



## Simulação numérica do programa experimental para estudo do efeito combinado da deformação impedida e carregamento externo em lajes de betão armado

**Cláudio Ferreira**

*CONSTRUCT-LABEST, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, [cbferreira@fe.up.pt](mailto:cbferreira@fe.up.pt)*

**José Gomes**

*ISE, Dep. De Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Guimarães, Portugal, [jose89gomes@gmail.com](mailto:jose89gomes@gmail.com)*

**Carlos Sousa**

*CONSTRUCT-LABEST, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, [cfsousa@fe.up.pt](mailto:cfsousa@fe.up.pt)*

**José Granja**

*ISE, Dep. De Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Guimarães, Portugal, [granja@civil.uminho.pt](mailto:granja@civil.uminho.pt)*

**Dirk Schlicke**

*Institute of Structural Concrete, Graz University of Technology, Graz, Austria, [dirk.schlicke@tugraz.at](mailto:dirk.schlicke@tugraz.at)*

**Rui Faria**

*CONSTRUCT-LABEST, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, [rfaria@fe.up.pt](mailto:rfaria@fe.up.pt)*

**Miguel Azenha**

*ISE, Dep. De Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Guimarães, Portugal, [miguel.azenha@civil.uminho.pt](mailto:miguel.azenha@civil.uminho.pt)*

### Resumo

A análise do comportamento estrutural em fase de serviço desempenha um papel fundamental na fase de conceção e dimensionamento de novas estruturas. Nas atividades de projeto, são utilizados modelos e procedimentos que simplificam o real comportamento a longo prazo do betão estrutural. Por outro lado, a utilização de modelos de análise que simulem o comportamento reológico do betão de forma mais detalhada permitem um conhecimento mais aprofundado do comportamento estrutural, útil, por exemplo, para o melhoramento de regulamentos de projeto e para a análise de estruturas especiais. Neste artigo, é apresentada uma metodologia de análise, baseada no método dos elementos finitos, tendo em conta a evolução da humidade local e a respetiva relação com a evolução temporal das extensões de retração. Os efeitos de fluência, da fissuração e da aderência aço-betão são também simulados. Os modelos de análise são validados através da comparação com os resultados experimentais para caracterização das propriedades do betão. Os resultados da análise mecânica dos ensaios de lajes são comparados com os dados experimentais, combinando efeitos de cargas aplicadas e restrição das deformações axiais. Os ensaios de referência foram realizados no âmbito do projeto de investigação IntegraCrete recentemente concluído.

**Palavras-chave:** Retração restringida; Comportamento em serviço; Betão armado; Lajes maciças; Simulação numérica

## 1 INTRODUÇÃO

A quantificação da redução de rigidez após a fissuração, o cálculo da abertura de fendas, e o dimensionamento da armadura necessária para controlo da fissuração, são aspetos relevantes do projeto de estruturas de betão armado em fase de serviço, em que é necessário atender aos efeitos das cargas aplicadas e das deformações impostas restringidas. Como exemplos de estruturas em que não é trivial o processo de dimensionamento em fase de serviço, podem citar-se: as estruturas com grandes distâncias entre juntas de dilatação; as estruturas espessas, onde são importantes os efeitos autoequilibrados ao longo da espessura; e as estruturas em que é importante garantir a estanquidade.

Ao longo dos últimos anos, esta equipa de investigação tem encetado esforços no sentido de desenvolver soluções para o projeto eficiente, sobretudo através do desenvolvimento de novos métodos de cálculo analítico [1] e de análise numérica [2], e respetiva validação através da realização de campanhas experimentais [3].

Este artigo apresenta a simulação computacional dos ensaios de longo prazo, de lajes maciças de betão armado, com diferentes condições de restrição, realizados no âmbito do projeto IntegraCrete, na Escola de Engenharia da Universidade do Minho [3]. Com o trabalho aqui apresentado pretendeu-se validar uma estratégia de análise higro-mecânica, onde os efeitos da retração de secagem não-uniforme (isto é, variável ao longo da espessura da laje) são simuladas explicitamente.

