FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 1, 2016

Jaime E. Villate

Porto, julho de 2016

Conteúdo

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 1.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

Ano académico 2015–2016, segundo semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Ascenso, Victor Hugo Granados Fernandez e Jaime E. Villate.

Número de alunos 211.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

Aula 1. 18-2-2016

FÍSICA I. MIEIC. 2015/2016

página Web: http://def.fe.up.pt/eic0010

Programa. - Mecânica vetorial.
- Mecânica lagrangiana.
- Sistemas dinâmicos.

Metodologia.

Usa-se software de Algebrá Computacional (CAS, em inglês, Computer Algebra System).
Maxima → http://maxima.sourceforge.net

Importância.
- Bases para software de simulação (computer graphics, jogos).
- Visualização gráfica de dados.
- Desenvolvimento da capacidade de analisar sistemas e criar modelos matemáticos

Avaliação.

2 testes (13 de abril e 1 de junho)	40%
exame final	60%

Bibliografia.

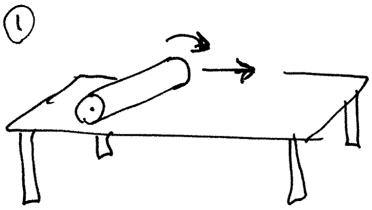
J. Villate (2016). Dinâmica e Sistemas Dinâmicos. (http://def.fe.up.pt/dinamica)

Capítulo 1. Cinemática.

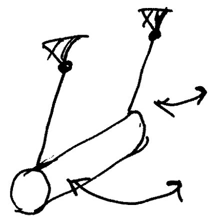
Movimento. Mudança de posição de um objeto. É um conceito relativo, porque a posição é diferente para diferentes observadores.

TIPOS DE MOVIMENTOS.

Dois exemplos:

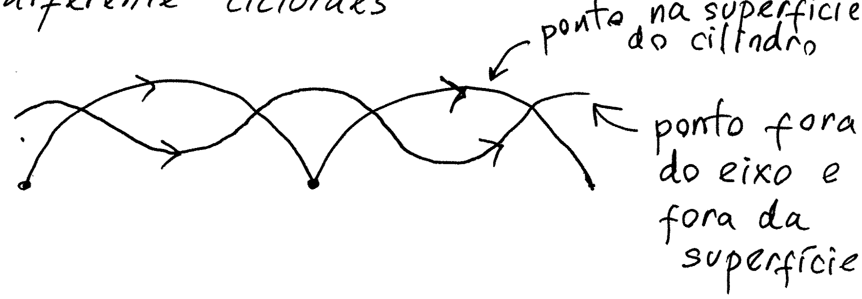
① 

cilindro a rodar sobre uma mesa

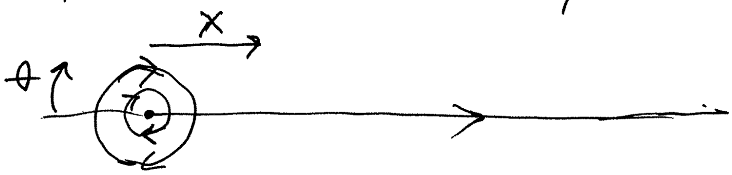
② 

O mesmo cilindro, pendurado de dois fios, em movimento pendular

No primeiro caso, a trajetória de diferentes pontos no cilindro é diferente. O centro (pontos no eixo do cilindro) segue uma trajetória retilínea, mas os outros pontos têm trajetórias com diferente "cicloides"

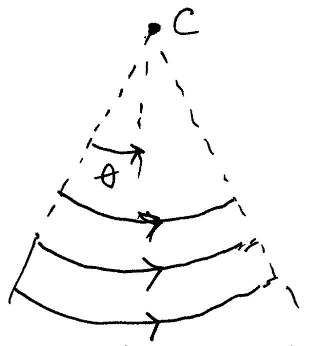


No entanto, todas as trajetórias podem ser obtidas pela sobreposição de dois movimentos mais simples: o movimento retilíneo do centro + movimento circular uniforme em torno do eixo



Diz-se então que o movimento tem DOIS GRAUS DE LIBERDADE, porque basta conhecer como variam duas variáveis no tempo (x e θ) para descrever o movimento de qualquer ponto no cilindro. x = posição do centro. θ = ângulo que o cilindro roda.

O segundo movimento é ainda mais simples, porque a trajetória de todos os pontos no cilindro é um arco de círculo (com diferentes raios) todos com o mesmo centro.



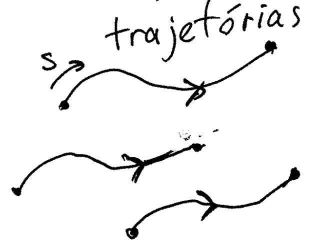
trajetórias de 3 pontos

Este movimento tem <u>um único grau de liberdade</u>, porque basta saber como varia o ângulo θ em função do tempo para conhecer a trajetória de todos os pontos no cilindro.

SISTEMAS COM 1 GRAU DE LIBERDADE

$s(t) \longrightarrow$ posição de um ponto qualquer no objeto, em função do tempo.

É igual para todos os pontos, porque num objeto com um único grau de liberdade, as trajetórias de todos os pontos é a mesma curva (repetida em diferentes partes)



s pode ser o comprimento de arco, medido ao longo da trajetória, ou um ângulo.

<u>DESLOCAMENTO.</u> Diferença entre as posições em dois instantes diferentes.

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$$

(admite-se, por conveniência, que $t_2 > t_1$)

A posição depende do ponto $s=0$ que seja escolhido como origem, mas o deslocamento não depende dessa escolha.

<u>VELOCIDADE MÉDIA</u>

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

como Δs pode ser negativo (Δt não porque $t_2 > t_1$) então $\bar{v}$ pode ser negativa.

$|\bar{v}|$ = RAPIDEZ

Aula 2. 19-2-2016

MAXIMA

Instalação: obter o pacote em
http://maxima.sourceforge.net/download.html
ou (Ubuntu, Debian, Mint) o pacote DEB na página
Web de Física I (def.fe.up.pt/eic0010)

Interfaces incluídas: rmaxima (terminal), Xmaxima
Emacs → maxima, imaxima

É também necessário instalar alguns pacotes externos:

- gnuplot (para os gráficos)
- rlwrap (se usar rmaxima)
- emacs (se quiser usar maxima ou imaxima dentro de Emacs)
- LaTeX (pacote livetex ou miktex, etc. para poder usar imaxima)

A interface gráfica Wxmaxima é um projeto independente de Maxima e pode ser obtida na página desse projeto.

Exemplos.

(%i1) eq: x^3-13*x^2/6-5*x/3+4=0;

associa a equação $x^3 - \frac{13}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + 4 = 0$ ao símbolo eq.

(%i2) solve(eq);

resolve a equação associada a eq, dando 3 respostas numa lista:

(%o2) $[x = 2,\ x = \frac{3}{2},\ x = -\frac{4}{3}]$

Para seleccionar a segunda resposta:

(%i3) %o2[2]; (a numeração na lista começa em 1)

(%o3) $x = 3/2$

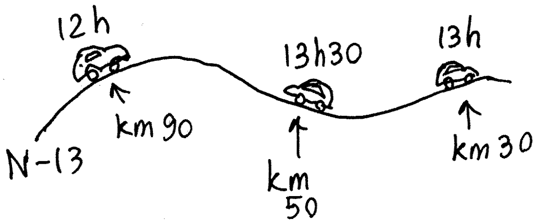
Ou apenas o valor numérico:

(%i4) rhs(%o2[2]); (rhs quer dizer "right hand side" = lado direito numa equação)

Aula 3. 25-2-2016

Exemplo de movimento com um grau de liberdade:

Automóvel numa estrada.



$t_0 = 12\,h$, $s_0 = 90\,km$

$t_1 = 13\,h$, $s_1 = 30\,km$

$t_2 = 13.5\,h$, $s_2 = 50\,km$

velocidades médias:

$$\bar{v}_{01} = \frac{30-90}{13-12} = -60\ \frac{km}{h}$$

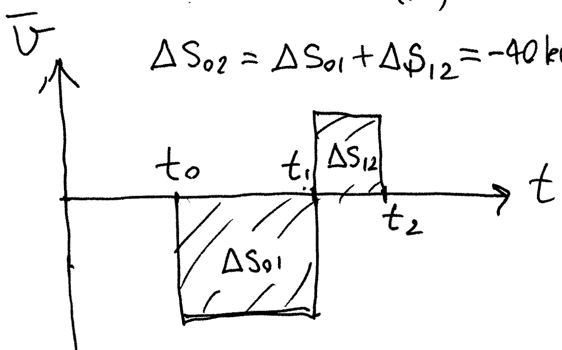
$$\bar{v}_{12} = \frac{50-30}{13.5-13} = 40\ \frac{km}{h}$$

$\bar{v}_{01} < 0$ indica movimento no sentido oposto ao que é definido como positivo.

$\bar{v}_{12} > 0 \Longrightarrow$ sentido positivo.

$$\Delta s_{01} = \bar{v}_{01}\,\Delta t_{01} = -60\ (km)\ ,\ \Delta s_{12} = \bar{v}_{12}\,\Delta t_{12} = 20\ km$$

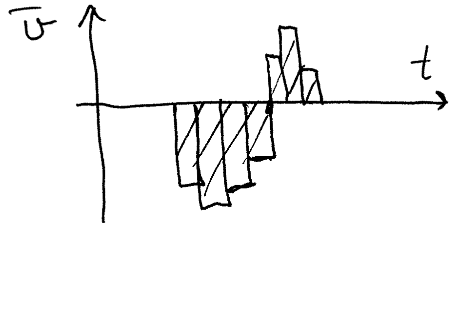
$$\Delta s_{02} = \Delta s_{01} + \Delta s_{12} = -40\ km$$



Δs é a área entre a velocidade e o eixo das abcissas.

v deve ser uma função contínua, mas apenas conseguimos medir $\bar{v}$

com maior precisão seria:



$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} v_i\,\Delta t_i$$

VELOCIDADE INSTANTÂNEA

$v(t)$ = função contínua que depende de t.

$$\underbrace{\Delta s = \lim_{\{\Delta t_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta t_i}_{\text{integral de } v(t) \text{ em ordem a } t.} \Longrightarrow \boxed{s_f - s_o = \int_{t_o}^{t_f} v\, dt} \quad (1)$$

$$\underbrace{v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}_{\text{derivada de } s(t) \text{ em ordem a } t.} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \quad (2)$$

As equações (1) e (2) são equivalentes. A partir de (2) pode multiplicar-se os dois lados por dt in integrar-se desde a condição inicial até a condição final:

$$\int_{t_o}^{t_f} v\, dt = \int_{s_o}^{s_f} ds \Longrightarrow s_f - s_o = \int_{t_o}^{t_f} v\, dt$$

ACELERAÇÃO TANGENCIAL

$$\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_o}{t_f - t_o}$$ (aceleração tangencial média.)

aceleração tangencial instantânea:

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v}}$$ (não tem de ser contínua!)

chama-se "tangencial" porque, como veremos, é apenas uma parte da aceleração total

$$\Longrightarrow \quad dv = a_t\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} a_t\,dt$$

$$\boxed{v_f - v_0 = \int_{t_0}^{t_f} a_t\,dt}$$

Exemplo. Um ciclista com velocidade inicial de 5 m/s aplica os travões, fazendo com que a velocidade diminua de acordo com a função:

$v = \frac{1}{2}\sqrt{100-s^2}$ (SI), onde s é a posição, medida desde o ponto onde começa a travagem. Determine:

(a) a aceleração tangencial em função da posição

(b) o tempo que demora até parar completamente.

Resolução. $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\,v$

$$\Longrightarrow a_t = \left(\frac{1}{4}(100-s^2)^{-1/2}(-2s)\right)\left(\frac{1}{2}(100-s^2)^{1/2}\right) = -\frac{s}{4}$$

(negativa porque v está a diminuir).

(b) $$v = \frac{ds}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{100-s^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\,dt = \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}}$$ (agrupa-se todo o que depende de s num lado da equação)

Integra-se desde $t=0$ até t_f, onde pára:

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_f} ds = \int_0^{s_f} \frac{ds}{\sqrt{100-s^2}}$$ s_f = posição onde pára.

Esta equação tem duas incógnitas, t_f e s_f. É necessaria outra relação entre t_f e s_f que vem do facto que $v_f = 0$ quando $t = t_f$ e $s = s_f$:

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{100-s_f^2} = 0$$

Resolução no Maxima

(%i1) v: sqrt(100-s^2)/2$

(%i2) solve(v=0, s); (neste caso bastava solve(v,

(%o2) [s=-10, s=10]

Apenas interessa aqui a solução com $s>0$

(%i3) sf: subst(%[2], s); (%[2] → segunda parte da lista obtida no comando anterior)

(%o3) 10

(%i4) tf: integrate(1/v, s, 0, tf);

(%o4) %pi (π)

(%i5) float(tf);

(%o5) 3.141592653589793

A alínea (a) resolvia-se no Maxima assim:

(%i6) gradef(s, t, v); (define derivada de s em ordem a t, igual à expressão v)

(%o6) s

(%i7) at: diff(v,t);

(%o7) $-\frac{s}{4}$

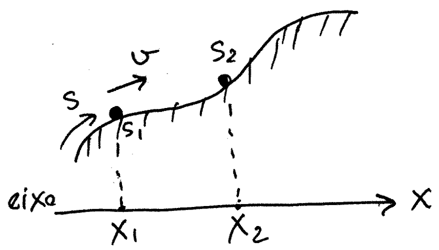
Aula 4. 26-2-2016

EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

$$v = \dot{s} \qquad a_t = \dot{v} \qquad a_t = v\frac{dv}{ds}$$

Em cada uma estão incluídas 3 das quatro variáveis t, s, v e a_t. Para poder resolver uma destas equações é necessário ter uma relação para uma das 3 variáveis em função das outras duas, para ficar com uma equação com duas variáveis.

PROJEÇÃO DO MOVIMENTO NUM EIXO



$s(t) \rightarrow x(t)$ (projeção no eixo x)

$v_x = \dot{x}$ (projeção da velocidade no eixo x)

$a_x = \dot{v}_x$

As 3 equações cinemáticas para a projeção do movimento são semelhantes às do movimento na trajetória:

$$v_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{v}_x \qquad a_x = v_x\frac{da_x}{dx}$$

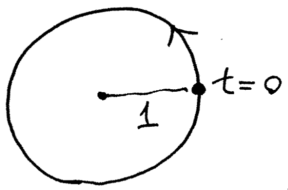
Também pode projetar-se num eixo vertical: $y(t)$

$$v_y = \dot{y} \qquad a_y = \dot{v}_y \qquad a_y = v_y\frac{da_y}{dy}$$

Neste caso, há uma relação entre $x(t)$ e $y(t)$ porque o movimento tem um único grau de liberdade.

Em alguns casos, a projeção do movimento pode resultar mais complicada do que o movimento original.

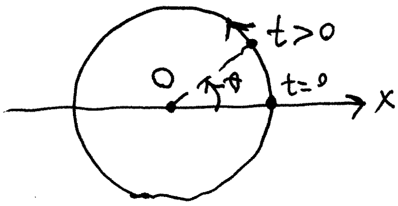
Exemplo. Movimento circular uniforme, num círculo de raio $r=1$, com velocidade constante $v=1$



s = comprimento de arco medido desde o ponto onde se encontra em $t=0$.

$$v = 1 = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t dt \quad \Rightarrow s=t \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

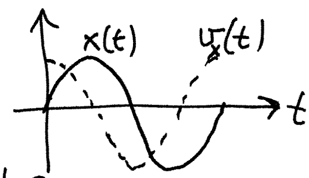


projeção do movimento em x:

$$x = 1\cos\theta = \cos(s) = \cos(t)$$

$v_x = -\sin(t)$

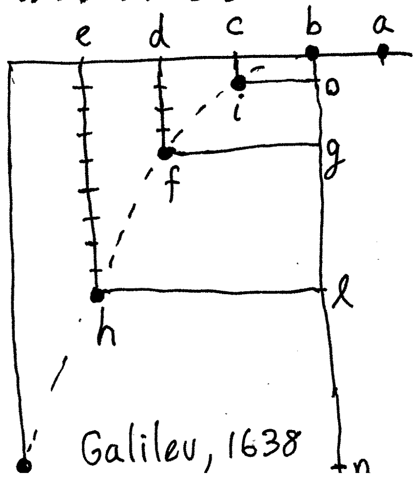
$a_x = -\cos(t)$



$x(t) \rightarrow$ movimento harmónico simples.

ACELERAÇAO DA GRAVIDADE

Um objeto lançado no ar na horizontal, segue uma trajetória plana que pode ser decomposta nas projeções horizontal e vertical



Galileu, 1638

Galileu descobriu que, se a trajetória for curta, a resistência do nar é desprezável e o movimento na projeção horizontal é com velocidade constante; na figura, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ são os deslocamentos horizontais em intervalos de tempo iguais

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{de} \implies v_x = \text{constante}$$

$$\implies dx = v_x\, dt \qquad \int_0^x dx = v_x \int_0^t dt$$

$$\boxed{x = v_x t} \quad (\text{se } x=0 \text{ em } t=0) \qquad a_x = 0$$

(movimento uniforme)

Na projeção vertical, Galileu observou que os deslocamentos $\overline{bo}$, $\overline{og}$, $\overline{gl}$, $\overline{ln}$ estão na proporção

$1, 3, 5, 7, \ldots$

ou seja, a coordenada y é proporcional a t^2

$$\{\overline{bo}, \overline{df}, \overline{eh}, \ldots\} \rightarrow \{1, 4, 9, \ldots\}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 \qquad \left(\text{onde } g \text{ é uma constante positiva}\right)$$

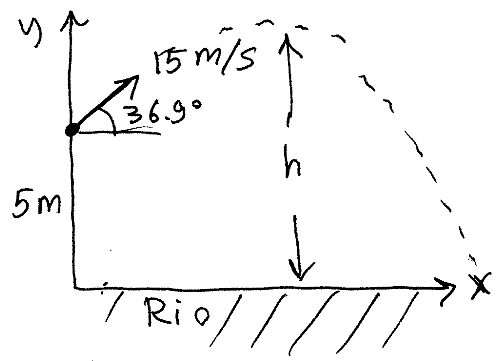
$(y=0,\ \text{em } t=0)$

$$\boxed{v_y = -g\,t} \qquad \boxed{a_y = -g} \qquad \left(\text{movimento uniformemente acelerado.}\right)$$

O valor observado para a **aceleração da gravidade** g é aproximadamente:

$$g \approx 9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \left(\text{igual para todos os objetos, independentemente do peso}\right)$$

Exemplo. Atira-se uma pedra desde uma ponte a 5m por cima de um rio, com velocidade de 15 m/s, em direção inclinada 36.9° por cima da horizontal. Determine a velocidade com que a pedra entrará na água e a altura máxima na sua trajetória, medida desde a superfície do rio (admita que a resistência do ar pode ser desprezada).



Posição inicial:

$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 5\,\text{m}$

Velocidade inicial:

$v_{0x} = 15\cos 36.9° \approx 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_{0y} = 15\sin 36.9° \approx 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Aceleração em qualquer instante ou posição:

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = -9.8 \quad (\text{SI})$$

Quando entra na água, $v_x = 12$ (constante) e v_y calcula-se a partir de:

$$-9.8 = v_y \frac{dv_y}{dy} \implies -9.8\int_5^0 dy = \int_9^{v_{fy}} v_y\, dv_y$$

$$\implies v_{fy} = -13.38 \qquad v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} \approx 18.0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

No ponto de altura máxima, $y = h$ e $v_y = 0$

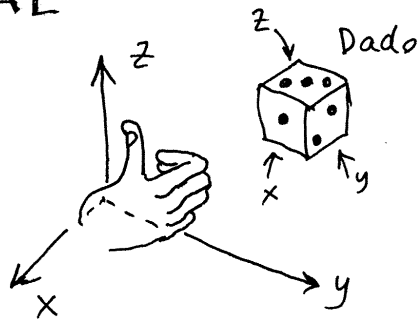
$$\implies \quad -9.8\int_5^h dy = \int_9^0 v_y\, dv_y \implies 9.8(5-h) = -\frac{81}{2}$$

$$\implies \quad h = 9.13\ \text{m}$$

Aula 5. 3-3-2016

CINEMÁTICA VECTORIAL

Em três dimensões, as coordenadas cartesianas definem-se de forma que quando os dedos da mão direita rodam do eixo x para o eixo y, o polegar aponta no sentido do eixo z.

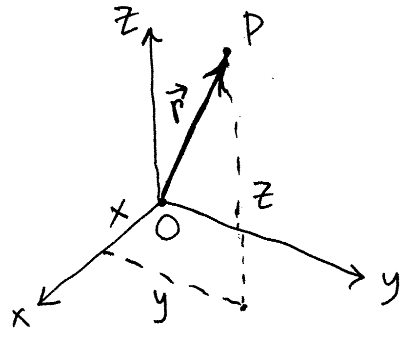


Em vez de resolver as equações cinemáticas das projeções x, y e z por separado, é conveniente combinar as 3 projeções num vetor.

Vetor posição

Cada posição no espaço (ponto P). Representa-se por um vetor que vai desde O até P:

$\vec{r}$ = vetor posição



Os versores (vetores unitários) $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ apontam na direção positiva dos eixos x, y e z.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}$$

x,

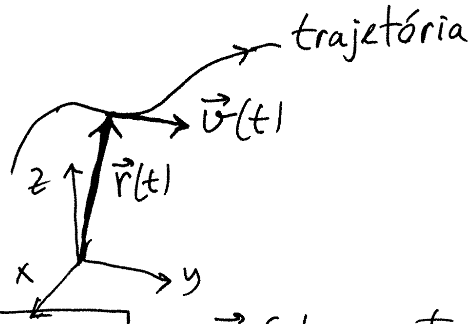
O deslocamento de um ponto, num intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$

Observe-se que $\vec{r}$ depende da posição da origem, mas $\Delta\vec{r}$ não.

Vetor velocidade

A cada instante t, o vetor velocidade é:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k}}$$

$\vec{v}$ é tangente à trajetória.

Vetor aceleração

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\,\hat{\imath} + \dot{v}_y\,\hat{\jmath} + \dot{v}_z\,\hat{k} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} + \ddot{z}\,\hat{k}}$$

o módulo da velocidade é:

$$|\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{|ds|}{dt} = |\dot{s}| \Rightarrow |\vec{v}| = |v|$$

mas o módulo da aceleração, $|\vec{a}|$ não é igual ao valor absoluto de a_t.

As 3 equações $a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$, $a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$, $a_z = v_z \frac{dv_z}{dz}$ também podem combinar-se numa única equação vetorial, $\vec{a}\cdot d\vec{r} = \vec{v}\cdot d\vec{v}$, mas isso fica para o capítulo 6. Neste capítulo, quando seja necessário essas equações serão resolvidas por separado.

As expressões para $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são equivalentes a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\, dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \implies \boxed{\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\, dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\, dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} \implies \boxed{\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\, dt}$$

Os integrais podem ser calculados quando se conhece a expressão para $\vec{v}$ (ou $\vec{a}$) em função de t.

Exemplo 2.1.
A expressão da velocidade de uma partícula, em função do tempo t, é:

$$\vec{v} = \left(5 - t^2 e^{-t/5}\right)\hat{\imath} + \left(3 - e^{-t/12}\right)\hat{\jmath} \quad \text{(SI)}$$

a partícula passa pela posição $(2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})$ em $t=0$. Determine $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em $t=15$ s, e quando t for muito elevado. Trace o gráfico da trajetória durante os primeiros 60 segundos.

No Maxima, os vetores podem ser representados por listas. Neste caso, listas com dois elementos, em que o primeiro é a componente x e o segundo a componente y.

(%i1) v: [5-t^2*exp(-t/5), 3-exp(-t/12)];

(%i2) a: diff(v,t);

(%o2) $\left[\dfrac{t^2\, \%e^{-t/5}}{5} - 2\,t\,\%e^{-t/5},\ \dfrac{\%e^{-t/12}}{12}\right]$

O vetor posição, $\vec{r}(t)$, obtém-se integrando $\vec{v}(t)$.

(%i3) assume(t>0)$ (integrate precisará saber se t é positivo ou negativo)

(%i4) r: [2,5] + integrate(v,t,0,t);

(%o4) [%$e^{-t/5}$((5t-250)%$e^{t/5}$ + 5t^2 ...

O comando expand reduz isto numa forma mais simples:

(%i5) r: expand(r);

(%o5) [5t^2 %$e^{-t/5}$ + 50t %$e^{-t/5}$ + 250 %$e^{-t/5}$ + 5t - 248, 12 %$e^{-t/12}$ + 3t - 7]

Em t=15,

(%i6) float(subst(t=15, [r,v,a]));

(%o6) [[-67.202.., 41.43..],[-6.20.., 2.71..],[0.74..., 0.023..]]

