



Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 2, 2018

Jaime E. Villate

Porto, fevereiro de 2019

Copyright © 2019, Jaime E. Villate

E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Conteúdo

1	Sumários	1
1.1	Campo elétrico	2
1.2	Voltagem e corrente	8
1.3	Resistência	16
1.4	Capacidade	25
1.5	Circuitos de corrente contínua	34
1.6	Fluxo elétrico	42
1.7	Potencial	51
1.8	Campo magnético	60
1.9	Indução eletromagnética	68
1.10	Processamento de sinais	75
1.11	Circuitos de corrente alternada	86
2	Exames	101
2.1	Exame de época normal	101
2.1.1	Enunciado	102
2.1.2	Resolução	104
2.1.3	Cotações	105
2.2	Exame de época de recurso	106
2.2.1	Enunciado	107
	Bibliografia	109

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 2.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Primeiro semestre do segundo ano.

Ano académico 2018–2019, primeiro semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Espain de Oliveira, Luís Martelo e Jaime E. Villate.

Número de alunos 195.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

Aula 1. 2018-09-1

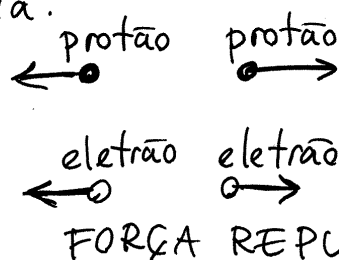
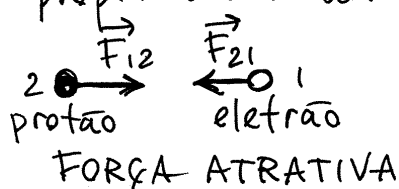
FÍSICA II - MIEIC - 2018/2019

Programa: Eletricidade, magnetismo e circuitos.
Consultar o programa completo, bibliografia e método de avaliação em <https://def.fe.up.pt/eic/>

FORÇA ELÉTRICA

Os núcleos dos átomos estão formados por neutrões e prótons. À volta do núcleo há uma nuvem de eletrões.  núcleo $\sim 10^{-10}$ m
← átomo $\sim 10^{-15}$ m

Entre os prótons e os eletrões atua uma força atrativa, chamada força elétrica, responsável pela estabilidade dos átomos e pela estrutura e propriedades da matéria.



Entre eletrões ou prótons também há força elétrica, mas é repulsiva. Os neutrões produzem uma força atrativa nos prótons (força forte) que contraria a repulsão elétrica entre eles.

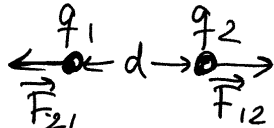
A intensidade da força entre prótons ou eletrões se a distância entre eles for a mesma, é igual; embora em alguns casos (partículas semelhantes) essa força seja repulsiva e em outros casos atrativa.

Os neutrões não produzem nem sentem força elétrica. Como tal, atribui-se uma **carga elétrica**, q , aos prótons e elétrons, com a mesma intensidade $q = e = \text{carga elementar} = \text{carga de um próton ou elétron}$

responsável pela força elétrica.

Experimentalmente observa-se que a força elétrica diminui com o quadrado da distância (d) entre as partículas:

lei de Coulomb: $|\vec{F}_{12}| |\vec{F}_{21}| = \frac{k |q_1| |q_2|}{d^2}$



Historicamente foi atribuída carga positiva ($q = +e$) ao próton e negativa ao elétron ($q = -e$)

$\Rightarrow$ A força elétrica entre cargas do mesmo sinal é repulsiva e entre cargas de sinais opostos é atrativa.

k é uma constante (**constante de Coulomb**) que depende das unidades usadas.