## 2 CAMPANHA EXPERIMENTAL

### 2.1 Descrição

A campanha experimental foi desenvolvida com o objetivo de investigar a influência das deformações restringidas na abertura de fendas em lajes contínuas. Para tal, foram betonadas três lajes geometricamente iguais (com betão da mesma amassadura), sujeitas a diferentes níveis de restrição e de carga vertical: (i) as lajes 1 e 3 foram sujeitas a uma sobrecarga adicional, aos 50 dias de idade, correspondente a uma combinação quase-permanente de esforços para um piso de categoria A [EC1], ficando a laje 2 sujeita apenas ao seu peso próprio; (ii) a deformação das lajes 1 e 2 foi restringida, a partir dos 10 dias de idade, através da aplicação de uma força axial num dos apoios, ficando a laje 3 sujeita apenas à restrição interna causada pela armadura. As três lajes foram descofradas aos 7 dias de idade, ficando sujeitas à ação do peso próprio e da retração de secagem a partir dessa data. As lajes encontravam-se simplesmente apoiadas, representando desta forma o vão livre sujeito a momentos positivos de uma laje contínua de um edifício (Figura 1).

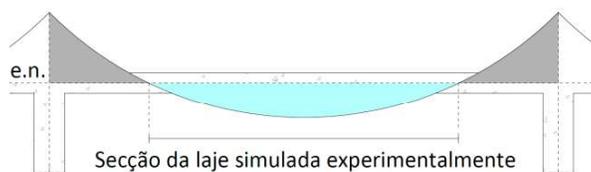


Figura 1 – Representação esquemática dos momentos fletores de uma laje contínua: A azul os momentos positivos, a cinzento os momentos negativos.

O sistema experimental para restrição da deformação das lajes 1 e 2 consiste na aplicação de uma força axial nos apoios de uma das extremidades, impedindo parcialmente o encurtamento das lajes devido à retração. A força axial é aplicada através de dois cilindros hidráulicos localizados numa das extremidades da laje, sendo continuamente monitorizada através de células de carga localizadas entre os atuadores e os apoios desta extremidade movel. As lajes ensaiadas têm um comprimento total de 2,6 m, largura de 0,5 m e espessura de 0,1 m. O ensaio das três lajes ocorre numa sala de ambiente controlado à temperatura constante de  $\approx 20^{\circ}\text{C} \pm 0,5^{\circ}\text{C}$  e a uma humidade relativa de  $\approx 60\% \pm 5\%$ . A armadura consiste em varões de diâmetro 8 mm espaçados a cada 100 mm na face superior e inferior da laje. O recobrimento da armadura superior e inferior é de 26 mm medidos até ao eixo do varão.

Neste trabalho são analisados os resultados obtidos nos 450 dias após a betonagem. Mais detalhes sobre a campanha experimental podem ser consultados em [3]. Na Figura 2 é apresentado um esquema representativo das lajes ensaiadas, assinalando-se a Zona de Controlo, ao longo da qual é medida a deformação longitudinal média.



Figura 2 – Esquema representativo das lajes.

## 2.2 Dados experimentais

Em simultâneo ao ensaio das lajes foi efetuada uma campanha experimental para caracterizar várias propriedades do betão. As propriedades investigadas foram a resistência à compressão, resistência à tração, módulo de elasticidade e fluência. A composição do betão e o resumo das propriedades mecânicas aos 28 dias é apresentada na Tabela 1. Foi ainda realizada uma campanha experimental para a medição da evolução da humidade a várias profundidades, em provetes de diferente espessura: um provete com 10cm de espessura, com a designação H10, com medição local da humidade relativa a 2, 4 e 5 cm de profundidade, e um provete com 15cm de espessura, com a designação H15, com medição local da humidade relativa a 2, 4 e 7,5 cm de profundidade. Foi também medida a retração de secagem livre do betão das lajes através de dois cilindros (diâmetro de 15 cm e altura de 30 cm) e dois provetes com 50 cm de comprimento, com a mesma secção transversal e expostos ao mesmo ambiente das lajes.

