Mathematics Magazine* e *The College Mathematics Journal*, ambas publicadas pela *Mathematical Association of America* (MAA). Não se trata verdadeiramente de provas, mas sim de figuras e diagramas que mostram porquê e como se pode iniciar o processo de demonstrar como sendo verdadeira uma determinada afirmação. A ênfase está claramente em proporcionar pistas visuais para estimular o pensamento matemático. Uma coleção de algumas dessas “provas sem palavras”, publicadas em revistas da MAA, pode ser encontrada em Nelsen (1993, 2000, 2015).

Contudo, como aponta Mancosu (2005), os padrões tradicionais de rigor não parecem ter sido perturbados por este retorno ao visual. Vários matemáticos fazem referência ao valor cognitivo das imagens visuais na matemática, mas parecem entender também que elas não satisfazem os padrões de rigor aceites como necessários para estabelecer os resultados das suas investigações.

Desenhar para visualizar

O desenho, no seu sentido mais amplo, revela-se na matemática ao concretizar a visualização. Assim, parece-nos importante articular duas perspetivas sobre visualização, oriundas das duas áreas do conhecimento aqui presentes: matemática e desenho. Da primeira, adotaremos a definição de visualização proposta por Arcavi (2003):

A visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de, e reflexão acerca de, desenhos, imagens, diagramas, nas nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de retratar e comunicar informação, pensar em e desenvolver ideias previamente desconhecidas e avançar no entendimento. (p. 217)

Pelo lado do Desenho, uma filiação no discurso de Massironi (1989) sobre visualização afigura-se-nos como natural, aproveitando-se o facto de o autor concluir com a relevação do papel central do desenho nesse processo:

Certas produções mentais têm a característica de só se estruturarem de maneira visiva. Estão neste caso situações em que só um raciocínio por imagens permite resolver um problema ou atingir um resultado cognoscitivo de outro modo inatingível (...). Os resultados obtidos deste modo, para serem expressos e comunicados, têm de assumir, consequentemente, uma codificação visiva. O desenho é portanto, o instrumento que habitualmente mais se adapta à transmissão deste tipo de conteúdos. (p. 133)

Existem várias formas diferentes de visualização na matemática e que podem ser classificadas segundo diversos critérios e de acordo com os fins a que se propõem atender.

Guzman (2002) considera quatro tipos de visualização na matemática, de acordo com o grau de correspondência entre a situação matemática e o modo da sua representação: *visualização isomórfica* (representações em que os elementos visuais têm uma correspondência exata com objetos e relações matemáticos); *visualização homeomórfica* (representações subjetivas, em que elementos visuais imitam suficientemente bem as relações entre objetos abstratos, incentivando a construção de imagens em processos como descoberta intuitiva, in-

investigação e prova); *visualização analógica* (substituição de objetos por outros que se relacionam de maneira análoga e cujo comportamento seja conhecido, ou tenha sido examinado de antemão); e *visualização diagramática* (em que os objetos mentais e as relações entre eles são representados através de diagramas, facilitando a visualização dos processos de pensamento).

A partir da observação de estudantes, Presmeg (2006) identificou cinco tipos de visualização, de acordo com os tipos de imagens visuais: *concreta*, *cinestésica* (de movimento físico), *dinâmica* (transformação de imagem ou movimento), *memória* (imagens de fórmulas), e *padrão* (relações puras desprovidas de detalhes concretos).

No que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades, Bishop (1983) propôs dois tipos diferentes: (1) *Interpretação de informação figurativa* (ler, compreender e interpretar representações visuais e vocabulário espacial) (2) *Processamento visual* (tradução de relações abstratas e informação não figurativa em termos visuais e manipulação e transformação de representações e imagens visuais).

Atenta à fidelidade das representações, à tipologia das imagens, ou ao desenvolvimento de capacidades, ou, ainda, a qualquer outro aspeto igualmente importante, a visualização promove e desenvolve o raciocínio visual na matemática, ou em qualquer outra área do conhecimento. Como vimos atrás, Massironi (1989) atribuiu ao desenho a propriedade de edificação da visualização, essencialmente, porque permite o trabalho sobre modelos, modelos de execução rápida, simples e eficaz. Por outro lado, lembramos, essas virtudes do desenho fazem emergir uma outra virtude: a fixação dos vários momentos dum processo de raciocínio, permitindo, a todo o momento, o pensamento retrospectivo.

Tendo o papel do desenho na visualização como foco da nossa atenção, importa-nos destacar o seguinte: por um lado, o desenho como mobilizador de visualização de dados, no tempo e no espaço, para compreender, interpretar e reconhecer padrões, algo que advém essencialmente de uma atitude analítica – o desenho participa na exposição de dados que decorrem de ou promovem um processo dedutivo. Por outro lado, interessa-nos destacar o desenho como convocador na exploração de ideias abstratas e promotor de conjecturas – o desenho participa na construção de um processo dedutivo. No caso da matemática, esses processos ocorrem com mais importância na

busca pela prova. Assim, abordaremos estas duas faces do desenho na atividade matemática, ambas presentes nos diferentes contextos matemáticos (investigação, ensino ou comunicação) e, frequentemente, ambas utilizadas nas diferentes tarefas de um mesmo problema de investigação matemática.

Utilizaremos os desenhos recolhidos no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, constituintes do acervo do projeto de investigação “DRAWinU” financiado pela FCT, de modo a conseguirmos destacar o papel do desenho na visualização em matemática. Alocaremos a cada uma das duas instâncias por nós definidas, das imagens referidas, as que forem atinentes. Desta forma, chamaremos a este texto algumas das várias áreas de estudo do vasto campo da matemática.

Representar dados

No que respeita à visualização de dados e mais especificamente à análise de dados, o desenho ocorre amplamente na área de Estatística através de representações gráficas de informação quantitativa nas suas mais variadas formas (gráficos bivariados, gráficos de barras, histogramas, gráficos de contorno, gráficos de séries temporais...). Trata-se de uma importante ferramenta analítica com raízes profundas e com inovações recentes que exploram gráficos computacionais e tecnologias relacionadas. Uma boa visão geral da história da visualização de dados desde a Idade Média até a era moderna, com histórias representativas de marcos históricos (motivações de desenvolvimento, objetivos de comunicação, relação com o desenvolvimento, percursos, reinvenção atual) pode ser encontrada em Friendly (2015).

Nas últimas décadas assistimos à proliferação da visualização de dados por via de uma ampla gama de tratamentos gráficos e, através de uma variedade de ferramentas de *software*, foi aberta a possibilidade a organizações, académicos e ao público em geral, de explorarem dados de maneiras novas e cada vez mais criativas.

As imagens 1 e 2 foram retiradas de um relatório (setembro de 2022) entre muitos outros elaborados por Óscar Felgueiras (FCUP) durante a situação pandémica da COVID-19 em Portugal. São exemplos de representações visuais utilizadas para a análise de grandes

quantidades de dados e que têm de ser suficientemente simples e claras para serem entendidas por não especialistas em estatística. Proporcionam à classe política e ao público em geral uma visão atualizada do estado de pandemia e constituem uma componente fundamental para uma boa tomada de decisão.

Modelos matemáticos de problemas do mundo real são complexos e extremamente difíceis de resolver analiticamente e os cientistas têm-se apoiado fortemente em abordagens visuais e qualitativas na descoberta e na análise dos mesmos. A visualização de informação é um auxílio na análise e compreensão de conjuntos de dados complexos associados a esses modelos e na deteção de características interessantes dos mesmos. Os desenhos (imagens 3, 4 e 5) obtidos pelo estudante de doutoramento Simon Ranjith Jeyabalan (FCUP/CMUP) na sua investigação numérica de um modelo em Dinâmica dos Fluidos Computacional, representam o comportamento temporal das energias cinética e magnética e foram elaborados para compreender o comportamento do modelo.

Visualizar estruturas complexas é uma componente-chave em diversas áreas da matemática, tanto em áreas fundamentais como em mais aplicadas. Desenhar grafos, mapas, diagramas, etc., que sejam simples e de fácil leitura e compreensão é um passo comum para ultrapassar dificuldades de visualização. Os resultados visuais de tais desenhos não aspiram a evocar a realidade tangível.

O desenho de grafos aborda o problema de construção de representações visuais de estruturas conceptuais modeladas por grafos usadas principalmente na análise e reconhecimento de padrões. Um grafo é uma estrutura abstrata utilizada para representar qualquer informação que possa ser modelada em termos de objetos e conexões entre esses objetos. Em geral, um grafo é desenhado como um conjunto de pontos – os vértices (que representam uma classe de objetos tais como indivíduos ou proteínas), ligados por segmentos de reta ou curvas – as arestas (indicadoras de ligações tais como amizades ou interações de ligação molecular). Ao nível do ensino pré-graduado muitos desenhos em teoria dos grafos podem ser realizados à mão. Mas, nas últimas décadas, o campo do desenho de grafos sofreu enormes desenvolvimentos abrangendo fundamentos topológicos e geométricos, algoritmos, sistemas de software e aplicações ao comércio, à ciência e à engenharia. Na vertente teórica, os assuntos de estudo variam des-

de características combinatórias de grafos até algoritmos geradores de imagens. Na vertente dos sistemas, diversas ferramentas para o desenho de grafos têm sido apresentadas no meio acadêmico e também com fins comerciais. Em virtude da crescente disponibilidade e diversidade de propriedades envolvendo grafos, atualmente os problemas de desenho de grafos têm vindo a tornar-se cada vez mais complexos e são tratados apenas computacionalmente.

Manuel Delgado (FCUP/CMUP) tem, como afirma, um pensamento muito visual e precisa de representações visuais mais do que raciocínio algébrico puro. Desenvolveu assim ferramentas de visualização próprias com o intuito de o ajudarem na sua investigação matemática. As imagens 6-8 são exemplos de desenhos de grafos obtidos no decurso da sua investigação na área de Semigrupos Finitos. Outros tipos de desenhos podem também ser obtidos computacionalmente usando as ferramentas desenvolvidas por Manuel Delgado, como por exemplo os desenhos 9 e 10 realizados no âmbito da sua investigação na área de Semigrupos Numéricos. Eles constituem uma ajuda numa primeira fase da sua investigação em que é feito o reconhecimento de padrões, em que se descarta problemas sem interesse, e em que são realizadas conjecturas.

Desenhar ideias e conceitos abstratos

Em diversas áreas da investigação matemática e durante o processo criativo, o desenho em parceria com a escrita simbólica é frequentemente utilizado para explorar conceitos abstratos e descobrir novas ideias de um modo muito pessoal, muitas vezes para dar forma a objetos ou relações que se visualizam com a mente. Trata-se de uma prática de representação de imagens mentais que auxilia no processo do pensamento, frequentemente através de diagramas e imagens simbólicas, que não são facilmente compartilhadas. Em geral os matemáticos referem-se a essas representações visuais não como desenhos mas antes como *rabiscos*, e frequentemente parecem envergonhar-se deles, descartando-os depois de esclarecidas as suas mentes.