UNIDADES SI

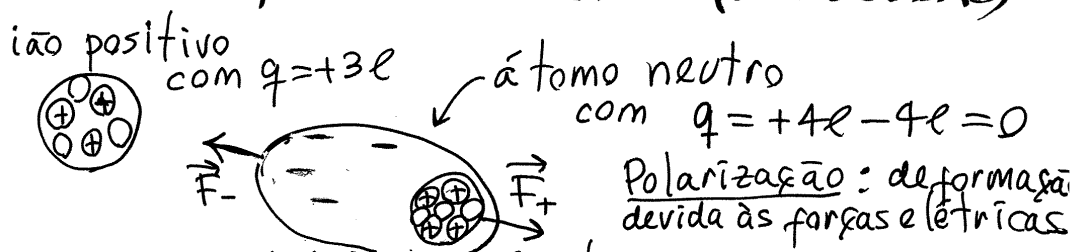
$q \rightarrow \text{C (Coulomb)}$ $F \rightarrow \text{N (Newton)}$

$d \rightarrow \text{m (metros)}$

$\Rightarrow k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$

A lei de Coulomb é válida unicamente para cargas pontuais. Entre objetos macroscópicos é necessário somar (vetorialmente) todas as forças entre as partículas que as compoem.

POLARIZAÇÃO DOS ÁTOMOS (MOLECULAS)



A nuvem eletrônica é atraída para o íon positivo e o núcleo afasta-se deste. Como tal, a força repulsiva, $\vec{F}_+$, sobre o núcleo, é menor que a força atrativa, $\vec{F}_-$, sobre os elétrons, porque estes estão a uma distância menor $\Rightarrow$ A força resultante é atrativa.

Se o íon fosse negativo, em vez de positivo, a força resultante também seria atrativa. Conclui-se que:

Um objeto com carga, de qualquer sinal, atrai os objetos neutros (sem carga).

MÉTODOS PARA ELETRIZAR OBJETOS

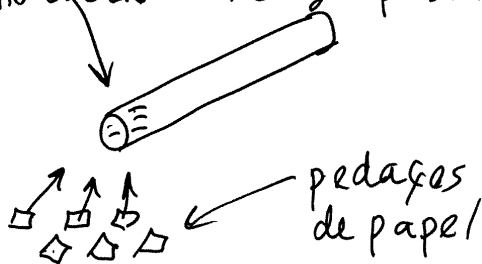
① **Frição**. Esfregando dois materiais diferentes, passam elétrons de um para outro. De quem tiver os elétrons menos ligados aos núcleos para o outro.

Se passarem n elétrons, um dos objetos ficará com carga $+ne$ e o outro com carga $-ne$.

Se o material que fica carregado for um **ISOLADOR**, as cargas transferidas ficam localizadas nos átomos (ou moléculas) onde foram transferidos os ~~eletrões~~ **elétrons**.

Mas se o material for um **CONDUTOR**, as cargas deslocam-se livremente no condutor, porque há uma nuvem de elétrons livres que podem deslocar-se no condutor.

Exemplos. { Condutores $\rightarrow$ metais, grafite.
 caneta esfregada no cabelo { Isoladores $\rightarrow$ vidro, acrílico, papel.
 $\rightarrow$ carga positiva..



Esfregando uma caneta de plástico no cabelo, a caneta (isolador) fica com carga negativa e o cabelo com carga positiva.

A carga da caneta observa-se aproximando-a de pedaços de papel (neutros) que são atraídos pela caneta.