Tabela 1 – Composição e propriedades mecânicas do betão

| Composição do Betão         |                            | Propriedades mecânicas (28 dias)      |          |
|-----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------|
| Parâmetro                   | Valor [kg/m <sup>3</sup> ] | Parâmetro                             | Valor    |
| CEM II A/L 42.5R            | 291                        | Resistência à compressão em Cubos     | 31,9 MPa |
| Agregado                    | 1962                       | Resistência à tração (Splitting test) | 2,2 MPa  |
| Água                        | 171                        | Módulo de Elasticidade                | 29,8 GPa |
| Plasticizer Chrysoplast 775 | 2,32                       |                                       |          |

As forças verticais nos apoios e a força axial medida experimentalmente, que correspondem aos parâmetros de entrada de cargas a aplicar nas análises numéricas, são apresentadas na Figura 3.

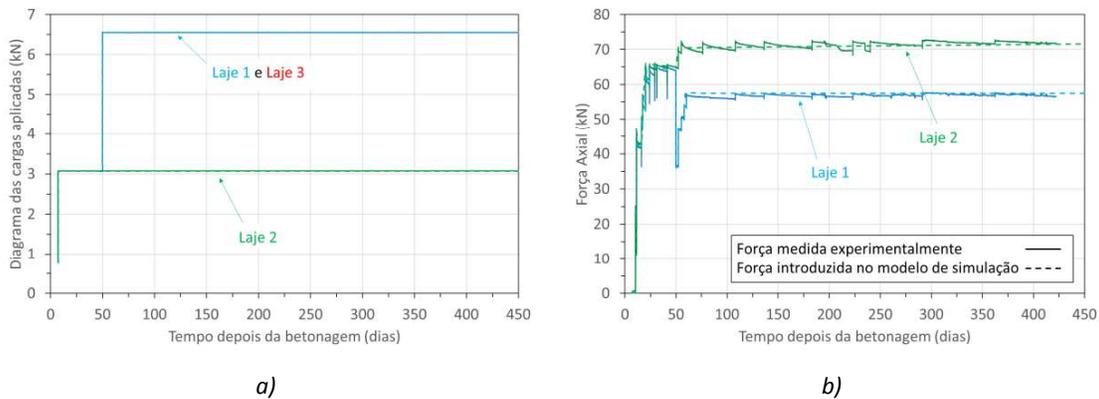


Figura 3 – Cargas aplicadas nas diferentes lajes, com ajuste numérico aos valores experimentais:  
a) total de forças verticais nos apoios; b) força axial.

### 3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 Aspetos gerais do modelo

A análise é efetuada através de uma abordagem faseada. Numa primeira fase, é realizada uma análise higrométrica, para quantificação da evolução dos campos de humidade relativa no interior da estrutura, recorrendo ao software desenvolvido por Azenha [4]. É neste caso considerado um fluxo unidirecional de humidade, com secagem através das superfícies superior e inferior da laje. Com base nos campos de humidade, é determinada a extensão de retração local, que é um dos parâmetros de entrada para a análise mecânica realizada na fase seguinte. Os modelos higrométricos e de retração de secagem são calibrados com base nos resultados dos ensaios de caracterização do betão.

Para a análise mecânica é utilizado o software de elementos finitos DIANA FEA 10.3. Para simular o betão usam-se elementos finitos de estado plano de tensão, de 8 nós, recorrendo à estratégia de fissuração distribuída e ao conceito de decomposição do vetor de extensões totais, para consideração dos efeitos de maturidade, fluência, retração e variação de temperatura. A armadura é simulada através de elementos finitos de treliça, com 3 nós, e a aderência aço-betão é modelada através de elementos de interface.