Os desenhos produzidos por Samuel Lopes (FCUP/CMUP) (imagens 11 e 12) foram usados no contexto da sua prática investigativa nas áreas de Teoria da Representação e de Combinatória. Não

são representações de entidades físicas, mas sim de ideias e conceitos abstratos relacionados com explorações formais da noção de simetria.

Durante os seus estudos de pós-doutoramento (2017) como investigadora do CMUP, Nóra Szakács, trabalhando na área de Teoria de Semigrupos, usava frequentemente o desenho para retratar ideias abstratas sobre questões algorítmicas (imagens 15 e 16).

Os desenhos de Christian Lomp (FCUP/CMUP) (imagens 13 e 14), realizados no âmbito da sua prática de investigação na área de Álgebra, são também representações de ideias e conceitos abstratos, mais especificamente da multiplicação de certos elementos numa álgebra de diagramas. Os desenhos foram realizados para uma melhor perceção desta estrutura multiplicativa. A alguns diagramas, desempenhando um papel importante no estudo em questão, foram associadas letras de forma a facilitarem a passagem à prova formal dos resultados algébricos.

O estudante de doutoramento João Matias desenha frequentemente para compreender resultados enunciados algebricamente. Os desenhos foram realizados por ele com o intuito de uma melhor compreensão de teoremas da área de Dinâmica Hiperbólica (imagens 17 e 18).

Isabel Labouriau (FCUP/CMUP) faz muitos desenhos nas suas diferentes atividades matemáticas, pois, como refere, trabalha e pensa desenhando. Os desenhos foram realizados no âmbito da sua investigação na área de Sistemas Dinâmicos (Fig. 1 e 2, imagens 19, 20 e 21). Esses desenhos ajudam a compreender as alterações no comportamento matemático. Quando o sistema dinâmico é um modelo para algum fenómeno, essas alterações correspondem a resultados previstos sob diferentes condições experimentais.

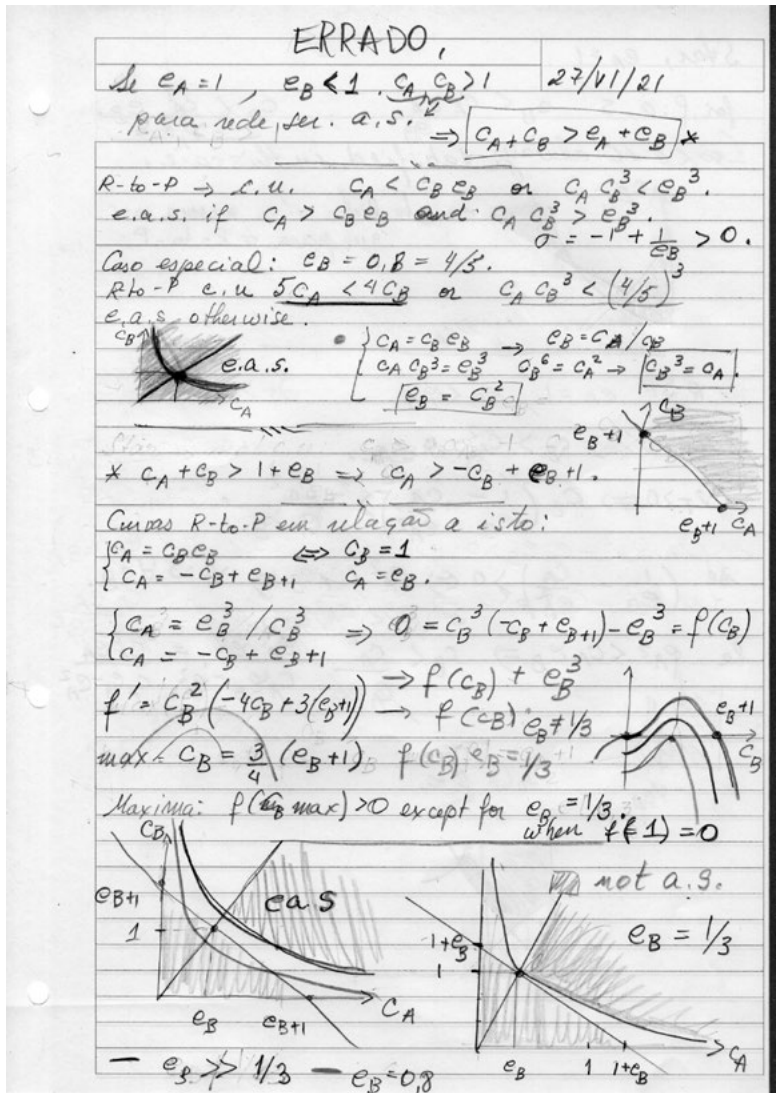


Fig. 1 – Jogos x Dinâmica. Pedra-Papel-Tesoura-Lagarto-Spock I,
 Isabel Labouriau, 2021.

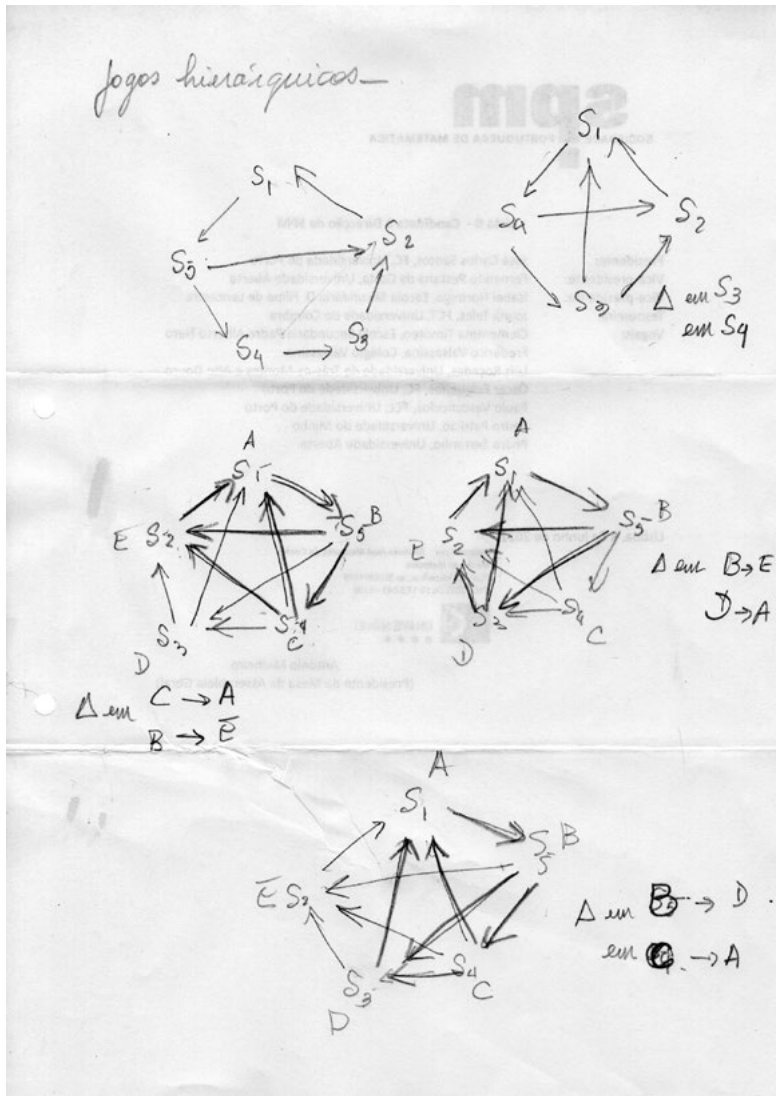


Fig. 2 – Dinâmica-População-Jogos. Jogos Hierárquicos.,
Isabel Labouriau, 2022.

Como evidenciado, o desenho é usado de forma extremamente significativa a vários níveis na atividade matemática. Muitas vezes é o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos. Pode gerar, de muitas maneiras, desafios interessantes, e é utilizado frequentemente para fazer conexões entre os muitos objetos teóricos que, de certa forma, são extremamente difíceis de descobrir usando exclusivamente a lógica. Pode assim ser muito útil para o fomento da criatividade e intuição. Adicionalmente, o desenho desempenha um papel muito relevante ao nível da comunicação entre cientistas, tanto entre matemáticos, quanto entre equipas interdisciplinares. Neste último caso, a especificidade das linguagens das diversas áreas poderá tornar o desenho essencial na construção de uma ponte, de um lugar de entendimento entre as diversas disciplinas.

Pensar no desenho como uma linguagem, uma linguagem que pode desenvolver questões e ideias, torna possível processos colaborativos entre artistas e matemáticos, que de outra forma não seriam viáveis. A colaboração entre a artista visual Gemma Anderson e os matemáticos Buck, Coates e Corti (Anderson *et al.*, 2015), na qual as lógicas divergentes da artista e dos matemáticos são tratadas em igualdade de circunstâncias, contribuiu de forma muito significativa para definir o papel do desenho como linguagem comum entre a matemática e a arte. Aqui artista usufruiu do acesso, impossível de outra forma, a geometrias sofisticadas e da oportunidade de as explorar e alterar incorporando-as na sua compreensão da forma. Os matemáticos beneficiaram com a interpretação através de desenhos de objetos puramente conceituais com implicações tanto em termos de criatividade e intuição, como em termos de divulgação dos seus conhecimentos para um público mais geral sem ter que infantilizar, comprometer ou desvirtuar as suas ideias.

No mesmo espírito, a colaboração entre Devadoss e Schuh (2019), o primeiro um matemático a trabalhar num problema envolvendo espaços de árvores, motivado pela filogenética, e o segundo um artista visual, foi realizada com o matemático envolvido nos desenhos e o artista envolvido na matemática. Os resultados desse trabalho colaborativo foram um tríptico de pinturas (criadas com acrílico, grafite, aquarela e folha de metal) com foco em diferentes navegações dentro

desses espaços de árvores, bem como um novo conjunto de questões matemáticas em aberto.

Concluimos esta breve discussão sobre o uso do desenho na matemática com o muito interessante sentimento de Devadoss e Schuh (2019, p. 282):

Embora um modelo computacional fosse possível para este projeto, achamos que desenhos feitos à mão eram mais apropriados. O computador altera o modo como se interage com o objeto: Embora mais fácil de manipular e alterar, esse comportamento por si só pode conduzir a que certos aspetos sejam negligenciados. Colocar o espaço de árvores num quadro bidimensional que leva mais tempo para “renderizar” força a pessoa a desacelerar e talvez a abordá-lo de maneira diferente.

RECONHECIMENTO

Os autores do texto agradecem a todos os colegas que contribuíram para este projeto com os seus desenhos e experiência.

