U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 1, 2017

Jaime E. Villate

Porto, julho de 2017

Copyright © 2017, Jaime E. Villate
E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/
ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Conteúdo

1 Sumários **1**

1.1 Cinemática . . . 3
1.2 Cinemática vetorial . . . 10
1.3 Movimento curvilíneo . . . 18
1.4 Mecânica vetorial . . . 26
1.5 Dinâmica dos corpos rígidos . . . 34
1.6 Trabalho e energia . . . 46
1.7 Sistemas dinâmicos . . . 53
1.8 Mecânica lagrangiana . . . 61
1.9 Sistemas lineares . . . 70
1.10 Sistemas não lineares . . . 77
1.11 Ciclos limite e dinâmica populacional . . . 84
1.12 Sistemas caóticos . . . 92

2 Exames **97**

2.1 Exame de época normal . . . 97
2.1.1 Enunciado . . . 98
2.1.2 Resolução . . . 100
2.1.3 Cotações . . . 103
2.2 Exame de época de recurso . . . 104
2.2.1 Enunciado . . . 105
2.2.2 Resolução . . . 107
2.2.3 Cotações . . . 109

Bibliografia **111**

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 1.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

Ano académico 2016–2017, segundo semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Ascenso, Victor Hugo Granados, João Viana Parente Lopes e Jaime E. Villate.

Número de alunos 209.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

FÍSICA I. MIEIC. 2016-2017

Aula 1. 2017-02-06

Docente: Jaime Villate (villate@fe.up.pt)
página Web: http://def.fe.up.pt/eic0010

Enquadramento dentro do curso

Áreas da Engenharia Informática:

- Arquitetura de computadores
- Programação
- Teoria da computação
- Estruturas de dados
- Bases de dados
- Engenharia de software
- Inteligência artificial
- Redes
- Ciência computacional: Resolução de problemas de ciência e engenharia usando métodos computacionais. É uma área recente, diferente das áreas tradicionais da ciência: teórica e experimental. Os métodos numéricos e a física computacional estão dentro desta área.

O programa de Física I é a Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Bibliografia: J. Villate. Dinâmica e Sistemas Dinâmicos, 2016.

1. CINEMÁTICA

Estudo do movimento, sem tentar explicar as suas causas.

Movimento é a mudança da posição de um objeto. Como a posição é sempre medida em relação a algum referencial, o movimento ou repouso de um objeto é sempre relativo a um referencial. Por exemplo, um objeto em repouso, relativo a uma carruagem de comboio, mas em movimento em relação à Terra.

Num objeto em movimento, cada ponto do objeto descreve uma curva contínua (**trajetória**).

Exemplo: Cilindro a rodar sobre uma mesa

trajetórias de alguns pontos do cilindro:

As trajetórias de todos os pontos podem ser obtidas pela sobreposição de dois movimentos

ⓐ translação retilínea do centro C.

ⓑ rotação em relação ao centro C.

GRAUS DE LIBERDADE

Variáveis necessárias para determinar a posição de qualquer ponto dum objeto, num instante.

No caso do cilindro há <u>dois graus de liberdade</u>, que podem ser a distância s do centro C, a partir de uma posição $s=0$, e o ângulo θ que o ponto rodou desde uma posição $\theta=0$.

Um outro possível movimento do cilindro é o movimento pendular, em que o cilindro está pendurado de dois pontos fixos por meio de dois fios com o mesmo comprimento.

Neste caso, as trajetórias de todos os pontos no cilindro são arcos de círculo com o mesmo centro, mas diferentes raios.

O movimento tem apenas <u>um grau de liberdade</u>, porque basta saber o valor de um ângulo θ, igual para todos os pontos, para saber as posições.

Os graus de liberdade são <u>funções contínuas</u> do tempo t: $s(t)$, $\theta(t)$, $x(t)$, etc.

CARATERIZAÇÃO DO MOVIMENTO

$s(t)$ = posição do ponto na sua trajetória.
$\theta(t)$ = ângulo que permite determinar a posição.
$x(t)$ = projeção na trajetória ao longo do eixo x.
⋮

a cada uma dessas funções contínuas estão associadas outras variáveis:

Deslocamento, durante um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, é a diferença entre a posição final menos a inicial:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$$

Note-se que os valores $s(t_2)$ e $s(t_1)$ dependem da escolha da origem $s=0$, mas Δs não.

Velocidade média, no intervalo $[t_1, t_2]$, é o deslocamento por unidade de tempo:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Note-se que Δt é sempre positivo, mas Δs pode ter qualquer sinal. Como tal, a velocidade pode ser negativa

Velocidade instantânea, em qualquer instante t,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{s}$$

O ponto por cima usa-se para indicar derivada em t.
$v(t)$ é também função contínua, positiva ou negativa.

Rapidez: $|v(t)|$ (positiva)

Aula 2. 2017-02-09

Exemplo. Um automóvel encontrava-se no quilómetro 90 da estrada N13, às 12h, no quilómetro 30 às 13h, e no quilómetro 50 às 13h30. Determine a velocidade média entre as 12h e as 13h, e entre as 13h e as 13h30, e os deslocamentos nesses dois intervalos.

$t_0 = 12h$, $s_0 = 90km$ $\qquad \bar{v}_{01} = \frac{30-90}{13-12} = -60 \frac{km}{h}$

$t_1 = 13h$, $s_1 = 30km$

$t_2 = 13.5h$, $s_2 = 50km$ $\qquad \bar{v}_{12} = \frac{50-30}{13.5-13} = 40 \frac{km}{h}$

$\Delta s_{0,1} = 30-90 = -60\,km$ $\qquad \Delta s_{1,2} = 50-30 = 20\,km$

Note-se que: $\Delta s_{0,1} = \bar{v}_{01} \Delta t_{01}$ e $\Delta s_{1,2} = \bar{v}_{12} \Delta t_{12}$ são as áreas entre $\bar{v}$ e o eixo das abcissas, num gráfico de $\bar{v}$ vs. t.

Para saber a forma real como o automóvel andou, seria necessário medir s_i em muitos outros instantes entre as 12h e as 13h30,

$$\Delta s_{0,1} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \Delta t_i$$

no limite quando $\Delta t_i \to 0$, $\bar{v}_i$ é a velocidade instantânea v_i e:

$$\Delta s_{0,1} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta t_i \Rightarrow \boxed{s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt}$$

O deslocamento num intervalo é igual ao integral da velocidade nesse intervalo.

A expressão para Δs, igual ao integral de $v(t)$, pode obter-se também assim:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v\,dt = ds \Rightarrow \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

$$\Rightarrow s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

(para poder calcular o integral há que ter uma expressão para v, em função de t)

ACELERAÇÃO TANGENCIAL

A aceleração tangencial média, no intervalo $[t_0, t_1]$ é:

$$\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

(variação da velocidade, por unidade de tempo)

chama-se **tangencial**, porque, como veremos num capítulo posterior, é apenas uma parte da aceleração total. Considerando o intervalo $[t, \Delta t]$, com $\Delta t \to 0$, obtém-se a aceleração tangencial no instante t:

$$a_t(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$\Rightarrow dv = a_t\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} a_t\,dt \Rightarrow \boxed{v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a_t\,dt}$$

Exemplo. Um ciclista, com velocidade inicial de $5\,\frac{m}{s}$, aplica os travões, fazendo com que a velocidade diminua segundo a expressão:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{100 - s^2}$$

(unidades SI, e s = posição desde o ponto onde aplica os travões.)

Determine, (a) a aceleração tangencial em função de s e (b) o tempo que demora até travar por completo.

Há dois instantes referidos no enunciado t_0, que pode arbitrar-se igual a 0, e t_1 quando trava totalmente.

$t_0 = 0 \rightarrow s_0 = 0,\ v_0 = 5$

$t_1 \longrightarrow s_1 = \text{valor que faz } v(t) = 0,\ v_1 = 0$

ⓐ A expressão dada pode ser derivada para obter a_t.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(100-s^2)^{1/2}\right) = \frac{1}{4}(100-s^2)^{-1/2}\frac{d}{dt}(100-s^2)$$

$$= \frac{1}{4}(100-s^2)^{-\frac{1}{2}}(-2s)\frac{ds}{dt}$$

como $\frac{ds}{dt} = v = \frac{1}{2}(100-s^2)^{1/2}$, então:

$$a_t = \frac{1}{4}(100-s^2)^{-\frac{1}{2}}(-2s)\times\frac{1}{2}(100-s^2)^{1/2} \Rightarrow \boxed{a_t = -\frac{s}{4}}$$

ⓑ $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{100-s^2} = \frac{ds}{dt}$

Separação de variáveis: coloca-se num lado da equação todo o que depende de s e no outro lado o que depende de t:

$$dt = \frac{2\,ds}{\sqrt{100-s^2}}$$

integram-se os dois lados, dando limites para t no lado esquerdo e limites para s no lado direito:

$$\int_0^{t_1} dt = \int_0^{s_1}\frac{2\,ds}{\sqrt{100-s^2}} \Rightarrow t_1 = \int_0^{s_1}\frac{2\,ds}{\sqrt{100-s^2}}$$

Usando o Maxima,

```
(%i1) solve ((100-s^2)/2 =0);
(%o1) [s=-10, s=10]
```

Ou seja que $s_1 = 10$ m ($s=-10$ não interesa neste caso).

```
(%i2) t1: integrate(2/(100-s^2), s, 0, 10);
(%o2) %pi
(%i3) float(t1);
(%o4) 3.14159...
```

$\Rightarrow t_1 = 3.14159...$ segundos.

EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_t = v\frac{dv}{ds}$$

Cada uma dessas 3 equações inclui 3 das 4 variáveis (t, s, v, a_t). Para resolver uma dessas equações pelo método de separação de variáveis é necessário reduzir as 3 variáveis para 2, ou seja, há que conhecer uma expressão que relacione duas das variáveis:

$$a_t = f(t), \quad a_t = g(s), \quad v = h(s), \quad a_t = r(v), \ldots$$

Aula 3. 2017-02-13

MOVIMENTO DUM PONTO NUM PLANO

Dois graus de liberdade: $x(t)$ e $y(t)$

$v_x = \dot{x}$, $a_x = \dot{v}_x$, $a_x = x\frac{dv_x}{dx}$

$v_y = \dot{y}$, $a_y = \dot{v}_y$, $a_y = y\frac{dv_y}{dx}$

O movimento no plano é a soprebosição de dois movimentos retilíneos (projeção do mov. nos dois eixos)

LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Observa-se que:

$v_x = \text{constante} = v_{x_0}$

$a_y = \text{constante} = -9.8\,\frac{m}{s^2}$

$g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$ = aceleração da gravidade

<u>Movimento uniforme</u>.

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_0}\ (\text{constante}) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = v_{x_0}\int_0^t dt \quad (t_0=0)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_{x_0} t}$$

Movimento uniformemente acelerado.

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \text{ (constante)} \Rightarrow \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y = v_{y0} - gt}$$

$$v_y \frac{dv_y}{dy} = -g \Rightarrow \int_{v_{y0}}^{v_y} v_y\, dv_y = -g\int_{y_0}^{y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(v_y^2 - v_{y0}^2\right) = -g(y-y_0) \Rightarrow \boxed{v_y^2 = v_{y0}^2 + 2g(y-y_0)}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{y0} - gt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (v_{y0} - gt)\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Exemplo. Atira-se uma pedra desde uma ponte, 5m por cima de um rio, com velocidade de 15m/s, inclinada 36.9° por cima da horizontal. Determine a velocidade com que a pedra entrará na água e a altura máxima que alcançará, desde a superfície do rio (admite-se que a resistência do ar é desprezável).

posição inicial: $x_0 = 0$, $y_0 = 5m$

velocidades iniciais:

$v_{0x} = 15\cos 36.9° \approx 12 \frac{m}{s}$

$v_{0y} = 15\sin 36.9° \approx 9 \frac{m}{s}$

$v_x = v_{0x} = 12 \frac{m}{s}$ (em qualquer ponto)

$= v_{x_2}$

$$v_y \frac{dv_y}{dy} = -9.8 \Rightarrow \int_9^{v_{y2}} v_y \, dv_y = -9.8 \int_5^0 dy \Rightarrow v_{y2} = -13.38$$

$$v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} \approx 18 \frac{m}{s}$$

em t_1, quando h é máxima, $v_y = 0$ e $y = h$.
Mudando os limites no mesmo integral anterior,

$$\int_9^0 v_y \, dv_y = -9.8 \int_5^h dy \Rightarrow h = 9.13 m$$

MOVIMENTO DUM PONTO NO ESPAÇO

3 graus de liberd: as três projeções x, y e z, que podem combinar-se num vetor

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

chamado **Vetor posição**.

$\hat{i}$ = vetor unitário na direção do eixo x.
$\hat{j}$ = vetor unitário na direção do eixo y.
$\hat{k}$ = vetor unitário na direção do eixo z.

Vetor deslocamento:

$$\Delta\vec{r}_{01} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$$

aponta desde a posição inicial até a posição final.

$$\Delta\vec{r}_{01} = \Delta x_{01}\hat{i} + \Delta y_{01}\hat{j} + \Delta z_{01}\hat{k}$$

Vetor velocidade

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t)\hat{\imath} + y(t+\Delta t)\hat{\jmath} + z(t+\Delta t)\hat{k} - x(t)\hat{\imath} - y(t)\hat{\jmath} - z(t)\hat{k}}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}}$$

Como vimos, $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$; ou seja, o vetor velocidade é a combinação das velocidades das projeções do movimento nos 3 eixos, combinadas num vetor:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$

Vetor aceleração

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k}}$$

São as acelerações das 3 projeções do movimento, combinadas num único vetor:

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

e ainda:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

Aula 4. 16 de fevereiro de 2017

Exemplo. $\vec{v}(t) = 3t\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$ (SI)

e em $t=0$, $\vec{r}_0 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\,dt$$

No Maxima os vetores podem representar-se por listas:

```
v: [3*t, -2, t^2];
a: diff(v,t);
r: [1,2,0]+ integrate(v,t,0,t)
```

$\rightarrow \vec{a} = 3\hat{\imath} + 2t\hat{k}$

$\rightarrow \vec{r}(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t^2\right)\hat{\imath} + (2 - 2t)\hat{\jmath} + \frac{t^3}{3}\hat{k}$

VETORES

$|\vec{a}|$ = módulo de $\vec{a}$

<u>Produto escalar</u>: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (número real)

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}, \quad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\hat{\imath} + (a_y+b_y)\hat{\jmath} + (a_z+b_z)\hat{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_x-b_x)\hat{\imath} + (a_y-b_y)\hat{\jmath} + (a_z-b_z)\hat{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

MOVIMENTO RELATIVO

Exemplo: bloco a deslizar num plano inclinado. Posição do bloco em relação a um referencial fixo no plano:

$$\vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

velocidade do bloco, relativa ao plano inclinado:

$$\vec{v}_{b/p} = \frac{d\vec{r}_{b/p}}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

Se o plano está em movimento sobre uma mesa, a posição da origem O, relativa a um referencial fixo na mesa é $\vec{r}_{p/m}$ e $\vec{v}_{p/m} = \frac{d\vec{r}_{p/m}}{dt}$ é a velocidade do plano, relativa à mesa.

A posição do bloco, relativa à mesa, é então,

$$\vec{r}_{b/m} = \vec{r}_{p/m} + \vec{r}_{b/p} = \vec{r}_{p/m} + (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$$

Se o plano tem apenas translação, sem rotação, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ permanecem nas mesmas direções e, como tal,

$$\vec{v}_{b/m} = \frac{d\vec{r}_{b/m}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{p/m}}{dt} + (\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}_{b/m} = \vec{v}_{p/m} + \vec{v}_{b/p}}$$

a velocidade do plano mais a velocidade do bloco, relativa ao plano, é a vel. do bloco, relativa à mesa.