$\vec{r} = -67.2\hat{\imath} + 41.4\hat{\jmath}$, $\vec{v} = -6.20\hat{\imath} + 2.71\hat{\jmath}$, $\vec{a} = 0.75\hat{\imath} + 0.024\hat{\jmath}$

Quando t for muito elevado (infinito),

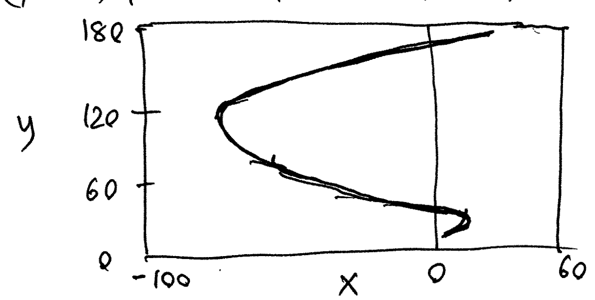
(%o7) limit([r,v,a], t, inf);

(%o7) [[inf, inf], [5,3], [0,0]]

($\vec{r} \to$ infinito, $\vec{v} \to 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, $\vec{a} \to 0$)

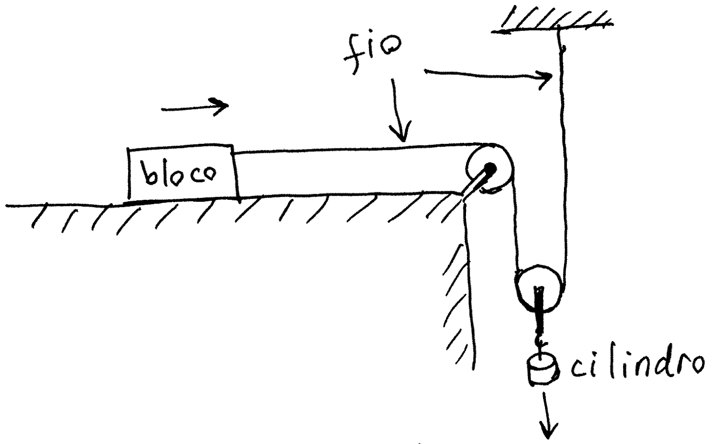
Gráfico da trajetória:

(%i8) plot2d([parametric, r[1], r[2]], [t,0,60], [xlabel,"x"], [ylabel,"y"]);



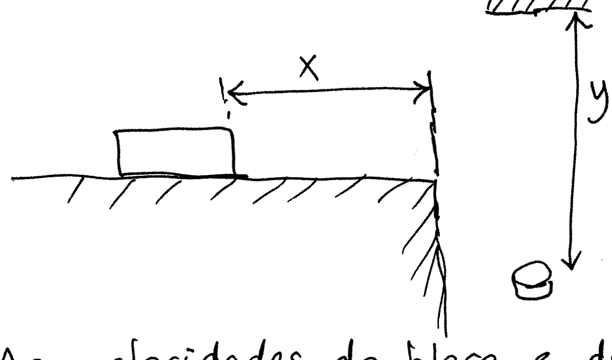
MOVIMENTOS DEPENDENTES

Exemplo. Sistema com um bloco sobre uma mesa e um cilindro a descer na vertical.



O movimento horizontal do bloco e o movimento vertical do cilindro estão relacionados.

Para descrever esses dois movimentos são necessárias duas variáveis x e y, medidas desde dois pontos fixos. Por exemplo:



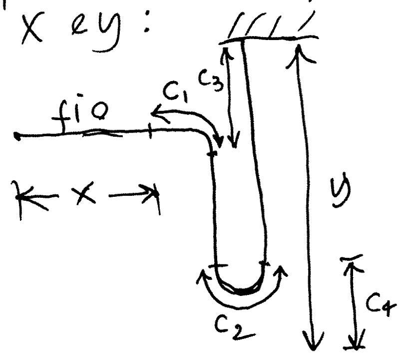
x = distância desde o bloco até o fim da mesa

y = distância desde o cilindro até o suporte do fio.

As velocidades do bloco e do cilindro são então $\dot{x}$ e $\dot{y}$

Mas como as variáveis x e y estão relacionadas, este sistema tem apenas um grau de liberdade e basta saber uma das velocidades para determinar a outra.

A relação entre x e y encontra-se escrevendo a expressão do comprimento do fio, L, em função de x e y:



$$L = x + c_1 + (y - c_3 - c_4) + c_2 + (y - c_4)$$

$$L = x + 2y + c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4$$

Como L, c_1, c_2, c_3 e c_4 permanecem constantes, derivando em ordem ao tempo obtém-se:

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{bloco} = -2v_{cilindro}}$$

o sinal negativo indica que se o cilindro desce ($v_{cilindro} > 0$), o bloco desloca-se para a direita ($v_{bloco} < 0$)

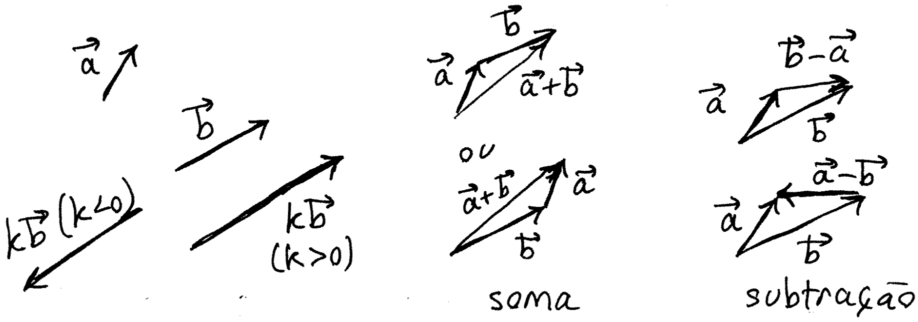
Derivando novamente,

$$\ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$a_{t\,bloco} = -2a_{t\,cilindro}$$ (nenhuma das duas acelerações é igual a g.)

Aula 6. 4-3-2016

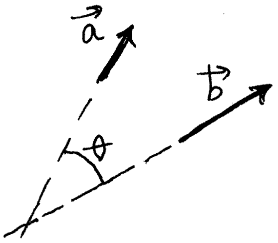
OPERAÇÕES ENTRE VETORES



produto escalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

= escalar (número igual em qualquer referencial)



$|\vec{a}|\cos\theta$ = projeção de $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$

$|\vec{b}|\cos\theta$ = projeção de $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$

o produto escalar é a projeção de um dos vetores na direção do outro, vezes o módulo desse outro vetor.

É um produto comutativo, associativo e distributivo em relação à soma.

$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$ (porque $\cos 90° = 0$)

$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ (porque $\cos 0 = 1$ e $|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

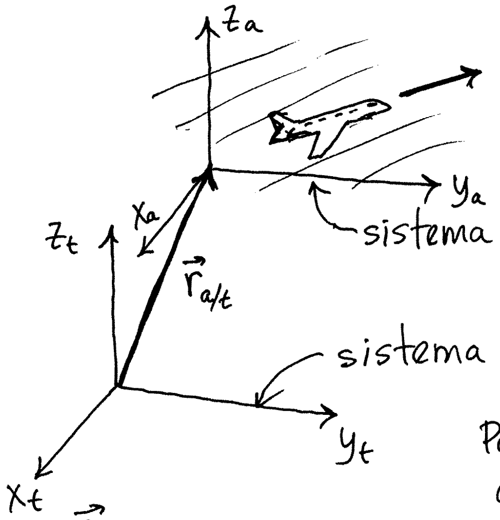
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}\right)$$

No Maxima usa-se um ponto para o produto escalar entre duas listas, e acos( ) para o cosseno inverso.

MOVIMENTO RELATIVO



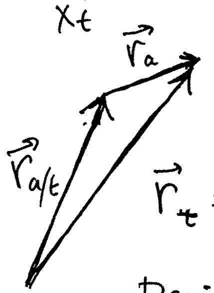
$\vec{v}_a$ = velocidade produzida pelo motor (relativa ao ar)

sistema que se desloca com o ar (sem rodar)

sistema fixo na Terra

Posição do avião em relação ao sistema do ar: $\vec{r}_a$

Posição do avião em relação à terra: $\vec{r}_t$



$$\vec{r}_t = \vec{r}_{a/t} + \vec{r}_a$$

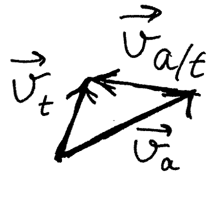
Derivando os dois lados, em ordem ao tempo,

$$\boxed{\vec{v}_t = \vec{v}_a + \vec{v}_{a/t}}$$

veloc. do avião relativa à Terra

vel. do avião relativa ao ar

velocidade do ar, relativa à Terra



Derivando novamente,

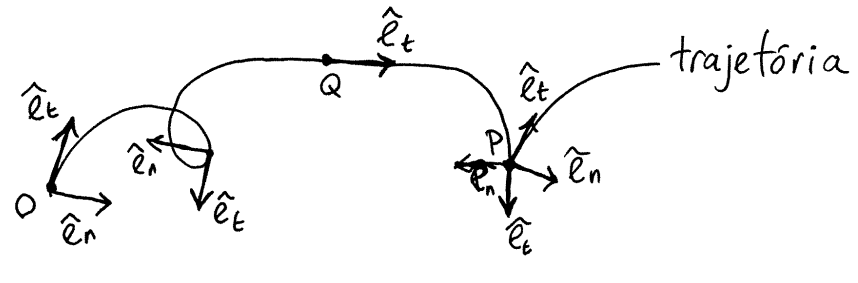
$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{a}_a + \vec{a}_{a/t}}$$

Exemplo: se o avião está em queda livre, $\vec{a}_{\text{avião/terra}} = \vec{g}$ e a aceleração de um passageiro em relação à Terra é também $\vec{a}_t = \vec{g}$

$\Rightarrow \vec{a}_a = 0$ (o passageiro flutua, sem peso, no avião)

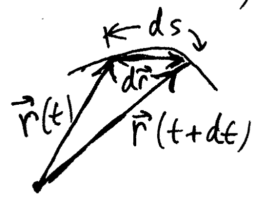
Aula 7. 10-3-2016

MOVIMENTO CURVILÍNEO



Em cada ponto da trajetória, definem-se o versor tangencial, $\hat{e}_t$, tangente à trajetória e no sentido positivo de s, e o versor normal, $\hat{e}_n$, perpendicular a $\hat{e}_t$, no plano da trajetória (nesse ponto) e no sentido em que a trajetória se curva.

Em Q, $\hat{e}_n$ está indefinido (trajetória reta) e em P há dois versores $\hat{e}_t$ e dois versores $\hat{e}_n$ e $\vec{v}$ é, necessariamente, nula.



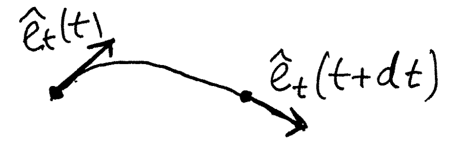
$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = ds\,\hat{e}_t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_t} \qquad \vec{v} = v\,\hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\,\hat{e}_t + v\,\frac{d\hat{e}_t}{dt} \quad (\text{porque } \hat{e}_t \text{ depende de } t)$$

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} + \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t = 2\,\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

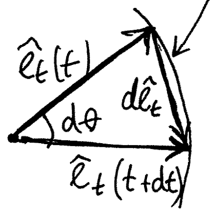
$$\Longrightarrow \frac{d\hat{e}_t}{dt} \text{ é perpendicular a } \hat{e}_t$$



$$d\hat{e}_t = \hat{e}_t(t+dt) - \hat{e}_t(t)$$

para subtrair os dois versores, colocam-se no mesmo ponto:

arco de círculo com raio = 1



$\hat{e}_t$ roda um ângulo $d\theta$, descrevendo um arco de comprimento $= r\,d\theta = d\theta$

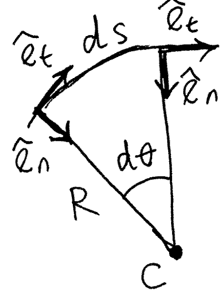
$$d\hat{e}_t = d\theta\,\hat{e}_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{e}_n$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \text{velocidade angular}}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_t + v\dot{\theta}\,\hat{e}_n = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n$$

aceleração tangencial — aceleração normal

Para determinar a velocidade angular, observa-se que $d\theta$ é também o ângulo que $\hat{e}_n$ roda:



C = centro de curvatura local (pode ser diferente a cada instante).

R = raio de curvatura

ds = deslocamento na trajetória = arco com raio R e ângulo $d\theta$

$$\Longrightarrow\quad ds = R\,d\theta \quad\Longrightarrow\quad d\theta = \frac{ds}{R}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$ aceleração normal, ou centrípeta.

Como $\hat{e}_t$ é perpendicular a $\hat{e}_n$, então

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Exemplo. A posição de uma partícula, em função do tempo t, é: $\vec{r} = 5t\,\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\,\hat{\jmath} + 2(1-t^2)\,\hat{k}$ (SI) em $0 \le t \le 1$. Determine (a) $v(t)$ (b) $R(t)$ (c) $\dot{\theta}(t)$ (d) o deslocamento ao longo da trajetória, no intervalo $0 \le t \le 1$.

(a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4t\hat{k}$

$v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 25 + 25t^2$

Arbitrando sentido positivo desde $\vec{r}(0)$ até $\vec{r}(1)$,

$$\boxed{v = 5\sqrt{1+t^2}}$$

(b) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5(1+t^2)^{1/2}\right) = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{25 - \frac{25t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{25}{1+t^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\left(\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}\right)} = 5(1+t^2)^{3/2}$$

(c) $\dot{\theta} = \dfrac{v}{R} = \dfrac{5(1+t^2)^{1/2}}{5(1+t^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{1+t^2}$

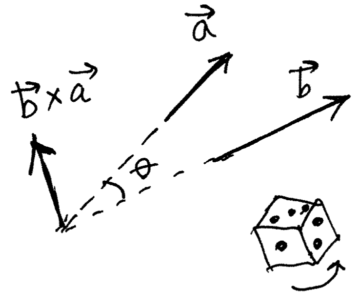
(d) $v = \dfrac{ds}{dt} \implies 5\sqrt{1+t^2}\,dt = ds$

$$\int_0^{\Delta s} ds = \int_0^1 5\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{5}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right) \approx 5.739$$

Observe-se que, como $\vec{a}$ é constante, a trajetória neste caso é uma parábola, com eixo paralelo a $\vec{a} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ e vértice no ponto onde $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$

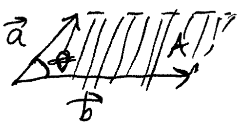
$\implies 15 - 12t = 0$, $t = \frac{5}{4}$ $\quad \vec{r}_{\text{vértice}} = \frac{25}{4}\hat{\imath} + \frac{75}{32}\hat{\jmath} - \frac{9}{8}\hat{k}$

PRODUTO VETORIAL



$\vec{b}\times\vec{a}$ = vetor perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, seguindo a regra da mão direita de $\vec{b}$ para $\vec{a}$ e com módulo

$$|\vec{b}\times\vec{a}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ = área do paralelogramo com lados $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

É associativo, distributivo em relação à soma e anticonmutativo ($\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$)

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0} \quad \text{(porque } \sin 0 = 0\text{)}$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\,,\quad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}\,,\quad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\,,\quad \hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}\,, \ldots$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\times(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$
$$= a_x(b_y\hat{k} - b_z\hat{\jmath}) + a_y(-b_x\hat{k} + b_z\hat{\imath}) + a_z(b_x\hat{\jmath} - b_y\hat{\imath})$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

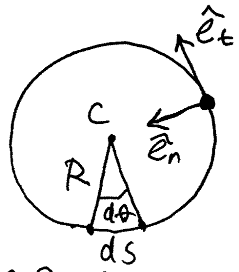
Caso particular: vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano xy:

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k} = (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{k}$$

Aula 8. 11-3-2016

MOVIMENTO CIRCULAR

C fixo e R constante



$$ds = R\,d\theta$$

$$\Longrightarrow \int_0^s ds = R\int_0^\theta d\theta$$

$$\boxed{s = R\theta}$$ (se $\theta = 0$ quando $s = 0$)

velocidade angular $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$

aceleração angular $\boxed{\alpha = \dot{\omega}}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

resolvem-se igual que as equações do capítulo 1.

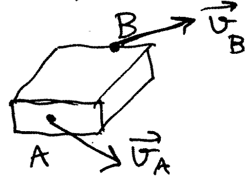
Movimento circular uniforme: $\alpha = 0 \Longrightarrow \omega = \text{constante}$

$$\Longrightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

quando θ aumenta 2π, $\omega t = 2\pi$, a partícula dá uma volta completa.

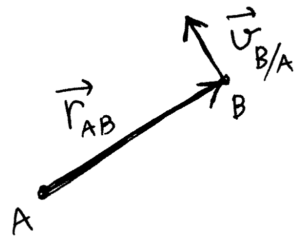
$$\Longrightarrow \text{período} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

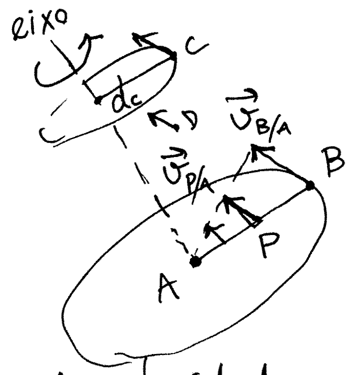


$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{A/B}$$

em qualquer instante, a velocidade de um ponto B no corpo, em relação a outro ponto B no mesmo ponto tem de ser perpendicular a $\vec{r}_{AB}$, porque $|\vec{r}_{AB}|$ permanece constante.



E como todas as distâncias relativas entre pontos do corpo permanecem constantes, todos os pontos no segmento $\overline{AB}$ tem velocidades no mesmo plano (plano de rotação) e proporcionais à distância até A.



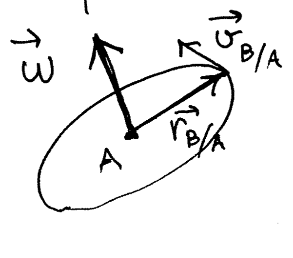
$$v_{P/A} = \omega\, d_P$$

d_P: distância de P até o eixo

ω: constante = velocidade angular do corpo

A velocidade angular ω e o plano de rotação são iguais independentemente do ponto A escolhido como referência.

É útil representar ω como vetor $\vec{\omega}$, perpendicular ao plano de rotação, e seguindo a <u>regra da mão direita</u> no sentido da rotação. Como tal,



$$\boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}$$

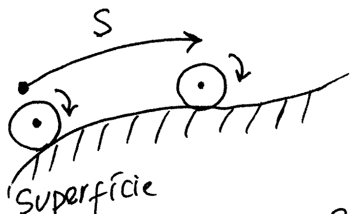
Rotação plana: $\vec{\omega}$ pode mudar de módulo mas não de direção (plano de rotação fixo).

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{vetor paralelo a } \vec{\omega}$$

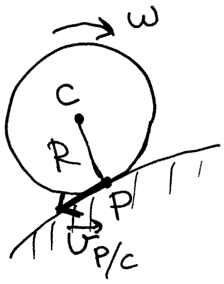
$$\boxed{\vec{a}_{B/A} = \frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}}_{\text{acel. tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}_{B/A}}_{\text{aceleração normal}}}$$

MOVIMENTOS DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DEPENDENTES

Exemplo:
cilindro de raio R a rodar sobre uma superfície, sem deslizar.



2 variáveis $\begin{cases} s = \text{deslocamento na superfície} \\ \theta = \text{ângulo de rotação do cilindro} \end{cases}$



Se s for o deslocamento do centro C, $\Rightarrow \dot{s} = v_c$

$$\vec{v}_c = \dot{s}\,\hat{e}_t$$

$$\vec{v}_{P/C} = -R\omega\,\hat{e}_t$$

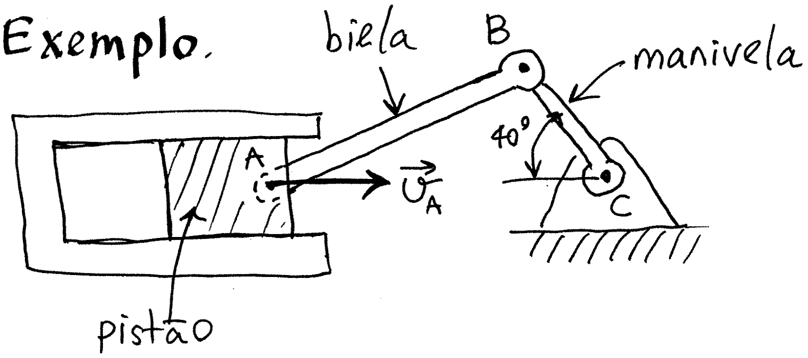
Mas o ponto P está em repouso em relação à superfície (não desliza):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{v}_{P/C} = (\dot{s} - R\omega)\,\hat{e}_t = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{s} = R\dot{\theta}} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{s = R\theta} \\ \boxed{a_t = R\alpha} \end{cases}$$

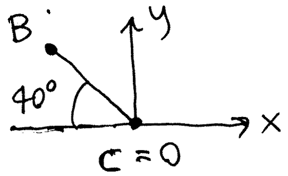
(movimento com um único grau de liberdade)

Exemplo.



No mecanismo biela-manivela da figura, o movimento oscilatório do pistão faz rodar a manivela. Determine as velocidades angulares da biela e da manivela, no instante em que a velocidade do pistão é $|\vec{v}_A| = 12\,\frac{m}{s}$ (para a direita), sabendo que $\overline{AB} = 200$ mm, $\overline{BC} = 75$ mm e a manivela está inclinada 40° em relação à horizontal.

Resolução.

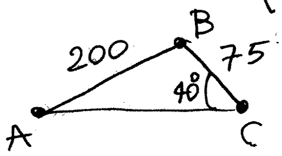


$$\vec{v}_{B/C} = \vec{\omega}_{maniv.} \times \vec{CB} = \vec{v}_B \quad \left(\begin{array}{c}\text{porque} \\ \vec{v}_C = \vec{0}\end{array}\right)$$

$$\vec{\omega}_{maniv.} = \omega_m \hat{k}$$

$$\vec{CB} = 75\left(-\cos 40^\circ\,\hat{\imath} + \sin 40^\circ\,\hat{\jmath}\right) \quad \left(\begin{array}{c}\text{dist.} \\ \text{em mm}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \omega\hat{k} \times \left(-57.45\,\hat{\imath} + 48.21\,\hat{\jmath}\right) = -48.21\,\omega_m\hat{\imath} - 57.45\,\omega_m\hat{\jmath}$$



$$\vec{AB} = \sqrt{200^2 - 48.21^2}\,\hat{\imath} + 48.21\,\hat{\jmath}$$
$$= 194.10\,\hat{\imath} + 48.21\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A = \omega_b\hat{k} \times \vec{AB} + 12000\,\hat{\imath}$$
$$= \left(12000 - 48.21\,\omega_b\right)\hat{\imath} + 194.10\,\omega_b\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12000 - 48.21\,\omega_b = -48.21\,\omega_m \\ 194.10\,\omega_b = -57.45\,\omega_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_b = 56.85\ \text{s}^{-1} & \text{(roda em sentido oposto aos ponteiros do relógio)} \\ \omega_m = -192.07\,\text{s}^{-1} & \text{(no sentido dos ponteiros do relógio)} \end{cases}$$

Aula 9. 17-3-2016

LEIS DE NEWTON

LEI I. Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas.

(também chamada lei da inércia).

Referencial inercial: sistema de referência em que os objetos permanecem em repouso ou movimento uniforme, se não houver forças que alterem esse estado.

Exemplo: Comboio com velocidade retilínea e uniforme. Numa curva, ou quando o comboio acelera, já não é referencial inercial.

A força necessária para mudar o estado depende da massa do objeto

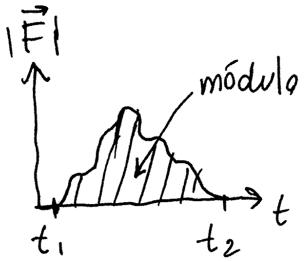
LEI II. A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada.

quantidade de movimento: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

(também chamada momento linear).

Uma força $\vec{F}(t)$, atuando durante o intervalo $[t_1, t_2]$ produz aumento (ou diminuição) da quantidade de movimento:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \qquad \begin{pmatrix} \vec{p}_1 = m\vec{v}_1 \\ \vec{p}_2 = m\vec{v}_2 \end{pmatrix}$$



Se houver várias forças, $\vec{F}$ será a soma (vetorial) de todas elas.
A forma diferencial da equação anterior é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(força resultante no instante } t\text{)}$$

Se a massa m permanece constante,

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Unidade SI de força

$$1\,\text{N} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = \text{um newton.}$$

peso = força de atração gravítica = $\vec{P} = m\vec{g}$
Um objeto com massa de 1 kg tem peso de 9.8 N.