Referências

- Andersen, K. (2007). *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.
- Anderson, G., Buck, D., Coates, T., and Corti, A. (2015) Drawing Mathematics: From Inverse Vision to the Liberation of Form. *Leonardo*, Vol. 48(5), pp. 439-448.
- Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215-241.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Cabezas, L. G. (2002). Las Máquinas de dibujar. Entre el mito de la visión objetiva y la ciencia de la representación. In J.J.G. Molina (Coord.), *Máquinas e Herramientas de Dibujo*, (pp. 83-348). Madrid: Cátedra.
- Descartes, R. (1954). *Rules for the direction of the mind* (E. Anscombe and P. Geach, Trans.). (Obra original publicada em 1701).
- Devadoss S.L. & Schuh, O. (2019). Cartography of Tree Space. *Leonardo* 52 (3), (pp. 279-283).
- Friendly, M. (2008). A Brief History of Data Visualization. In C. Chen, W. Härdle and A. Unwin (Eds.), *Handbook of Data Visualization* (pp. 15-48). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Guzman, M. (2002) The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis, *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (2nd, Hersonissos, Crete, Greece, July 1-6, 2002).
- Krantz, S. J. (2007) The History And Concept Of Mathematical Proof. Acessível em: <https://www.eolss.net/sample-chapters/c02/E6-132-37.pdf>
- Mancosu, P. (2005). Visualization in Logic and Mathematics. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen and S. A. Pedersen (Eds), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Synthese Library, vol 327. Dordrecht: Springer-Verlag.
- Massironi, M. (1989). *Ver Pelo Desenho: Aspectos Técnicos, Cognitivos, Comunicativos*. Lisboa: Edições 70.
- Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R.B. (2000). *Proofs without Words II: Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. B. (2015). *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History (Ideas in Context, Series Number 51)* (1st ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.
- Santo, H. P. (1984). *Métodos Gráficos e Geometrias Computacionais*, Vol.1, Conceitos Básicos. Lisboa: Dinalivro.

*Drawing to visualise
in mathematics*

Helena Mena Matos, Vasco Cardoso

“Mathematics, as a human and cultural creation dealing with objects and entities quite different from physical phenomena (...), relies heavily (...) on visualisation in its different forms and at different levels, far beyond the obviously visual field of geometry, and spatial visualisation.”

Abraham Arcavi

Mathematical concepts, results and methods are perceived by our minds in many ways, having rich, different visual representations of figurative or non-figurative information and abstract relationships. Mathematicians have a variety of mental images of an intuitive nature to understand and manipulate concepts and methods in the specific area of their work. These images help them to handle the facts and results that are frequently too abstract and complex. As Massironi (1989, p.17) very well pointed out, “researchers from almost all disciplines [...], having reached certain limits in their own knowledge expressed by the word, find with a non-verbal signal the possibility of going further”.¹

1 Our translation from the Portuguese edition.

Human perception being very strongly visual, it is not unexpected that the visual feature is so present in mathematics, not only in areas like geometry, which deal with spatial content, but also in more abstract ones where schemes and diagrams are frequently used, involving the imagination, to helping deal with abstraction. The use of drawing (in its broader sense) is undoubtedly important in the different contexts of mathematical activity, whether in research, education, or communication.

Drawing and mathematical proof

In higher education and research, the core of mathematics is the proof. A mathematical proof is a logical demonstration that a claim is true. A sequence of deductions is made, starting from a known fact (or an assumption presumed to be true), each deducing logically from the one before it and culminating in the desired statement. Contemporary mathematicians formulate conjectures regarding abstract concepts that must then be supported by proof. As Steven Krantz wrote:

The unique feature that sets mathematics apart from other sciences, from philosophy, and indeed from all other forms of intellectual discourse, is the use of rigorous proof. It is the proof concept that makes the subject cohere, that gives it its timelessness, and that enables it to travel well (Krantz, 2007, p.1).

In the historical path of debugging the deductive processes carried out in the mathematical proof, a gradual abstraction is carried out from reality. It is understandable that the processes of purification and sedimentation of knowledge have started within the exercise of practices, namely professional ones, converging over time towards the construction of general theories of scientific systematisation. See the case of the geometric theory of drawing (Santo, 1984, pp. 185-186):

Many of the projections did not arise historically as such, but as processes or methods, more or less simplified or systematized, of outline or execution, in order to aid draftsmen or artists. It was only later, with the development of Geometry, (...), that «the pieces were being put together» in a coherent whole, and that existing execution processes could be identified with the types of projection to which they corresponded.²

It is well known that land surveying was a concern for both the Egyptians and the Greeks, and mathematics in its early times was frequently connected with those practical geometrical problems. These were examples of what is called *geometria fabrorum*, or practical geometry. Thus, in the context outlined above, in ancient Greece, a mathematical “truth” only needed to be justified by a plausible picture and a convincing description. The Greeks interdependently used text and diagrams to derive many assertions, and the guiding principle in the development of proof was spatial rather than logical (Netz 1999, pp. 27, 30). Diagrams were often schematic, representing the qualitative features of the geometrical configurations and were the core of the mathematical propositions (Netz 1999, pp.18, 35).

However, knowledge gradually became systematized over time through a process of affiliation to number, to the precise statement of quantity. Visual thought and expression were being pushed away from science. In the Arts a trend in the opposite direction could also be detected, something that Cabezas (2002, pp. 126, 128) called *art-science divorce*. The author identified the first signs of this separation historically in Alberti’s essays on perspective and drawing and concluded that “the geometric rationality of the linear was marked by a course established, at least, since the thought of Descartes”.³

The seventeenth century was one of intense activity and innovation with the development of symbolic algebra and analytic geometry, the invention of the differential and integral calculus and the advances in numerical calculation. As pointed out by Andersen, “to be really interesting in those days, a topic had to relate to the two new important mathematical disciplines: analytical geometry and calculus” (2007, p. 718).

2 Our translation from the Portuguese original.

3 Our translation from the Spanish original.

By 1628, René Descartes wrote his first major work, *Rules for the Direction of the Mind* (*Regulae ad directionem ingenii*), not published until 1701, regarding the proper method for scientific and philosophical thinking. It consists of twenty-one rules, some of them involving visualisation processes and referring to different roles of images and figures in mathematical thinking, of which we highlight the following (Descartes 1701/1954):

Rule XIV: *The problem should be re-expressed in terms of the real extension of bodies and should be pictured in our imagination entirely by means of bare figures. Thus it will be perceived much more distinctly by our intellect.*

Rule XV: *It is generally helpful if we draw these figures and display them before our external senses. In this way it will be easier for us to keep our mind alert.*

Rule XVI: *As for things which do not require the immediate attention of the mind, however necessary they may be for the conclusion, it is better to represent them by concise symbols rather than by complete figures, - It will thus be impossible for our memory to go wrong, and our mind will not be distracted by having to retain these while it is taken up with deducing other matters.*

At that time, the interplay between image and a new algebraic practice was common in mathematical activity.

In the 19th century, the development of rigorous and formal mathematics led mathematicians to exclude visual tools in favour of a linguistic development of mathematics. The use of drawings was allowed in the context of discovery and to simplify cognition but not as justification (Mancosu, 2005). Several quotes supporting this idea can be found in Mancosu, from which we highlight the following:

For the appeal to a figure is, in general, not at all necessary. It does facilitate essentially the grasp of the relations stated in the theorem and the constructions applied in the proof. Moreover, it is a fruitful tool to discover such relationships and constructions. However, if one is not afraid of the sacrifice of time and effort involved, then one can omit the figure in the proof of any theorem; indeed, the theorem is only truly demonstrated if the proof is completely independent of the figure (Pascch, 1882/1926, as cited in Mancosu 2005, p. 14).

The construction of Weierstrass in 1872, of a continuous nowhere differentiable function that deceived the eye, certainly contributed to the idea that mathematicians relied too much on visual thinking. Various mathematicians pointed out that drawings could be misleading and suspicious and that any proof should be made exclusively through logical reasoning (Mancosu 2005, Guzman 2002). The truth was not contained in the visual representation; rather, it could only be established through the human brain's reasoning skills. This mindset persisted for a good part of the twentieth century. In scientific literature, the norm was the strict formalisation, avoiding visual elements and university textbooks tended to follow the same criteria. Dieudonné's textbook on linear algebra and elementary geometry (*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 1964) without a single figure is a notable example of this mindset.

It is worth noting that, at the same time, on the side of drawing, the mathematical tool is, in many expressions, far removed from artistic thinking. Remember the *science-art divorce* (Cabezas, 2002, pp.126-128): "Around the first years of the 19th century, a generalized but excessively schematic classification culminates and stabilizes, to differentiate «artistic drawing» from «linear drawing», as an explicit recognition of the divergence of interests between art and science".⁴

But since the late 20th century, visualisation in mathematical activity (education, research, and publishing) has been growing influenced greatly by the development of computational visualisation techniques. Several areas of mathematics have benefited from computer-generated images to aid in the process of mathematical research, resulting in new mathematical discoveries that are then logically and consistently formulated and proven, a task that is sometimes very challenging and demands serious intellectual efforts.

4 Our translation from the Spanish original.

Proofs without words began to appear in 1976 in journals such as *Mathematics Magazine* and *The College Mathematics Journal*, both published by the Mathematical Association of America (MAA). These are not truly proofs but rather figures and diagrams that show the observer why and how one may start the process of demonstrating a certain claim to be true. The emphasis is clearly on giving the observer visual clues to stimulate mathematical thought. A collection of some of these “proofs without words” that have been printed in journals of the MAA can be found in Nelsen (1993, 2000, 2015).

However, as Mancosu (2005) points out, the traditional standards of rigour do not appear to be disturbed by this return of the visual. Several mathematicians refer to the cognitive value of visual images in mathematics but also seem to understand that they do not meet the rigorous standards required to support the conclusions under investigation.

To draw to visualize

Drawing in the broadest sense reveals itself in mathematics by concretizing visualisation. Thus, it seems important to us to articulate two perspectives on visualisation, coming from the two current areas of knowledge: mathematics and drawing. From the first, we adopt the broader definition of visualisation proposed by Arcavi (2003):

Visualisation is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings (p. 217).

Concerning drawing, we follow Massironi (1989), who emphasizes the central role of drawing in this visualisation process:

Certain mental productions have the characteristic of being structured only visibly. It is the case of situations in which only reasoning through images allows solving a problem or reaching a cognitive result that would otherwise be unattainable (...).

The results obtained in this way, to be expressed and communicated, must therefore assume a visual coding. Drawing is, therefore, the instrument that is usually best suited for conveying this type of content (1989, p. 133).⁵

The many different forms of visualisation in mathematics can be classified according to several criteria depending on the purposes they are meant to serve.

Guzman (2002) considers four types of visualisation in mathematics according to the degree of correspondence between the mathematical situation and the way of its representation: *isomorphic visualisation* (representations in which visual elements have an exact correspondence with mathematical objects and relationships); *homeomorphic visualisation* (subjective representations, in which visual elements imitate sufficiently well relationships between abstract objects, encouraging the construction of images in processes such as guessing, researching, and proving); *analogical visualisation* (substitution of objects by others that relate between themselves in an analogous way and whose behaviour is known or has been examined beforehand); and *diagrammatic visualisation* (in which mental objects and relations between them are represented with diagrams, facilitating the visualisation of thinking processes).

Based on her observations of students, Presmeg (2006) identified five types of visualisation according to visual imagery types: *concrete*, *kinaesthetic* (of physical movement), *dynamic* (image transformation or motion), *memory* (imagery of formulae), and *pattern* (pure relationships stripped of concrete details).