A laje é simplesmente apoiada, sendo a força axial correspondente ao efeito de restrição aplicada no nó localizado a meia espessura, representado à direita na Figura 3b). Nas extremidades da laje, o modelo de fissuração é desativado para evitar a localização da fissuração junto aos nós que representam os apoios, permitindo assim a distribuição de tensões na secção transversal da laje. A meio vão da laje, é simulado o entalhe (adotado na experiência para induzir uma fissura na posição onde foram instalados extensómetros) através da redução para metade da resistência à tração do betão, num elemento finito. A não-linearidade geométrica é considerada nas análises numéricas. A malha de elementos finitos é descrita esquematicamente na Figura 4.

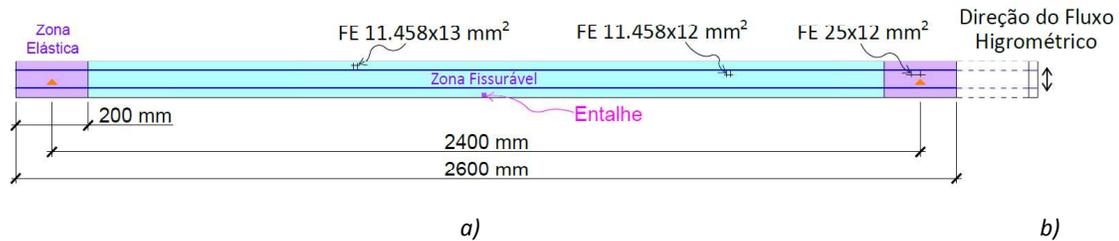


Figura 4 – Descrição da malha de elemento finitos: a) análise mecânica; b) análise higrométrica.

### 3.2 Modelos materiais

O modelo higrométrico desenvolvido por Azenha [4], baseado no método dos elementos finitos e implementado em MatLab, foi utilizado para calcular a variação de humidade local nos poros do betão. O transporte de humidade é simulado localmente através da equação campo da difusão simplificada [4], sendo o coeficiente de difusão  $D_{H^*}$  dado por:

$$D_{H^*} = D_1 \left[ \frac{D_0}{D_1} + \frac{1 - D_0/D_1}{1 + ((1 - H)/(1 - H_c))^m} \right] \quad (1)$$

onde  $H$  é a humidade relativa local,  $H_c$  é humidade relativa correspondente a  $D_{H^*} = 0.5(D_1 + D_0)$ ,  $D_1$  é o valor de  $D_{H^*}$  para  $H = 1$ ,  $D_0$  é o limite para o parâmetro de difusão e  $m$  é uma propriedade do material.

As condições de fronteira são simuladas através da formulação de Neumann,  $q_m = h_m \cdot (H - H_{amb})$ , onde  $q_m$  é o fluxo de humidade dissipado pela fronteira,  $h_m$  é o coeficiente de emissividade de humidade e  $H_{amb}$  é a humidade relativa do ambiente exterior.

A retração local é relacionada com a humidade local através da equação Kwak [5], ligeiramente modificada para ajustar aos resultados experimentais medidos nos cilindros.

$$\varepsilon_{sh}(H) = \varepsilon_{sh,ult} \cdot [1.09 - 2.20 \cdot (H - 0.19)^3] \quad (2)$$

Os parâmetros da análise higrométrica são apresentados na seguinte tabela.