Derivando novamente, obtem-se uma relação semelhante para as acelerações: $\boxed{\vec{a}_{b/m} = \vec{a}_{p/m} + \vec{a}_{b/p}}$

MOVIMENTOS DEPENDENTES

Exemplo. Sistema com um bloco sobre uma mesa e um cilindro a descer na vertical.

O movimento horizontal do bloco e o movimento vertical do cilindro estão relacionados.
Para descrever esses dois movimentos são necessárias duas variáveis x e y, medidas desde dois pontos fixos. Por exemplo:

x = distância desde o bloco até o fim da mesa

y = distância desde o cilindro até o suporte do fio.

As velocidades do bloco e do cilindro são então $\dot{x}$ e $\dot{y}$

Mas como as variáveis x e y estão relacionadas, este sistema tem apenas um grau de liberdade e basta saber uma das velocidades para determinar a outra.

A relação entre x e y encontra-se escrevendo a expressão do comprimento do fio, L, em função de x e y:

$$L = x + c_1 + (y - c_3 - c_4) + c_2 + (y - c_4)$$

$$L = x + 2y + c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4$$

Como L, c_1, c_2, c_3 e c_4 permanecem constantes, derivando em ordem ao tempo obtém-se:

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{v_{bloco} = -2v_{cilindro}}$$

o sinal negativo indica que se o cilindro desce ($v_{cilindro} > 0$), o bloco desloca-se para a direita ($v_{bloco} < 0$)

Derivando novamente,

$$\ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$a_{t\,bloco} = -2a_{t\,cilindro}$$ (nenhuma das duas acelerações é igual a g.)

Aula 5. 20 de fevereiro, 2017.

COORDENADAS TANGENCIAL E NORMAL

Em cada ponto da trajetória existe um versor tangente, $\hat{e}_t$, tangente à trajetória e no sentido em que s aumenta.

$\Delta\vec{r}$ = deslocamento vetorial no intervalo $[t, t+\Delta t]$

$= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Δs = deslocamento ao longo da trajetória

Quando $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ aproxima-se da direção tangente à trajetória, e o seu módulo é aproximadamente Δs:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta s\,\hat{e}_t = ds\,\hat{e}_t$$

Como tal, o vetor velocidade é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\hat{e}_t \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{s}\,\hat{e}_t}$$

$\boxed{\text{O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória e o seu módulo é } |v| = |\dot{s}|}$

Quando a trajetória não é reta, $\hat{e}_t$ muda de direção $\Rightarrow \frac{d\hat{e}_t}{dt} \neq 0$

Como $\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = 0$

$$\Rightarrow \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} + \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t = 0 \Rightarrow \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

A derivada de $\hat{e}_t$, em ordem a t, é um vetor perpendicular à trajetória, no mesmo plano dela, e no sentido em que esta se curva: versor normal $\hat{e}_n$

No limite $\Delta t \to 0$, $|\Delta\hat{e}_t| \to \Delta\theta$ (arco com raio = 1)

e, como $\Delta\theta = \dfrac{\Delta s}{R}$, então:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta s/R)}{\Delta t}\,\hat{e}_n = \frac{v}{R}\,\hat{e}_n$$

onde R é o raio de curvatura da trajetória, no instante t.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = \dot{v}\,\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{e}_n}$$

$$\boxed{\text{O vetor aceleração tem uma componente tangencial, } a_t = \dot{v}\text{, e uma componente normal, } a_n = \frac{v^2}{R}}$$

a_t e a_n são os catetos num triângulo retângulo em que a hipotenusa é o módulo do vetor aceleração $\vec{a}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_t^2 + a_n^2$$

Exemplo. A posição dum ponto, em função do tempo t, é $\vec{r}(t) = 5t\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\hat{\jmath} + 2(1-t^2)\hat{k}$ (SI) no intervalo $0 \leq t \leq 1$. Determine: ⓐ $v(t)$ ⓑ $R(t)$ ⓒ o deslocamento ao longo da trajetória, desde $t=0$ até $t=1$.

ⓐ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4t\hat{k}$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 25 + 9t^2 + 16t^2 = 25(1+t^2)$$

Arbitrando que s aumenta desde $t=0$ até $t=1$,

$$v = 5\sqrt{1+t^2}$$

ⓑ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} = 9+16 = 25$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5(1+t^2)^{1/2}\right) = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - a_t^2 = 25 - \frac{25t^2}{1+t^2} = \frac{25}{1+t^2}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\left(\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}\right)} = 5(1+t^2)^{3/2}$$

ⓒ $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow 5\sqrt{1+t^2} = \frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} ds = 5\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{5}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta s = 5.739 \text{ m}$$

PRODUTO VETORIAL

$\vec{a}\times\vec{b}$ = vetor perpendicular ao plano dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, no sentido da regra da mão direita, e com módulo

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ = área do paralelogramo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

<u>Propriedades</u>: ① $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$

② $\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

③ $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$

④ $$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k})$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\imath} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Um caso particular quando os dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão no plano xy,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k} = (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$

Aula 6. 23 de fevereiro, 2017.

MOVIMENTO CIRCULAR

A trajetória é uma circunferência de raio R.

$$s(t) = s_0 + R\theta(t)$$

θ em radianos, medido a partir de $t=0$

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} \quad , \quad a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta} \quad , \quad a_n = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

Definese: $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$ **velocidade angular**

$\boxed{\alpha = \dot{\omega}}$ **aceleração angular**

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}}$ estas 3 equações resolvem-se igual que as equações do cap. 1.

$$v = R\omega \quad , \quad a_t = R\alpha \quad , \quad a_n = R\omega^2$$

Movimento circular uniforme

$\alpha = 0 \Rightarrow a_t = \dot{v} = R\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega$ constante

$\Rightarrow \theta = \omega t$

período de rotação $= T =$ tempo que demora a dar uma volta

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

frequência $= f = \frac{1}{T} =$ número de voltas por unidade de tempo.

em rpm, s^{-1}, Hz (hertz), etc.

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

$\vec{r}_Q$ e $\vec{r}_P$ são as posições de dois pontos, no mesmo instante

$\vec{r}_{P/Q} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$ = posição de P relativa a Q

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q}$$

Como o módulo de $\vec{r}_{P/Q}$ permanece constante, o movimento de $\vec{r}_{P/Q}$ deverá ser num arco de círculo.

O plano desse círculo é o plano de rotação e o raio do círculo é:

$R_{P/Q}$ = projeção de $\vec{r}_{P/Q}$ no plano de rotação

$$\boxed{v_{P/Q} = R_{P/Q}\,\omega}$$

e $\vec{v}_{P/Q}$ é perpendicular a $\vec{R}_{P/Q}$

ω = velocidade angular do corpo.

Qualquer outro ponto do corpo tem movimento circular, em relação a Q, <u>com a mesma velocidade</u> $\underline{\omega}$ (nesse instante) e com planos de rotação paralelos. Se assim não fosse, a distância e posição relativa entre os pontos do corpo mudaria.
ω também é independente do ponto que seja escolhido como referência (em vez de Q).

Rotação plana. Quando o plano de rotação não muda (ω pode ser diferente em diferentes instantes mas o plano não):

$$\Rightarrow \quad a_{P/Q\,tangencial} = R_{P/Q}\,\alpha \;,\; a_{P/Q\,n} = R_{P/Q}\,\omega^2$$

MOVIMENTO COM RESTRIÇÕES

Exemplo 1. Roda em movimento, sem deslizar, sobre uma superfície. O ponto P, em contacto com a superfície, tem velocidade nula:

$v_P = 0 \Rightarrow v_Q = R_{Q/P}\,\omega$

para qualquer ponto Q, onde $R_{Q/P}$ é a distância entre as projeções de P e Q no plano de rotação; e $\vec{v}_Q$ é perpendicular a $R_{Q/P}$. No caso do centro C,

$$\boxed{v_C = R\omega} \Rightarrow S_C = R\theta + S_0 \quad (R = \text{raio da roda})$$

o centro desloca-se $R\Delta\theta$, na direção paralela à superfície

Exemplo 2. Roldanas com fios que não deslizam

Fixa:

$v_C = 0$

$v_A = R\omega$

$v_B = R\omega$

Móvel:

$v_A - v_C = R\omega$

$v_A + v_B = 2R\omega$

$v_C + v_B = R\omega$

mais, porque estão em sentidos opostos

Exemplo 3. Mecanismo biela-manivela. Converte o movimento oscilatório do pistão em movimento circular da manivela.

$\overline{AB} = 0.2\,m$, $\overline{BC} = 0.075\,m$. No instante que se mostra, $v_A = 12\,m/s$. Determine as velocidades angulares da biela e da manivela nesse instante.

Manivela: $v_{B/C} = 0.075\omega_m$, $v_C = 0 \Rightarrow v_B = 0.75\omega_m$

$$\vec{v}_B = 0.075\omega_m(\cos 50°\hat{\imath} + \sin 50°\hat{\jmath})$$

Biela: $v_{B/A} = 0.2\omega_b$

$$\frac{\sin\theta}{0.075} = \frac{\sin 40°}{0.2}$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0.075\sin 40°}{0.2}\right)$$

$$\vec{v}_{B/A} = 0.2\omega_b(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_A = 12\hat{\imath}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = (12 - 0.2\omega_b\sin\theta)\hat{\imath} + 0.2\omega_b\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

igualando os dois resultados,

$$0.075\omega_m(\cos 50°\hat{\imath} + \sin 50°\hat{\jmath}) = (12 - 0.2\omega_b\sin\theta)\hat{\imath} + 0.2\omega_b\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.075\,\omega_m\cos 50° = 12 - 0.2\omega_b\sin\theta \\ 0.075\,\omega_m\sin 50° = 0.2\omega_b\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_b = 56.85\ s^{-1} \\ \omega_m = 192.07\ s^{-1} \end{cases}$$

(nos sentidos que usámos pois ambas deram positivas)

Aula 7, 2 de março de 2017

LEIS DE NEWTON

As bases da dinâmica vetorial são as 3 leis de Newton (1687). O estudo da trajetória dos corpos (cinemática) permite determinar a expressão da aceleração e, pelas leis de Newton, a força responsável pelo movimento. A partir do conhecimento das forças pode-se depois prever como será o movimento em outras condições.

1ª LEI. (lei da inércia)

"Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas".

Esta lei é válida no "espaço absoluto" e em qualquer outro referencial que se desloque com movimento uniforme e retilíneo em relação ao espaço absoluto (**referencial inercial**). É então impossível distinguir entre algum referencial inercial e o espaço absoluto. Nos referenciais não inerciais (com aceleração), um objeto pode mudar o seu estado sem existirem forças que expliquem essa mudança.

Exemplo: se o objeto em repouso, na mesa no comboio, começa a deslocar-se sem ter sido aplicada nenhuma força, o comboio está a acelerar.

2ª LEI. "A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada".

Newton define **quantidade de movimento** $= \vec{p} = m\vec{v}$

a mudança na quantidade de movimento é então:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \text{(final, em } t_2\text{, menos inicial, em } t_1\text{)}$$

e força motora impressa quer dizer:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \text{impulso.}$$

"na direção da linha reta..." quer dizer que a força, e o impulso que ela transmite ao corpo, são vetores:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

Ou seja, a 2ª lei é: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

$$\Rightarrow \vec{F}\,dt = d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Num sistema em que m permanece constante,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Unidade SI de força: $1\,\text{newton} = N = 1\,\text{kg}\cdot\left(\frac{m}{s^2}\right)$

Por exemplo, a força gravítica (peso) numa pessoa com massa $m = 65\,kg$ é:

$$F_g = mg = (65\,kg)(9.8\,\tfrac{m}{s^2}) = 637\,N$$

Quando essa pessoa está em repouso, sobre uma balança, a sua aceleração é zero e, como tal, a força total sobre ela é nula porque há uma força de contacto que a balança exerce, para cima, nos pés da pessoa, igual a 637 N.

3ª LEI. (lei de ação e reação).

"A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas".

No caso do homem de 65 kg em repouso sobre uma balança, como a balança exerce força de contacto, vertical, para cima, de 637 N, os pés do homem também exercem uma força vertical, de 637 N, sobre a balança, mas de cima para baixo.

A reação ao peso mg, que é a força gravítica da Terra sobre o homem, é uma força gravítica do homem sobre a Terra, que atrai a Terra para o homem com 637 N. Mas essa força anula-se com a força de contacto do homem sobre a balança.

Se o homem estivesse em queda livre, a sua aceleração seria: $a = \frac{637\,N}{65\,kg} = 9.8\,\frac{m}{s^2}$, mas a aceleração da Terra, na direção do homem seria quase nula: $\frac{637\,N}{5.97\times10^{24}\,kg} \approx 0$

Se os dois objetos 1 e 2 que exercem forças de ação e reação entre eles fazem parte do mesmo corpo, as duas forças anulam-se. Assim sendo, apenas interessam as **forças externas**, produzidas por objetos fora do corpo.

Diagrama de corpo livre. Mostra todas as forças externas num corpo isolado. Exemplo: diagrama de uma mesa, com um livro e um apagador por cima do livro:

forças que atuam sobre o sistema:

$$F_g = (m_m + m_\ell + m_a)\, g$$

mesa, livro, apagador

F_1, F_2, F_3, F_4 = forças de contacto nos quatro pés da mesa

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (m_m + m_\ell + m_a)\, g$$

sistema livro mais apagador:

$F_g = (m_\ell + m_a)\, g \qquad F_5 = (m_\ell + m_a)\, g$

F_5 = força de contacto da mesa sobre o <u>livro</u> (e não sobre o apagador)

<u>Apagador:</u>

$F_6 = m_a g$
força de contacto do livro sobre o apagador

<u>Livro:</u>

$-F_5$ = reação a F_5

$-F_6$ = reação a F_6

$$m_\ell g = +F_5 - F_6$$
$$= +(m_\ell + m_a)\, g - m_a g$$
$$= m_\ell g$$

O peso do apagador não atua no livro!

Aula 8. 6 de março de 2017

FORÇAS DE ATRITO

A força de contacto, de uma superfície 2 sobre uma superfície 1, costuma dividir-se (por conveniência) nas suas componentes normal, N, e tangencial (F_a), chamada força de atrito.

Existem dois tipos de atrito entre corpos rígidos:

ⓐ **Atrito estático.** Quando a velocidade da superfície 1, relativa à superfície 2, é nula: $v_{1/2}=0$

F_e = força de atrito estático.

é indeterminada, entre 0 e um valor máximo, e pode apontar em qualquer direção tangente às superf.

$$\boxed{F_e \leq \mu_e N}$$

μ_e = coeficiente de atrito estático (número sem unidades)

ⓑ **Atrito cinético.** Quando $v_{1/2} \neq 0$,

F_c = força de atrito cinético. $\boxed{F_c = \mu_c N}$

μ_c = coeficiente de atrito cinético. Costuma ser menor que μ_e.

$\vec{F}_c$ tem a mesma direção de $\vec{v}_{1/2}$, mas sentido oposto

Exemplos. ① bloco em repouso sobre um plano inclinado

como $a_x = a_y = 0$,

$\sum F_x: \; mg\sin\theta - F_e = 0$

$\sum F_y: -mg\cos\theta + N = 0$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta$ e $F_e = mg\sin\theta$

② Bloco a deslizar sobre um plano inclinado, com velocidade constante. $\Rightarrow \vec{a} = 0$

$\sum F_x = mg\sin\theta - \mu_c N = 0$

$\sum F_y = -mg\cos\theta + N = 0$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta$

$\mu_c = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

③ Bicicleta a subir uma rampa, com $a_t > 0$.

5 forças: Mg = peso da bicicleta mais homem.

N_1 e N_2: reações normais nas duas rodas

F_{e1} = força de atrito estático na roda da frente, oposta ao movimento.

F_{e2} = força de atrito estático na roda traseira na direção do movimento (roda com tração)

$a_x \neq 0$, $a_y = 0$

$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg\cos\theta = 0$

$\sum F_x = F_{e2} - F_{e1} - Mg\sin\theta = ma$

Apenas é possível calcular $N_1 + N_2$ e $F_{e2} - F_{e1}$

para encontrar N_1 e N_2 por separado, falta uma 3ª condição: o corpo não roda, que será estudada no cap. 5.