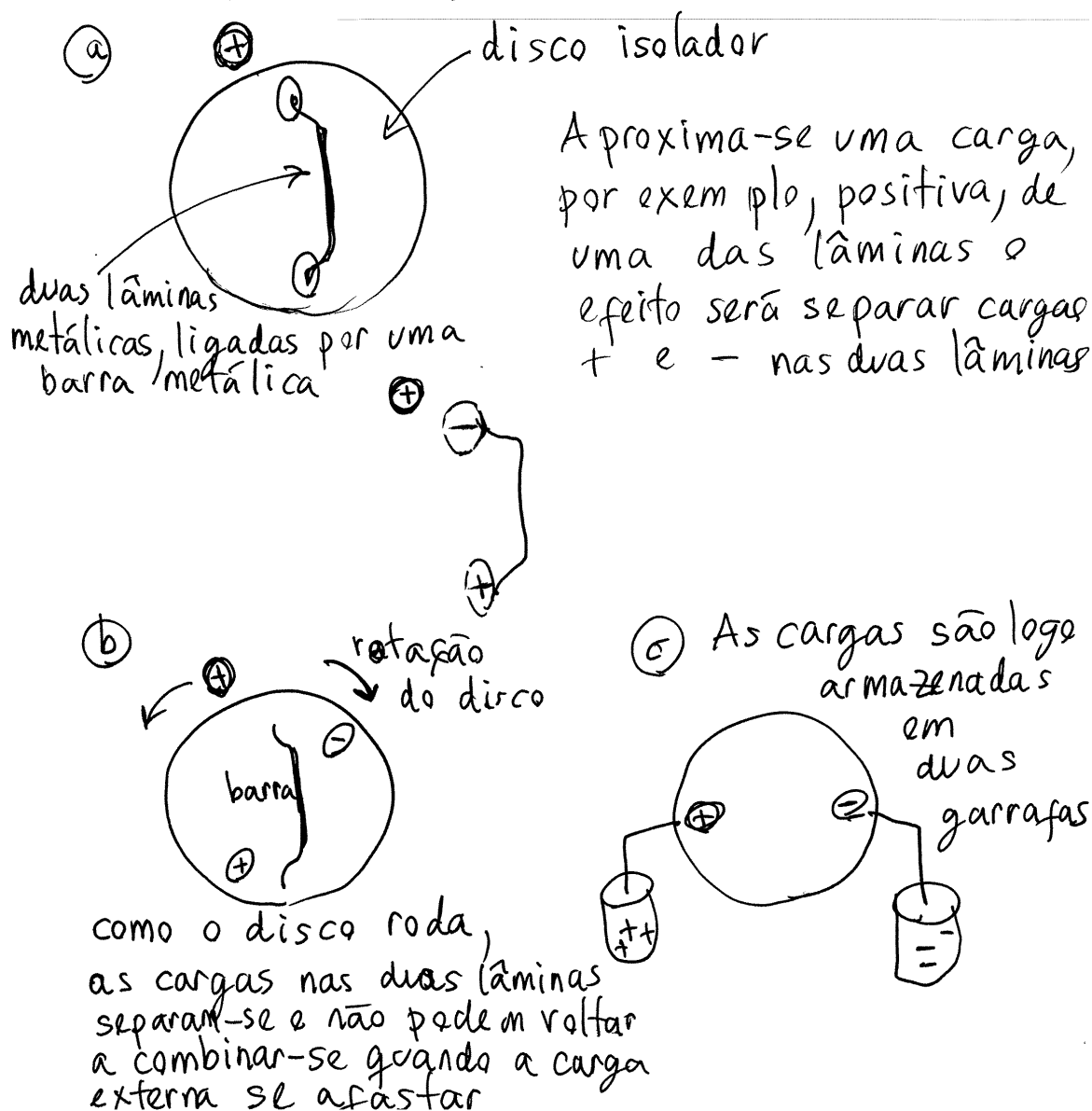
SÉRIE TRIBOELETRICA

Cabelo
 ⋮
 Outros materiais
 ⋮
 Plástico

Os objetos no topo são os mais susceptíveis a perderem elétrons. Ficando com carga positiva (falta de elétrons)

O material que estiver por cima na série triboelétrica fica com carga positiva e o que estiver debaixo fica com carga negativa

② **Carga por indução.** Aproximando um objeto com carga q de um condutor neutro, ficará carga $-q$ na região do condutor próxima do objeto e carga $+q$ na região mais afastada (devido às forças atrativas ou repulsivas). Esse princípio usa-se para carregar condutores; por exemplo, num **GERADOR DE WIMSHURST**:

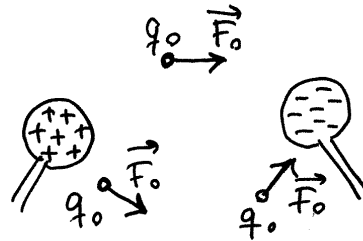


Aula 2. 2018-09-21

CAMPO ELÉTRICO

Alteração do espaço na vizinhança dum objeto com carga elétrica. Pode ser medido, em cada ponto, colocando uma carga de prova q_0 (pontual) nesse ponto, e medindo a força elétrica nela. $\leftarrow$ e positiva

Exemplo: As duas esferas num gerador de Wimshurst acumulam cargas de sinais opostos.