Exemplo:

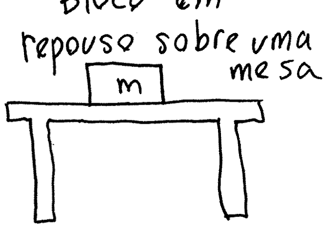
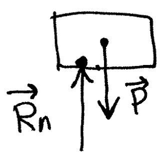


Diagrama de corpo livre:



$\vec{P} = m\vec{g}$ = peso do bloco
$\vec{R}_n$ = reação normal da mesa sobre o bloco

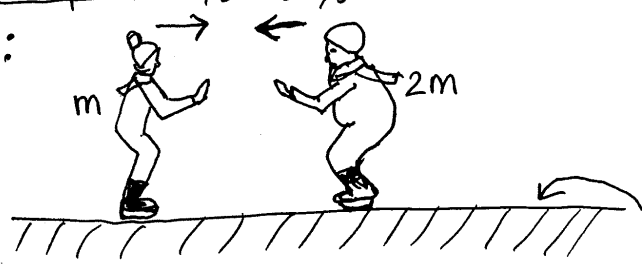
$$\vec{R}_n + \vec{P} = \vec{0} \implies \vec{a} = 0\,. \text{ Se } \vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{0}$$

LEI III. A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas.

(também chamada lei de ação e reação).

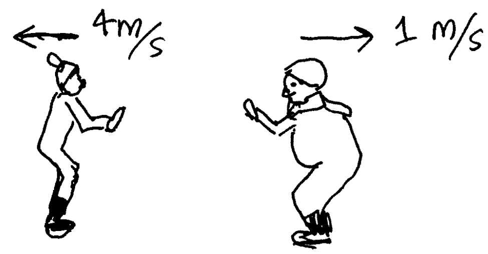
Exemplos

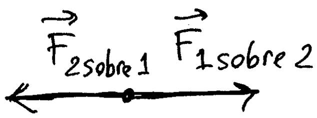
① t_1:



admitindo que a força do gelo nos patins em $[t_1, t_2]$ produz impulso desprezável.

t_2:



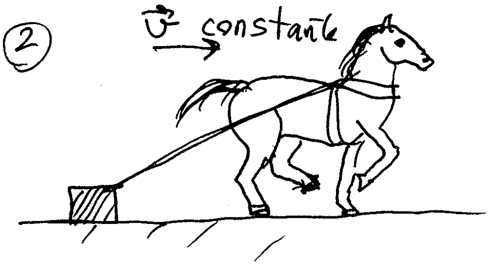


$$|\vec{F}_{2/1}| = |\vec{F}_{1/2}|$$

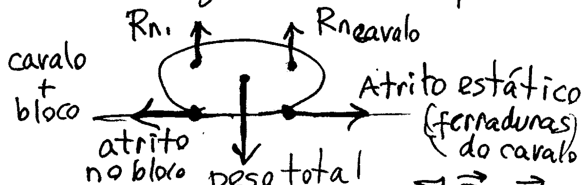
As forças que cada patinador exerce sobre o outro são iguais mas de sentidos opostos

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \qquad m(2-(-4)) = 2m(-2-(-1))$$

②

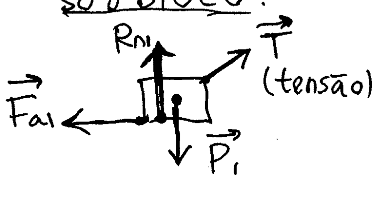


Diagramas de corpo livre

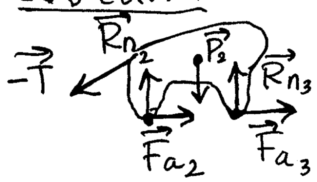


$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

só o bloco:



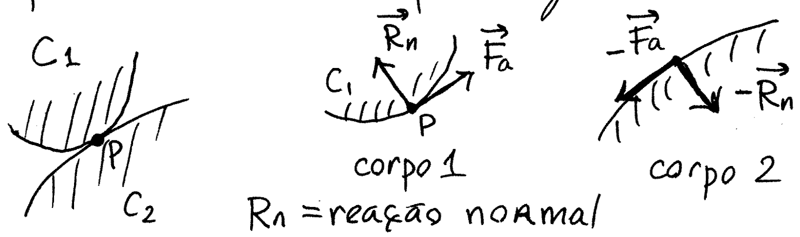
só o cavalo



Aula 10. 18-3-2016

FORÇA DE ATRITO

Componente tangencial da força de contacto entre as superfícies de dois corpos rígidos



R_n = reação normal
F_a = força de atrito

- **Atrito estático**. Quando as superfícies não deslizam. Pode ter qualquer direção no plano tangente as superfícies e módulo menor ou igual a:

$$\boxed{F_{ae} \leq \mu_e R_n}$$

μ_e = coeficiente de atrito estático.

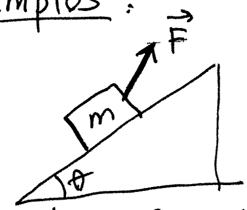
- **Atrito cinético**. Quando as superfícies deslizam. É sempre no sentido oposto da velocidade relativa entre as superfícies e com modulo igual a:

$$\boxed{F_{ac} = \mu_c R_n}$$

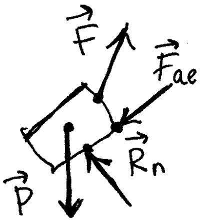
μ_c = coef. de atrito cinético
($\mu_c < \mu_e$)

Exemplos:

1



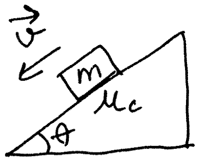
$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$



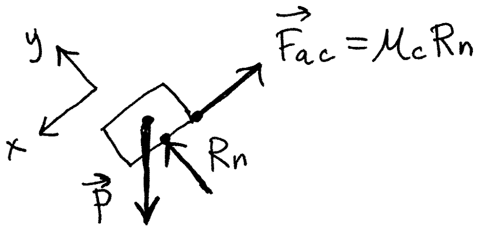
duas incógnitas: R_n e F_{ae}
(F_{ae} pode ser positiva ou neg.)

bloco de massa m, em repouso, com uma força externa $\vec{F}$.

(2)



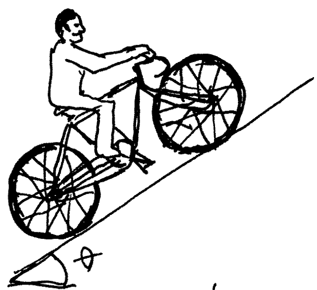
bloco a deslizar num plano inclinado



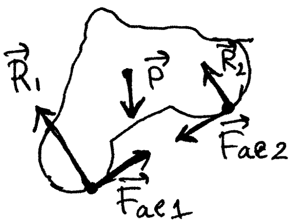
Duas incógnitas: R_n e a (aceler.) e duas equações:

$$\begin{cases} R_n - P_y = 0 \\ P_x - \mu_c R_n = m\,a \end{cases}$$

(3)



bicicleta a subir uma rampa, com velocidade constante



4 incógnitas: R_1, R_2, F_{ae1}, F_{ae2}

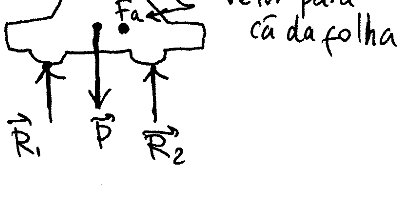
e apenas 2 equações

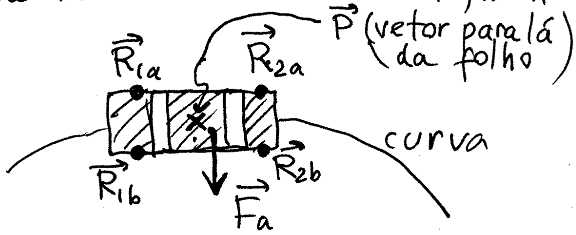
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

No capítulo seguinte explicar-se-á como calcular $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ e $(\vec{F}_{ae1} + \vec{F}_{ae2})$.

(4) Automóvel com v constante numa curva de raio R, numa estrada horizontal

vista lateral



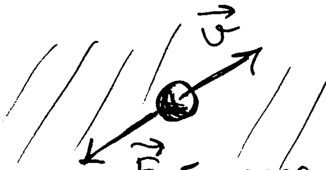


$$\begin{cases} R_{1a} + R_{2a} + R_{1b} + R_{1a} = P \\ F_a = m a_n = m \dfrac{v^2}{R} \quad \text{(força de atrito estático)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{v^2}{R} \leq \mu_e (R_{1a} + R_{1b} + R_{2a} + R_{2b})$$

$$v \leq \sqrt{\mu_e g R} \qquad \text{(não depende da massa)}$$

FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS



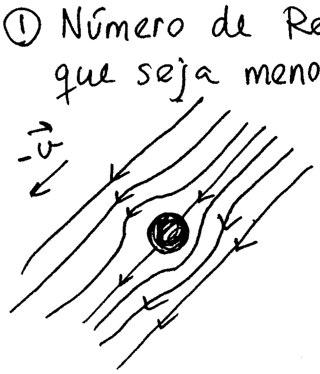
$\vec{F}_r \leftarrow$ força de resistência, no sentido oposto à velocidade. Depende da forma do objeto.

F_r aumenta com o aumento de v e depende do valor do **número de Reynolds:**

$$N_R = \ell v \left(\frac{\rho}{\eta}\right)$$

ρ = massa volúmica do fluido
η = coeficiente de viscosidade
ℓ = tamanho do objeto.

① Número de Reynolds próximo de zero (basta com que seja menor que 100). $\Rightarrow$ <u>fluxo laminar</u>.



Em relação ao objeto, o fluido desloca-se com velocidade $-\vec{v}$.
O fluido "cola-se" à superfície do objeto e a força resulta pelo deslizamento entre a parte do fluido próxima do objeto e

as partes do fluido que passam mais longe do objeto. (viscosidade).
O fator determinante do valor de F_R é a viscosidade do fluido. No caso de uma esfera de raio R:

$$\boxed{F_r = 6\pi \eta R v}$$

força diretamente proporcional a v.

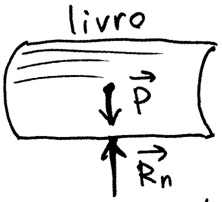
② Número de Reynolds elevado: $N_R \gg 100$
A viscosidade já não é tão importante. O fator mais importante é o aumento da pressão do fluido à frente do objeto e a diminuição da pressão atrás do objeto. A diferença de pressões produz força proporcional a v^2. No caso de uma esfera de raio R:

$$\boxed{F_r = \frac{\pi}{4} \rho R^2 v^2}$$

Para determinar qual das duas expressões deverá ser usada, pode começar-se por usar a expressão para $N_R \approx 0$, determina-se v e N_R; se o valor obtido para N_R for elevado, a expressão para F_r deverá ser substituída pela equação para N_R elevado e v deverá ser calculada novamente.
No caso do ar ($\rho = 10^3 \frac{k}{m^3}$, $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$), N_R cresce rápidamente em função de v e pode admitir-se que $N_R \gg 100$.

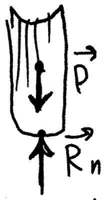
Aula 11. 31-3-2016

FORÇAS NUM CORPO RÍGIDO



equilíbrio estável

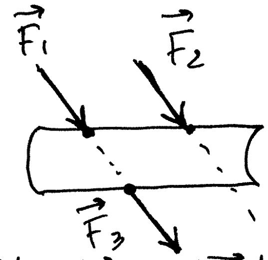
$\vec{P} = -\vec{R}_n$



equilíbrio instável, porque o peso $\vec{P}$ e a reação normal $\vec{R}_n$ não atuam na mesma linha.

Vetores deslizantes.

- módulo
- direção
- sentido
- linha de ação

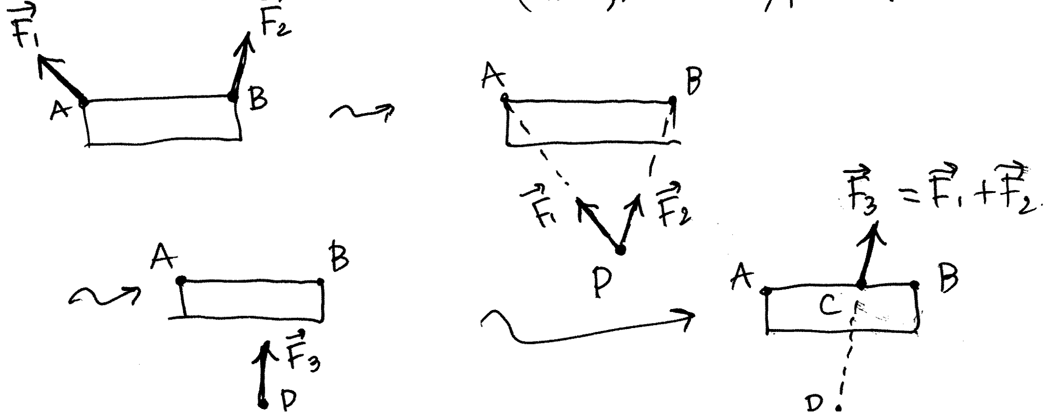


$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

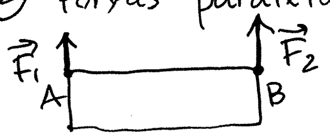
as três forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ têm a mesma direção e sentido, mas $\vec{F}_1$ não é equivalente a $\vec{F}_2$.
($\vec{F}_1$ sim é equivalente a $\vec{F}_3$)

ADIÇÃO DE FORÇAS

(1) Forças concorrentes (as linhas de ação cruzam-se num, ou vários, pontos.

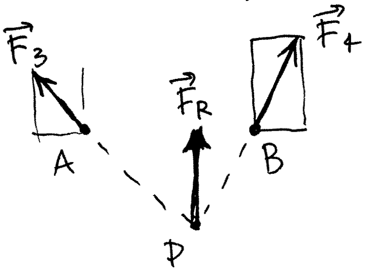


② Forças paralelas



adicionam-se duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, em A e B, com a mesma linha de ação.

Isso não altera nada, porque $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ anulam-se.



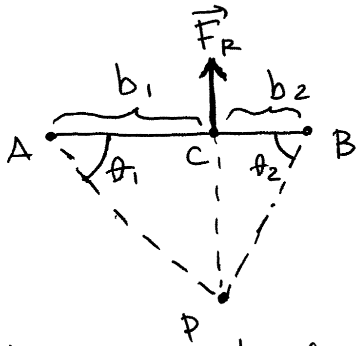
Em A somam-se $\vec{F}$ e $\vec{F}_1$ e em B somam-se $-\vec{F}$ e $\vec{F}_2$.

As forças obtidas, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ são concorrentes

A força resultante é:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = (\vec{F}+\vec{F}_1)+(\vec{F}_2-\vec{F})$$

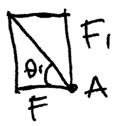
$$\Longrightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



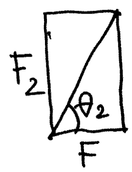
E atua num ponto C que está a uma distância b_1 de A e b_2 de B.

$$b_1 \tan\theta_1 = b_2 \tan\theta_2$$

Mas os ângulos θ_1 e θ_2 são também os ângulos na soma das forças $\vec{F}+\vec{F}_1$ e $-\vec{F}+\vec{F}_2$:



$$\tan\theta_1 = \frac{F_1}{F}$$



$$\tan\theta_2 = \frac{F_2}{F}$$

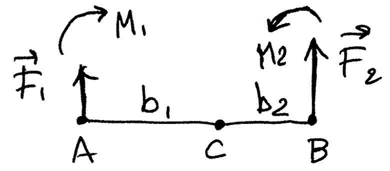
$$\Longrightarrow \boxed{F_1 b_1 = F_2 b_2}$$

Lei das alavancas

b_1 = braço de $\vec{F}_1$

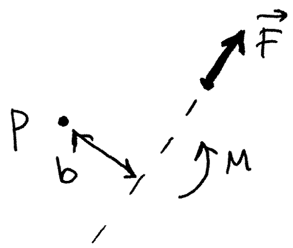
b_2 = braço de $\vec{F}_2$

Este resultado pode interpretar-se assim:



Em relação ao ponto de aplicação da resultante (C) a força $\vec{F}_1$ produz uma <u>tendência a rodar</u> no sentido dos ponteiros do relógio, com valor $F_1 b_1 = M_1$. A força $\vec{F}_2$ produz tendência a rodar no sentido oposto, com valor $M_2 = F_2 b_2$. O ponto de aplicação da resultante é o ponto onde $M_1 = M_2$ ($F_1 b_1 = F_2 b_2$).

MOMENTO DE UMA FORÇA



Momento de $\vec{F}$ em relação a P:

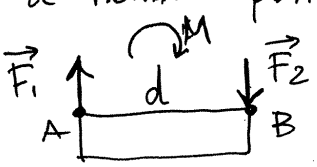
$$M_P = F b$$

b = braço = distância entre P e a linha de ação de $\vec{F}$

Neste caso, M é no sentido oposto aos ponteiros do relógio.

BINÁRIO

O procedimento usado para somar forças paralelas falha quando $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (ou seja, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$) porque os momentos M_1 e M_2 não se anulam em relação a nenhum ponto.



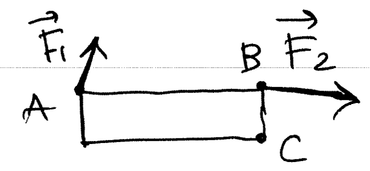
De facto, nesse caso o momento total $(M_1 + M_2)$ tem <u>o mesmo valor em relação a qualquer ponto</u>:

$$M = M_1 + M_2 = F_1 d = F_2 d \quad (F_1 = F_2)$$

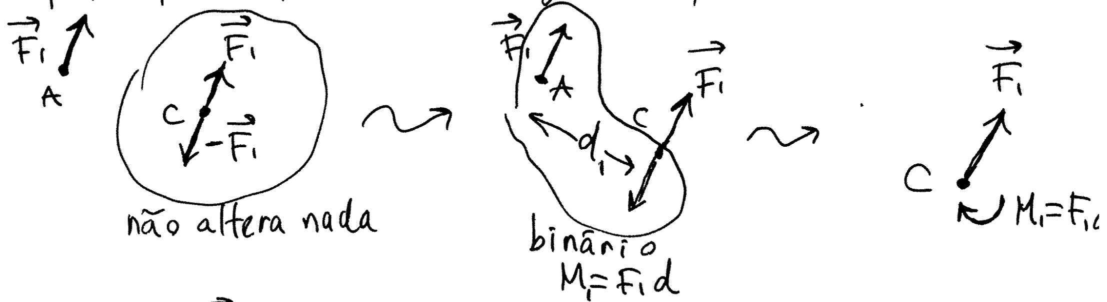
Esse sistema de duas forças $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0}$ com linhas de ação paralelas chama-se um BINÁRIO e corresponde a uma rotação, sem translação, com valor: $\boxed{M = F d}$

M = momento do binário
F = módulo de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$
d = distância entre as linhas de ação.

③ Adição de quaisquer forças, em qualquer ponto:



Para somar $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ no ponto C, desloca-se cada força para C, usando o seguinte procedimento:

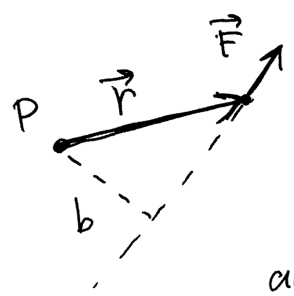


Ou seja, $\vec{F_1}$ em A substitui-se por $\vec{F_1}$ em C, mais um binário $M_1 = F_1 d_1$. Em C somam-se $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ e M_1+M_2. Obtendo-se assim uma força resultante e um binário.

VETOR MOMENTO

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$\vec{r}$ posição da força $\vec{F}$ relativa a P



É um vetor para cá da folha, que representa rotação no sentido anti-horário (regra da mão direita)

Aula 12. 1-4-2016

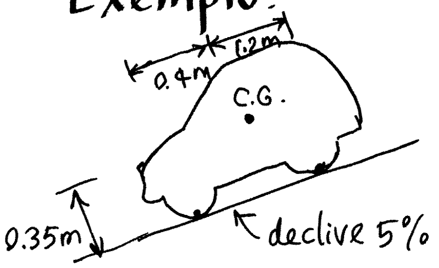
CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO

Quando um corpo rígido está em equilíbrio, não é necessária nenhuma força adicional nem binário em nenhum ponto, para manter $\vec{v}$ constante. Isso implica que a soma vetorial das forças, e o seu binário em qualquer ponto deverão ser nulos.

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum M = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

(em qualquer ponto) movimento de translação uniforme, ou repouso

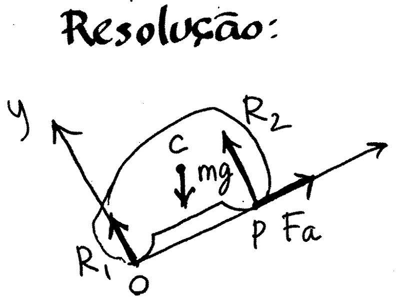
Exemplo.



O automóvel na figura tem peso de 9000 N e o centro de gravidade está a 0.4 m dos pneus da frente, a 1.2m dos pneus de atrás e a 0.35m de altura.

Determine as reações normais nos 4 pneus e as forças de atrito: (a) quando o automóvel está parado (b) quando o automóvel tem velocidade constante

Resolução:



forças:

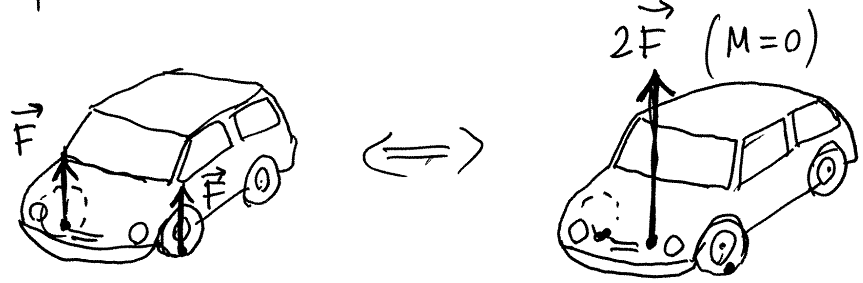
mg : peso, no ponto (0.4, 0.35) ← C

R_1 : soma das reações nos 2 pneus da frente, na origem.

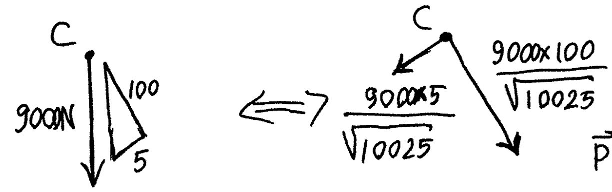
R_2 : reações normais nos 2 pneus trazeiros, no ponto (1.6, 0) = P

Fa : atrito nos 4 pneus, em (1.6, 0) ou na origem.