Concerning the development of abilities, Bishop (1983) proposed two different types: (1) *Interpreting figural information* (reading, understanding and interpreting visual representations and spatial vocabulary) and (2) *Visual processing* (translation of abstract relationships and non-figurative information into visual terms and manipulation and transformation of visual representations and visual imagery).

5 Our translation from the Portuguese edition.

By paying attention to the fidelity of representations, the typology of pictures, the development of abilities, or perhaps any other equally significant feature, visualisation encourages and develops visual thinking in mathematics or any other field of knowledge. As we saw before, Massironi (1989) ascribed to drawing the quality of edification of visualisation primarily because it allows the work on models to be executed quickly, simply, and effectively. On the other hand, we must keep in mind that these virtues of drawing also give birth to another one: the fixation of the various moments of a reasoning process, always enabling retrospective thinking.

With the role of drawing in visualisation as the focus of our attention, it is important to highlight the following. On the one hand, drawing as a mobilizer of data visualisation, in time and space, to understand, interpret and recognise patterns, something that comes essentially from an analytical attitude – drawing participating in the exposition of data resulting from or promoting a deductive process. On the other hand, drawing as a convener to explore abstract ideas and discover new ones, participating in constructing a deductive process. In the case of mathematics, these processes occur with more importance in the search for proof.

Thus, we will address these two instances of drawing in mathematical activity, present in different mathematical contexts (research, education or communication) and frequently both used in the different tasks of the same mathematical research problem.

Our approach will be based on the drawings collected at the Department of Mathematics of the Faculty of Sciences of the University of Porto, belonging to the collection of the funded research project DRAWinU. In this way, we will make reference to some of the many areas of study in the vast field of mathematics.

Depicting data

Concerning data visualisation, and more specifically, data analysis, drawing occurs widely in the area of statistics through graphic depictions of quantitative information in its many forms (bivariate plots, bar charts, histograms, contour plots, time-series graphs, etc.). It is an important analytical tool with deep roots and recent innovations exploiting computer graphics and related technologies. A nice overview of the history of data visualisation from medieval to modern times containing representative stories of the milestones (development motivation, communication goal, relation with the developments, precursors, today's reinvention) illustrated with many exemplars can be found in Friendly (2015).

In recent decades, data visualisation has proliferated into a wide range of graphic treatments, and a variety of software tools have made it possible for organisations, academics, and people to explore their data in novel and increasingly creative ways. Images 1 and 2 are taken from a report (September 2022), among many done by Óscar Felgueiras (FCUP) during the COVID-19 pandemic in Portugal. They are nice examples of visual representations used to analyse large amounts of data, and must be simple enough to be understood by non-experts in statistics. They offer policymakers and the general public insight into the current pandemic state and are a fundamental component of good decision-making.

Mathematical models of real-world problems are complex and extremely difficult to solve analytically, and scientists have relied heavily on visual and qualitative approaches to discover and analyse them. Information visualisation helps to examine and understand complex datasets in those models and to detect their interesting features. The drawings (images 3, 4 and 5) obtained by the PhD student Simon Ranjith Jeyabalan (FCUP/CMUP) in his numerical investigation of a model in computational fluid dynamics represent the temporal behaviour of the mean kinetic and magnetic energies and were produced to understand the model's behaviour.

Visualizing complex structures is a key component in many areas of fundamental and applied mathematics. Drawing graphs, charts or diagrams that are simple to read and understand is a common step to overcome visualisation difficulties. The visual results of these drawings do not aspire to evoke tangible reality.

Graph drawing addresses the problem of constructing visual representations of conceptual structures modelled by graphs and used mainly for analysing and recognising patterns. A graph is an abstract structure used to represent any information that can be modelled as objects and connections between those objects. Typically, a graph is drawn as a set of dots for the vertices (representing a class of objects such as individuals or proteins), joined by lines or curves for the edges (which indicate links such as friendships or molecular binding interactions). At the undergraduate level, many drawings in graph theory can be hand made. However, the field of graph drawing has undergone enormous developments in recent decades, covering topological and geometrical foundations, algorithms, software systems and applications in business, science and engineering. On the theoretical side, studies have ranged from graph combinatorial features to algorithms that generate images. On the systems side, several graph drawing tools have been presented in academic environment and for commercial purposes. Due to the expanding availability and diversity of node and link properties, modern graph drawing issues are becoming more and more complex and are handled only computationally.

Manuel Delgado (FCUP/CMUP) has, as he says, a very visual way of thinking and needs visual representations rather than pure algebraic reasoning. So, he developed his own visualisation tools to help him in his mathematical research. Drawings 6, 7 and 8 are nice examples of graph drawings obtained in his research in Finite Semigroups. Other types of images can also be computationally obtained using the tools Manuel Delgado developed, as for example, images 9 and 10 done within his research in Numerical Semigroups. They help him, in the first stage of his research, to recognise patterns, to discard non-interesting issues, and to conjecture.

Drawing abstract concepts and ideas

In several areas of mathematical research and during the creative process, drawing combined with symbolic writing is used frequently as a tool to explore abstract ideas and uncover new ones in a very personal way, often to give shape to objects or relationships visualised with the mind. It is a way of representing mental images that help the thinking process, frequently by diagrams and symbolic images that are not easily shared. Mathematicians refer to these visual representations as scribbles rather than drawings, often seeming ashamed of them and discarding them after clarifying their minds.

Drawings 11 and 12, produced by Samuel Lopes (FCUP/CMUP), were used for his research practice in the fields of Representation Theory and Combinatorics. They are not representations of physical entities but of abstract concepts and ideas related to formal explorations of the notion of symmetry.

During her postdoctoral studies (2017) as a researcher at CMUP, Nóra Szakács, working in the area of Semigroup Theory, often used drawings to depict abstract ideas about algorithmic questions (images 15 and 16).

Drawings 13 and 14 produced by Christian Lomp (FCUP/CMUP), carried out as part of his research in the field of Algebra, are also representations of abstract concepts and ideas, more specifically of the multiplication of certain elements in an algebra of diagrams. The drawings were made for a better intuition of this multiplicative structure. Letters were associated with some diagrams, playing an important role in the study in question, in order to facilitate the passage to the formal proof of the algebraic results.

João Matias, working on his PhD in Mathematics, frequently draws with the aim of better understanding algebraically stated results. Drawings 17 and 18 were done to assist him in grasping theorems in Hyperbolic Dynamics.

Isabel Labouriau (FCUP/CMUP) draws extensively in her different mathematical activities. As she says, she works and thinks by drawing. The drawings made within her research in the area of Dynamical Systems (Fig. 1 and 2; images 19, 20 and 21) help to understand changes in mathematical behaviour. When the dynamical system serves as a model for some phenomenon, these changes correspond to predicted outcomes under different experimental conditions.

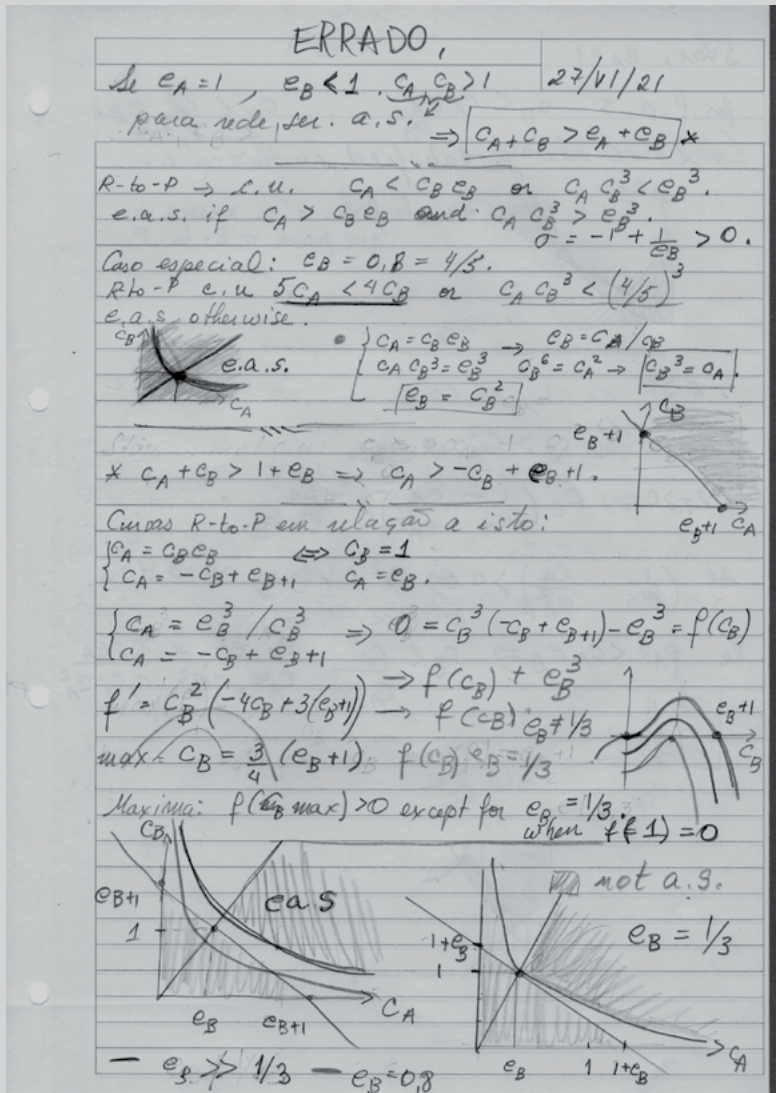


Fig. 1 – Games x Dynamics. Rock-Scissors-Paper-Lizard-Spock I,
 Isabel Labouriau, 2021.

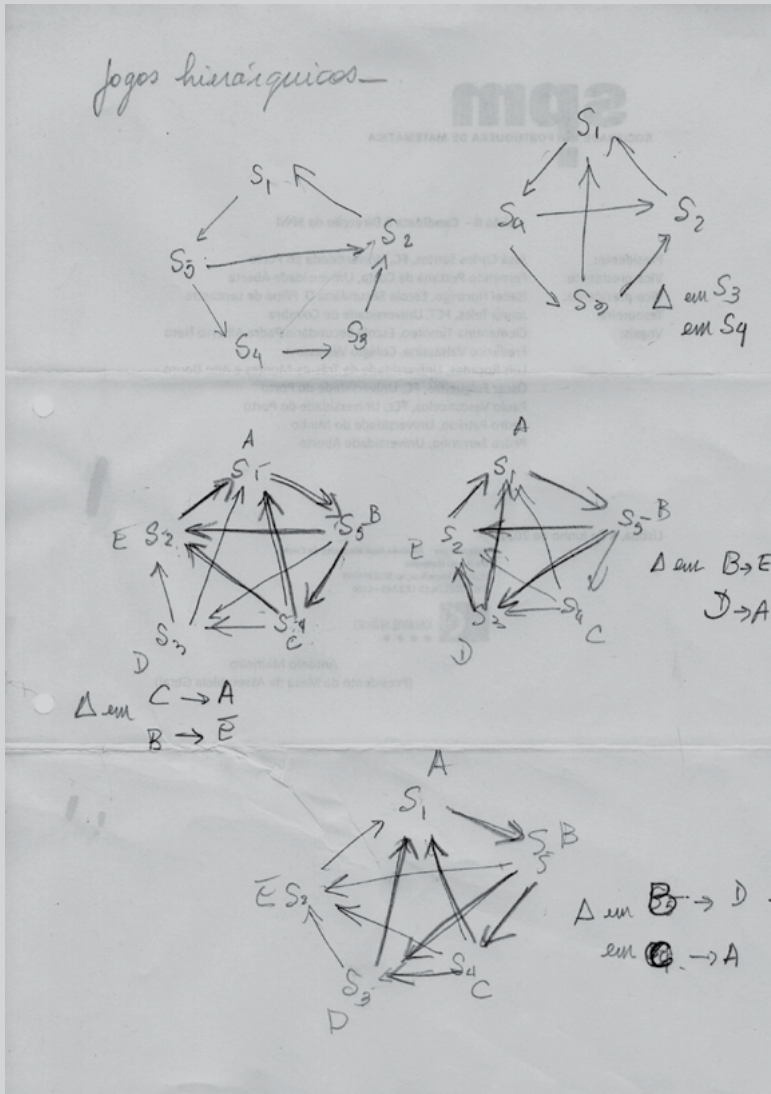


Fig. 2 – Dynamics- PopulaFon-Games. Hierarchical Games,
Isabel Labouriau, 2022.