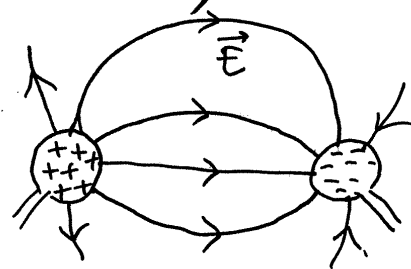
**LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO, $\vec{E}$**

Curvas contínuas tangentes à direção da força $\vec{F}_0$ em cada ponto.

Como a força $|\vec{F}_0|$ é diretamente proporcional a q_0 , então $|\vec{F}_0|/q_0$ não depende

de q_0 , mas apenas do ponto onde q_0 for colocada, e, como tal, usa-se para definir o módulo do campo:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}_0|}{|q_0|}$$



campo $\vec{E}$ de um DIPÓLO ($q_0 = -q$)

unidades de $\vec{E}$: $\frac{\text{força}}{\text{carga}} \left(\frac{N}{C} \right)$

Se a carga de prova for positiva, $\vec{F}_0$ tem a mesma direção e sentido das linhas de campo $\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad (\text{se } q_0 > 0)$$

Uma vez medido o campo $\vec{E}$ num ponto, a força $\vec{F}$ sobre outra carga q no mesmo ponto será: $\vec{F} = q\vec{E}$
(q com qualquer sinal)

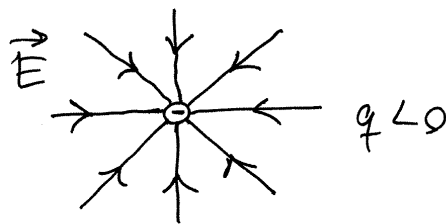
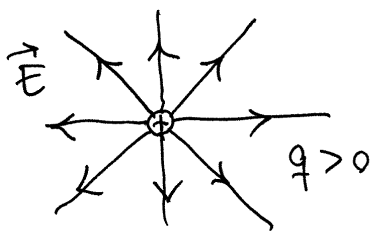
A força elétrica sofrida por uma carga pontual q é na direção das linhas de campo $\vec{E}$. O sentido da força é o mesmo sentido das linhas, se $q > 0$, ou o sentido oposto, se $q < 0$.

Campo $\vec{E}$ produzido por cargas pontuais.

A expressão $|\vec{E}| = |\vec{F}_0|/|q_0|$ é válida para o campo produzido por qualquer objeto com carga. No caso particular do campo produzido por uma carga pontual, aplica-se a lei de Coulomb:

$$|\vec{F}_0| = k \frac{|q| |q_0|}{d^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{k |q|}{d^2}} \quad \begin{array}{l} d = \text{distância} \\ \text{desde } q \\ \text{até o ponto} \end{array}$$

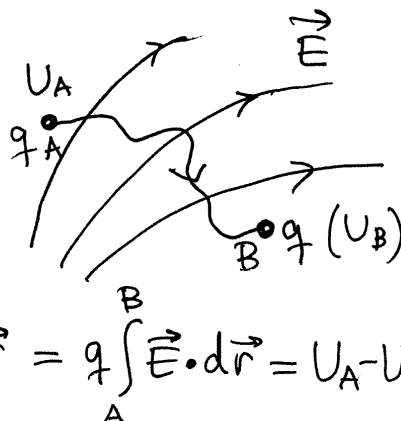
As linhas de campo são todas retas que saem de q , se $q > 0$ (campo repulsivo), ou que entram em q , se $q < 0$ (campo atrativo).



TRABALHO DA FORÇA ELÉTRICA

A força produzida por cada partícula é, tal como a força elétrica gravítica, uma força central. Como tal, a força elétrica é também conservativa e é possível definir a energia potencial elétrica de um objeto, numa região onde exista campo elétrico externo.

Se o objeto for uma carga pontual q , o trabalho realizado pelo campo externo $\vec{E}$, quando esta se desloca desde A até B será:



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (q\vec{E}) \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

U_P = energia elétrica da carga q no ponto P.