Observe-se que as reaçoes normais podem ser deslocadas para o centro do automóvel e, admitindo que sejam iguais, na produzem binário:



Peso:



$$\vec{P} = \left(-\frac{45000}{\sqrt{10025}}, -\frac{9\times10^5}{\sqrt{10025}} \right)$$

Soma de binários na origem:

$$\vec{r}_c \times \vec{P} + \vec{r}_p \times \vec{R}_2 = \vec{0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10025}} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0.4 & 0.35 & 0 \\ -45000 & -900000 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{10025}} \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -45000 & -900000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & R_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$1.6 R_2 = \frac{0.4\times90000 - 0.35\times45000}{\sqrt{10025}} \Longrightarrow \boxed{R_2 = 2149\ \text{N}}$$

Soma de binários no ponto P:

$$(\vec{r}_c - \vec{r}_p)\times\vec{P} + (\vec{0} - \vec{r}_p)\times\vec{R}_1 = \vec{0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10025}} \begin{vmatrix} -1.2 & 0.35 \\ -45000 & -90000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1.6 & 0 \\ 0 & R_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1.6\,R_1 = \frac{1.2\times 90000 + 0.35\times 45000}{\sqrt{10025}} \Longrightarrow \boxed{R_1 = 6840\text{ N}}$$

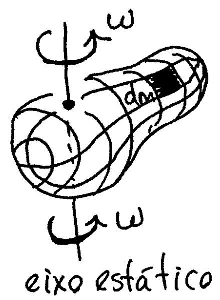
observe-se que $R_1 + R_2 = P_y$

Soma de componentes x das forças:

$$F_a - \frac{45000}{\sqrt{10025}} = 0 \Longrightarrow \boxed{F_a = 449\text{ N}}$$

Resposta: a reação normal é 3420 N nos pneus da frente e 1074.5 nos pneus trazeiros. A força de atrito total é 449 N. Quando o automóvel estiver em movimento, a resistência do ar faz diminuir a força de atrito e produz momento no sentido dos ponteiros do relógio, que faz aumentar R_2 e diminuir R_1

ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO



força resultante sobre um pequeno pedaço do corpo, com massa dm:

$$d\vec{f} = (\underbrace{R\alpha}_{a_n}\hat{e}_\theta - \underbrace{R\omega^2}_{a_t}\hat{e}_R)\,dm$$

$\hat{e}_\theta$: versor perpendic. a $\vec{r}$ e $\hat{k}$

$\hat{e}_R$: versor desde o eixo até dm

R = distância desde dm até o eixo

Binário no eixo: $d\vec{M} = \vec{r}\times d\vec{f}$ $\quad(\vec{r} = R\hat{e}_R + z\hat{k})$

componente $\hat{k}$: $dM = \begin{vmatrix} R & 0 \\ -R\omega^2 & R\alpha \end{vmatrix} dm = R^2\alpha\, dm$

$$\Longrightarrow M_{eixo} = \int dM = \alpha\int R^2 dm \qquad \boxed{M_{eixo} = I_{eixo}\,\alpha}$$

Momento de inércia

$$I_{eixo} = \int R^2 dm = \iiint R^2 \rho\, dx\, dy\, dz$$

ρ: massa volúmica

(tem unidades de massa vezes dist. ao quadrado)

Aula 13. 7-4-2016

Volante de inércia (em Inglês, flywheel)

disco de massa m e raio r

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

exemplo: $r = 16.5\,\text{cm}$, $m = 1.6\,\text{kg}$

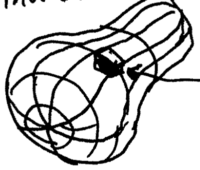
$$\Rightarrow I = 0.0218\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

O atrito no eixo produz um binário M_e que conduz a aceleração negativa: $\alpha = -\frac{M_e}{I}$

Se o raio do eixo for muito menor que r e m elevada, α é muito baixa (a resistência do ar é muito baixa também)

CENTRO DE MASSA

massa m



elemento infinitessimal, com volume dxdydz, e massa:

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz \quad \left(\rho = \text{massa volúmica}\right)$$

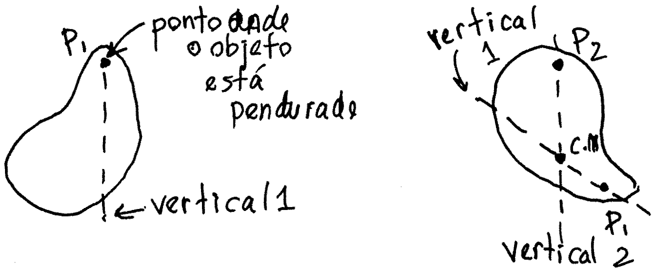
$$m = \int dm = \underset{\text{volume do corpo}}{\iiint} \rho\, dx\, dy\, dz$$

Define-se o CENTRO DE MASSA no ponto na posição:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm \Rightarrow \begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{m} \underset{\text{vol.}}{\iiint} x\, \rho\, dx\, dy\, dz \\ y_{cm} = \frac{1}{m} \underset{\text{vol.}}{\iiint} y\, \rho\, dx\, dy\, dz \\ z_{cm} = \frac{1}{m} \underset{\text{vol.}}{\iiint} z\, \rho\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

Nos corpos simétricos, o c.m. está no centro de simetria.

Se a gravidade $\vec{g}$ for constante, o c.m. é o mesmo CENTRO DE GRAVIDADE.



cm = interseção das duas verticais

Velocidade e aceleração do centro de massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\int_{vol.} \frac{d\vec{r}}{dt}\,dm = \frac{1}{m}\int_{vol.} \vec{v}\,dm$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\int_{vol.} \frac{d\vec{v}}{dt}\,dm = \frac{1}{m}\int_{vol.} \vec{a}\,dm$$

A força resultante no objeto é igual à massa m vezes a aceleração do centro de massa:

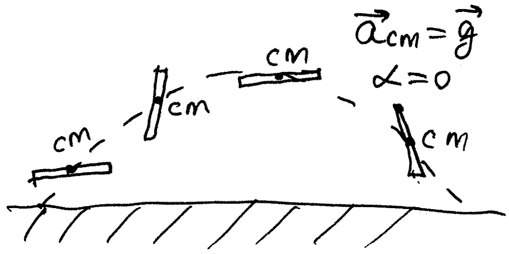
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{cm}$$

Demonstração: $d\vec{f} = \vec{a}\,dm$ (força total no elemento $dx\,dy\,dz$)

$$\int_{vol.} d\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{internas}$$ igual a zero

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \int_{vol.} \vec{a}\,dm = m\,\vec{a}_{cm}$$

Exemplo: barra lançada no ar. A barra roda mas o centro de massa segue uma parábola porque $\sum \vec{F}_i = m\vec{g} \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \vec{g}}$

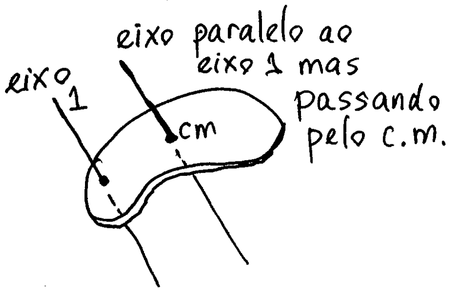


MOVIMENTOS SEM ACELERAÇÃO ANGULAR

$\vec{a}_{cm}$ diferente de zero, mas α (aceleração angular) nula (ω = constante ou nula). Pode demonstrar-se que a soma de binários no centro de massa (unicamente) é nula. Assim sendo, as equações de movimento são:

$$\boxed{\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= m\,\vec{a}_{cm}\\ \sum M_{cm} &= 0\end{aligned}}$$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS



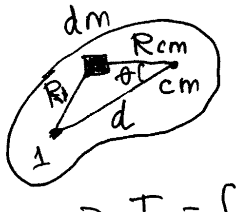
Quando o corpo roda com o eixo 1 fixo:

$$\sum M_1 = I_1\,\alpha_1$$

$$I_1 = \int_{vol.} R_1^2\,dm \qquad \left(\begin{array}{l}R_1 = \text{distância}\\ \text{até o eixo } 1\end{array}\right)$$

Quando roda com o eixo que passa pelo centro de massa fixo:

$$\sum M_{cm} = I_{cm}\,\alpha_{cm} \qquad I_{cm} = \int_{vol.} R_{cm}^2\,dm \left(\begin{array}{l}R_{cm} = \text{dist.}\\ \text{até o c.m.}\end{array}\right)$$



$$R_1^2 = d^2 + R_{cm}^2 - 2\,R_{cm}\,d\,\cos\theta$$

$$\boxed{d = \text{distância entre } 1 \text{ e o c.m.}}$$

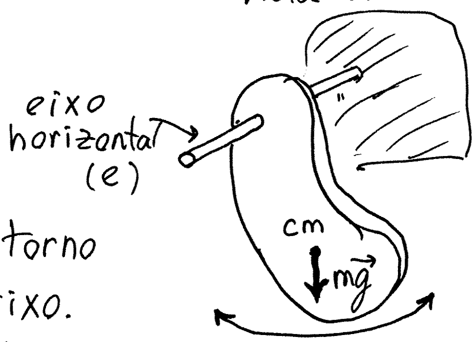
$$\Rightarrow I_1 = \int R_{cm}^2\,dm + d^2\int dm - 2d\underbrace{\int R_{cm}\cos\theta\,dm}_{\text{integral}=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = I_{cm} + m d^2}$$

I é mínimo quando o eixo passa pelo c.m.

Aula 14. 8-4-2014

PÊNDULOS

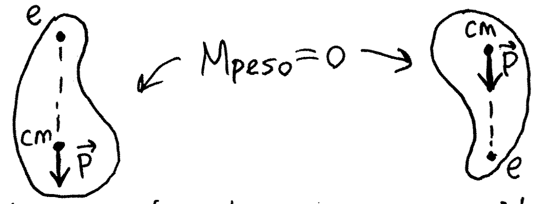


Um pêndulo é um corpo rígido que pode rodar em torno de um eixo horizontal fixo.

Equação de movimento (desprezando a resistência do ar e o binário das forças no eixo):

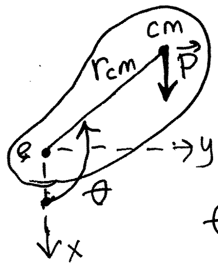
$$M_{peso} = I_e \alpha = (I_{cm} + m r_{cm}^2)\,\alpha \qquad \left(\begin{array}{c} r_{cm} = \text{dist. entre o eixo} \\ \text{e o c.m.} \end{array}\right)$$

O pêndulo tem duas posições de equilíbrio, em que a linha de ação do peso (vertical) passa pelo eixo:



equilíbrio estável — equilíbrio instável

Em qualquer outra posição diferente,



$$\vec{r}_{cm} = r_{cm}\sin\theta\,\hat{\imath} - r_{cm}\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$M_{peso} = \begin{vmatrix} r_{cm}\cos\theta & r_{cm}\sin\theta \\ mg & 0 \end{vmatrix} = -m g r_{cm} \sin\theta$$

θ = ângulo entre $\vec{r}_{cm}$ e a vertical para baixo

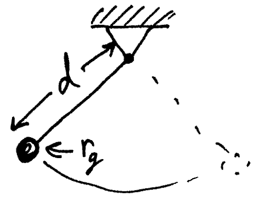
$$\Longrightarrow\ -m g r_{cm}\sin\theta = (I_{cm} + m r_{cm}^2)\,\alpha \qquad \left(\begin{array}{l} I_{cm} = m r_g^2 \\ r_g = \text{RAIO DE GIRAÇÃO} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$

l = comprimento eficaz do pêndulo
$$= \frac{r_g^2 + r_{cm}^2}{r_{cm}}$$

quanto menor for r_{cm}, maior l e menor aceleração.

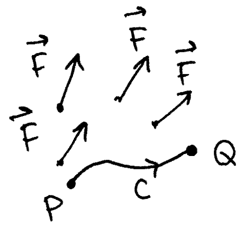
O pêndulo simples:



$d \gg r_g$

$$\Rightarrow \ell = \frac{r_g^2 + d^2}{d} \approx d \qquad \Rightarrow \alpha = -\frac{g}{d}\sin\theta$$

TRABALHO



Se $\vec{F}$ é uma força que depende da posição $\vec{r}$, define-se o trabalho de $\vec{F}$, numa curva C entre dois pontos P e Q, igual ao integral de linha:

$$W_{PQ} = \int_{P\,(\text{Curva } C)}^{Q} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se, por exemplo, a curva C for definida por $y = f(x)$, com x desde x_1 até x_2, e $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} = \left(\hat{\imath} + \frac{df}{dx}\hat{\jmath}\right)dx$$

$$W_{PQ} = \int_{x_1}^{x_2} (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}) \cdot \left(\hat{\imath} + \frac{df}{dx}\hat{\jmath}\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F_y \frac{df}{dx}\,dx$$

ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética de um corpo rígido que se desloca com velocidade $\vec{v}$, sem rodar, é:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Teorema do trabalho e a energia cinética

A soma dos trabalhos de todas as forças sobre um corpo em movimento, calculados entre um ponto inicial P e um ponto final Q, ao longo da trajetória do corpo, é igual ao aumento da energia cinética:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} W_i(P \to Q) = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2}$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \int_P^Q \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \ldots + \int_P^Q \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \int_P^Q \underbrace{\vec{F}}_{\text{força resultante}} \cdot d\vec{r} = \int_P^Q m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

ao longo da trajetória: $d\vec{r} = \vec{v}\,dt = v\hat{e}_t\,dt = \hat{e}_t\,ds$

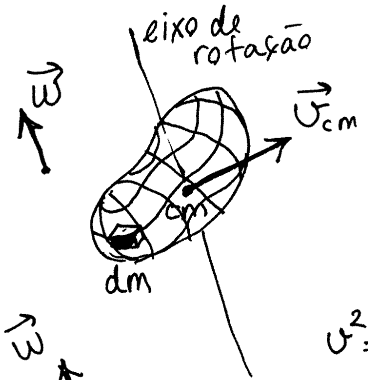
$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot d\vec{r} = a_t\,ds = v\,dv$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = m\int_P^Q a_t\,ds = m\int_P^Q v\,dv = m\left(\frac{v_Q^2}{2} - \frac{v_P^2}{2}\right)$$

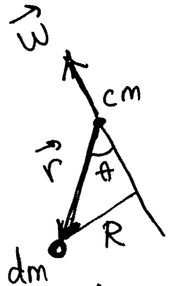
Aula 15. 14-4-2016

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO



A velocidade do elemento infinitesimal com massa dm é:

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r} \leftarrow \text{$\vec{r}$ vai desde o cm até dm}$$



$$v^2 = (\vec{v}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{v}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= v_{cm}^2 + \omega^2 R^2 + 2\,\vec{v}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

($R = r\sin\theta$ = distância desde dm até o eixo)

A energia total do corpo é o integral de volume da energia do elemento com massa dm:

$$E_c = \int_{vol} \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{v_{cm}^2}{2}\underbrace{\int_{vol.} dm}_{\text{massa total}} + \frac{\omega^2}{2}\underbrace{\int_{vol.} R^2 dm}_{\substack{\text{momento}\\ \text{de inércia em}\\ \text{relação ao C.M.}}} + \vec{v}_{cm}\cdot\Big(\vec{\omega}\times\underbrace{\int \vec{r}\,dm}_{\substack{\text{posição do}\\ \text{cm relativa}\\ \text{ao cm}\\ =0}}\Big)$$

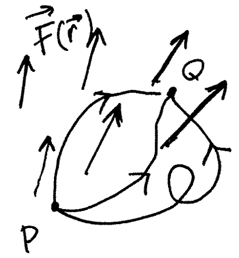
$$\Longrightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2}$$

a energia cinética de translação é $\frac{1}{2} m v_{cm}^2$
e a energia cinética de rotação é $\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2} m (r_g\,\omega)^2$$

(r_g = raio de giração em relação ao cm)

FORÇAS CONSERVATIVAS



Uma força $\vec{F}(\vec{r})$ diz-se conservativa, se o integral de linha entre dois pontos quaisquer:

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

da o mesmo resultado em qualquer percurso entre P e Q

ENERGIA POTENCIAL

Se uma força $\vec{F}(\vec{r})$ é conservativa, pode definir-se a energia potencial $U(\vec{r})$ associada a essa força:

$$U(\vec{r}) = -\int_{P_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

P_0 = ponto escolhido arbitrariamente.

Observe-se que $U(P_0) = -\int_{P_0}^{P_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

<u>Unidade SI de trabalho, energia</u> cinética e energia potencial:

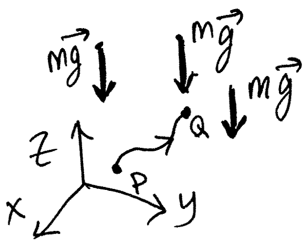
$$1 \text{ joule} = 1\,\text{J} = 1\,\text{N}\cdot\text{m} = 1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

O trabalho realizado por uma força conservativa $\vec{F}(\vec{r})$, entre dois pontos P e Q, pode escrever-se

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_P^{P_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(P) - U(Q)$$

ou seja, é igual à <u>diminuição</u> da energia potencial

ENERGIA POTENCIAL GRAVÍTICA



O peso é $\vec{P} = -mg\hat{k}$ igual em qualquer posição

$$\vec{P}\cdot d\vec{r} = -mg\hat{k}\cdot(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k})$$
$$= -mg\,dz$$

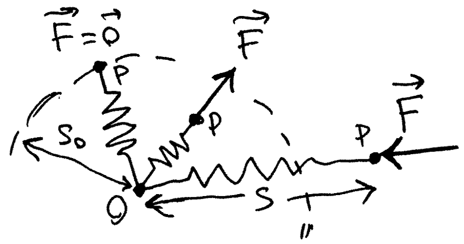
$$\Longrightarrow \int_P^Q \vec{P}\cdot d\vec{r} = mg\int_P^Q dz = -mg(z_Q - z_P)$$ (no depende do percurso)

$\Rightarrow$ O peso é uma força conservativa, com energia potencial gravítica U_g igua a:

$$U_g(\vec{r}) = +\int_{z_0}^{z} mg\,dz = mg(z - z_0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_g(\vec{r}) = mgh}$$ h = altura em relação ao ponto P_0.

ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA



mola elástica em diferentes posições

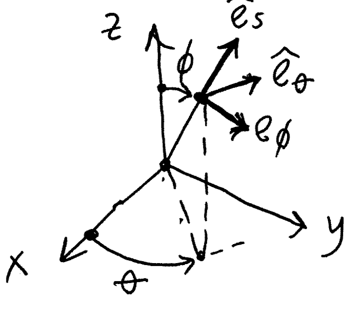
Uma mola elástica com um dos extremos fixos (O), produz no outro extremo uma força na direção de O, e no sentido de O, se a mola está esticada (comprimento $S > S_0$) ou no sentido que se afasta de O, se a mola estiver comprimida (comprimento $S < S_0$)

Se a mola não estiver nem esticada nem comprimida ($S = S_0$), a força é nula.

Coordenadas esféricas, (s, θ, ϕ), com versores $(\hat{e}_s, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$

longitude $[0, 2\pi[$

latitude, medida desde o polo norte $[0, \pi]$



força elástica:

$$\boxed{\vec{F_e}(\vec{r}) = -k(s-s_0)\,\hat{e}_s}$$ (k = constante elástica)

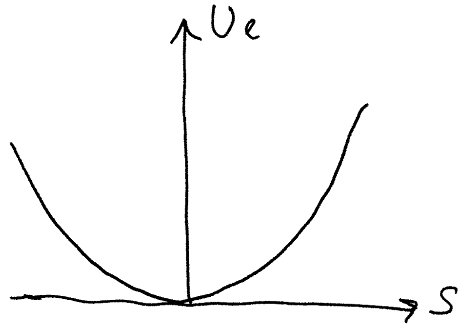
$$d\vec{r} = ds\,\hat{e}_s + r\,d\phi\,\hat{e}_\phi + r\sin\phi\,d\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\int_P^Q \vec{F_e}\cdot d\vec{r} = -k\int_P^Q (s-s_0)\,ds$$ (não depende do percurso de integração)

A força elástica é conservativa, com energia potencial elástica (P_0 = ponto com $s = s_0$):

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k(s-s_0)^2}$$ ($s - s_0$ = alongamento da mola)

U_e é mínima quando a mola não está esticada nem comprimida ($s = s_0$). Arbitrando $U_e = 0$ em $s = s_0$, U_e é sempre positiva ou zero.



Aula 16. 15-4-2016

ENERGIA MECÂNICA

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2 + U_g + U_e + \cdots \quad \left(\begin{array}{c}\text{outras}\\ \text{energias}\\ \text{potenciais}\end{array}\right)$$

Teorema do trabalho e a energia mecânica

A soma dos trabalhos de todas as forças não conservativas, ao longo da trajetória, desde um ponto inicial até um ponto final, é igual ao aumento da energia mecânica.

$$\boxed{\sum_{\substack{i=1\\ \left(\text{forças não conservativas}\right)}}^{n} W_i(P\to Q) = E_m(Q) - E_m(P)}$$

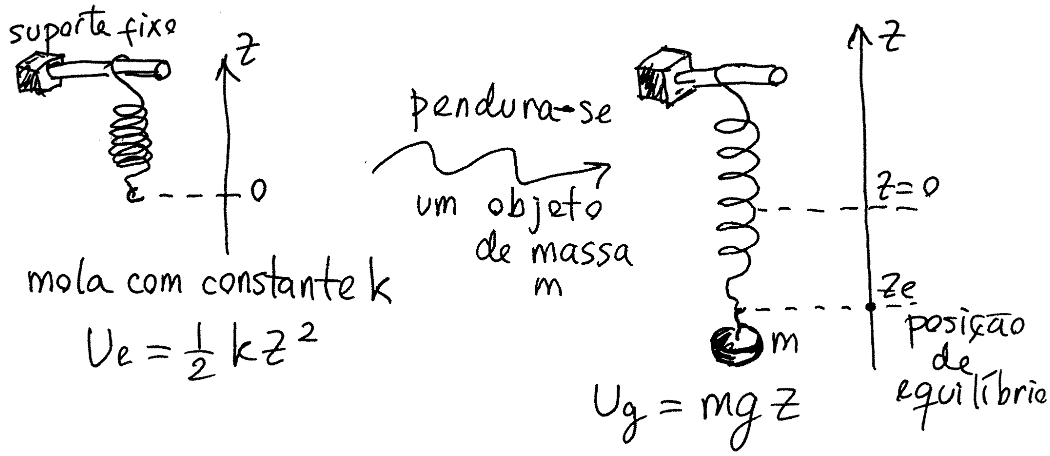
Demonstração: $\displaystyle\sum_{\text{não cons.}} W_i + \sum_{\text{conservat.}} W_j = E_c(Q) - E_c(P)$

$$\sum_{\text{n.c.}} W_i + \underbrace{U(P) - U(Q)}_{\text{energia potencial total}} = E_c(Q) - E_c(P)$$

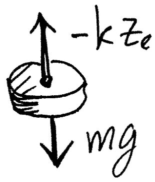
$$\Longrightarrow \sum_{\text{n.c.}} W_i = \left(E_c(Q) + U(Q)\right) - \left(E_c(P) + U(P)\right) = E_m(Q) - E_m(P)$$

- Se E_m diminui, as forças não conservativas realizam trabalho negativo (dissipam energia)
- Se E_m aumenta, as forças não conservativas realizam trabalho positivo (fornecem energia)
- Se as forças não conservativas não realizam trabalho, há **conservação da energia mecânica**.

OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



Energia potencial total: $U = U_e + U_g = \frac{k}{2} z^2 + mgz$



na posição de equilíbrio, a força elástica anula o peso: $mg = -kz_e$

$$\Rightarrow z_e = -\frac{mg}{k}$$

e observe-se que U é mínima em $z = z_e$:

$$\frac{dU}{dz} = kz + mg = 0 \quad \Rightarrow z = -\frac{mg}{k} \quad (= z_e)$$

Define-se: $s = z - z_e = z + \frac{mg}{k}$

$$\Rightarrow U = \frac{k}{2}\left(s - \frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(s - \frac{mg}{k}\right) = \frac{1}{2} k s^2 - \frac{m^2 g^2}{2k}$$

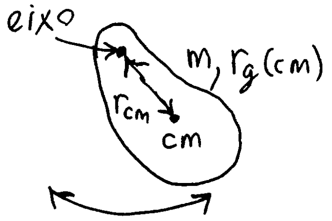
o termo $-\frac{m^2 g^2}{2k}$, constante, pode ignorar-se:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k s^2}$$

Não depende de g! a gravidade o único que faz é estabelecer a posição de equilíbrio

$$E_m = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{k}{2} s^2$$

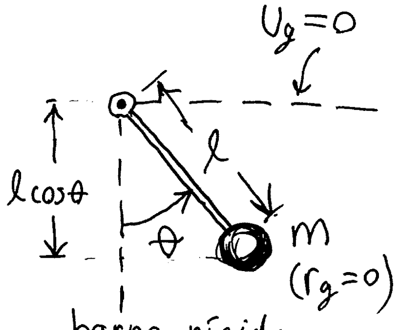
PÊNDULO



é equivalente

a um pêndulo simples de comprimento,

$$\ell = \frac{r_g^2 + r_{cm}^2}{r_{cm}}$$



barra rígida com massa desprezável

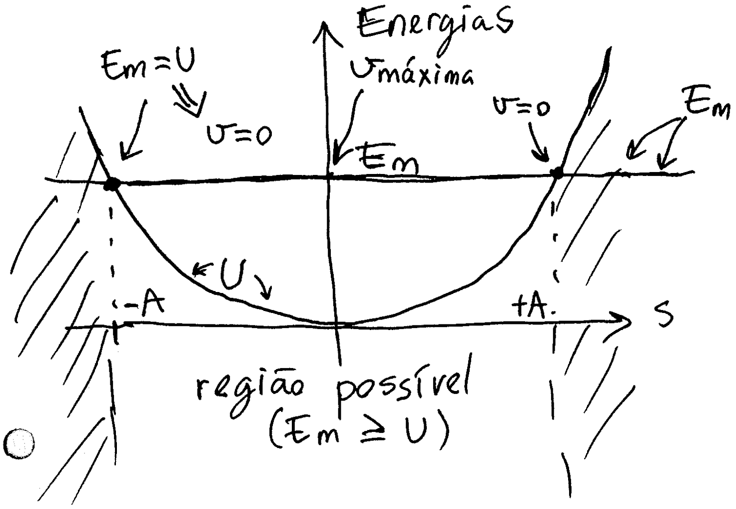
$$U_g = -mg\ell\cos\theta \quad , \quad v = \ell\dot{\theta}$$

$$\Longrightarrow E_m = m\left(\frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 - g\ell\cos\theta\right)$$

(a esfera de massa m tem $r_g \approx 0$ $\Rightarrow E_{c\,rotação} = 0$)

ANÁLISE GRÁFICA

No gráfico da energia potencial total, U, a energia mecânica deve estar sempre acima de U, porque $E_c \geq 0$. Por exemplo, no oscilador harmónico simples, desprezando o trabalho das forças não conservativas (resistência do ar), E_m é constante:

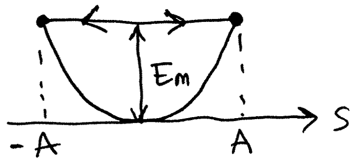


$$E_m = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}s^2$$

se $E_m = U$

$\Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow v = 0$

v é maior onde E_m estiver mais longe de U



O objeto oscila entre $s=-A$ e $s=A$ ($A=$ amplitude)

em $s=\pm A$: $E_m = U$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}A^2 = E_m$$

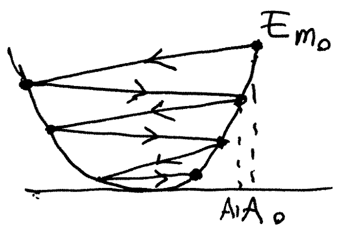
em qualquer outra posição s, onde $-A \leq s \leq A$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

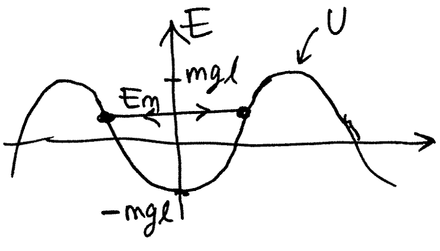
v é máxima em $s=0$: $\frac{m}{2}v_{máx}^2 = \frac{k}{2}A^2$

$$\Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A$$

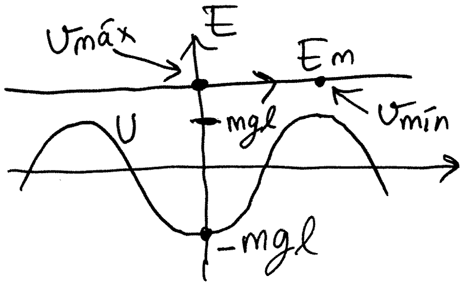
O trabalho da força não conservativa (dissipativa) faz diminuir E_m até zero:



Pêndulo



Se $E_m < mgl$, o pêndulo oscila



Se $E_m > mgl$, o pêndulo roda sempre no mesmo sentido.