④ Automóvel com rapidez $|\vec{v}|$ constante, numa curva de raio R.

vista lateral

vista superior

$a_x = a_z = 0, \quad a_y = a_n = \frac{v^2}{R}$

$\sum F_z = N_1+N_2+N_3+N_4 - mg = 0 \Rightarrow N_1+N_2+N_3+N_4 = mg$

$\sum F_y = F_{e1}+F_{e2}+F_{e3}+F_{e4} = \frac{mv^2}{R}$ $\qquad F_{ei} \leq \mu_e N_i$

$\sum F_x : 0 = 0$ $\qquad \Downarrow$

$F_{e1}+F_{e2}+F_{e3}+F_{e4} \leq \mu_e(N_1+N_2+N_3+N_4)$

$$\Rightarrow \frac{F_{e\,total}}{N_{total}} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} \leq \mu_e \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_e g R}$$

A velocidade máxima com que consegue fazer a curva é $\sqrt{\mu_e g R}$

FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS

Sobre um corpo com velocidade $\vec{v}$ dentro de um fluido (líquido ou gás), atua uma força de resistência, $\vec{F_r}$, na mesma direção de $\vec{v}$ mas no sentido oposto.

Há dois mecanismos importantes responsáveis por essa força:

① A diferença de pressões.

O objeto comprime o fluido à sua frente e expande o fluido que fica atrás. O princípio de Bernoulli implica uma força:

$$F_r = \text{constante} \times A \times v^2$$

onde A é a área da secção transversal do objeto e a constante depende da forma do objeto e da massa volúmica do fluido. No caso de uma esfera de raio R:

$$\boxed{F_{esfera} = \frac{\pi}{4} \rho R^2 v^2}$$

ρ = massa volúmica do fluido.

② A viscosidade do fluido: atrito entre as camadas mais próximas do objeto, que se deslocam com ele, e as camadas mais distantes, em repouso.

$$F_r = \text{constante} \times v$$

No caso de uma esfera de raio R:

$$\boxed{F_{esfera} = 6\pi \eta R v}$$

η = coeficiente de viscosidade do fluido

$$F_r = \begin{cases} \text{constante} \times v, & \text{se } v \text{ for baixa} \\ \text{constante} \times v^2, & \text{se } v \text{ for elevada} \end{cases}$$

Aula 9. 9 de março de 2017

FORÇAS NOS CORPOS RÍGIDOS

$mg = 30\,N$

as duas forças são iguais e opostas, mas o sistema não fica em equilíbrio

A cadeira roda e fica em equilíbrio quando as 2 forças estão na mesma linha vertical.

A força para cima pode ser aplicada em qualquer outro ponto (P ou Q) na mesma linha e o equilíbrio mantém-se

⇒ as forças são **VETORES DESLIZANTES**, que, para além de módulo, direção e sentido, têm também uma **linha de ação**

SOBREPOSIÇÃO DE FORÇAS

① **Forças co-lineares.** Com a mesma linha de ação, somam-se como vetores livres.

② **Forças concorrentes.** As linhas de ação cruzam-se num ponto comum.

Deslocam-se, cada uma na sua linha de ação, para o ponto comum e somam-se como forças concorrentes.

③ Forças paralelas.

ⓐ Adicionam-se duas forças auxiliares $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, co-lineares, nos pontos de ação de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Isso não altera nada porque a resultante das forças auxiliares é nula.

ⓑ Soma-se cada força $\vec{F}_i$ à força auxiliar no mesmo ponto. Os resultados, $\vec{F}_1'$ e $\vec{F}_2'$, são sempre duas forças concorrentes.

ⓒ Somam-se $\vec{F}_1'$ e $\vec{F}_2'$ no ponto comum. Observe-se que a resultante, $\vec{F}_r$, é também paralela a $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e igual à soma delas, como se fossem vetores livres; mas a linha de ação está entre as linhas de ação de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = (\vec{F}_1 + \vec{F}) + (\vec{F}_2 - \vec{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$b_1 \tan\theta_1 = b_2 \tan\theta_2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{F_1}{F}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{F_2}{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 F_1 = b_2 F_2}$$

Lei das alavancas: os momentos das duas forças, em relação ao ponto de aplicação da resultante, são iguais e opostos.

Momento de uma força, em relação a um ponto

b = distância desde O até à linha de ação de $\vec{F}$
= <u>braço</u> de $\vec{F}$

$\boxed{M_O = Fb}$ momento em relação a O. Neste caso, no sentido horário.

Mo indica a tendência a rodar, em torno do ponto O.

BINÁRIO. Duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, com o mesmo módulo, a mesma direção, sentidos opostos e linhas de ação separadas por uma distância d.

O procedimento explicado para somar forças paralelas falha, Mas observe-se que o momento que as duas forças exercem tem o mesmo valor total, em relação a qualquer ponto O:

$M_O = M_1 + M_2 = Fd_1 - Fd_2 = F(d_1 - d_2)$ (sentido horário)

$\boxed{M = Fd}$ não se escreve o índice O, porque não depende de O.

O binário e uma tendência a rodar, sem tendência a deslocar.

O momento de um binário, igual ao módulo de uma das forças vezes a distância entre elas, pode ser aplicado em qualquer parte do corpo, com qualquer direção, e o efeito é o mesmo:

Deslocar uma força para um ponto fora da sua linha de ação

Para deslocar $\vec{F}$, do ponto P até o ponto Q, numa linha à distância d de P, usa-se o seguinte procedimento:

(a) Acrescentam-se duas forças $\vec{F}_{aux}$ e $-\vec{F}_{aux}$ e um binário $M_{aux} = F_{aux} d$ de forma que o binário de $\vec{F}_{aux}$ e $-\vec{F}_{aux}$ seja igual e oposto a M_{aux} para que o total do que se acrescentou seja 0. Se $\vec{F}_{aux} = -\vec{F}$, então as duas forças em P anulam-se e no ponto Q ficam $\vec{F}$ $(-\vec{F}_{aux})$ e o binário $M = Fd$, que é igual ao momento que $\vec{F}$ produzia em P, em relação a Q.

Ou seja, pode deslocar-se $\vec{F}$ para Q, acrescentando o momento de $\vec{F}$, no ponto original, relativo a Q

Método geral para somar forças.

deslocam-se todas para um ponto comum P.

$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ (soma de vetores livres)

$M_r = M_1 - M_2 - M_3$ (soma dos momentos das forças em relação a P.)

Aula 10, 13 de março de 2017

VETOR MOMENTO

$\vec{r}$ = vetor posição do ponto P onde a força $\vec{F}$ é aplicada.

θ = ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$

b = braço de $\vec{F}$, em relação à origem $= |\vec{r}|\sin\theta$

$\Rightarrow$ Momento de $\vec{F}$ em relação a O $= M_O = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$

e $\vec{F}$ produz rotação no sentido da regra da mão direita de $\vec{r}$ para $\vec{F}$. Como tal, $M_O = |\vec{r}\times\vec{F}|$

$\vec{r}\times\vec{F}$ é perpendicular ao plano da rotação produzida por $\vec{F}$. Define-se então o vetor momento:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}}$$

perpendicular ao plano de rotação e a regra da mão direita indica o sentido da rotação.

Escolhendo o plano xy no plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$,

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

xF_y = momento da componente F_y. Se for positivo, no sentido anti-horário; se for negativo, no sentido horário

yF_x = momento da componente x negativo ↺ ou positivo ↻

$\Rightarrow M_O$ = soma algébrica dos momentos das componentes da força (**teorema de Pappus**).

Várias formas de calcular M_O.

$|M_O| = d|\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$ $\quad \vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$, $\quad M_O = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$

ou pelo teorema de Pappus.

Se a força $\vec{F}$ é deslocada para outra linha de ação, há que introduzir um binário $\vec{M}$ perpendicular ao plano em que se deslocou. Como tal, um sistema força resultante $\vec{F}_r$ mais binário resultante, perpendicular a $\vec{F}_r$, pode ser substituído apenas por uma única força $\vec{F}_r$, sem binário, num outro ponto, deslocando $\vec{F}_r$ no plano perpendicular a $\vec{M}_r$.

CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$M_P(\vec{F}_1) + M_P(\vec{F}_2) + M_P(\vec{F}_3) + M_P = 0$$

Quando a força e o binário resultante são nulos $\Rightarrow$ o corpo está em repouso ou com movimento retilíneo uniforme (ou rotação uniforme). Note-se que se F_r e M_r são nulos, em P, então M_r também será nulo em relação a qualquer outro ponto.

Exemplo. O automóvel na figura pesa 9000 N e o seu centro de gravidade está a 35 cm de altura, 40 cm atrás do eixo frontal e 120 cm à frente do eixo traseiro. Determine as reações normais e as forças de atrito nos pneus, quando: ⓐ está parado na estrada com declive de 5%; ⓑ está a descer a estrada com declive de 5%, com velocidade constante.

Resolução: (a) $O=(0,0)$, $C=(0.4, 0.35)$, $P=(1.6,0)$

$$\frac{|P_x|}{5} = \frac{|P_y|}{100} = \frac{9000}{\sqrt{10\,025}}$$

$$\Rightarrow P_x = -449.4\,N, \quad P_y = -8988.8\,N$$

Há 3 variáveis: N_1, N_2 e F_a (soma do atrito nos 4 pneus) e muitas equações: $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$, $\sum M_O=0$, $\sum M_C=0$, ...

$$\sum F_x: \; F_a - P_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_a = 449.4\,N}$$

$$\sum F_y: \; N_1 + N_2 - P_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = 8988.8\,N$$

$$\sum M_O: \; \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -449.4 & -8988.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.6 & 0 \\ F_a & N_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3438.2 + 1.6 N_2 = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = 2148.9\,N}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = 6839.9\,N}$$

(b) A resistência do ar faz diminuir F_a e N_1, e aumentar N_2

CENTRO DE MASSA

Define-se a posição do centro de massa: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$

Em objetos mais complexos, divide-se em muitos pedaços cada um com massa infinitesimal dm, na posição $\vec{r}$

$$m = \iiint_{volume} dm = \iiint_{volume} \rho \, dx\,dy\,dz \quad (\rho = \text{massa volúmica})$$

$$\boxed{r_{cm} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} \vec{r}\, dm}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} x \rho \, dx\,dy\,dz$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} y \rho \, dx\,dy\,dz \qquad z_{cm} = \ldots$$

Aula 11. 16 de março de 2017

Em objetos muito menores que a Terra, $\vec{g}$ pode considerar-se constante em todas partes do objeto e, como tal, o centro de massa é o mesmo centro de gravidade.

Velocidade e aceleração do centro de massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} \frac{d\vec{r}}{dt}\,dm \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} \vec{v}\,dm$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} \frac{d\vec{v}}{dt}\,dm \Rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\iiint_{vol.} \vec{a}\,dm$$

$\vec{a}\,dm$ = soma das forças que atuam no pedaço dm. Algumas são externas e outras internas.

$\Rightarrow \iiint_{vol.} \vec{a}\,dm$ = soma das forças externas sobre o corpo rígido (as internas anulam-se)

$\vec{F}_r = m\vec{a}_{cm}$	A força resultante sobre um corpo rígido é igual à massa do corpo vezes a aceleração do seu c.m.

MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO, SEM ROTAÇÃO

$\vec{a}_{cm} = \vec{a}_p = \vec{a}$ de qualquer ponto no corpo.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{m} M_{cm} = 0}$$

← unicamente em relação ao c.m. porque se $\vec{F}_r$ se desloca para outro ponto, o binário resultante muda.

O binário resultante, em relação ao centro de massa, é nulo, porque se não fosse, o corpo começava a rodar.

Exemplo:

a barra oscila, numa trajetória curva, mas não roda ($\omega_{barra} = 0$).

ROTAÇÃO COM EIXO FIXO

cada elemento de massa dm descreve movimento circular com raio R (distância até o eixo, medida no plano de rotação).

A aceleração tem componentes normal e tangencial:

$$a_t = R\alpha \ , \quad a_n = R\omega^2$$

⇒ a força externa total, dF, sobre a massa dm também tem componentes normal e tangencial:

$$dF_t = R\alpha\, dm \qquad dF_n = R\omega^2\, dm$$

F_n produz um momento que tende a alterar o eixo de rotação, mas como este está fixo, deve ser anulado pelos momentos em outras partes do corpo.

dF_t produz momento

$$dM = R\,dF_t = R^2\alpha\, dm$$

que faz rodar o corpo à volta do eixo. O momento total é:

$$M_{eixo} = \iiint_{volume} R^2\alpha\, dm = \alpha \iiint_{volume} R^2 dm = \alpha I_{eixo}$$

onde $\boxed{I_{eixo} = \iiint_{vol.} R^2 dm}$ <u>Momento de inércia</u> em relação ao eixo

Como $\iiint_{vol.} dM$ = momento resultante das forças externa
$= M_r$

$\Rightarrow$ O momento resultante, de todas as forças externas, em relação ao eixo, é igual ao momento de inércia, em relação ao eixo, vezes a aceleração angular

$$\boxed{M_{R,eixo} = I_{eixo}\,\alpha}$$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

O eixo 1 passa pelo centro de massa.

Os eixos 1 e 2 são paralelos; em relação ao eixo 1:

$$\sum M_1 = I_{CM}\alpha_1$$

$$I_{CM} = \iiint_{vol.} R_{CM}^2\, dm$$

eixo 2:

$$\sum M_2 = I_2\alpha_2$$

$$I_2 = \iiint_{vol.} R_2^2\, dm$$

$$R_2^2 = d^2 + R_{CM}^2 - 2R_{CM}\,d\cos\theta \quad \text{(lei dos cossenos)}$$

$$\Rightarrow I_2 = \underbrace{\iiint_{vol.} R_{CM}^2\, dm}_{I_{CM}} + d^2\underbrace{\iiint_{vol.} dm}_{\text{massa total}} + 2d\underbrace{\iiint_{vol.} \underbrace{R_{CM}\cos\theta}_{x_{CM}}\, dm}_{\text{posição x do CM. desde CM = 0}}$$

massa total $\times\, d^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = I_{CM} + m d^2}$$

d = distância entre os dois eixos

A tabela 5.1 mostra alguns momentos de inércia para alguns sólidos, nos eixos que passam pelo c.m. Por exemplo, para um cilindro de raio R, em torno do seu eixo:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$$

então para um eixo que passe pela superfície do cilindro,

$$d = R$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2} m R^2$$

Todos os momentos de inércia são sempre proporcionais à massa total. Define-se o **raio de giração**:

$$r_g = \sqrt{\frac{I_{eixo}}{m}} \quad \Rightarrow I_{eixo} = m r_g^2$$

Exemplo. Um pêndulo, é um corpo rígido que oscila livremente, rodando num eixo fixo horizontal

As forças no eixo produzem momento desprezável, em comparação com o momento do peso

$$\Rightarrow M_{r,eixo} = -mg\, r_{cm} \sin\theta$$

(negativo por ser oposto ao sentido + de θ)

$$M_{r,eixo} = m r_g^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad -mg\, r_{cm} \sin\theta = m r_g^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{g\, r_{cm}}{r_g^2} \sin\theta$$

r_g = raio de giração em torno do eixo

$$r_g^2 = r_{g,cm}^2 + r_{cm}^2$$

MOVIMENTO GERAL DOS CORPOS RÍGIDOS

Se o corpo é dividido em N pedaços com massas Δm_i e a origem é um ponto fixo no corpo,

$$|\vec{v}_{i/o}| = \left|\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right| = R_i\,\omega \quad \left(R_i = \text{distância ao eixo de rot.}\right)$$

define-se $\vec{\omega}$ na direção do eixo de rotação $\Rightarrow \vec{v}_{i/o} = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$

Em quanto o corpo roda à volta de O, o ponto O desloca-se com velocidade $\vec{v}_o \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega}\times\vec{r}_i$