Making connections

As we saw, drawing is used in highly significant ways in various levels of mathematical activity. It is often the starting point from which conceptions and procedures develop. It can raise interesting challenges in many ways and is used frequently to make connections between the many theoretical objects that, in some ways, are extremely difficult to find purely through logic. Thus, it can be very helpful for creativity and intuition. Additionally, it plays a very important role in communication between scientists, both between mathematicians and interdisciplinary teams. In the latter case, the specificity of the languages of different areas enhances drawing's capacity to build bridges as a place of understanding between the different disciplines.

Thinking about drawing as a language – one that can articulate questions and ideas – enables collaborative processes between artists and mathematicians that would not be possible otherwise. Most notably, the collaboration between the visual artist Anderson and the mathematicians Buck, Coates and Corti (Anderson *et al.*, 2015), in which the divergent logics of the artist and the mathematicians are treated on equal terms, has most significantly contributed to defining the role of drawing as a common language between mathematics and art.

Here, the artist benefited from access to sophisticated geometries, otherwise impossible, and the opportunity to explore, alter and incorporate them into her understanding of form.

The mathematicians gained from the interpretation of purely conceptual objects in terms of drawings with implications both in terms of creativity and intuition and in terms of disseminating their knowledge to a wider audience without having to infantilise, compromise or misrepresent their ideas.

In the same spirit, the collaboration between Devadoss and Schuh (2019), the first a mathematician working on a problem involving tree spaces motivated by phylogenetics and the second a visual artist, was carried out with the mathematician involved in the drawings and the artist involved in the mathematics. The outcome of this collaborative work was a triptych of paintings (created with acrylic, graphite, watercolour, and metal leaf) focusing on different navigations within these tree spaces, as well as a new set of mathematical open questions.

We conclude our brief discussion about the use of drawing in mathematics with the very interesting belief of Devadoss and Schuh (2019):

While a computer model would have been possible for this project, we felt that drawings by hand were more appropriate. The computer changes the way one interacts with the object: Although easier to manipulate and alter, this behavior in and of itself could just as surely cause certain aspects to be overlooked. Shoehorning tree space into a two-dimensional frame that takes a longer time to “render” forces one to slow down and perhaps approach it differently (p. 282).

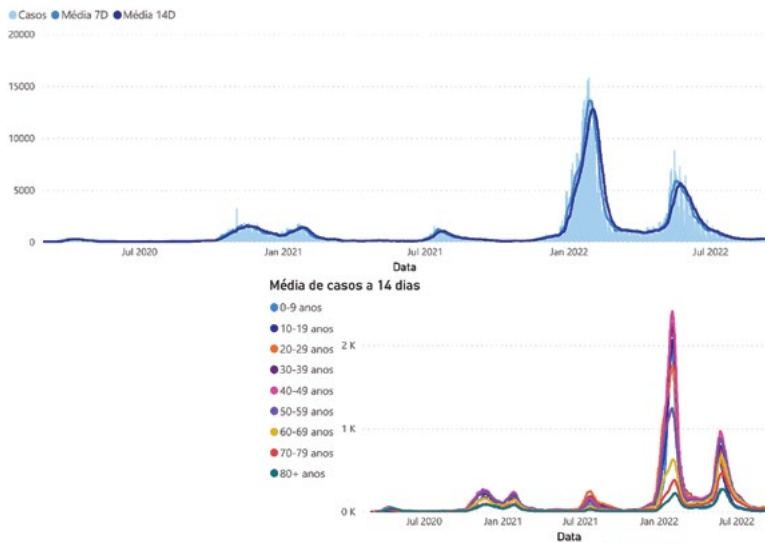
ACKNOWLEDGMENT

The authors of the text would like to thank all the colleagues who contributed to this project with their drawings and expertise.

References

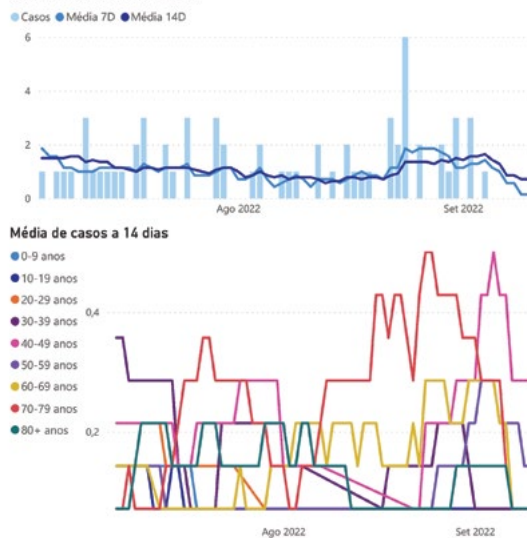
- Andersen, K. (2007). *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.
- Anderson, G., Buck, D., Coates, T., and Corti, A. (2015) Drawing Mathematics: From Inverse Vision to the Liberation of Form. *Leonardo*, Vol. 48(5), pp. 439-448.
- Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215-241.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Cabezas, L. G. (2002). Las Máquinas de dibujar. Entre el mito de la visión objetiva y la ciencia de la representación. In J.J.G. Molina (Coord.), *Máquinas e Herramientas de Dibujo*, (pp. 83-348). Madrid: Cátedra.
- Descartes, R. (1954). *Rules for the direction of the mind* (E. Anscombe and P. Geach, Trans.). (Original work published 1701).
- Devadoss S.L. & Schuh, O. (2019). Cartography of Tree Space. *Leonardo* 52 (3), (pp. 279-283).
- Friendly, M. (2008). A Brief History of Data Visualization. In C. Chen, W. Härdle and A. Unwin (Eds.), *Handbook of Data Visualization* (pp. 15-48). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Guzman, M. (2002) The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis, *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (2nd, Hersonissos, Crete, Greece, July 1-6, 2002).
- Krantz, S. J. (2007) The History And Concept Of Mathematical Proof. Accessible at: <https://www.eolss.net/sample-chapters/c02/E6-132-37.pdf>
- Mancosu, P. (2005). Visualization in Logic and Mathematics. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen and S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Synthese Library, vol 327. Dordrecht: Springer-Verlag.
- Massironi, M. (1989). *Ver Pelo Desenho: Aspectos Técnicos, Cognitivos, Comunicativos*. Lisboa: Edições 70.
- Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R.B. (2000). *Proofs without Words II: Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. B. (2015). *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History (Ideas in Context, Series Number 51)* (1st ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.
- Santo, H. P. (1984). *Métodos Gráficos e Geometrias Computacionais*, Vol.1, Conceitos Básicos. Lisboa: Dinalivro.

Casos e médias a 7 e 14 dias



Página 55 de 126

Casos e médias a 7 e 14 dias

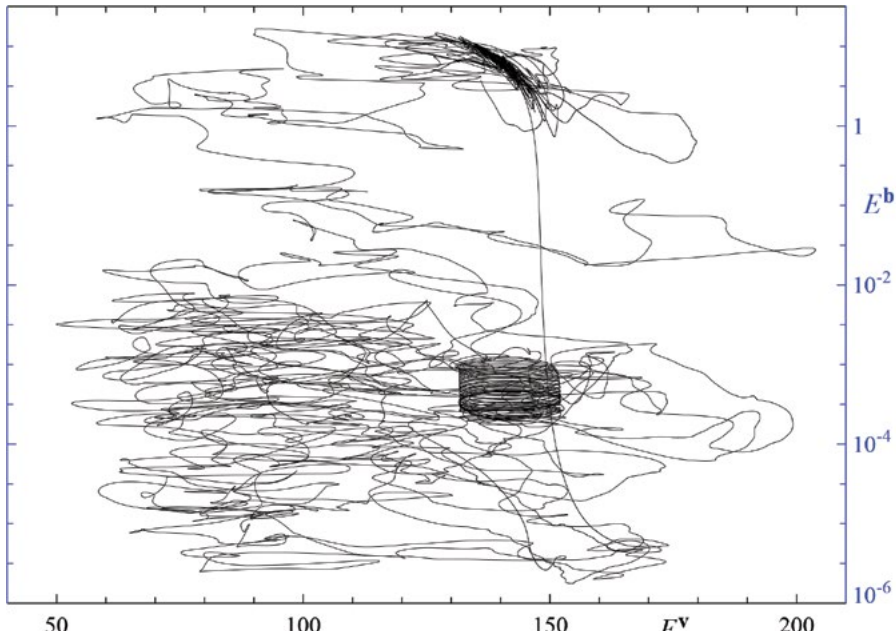
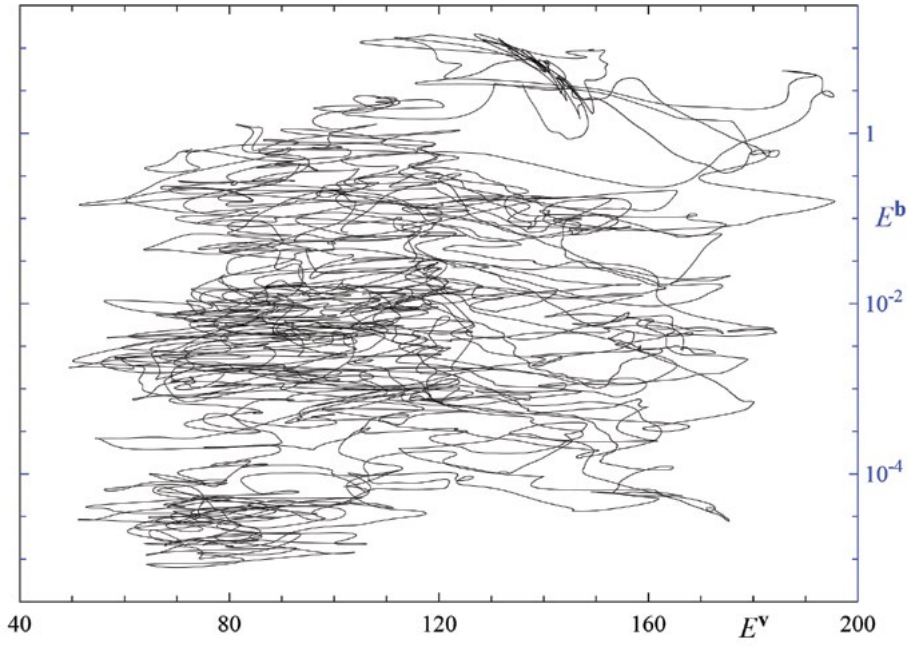