$E_m = -mgl \Rightarrow$ repouso

E_m não pode ser menor que $-mgl$.

Aula 17. 21-4-2016

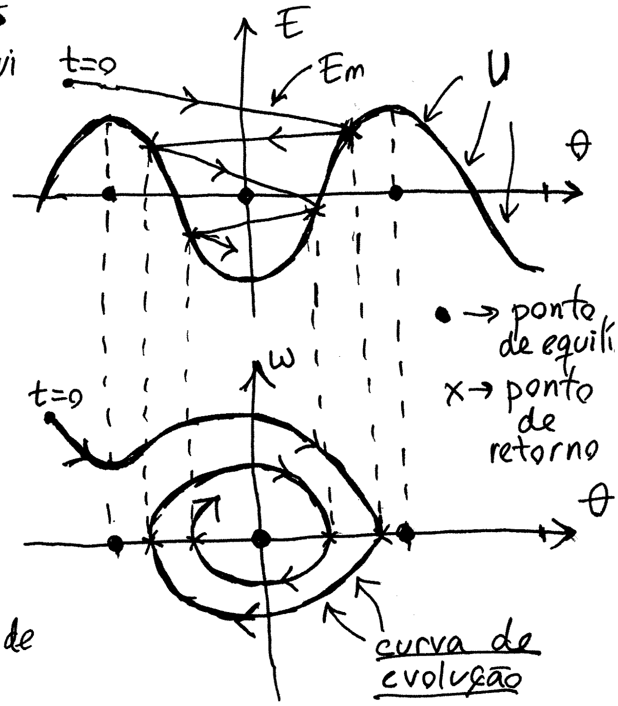
Pêndulo com força de atrito constante no eixo.

Gráfico de energias

$E_m \geq U$ e $E_m(t)$ diminui

$\boxed{U = -mgl\cos\theta}$

E_c está implícita no gráfico (distância entre E_m e U)



Retrato de fase

É mais útil mostrar o gráfico no espaço de fase, (θ, ω)

$E_c = \frac{m}{2} l^2 \omega^2$

ω diminui ou aumenta onde E_c diminui ou aumenta.

Cada possível movimento do pêndulo corresponde a uma curva de evolução no espaço de fase. Dado o estado inicial, em $t=0$, pode obter-se a curva de evolução usando o seguinte método:

(a) Determina-se a equação de movimento, ou seja, a expressão da aceleração $\dot{\omega}$, em função de θ e ω; no pêndulo com atrito é:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \underbrace{- k\frac{\omega}{|\omega|}}_{\text{atrito}}$$

k = constante de atrito

$\frac{\omega}{|\omega|} = \pm 1, 0$; $+1$ se $\omega > 0$, -1, se $\omega < 0$, 0 se $\omega = 0$

(b) A equação de movimento, de 2ª ordem, transforma-se num sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem, usando a definição da velocidade angular ω:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - k\frac{\omega}{|\omega|} \end{cases}$$

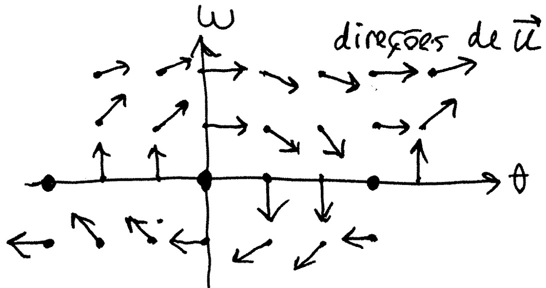
(duas equações diferenciais de 1ª ordem)

ⓒ Define-se a **velocidade de fase**:

$$\vec{u} = (\dot{\theta}, \dot{\omega}) = \left(\omega, -\frac{g}{\ell}\sin\theta - k\frac{\omega}{|\omega|}\right)$$

$\vec{u}$ é um vetor com diferentes componentes (u_x, u_y) em diferentes pontos do espaço de fase.
A direção de $\vec{u}$ é a direção em que o estado do sistema (θ, ω) se desloca.

ⓓ Representa-se a direção de $\vec{u}$ em vários pontos do espaço de fase, obtendo-se o **campo de direções**



em cada ponto (estado), o sistema evolui na direção de $\vec{u}$.

ⓔ A partir do estado inicial (θ_0, ω_0) determina-se, numericamente, o estado (θ_1, ω_1) num instante Δt mais tarde:

$$(\theta_1, \omega_1) \approx (\theta_0, \omega_0) + \Delta t\, \vec{u}_0$$

← valor de $\vec{u}$ em (θ_0, ω_0)

e assim sucessivamente em $t = 2\Delta t$, $t = 3\Delta t$, ...

$$(\theta_2, \omega_2) \approx (\theta_1, \omega_1) + \Delta t\, \vec{u}_1$$

$$(\theta_3, \omega_3) \approx (\theta_2, \omega_2) + \Delta t\, \vec{u}_2$$

$$\vdots$$

Programa plotdf do Maxima.

Dada e expressão de $\vec{u}$ (lista de duas expressões) e a lista das duas variáveis de estado, plotdf cria o campo de direções e no ponto onde se clicar com o rato, traça a curva de evolução.

Exemplo. Pêndulo com $l = 61.25$ cm e $k = 0.4\,s^{-2}$

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = w \,, \quad \dot{w} = -\underbrace{\frac{9.8}{0.6125}}_{16} \sin(q) - 0.4 \frac{w}{|w|}$$

$(q \to \theta)$

Comando do Maxima:

```
plotdf([w,-16*sin(q)-0.4*w/abs(w)], [q,w]);
```

SISTEMAS DINÂMICOS AUTÓNOMOS

Quaisquer sistemas com duas variáveis x_1 e x_2, que podem ter quaisquer valores num instante inicial, mas nos instantes seguintes têm variações conhecidas, dadas por duas funções f_1 e f_2:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$ (equações de evolução)

Quando f_1 e/ou f_2 depende também de t, o sistema é não autónomo.

Espaço de fase: plano (x_1, x_2)

Velocidade de fase: vetor (f_1, f_2) (tem um valor conhecido em cada ponto (x_1, x_2))

Cada curva de evolução, no retrato de fase, representa uma possível solução do sistema.

PONTOS DE EQUILÍBRIO

São os pontos do espaço de fase onde x_1 e x_2 não variam, ou seja, as soluções do sistema:

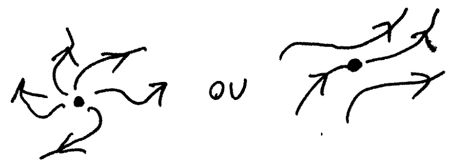
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{cases}$$

Nesses pontos, $\vec{u}$ é nula. Se o estado inicial do sistema for um ponto de equilíbrio, o sistema permanece sempre no mesmo estado.

Há dois tipos de pontos de equilíbrio:

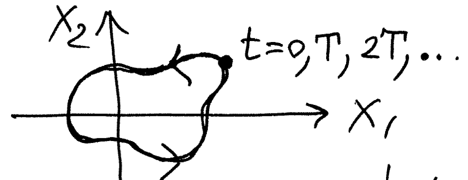
① Estável. Na vizinhança do ponto, as curvas de evolução aproximam-se do ponto, ou permanecem na vizinhança.

② Instável.



Todas as curvas na vizinhança do ponto (ou algumas delas) afastam-se sem nunca regressar ao ponto.

CICLOS



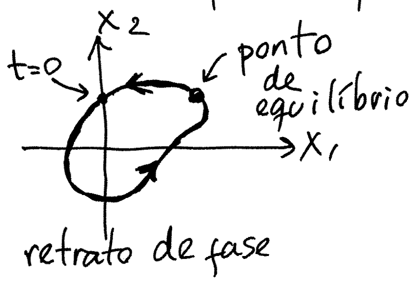
qualquer curva de evolução fechada é um ciclo.

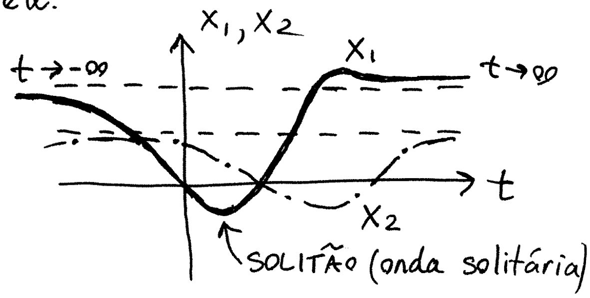
O estado do sistema volta a ser o mesmo estado inicial após um período T e repete a mesma evolução até 2T, 3T, etc.

Representam oscilações das variáveis de estado x_1 e x_2, com período T.

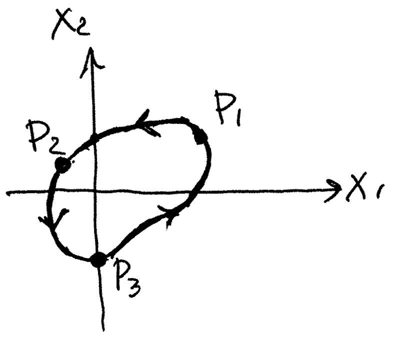
Aula 18. 22-4-2016

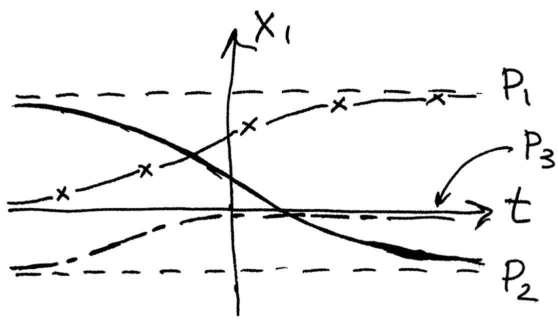
Órbita homoclínica. Curva de evolução fechada mas com um ponto de equilíbrio. O sistema não oscila periodicamente, porque quando a curva se aproxima (assimptòticamente) do ponto de equilíbrio, não chega nunca a passar por ele.





Órbita heteroclínica. Curva de evolução fechada, com dois ou mais pontos de equilíbrio. Se, por exemplo, tiver 3 pontos de equilíbrio, P_1, P_2 e P_3, a curva corresponde realmente a três possíveis soluções diferentes. Uma que evolui de P_1 para P_2, outra de P_2 para P_3 e a terceira de P_3 para P_1.





Os pontos de equilíbrio numa órbita homoclínica ou heteroclínica são necessariamente instáveis.

Exemplo. Analise o retrato de fase do sistema:

$$\dot{x} = -0.2x\sin(0.2xy) + 1.9\cos(0.8x)\cos(1.9y) - 0.9\sin(1.3x)\sin(0.9y)$$
$$\dot{y} = 0.2y\sin(0.2xy) + 0.8\sin(0.8x)\sin(1.9y) - 1.3\cos(1.3x)\cos(0.9y)$$

Na região $-5 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 5$.

Resolução:

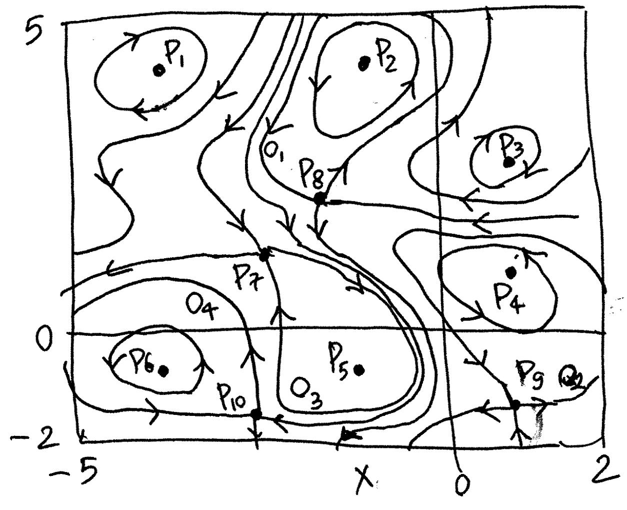
```
f: -0.2*x*sin(0.2*x*y) +1.9*cos(0.8*x)*cos(1.9*y) -0.9*
   sin(1.3*x)*sin(0.9*y);

g: 0.2*y*sin(0.2*x*y) +0.8*sin(0.8*x)*sin(1.9*y) - 1.3*
   cos(1.3*x)*cos(0.9*y);

plotdf([f,g], [x,y], [x,-5,2], [y,-2,5]);
```

Há seis pontos de equilíbrio estável aproximadamente em: $(-3.72, 4.02)$, $(-0.65, 4.02)$, $(1.08, 2.80)$, $(0.85, 0.64)$, $(-0.82, -0.69)$ e $(-3.65, -0.62)$

e 4 pontos de equilíbrio instável:

$(-2.43, 1.02)$, $(-1.47, 1.80)$, $(1.25, -1.59)$, $(-2.07, -1.62)$

Ciclos à volta dos 6 pontos de equilíbrio estável e 4 órbitas homoclínicas



SISTEMAS CONSERVATIVOS

Sistema dinâmico com duas variáveis de estado:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \vec{u} = f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad \text{(velocidade de fase)}$$

Diz-se que o sistema é conservativo se existir uma função $H(x_1, x_2)$, chamada função hamiltoniana, que define todas as curvas de evolução:

$$H(x_1, x_2) = C$$

onde C é uma constante real. Cada possível valor de C corresponde a uma curva de evolução.

Como C é constante,

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} f_2 = 0$$

ou seja, o gradiente de H, $\frac{\partial H}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\hat{e}_2$ é perpendicular à velocidade de fase.

Um possível vetor perpendicular a $\vec{u}$ é:

$$-f_2\hat{e}_1 + f_1\hat{e}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}} \quad \text{equações de Hamilton}$$

mas nem sempre é possível encontrar H que verifique essas condições. A condição necessária e suficiente para que exista H é:

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$

divergência da velocidade de fase nula.

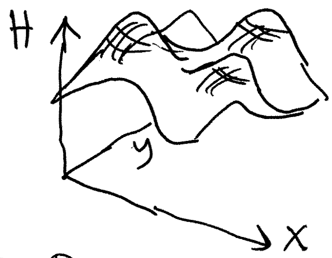
Exemplo. No sistema dinâmico estudado no exemplo anterior, a velocidade de fase tem divergência:

diff(f, x) + diff(g, y)

que é exatamente igual a zero. Como tal, é um sistema conservativo. A função hamiltoniana determina-se integrando f em ordem a y e comparando com o integral de −g em ordem a x.

$$\Rightarrow H(x,y) = \cos(0.2xy) + \cos(0.8x)\sin(1.9y) + \sin(1.3x)\cos(0.9y)$$

As curvas de evolução do sistema são as curvas de nível de H. Os pontos de equilíbrio são os máximos, mínimos e pontos de sela de H.



plot3d(H,[x,-5,2],[y,-2,5]);

3 máximos → P_2, P_4, P_6

3 mínimos → P_1, P_3, P_5

4 pontos de sela → P_7, P_8, P_9, P_{10}

As curvas de nível de H podem ser obtidas com o programa ploteq:

ploteq(H,[x,-5,2],[y,-2,5]);

clicar num ponto para traçar a curva de nível que passa por esse ponto.

Aula 19. 28-4-2016

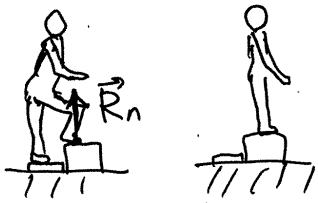
MECÂNICA LAGRANGIANA

O teorema do trabalho e a energia é muito útil mas dá a relação entre as variáveis de estado (x, v) e não a dependência do tempo.

As equações de Hamilton fornecem as equações de evolução, mas são válidas unicamente em sistemas conservativos e a função hamitoniana em alguns casos não é a energia mecânica.

A segunda lei de Newton fornece a equação de movimento, mas pode ser necessário dividir o sistema em vários subsistemas e analisar vários diagramas de corpo livre para explicar um sistema

homem a subir um degrau



a força externa que faz subir o homem é R_n, mas á energia interna a ser convertida em energia gravítica.

As equações de Lagrange permitem obter as equações de movimento mais facilmente, usando o seguinte método.

① Escolhem-se n coordenadas generalizadas, se o sistema tem n graus de liberdade:

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$ podem ser distâncias ou ângulos

② As velocidades generalizadas são:

$$\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\}$$

escreve-se a expressão da energia cinética total do sistema, em função de $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ e $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\}$
E_c

(3) Ignoram-se as forças de ligação que reduzem o número de coordenadas; por exemplo, reacção normal, atrito estático, tensão num cabo, etc

Para cada força que não seja de ligação definem-se as respetivas forças generalizadas:

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$\vec{r}$ = ponto onde é aplicada $\vec{F}$

se houver, por exemplo, 3 forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ nos pontos $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ as forças generalizadas são:

$$Q_j = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} + \vec{F}_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_j}$$

(4) Usam-se as n equações de Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

obtendo-se n equações que relacionam as n acelerações generalizadas: $\{\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n\}$

FORÇAS CONSERVATIVAS

Se $\vec{F}_2$, por exemplo, é conservativa, com energia pot. U,

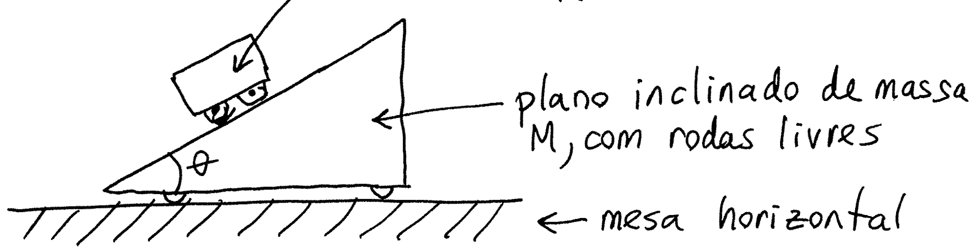
$$Q_j = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} - (\vec{\nabla} U) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_j} = \underbrace{\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j}}_{Q_j^{n.c.}} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$Q_j^{n.c.}$ (força general. não conservativa)

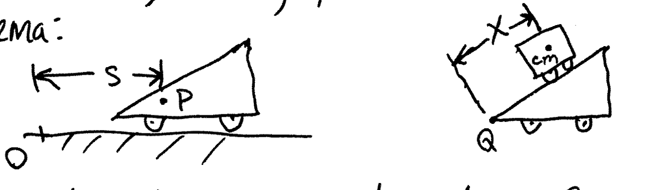
As equações de Lagrange podem então ser escritas:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^{n.c.}}$$

Exemplo 8.1



<u>Resolução</u>. Começa-se por ignorar a resistência do ar, o atrito nos eixos das rodas, e o momento de inércia das rodas (rodas pequenas). Como tal, a rotação das rodas não interessa e são necessárias únicamente duas variáveis, s e x, para determinar a posição do sistema:



$\Rightarrow$ 2 coordenadas generalizadas: $\{s, x\}$
e 2 velocidades generalizadas: $\{\dot{s}, \dot{x}\}$

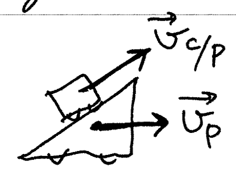
<u>Energia cinética total</u>: $E_c = \frac{m}{2} v_c^2 + \frac{M}{2} v_p^2$

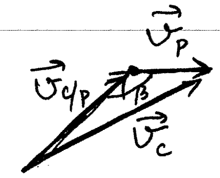
v_p = velocidade do plano inclinado $= \dot{s}$

v_c = velocidade do carrinho

$\vec{v}_c = \vec{v}_p + \vec{v}_{c/p}$ ($\vec{v}_{c/p}$ = velocidade do carrinho relativa ao plano. $v_{c/p} = \dot{x}$)

geometricamente:





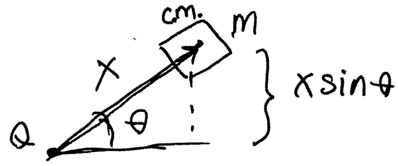
$\beta = \pi - \theta \quad (\cos\beta = -\cos\theta)$

$$v_c^2 = v_p^2 + v_{c/p}^2 - 2 v_p v_{c/p} \cos\beta$$
$$= \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta$$

(ou em coordenadas:
$\vec{v}_c = (\dot{s}, 0) + (\dot{x}\cos\theta, \dot{x}\sin\theta)$)

$$\Longrightarrow E_c = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta\right)$$

Energia potencial total:



$$U = m g x \sin\theta$$

(a energia potencial do plano não interessa porque permanece constante.)

2 Equações de Lagrange:

(1) $\dfrac{\partial E_c}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = m g \sin\theta$, $\dfrac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + \dot{s}\cos\theta)$

$Q_x = 0$, porque as únicas forças não conservativas são todas forças de ligação.

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(m(\dot{x} + \dot{s}\cos\theta)\right) + m g \sin\theta = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \ddot{s}\cos\theta = -g\sin\theta}$$

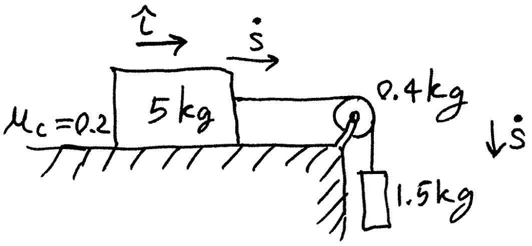
(2) $\dfrac{\partial E_c}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} + m(\dot{s} + \dot{x}\cos\theta)$

$$\Longrightarrow \boxed{M\ddot{s} + m(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\theta) = 0}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} & \text{(constante e negativa)} \\[2ex] \ddot{s} = \dfrac{m g \sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} & \text{(constante e positiva)} \end{cases}$$

Aula 20. 29-4-2016

Problema 5.12



Resolução:

$$E_c = \frac{5}{2}\dot{s}^2 + \frac{1.5}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{0.4}{2}r^2\right)\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{10}\right)\dot{s}^2 = \frac{67}{20}\dot{s}^2$$

$$U = -1.5 \times 9.8\, s = -14.7\, s$$

uma força não conservativa (atrito cinético no bloco):

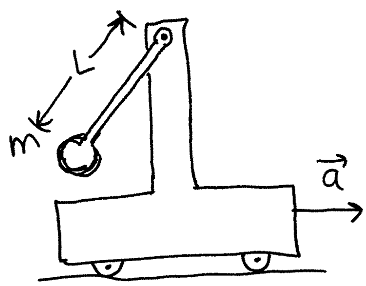
$$\vec{F} = -0.2 \times 5 \times 9.8\,\hat{\imath} = -9.8\,\hat{\imath}\ , \quad \vec{r}_a = (s + k_1)\hat{\imath} + k_2\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial s} = \hat{\imath}\ , \qquad Q_s = -2.94$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{67}{20}\dot{s}^2\right)}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial\left(\frac{67}{20}\dot{s}^2\right)}{\partial s} + \frac{\partial(-14.7s)}{\partial s} = -9.8$$

$$\frac{67}{10}\ddot{s} = 14.7 - 9.8 \Rightarrow \ddot{s} = 0.7313\ \frac{m}{s^2}$$

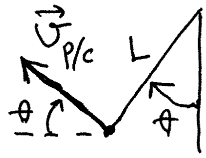
Exemplo 8.4



pêndulo de massa m e comprimento L, num carrinho com aceleração constante $\vec{a}$, horizontal.