Se houver n forças externas, o trabalho dessas forças é:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\vec{f}_i\cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\Delta m_i\,\vec{a}_i\cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\Delta m_i\,a_{t_i}\,ds_i$$

$$a_{t_i} = v_i\frac{dv_i}{ds_i} \Rightarrow \int_{C_i} a_{t_i}\,ds_i = \int_{C_i} v_i\,dv_i = \frac{1}{2}\left(v_{i_f}^2 - v_{i_o}^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i v_{i_f}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i v_{i_o}^2 = \text{aumento da energia cinética total}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\left(\vec{v}_o + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\cdot\left(\vec{v}_o + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(v_o^2 + R_i^2\omega^2 + 2\vec{v}_o\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\right)\Delta m_i$$

se a origem O estiver no centro de massa $\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\,\Delta m_i = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = \underbrace{\frac{1}{2}m v_{cm}^2}_{\text{translação}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{\text{rotação}}}$$

Aula 12. 20 de março de 2017

campo de forças

TRABALHO

Quando uma força é função da posição, $\vec{F}(\vec{r})$, define-se o trabalho da força, numa curva C:

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(integral de linha)}$$

Por exemplo, C pode ser uma curva no plano x, y com equação $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} = dx\,\hat{\imath} + \frac{df}{dx}dx\,\hat{\jmath} = \left(\hat{\imath} + \frac{df}{dx}\hat{\jmath}\right)dx$$

$$\vec{F} = F_x(x,y)\,\hat{\imath} + F_y(x,y)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y)\,dx + \frac{df}{dx}F_y(x,y)$$

$$W_C = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x, f(x))\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} F_y(x, f(x))\,dx$$

TEOREMA DO TRABALHO E A ENERGIA CINÉTICA

$\vec{F}_r = m\vec{a}_{cm}$ se $\vec{F}_r$ é função de $\vec{r}$, $\vec{a}_{cm}$ também.

seja C_{cm} = trajetória do C.M. desde $\vec{r}_1$ até $\vec{r}_2$

$$W_{C_{cm}} = \int_C \vec{F}_r \cdot d\vec{r}_{cm} = m\int_C \vec{a}_{cm} \cdot d\vec{r}_{cm}$$

ao longo da trajetória do c.m.,

$$d\vec{r}_{cm} = \vec{v}_{cm}\,dt = v_{cm}\hat{e}_t\,dt$$

$$\vec{a}_{cm} = \dot{v}_{cm}\hat{e}_t + \frac{v_{cm}^2}{R}\hat{e}_n \quad \Rightarrow \vec{a}_{cm} \cdot d\vec{r}_{cm} = v_{cm}\frac{dv_{cm}}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

$$W_{cm} = m\int_{v_{0,cm}}^{v_{f,cm}} v_{cm}\,dv_{cm} = \frac{1}{2}m v_{cm,0}^2 - \frac{1}{2}m v_{cm,f}^2$$

Define-se a **energia cinética de translação:**

$$E_{trans.} = \frac{1}{2}m v_{cm}^2$$

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação

TRANSLAÇÃO SEM ROTAÇÃO

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \cdots = \vec{v}_{cm}$$

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 = \cdots = d\vec{r}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_1\cdot dr_{cm}, \ldots, \vec{F}_n\cdot d\vec{r}_n = \vec{F}_n\cdot d\vec{r}_{cm}$$

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f}(\vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n)\cdot d\vec{r}_{cm} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f}\vec{F}_r\cdot d\vec{r}_{cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_0^2}$$

$E_c = \frac{1}{2}m v^2$ = energia cinética do corpo.

FORÇAS CONSERVATIVAS

Um campo de forças, $\vec{F}(\vec{r})$, é conservativo, se o trabalho que realiza entre quaisquer dois pontos P e Q não depende da curva entre P e Q:

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \cdots = \text{função de P e Q}$$

ENERGIA POTENCIAL

Se $\vec{F}(\vec{r})$ é uma força conservativa, define-se uma energia potencial, associada a essa força:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \text{função da posição } \vec{r}$$

($\vec{r}_0$ = ponto de referência, arbitrario)
$U(\vec{r}_0) = 0$

<u>Unidade SI de trabalho e energia</u>

$$1 \text{ joule} = 1\,J = 1\,N\cdot m = 1\,kg\cdot\frac{m^2}{s^2}$$

O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial, U_P, menos a energia potencial final, U_Q.

$$\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_P^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{Q} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(P) - U(Q)$$ (diminuição de U.)

ENERGIA POTENCIAL GRAVÍTICA

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\hat{k}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = -mg\int_{C_1} \hat{k}\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k})$$
$$= -mg\, z\Big|_P^Q = mg(z_P - z_Q)$$

$$\int_{C_2} \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = \dots = mg(z_P - z_Q)$$

$\Rightarrow$ O peso é força conservativa. Como o trabalho entre P e Q é a diminuição de mgz,

$\Rightarrow$ $\boxed{U_g = mgz}$ a energia potencial gravítica é igual ao peso vezes a altura

ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

Uma mola elástica de comprimento r_0, com um extremo fixo na origem, O, produz no outro extremo livre uma força elástica, $\vec{F}_e$, na direção radial e no sentido da origem, se $r > r_0$, ou no sentido oposto se $r < r_0$:

$$\vec{F}_e = F_e(r)\,\hat{e}_r \quad , \quad F_e(r) = -k(r - r_0)$$

onde k é uma <u>constante elástica</u>, própria de cada mola.

$$C: \ \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = F_e(r)\,\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = F_e(r)\,dr$$

$$\Rightarrow W_C = -k\int_{r_P}^{r_Q}(r - r_0)\,dr = -k\int_{s_P}^{s_Q} s\,ds$$

onde: $s = r - r_0$ = alongamento da mola

$$W_C = \frac{1}{2}k s_P^2 - \frac{1}{2}k s_Q^2 \Rightarrow$$ força conservativa com energia elástica:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k s^2} \qquad U_e = 0, \text{ se } r = r_0$$

Aula 13. 23 de março de 2017

ENERGIA MECÂNICA

Num corpo com translação, sem rotação:

Energia cinética $= E_c = \frac{1}{2} m v^2$

W_i = trabalho da força externa $i = \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_C F_{t_i} ds$

teorema do trabalho e a energia cinética:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = E_{c_f} - E_{c_0}$$

se $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m$ são forças não conservativas e as restantes $n-m$ forças, $\vec{F}_{m+1}, \ldots, \vec{F}_n$, são conservativas

$$W_{m+1} + W_{m+2} + \cdots + W_n = (U_{1_0} - U_{1_f}) + (U_{2_0} - U_{2_f}) + \cdots + (U_{n-m_0} - U_{n-m_f})$$

$$= U_0 - U_f \quad \left(\begin{array}{l} U = U_1 + \cdots + U_{n-m} \\ = \text{energia potencial total} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} W_i + U_0 - U_f = E_{c_f} - E_{c_0}$$

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = (E_{c_f} + U_f) - (E_{c_0} + U_0)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} W_i = E_{m_f} - E_{m_0}} \qquad \begin{array}{l} E_m = E_c + U \\ = \text{energia mecânica} \end{array}$$

Teorema do trabalho e a energia mecânica.

O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.

SISTEMAS CONSERVATIVOS

São os sistemas em que E_m permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

Note-se que a força normal, F_n, não interessa, porque não realiza trabalho, e se a força tangencial, F_t, depende apenas da posição na trajetória, o sistema é conservativo:

$$F_t = f(s) \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(energia potencial total)}}}{U(s)} = -\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds \qquad F_t = -\frac{dU}{ds}$$

Análise gráfica. No gráfico de $U(s)$, representa-se a energia mecânica E_m, que é uma reta horizontal.

Nos pontos s_1, s_3 e s_5, onde $E_m = U$, a energia cinética $\boxed{E_c = E_m - U}$ é nula e, portanto, $v = 0$.

Os máximos, s_2, e mínimos, s_4, são **pontos de equilíbrio.** Se E_m fosse igual a E_2 ou E_4, o sistema podia estar em s_2, ou s_4, em repouso ($v = 0$). Com a energia E_m mostrada no gráfico, o sistema nunca poderia estar em $s_1 < s < s_3$ porque E_c não pode ser negativa. Existem duas possibilidades ⓐ o objeto, com $v > 0$, aproxima-se de s_1, pará em s_1, e logo afasta-se até $-\infty$ ($v < 0$). ⓑ O objeto oscila entre s_3 e s_5. O objeto nunca pode passar $s > s_5$.

OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES

mola vertical com constante elástica k

pendura-se um objeto de massa m, que começa a oscilar: $z_{mín} \leq z(t) \leq z_{máx}$

Durante umas poucas oscilações pode, admitir-se que E_m permanece constante (sistema conservativo).

$$U(z) = \frac{1}{2}k(z-z_0)^2 + mgz$$

pontos de equilíbrio: $\frac{dU}{dz} = k(z-z_0) + mg = 0$

$\Rightarrow$ um único ponto de equilíbrio: $\boxed{z_e = z_0 - \frac{mg}{k}}$

se definirmos $s = z - z_e$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}k\left(s - \frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(s + z_0 - \frac{mg}{k}\right) = \frac{1}{2}ks^2 + \text{constante}$$

a constante pode ignorar-se.

$U(s) = \frac{1}{2}ks^2$, $E_m = \frac{mv^2 + ks^2}{2}$

E_m tem de ser positiva (oscilações) ou zero (repouso no ponto de equilíbrio)

Amplitude de oscilação:

$A = s_{máx} = |s_{mín}|$

$E_m = U(s_{máx}) \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$ $\quad v_{máx} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$

Aula 14. 27 de março de 2017

ESPAÇO DE FASE

Retomando o exemplo do oscilador harmônico simples, o gráfico da energia pode ser complementado com um gráfico que mostra também a velocidade. Neste caso convém usar $\sqrt{\frac{m}{k}}\,v$ no eixo das abcissas, já que: $E_m = \frac{ks^2+mv^2}{2}$

$$\Rightarrow s^2+\left(\sqrt{\frac{m}{k}}v\right)^2=\frac{2E_m}{k}=A^2$$

Que é o gráfico de uma circunferência de raio A. O plano $(s,\sqrt{\frac{m}{k}}v)$ é o **espaço de fase**. Cada ponto do espaço de fase, com vetor posição $\vec{r}_f$, corresponde a um possível **estado** do sistema.

Dado um estado inicial, $\vec{r}_{f0}$, o movimento do oscilador será uma circunferência de raio $A=\sqrt{\frac{2E_{m0}}{k}}$, onde $E_{m0}=\frac{ks_0^2+mv_0^2}{2}$. Assim sendo, basta estudar a variação do ângulo $\phi(t)$ em ordem ao tempo, para descrever o movimento.

Para analisar a variação de $\vec{r}_f$ (neste caso $\phi(t)$) vemos que:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{r}_f}{dt}=\dot{s}\,\hat{e}_s+\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{v}\,\vec{e}_v = \textbf{velocidade de fase}$$

$$\dot{s} = v \ , \quad \dot{v} = a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{1}{m}\left(-\frac{dU}{ds}\right) = -\frac{k}{m}s$$

$$\Rightarrow \vec{u} = v\hat{e}_s - \sqrt{\frac{k}{m}}\, s\, \hat{e}_v$$

$$|\vec{u}|^2 = v^2 + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{(constante)}} s^2 = \frac{2E_m}{m} = v_{máx}^2$$

Ou seja, o estado descreve movimento circular uniforme no espaço de fase, no sentido dos ponteiros do relógio, com velocidade angular:

$$\omega = -\frac{|\vec{u}|}{A} = \frac{\sqrt{\frac{2E_m}{m}}}{\sqrt{\frac{2E_m}{k}}} \Rightarrow \boxed{\omega = -\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\text{frequência} = f = \frac{|\omega|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{período} = T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{Fase} = \phi(t) = \omega t = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \quad \left(\text{arbitrando } \phi = 0 \text{ em } t = 0\right)$$

O movimento harmónico simples é a projeção, no eixo dos s, do movimento circular uniforme no espaço de fase:

$$s(t) = A\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A \sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\, \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) = \dot{s}$$

Esta análise, no espaço de fase, pode ser usada no caso de outros sistemas:

SISTEMAS AUTÓNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação) em que
(para usar um grau de liberdade, mas logo será generalizado)
a força resultante na depende explicitamente do tempo:

$$F_t = f(s, v)$$

como s e v são funções do tempo, F_t dependerá implicitamente de t.

$$\Rightarrow \quad a_t = \frac{F_t}{m} = a_t(s, v)$$

As equações de movimento são:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = a_t(s, v) \end{cases}$$

e definem a velocidade de fase: $\vec{u} = v\hat{e}_s + a_t\vec{e}_v$ no espaço de fase (s, v).

Dada a expressão $a_t(s, v)$ é possível construir o **campo de direções**, que mostra $\vec{u}$ em vários pontos

Por cada estado inicial possível, (s_0, v_0) existe uma única **curva de evolução** que segue a direção do campo de direções.

Os únicos pontos por onde não passa nenhuma curva de evolução são os **pontos de equilíbrio**, onde a velocidade de fase é nula. Se o estado inicial for um ponto de equilíbrio, o sistema não evolui: permanece sempre nesse mesmo estado.

Exemplo. Analise o sistema com

$$a_t = s^2 - s - v - 3.75$$

Resolução: definem-se as equações de evolução:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = s^2 - s - v - 3.75 \end{cases}$$

espaço de fase $\rightarrow (s, v)$

velocidade de fase:

$\vec{u} = (v, s^2 - s - v - 3.75)$

No Maxima, o campo de direções constroi-se com o comando plotdf, que precisa as componentes de u e as componentes do estado, (s, v). Mas antes convêm encontrar os pontos de equilíbrio para saber qual a região importante no espaço de fase.

```
u: [v, s^2-s-v-3.75]$
solve(u);
```

$\rightarrow$ dois pontos de equilíbrio, $(s_1, v_1) = (2.5, 0)$ $(s_2, v_2) = (-1.5, 0)$

```
plotdf(u,[s,v],[s,-4,4],[v,-5,5]);
```

Clicando no gráfico, obtêm-se as curvas de evolução

O ponto $(-1.5, 0)$ é ponto de equilíbrio <u>estável</u> e $(+2.5, 0)$ é ponto de equilíbrio <u>instável</u>.

No sistema conservativo obtido ignorando o termo dissipativo $-v \Rightarrow a_t = s^2 + s - 3.75$, o ponto de equilíbrio estável é mínimo de $U(s)$ e o ponto de equilíbrio instável é máximo de $U(s)$.

Aula 15, 30 de março de 2017

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Os sistemas dinâmicos também são utilizados na resolução de equações diferenciais. Por exemplo, a equação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y = 3y$$

pode ser escrita como sistema dinâmico autônomo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = u \\ \dfrac{du}{dx} = 3y - yu^2 - \cos y \end{cases}$$

variáveis de estado: (y, u)
variável independente: x (em vez de t)

SISTEMAS DINÂMICOS GERAIS.

Variáveis de estado: $x_1(t)$ e $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ com n equações de evolução, que definem a variação de cada variável, em função do estado $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
No caso autônomo de segunda ordem, há duas equações de evolução:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

estado = ponto no espaço de fase $= x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2$

Velocidade de fase $= \vec{u} = \dot{x}_1\hat{e}_1 + \dot{x}_2\hat{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2$$

Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$

Cada possível solução do sistema é uma curva de evolução no espaço de fase, ou um

ponto de equilíbrio. O **retrato de fase** do sistema é um gráfico, no espaço de fase, que mostra os pontos de equilíbrio e os tipos de curvas de evolução. importantes:

① **Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio.** Exemplos:

ponto de equilíbrio estável — ponto de equil. instável — ponto de equil. instável

② **Ciclos:** curvas fechadas.

Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

③ **Órbitas homoclínicas:** curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.

Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.