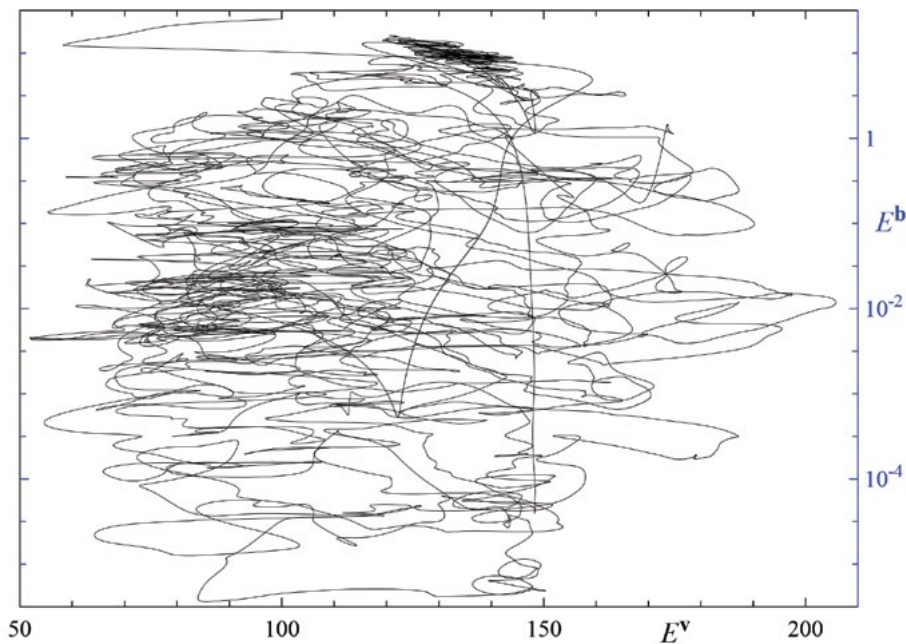
- 1-2 *Em cima, representações num intervalo temporal de 2 anos do número de casos confirmados de Covid-19 e médias de 7 dias e 14 dias (acima), e média de 14 dias por idade (abaixo) no distrito do Porto. Em baixo o mesmo tipo de informação relativa a Freixo de Espada à Cinta num intervalo temporal de 2 meses. / On the top, 2-years temporal representations of the number of confirmed Covid-19 cases and 7-day and 14-day averages (above), and 14-days average by age (bottom) in the district of Porto. At the bottom, the same type of information concerning Freixo de Espada à Cinta within a temporal interval of 2 months.*

Óscar Felgueiras, 2022

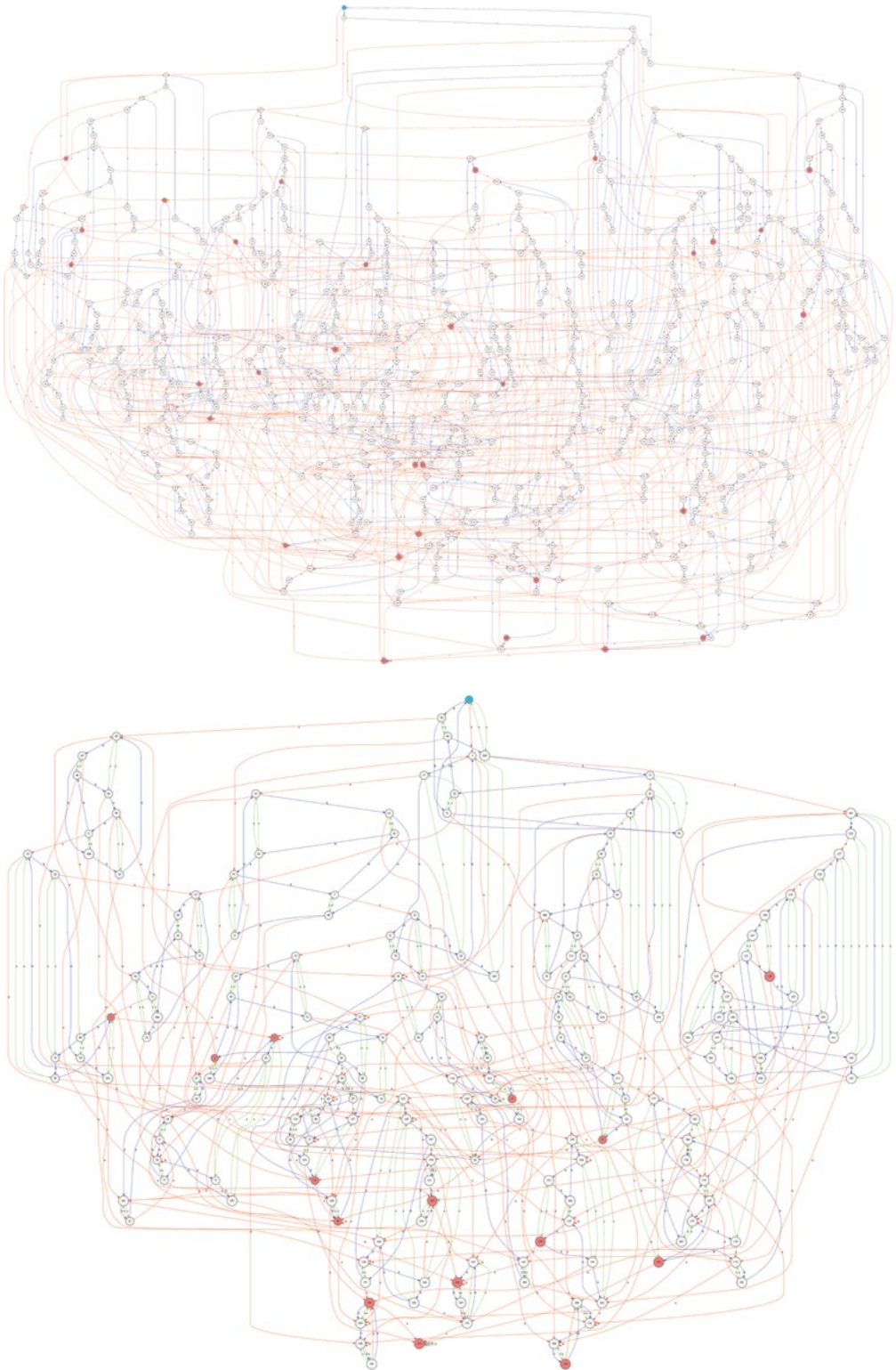
Imagem digital / Digital image

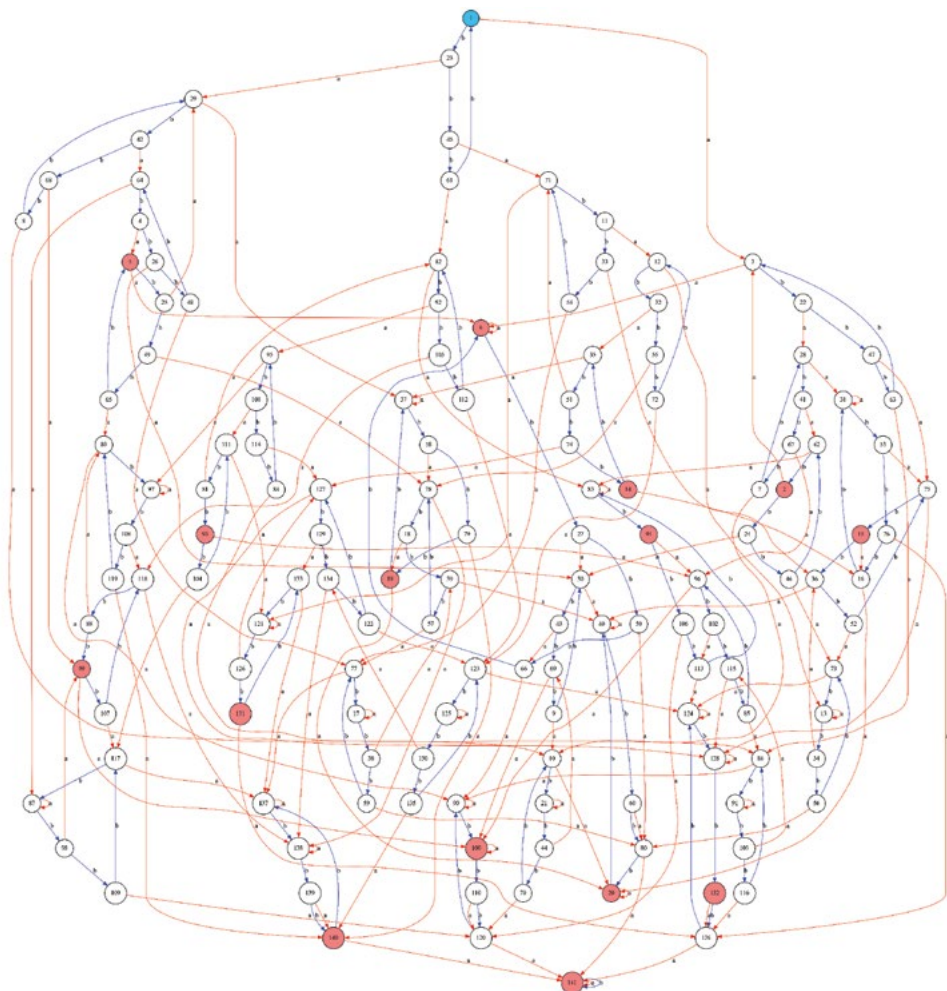
Matemática, FCUP e CMUP / Mathematics, FCUP and CMUP