Tabela 2 - Parâmetros usados na análise higrométrica

| Parâmetro | Valor   | Parâmetro              | Valor                                  |
|-----------|---|------------------------|--|
| $D_1$     | $3,00 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ | $h_m$                  | $3,00 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$ |
| $D_0$     | $0,05 D_1$  | $H_{amb}$              | 0,6                                    |
| $h_c$     | 0,8   | $\varepsilon_{sh,ult}$ | $665 \mu\varepsilon$                   |
| $M$       | 5   |                        |  |

A elasticidade e a fluência do betão são simuladas através de uma cadeia de Kelvin com dez elementos de Kelvin e ajustada a 30 instantes de tempo de forma a captar a evolução da viscoelasticidade do betão ao longo de toda a análise. A cadeia de Kelvin é calibrada de acordo com os resultados dos ensaios de fluência, que foram realizados com carregamento aos 8 e aos 50 dias. Nestes ensaios foram impostas as mesmas condições de cura que nos ensaios das lajes. A Figura 5 compara a curva de fluência numérica, simulada através da cadeia de Kelvin, e os resultados dos ensaios.

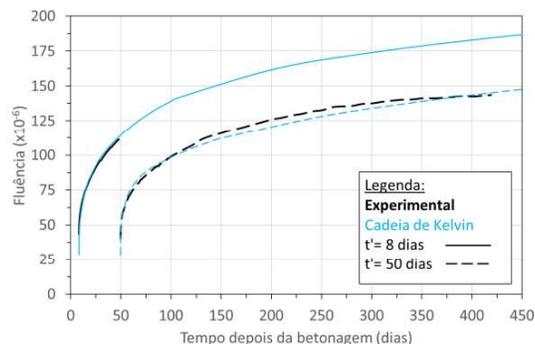


Figura 5 – Ajuste da cadeia de Kelvin à fluência medida experimentalmente.

O modelo de aderência adotado tem por base o estipulado no Model Code 2010 (MC2010 [6]) e as propriedades mecânicas do betão aos 28 dias. A fratura do betão é simulada através do modelo bilinear de *tension softening*, de acordo com o MC2010. A energia de fratura é calculada recorrendo à formulação do MC2010 e toma o valor de 133 N/m. O coeficiente de Poisson é 0,2 e é afetado por uma função de dano que reduz o seu valor com o aumento da abertura de fendas. A redução da rigidez de corte é simulada através de um fator de redução constante,  $\beta = 0,01$ .

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Resultados da análise higrométrica e da hidratação do cimento

Os resultados da análise higrométrica dos provetes H10 e H15, com os parâmetros obtidos no processo de calibração do modelo higrométrico, são apresentados na Figura 6, para as várias profundidades onde foi medida a humidade relativa no betão.

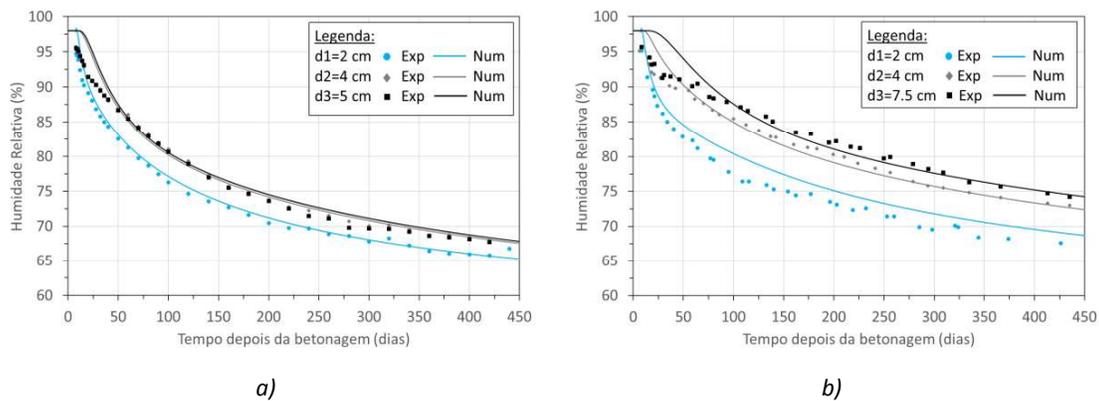


Figura 6 – Evolução da humidade, medida e calculada: a) provete H10 com 10cm de espessura; b) provete H15 com 15cm de espessura.