Resolução. velocidade do carrinho: $\vec{v}_c = a t\,\hat{\imath}$

velocidade do pêndulo, em relação ao carrinho:



$$v_{P/c} = L\dot{\theta}$$

$$\vec{v}_{P/c} = L\dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

velocidade do pêndulo:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{P/c} + \vec{v}_c = \left(at - L\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\imath} + L\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$v_p^2 = a^2t^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2aL\dot{\theta}t\cos\theta$$

Considerando unicamente o pêndulo (o movimento do carrinho já está definido), há um grau de liberdade, θ.

$$E_c = \frac{m}{2}\left(a^2t^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2aL\dot{\theta}t\cos\theta\right)$$

$$U = -mgL\cos\theta$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}} = m\left(L^2\dot{\theta} - aLt\cos\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\left(L^2\ddot{\theta} - aL\cos\theta + aLt\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\theta} = maLt\dot{\theta}\sin\theta \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta} = mgL\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial\theta} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \implies L^2\ddot{\theta} - aL\cos\theta + gL\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{a}{L}\cos\theta - \frac{g}{L}\sin\theta}$$

Pontos de equilíbrio:

$$\frac{a}{L}\cos\theta = \frac{g}{L}\sin\theta \implies \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

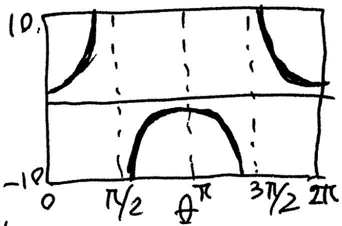
$\frac{a}{g}>0 \Rightarrow$ há dois pontos de equilíbrio, θ_0 entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, e $\theta_1=\theta_0+\pi$

A estabilidade dos pontos de equilíbrio determina-se analisando o sinal de:

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta} = -\frac{a}{L}\sin\theta - \frac{g}{L}\cos\theta$$

como nos pontos de equilíbrio $\frac{a}{L}=\frac{g}{L}\tan\theta$, então,

$$\Rightarrow \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta} = -\frac{g}{L}\left(\sin\theta\tan\theta+\cos\theta\right)$$



é negativa em θ_0 e positiva em θ_1. Como tal, θ_0 é ponto de equilíbrio estável e θ_1 instável.

Aula 21. 12-5-2016

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Cada uma das componentes da velocidade de fase é uma combinação linear das variáveis de estado. Em duas dimensões, um sistema linear tem então as equações de evolução seguintes:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2$$

onde A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22} são quatro constantes reais. As equações podem ser escritas de forma matrizial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou ainda, de forma vetorial:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{A}\vec{r}$$

onde $\mathbf{A}$ é um operador linear, que transforma cada vetor $\vec{r}$, do espaço de fase, em outro vetor. A velocidade de fase no ponto na posição $\vec{r}$ é então

$$\vec{u} = \mathbf{A}\vec{r}$$

Pontos de equilíbrio

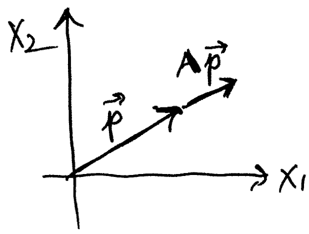
São todas as soluções do sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema, homogêneo, tem sempre a solução trivial,

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Se o determinante da matriz **A** for nulo, existem muitas outras soluções. No entanto, se o determinasse fosse nulo, as duas equações de evolução seriam equivalentes e o sistema pode ser considerado de primeira ordem.
Como tal, nos sistemas lineares (com $\det \mathbf{A} \neq 0$) o único ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase.

Vetores próprios. Podem existir vetores próprios, $\vec{p}$, tal que $\mathbf{A}\vec{p}$ é outro vetor na mesma direção de $\vec{p}$

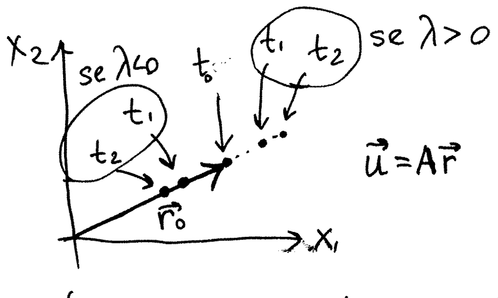


Ou seja,

$$\mathbf{A}\vec{p} = \lambda\,\vec{p}$$

λ = constante, chamada VALOR PRÓPRIO.

Se $\lambda > 0$, $\mathbf{A}\vec{p}$ tem o mesmo sentido de $\vec{p}$. Se $\lambda < 0$, $\mathbf{A}\vec{p}$ tem o sentido oposto. (λ não pode ser 0, a menos que $\vec{p}$ fosse $\vec{0}$).



Se o estado inicial, $\vec{r}_0$, em t_0, fosse um vetor próprio de **A**, então o estado evoluia ao longo da reta que passa pela origem, na direção de r_0, afastando-se da origem (sistema repulsivo) se $\lambda > 0$, ou aproximando-se dela (sistema atrativo) se $\lambda < 0$.

$$\vec{r}_n \approx \vec{r}_{n-1} + \frac{t}{n}\lambda\,\vec{r}_{n-1} \approx \vec{r}_{n-2}\left(1+\frac{t}{n}\lambda\right)^2 \approx \ldots \approx \left(1+\frac{t}{n}\lambda\right)^n \vec{r}_0$$

$$\vec{r}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\lambda\right)^n \vec{r}_0 = e^{\lambda t}\,\vec{r}_0$$

Problemas de valores próprios

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

(sistema homogêneo)

A solução trivial, $x_1 = x_2 = 0$, não interessa. Para que existam outras soluções, é necessário e suficiente que o determinante seja nulo:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda - A_{11})(\lambda - A_{22}) - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\iff \lambda^2 - (A_{11}+A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda^2 - (\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A} = 0}$$ equação dos valores próprios

onde $\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = A_{11} + A_{22}$ é o **traço** da matriz $\mathbf{A}$
e $\det\mathbf{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ é o seu **determinante**.

Exemplo. Determine os valores e vetores próprios do sistema dinâmico linear:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2$$

Resolução.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathbf{A} &= 5 \\ \det\mathbf{A} &= 4-6 = -2 \end{aligned}$$

Os valores próprios λ_1 e λ_2 são os dois números tal que: $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$ $\left(=0 \text{ se } \lambda=\lambda_1 \text{ ou } \lambda=\lambda_2\right)$

Ou seja, dois números com produto igual a -2 e soma igual a 5:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2=\lambda^2-5\lambda-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1\lambda_2=-2\\ \lambda_1+\lambda_2=5\end{cases}$$

E podem escreverem-se, $\lambda_1=\frac{5}{2}+\Delta$, $\lambda_2=\frac{5}{2}-\Delta$ ($5/2$ é o ponto meio entre λ_1 e λ_2)

$$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2=\left(\frac{5}{2}+\Delta\right)\left(\frac{5}{2}-\Delta\right)=\frac{25}{4}-\Delta^2=-2$$

$$\Delta^2=\frac{25}{4}+2=\frac{33}{4} \Rightarrow \Delta=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}} \quad \boxed{\lambda_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}}$$

Vetores próprios associados a λ_1:

$$\begin{bmatrix}1-\frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & 4-\frac{5\sqrt{33}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

basta resolver uma das duas equações, porque são equivalentes

$$\Rightarrow \left(1-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)x_1+2x_2=0 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{\sqrt{33}+3}{4}x_1}$$

reta com declive positivo passando pela origem.

Vetores próprios associados a λ_2:

$$\left(1-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)x_1+2x_2=0 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{3-\sqrt{33}}{4}x_1}$$

reta com declive negativo, passando pela origem

Aula 22. 13-5-2016

Valores próprios complexos.

Quando uma matriz A real tem um valor próprio complexo o seu complexo conjugado também é valor próprio:

valores próprios $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\Omega \\ \lambda_2 = \alpha - i\Omega \end{cases}$ $(\Omega > 0)$

Se $\vec{p}$ for um vetor próprio (complexo) correspondente a λ_1, então

$$\vec{z} = e^{(\alpha+i\Omega)t}\,\vec{p}$$

é uma solução, complexa, do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Há um teorema que garante que num sistema linear de equações diferenciais as partes real e imaginária de uma solução complexa são soluções (reais) do mesmo sistema.

$$e^{(\alpha+i\Omega)t}\,\vec{p} = e^{\alpha t}\left(\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)\right)\left(\vec{a} + i\vec{b}\right)$$

$$= e^{\alpha t}\left(\cos(\Omega t)\,\vec{a} - \sin(\Omega t)\,\vec{b}\right) + i\,e^{\alpha t}\left(\sin(\Omega t)\,\vec{a} + \cos(\Omega t)\,\vec{b}\right)$$

Assim sendo, a solução geral do sistema é:

$$\vec{r}(t) = e^{\alpha t}\sin(\Omega t)\,\vec{a} + e^{\alpha t}\cos(\Omega t)\,\vec{b}$$

Há 3 casos:

(a) $\alpha = 0 \implies \vec{r}(t) = \sin(\Omega t)\,\vec{a} + \cos(\Omega t)\,\vec{b}$

As duas variáveis de estado x_1 e x_2 repetem-se periodicamente com período: $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega}}$

Ou seja, as soluções são **ciclos** e o ponto de equilíbrio na origem chama-se **CENTRO**.

ⓑ $\alpha > 0$, As soluções são espirais que se afastam da origem, que é **FOCO REPULSIVO** (oscilações com amplitude crescente)

ⓒ $\alpha < 0$, As soluções são espirais que se aproximan da origem: **FOCO ATRATIVO** (oscilações com amplitude decrescente)

Nos três casos:

$$\Omega = |\text{parte imaginária de } \lambda| = \text{frequência angular das oscilações}$$

Exemplo. Determine que tipo de ponto de equilíbrio tem o sistema:

$$\dot{x} = -3x + 5y \,, \quad \dot{y} = -2x - 5y$$

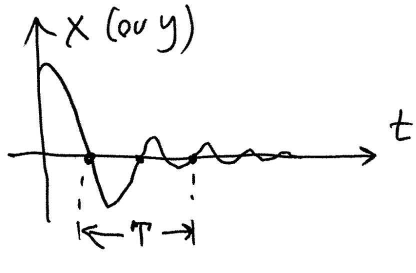
e a forma geral das soluções.

<u>Resolução</u>. No Maxima,

eigenvectors (matrix([-3, 5], [-2, -5]));

$$\hookrightarrow [[[\underbrace{-3i-4}_{\lambda_1}, \underbrace{3i-4}_{\lambda_2}], \underbrace{[1, 1]}_{\substack{n_1 \; n_2 \\ \text{multiplicidades}}}, [[[\underbrace{1, -\tfrac{3i+1}{5}}_{\vec{p}_1}]], [[\underbrace{1, \tfrac{3i-1}{5}}_{\vec{p}_2}]]]]$$

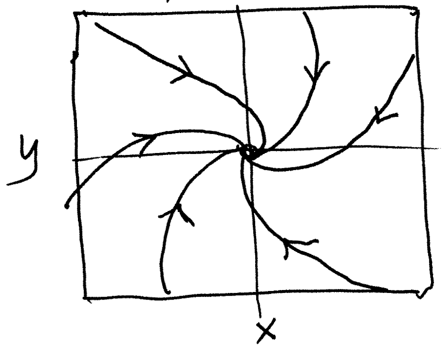
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-4t} \sin(3t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + e^{-4t} \cos(3t) \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$



freq. angular $= \Omega = 3$

período $= T = \frac{2}{3}\pi$

Retrato de fase: plotdf([-3*x+5*y,-2*x-5*y]);



CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRI

$\lambda_1 + \lambda_2 = t$ (traço de A)

$\lambda_1 \lambda_2 = d$ (determinante de A)

$\lambda_1 = \frac{t}{2} + \Delta$, $\lambda_2 = \frac{t}{2} - \Delta \implies \frac{t^2}{4} - \Delta^2 = d$

discriminante: $\Delta = \sqrt{\frac{t^2}{4} - d} = \frac{\sqrt{t^2-4d}}{2}$

$$\implies \boxed{\lambda_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4d}}{2}}$$

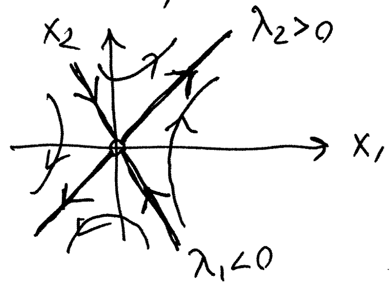
① $t^2 > 4d \implies$ 2 valores próprios reais, diferentes

ⓐ $d < 0 \implies \sqrt{t^2-4d}$ é maior que t

$\implies$ 2 valores próprios reais, com sinais diferentes

PONTO DE SELA

equilíbrio instável

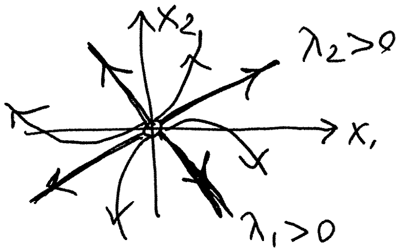


(b) $d > 0$, λ_1 e λ_2 reais, com o mesmo sinal

(i) $t > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ positivos

NÓ REPULSIVO

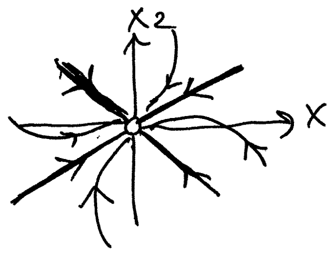
(instável)



(ii) $t < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ negativos

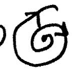
NÓ ATRATIVO

(estável)



(2) $t^2 < 4d \Rightarrow$ 2 valores complexos. Obtêm-se os 3 casos já descritos acima

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{CENTRO} \\ t > 0 \rightarrow \text{FOCO REPULSIVO} \\ t < 0 \rightarrow \text{FOCO ATRATIVO} \end{cases}$$

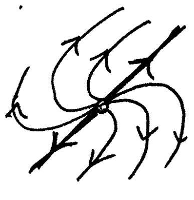

(3) $t^2 = 4d \Rightarrow \sqrt{t^2 - 4d} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{t}{2}$

$\Rightarrow$ um único valor próprio λ, real.

(a) $t > 0 \Rightarrow \lambda > 0$

NÓ IMPRÓPRIO REPULSIVO

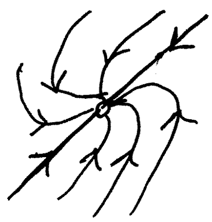
(instável)



(b) $t < 0 \Rightarrow \lambda < 0$

NÓ IMPRÓPRIO ATRATIVO

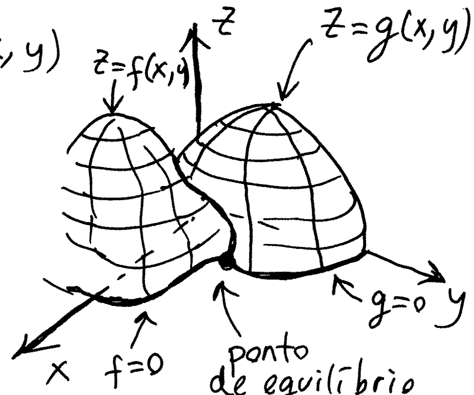
(estável)



Aula 23. 19-5-2016

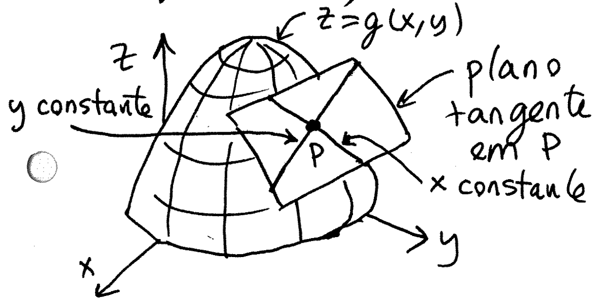
SISTEMAS NÃO LINEARES

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad \dot{y} = g(x,y)$$



As duas funções f e g, contínuas, representam superfícies no espaço (x,y,z). As curvas $f(x,y)=0$, no plano (x,y), são as NULCLINAS de x e as curvas $g(x,y)=0$ são as NULCLINAS de y. Os pontos de equilíbrio são a interseção entres as nulclinas de x e de y.

Aproximação linear



g_P = valor de g no ponto P $(P = (x_P, y_P))$

$(x - x_P)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P$ = aumento de g entre P e um ponto (x, y_P), no plano

$(y - y_P)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P$ = aumento de g entre P e (x_P, y)

O valor da função num ponto (x,y), próximo de P, pode ser obtido, aproximadamente, deslocando-se no plano tangente:

$$g(x,y) \approx g_P + (x - x_P)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P + (y - y_P)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P$$

E, de forma semelhante,

$$f(x,y) \approx f_P + (x - x_P)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + (y - y_P)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P$$

Se P for um ponto de equilíbrio, então $f_P = 0$, $g_P = 0$ e as aproximações serão:

$$\begin{cases} f(x,y) \approx (x - x_P)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + (y - y_P)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \\ g(x,y) \approx (x - x_P)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P + (y - y_P)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P \end{cases}$$

Deslocando a origem para o ponto P, ou seja, substituindo x e y pelas variáveis

$$x_1 = x - x_P \quad , \quad x_2 = y - y_P$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} \; , \; \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

e as equações de evolução tomam a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P x_2 \\ \dot{x}_2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P x_2 \end{cases}$$

$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P, \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P \right.$ e $\left. \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P \text{ são constantes} \right)$

Que é um sistema dinâmico linear com matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_P & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_P \end{bmatrix}$$

A **matriz jacobiana** (função de x e y) do sistema é:

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ou seja, em cada ponto de equilíbrio o sistema aproxima-se a um sist. linear, com matriz igual a J, nesse ponto.

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = 6y(y^2+x^2-1)^2 - 3x^2y^2 \\ \dot{y} = 2xy^3 - 6x(y^2+x^2-1)^2 \end{cases}$

```
f: 6*y*(y^2 + x^2 -1)^2 -3*x^2*y^2 $
g: 2*x*y^3 - 6*x*(y^2 + x^2 - 1)^2 $
```

Pontos de equilíbrio:

```
p: solve([f,g]);
```

Há 13 pontos, mas apenas 9 no plano real (os primeiros 7 e os dois últimos): elimina 6 últimos elimina 11 primeiros

```
p: append ( rest(p,-6) , res(p, 11));
```

Matriz jacobiana: `J: jacobian([f,g],[x,y]);`

Matrizes dos 9 sistemas lineares (aproximações nos pontos de equil.) `A: makelist (subst(q,J), q,p);`

Traços e determinantes das 9 matrizes:

```
map (mat_trace, A);
map ( determinant, A);
```

Tipos de pontos de equilíbrio

- 3 centros → $P_1=(0,0)$, $P_8=(-0.786, 0.963)$, $P_9=(0.786, 0.963)$ (traço nulo e determinante positivo).
- 2 pontos de sela → $P_6=(-0.529, 0.648)$, $P_7=(0.529, 0.648)$ (determinante < 0)
- 4 **PONTOS NÃO-HIPERBÓLICOS**
  $P_2=(0,-1)$, $P_3=(0,1)$, $P_4=(-1,0)$, $P_5=(1,0)$

São os pontos onde o determinante da matriz é nulo, ou seja, a aproximação linear não é suficiente (sistema quadrático). São pontos diferentes aos encontrados nos sistemas lineares

Retrato de fase

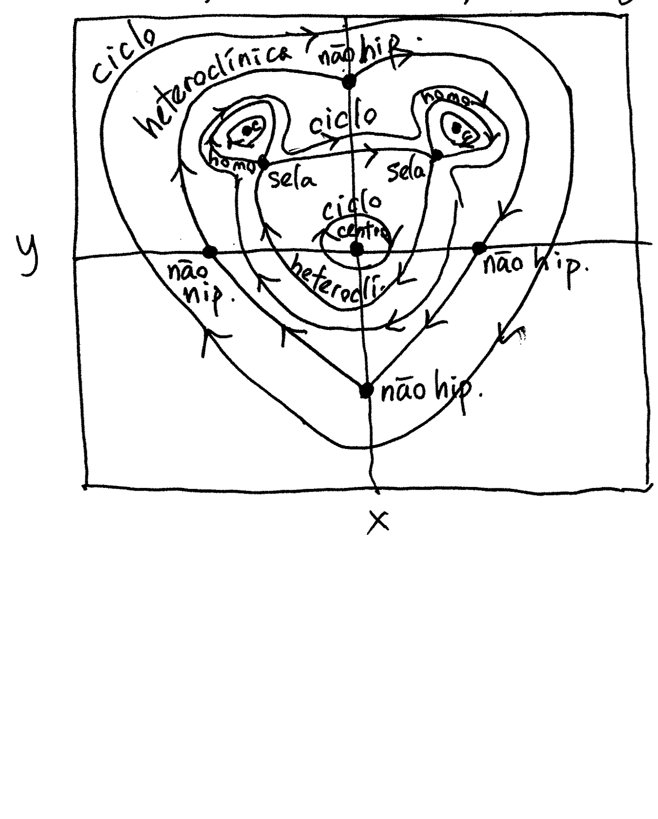
plotdf([f,g],[x,y],[x,-2,2],[y,-2,2]);

ⓐ Órbita heteroclínica: entre os 4 pontos não hiperbólicos
(nsteps=70, trajectory_at= 0.005 -1.005)
(nsteps=110, trajectory_at= 0.005 1.005)

ⓑ 5 tipos de ciclos : à volta de cada um dos 3 centros e à volta dos 3 centros, dentro e fora da órbita heteroclínica.
nsteps=300, fieldlines=black
trajectory_at → {(0 0.8), (0 1.4), (0 0.5), (0.9 0.1), (-0.9 1)

ⓒ 2 órbitas homoclínicas; nos dois pontos de sela
nsteps=300, fieldlines=blue
trajectory_at → (0.5773 0.6502), (-0.5773 0.6502)

ⓓ Outra órbita heteroclínica, entre os 2 pontos de sela
nsteps=300, fieldlines= red, trajectoy_at= 0.5179 0.625



Aula 24. 20-5-2016

O PÊNDULO

Já foi obtida a equação de movimento para a aceleração angular α, numa aula anterior:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} l = \text{comprimento eficaz} \\ \theta = \text{ângulo medido desde} \\ \quad \text{a posição mais baixa} \end{array}\right)$$

trata-se de um sistema dinâmico autônomo, não linear, de segunda ordem e conservativo.

<u>Pontos de equilíbrio</u>. $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sin\theta = 0 \implies \theta = n\pi \end{cases}$

(n = número inteiro)

<u>Matriz jacobiana</u>.

$$\mathbf{J}(\theta,\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\omega}{\partial\omega} \\ \dfrac{\partial\left(-\frac{g}{l}\sin\theta\right)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\left(-\frac{g}{l}\sin\theta\right)}{\partial\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Nos pontos de equilíbrio $(\theta,\omega) = (n\pi, 0)$ com $n = 0, \pm 2, \pm \ldots$

$\implies \cos\theta = 1$ e a matriz do sistema linear aproximado é:

$$\mathbf{A}_{n\,\text{par}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

Com traço $t = 0$ e determinante $d = \frac{g}{l} > 0$

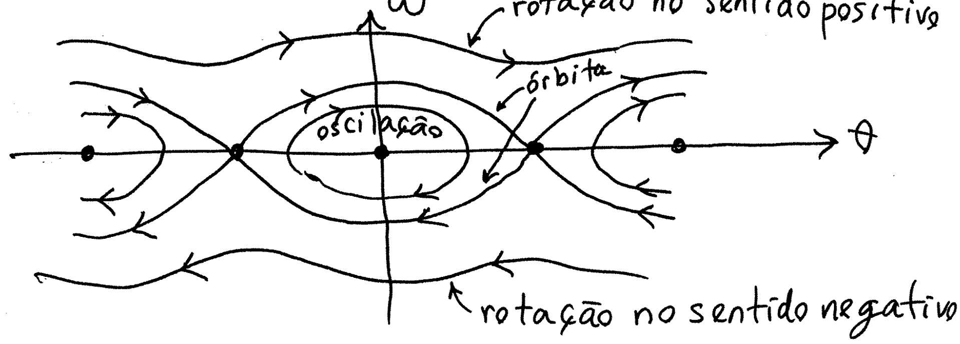
$\implies (n\pi, 0)$, com n par, são <u>centros</u>.