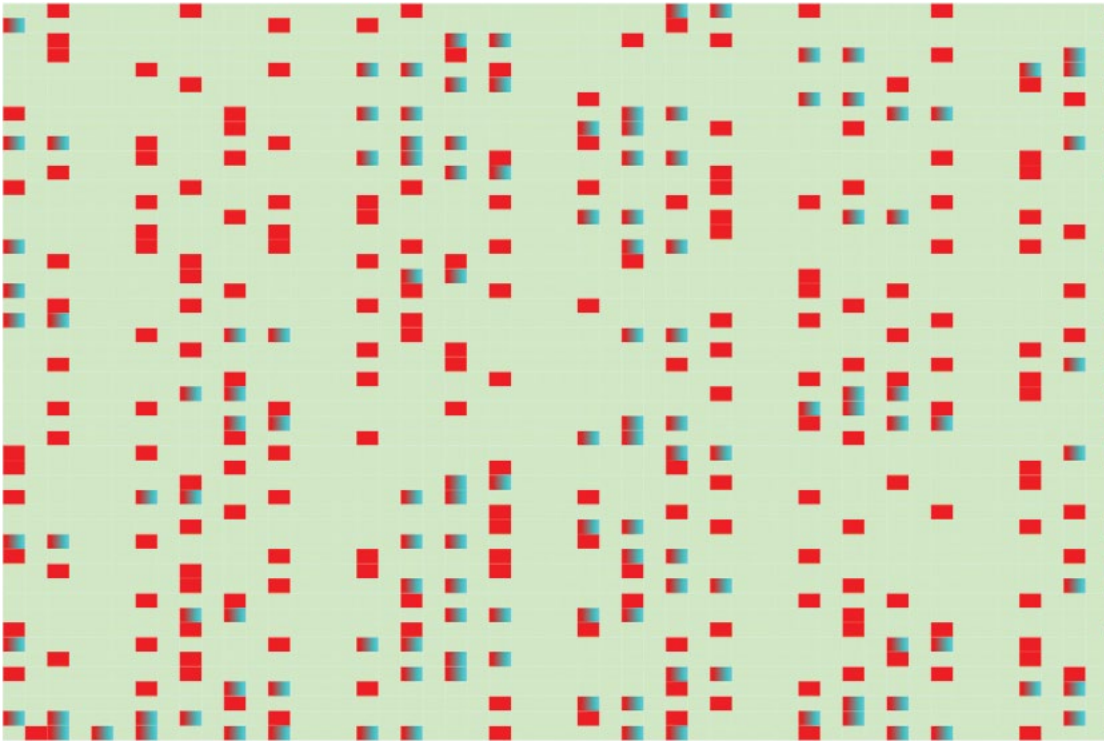
- 3-5 *Desenhos computacionais produzidos para analisar o comportamento conjunto das energias cinética e magnética num modelo matemático de um fluido.*
/ Computational drawings produced to analyse the joint behaviour of the mean kinetic and magnetic energies in a fluid model.
 Simon Ranjith Jeyabalan, 2022
 Imagem digital / Digital image
 Matemática, FCUP e CMUP / Mathematics, FCUP and CMUP



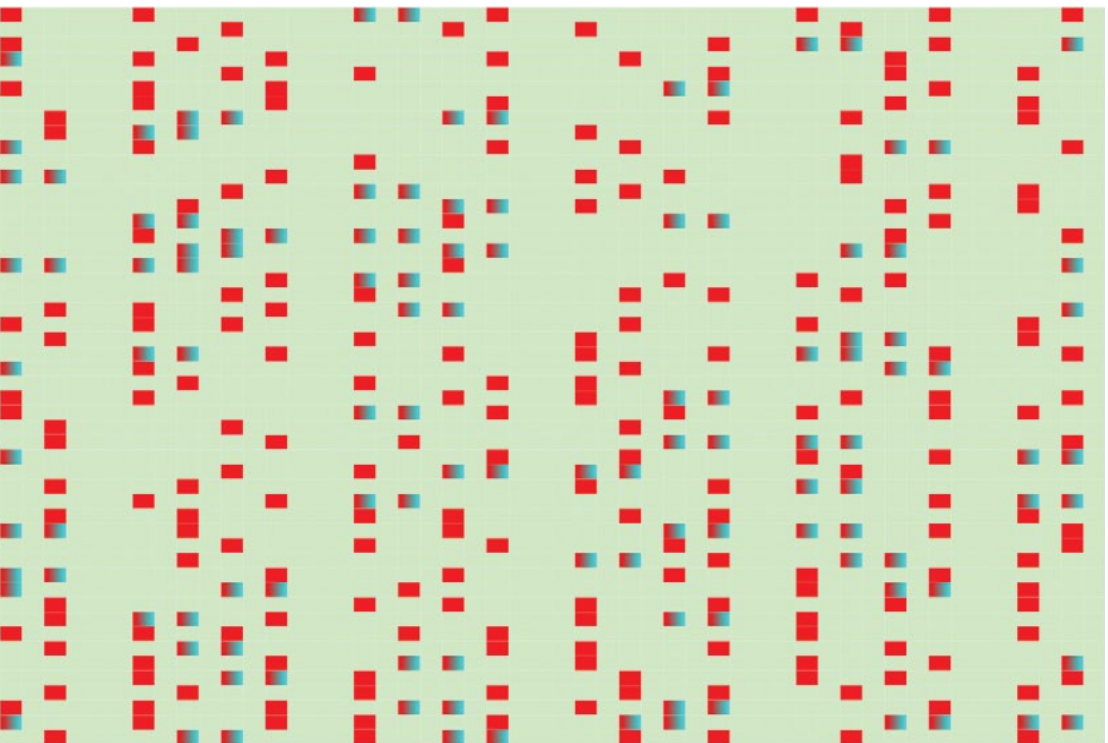


6-8 *Desenhos de grafos produzidos computacionalmente para visualização de relações e auxílio na investigação na área de Semigrupos Finitos.*
 / Graph drawings produced computationally for visualizing relationships and assisting research in the area of Finite Semigroups.
 Manuel Delgado, 2022
 Imagem digital / Digital image
 Matemática, FCUP e CMUP / Mathematics, FCUP and CMUP

951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925
851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25



976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950
876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850
776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550
476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

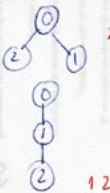
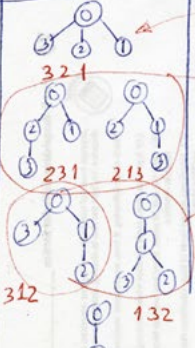


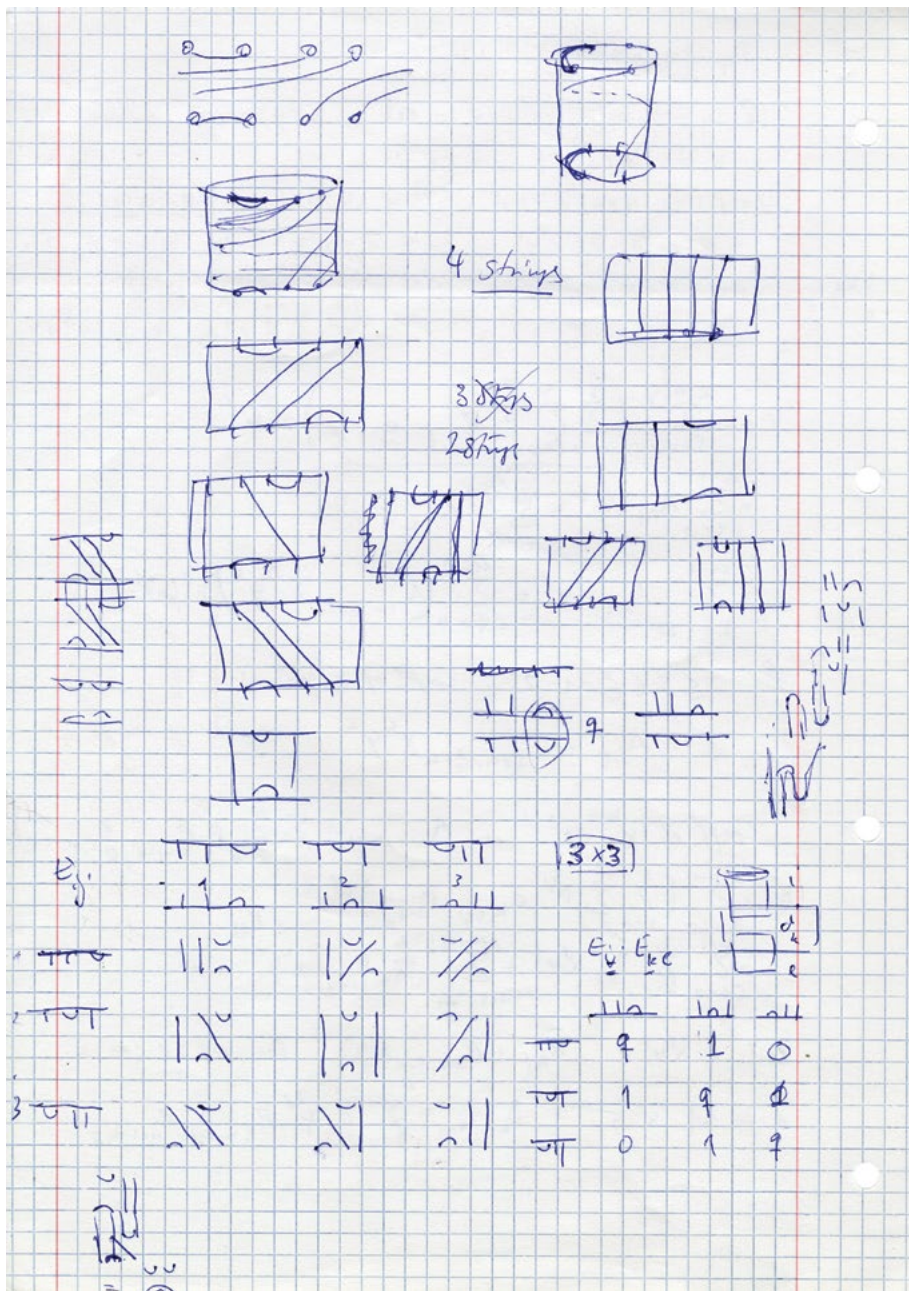
9-10 *Desenhos produzidos computacionalmente para visualização de relações e auxílio na investigação na área de Semigrupos Numéricos.*
/ Drawings produced computationally for visualising relationships and assisting research in the area of Numerical Semigroups.