Na análise numérica opta-se por considerar um valor para a humidade local inicial igual a 98%. Este valor pode ser justificado experimentalmente pelo consumo interno de água devido à hidratação do cimento ou pela sensibilidade do aparelho de medição da humidade local. A simulação desta fase inicial é irrelevante uma vez que a análise numérica e a monitorização experimental iniciam aos 7 dias, com a descofragem das lajes. Nos gráficos é visível que grande parte da secagem ocorre nos dias seguintes à descofragem. De uma maneira geral pode-se afirmar que o modelo higrométrico reproduz corretamente a secagem de ambos os provetes. Observa-se uma maior diferença, entre valores numéricos e experimentais, na secagem dos poros mais interiores nos dias após a descofragem. Esta diferença é justificada pelos seguintes fatores: (i) o equipamento de medição (Vaisala® HMP40S) tem menor precisão em ambientes com humidade relativa acima de 90% e (ii) as medições sucessivas em ambientes muito húmidos tendem a descalibrar o equipamento (primeira calibração do equipamento após descofragem foi efetuada aos 54 dias de idade).

Após estabelecida a evolução da humidade ao longo da espessura do provete e ao longo do tempo, é quantificada a retração local através da Eq. (2). A Figura 7 compara a evolução ao longo do tempo da retração medianizada ao longo da secção transversal. Os resultados experimentais são os obtidos em dois provetes cilíndricos de 15 cm de diâmetro.

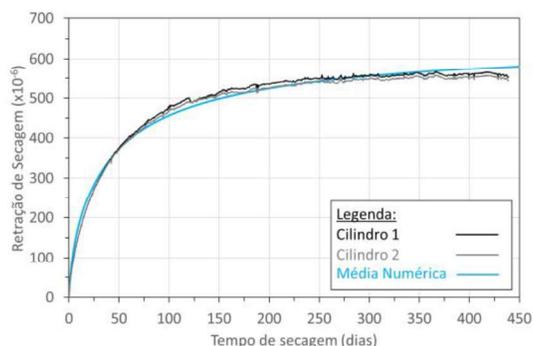


Figura 7 – Comparação entre a evolução da retração de secagem experimental e a média dos resultados numéricos.

## 4.2 Resultados da análise mecânica

A análise mecânica é realizada desde a descofragem aos 7 dias até 450 dias após a betonagem. A figura seguinte apresenta as extensões de fissuração nas três lajes, no final da análise.

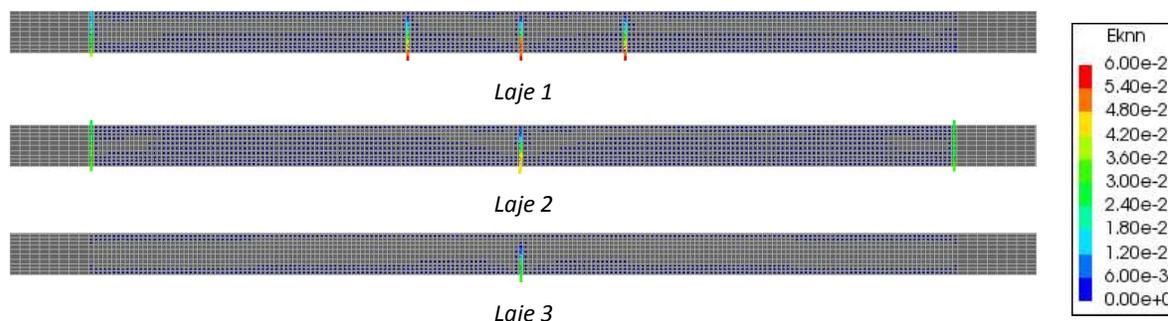


Figura 8 – Representação da localização das fendas para as três lajes.