④ **Órbitas heteroclínicas:** sequência de n curvas que ligam n pontos de equilíbrio (instável) C_1 começa no primeiro ponto e termina no ponto P_2, C_2 vai de P_2 a $P_3, \ldots,$ C_n vai de P_n até P_1.

Cada curva C_i é uma solução diferente.

SISTEMAS DINÂMICOS CONSERVATIVOS

Existe uma **função hamiltoniana**, $H(x_1, x_2)$, que define todas as curvas de evolução como curvas de nível:

$$H(x_1, x_2) = C$$

C é uma constante real. Cada possível valor de C é uma curva de evolução

Numa curva de evolução, derivando a equação anterior obtém-se:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 0$$

como $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ são as componentes da velocidade de fase:

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} f_2 = 0$$

ou seja, o gradiente da função hamiltoniana, $\frac{\partial H}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\hat{e}_2$ é perpendicular à velocidade de fase $\vec{u} = f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2$

uma possibilidade é:

$$\boxed{f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}}$$ equações de Hamilton

mas nem sempre é possível escrever as curvas de evolução como $H(x_1, x_2) = C$. A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$ divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = 6xy + 4y - 3x^2 - 3y^2 \\ \dot{y} = 6xy - 4x - 3x^2 - 3y^2 \end{cases}$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = (6y - 6x) + (6x - 6y) = 0 \Rightarrow \text{conservativo}$$

$$H = \int f_x \, dy + g(x) = 3xy^2 + 2y^2 - 3x^2y - y^3 + g(x)$$

$$H = -\int f_y \, dx + k(y) = -3x^2y + 2x^2 + x^3 + 3xy^2 + k(y)$$

$$\Rightarrow H = x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 3xy^2 - 3x^2y$$

pontos de equilíbrio: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Retrato de fase

plotdf([fx, fy], [x, y], [x, -1, 1], [y, -1, 1]

$(0,0)$ é estável e é um mínimo local de $H(x,y)$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é instável; máximo local de $H(x,y)$

Ha uma órbita homoclínica e todas as curvas no seu interior são ciclos.

Aula 16. 3 de março de 2017

Mecânica Newtoniana. A força resultante e o momento resultante permitem determinar a expressão da aceleração, em função das variáveis de estado:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_{cm} \quad , \quad M_R = I_{cm}\alpha$$ (válidas apenas em sistemas inerciais)

MECÂNICA LAGRANGIANA

As expressões da aceleração podem ser obtidas a partir da energia. Vantagens:

- válida em sistemas não inerciais
- não é necessário considerar forças de ligação: reação normal, atrito estático, que não modificam a energia.
- método geral, independente do sistema de coordenadas usado.

Coordenadas generalizadas. Se o sistema tem n graus de liberdade, são n variáveis:

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$ podem ser distâncias ou ângulos

Velocidades generalizadas. Cada derivada de cada coordenada generalizada, em ordem ao tempo, é uma velocidade generalizada:

$$\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_n\}$$

O **espaço de fase** do sistema é o espaço de dimensão 2n, formado pelas coordenadas e velocidades generalizadas: $\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\}$

se o sistema não é autónomo, o tempo t também faz parte.

A energia cinética do sistema é uma função do estado do sistema e, como tal, depende apenas das coordenadas e velocidades generalizadas (e pode ainda depender do tempo):

$$E_c(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Forças generalizadas. Por cada força externa $\vec{F}_i$, aplicada na posição $\vec{r}_i$, definem-se n forças generalizadas: $Q_j = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ $(j=1,2,\ldots,n)$

As forças generalizadas resultantes são:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

As forças que não realizam trabalho, não entram na soma porque $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

No apêndice A mostra-se como obter estas equações a partir das leis de Newton. O resultado são as seguintes n equações:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j} \quad j=1,2,\ldots,n$$

Há que ter atenção à diferença entre derivadas parciais e totais; por exemplo:

$$\frac{\partial(3\dot{q}_1^2)}{\partial q_1} = 0, \text{ mas } \frac{d(3\dot{q}_1^2)}{dq_1} = 6\dot{q}_1 \frac{d\dot{q}_1}{dq_1} \qquad \frac{d(3\dot{q}_1^2)}{dt} = 6\dot{q}_1 \ddot{q}_1$$

Forças conservativas. Se $\vec{F}_i$ é conservativa,

$$\Rightarrow \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} = \frac{(\vec{F}_2 \cdot \partial \vec{r}_2)}{\partial q_j} = -\frac{\partial U_2}{\partial q_j}$$

Como tal, no cálculo de Q_j, a soma de todos os termos correspondentes a forças conservativas é $-\frac{\partial U}{\partial q_j}$ (U = energia potencial total) e as equações de Lagrange são:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^{\text{não-cons.}}} \quad j=1,\dots,n$$

Exemplo 8.1.

todas as rodas são completamente livres e com massa desprezável

Se ignorarmos a resistência do ar e o atrito nos eixos das rodas, não há forças não-conservativas e a energia potencial é apenas gravítica

Este sistema tem dois graus de liberdade:

ds = deslocamento do plano inclinado

dz = deslocamento do carrinho sobre o plano.

4 variáveis de estado: $\{s, z, \dot{s}, \dot{z}\}$

Energia cinética do sistema:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{plano}^2 + \frac{1}{2} m v_{carrinho}^2$$

$v_{plano} = \dot{s}$

$v_{carrinho} = \dot{z} + \dot{s}$

do carrinho relativa ao plano

$\vec{v}_{plano} = \dot{s}\,\hat{\imath}$ $\quad \vec{v}_{carr.} = \dot{s}\,\hat{\imath} + \dot{z}\cos\theta\,\hat{\imath} + \dot{z}\sin\theta\,\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow v_{carr.}^2 = \dot{s}^2 + \dot{z}^2\cos^2\theta + \dot{z}^2\sin^2\theta + 2\dot{s}\dot{z}\cos\theta$$
$$= \dot{s}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{s}\dot{z}\cos\theta$$

$$E_c(\dot{s},\dot{z}) = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2+\dot{z}^2+2\dot{s}\dot{z}\cos\theta\right)$$

Energia potencial do sistema:

$$U = mgz\sin\theta + \text{constante}$$ (U_g do plano inclinado permanece constante)

Como o sistema tem 2 graus de liberdade, há duas equações de Lagrange:

① equação associada a s.

$$\frac{\partial E_c}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = M\dot{s}+m(\dot{s}+\dot{z}\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}}\right) = M\ddot{s}+m(\ddot{s}+\ddot{z}\cos\theta)=0$$

② equação associada a z.

$$\frac{\partial E_c}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=mg\sin\theta,\quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z}+\dot{s}\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z} = m(\ddot{z}+\ddot{s}\cos\theta)+mg\sin\theta=0$$

As duas equações resolvem-se para obter as expressões das duas acelerações $\ddot{s}$ e $\ddot{z}$

$$\ddot{s} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$ (aceleração constante e positiva → para a direita)

$$\ddot{z} = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$$ (aceleração constante e negativa → para baixo do plano inclinado)

Aula 17. 6 de março de 2017

Exemplo 8.4. pêndulo simples, de massa m e comprimento L, num carrinho com aceleração constante $\vec{a}$, horizontal.

Resolução: a velocidade do carrinho é $\vec{v}_c = at\hat{\imath}$

A velocidade do pêndulo, relativa ao carrinho, é a velocidade do seu movimento circular: $v_{P/c} = L\dot{\theta}$

Um grau de liberdade
$\downarrow$
$\theta(t)$

vetorialmente: $\vec{v}_{P/c} = -L\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} + L\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath}$

A velocidade do pêndulo é

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{P/c} = (at - L\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath} + L\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

Considera-se unicamente o pêndulo, porque o movimento do carrinho já é conhecido:

$$E_c = \frac{1}{2}m v_p^2 = \frac{m}{2}\left(a^2t^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2atL\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$U_g = -mgL\cos\theta$$

Desprezando a resistência do ar, o sistema é conservativo e a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial\theta} + \frac{\partial U_g}{\partial\theta} = 0$$

Esta equação pode ser obtida no Maxima. Começa-se por definir as derivadas de θ e $\dot{\theta}$, com o

comando gradef.

```
gradef(q,t,qp);        (q é θ e qp é θ̇)
gradef(qp,t,qpp);
```

assim, quando se calculem derivadas de θ ou $\dot{\theta}$ em ordem ao tempo, serão derivadas totais calculadas com a regra da cadeia. Se não se usar gradef, quando se deriva θ ou $\dot{\theta}$ em ordem a t dá 0 (derivada parcial).

```
Ec: m*(a^2*t^2 + L^2*qp^2 - 2*a*t*L*qp*cos(q))
                                            /2;
U: -m*g*L*cos(q);
eq: diff(diff(Ec,qp),t) - diff(Ec,q) + diff(U,q) = 0;
```

Dá a equação de Lagrange.

```
solve(eq,qpp);
```

que é a equação de movimento do pêndulo:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{a}{L}\cos\theta}$$

Os pontos de equilíbrio, onde $\ddot{\theta}$ é nula, são

$$-\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{a}{L}\cos\theta = 0 \Rightarrow g\sin\theta = a\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{a}{g}$$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$. Há dois pontos, θ_1 entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e θ_2 entre π e $3\pi/2$

$\theta_1 \rightarrow$ estável

$\theta_2 \rightarrow$ instável

$\theta_2 = \theta_1 + \pi$

Forças de ligação. Para encontrar as forças de ligação, a restrição associada a essa força escreve-se na forma: $f(q_1, \dots, q_n) = 0$ e acrescenta-se um termo $-\lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}$ nas equações de Lagrange

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

λ = multiplicador de Lagrange, = força de ligação

Exemplo 8.6.

μ_c = coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado.

a massa das rodas, o atrito nos seus eixos e a resistência do ar são desprezáveis.

Resolução: A força generalizada Q_j será devida à força de atrito cinético, que depende da reação normal N sobre o bloco, que é uma força de ligação.

Essa força de ligação, entre o bloco e o plano inclinado, é a que permitiu, no exemplo 8.1, usar apenas uma variável para o movimento do bloco sobre o plano. Para ignorar essa restrição, admite-se então que o bloco pode deslocar-se perpendicularmente ao plano e há três graus de liberdade, x, s e q:

x = posição, na horizontal, do plano inclinado.

(s, q) = posição do bloco, relativa ao plano.

posição do bloco, relativa ao plano $= \vec{r}_{b/p} = s\hat{e}_s + q\hat{e}_q$

velocidade do bloco, relativa ao plano inclinado:

$$\vec{v}_{b/p} = \frac{d\vec{r}_{b/p}}{dt} = \dot{s}\hat{e}_s + \dot{q}\hat{e}_q$$

Note-se que: $\hat{e}_s = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$ $\quad \hat{e}_q = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$

velocidade do plano inclinado: $\vec{v}_p = \dot{x}\,\hat{\imath}$

veloc. do bloco: $\vec{v}_b = \vec{v}_p + \vec{v}_{b/p} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{s}\hat{e}_s + \dot{q}\hat{e}_q$

$$= (\dot{x} + \dot{s}\cos\theta - \dot{q}\sin\theta)\hat{\imath} + (\dot{s}\sin\theta + \dot{q}\cos\theta)\hat{\jmath}$$

<u>Energia cinética</u>. $\quad E_c = \frac{M}{2}v_p^2 + \frac{m}{2}v_b^2$

$$\Rightarrow E_c = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + \dot{q}^2 + 2\dot{x}(\dot{s}\cos\theta - \dot{q}\sin\theta)\right)$$

<u>Energia potencial gravítica</u>.

$$U_g = mg\,\vec{r}_{b/p}\cdot\hat{\jmath} = mg\left(s\hat{e}_s\cdot\hat{\jmath} + q\hat{e}_q\cdot\hat{\jmath}\right)$$

$$= mg(s\sin\theta + q\cos\theta)$$

<u>Equação de ligação</u>: $q - c = 0$ $\quad$ (c = constante)

$$\Rightarrow f(x, s, q, \dot{x}, \dot{s}, \dot{q}) = q - c$$

$\lambda = N$ = reação normal

<u>Forças generalizadas</u>.

$\vec{F}_c = \mu_c N\hat{e}_s$ (atrito cinético)

aplicada no ponto $\vec{r}_{b/p} = s\hat{e}_s + q\hat{e}_q$

$$\Rightarrow Q_x = \vec{F}_c\cdot\frac{\partial\vec{r}_{b/p}}{\partial x} = 0 \qquad Q_q = \vec{F}_c\cdot\frac{\partial\vec{r}_{b/p}}{\partial q} = 0 \qquad Q_s = \vec{F}_c\cdot\frac{\partial\vec{r}_{b/p}}{\partial s} = \mu_c N$$

Equação de Lagrange para s:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}}\right) - \underbrace{\frac{\partial E_c}{\partial s}}_{0} + \frac{\partial U}{\partial s} - N\underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}}_{0} = Q_s$$

$$\Rightarrow m(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta) = N\mu_c$$

Equação para q:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) - \overset{0}{\frac{\partial E_c}{\partial q}} + \frac{\partial U}{\partial q} - N\overset{1}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \overset{0}{Q_q}$$

$$\Rightarrow m(\ddot{q} - \ddot{x}\sin\theta + g\cos\theta) - N = 0$$

Equação para x:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \overset{0}{\frac{\partial E_c}{\partial x}} + \frac{\partial U}{\partial x} - N\overset{0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \overset{0}{Q_x}$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + m(\ddot{s}\cos\theta - \ddot{q}\sin\theta) = 0$$

Estas três equações, junto com a equação de ligação, $q - c = 0$, permitem encontrar expressões para $\ddot{x}, \ddot{s}, \ddot{q}$ e N:

$$q - c = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0, \ \ddot{q} = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\beta\cos\theta}{M + m\beta\sin\theta}$$

$$\ddot{s} = -\frac{(M+m)g\beta}{M + m\beta\sin\theta}$$

$$N = \frac{mM\cos\theta}{M + m\beta\sin\theta}$$

Onde $\beta = \sin\theta - \mu_c\cos\theta$

Aula 18. 20 de março de 2017

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

No caso de 2ª ordem:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ são 4 constantes.

forma matrizial:

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{A}\mathbb{X} \quad , \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

consideraremos unicamente matrizes $\mathbb{A}$ de rango 2 e não diagonais ($\mathbb{A}$ diagonal ou de rango 1 conduzem a sistemas de 1ª ordem).

forma vetorial:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{A}\vec{r}$$

$\vec{r} = x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath}$

$\mathbf{A}$ = operador linear em $\mathbb{R}^2$

Pontos de equilíbrio

soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como o rango de $\mathbb{A}$ é 2, existe apenas uma solução, $x_1 = x_2 = 0$

$$\boxed{\text{Os sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio na origem.}}$$

Um sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + C_1 \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + C_2 \end{cases}$

tem um único ponto de equilíbrio, $P = (e_1, e_2)$, e transforma-se em sistema linear com a mudança de variáveis: $\begin{cases} y_1 = x_1 - e_1 \\ y_2 = x_2 - e_2 \end{cases}$ que desloca P para a origem

Velocidade de fase

$$\vec{u} = \mathbf{A}\vec{r}$$

Vetores próprios. São os vetores $\vec{v}$ com a propriedade: $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$

(λ = constante, chamada **valor próprio**)

Como tal, se o estado inicial do sistema, $\vec{r}_0$, for um vetor próprio de $\mathbf{A}$, com valor próprio λ, a velocidade de fase nesse instante será na mesma direção de $\vec{r}_0$. Há dois casos:

Como rango(A)=2, os valores próprios são diferentes de zero. Se λ é positivo, o sistema evolui em linha reta, afastando-se do ponto de equilíbrio.
Se λ é negativo, o sistema evolui em linha reta, aproximando-se do ponto de equilíbrio.

Os valores/vetores próprios são a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para que este sistema tenha soluções não triviais:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (A_{11}+A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

Como: $\det(\mathbb{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

$\text{traço}(\mathbb{A}) = A_{11} + A_{22}$

então os valores próprios são as duas raízes da equação quadrática:

$$\boxed{\lambda^2 - \text{traço}(\mathbb{A})\,\lambda + \det(\mathbb{A}) = 0}$$

Exemplo. Determine os valores e vetores próprios do sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ e diga que tipo de ponto de equilíbrio é a origem.