Manuel Delgado, 2022

Imagem digital / Digital image

Matemática, FCUP e CMUP / Mathematics, FCUP and CMUP

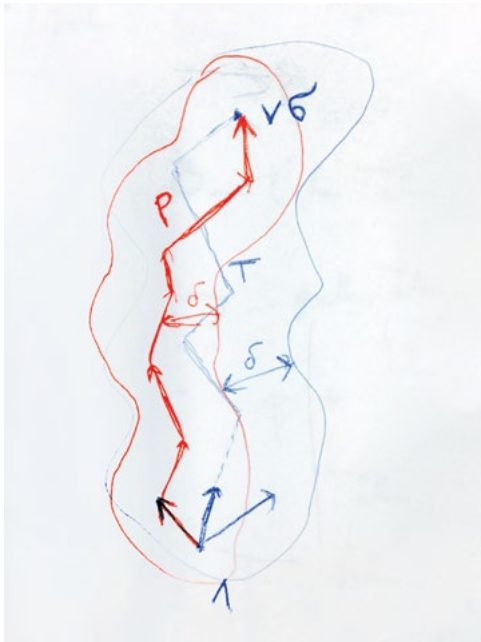
m	tree	seq	part. de	tree .. $\delta(1)$
0	 $\emptyset \in S_0$	(0)	$\emptyset$	$f = 1^{(0)}$
1	 $1 \in S_1$	$(1, 0)$	$\emptyset$	$f^{(1)} h$
2	 21 12	$(2, 0, 0)$ $(1, 1, 0)$	$\emptyset$ $\square$	$f^{(2)} h^2$ $1^{(1)} h^{(1)} h$
3	 321 231 213 312 132 123	$(3, 0, 0, 0)$ $(2, 1, 0, 0)$ $(2, 0, 1, 0)$ $(2, 1, 0, 0)$ $(1, 2, 0, 0)$ $(1, 1, 1, 0)$	$\emptyset$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$	$f^{(3)} h^3$ $3 f^{(2)} h^{(1)} h^2$ $f^{(1)} h^{(1)} h^{(1)} h^2$ $1^{(1)} h^{(1)} h^{(1)} h^2$

13-14 *Algebras Temperley-Lieb afins / Affine Temperley-Lieb Algebras*

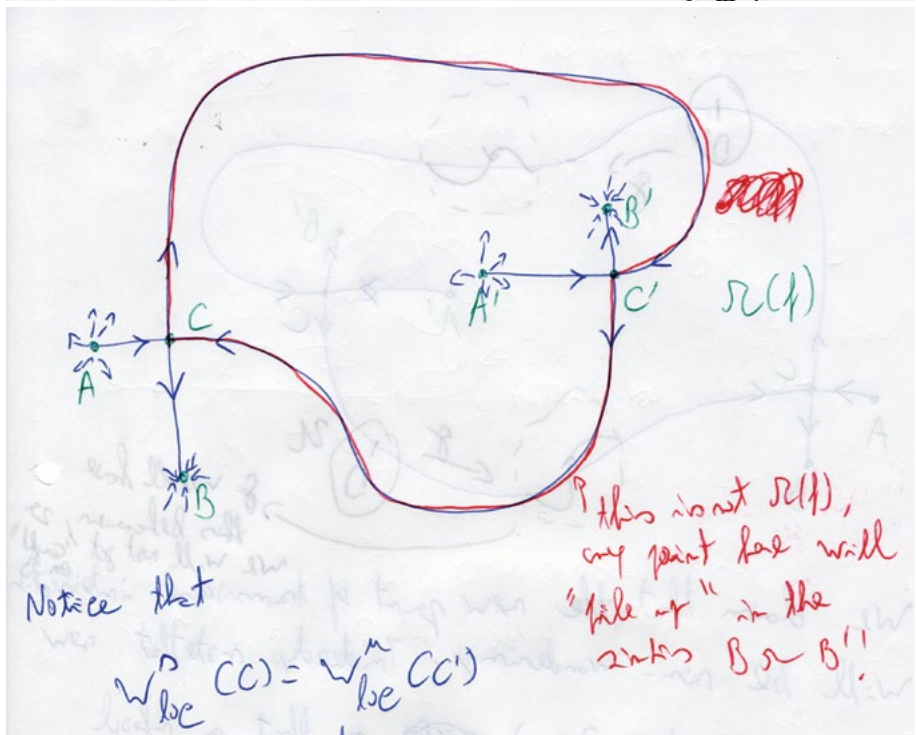
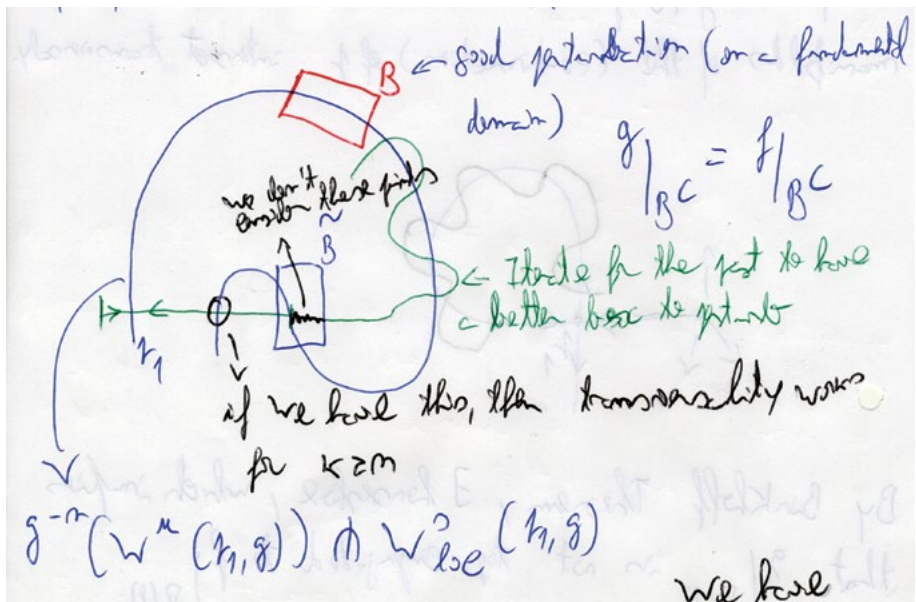
Christian Lomp, s.d.

Caneta sobre papel quadriculado / Pen on squared paper, 29,7 x 21 cm

Matemática, FCUP e CMUP / Mathematics, FCUP and CMUP



- Matemática / Mathematics, CMUP

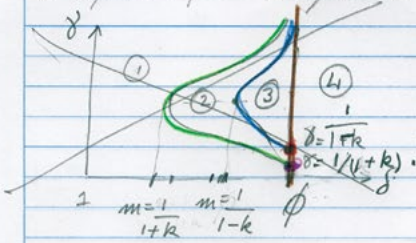


OK 21 diagrams:

21/VIII/21

Solds: $\gamma = \frac{F(T)}{1+k} < \gamma = \frac{F(T)}{1-r}$

2 copies of the surfaces.



$$m(\delta) = \frac{\gamma(1-k)}{1+k} \beta \times$$

$$m(\delta) = \delta(1+k)\beta \text{ at } T=0$$

① ~~②~~

② 

① $\rightarrow$ ②

② $\leftrightarrow$ ③ 

③ ↔ ④ $z \rightarrow T = +\infty$ $\int$

$$\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4} \quad \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right] \rightarrow \text{no } T$$

① ↔ ④ ϕ , ④ aparece muito tarde

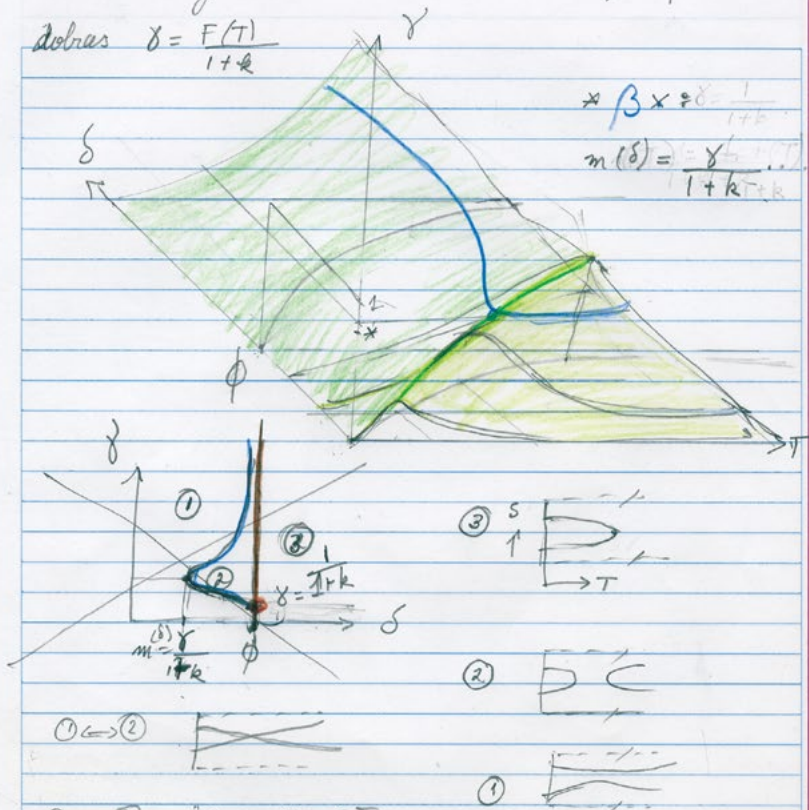
③ 

④

$k > 1$ diagrams:

21/VII/21

dobras $\delta = \frac{F(T)}{1+k}$



$$\beta \times \delta = \frac{1}{1+k}$$

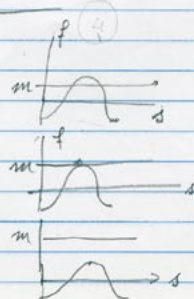
$$m(\delta) = \frac{\delta}{1+kT+k}$$

② $\leftrightarrow$ ③ $\delta \rightarrow +\infty \Rightarrow T$
 ① $\leftrightarrow$ ③ $\delta \rightarrow +\infty \Rightarrow T$
 $\delta < \phi$

$m(\delta) < \frac{\delta}{1+k} \Rightarrow 0 \text{ dobras}$

$m(\delta) = \frac{\delta}{1+k} \Rightarrow 1 \text{ dobra}$

$m(\delta) > \frac{\delta}{1+k} \Rightarrow 2 \text{ dobras}$



$\delta \rightarrow \phi$
 $m(\delta) \rightarrow 1$

$\beta \times \delta \rightarrow \frac{1}{1+k}$

29/x/20

Geometry of $h_{w \rightarrow v} : \text{Out}(P_w) \rightarrow \text{Out}(P_v)$

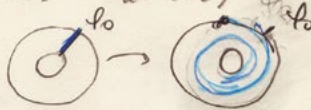
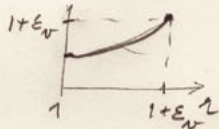
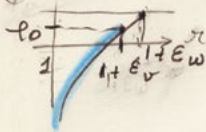
Ray $\varphi = \varphi_0 \text{ const} \mapsto$ spiral
because:

$$h_{1,v}(\varphi_0, r) = \varphi_0 + \frac{2\omega}{\varepsilon_v} \ln\left(\frac{r-1}{\varepsilon_v}\right)$$

and. $0 < r-1 < \varepsilon_w$
 $\varepsilon_v < \varepsilon_w$.

$h_{2,v}$ indep. of φ

$$h_{2,v}(\varphi_0, r) = 1 + \varepsilon_v \left(\frac{r-1}{\varepsilon_v}\right)^{\delta_v} \quad \delta_v > 1$$



Circle $r = r_0 \text{ const.} \mapsto$ circle

because:

$$h_{2,v}(\varphi, r_0) = \text{const}$$

$h_1(\varphi, r) = \varphi + \text{const}$, rigid rotation.



Geometry of $h_{v \rightarrow w} : \text{Out}(P_v) \rightarrow \text{Out}(P_w)$.

Circle $r = r_0 \text{ const} \rightarrow$ non contractible curve in
 $\text{Out}(P_w)$, no folds:

because:

$$h_{1,w}(\varphi, r_0) = \varphi + \text{const.}$$

rigid rotation.

$$\text{If } m \leq \gamma(\varphi) \leq M \Rightarrow 1 + \varepsilon_w \left(\frac{r_0-1+m}{\varepsilon_w}\right)^{\delta_w} \leq h_{2,w} \leq 1 + \varepsilon_w \left(\frac{r_0-1+M}{\varepsilon_w}\right)^{\delta_w}$$

and $h_{2,w}(\varphi, r_0)$ periodic in φ .