O número de fendas está associado ao grau de restrição de cada laje e ao seu respetivo carregamento. A Laje 1, que é a mais solicitada, apresenta três fendas localizadas na zona de controlo, enquanto as Lajes 2 e 3 apresentam apenas uma fenda. Experimentalmente detetaram-se três fendas na Laje 1, quatro fendas na Laje 2 e apenas uma fenda na Laje 3 [3]. Além disso, a Laje 1 e a Laje 2 apresentam fissuras que atravessam a totalidade da espessura da laje na zona de conexão entre o betão elástico e o betão fissurado. Estas fissuras são espectáveis e foram observadas na campanha experimental (na posição de ligação da laje ao apoio), devendo-se em grande parte à diminuição do momento fletor, ficando a secção transversal nesta zona totalmente tracionada, e não afetam a análise dos resultados na Zona de Controlo. Apenas na Laje 2 o número de fendas observadas experimentalmente é significativamente diferente do obtido no modelo numérico. Estes resultados indiciam que as condições de aderência aço-betão na Laje 2, junto à zona de meio-vão, poderão ser mais rígidas do que as que foram consideradas nos modelos numéricos.

A Figura 9 apresenta a comparação entre a abertura de fendas experimental e numérica a meio-vão, para cada uma das três lajes.

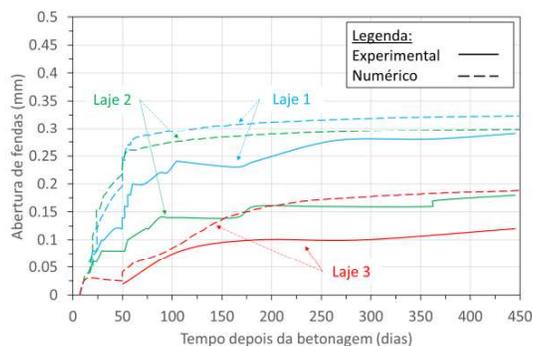


Figura 9 – Comparação entre a abertura de fendas, numérica e experimental, para a fissura de maior abertura (a meio-vão), nas três lajes.

Os resultados numéricos preveem aberturas de fendas ligeiramente superiores aos resultados experimentais, mas as diferenças obtidas, no caso das Lajes 1 e 3, pode ser consideradas pouco significativas, se se tiver em conta que experimentalmente são observadas variações na abertura, ao

longo da largura da laje, que podem atingir 0,1 mm [3]. No caso da Laje 2, a abertura de fenda calculada é significativamente superior à observada experimentalmente, podendo a diferença ser justificada pelo mesmo motivo apontado a propósito do número de fendas formadas na experiência e na simulação computacional.

A figura seguinte apresenta uma comparação entre os resultados numéricos e os dados experimentais das três lajes para a evolução do deslocamento vertical a meio-vão e a extensão média na Zona de Controlo.

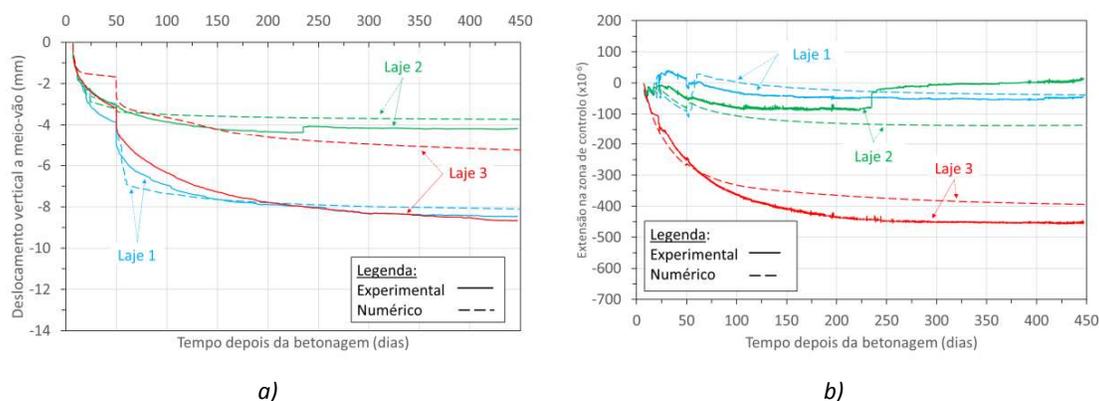


Figura 10 – Comparação entre os resultados experimentais e numéricos: a) deslocamento vertical a meio vão; b) extensão da Zona de Controlo.