<u>Resolução:</u> $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{traço}(\mathbb{A}) = 5 \\ \det(\mathbb{A}) = 4 - 6 = -2 \end{array}$

valores próprios

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1\lambda_2 = -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2} + \Delta, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2} - \Delta, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{25}{4} - \Delta^2 = -2$$

$$\Delta^2 = \frac{25}{4} + 2 = \frac{33}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\sqrt{33}}{2} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \end{array}}$$

vetores próprios de $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(1 - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\sqrt{33}+3}{4}\, x_1}$$

vetores próprios de $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(1 - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{4}\, x_1}$$

Como $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ é positivo, a reta $x_2 = \left(\frac{\sqrt{33}+3}{4}\right)x_1$ são duas curvas de evolução que se afastam da origem.

$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} < 0 \Rightarrow$ a reta $x_2 = \left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)x_1$ são duas curvas de evolução que se aproximam da origem

Como tal, a origem é um <u>ponto de sela</u>:

DOIS VALORES PRÓPRIOS REAIS

Valores próprios	Tipo de ponto	Retrato de fase
λ_1 e λ_2 reais, com sinais opostos	ponto de sela (instável)	
λ_1 e λ_2 reais, ambos positivos	nó repulsivo (instável)	
λ_1 e λ_2 reais, ambos negativos	nó atrativo (estável)	

Aula 19. 24 de março de 2017

Valores próprios e soluções do sistema

$$\lambda^2 - tr(\mathbb{A})\,\lambda + det(\mathbb{A}) = 0$$

existem soluções λ_1 e λ_2: $\quad (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$

comparando as duas equações,

$$\Rightarrow \quad \lambda_1+\lambda_2 = tr(\mathbb{A}) \qquad \lambda_1\lambda_2 = det(\mathbb{A})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(\mathbb{A})}{2} \pm \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 = \frac{tr(\mathbb{A})^2}{4} - det(\mathbb{A})$$

Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são vetores próprios associados aos valores próprios λ_1 e λ_2, então $\vec{r}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\vec{r}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ são soluções do sistema dinâmico, ou seja, verificam as equações de evolução: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbb{A}\vec{r}$

Quando λ_1 e λ_2 são números reais, diferentes, essas duas soluções são linearmente independentes, e a solução geral do sistema é:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{C}_2 e^{\lambda_2 t}$$

no caso em que λ_1 e λ_2 são números complexos, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são ainda soluções, mas são funções complexas, que não podem representar o estado $\vec{r}(t)$ no espaço (real) de fase.

Valores próprios complexos

Se a equação quadrática dos valores próprios tem uma raíz complexa, a segunda raíz será, necessariamente, o seu complexo conjugado:

$$\lambda_1 = \alpha + i\Omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\Omega = \lambda_1^* \quad \left(\begin{array}{l}\alpha \text{ real e } \Omega \text{ real,} \\ \text{que admitimos } > 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ se $\vec{v}$ é vetor próprio associado a λ_1, $\vec{v}^*$ é vetor próprio associado a λ_2.

As duas funções vetoriais complexas:

$$\vec{z}_1 = \vec{v}\, e^{\lambda_1 t} \quad e \quad \vec{z}_2 = \vec{v}^* e^{\lambda_2 t} = \vec{z}_1^*$$

são soluções do sistema. Como o sistema é linear, a soma de duas soluções também é solução; como tal,

$$\vec{r}(t) = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \vec{z}_1 + \vec{z}_1^* = \text{Real}(\vec{z}_1)$$

é a solução real do sistema dinâmico:

$$\vec{r}(t) = \text{Real}(\vec{v})\, \text{Real}\left(e^{(\alpha + i\Omega)t}\right) = \vec{r}_0\, e^{\alpha t}\, \text{Real}\left(e^{i\Omega t}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0\, e^{\alpha t} \cos(\Omega t)}$$

Cada uma das componentes de $\vec{r}$ pode ter uma das 3 formas seguintes:

VALORES PRÓPRIOS COMPLEXOS

Parte real de λ	Retrato de fase	Tipo de ponto
$\alpha=0$		CENTRO (estável)
$\alpha<0$		FOCO ATRATIVO (estável)
$\alpha>0$		FOCO REPULSIVO (instável

nos 3 casos, a parte imaginária de λ é a frequência angular de oscilação

$$\Omega = 2\pi f \quad \left(f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}}\right)$$

Quando $\Delta^2 = \frac{tr(\mathbb{A})^2}{4} - det(\mathbb{A}) = 0$, existe um única valor próprio, $\lambda_1 = \lambda_2$, real, e o ponto de equilíbrio chama-se **nó impróprio**, que pode ser atrativo ou repulsivo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{tr(\mathbb{A})}{4}$, segundo o sinal de $tr(\mathbb{A})$

$tr(\mathbb{A})<0$

nó impróprio atrativo (estável)

$tr(\mathbb{A})>0$

nó impróprio repulsivo (instável)

Exemplo. $\dot{x} = -3x + 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$

é um sistema dinâmico linear com matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

usando o Maxima:

```
A: matrix ([-3, 5], [-2, -5]))$
eigenvectors (A);
```

$$\hookrightarrow [[\underbrace{[-3*\%i-4]}_{\lambda_1}, \underbrace{3*\%i-4]}_{\lambda_2}, \underset{\substack{\uparrow\uparrow \\ \text{multiplicidade} \\ \text{de cada } \lambda}}{[1,1]}] [[\underbrace{[1, \tfrac{-3*\%i-1}{5}]}_{\vec{v}_1}], \underbrace{[1, \tfrac{3*\%i-1}{5}]}_{\vec{v}_2}]]$$

Como $\lambda_{1,2} = -4 \pm i3$, a origem é foco atrativo. Todas as curvas de evolução são oscilações com frequencia angular igual a 3 e amplitude decrescente.

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

$$\dot{x} = f(x, y) \qquad \text{f e g são funções contínuas.}$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

em que f e/ou g são funções não lineares.
Nos pontos de equilíbrio, $P = (x_P, y_P)$, a velocidade de fase é nula:

$$f(x_P, y_P) = 0 \qquad g(x_P, y_P) = 0$$

Na vizinhança de P, as duas funções podem ser representadas pelas séries:

$$f(x,y) = f(x_P, y_P) + (x - x_P)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + (y - y_P)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P + \frac{(x-x_P)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P + \cdots$$

$$g(x,y) = g(x_P, y_P) + (x - x_P)\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P + (y - y_P)\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P + \frac{(x-x_P)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_P + \cdots$$

O primeiro termo em cada série é nulo, e os termos que dependem de $(x-x_P)^2$, $(y-y_P)^2$, $(x-x_P)(y-y_P)$, $(x-x_P)^3$, ... são muito menores que os termos que dependem de $(x-x_P)$ e $(y-y_P)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) \approx (x-x_P)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + (y-y_P)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \\ g(x,y) \approx (x-x_P)\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P + (y-y_P)\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P \end{cases}$$

Matriz Jacobiana

$$J_{f,g}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

a seguinte mudança de variáveis, $(x,y) \to (x_1, x_2)$ com $x_1 = x - x_P$, $x_2 = y - y_P$, desloca a origem para o ponto de equilíbrio P e as equações de evolução ficam:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P x_2 \\ \dot{x}_2 \approx \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P x_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P x_2 \end{cases}$$

Que é um sistema linear com matriz igual à jacobiana de f e g, calculada em $P = (x_P, y_P)$.

Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

Aula 20. 27 de abril de 2017

$$J_{f,g}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

pontos não-hiperbólicos: $\det(J)=0$

Os pontos <u>marginais</u> (centros, nó impróprios e não hiperbólicos) podem ser deslocados para uma das regiões vizinhas devido aos termos não lineares.

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = 6y(y^2+x^2-1)^2 - 3x^2y^2 \\ \dot{y} = 2xy^3 - 6x(y^2+x^2-1)^2 \end{cases}$

```
f: 6*y*(y^2+x^2-1)^2-3*x^2*y^2;
g: 2*x*y^3-6*x*(y^2+x^2-1)^2;
pontos de equilíbrio:
P: solve([f,g]);
```

fpprintprec: 3$

há 13 soluções mas apenas 9 pontos de equilíbrio (as soluções reais), que estão nas primeiras 7 posições de P e nas duas últimas posições da lista P. Para extrair essas 9 soluções usa-se:

```
P: append(rest(P,-6), rest(P,11));
```

Matriz jacobiana.

```
J: jacobian([f,g],[x,y])$
```

Matrizes das 9 aproximações lineares nas vizinhanças dos 9 pontos de equilíbrio:

```
A: makelist(subst(q,J), q,P);
```

O traço de $\mathbb{J}$ e de todas a matrizes A é nulo, porque o sistema é conservativo. Existem 3 centros, onde o determinante é positivo:

$C_1 = (0,0)$ (P[1]) $\quad C_2 = (-0.786, 0.963)$ (P[8]) $\quad C_3 = (0.786, 0.963)$ (P[9])

Dois pontos de sela (determinante negativo)

$S_1 = (-0.529, 0.648)$ (P[6]), $S_2 = (0.529, 0.648)$ (P[7])

e 4 pontos não hiperbólicos: (P[2], P[3], P[4] e P[5])

$N_1 = (0,-1)$ $\quad N_2 = (0,1)$ $\quad N_3 = (-1,0)$ $\quad N_4 = (1,0)$ (determin. nulo)

Retrato de fase. plotdf([f,g],[x,y],[x,-2,2],[y,-2,2]);

(a) 1 órbita heteroclínica, entre os 4 pontos não hiperbólicos mostra-se usando: nsteps → 70, trajectory_at → 0.005 -1.005
e nsteps → 110, trajectory_at → 0.005 1.005

(b) 5 tipos de ciclos: nsteps → 300

trajectory_at →
- 0 0.8 à volta de C_1, C_2 e C_3
- 0 1.4 à volta da órbita heteroc.
- 0 0.5 à volta de C_1
- 0.9 1 à volta de C_3
- -0.9 1 à volta de C_2

(c) 2 órbitas homoclínicas, nos dois pontos de sela:

trajectory_at →
- 0.5773 0.6502
- -0.5773 0.6502

(d) outra órbita heteroclínica entre os pontos de sela:

trajectory_at → 0.5179 0.625

SISTEMAS COM VÁRIAS VARIÁVEIS DE ESTADO

① Sistemas não autónomos. Por exemplo:

$$\dot{x} = f(x, y, t)$$
$$\dot{y} = g(x, y, t)$$

o tempo também é variável de estado. O espaço de fase é (x, y, t) e a terceira equação de evolução é a equação

$$\dot{t} = 1 \quad \text{(derivada de } t \text{ em ordem a } t\text{)}$$

② Sistemas mecânicos com 2 ou mais graus de liberdade. <u>Exemplo</u>. Encontre as trajetórias de uma bola de ténis (massa 62g e raio 3.25cm) e de uma bola de ping-pong (massa 2.4g e raio 1.9cm) lançadas com velocidade inicial de 12 m/s, inclinada 45°, no ar, com massa volúmica $\rho = 1.2 \frac{kg}{m^3}$

Resolução:

a força da resistência do ar, para uma esfera de raio R e massa m é:

$$\vec{F_r} = -\frac{\pi}{4}\rho R^2 |\vec{v}|\vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\dfrac{1.2\pi R^2}{4m} v_x \sqrt{v_x^2+v_y^2} \\ a_y = -\dfrac{1.2\pi R^2}{4m} v_y \sqrt{v_x^2+v_y^2} - 9.8 \end{cases} \quad (S.I.)$$

Resolve-se numéricamente usando o programa rk:

```
[vx0, vy0]: float(12*[cos(%pi/4), sin(%pi/4)])$
C(R,m):= -%pi*1.2*R^2/4/m$
v: sqrt(vx^2 + vy^2)$
```

Bola de ténis:

```
tr1: rk([vx, vy, C(0.0325, 0.062)*vx*v, C(0.0325, 0.062)*vy*v],
        [x, y, vx, vy], [0, 0, vx0, vy0], [t, 0, 2, 0.01])$
```

sintaxe: rk([vel. de fase], [variáveis], [valores inic.], [intervalo])

Para determinar em que instante a bola bate no chão (y=0) descobre-se a partir de que posição o terceiro valor (y) nos pontos na lista tr1 fica negativo:

```
first(sublist_indices(tr1, lambda([p], p[3]<0)));
        167
```

ou seja, apenas os primeiros 166 elementos da lista tr1, dão a trajetória da bola no ar.

a trajetória traça-se com uma lista r1, que tenha pontos com cordenadas [x,y]:

```
r1: makelist([tr1[i][2], tr1[i][3]], i, 1, 166)$
```

Repete-se o mesmo procedimento para criar a lista da trajetória da bola de ping-pong, r2:

```
tr2: rk([vx, vy, C(0.019,0.0024)*vx*v, C(0.019,0.0024)*vy*v],
        [x, y, vx, vy], [0,0,vx0,vy0], [t,0,2,0.01])$
first(sublist_indices(tr2, lambda([p], p[3]<0)));
    133
r2: makelist([tr2[i][2], tr2[i][3]], i, 1, 133)$
```

E o gráfico das duas trajetórias é obtido com:

```
plot2d([[discrete,r1], [discrete,r2]],
        [legend, "tenis", "ping-pong"]);
```

Aula 21. 4 de maio de 2017

CICLOS LIMITE

Nos limites $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, as curvas de evolução podem aproximar-se assimtoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).