Nos pontos $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

$$\Rightarrow \cos\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad A_{n\ \text{impar}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$t = 0$, $d = -\frac{g}{l} < 0 \Rightarrow$ são pontos de sela

Retrato de fase



ESPAÇOS DE FASE COM MAIS DE 2 VARIÁVEIS DE ESTADO

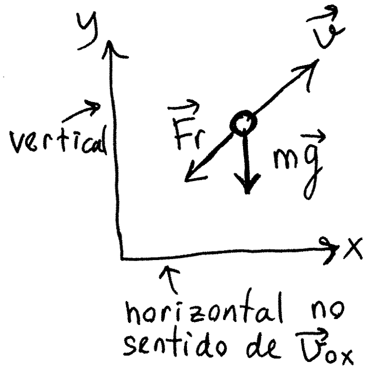
Exemplo 1. Um sistema com duas variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e equações de evolução não autónomas pode ser escrito como sistema autónomo com 3 variáveis de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Considera-se t como terceira variável de estado e acrescenta-se uma terceira equação de evolução (derivada de t):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \dot{t} = 1 \qquad \left(f_3(x_1, x_2, t) = 1\right) \end{cases}$$

Exemplo 2. Lançamento de um projétil no ar



Força de resistência do ar, para um projétil esférico de raio R:

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4}\,\rho_{ar} R^2 |\vec{v}|\,\vec{v}$$

ρ_{ar} = massa volúmica do ar $\approx 1.2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_r + m\vec{g}}{m}$$

$$|\vec{v}|\,\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath})$$

$$\vec{g} = -9.8\,\hat{\jmath} \quad (\text{SI})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\dfrac{\pi \rho_{ar} R^2 v_x}{4m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dot{v}_x \\[2ex] a_y = -\dfrac{\pi \rho_{ar} R^2 v_y}{4m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - 9.8 = \dot{v}_y \end{cases}$$

O sistema dinâmico tem 4 variáveis de estado: (x, y, v_x, v_y)

A solução correspondente a um estado inicial $(x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y})$ pode ser aproximada por uma lista de estados, obtida no Maxima com o programa **rk** (método de Runge-Kutta de 4ª ordem)

rk(lista das componentes da veloc. de fase, lista de variáveis, estado inicial, intervalo)

$$\text{intervalo} \rightarrow [t, t_0, t_f, \Delta t]$$

valores inicial e final

nome da variável independente

incrementos de t entre estados.

No caso de uma bola de ténis, com $m=0.062$ kg e $R=3.25$ cm, lançada com velocidade inicial de 12m/s, inclinada 45° sobre a horizontal, a constante que aparece nas equações de movimento é (SI):

```
k: -%pi * 1.2 * 3.25e-2 ^2 / 4/0.062$
```

e convém definir a expressão para v:

```
v: sqrt(vx^2 + vy^2)$
```

Uma lista (que chamaremos track) com os valores de x, y, v_x e v_y em diferentes instantes, entre $t_0=0$ até $t_f=2$ (segundos), obtém-se com o comando:

```
track: rk([vx, vy, k*v*vx, k*v*vy - 9.8]
        [x, y, vx, vy], [0, 0, 12*cos(%pi/4), 12*sin(%pi/4)]
        [t, 0, 2, 0.1])$
```

Convém ver o último ponto na lista:

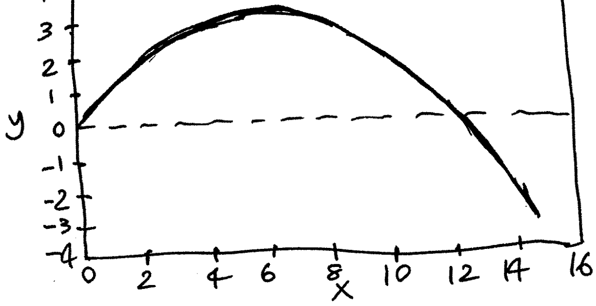
last(track); $\longrightarrow$ [2.0, 14.72, -3.19, 6.31, -10.59]

t_f x_f y_f v_{xf} v_{yf}

Os valores negativos de y_f e v_f indicam que a bola já bateu no chão. Repete-se o mesmo comando rk, com intervalos de Δt menores, até obter valores convergentes em last(track); neste caso, com $\Delta t = 0.05$ já se obtém precisão de 5 casas decimais!

O gráfico da trajetória (x vs y) obtém-se com:

```
plot2d([discrete, makelist([p[2], p[3]], p, track)]);
```



(Não é uma parábola!)

Aula 25. 27-5-2016

CICLOS LIMITE

As curvas de evolução podem aproximar-se assimptoticamente (em $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$) de um ponto de equilíbrio, mas também, em alguns casos, de uma curva fechada chamada CICLO LIMITE.

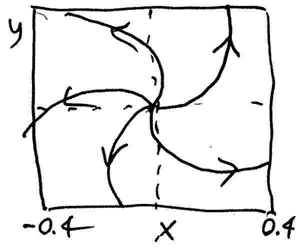
Exemplo.
$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-2x^2-3y^2)-y \\ \dot{y} = y(1-2x^2-3y^2)+x \end{cases}$$

```
u: [x*(1-2*x^2 -3*y^2)-y, y*(1-2*x^2-3*y^2) +x]$
p: solve(u);    →   [[0,0]]
J: jacobian(u, [x,y])$
A : subst(p[1], J);    →
```
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
eigenvalues(A);   →
```
$\lambda = 1 \pm i$

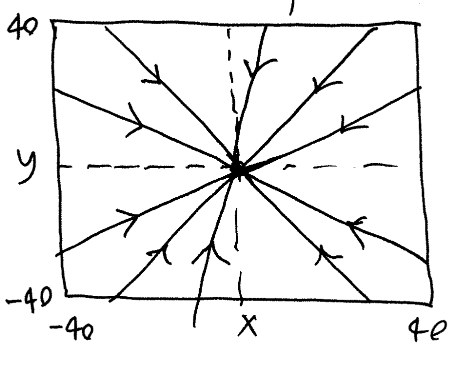
O sistema tem um único ponto de equilíbrio, foco repulsivo, na origem do espaço de fase:

```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.4,0.4],[y,-0.4, 0.4]);
```



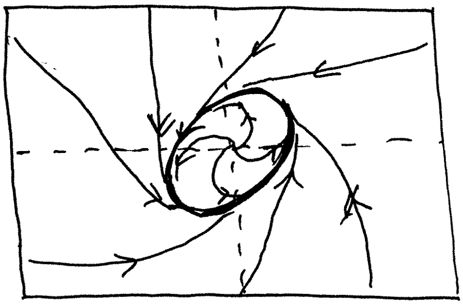
No entanto, o sistema é realmente estável, como mostra uma parte mais alargada do retrato de fase:

```
plotdf(u,[x, y],
       [x,-40,40],
       [y,-40,40])
```



No primeiro gráfico, parece que todas as curvas de evolução afastam-se da origem, mas o segundo gráfico mostra que todas as curvas se aproximam da origem. O que acontece é que há uma curva fechada (ciclo limite) que delimita as duas regiões, em que as curvas se afastam ou se aproximam da origem:

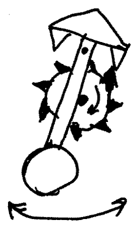
```
plotdf(u, [x,y], [x, -1, 1], [y,-1, 1]);
```



O ciclo limite corresponde a uma oscilação com amplitude bem definida.
Neste caso é um <u>ciclo limite atrativo</u>

Sistemas com ciclos limite

<u>relógio de pêndulo</u>



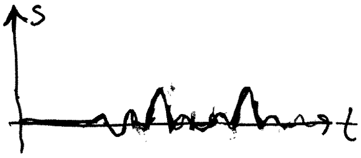
a roda dentada regula a amplitude do pêndulo e as oscilações do pêndulo regulam a velocidade angular da roda

<u>corda de violino</u>

A fricção das cordas do arco obriga as cordas a repetirem um movimento oscilatório com amplitude que depende da pressão e velocidade do arco.

<u>coração</u>

As oscilações do coração seguem um ciclo limite próprio



Como Encontrar ciclos limite.

(a) As curvas dentro dos ciclos limite atrativo têm que partir dum ponto de equilíbrio e as curvas dentro de um ciclo limite repulsivo têm de terminar num ponto de equilíbrio. Como tal, para existirem ciclos limite é necessário que existam pontos de equilíbrio, atrativos ou repulsivos (nós ou focos). Em torno de cada nó ou foco podem existir ciclos limite.

(b) Transformando as variáveis de estado, (x, y), em coordenadas polares, com origem no ponto de equilíbrio (x_e, y_e):

$$\begin{cases} x = x_e + r\cos\theta \\ y = y_e + r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(x+\cancel{x_e})^2 + (y-y_e)^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y-y_e}{x-x_e}\right) \end{cases}$$

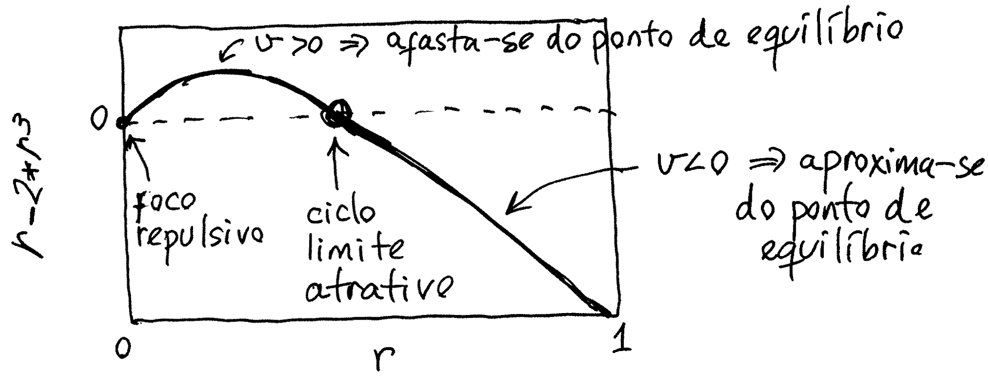
consegue-se descobrir mais facilmente a existência de ciclos limite.

No caso do exemplo das duas páginas anteriores,

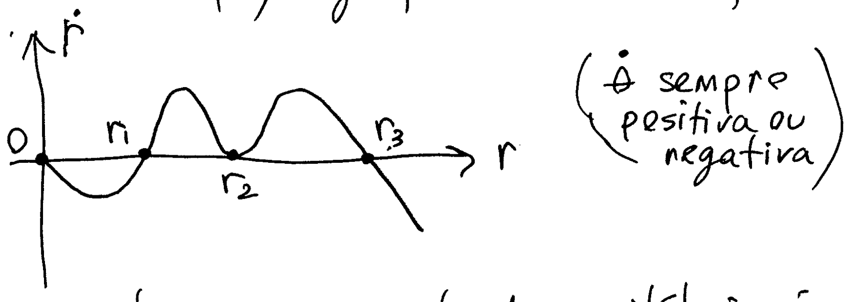
```
[xp, yp]: [r*cos(q), r*sin(q)]$
gradef(r,t,v)$
gradef(q,t,w)$
subst([x=xp, y=yp], [diff(xp,t)=u[1], diff(yp,t)=u[2]])$
solve(%, [v, w]);
trigsimp(%);
  → [[v=(cos^2(q)-3) r^3 + r, w=1]]
```

A velocidade angular constante e positiva, $\dot{\theta} = 1$, mostra que o estado roda, no sentido anti-horário, à volta do ponto de equilíbrio, a uma taxa constante. Enquanto o estado roda, para determinar se se afasta ou se aproxima do ponto de equilíbrio, observa-se o gráfico de V vs. r (para um valor qualquer de θ).

plot2d (subst(q=0, rhs(%[1] [1])), [r, 0, 1]);



Se, num outro exemplo, o gráfico de $\dot{r}$ vs r fosse:



Concluia-se então que o ponto de equilíbrio é um foco atrativo e existem 3 ciclos limite, nas vizinhanças de $r \approx r_1$ (ciclo repulsivo), $r \approx r_2$ (nem atrativo nem repulsivo) e $r \approx r_3$ (ciclo limite atrativo).

Aula 26. 2-6-2016

DINÂMICA POPULACIONAL

$x(t)$ = população no instante t, admitindo que possa ter qualquer valor real (positivo) $x \geq 0$

aumento (ou diminuição da população): $\dot{x} = f(x,t)$

Quando a população é extinta, $x=0$, $\dot{x}$ deve ser também nula. Como tal, a função f deve verificar:

$$f(0,t) = 0$$

$\dfrac{f(x,t)}{x}$ = taxa de modificação da população = taxa de natalidade − taxa de mortalidade

① Modelo de Malthus

$$\frac{f(x,t)}{x} = a = \text{constante positiva}$$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) = a\,x$ (equação de variáveis separáveis)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$ aumento exponencial da população.

② Modelo logístico (ou de Verhulst)

$\dfrac{f(x,t)}{x} = a - bx$
- taxa de natalidade constante
- taxa de mortalidade aumenta linearmente com o aumento da população

(a e b constantes positivas)

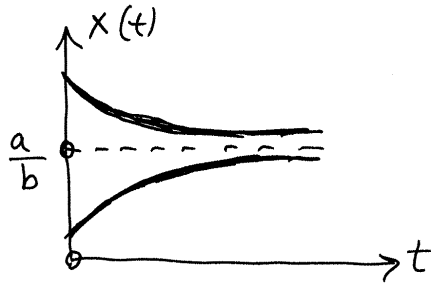
$$\Rightarrow \dot{x} = x(a - bx)$$

pontos de equilíbrio: $x(a-bx)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{a}{b}$

$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = a-2bx$ positiva em $x \in [0, \frac{a}{2b}[$

negativa em $x \in]\frac{a}{2b}, +\infty[$

$\Rightarrow x_1=0$ é instável e $x_2=\frac{a}{b}$ é estável.



a população aproxima-se sempre do valor $\frac{a}{b}$

SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

Duas variáveis de estado, x e y, que representam as populações de duas espécies que interagem

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad x(t) \geq 0,\ y(t) \geq 0$$
$$\dot{y} = g(x,y) \qquad f(0,y) = g(x,0) = 0$$

Matriz jacobiana:

$$\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$: aumento próprio da 1ª espécie

$\frac{\partial f}{\partial y}$: aumento/diminuição da 1ª espécie, devido à 2ª.

$\frac{\partial g}{\partial y}$: aumento próprio da 2ª espécie

$\frac{\partial g}{\partial x}$: aumento/diminuição da 2ª espécie, devido à 1ª

Há 3 tipos de sistemas de duas espécies:

① **Sistema com cooperação.** $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$

② **Sistema com competição.** $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} < 0$

③ **Sistema predador presa.** Se x são predadores e y presas $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} < 0$

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\dot{x} = x(a-cy) \qquad \dot{y} = y(bx-d)$$

é um sistema predador (y) presa (x).

- A população de presas aumenta sem limite se não existirem predadores
- A população de predadores extingue-se se não existirem presas.

Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} p_1 = (0,0) \\ p_2 = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right) \end{cases}$

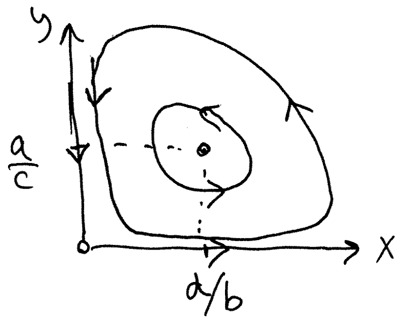
Matriz jacobiana: $J(x,y) = \begin{bmatrix} a-cy & -cx \\ by & bx-d \end{bmatrix}$

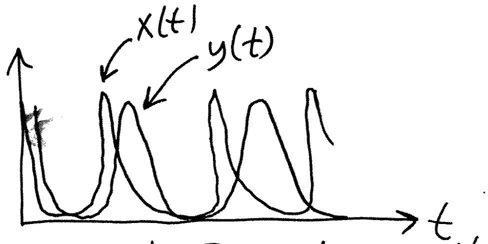
$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -d < 0 \Rightarrow p_1$ é ponto de sela

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$

$\Rightarrow p_2$ é um centro

$\Rightarrow$ se $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, a curva de evolução é um ciclo.





As populações podem oscilar entre valores próximos de zero e $+\infty$.

Um modelo mais realista deverá ter ciclos limite, em vez de ciclos, como no caso do modelo de **Holling-Tanner**:

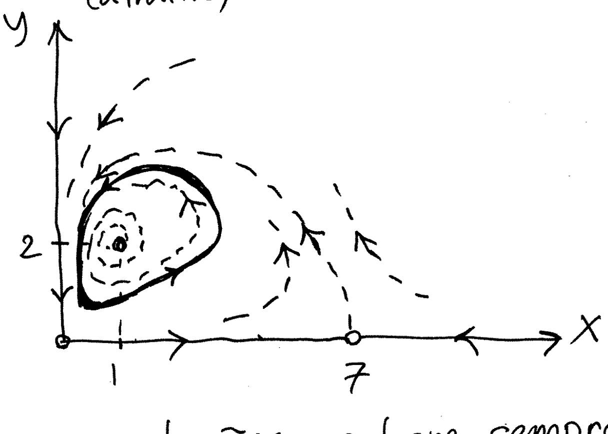
$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x}$$

$$\dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

$x \to$ presas , $y \to$ predadores

3 pontos de equilíbrio: $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (7,0)$, $p_3 = (1,2)$

Um ciclo limite (atrativo) em torno de p_3 (foco repulsivo)



As duas populações acabam sempre oscilando entre valores determinados pelos parâmetros do sistema.

Capítulo 2

Exames

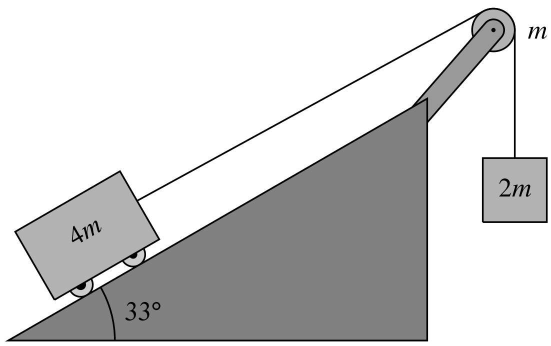
2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 21 de junho de 2016. Compareceram 145 estudantes e a nota média foi 10.3 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Um bloco de massa $2\,m$ está pendurado por um fio vertical que está ligado no outro extremo a um carrinho de massa $4\,m$, passando por uma roldana de massa m, onde $m = 100$ g. O carrinho encontra-se na superfície de um plano inclinado 33° em relação à horizontal e a roldana é um disco homogéneo de raio R (momento de inércia $I_{\text{cm}} = m\,R^2/2$). A massa do fio e das rodas do carrinho são desprezáveis. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre ela. Determine o valor da aceleração do carrinho, ignorando as forças não conservativas (resistência do ar e atrito nos eixos das rodas e da roldana) e o sentido dessa aceleração (para cima ou para baixo do plano inclinado?).



2. (4 valores) Determine a posição dos pontos de equilíbrio e o tipo de cada um desses pontos, no sistema dinâmico com as seguintes equações de evolução:

$$\dot{x} = y^3 - 4\,x \qquad \dot{y} = y^3 - y - 3\,x$$

Diga se o sistema corresponde ou não às seguintes categorias de sistemas: (a) autónomo, (b) linear, (c) conservativo, (d) pedador presa (todas as suas respostas devem ser argumentadas corretamente).

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. O sistema de Lotka-Volterra consegue explicar muito bem a evolução de um sistema predador presa mas tem uma grande desvantagem que outros sistemas tentam corrigir. Qual é essa desvantagem?

(A) Cada uma das populações pode aumentar indefinidamente.
(B) Nenhuma das duas populações atinge nunca um valor constante.
(C) Nenhuma das duas populações pode chegar a extinguir-se totalmente.
(D) Cada uma das populações oscila indefinidamente.
(E) Cada uma das populações pode oscilar entre um valor muito baixo e um valor muito elevado.

Resposta: ☐

4. Determine o valor da componente normal da aceleração dum ponto, no instante em que o seu vetor velocidade é $3\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ e o vetor aceleração é $-5\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath}$ (unidades SI).

(A) 7.6 m/s^2 **(C)** 21.0 m/s^2 **(E)** 48.0 m/s^2
(B) 3.13 m/s^2 **(D)** 7.16 m/s^2

Resposta: ☐

5. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = 3\,r - r^2$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 2$ **(D)** atrativo com $r = 3$
(B) repulsivo com $r = 2$ **(E)** repulsivo com $r = 3$
(C) atrativo com $r = 0$

Resposta: ☐

6. Um corpo de 18 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $3 + 5\,x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $9\,\hat{\imath}$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 7$ m?

(A) 2420.0 J **(C)** 145.2 J **(E)** 4114.0 J
(B) 1210.0 J **(D)** 484.0 J

Resposta: ☐

7. Aplica-se uma força $5\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ num ponto com vetor posição $4\,\hat{\imath} - 1\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Determine o módulo do momento dessa força, em relação à origem.

(A) 33 N·m **(C)** 16 N·m **(E)** 11 N·m
(B) 21 N·m **(D)** 24 N·m

Resposta: ☐

8. A matriz dum sistema dinâmico linear é (unidades SI):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Como é a evolução das variáveis de estado em função do tempo?

(A) Oscilam com período π e amplitude decrescente.
(B) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
(C) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude constante.
(D) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.
(E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

Resposta: ☐

9. Uma partícula desloca-se numa trajetória circular sob a ação duma força tangencial resultante $F_t = 3\cos(\theta)$, onde θ é o ângulo medido ao longo do círculo. Qual dos valores de θ na lista seguinte corresponde a um ponto de equilíbrio instável?

(A) $\pi/2$ **(B)** 2π **(C)** 0 **(D)** π **(E)** $3\pi/2$

Resposta: ☐

10. A projeção x da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão $a_x = 3\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a projeção x da velocidade é nula e a componente da posição é $x = 4$ m. Determine a projeção x da posição em $t = 6$ s.

(A) 112.0 m **(B)** 694.4 m **(C)** 56.0 m **(D)** 280.0 m **(E)** 336.0 m

Resposta: ☐

11. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo da curva $y = x^2/2$, no plano horizontal xy. Assim sendo, basta uma única variável generalizada para descrever o movimento; escolhendo a variável x, a expressão da energia cinética é $E_c = \dfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\left(1 + x^2\right)$. Encontre a expressão para a força generalizada Q_x responsável pelo movimento da partícula.

(A) $m\,\ddot{x}\left(1 + x^2\right) + 2\,m\,x\,\dot{x}$

(B) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) + 1\,m\,x\,\dot{x}^2$

(C) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) - 2\,m\,x^3\,\dot{x}^2$

(D) $\dfrac{m\,\ddot{x}}{2}\left(1 + x^2\right) - 2\,m\,x\,\dot{x}$

(E) $m\,\ddot{x}\left(1 + x^2\right) + 1\,m\,x\,\dot{x}^2$

Resposta: ☐

12. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1 - 6\,t)\,\hat{\imath} + 8\,t\,\hat{\jmath}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 3\,t\,\hat{\imath} + (1 - 5\,t)\,\hat{\jmath}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(A) $3\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$

(B) $9\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}$

(C) $-9\,\hat{\imath} + 13\,\hat{\jmath}$

(D) $9\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$

(E) $-3\,\hat{\imath} + 13\,\hat{\jmath}$

Resposta: ☐

13. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

(A) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$

(B) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 - x\,y$

(C) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$

(D) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$

(E) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$

Resposta: ☐

14. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $2\,t^2\,\hat{\imath} + 2\,t^3\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

(A) $6\,t^2$

(B) $4\,t$

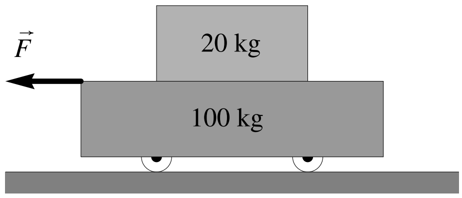
(C) $\sqrt{6\,t^2 + 4\,t}$

(D) $\sqrt{36\,t^4 + 16\,t^2}$

(E) $6\,t^2 + 4\,t$

Resposta: ☐

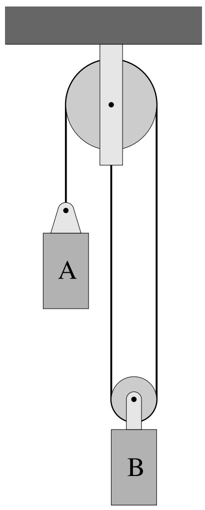
15. A força $\vec{F}$, com módulo de 54 N, faz acelerar os dois blocos na figura, sobre uma mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao outro bloco. As forças de atrito nas rodas podem ser desprezadas. Calcule o módulo da força de atrito entre os dois blocos.



(A) 8 N **(B)** 5 N **(C)** 9 N **(D)** 6 N **(E)** 7 N

Resposta: ☐

16. Na figura, a roldana fixa tem raio de 6 cm, a roldana móvel tem raio de 3 cm e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. No instante em que o bloco A desce, com velocidade de valor 18 cm/s, qual o valor da velocidade angular da roldana móvel?



(A) 12 rad/s **(B)** 18 rad/s **(C)** 6 rad/s **(D)** 9 rad/s **(E)** 3 rad/s

Resposta: ☐

17. A equação diferencial:

$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$

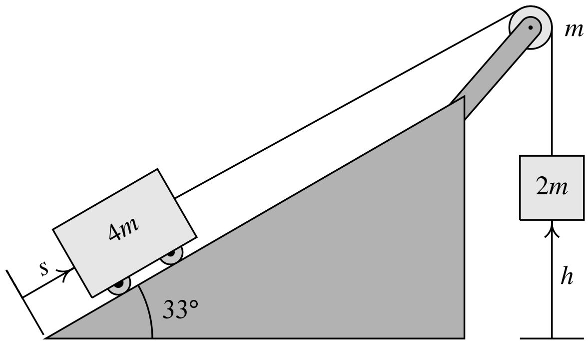
é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase $(x, \dot{x})$. Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

(A) $(-3, 0)$ **(B)** $(-1, 0)$ **(C)** $(1, 0)$ **(D)** $(3, 0)$ **(E)** $(0, 0)$

Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. Para descrever o movimento do sistema são necessárias três variáveis. Duas variáveis s e h, para determinar as posições do carrinho e do bloco, que podem ser definidas como mostra a figura seguinte, e um ângulo θ que determina a rotação da roldana.



Como o fio faz rodar a roldana sem deslizar nela, o ângulo que a roldana roda (no sentido dos ponteiros do relógio) está relacionado com a posição do carrinho: $\theta = s/R +$ constante e, como tal, a velocidade angular da roldana é:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

onde $v = \dot{s}$ é a velocidade do carrinho. O comprimento do fio é igual a

$$L = \text{constante} - s - h$$

e, como permanece constante, a velocidade do bloco é igual a menos a velocidade do carrinho:

$$\dot{h} = -v$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética total dos três objetos é:

$$E_\text{c} = \frac{1}{2}(4\,m)\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(2\,m)\,\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\,R^2}{2}\right)\omega^2 = 2\,m\,v^2 + m\,v^2 + \frac{1}{4}\,m\,v^2 = \frac{13}{4}\,m\,v^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (ignorando a da roldana que permanece constante) é:

$$U = 4\,m\,g\,s\sin(33°) + 2\,m\,g\,h = 4\,m\,g\,s\sin(33°) - 2\,m\,g\,s + \text{constante}$$

A equação de movimento obtém-se a partir da equação de Lagrange:

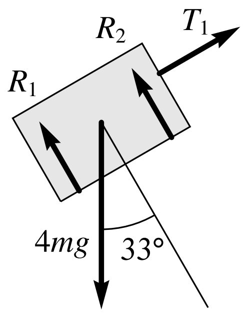
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{13}{2} m\,a + 4\,m\,g\,\sin(33^\circ) - 2\,m\,g = 0$$

E a aceleração do carrinho é então,

$$a = \frac{4\,g}{13}\big(1 - 2\,\sin(33^\circ)\big) = -0.2692\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

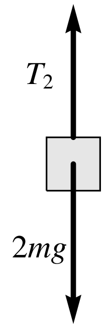
O sinal negativo indica que a aceleração é para baixo do plano inclinado (a velocidade do carrinho, v, é uma variável de estado que pode ser positiva ou negativa, ou seja, para cima ou para baixo).

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do carrinho. A soma das componentes das forças normais ao plano deve ser nula e a soma das componentes das forças tangentes ao plano é igual a:



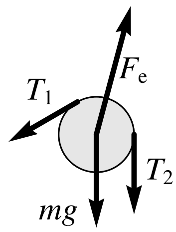
$$T_1 - 4\,m\,g\,\sin(33^\circ) = 4\,m\,a \quad\Longrightarrow\quad T_1 = 4\,m\big(a + g\,\sin(33^\circ)\big) \tag{2.1}$$

A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do bloco. Como na equação do carrinho admitiu-se que a aceleração a era para cima do plano, então a aceleração do bloco é a, para baixo, e a equação de movimento é:



$$2\,m\,g - T_2 = 2\,m\,a \quad\Longrightarrow\quad T_2 = 2\,m\big(g - a\big) \tag{2.2}$$

Na roldana atuam as tensões nos dois lados do fio, o seu peso e uma força de contato no eixo (diagrama ao lado). A soma dessas forças deve ser nula e a soma dos momentos, em relação ao eixo, é:



$$T_2\,R - T_1\,R = \left(\frac{m\,R^2}{2}\right)\alpha \quad\Longrightarrow\quad T_2 - T_1 = \frac{m}{2}\,a$$

Substituindo nesta expressão as equações (2.1) e (2.2), obtém-se a mesma expressão da aceleração obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$y^3 - 4\,x = 0 \qquad\qquad y^3 - y - 3\,x = 0$$

Subtraindo as duas equações obtém-se $y = x$, ou seja,

$$x^3 - 4\,x = x\big(x^2 - 4\big) = x\,(x+2)\,(x-2) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio $(x,\ y)$:

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (2,2) \qquad P_3 = (-2,-2)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -4 & 3\,y^2 \\ -3 & 3\,y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem valores próprios -4 e -1 e, como tal, P_1 é um nó atrativo.

Nos pontos P_2 e P_3 obtém-se a mesma matriz para a aproximação linear,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Que tem determinante igual a -8. Conclui-se então que P_2 e P_3 são ambos pontos de sela.

(*a*) O sistema é autónomo, porque as expressões das equações de evolução não dependem explicitamente do tempo. (*b*) Não é um sistema linear, porque a matriz jacobiana não é constante. (*c*) Não é sistema conservativo, porque o traço da matriz jacobiana, igual a $3\,y^2 - 5$, não é nulo. (*d*) Não pode ser sistema predador presa, porque não é um sistema de duas espécias, já que $y^3 - 4\,x$ não se aproxima de zero quando x se aproxima de zero e $y^3 - y - 3\,x$ não se aproxima de zero quando y se aproxima de zero.

Perguntas

3. E

4. D

5. D

6. D

7. B

8. C

9. E

10. A

11. E

12. C

13. C

14. D

15. C

16. E

17. D

2.1.3 Cotações

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações 0.8
- Expressão para a energia cinética do sistema 0.8
- Expressão para a energia potencial do sistema 0.8
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho 0.4

Mecânica vetorial.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do carrinho 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do bloco 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento da roldana 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho 0.4

Problema 2

- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio 0.4
- Obtenção da matriz jacobiana 0.4
- Caraterização do ponto de equilíbrio na origem 0.4
- Caraterização dos dois pontos de equilíbrio fora da origem 0.4
- Alínea *a* 0.6
- Alínea *b* 0.6
- Alínea *c* 0.6
- Alínea *d* 0.6

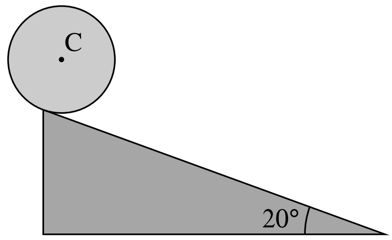
2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 12 de julho de 2016. Compareceram 66 estudantes e a nota média foi 9.3 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Um berlinde de vidro, esférico e homogéneo, tem raio $R = 5$ mm e pesa 13.3 mN. O berlinde desce uma rampa muito comprida, inclinada 20° em relação à horizontal, rodando sem derrapar. A resistência do ar produz uma força igual a $\pi\,\rho\,R^2\,v^2/4$, onde v é a velocidade do centro da esfera e ρ é a massa volúmica do ar, igual a 1.2 kg/m^3; essa força atua no sentido oposto da velocidade e à altura do centro C da esfera. Determine a expressão da aceleração do centro da esfera em função da sua velocidade v (o momento de inércia duma esfera homogénea é $I_{\text{cm}} = 2\,m\,R^2/5$). Determine a velocidade máxima que atingirá o berlinde após descer vários metros (velocidade terminal).



2. (4 valores) (a) A expressão da aceleração tangencial dum objeto é:

$$a_{\text{t}} = 4 - s^2 - 5\,\dot{s} + s\,\dot{s}$$

onde s é a sua posição na trajetória. Determine os pontos de equilíbrio do sistema, no espaço de fase, e demonstre que tipo de pontos são (foco, nó, etc., atrativo ou repulsivo). (b) Ignorando os termos que dependem de $\dot{s}$ obtém-se $a_{\text{t}} = 4 - s^2$, que corresponde a um sistema conservativo. Determine a expressão da energia potencial deste sistema, por unidade de massa (ou seja, admitindo $m = 1$). Trace o gráfico dessa função e com base nele identifique os pontos de equilíbrio deste sistema conservativo e explique se tem ciclos ou órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

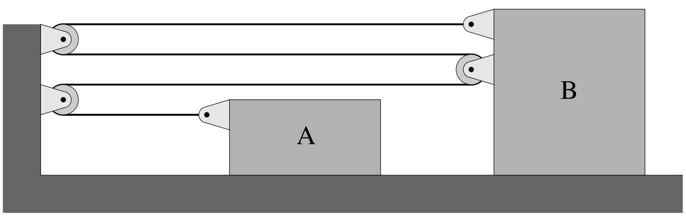
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um projétil é lançado desde um telhado a 5.6 m de altura, com velocidade de 12 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule o tempo que o projétil demora até bater no chão.

(A) 0.93 s **(C)** 1.59 s **(E)** 2.24 s
(B) 1.84 s **(D)** 1.22 s

Resposta: ☐

4. Se o bloco B se desloca para a direita com velocidade de valor v, qual é o valor da velocidade (para a esquerda) do bloco A?



(A) $v/3$ **(C)** v **(E)** $v/2$
(B) $2\,v$ **(D)** $3\,v$

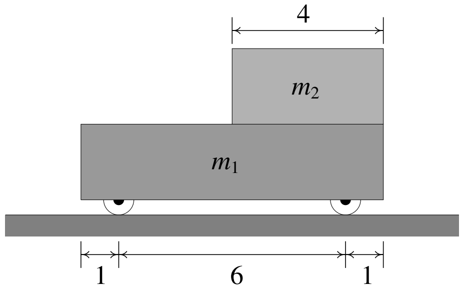
Resposta: ☐

5. O momento de inércia dum disco homogéneo de 10 cm de raio é 5.2×10^{-3} kg·m^2. Determine o valor da força tangencial que deve ser aplicada na periferia do disco, para produzir uma aceleração angular de −6 rad/s^2.

(A) 1.25 N **(C)** 0.62 N **(E)** 0.12 N
(B) 0.31 N **(D)** 0.21 N

Resposta: ☐

6. As distâncias na figura são em cm e o sistema está em repouso. O carrinho, incluindo as rodas, tem massa $m_1 = 100$ g, distribuída uniformemente, e o bloco de cima tem massa $m_2 = 315$ g, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas rodas do lado esquerdo.



(A) 0.678 N **(C)** 1.005 N **(E)** 1.356 N
(B) 1.543 N **(D)** 2.034 N

Resposta: ☐

7. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_{\text{t}} = (s+1)(s-1)(3-s)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(A) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(B) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(C) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.
(D) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(E) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.

Resposta: ☐

8. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 1\,y - 1$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 1$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -2\,x$
(B) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -2\,x$
(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 2\,x$
(D) $\dot{x} = -2\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(E) $\dot{x} = 2\,y \quad \dot{y} = 5\,x$

Resposta: ☐

9. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$
(B) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(C) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(D) $\dot{y} = 6\,y + x\,y$
(E) $\dot{y} = 6\,y - y^2$

Resposta: ☐

10. A aceleração tangencial dum objeto verifica a expressão $a_\text{t} = 3\,s^4$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso em $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade em $s = 2$ m.

(A) 6.1 m/s
(B) 2.45 m/s
(C) 4.27 m/s
(D) 7.95 m/s
(E) 9.8 m/s

Resposta: ☐

11. Um ciclista demora 44 s a percorrer 400 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.2 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 33.4 rad/s
(B) 29.2 rad/s
(C) 16.7 rad/s
(D) 25.1 rad/s
(E) 20.9 rad/s

Resposta: ☐

12. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial h e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade v. Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade $3\,v$?

(A) $9\,h$
(B) $h/3$
(C) $3\,h$
(D) $h/9$
(E) $6\,h$

Resposta: ☐

13. As equações de evolução dum sistema linear são:
$\dot{x} = x + 2\,y \qquad \dot{y} = x + y$
Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

(A) Ponto de sela.
(B) Foco atrativo.
(C) Foco repulsivo.
(D) Centro.
(E) Nó repulsivo.

Resposta: ☐

14. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(A) 419 rad/s^2
(B) 209 rad/s^2
(C) 279 rad/s^2
(D) 182 rad/s^2
(E) 838 rad/s^2

Resposta: ☐

15. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 3\,r^2 + 2\,r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 0
(E) 3

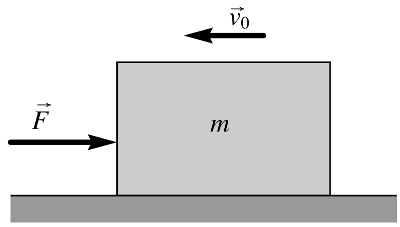
Resposta: ☐

16. As expressões das energias cinética e potencial dum sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ, são: $E_\text{c} = 7\,\dot{x}^2 + 5\,\dot{\theta}^2$ e $U = -11\,x\,\theta$. Encontre a expressão da aceleração $\ddot{\theta}$.

(A) $\dfrac{11}{7}\,x\,\theta$
(B) $\dfrac{11}{10}\,x$
(C) $\dfrac{11}{10}\,\theta$
(D) $\dfrac{11}{7}\,x$
(E) $\dfrac{11}{10}\,x\,\theta$

Resposta: ☐

17. O bloco na figura, com massa igual a 2 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 10 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.

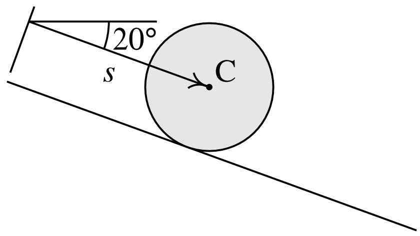


(A) 5.1 m/s^2
(B) 5.8 m/s^2
(C) 2.55 m/s^2
(D) 7.45 m/s^2
(E) 14.9 m/s^2

Resposta: ☐

2.2.2 Resolução

Problema 1. Para descrever o movimento do centro C do berlinde basta uma variável, s, que pode ser a distância desde o topo do plano inclinado:



Como o berlinde roda sem derrapar, a sua velocidade angular ω é no sentido dos ponteiros do relógio e com valor igual à velocidade do seu centro, $v = \dot{s}$, dividida pelo raio R:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

O sistema tem então um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética do berlinde é:

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}\,v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m\,R^2}{5}\right)\omega^2 = \frac{7\,m}{10}\,v^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (arbitrando 0 quando $s = 0$) é:

$$U = -m\,g\,s\,\sin(20°)$$

A expressão da força de resistência do ar é:

$$\vec{F}_\text{r} = -\frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}$$

onde $\hat{e}_\text{t}$ é o versor tangencial, no sentido em que s aumenta. O ponto de aplicação dessa força pode ser considerado igual à posição do centro C do berlinde, que em função do grau de liberdade é igual a:

$$\vec{r}_\text{C} = s\,\hat{e}_\text{t}$$

Como tal, a força generalizada é então:

$$Q = \vec{F}_\text{r}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\text{C}}{\partial s} = \left(-\frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}\right)\cdot\hat{e}_\text{t} = -\frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2$$

E a equação de Laplace é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = Q \quad\Longrightarrow\quad \frac{7\,m}{5}\,a_\mathrm{t} - m\,g\,\sin(20^\circ) = -\frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2$$

A expressão da aceleração do berlinde é então,

$$a_\mathrm{t} = \frac{5\,g}{7}\,\sin(20^\circ) - \frac{5\,\pi\,\rho\,R^2}{28\,m}\,v^2$$

E substituindo os valores (em unidades SI) de $g = 9.8$, da massa $m = 0.0133/9.8$, do raio $R = 0.005$ e da massa volúmica do ar, $\rho = 1.2$, obtém-se a expressão

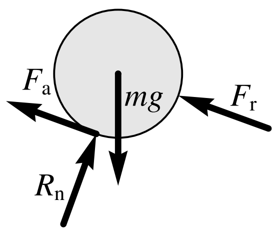
$$a_\mathrm{t} = 2.394 - 1.240\times 10^{-2}\,v^2$$

Como tal, a velocidade terminal (quando a aceleração tangencial for nula) é igual a:

$$v = \sqrt{\frac{2.394}{1.240\times 10^{-2}}} = 13.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Quando a velocidade do centro do berlinde é menor que a velocidade terminal, a aceleração tangencial é positiva e a velocidade aumenta. Se a velocidade fosse maior do que a velocidade terminal, a aceleração tangencial seria negativa e a velocidade diminuiria. Após um percurso suficientemente comprido, a velocidade do centro do berlinde atingirá sempre um valor igual à velocidade terminal.

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do berlinde, onde R_n é a reação normal, F_a a força de atrito estático e $F_\mathrm{r} = \pi\,\rho\,R^2\,v^2/4$ a força de resistência do ar. A expressão da soma das componentes das forças, na direção tangencial, é:



$$m\,g\,\sin(20^\circ) - F_\mathrm{a} - \frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2 = m\,a_\mathrm{t}$$

A única força que produz momento em relação ao centro de massa, no sentido dos ponteiros do relógio, é a força de atrito estático. Como tal, a expressão da soma dos momentos em relação ao centro de massa é:

$$F_\mathrm{a}\,R = \left(\frac{2\,m\,R^2}{5}\right)\alpha \quad\Longrightarrow\quad F_\mathrm{a} = \frac{2}{5}\,m\,R\,\alpha$$

Substituindo esta última expressão na equação anterior, e tendo em conta que como o berlinde não roda então $R\,\alpha = a_\mathrm{t}$, obtém-se a mesma expressão da aceleração já obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. (*a*) As equações de evolução são o seguinte sistema de equações:

$$\dot{s} = v \qquad\qquad \dot{v} = 4 - s^2 - 5\,v + s\,v$$

E os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$v = 0 \qquad 4 - s^2 = 0$$

Como tal, há dois pontos de equilíbrio $(s,\, v)$:

$$\mathrm{P}_1 = (-2, 0) \qquad \mathrm{P}_2 = (2, 0)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\,s & -5 + s \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

que tem determinante igual a -4, ou seja, P_1 é ponto de sela.
No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

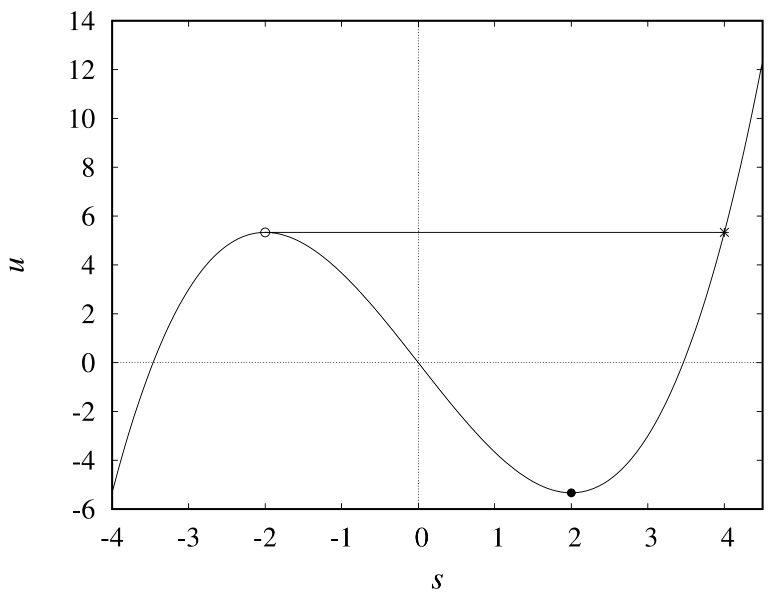
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

E a respetiva equação de valores próprios é $\lambda^2 + 3\,\lambda + 4 = 0$. Conclui-se então que os valores próprios são $-3/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}/2$e P_2 é foco atrativo.

(*b*) A energia potencial, por unidade de massa, obtém-se a partir da expressão:

$$u = \frac{U}{m} = -\int a_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s = \int \left(s^2 - 4\right)\,\mathrm{d}s = \frac{s^3}{3} - 4\,s$$

Os pontos de equilíbrio encontram-se em $s_1 = -2$ e $s_2 = 2$. O gráfico da função u, mostrando os dois pontos de equilíbrio, é o seguinte:



O ponto s_1, máximo local, é instável (ponto de sela) e o ponto s_2, mínimo local, é estável (centro). Existem ciclos quando a energia mecânica, por unidade de massa, estiver compreendida entre -16/3 e 16/3 (valores de u em s_2 e s_1). A reta horizontal apresentada no gráfico, entre o ponto de sela e um ponto de retorno, corresponde a uma órbita homoclínica. Ou seja, este sistema não tem nenhuma órbita heteroclínica, tem uma única órbita homoclínica e infinitos ciclos: todas as curvas de evolução dentro da órbita homoclínica, no espaço de fase.

Perguntas

3. B

4. D

5. B

6. C

7. E

8. E

9. D

10. A

11. A

12. A

13. A

14. B

15. D

16. B

17. D

2.2.3 Cotações

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relação entre v e ω ________ 10% (0.4)
- Expressão da energia cinética ________ 20% (0.8)
- Expressão da energia potencial ________ 20% (0.8)
- Expressão da força generalizada ________ 20% (0.8)
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ________ 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ________ 10% (0.4)

Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre ________ 20% (0.8)

- Expressão da soma de forças tangenciais ______ 20% (0.8)
- Expressão da soma de momentos ______ 20% (0.8)
- Determinação da relação entre a_t e α ______ 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da força de atrito ______ 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ______ 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ______ 10% (0.4)

Problema 2

- Obtenção das equações de evolução ______ 10% (0.4)
- Determinação dos 2 pontos de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Obtenção da matriz jacobiana ______ 10% (0.4)
- Caraterização do primeiro ponto de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Caraterização do segundo ponto de equilíbrio ______ 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da energia potencial por unidade de massa ______ 20% (0.8)
- Gráfico da energia potencial por unidade de massa ______ 10% (0.4)
- Interpretação do gráfico (pontos de equilíbrio, ciclos e órbitas) ______ 20% (0.8)

Bibliografia

Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática.* Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.

Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica.* Editora Mir: Moscovo, Rússia.

Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods.* Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.

Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México, DF, México: International Thomson Editores.

Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective.* México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* USA: Westview Press.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução.* São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.

French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics.* New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.

Galilei, G. (1638). *Dialogue Concernig Two New Sciences.* Itália: Publicado em: http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/. (Tradução de 1914, por H. Crew e A. de Salvio)

Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics.* Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.

Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.

Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach.* Cambridge University Press: Cambridge, UK.

Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology.* The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.

Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.

Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1.* New York, NY, USA: McGraw-Hill.

Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE.* Boston, MA, USA: Birkhaüser.

Maxima Development Team. (2015). *Maxima Manual* (5.37.0 ed.).

Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos.* São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics.* Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlad GmbH & Co.

Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)

Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macsyma ODE lab book.* Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.

Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA: Addison-Wesley.

Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics.* Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis.* New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.

Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* Cambridge, MA, USA: Perseus Books.

Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics.* Sausalito, CA, USA: University Science Books.

Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.

Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima.* Porto, Portugal: Edição do autor.

Villate, J. E. (2016). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (4a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.