Na Figura 10a) verifica-se uma boa representação dos resultados numéricos da Laje 1 e da Laje 2. As diferenças entre os resultados numéricos e experimentais obtidos para a Laje 3 podem ser explicados pela existência de micro-fendas na laje ensaiada, que não são observáveis no modelo, e por uma maior deformabilidade da laje ensaiada na zona dos apoios, por causa de fissuração localizada nessa posição. Após a aplicação da sobrecarga aos 50 dias a flecha da Lajes 1 e 3 aumenta respetivamente. Depois dos 50 dias observa-se a contribuição da extensão de retração e da extensão de fluência para o aumento da flecha a meio vão. Na Figura 10b), é apresentada a extensão na Zona de Controlo definida na Figura 2. Os resultados numéricos reproduzem com precisão os resultados experimentais.

## 5 CONCLUSÕES

O presente artigo apresenta a validação de um modelo de análise higró-mecânica, a longo prazo, de lajes maciças restringidas axialmente. Em suma:

- O modelo higrométrico foi validado para a simulação da evolução de humidade relativa através da comparação com valores medidos para várias profundidades. O modelo permitiu ainda a simulação da retração local em concordância com os resultados da retração experimental.
- O modelo para análise mecânica é validado para a simulação das três lajes do projeto IntegraCrete através da utilização de modelos materiais calibrados com base na caracterização experimental. Foi possível obter uma reprodução aceitável da abertura de fendas, da flecha a meio vão e da extensão média na Zona de Controlo.

Conclui-se que as estratégias de modelação apresentadas neste trabalho podem considerar-se convenientemente validadas para a simulações de estruturas correntes sobre o efeito sobreposto de

cargas aplicadas e da retração restringida, permitindo assim compreender melhor os padrões de fissuração e o comportamento mecânico característico deste tipo de estruturas.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por: fundos nacionais da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através dos contratos de bolsa de doutoramento 2020.014450.BD e SFRH/BD/148558/2019 atribuídos ao primeiro e ao segundo autor; Financiamento Base - UIDB/04708/2020 (CONSTRUCT) e UIDB/04029/2020 (ISISE), provenientes de fundos nacionais através da FCT/MCTES (PIDDAC); projeto IntegraCrete PTDC/ECM-EST/1056/2014 (POCI-01-0145-FEDER-016841).

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Schlicke *et al.* (2020). Analytical assessment of restraint forces and crack widths in end-restrained building slabs, *Engineering Structures* 224, p. 111218. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111218>
- [2] C. Ferreira *et al.* (2019). Thermo-hygro-mechanical simulation of cracking in thick restrained RC members: application to a 50 cm thick slab, *Journal of Advanced Concrete Technology* 17, no. 8, pp. 489-505. <https://doi.org/10.3151/jact.17.489>
- [3] J. Gomes *et al.* (2020). A new test setup for simulation of the combined effect of bending and axial restraint in slab-like specimens, *Engineering Structures* 225, p. 111251. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111251>
- [4] M. Azenha, (2009), Numerical Simulation of the Structural Behaviour of Concrete Since its Early Ages, Faculty of Engineering, University of Porto, Porto, PhD Thesis.
- [5] H.-G. Kwak, S.-J. Ha, and J.-K. Kim (2006). Non-structural cracking in RC walls: Part I. Finite element formulation, *Cement and Concrete Research* 36, no. 4, pp. 749-760. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2005.12.001>
- [6] *Model Code for Concrete Structures 2010*, Book, 2013.