Exemplo. $\dot{x} = x(1-2x^2-3y^2)-y \qquad \dot{y} = y(1-2x^2-3y^2)+x$

```
u: [x*(1-2*x^2-3*y^2)-y, y*(1-2*x^2-3*y^2)+x]$
p: solve(u);
```
$\to$ [[0,0]] (pontos de equilíbrio)

```
J: jacobian(u,[x,y])$
A: subst(p[1],J);
```
(matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equil.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
eigenvalues(A);
```
$\to \lambda = 1 \pm i$ (foco repulsivo na origem)

```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.4,0.4],[y,-0.4,0.4]);
```

No entanto, o sistema é na realidade <u>estável</u>, como mostra o retrato de fase numa escala maior:

```
plotdf(u,[x,y],[x,-40,40],[y,-40,40]);
```

As curvas que saem da origem não se podem cruzar com as retas que vemos neste gráfico a aproximarem-se da origem. Escolhendo uma escala intermédia:

```
plotdf(u,[x,y],[x,-1,1],[y,-1,1]);
```

Todas as curvas de evolução aproximam-se assimtoticamente de um ciclo limite (elipse na figura). Existe uma única oscilação com amplitude e frequência fixas.

Sistemas com ciclos limite

① relógio de pêndulo.

A roda dentada não pode rodar livremente porque é travada por dois triângulos ligados ao pêndulo. A roda impulsa o pêndulo e também limita a sua amplitude. Se o pêndulo começar parado na posição de equilíbrio, a roda o faz oscilar.

② cordas de violino.

A fricção do arco sobre as cordas faz deslocar a corda até uma amplitude máxima onde a corda escorrega e para novamente sendo deslocada novamente pelo arco. A forma do ciclo limite depende da velocidade do arco, a pressão nele, e do atrito entre o arco e a corda.

③ Coração.

Os batimentos cardíacos seguem um ciclo limite

Coordenadas polares.

Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada $\dot{r}$ igual a zero indica a presença de ciclos limite.

No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável u e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

```
[xp, yp] : [r*cos(q), r*sin(q)]$
```

definem-se as derivadas de r e q:

```
gradef (r, t, v)$
gradef (q, t, w)$
```

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

```
subst([x=xp, y=yp], [diff(xp, t)=u[1], diff(yp, t)=u[2]]);
```

e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

```
solve(%, [v, w]);
trigsimp(%);
```

$\longrightarrow \dot{\theta} = 1 \;,\; \dot{r} = r^3(\cos^2\theta - 3) + r$

o gráfico de $\dot{r}$ para um valor qualquer de θ, por exemplo $\theta = 0$:

```
plot2d(r^3*(1-3)+r, [r, 0, 1]);
```

mostra que há um ciclo limite entre $r=0.6$ e $r=0.8$, onde $\dot{r}=0$.

O ciclo limite é atrativo, porque para r menor do que no ciclo limite r aumenta ($\dot{r}>0$) e para valores superiores r diminui ($\dot{r}<0$).

$r=0$ também dá $\dot{r}=0$, porque $r=0$ é ponto de equilíbrio.
Em casos mais complicados, o gráfico de $\dot{r}$ em função de r, para algum valor de θ, pode ser, por exemplo:

No exemplo da página anterior, $\dot{\theta}=1$ mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.
As curvas de evolução são oscilações com frequência angular $\Omega=1$ e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.

Aula 22. 15 de maio de 2017

DINÂMICA POPULACIONAL

$X(t)$ = população no instante t, admitindo que pode ter qualquer valor real positivo.

a derivada de $X(t)$ é o aumento/diminuição da população por unidade de tempo: $\dot{X} = f(X,t)$

Como a população não pode mudar quando $X=0$, então a função f deverá ter a seguinte propriedade:

$$f(0,t)=0$$

A taxa de aumento/diminuição da população é:

$$\frac{f(X,t)}{X} = \text{taxa de natalidade} - \text{taxa de mortalidade}$$

(aumento/diminuição da população, por unidade de tempo e por cada indivíduo)

1. Modelo de Malthus

$$\frac{f(X,t)}{X} = a = \text{constante positiva}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = f(X,t) = aX \quad \text{(EDO de variáveis separáveis)}$$

$$\Rightarrow \int_{X_0}^{X} \frac{dX}{X} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = at$$

$$\boxed{X(t) = X_0 e^{at}}$$ crescimento exponencial da população

2. Modelo logístico

. Também chamado de Verhulst

A taxa de natalidade é constante, a, mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

$$\frac{f(x,t)}{x} = a - bx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{dt} = x(a-bx)}$$ a e b são duas constantes positivas

<u>Pontos de equilíbrio.</u> $x(a-bx)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{a}{b}$

$$\frac{df}{dx} = a-2bx \quad \begin{cases} \bullet \text{ positiva se } x<\frac{a}{2b} \Rightarrow x_1=0 \text{ instável} \\ \bullet \text{ negativa se } x>\frac{a}{2b} \Rightarrow x_2=\frac{a}{b} \text{ estável} \end{cases}$$

A população aproxima-se sempre do valor de equilíbrio $x_\infty = \frac{a}{b}$

SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x(t)$ e $y(t)$ são as populações das duas espécies, que interagem entre si: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

As duas funções f e g deverão ter as seguintes propriedades: $f(0,y) = g(x,0) = 0$

A matriz jacobiana é: $\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = aumento/diminuição próprio da 1ª espécie.

$\frac{\partial g}{\partial y}$ = aumento/diminuição próprio da 2ª espécie.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = aumento/diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.

$\frac{\partial g}{\partial x}$ = aumento/diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

1. **Sistema predador-presa.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais diferentes

2. **Sistema com cooperação.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas

3. **Sistema com competição.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-cy) \\ \dot{y} = y(bx-d) \end{cases}$$

é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

(a, b, c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

<u>Pontos de equilíbrio</u>. $(x_1, y_1) = (0,0)$ e $(x_2, y_2) = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} a-cy & -cx \\ by & bx-d \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = a > 0,\ \lambda_2 = -d < 0$$

$(0,0)$ é ponto de sela

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$tr(A_2) = 0$, $det(A_2) = ad$

$\lambda^2 + ad = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{ad}$

$\left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$ é um centro

$\Rightarrow$ Todas as curvas de evolução, com x_0 e $y_0 \neq 0$, são ciclos.

O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados

Um modelo mais realista, de **Holling-Tanner**, tem apenas um ciclo limite:

$$\dot{x} = x\left(1-\frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1-\frac{y}{2x}\right)$$

x = presas , y = predadores

tem 3 pontos de equilíbrio: $(0,0)$, $(7,0)$ e $(1,2)$

Os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro é foco repulsivo:

As populações das duas espécies oscilam entre valores determinados pelos parâmetros do modelo e não pelos valores iniciais das populações.

Aula 23, 18 de maio de 2017

Curvas de evolução

Nos sistemas reais, as curvas de evolução não podem afastar-se infinito. Devem aproximar-se de algum ponto ou curva finita.

Γ = curva de evolc.

$\alpha(\Gamma)$ = conjunto limite negativo $(t \to -\infty)$

$\omega(\Gamma)$ = conjunto limite positivo $(t \to +\infty)$

Em sistemas com duas variáveis de estado há quatro possibilidades... (para α e ω)

1. Pontos de equilíbrio

$(x,y) = (0,0)$ = foco atrativo

$\omega(\Gamma) = (0,0)$ para qualquer Γ

2. Ciclos

As curvas podem fecharem-se sobre si próprias.

$(0,0)$ = centro

$\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = \Gamma$, para qualquer curva Γ

3. Ciclos limite

$\omega(\Gamma) = C$, para qualquer curva Γ em $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

$\alpha(C) = \omega(C) = C$

4. Órbitas homoclínicas ou heteroclínicas

3 pontos de sela, P_1, P_2, P_3

órbita heteroclínica $H = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$

$\omega(\Gamma) = H$, se Γ estiver no interior de H.

Atratores estranhos

Em sistemas com 3 ou mais variáveis de estado existe outra possibilidade, chamada um **atrator estranho**, que é uma curva de comprimento infinito, que ocupa um volume finito do espaço de fase.

Em diferentes instantes a curva passa por diferentes pontos, sem nunca passar novamente pelo mesmo ponto.

Tal como nos ciclos,

$\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = \Gamma$, se Γ for um atrator estranho,

mas, a diferença dos ciclos, se Γ passa pelo ponto P_0, em t_0, na existe nenhum outro instante t em que o estado volte a ser P_0, embora existam muitos pontos próximos de P_0 onde Γ passa em instantes diferentes de t_0.

Exemplo:

projeção 2D dum atrator estranho em 3D.

Atrator de Lorenz

Modelo meteorológico para as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos (Lorenz, 1963).

$$\dot{x} = 10\,(y - x)$$
$$\dot{y} = 28\,x - y - x\,z$$
$$\dot{z} = x\,y - \frac{8}{3}\,z$$

x = amplitude das correntes. y = diferença de temperatura entre as correntes ascendente e descendente. z = desvio da temperatura normal no plano.

```
eqs: [10*(y-x), 28*x-y-x*z, x*y-8*z/3]$   (equações)
v: [x,y,z]$                               (variáveis)
vØ: [5,5,5]$                              (valores iniciais)

p: rk(eqs, v, vØ, [t,0,20,0.005]$         (aproximação discreta à curva de evolução)

last(p);  ↳ [20, -9.82, -15.52, 19.7]

p: rk(eqs, v, vØ, [t,0,20,0.001]$         (melhor aproximação)
last(p);
          ↳ [20, -9.98, -16.02, 19.29]    (ainda não converge)
p: rk(eqs, v, vØ, [t,0,20,0.0005]$
last(p);   (converge a 3 algarismos significativos)
```

O gráfico da página anterior obteve-se com:

```
plot2d([discrete, makelist([s[2], s[4]], s, p)], [ylabel, "z"]);
```

Podemos obter outra curva Γ_2 com valores iniciais ligeiramente diferentes:

```
p2: rk(eqs, v,  [5.005,5,5], [t,0,20,0.0005])$
```

e mostrar $x(t)$ das duas curvas Γ_1 e Γ_2:

```
plot2d([[discrete, makelist([s[1], s[2]], s, p)],
        [dicrete, makelist([s[1], s[2]], s, p2)]],
        [xlabel, "t"], [ylabel, "x"], [legend, false]);
```

as duas curvas são quase idênticas até $t=10$ mas depois ficam muito diferentes.

Capítulo 2

Exames

2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 16 de junho de 2017. Compareceram 116 estudantes e a nota média foi 11.1 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2016/2017

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 16 de junho de 2017

Nome:_____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Uma das luas dum planeta é um corpo homogéneo e esférico de raio R. Imagine que a lua é atravessada de lado a lado por um túnel retilíneo que passa pelo seu centro, dentro do qual deixa-se cair livremente um objeto de massa m. Sabendo que a energia potencial gravítica do objeto, no interior desse túnel, é dada pela expressão

$$U = \frac{m\,g}{2}\left(\frac{r^2}{R} - R\right)$$

na qual r é a distância desde o centro da lua e g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta: (a) Determine a equação de movimento (expressão da aceleração) do objeto dentro do túnel, ignorando forças dissipativas (a lua não tem atmosfera). (b) Demonstre que o objeto fica a oscilar no túnel e determine o período de oscilação no caso da lua Mimas, com raio de 198 km e $g = 6.8$ cm/s^2. (c) Se existisse um túnel retilíneo desde o Porto até Nova Zelândia, passando pelo centro da Terra, e sabendo que o raio da Terra é 6370 km, quanto tempo demorava viajar desde o Porto até Nova Zelândia saltando nesse túnel? (admitindo que a expressão obtida para a lua homogénea e sem atmosfera fosse válida).

2. (4 valores) As equações de evolução de um sistema dinâmico de duas espécies são:

$$\dot{x} = 3\,x - \frac{3\,x\,y}{1+2\,x} \qquad \dot{y} = \frac{3\,x\,y}{1+2\,x} - y$$

(a) Explique que tipo de sistema de duas espécies é. (b) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e explique que tipos de pontos são. (c) Trace o retrato de fase do sistema.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}\left(\dot{s}^2 + 5\,s^2\right)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $15\,s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

(A) 2 **(C)** 1 **(E)** -1
(B) -2 **(D)** 3

Resposta: ☐

4. Para aumentar o momento de inércia dum corpo é necessário:

(A) Afastar partes do corpo para mais longe do eixo.
(B) Diminuir a velocidade angular.
(C) Aumentar a aceleração angular.
(D) Compatá-lo, ocupando menor volume.
(E) Aumentar a velocidade angular.

Resposta: ☐

5. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03\,s}$, na qual v é expressa em km/h e a posição na trajetória, s, é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

(A) 6.465 **(C)** 3.741 **(E)** 4.49
(B) 7.758 **(D)** 5.388

Resposta: ☐

6. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 3.4 N, a tensão no fio ligado em B é 1.8 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.

(A) 21.6 cm **(C)** 12.5 cm **(E)** 10.4 cm
(B) 15.0 cm **(D)** 18.0 cm

Resposta: ☐

7. O sistema dinâmico não linear:
$\dot{x} = x\,y - 4\,x + y - 4 \qquad \dot{y} = x\,y + x - 5\,y - 5$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 5$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = -6\,x$ **(D)** $\dot{x} = -5\,y \quad \dot{y} = -6\,x$
(B) $\dot{x} = 6\,y \quad \dot{y} = 5\,x$ **(E)** $\dot{x} = -6\,y \quad \dot{y} = 5\,x$
(C) $\dot{x} = 5\,y \quad \dot{y} = 6\,x$

Resposta: ☐

8. A posição dum ponto ao longo dum percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $s = 30\,t - 3\,t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 7.5$ s.

(**A**) 18.75 m (**C**) 21.75 m (**E**) 75 m
(**B**) 93.75 m (**D**) 131.25 m

Resposta: ☐

9. O gráfico da figura representa a energia potencial U, em joules, em função da posição x, em metros, duma partícula com massa igual a 9 kg; os valores no gráfico são $x_1 = 9$, $x_2 = 18$, $U_1 = 729$ e $U_2 = 2916$. Se a partícula parte do repouso na posição x_2, com que velocidade chegará ao ponto x_1?

(**A**) 44.09 m/s (**C**) 22.05 m/s (**E**) 88.18 m/s
(**B**) 28.66 m/s (**D**) 11.02 m/s

Resposta: ☐

10. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(**A**) 182 rad/s^2 (**C**) 838 rad/s^2 (**E**) 279 rad/s^2
(**B**) 209 rad/s^2 (**D**) 419 rad/s^2

Resposta: ☐

11. As equações de evolução dum sistema linear são:
$\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = 0.5\,x + y$
Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

(**A**) Ponto de sela. (**D**) Foco repulsivo.
(**B**) Foco atrativo. (**E**) Centro.
(**C**) Nó repulsivo.

Resposta: ☐

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 6$ m e altura $y = 7$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(**A**) 59.53 N (**C**) 12.76 N (**E**) 25.51 N
(**B**) 16.8 N (**D**) 39.2 N

Resposta: ☐

13. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo de uma curva no plano xy. Sabendo que a expressão da energia cinética da partícula é $E_c = \dfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\left(1 + x^6\right)$, encontre a equação da curva.

(**A**) $y = \dfrac{2\,x^{5/2}}{5}$ (**C**) $y = \dfrac{2\,x^{3/2}}{3}$ (**E**) $y = \dfrac{x^5}{5}$
(**B**) $y = \dfrac{x^4}{4}$ (**D**) $y = \dfrac{x^3}{3}$

Resposta: ☐

14. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio instável?

(**A**) 1 (**C**) -1 (**E**) 2
(**B**) 3 (**D**) -2

Resposta: ☐

15. No instante em que o bloco A desce com velocidade 24 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?

(**A**) 12 cm/s (**C**) 48 cm/s (**E**) 72 cm/s
(**B**) 24 cm/s (**D**) 8 cm/s

Resposta: ☐

16. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ), obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = r^2 - 3\,r$
Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(**A**) atrativo com $r = 0$ (**D**) atrativo com $r = 3$
(**B**) repulsivo com $r = 2$ (**E**) repulsivo com $r = 3$
(**C**) atrativo com $r = 2$

Resposta: ☐

17. O gráfico mostra uma possível solução $x(t)$ num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado x e y. Quais dos valores na lista poderão ser os dois valores próprios da matriz desse sistema?

(**A**) $\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{2}$ (**C**) $\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\pi$ (**E**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\pi$
(**B**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{2}$ (**D**) $-\dfrac{1}{4} \pm \mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{3}$

Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. (*a*) **1º método**. Como o potencial depende apenas da distância até o centro, a força resultante é na direção radial e com componente:

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{m\,g\,r}{R}$$

e a expressão para a aceleração é:

$$a = \ddot{r} = \frac{F}{m} = -\frac{g\,r}{R}$$

2º método. A expressão da energia cinética é:

$$E_\mathrm{c} = \frac{m}{2}\dot{r}^2$$

Aplicando a equação de Laplace, para sistemas conservativos com um único grau de liberdade r,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = m\,\ddot{r} + \frac{m\,g\,r}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} = -\frac{g\,r}{R}$$

(*b*) A equação de movimento obtida também é válida considerando r na direção radial, mas com sinais diferentes nos segmentos do túnel aos dois lados do centro, onde $r = 0$.

1º método. As equações de evolução do sistema são:

$$\dot{r} = v \qquad \dot{v} = -\frac{g\,r}{R}$$

Que é um sistema linear e, como tal, com um único ponto de equilíbrio em $r = v = 0$. A matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

Com valores próprios,

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Conclui-se então que todos os possíveis movimentos, dentro do túnel onde a equação de movimento obtida é válida, são oscilações harmónicas com frequência angular:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

O período de oscilação é,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Substituindo os valores dados para a lua Mimas, em unidades SI,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.98\times 10^5}{6.8\times 10^{-2}}} = 10722\,\mathrm{s} = 2\mathrm{h}\ 58\mathrm{m}\ 42\mathrm{s}$$

2º método. A energia mecânica E_m é igual à energia potencial U nos dois pontos de retorno:

$$r = \pm\sqrt{R^2 + \frac{2E_\mathrm{m}R}{mg}} = \pm A$$

e, como tal, o objeto oscila na região $-A \le r \le A$. A expressão da energia mecânica, constante, é:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{mg}{2}\left(\frac{r^2}{R} - R\right) = E_\mathrm{m} = \frac{mg}{2R}\left(A^2 - R^2\right)$$

Quando o objeto se desloca na direção positiva de r, a expressão da velocidade é então:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}\left(A^2 - r^2\right)} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Separando variáveis e integrando r desde $-A$ até A, que corresponde a meio período de oscilação $T/2$, obtém-se:

$$\int_0^{T/2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\left(A^2 - r^2\right)}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad\Longrightarrow\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(c) O tempo para atravessar o túnel é igual a metade do período de oscilação:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6.37\times 10^6}{9.8}} = 2533\,\mathrm{s} = 42\,\mathrm{m}$$

Problema 2. (a) Na primeira equação de evolução, como as variáveis são positivas, é claro que o termo que depende de y é negativo e aumenta quando y aumenta. Como tal, conclui-se que a espécie y faz diminuir a população x.

Na segunda equação, já não é evidente se o aumento de x faz aumentar ou diminuir a população y, porque o termo y aparece tanto no numerador como no denominador. É necessário calcular a derivada da expressão:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x} = \frac{3\,y}{1+2\,x} - \frac{6\,x\,y}{(1+2\,x)^2} = \frac{3\,y}{(1+2\,x)^2}$$

Agora sim é claro que esta expressão é sempre positiva para qualquer valor da população x e, como tal, a espécie x faz aumentar a população y. Trata-se de um sistema predador presa, no qual x são as presas e y os predadores.

(b) Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} 3\,x - \dfrac{3\,x\,y}{1+2\,x} = 0 \\ \dfrac{3\,x\,y}{1+2\,x} - y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x\,(2\,x - y + 1) = 0 \\ y\,(x-1) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem duas soluções, $y = 0$ e $x = 1$. Com $y = 0$, a primeira equação tem uma única solução, $x = 0$ (x não pode ser negativa); e com $x = 1$, a solução de primeira equação é $y = 3$. Como tal, há dois pontos de equilíbrio $(x,\, y)$:

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad\qquad \mathrm{P}_2 = (1,3)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 - \dfrac{3\,y}{(1+2\,x)^2} & \dfrac{3\,x}{1+2\,x} \\ \dfrac{3\,y}{(1+2\,x)^2} & \dfrac{x-1}{1+2\,x} \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com valores próprios 3 e -1 , ou seja, P_1 é ponto de sela.

No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é $\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, com apenas uma raiz, $\lambda = 1$. Conclui-se então que P_2 é nó impróprio repulsivo.

(c) O retrato de fase pode ser obtido no Maxima com o comando:

```
plotdf ([3*x-3*x*y/(1+2*x),3*x*y/(1+2*x)-y],[x,y],[x,0,3],[y,0,6]);
```

E é representado na seguinte figura:

É importante identificar os dois eixos, mostrar as coordenadas dos pontos de equilíbrio, ter em conta que unicamente interessa o primeiro quadrante do espaço de fase e as linhas de evolução num sistema de duas espécies nunca podem atravessar nenhum dos dois eixos.

Perguntas

3. D

4. A

5. D

6. E

7. B

8. B

9. C

10. B

11. C

12. E

13. B

14. A

15. A

16. E

17. D

2.1.3 Cotações

Problema 1

- Equação de movimento _____ 0.8

- Explicação de que o sistema oscila _____ 0.8
- Obtenção da expressão do período _____ 0.8
- Cálculo do período da lua _____ 0.8
- Cálculo do tempo de viagem entre Porto e Nova Zelândia _____ 0.8

Problema 2

- Determinação do tipo de sistema _____ 0.8
- Obtenção dos dois pontos de equilíbrio _____ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana _____ 0.4
- Valores próprios e caraterização do primeiro ponto de equilíbrio _____ 0.8
- Valores próprios e caraterização do segundo ponto de equilíbrio _____ 0.8
- Retrato de fase _____ 0.8

2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 30 de junho de 2017. Compareceram 88 estudantes e a nota média foi 8.4 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO 2016/2017

EIC0010 — FÍSICA I — 1º ANO, 2º SEMESTRE 30 de junho de 2017

Nome:_____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Uma barra reta, não homogénea e muito estreita, de comprimento $L = 6$ m e massa $m = 6.2$ kg, foi pendurada dum teto horizontal, por meio de duas cordas de comprimentos $a = 4$ m e $b = 3$ m, ligadas nos dois extremos A e B da barra, tal como mostra a figura. A barra fica em equilíbrio quando os ângulos entre as cordas e o teto são $\alpha = 60°$ e $\beta = 70°$. (a) Determine os valores das tensões nas duas cordas quando a barra está nessa posição de equilíbrio. (b) Determine a distância desde o centro de gravidade da barra até o ponto A.

2. (4 valores) A equação de movimento $\ddot{x} + \left(3 - x^2\right)\dot{x} - 3x + x^3 = 0$ pode ser escrita como sistema dinâmico no plano xy. (a) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano xy. (b) Explique de que tipo é cada um dos pontos de equilíbrio. (c) Trace o retrato de fase do sistema. (d) Diga se o sistema tem ciclos (soluções periódicas) e em que regiões do plano xy.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = -5\,x\,y + 2\,y$
(B) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(C) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(D) $\dot{y} = 6\,y - y^2$
(E) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$

Resposta: ☐

4. Um bloco com massa $m = 5$ kg encontra-se sobre a superfície de uma mesa horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, com módulo de 80 N e direção que faz um ângulo $\alpha = 20°$ com a horizontal, tal como mostra a figura. Calcule o módulo da reação normal entre o bloco e a mesa.

(A) 76.36 N
(B) 100.42 N
(C) 21.64 N
(D) 49.0 N
(E) 2.42 N

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é $s^2 - s - 2$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto (a, 0), determine o valor de a.

(A) -1
(B) 1
(C) 3
(D) 2
(E) -2

Resposta: ☐

6. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de 36 m/s, fazendo um ângulo de 25° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

(A) 210.1 m
(B) 252.1 m
(C) 145.9 m
(D) 175.1 m
(E) 121.6 m

Resposta: ☐

7. Calcule o momento de inércia duma esfera com raio de 1 centímetro e massa 17 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia duma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2\,m\,R^2/5$.

(A) 6.80×10^{-7} kg·m^2
(B) 1.36×10^{-6} kg·m^2
(C) 2.38×10^{-6} kg·m^2
(D) 1.21×10^{-6} kg·m^2
(E) 3.40×10^{-7} kg·m^2

Resposta: ☐

8. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial h e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade v. Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade $v/3$?

(A) $6\,h$
(B) $h/3$
(C) $9\,h$
(D) $h/9$
(E) $3\,h$

Resposta: ☐

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento L que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos? (x_A e y_B medidos a partir de O)

(A) $v_A = -v_B \cos\theta$
(B) $v_A = -2\,v_B$
(C) $v_A = -v_B$
(D) $v_A = -v_B \tan\theta$
(E) $v_A = -v_B \sin\theta$

Resposta: ☐

10. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $2\,t^2\,\hat{\imath} + 0.4\,t^2\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Em $t = 0$ a partícula parte do ponto $y = -7$ no eixo dos y. Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos x.

(A) 3.27 s
(B) 4.18 s
(C) 5.92 s
(D) 3.74 s
(E) 2.6 s

Resposta: ☐

11. A figura mostra o retrato de fase dum sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em $(x, y) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (2, 2)$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto $(-1, -1)$?

(A) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(B) $\dot{x} = -3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$
(C) $\dot{x} = -3\,y \quad \dot{y} = 3\,x$
(D) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = 3\,y$
(E) $\dot{x} = 3\,y \quad \dot{y} = -3\,y$

Resposta: ☐

12. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ. As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \qquad U = k\,r^5$$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para $\ddot{r}$

(A) $r^2\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(B) $r\,\ddot{\theta} - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(C) $r\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(D) $r^2\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$
(E) $r\,\dot{\theta} - \dfrac{5\,k\,r^4}{m}$

Resposta: ☐

13. Partindo da origem na sua trajetória e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração tangencial $2\sqrt{v^2 + 5}$, em unidades SI, onde v é o valor da velocidade. Determine a posição da partícula na trajetória quando $v = 30$ m/s.

(A) 13.8 m
(B) 19.9 m
(C) 9.6 m
(D) 11.5 m
(E) 16.6 m

Resposta: ☐

14. Uma partícula desloca-se ao longo de uma elipse no plano xy. As coordenadas cartesianas da partícula são x e y e as suas coordenadas polares são r e θ. Na lista seguinte, quais são as possíveis variáveis que podem ser usadas para descrever os graus de liberdade do sistema?

(A) Duas variáveis (x, y) ou (r, θ).
(B) As duas variáveis r e θ.
(C) Uma única variável x ou y.
(D) Uma única variável x, y ou θ.
(E) As duas variáveis x e y.

Resposta: ☐

15. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = -2\,x - y \qquad \dot{y} = 2\,x$$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) foco repulsivo.
(B) nó repulsivo.
(C) centro.
(D) foco atrativo.
(E) ponto de sela.

Resposta: ☐

16. Um objeto descreve uma trajetória circular de raio 1 m; a velocidade aumenta em função do tempo t, de acordo com a expressão $v = 4\,t^2$ (unidades SI). Determine a expressão para o módulo da aceleração.

(A) $\sqrt{16\,t^4 + 8\,t}$
(B) $\sqrt{256\,t^8 + 64\,t^2}$
(C) $\sqrt{16\,t^4 + 64\,t^2}$
(D) $4\,t^2 + 8\,t$
(E) $8\,t$

Resposta: ☐

17. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = -r^3 + 2\,r^2 - r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) foco repulsivo
(B) nó repulsivo
(C) nó atrativo
(D) ponto de sela
(E) foco atrativo

Resposta: ☐

2.2.2 Resolução

Problema 1. (*a*) A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre da barra. Como a barra está em equilíbrio, as somas das componentes x e y das três forças devem ser nulas:

$$T_a \cos(60°) - T_b \cos(70°) = 0$$
$$T_a \sin(60°) + T_b \sin(70°) - m\,g = 0$$

e a solução deste sistema é:

$$T_a = \frac{m\,g\cos(70°)}{\sin(60°)\cos(70°) + \sin(70°)\cos(70°)} = 27.1\ \text{N}$$
$$T_b = \frac{m\,g\cos(60°)}{\sin(60°)\cos(70°) + \sin(70°)\cos(70°)} = 39.7\ \text{N}$$

(*b*) A diferença de alturas entre os pontos A e B e a distância horizontal entre eles são (ver figura ao lado):

$$h = 4\sin(60°) - 3\sin(70°) = 0.6450\ \text{m} \qquad d = \sqrt{6^2 - h^2} = 5.965\ \text{m}$$

A soma dos momentos das forças em relação ao ponto A deve ser nula e, como tal,

$$\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & -m\,g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & h \\ T_b\cos(70°) & T_b\sin(70°) \end{vmatrix} = -m\,g\,r\cos\theta + T_b\big(d\sin(70°)\big) - h\cos(70°) = 0$$

na qual r é a distância desde A até o centro de gravidade C e θ é o ângulo que a barra faz com a horizontal. Substituindo os valores de m, g, T_b e $\cos\theta = d/6$,

$$60.41\,r = 213.55 \quad \Longrightarrow \quad r = 3.535\ \text{m}$$

Problema 2. (*a*) Introduz-se a variável auxiliar $y = \dot{x}$ para tornar a equação diferencial de segunda ordem numa equação de primeira ordem. As equações de evolução do sistema dinâmico são então,

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = \left(x^2 - 3\right) y + 3\,x - x^3$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema das duas expressões nos lados direitos iguais a zero. No Maxima escreve-se

```
(%i1) e: [y, (x^2-3)*y+3*x-x^3]$
(%i2) p: solve(e);
```

$$\left[\ [x=0,\ y=0\ ],\ [x=-\sqrt{3},\ y=0],\ [x=\sqrt{3},\ y=0]\right]$$

Existem então 3 pontos de equilíbrio (x, y):

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (-\sqrt{3},0) \qquad P_2 = (\sqrt{3},0)$$

(b) a matriz jacobiana é

```
(%i3) j: jacobian(e, [x,y]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\,x\,y - 3\,x^2 + 3 & x^2 - 3 \end{bmatrix}$$

E os valores próprios das matrizes das aproximações lineares do sistema, na vizinhança dos 3 pontos de equilíbrio, são

```
(%i4) map (eigenvalues, makelist (subst(q,j), q, p));
```

$$\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2}, \frac{\sqrt{21}-3}{2}\right], [1, 1]\right], [[-\sqrt{6}\,\mathrm{i}, \sqrt{6}\,\mathrm{i}], [1, 1]], [[-\sqrt{6}\,\mathrm{i}, \sqrt{6}\,\mathrm{i}], [1, 1]]\right]$$

Como $\sqrt{21}$ é maior que 3, P_1 é ponto de sela e P_2 e P_3 parecem ser são ambos centros. Os centros podem ser deformados em focos o nós, devido aos termos não lineares, mas o retrato de fase corrobora que existem ciclos na vizinhança de P_2 e P_3 e, como tal, ambos são centros.

(c) O retrato de fase obtém-se com o comando:

```
(%i5) plotdf (e, [x, y], [x, -3, 3], [y, -3, 3])$
```

e traçando algumas curvas de evolução. A figura seguinte mostra as curvas mais importantes:

C_1 e C_2 são dois dos ciclos que existem à volta de P_2 e P_3. As duas curvas de evolução que saem do ponto de sela aproximam-se desses ciclos mas, como não se podem cruzar com eles, conclui-se que existem dois ciclos limite, L_1 e L_2 à volta de cada um dos pontos P_2 e P_3.

(*d*) Existe um número infinito de ciclos, dentro dos dois ciclos limite L_1 e L_2 à volta de cada um dos pontos P_2 e P_3.

Perguntas

3. A	**6.** C	**9.** D	**12.** C	**15.** D
4. A	**7.** C	**10.** D	**13.** A	**16.** B
5. D	**8.** D	**11.** D	**14.** D	**17.** E

2.2.3 Cotações

Problema 1

- Equação da soma das componentes x das forças ____ 0.6
- Equação da soma das componentes y das forças ____ 0.6
- Obtenção dos valores das duas tensões ____ 0.8
- Determinação das coordenadas dos pontos A e B e ângulo da barra com a horizontal ____ 0.8
- Equação da soma dos momentos das forças ____ 0.4
- Obtenção da distância até o centro de gravidade ____ 0.8

Problema 2

- Equações de evolução ____ 0.4
- Obtenção dos três pontos de equilíbrio ____ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana e valores próprios ____ 0.8
- Caraterização dos três pontos de equilíbrio ____ 0.8
- Retrato de fase ____ 1.2
- Identificação dos ciclos ____ 0.4

Bibliografia

Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática.* Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.

Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica.* Editora Mir: Moscovo, Rússia.

Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods.* Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.

Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México, DF, México: International Thomson Editores.

Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective.* México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* USA: Westview Press.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução.* São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.

French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics.* New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.

Galilei, G. (1638). *Dialogue Concernig Two New Sciences.* Itália: Publicado em: http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/. (Tradução de 1914,

por H. Crew e A. de Salvio)

Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics.* Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.

Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.

Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach.* Cambridge University Press: Cambridge, UK.

Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology.* The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.

Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.

Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1.* New York, NY, USA: McGraw-Hill.

Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE.* Boston, MA, USA: Birkhaüser.

Maxima Development Team. (2016). *Maxima Manual* (5.39.0 ed.).

Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos.* São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics.* Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlad GmbH & Co.

Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)

Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macsyma ODE lab book.* Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.

Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA: Addison-Wesley.

Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics.* Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis.* New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.

Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* Cambridge, MA, USA: Perseus Books.

Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics.* Sausalito, CA, USA: University Science Books.

Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.

Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima.* Porto, Portugal: Edição do autor.

Villate, J. E. (2016). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (4a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.