Define-se o **POTENCIAL** elétrico em cada ponto P por meio do integral:

$$V_P = V_P - V_0 = \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

O = ponto arbitrário onde admite-se $U_0 = 0$

$$\Rightarrow U_A - U_B = q(V_A - V_B) \Rightarrow \boxed{U_P = qV_P}$$

Observe-se que:

A energia potencial elétrica U é uma propriedade da carga q , mas o potencial elétrico V é uma propriedade do espaço (depende de $\vec{E}$ mas não de q)

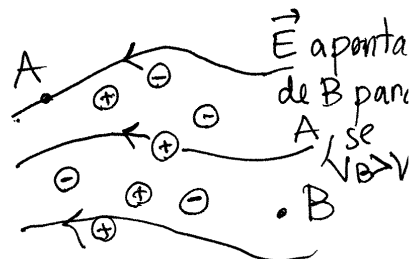
Unidades: $U \rightarrow$ energia (J)

$V \rightarrow \frac{\text{energia}}{\text{carga}}$

$$\boxed{1V = 1 \frac{J}{C}} \text{ Volt}$$

CORRENTE ELÉTRICA

Se entre dois pontos A e B, numa região onde há muitas íons (cargas q_i) existir diferença de potencial, $\Delta V = V_B - V_A$, ocorrerá transferência de carga entre A e B

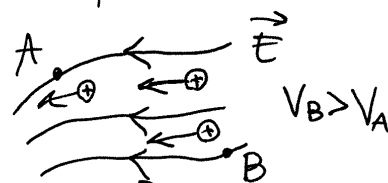


As cargas positivas afastam-se de B, aproximando-se de A e as cargas negativas afastam-se de A, aproximando-se de B. Nos dois casos o efeito é o mesmo: aumento da carga q_A no ponto A e diminuição de q_B em B. Como tal, consideraremos unicamente partículas de carga positiva, que podem deslocar-se de B para A ($V_B > V_A$).

Define-se a corrente elétrica

$\vec{I}$ na direção e sentido do movimento das cargas livres,

ou seja, direção e sentido do campo $\vec{E}$.



A intensidade da corrente $|\vec{I}|$ é definida,

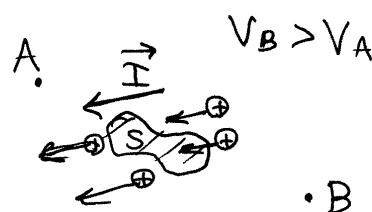
através de uma superfície

S , igual à quantidade total

de carga, ΔQ , que passa

através de S , num intervalo

de tempo Δt , no limite $\Delta t \rightarrow 0$



$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

unidades $\rightarrow \frac{\text{carga}}{\text{tempo}}$

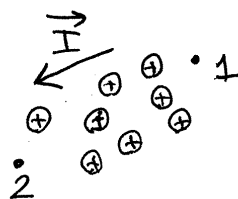
$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{ampere}$$

Se a corrente I for diferente em diferentes instantes ($I = \text{função de } t$) a carga que passa através de S , entre t_1 e t_2 será:

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

POTÊNCIA ELÉTRICA

Se num instante há corrente $\vec{I}$ de um ponto 1 para outro ponto 2 ($V_1 > V_2$)



cada carga pontual q está a perder energia elétrica:

$$\Delta U_q = U_{q1} - U_{q2} = q(V_1 - V_2) = q\Delta V$$

essa é a energia que o campo elétrico fornece e que aumentará a energia cinética da partícula ou será dissipada em calor, se houver forças dissipativas.

Se num intervalo Δt passam um total ΔQ de cargas, a energia fornecida pelo campo, nesse intervalo é então,

$$\Delta U = \Delta Q \Delta V$$

A potência elétrica, P , será:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta V \quad (\Delta V \text{ não depende de } t)$$

a potência a cada instante é:

$$P = \Delta V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{P = \Delta V I}$$

$$\text{unidades: } P \rightarrow \frac{\text{energia}}{\text{tempo}} \quad 1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{C} \cdot \text{V}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}}$$

Unidades usadas em circuitos elétricos.

$V = \text{Volt} \rightarrow$ potencial (energia por unidade de carga)

$A = \text{Ampere} \rightarrow$ corrente (carga transferida por unidade de t)

$W = V \cdot A = \text{Potência} \rightarrow$ energia fornecida, por unidade de t .

$J = W \cdot s = \text{Energia fornecida durante um intervalo de } t$

$$\text{kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

Aula 3 - 2018-09-26

Unidades de energia elétrica.

Em circuitos é conveniente usar o watt-hora: $1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3600 \text{ J}$

Em experiências com partículas é útil o eletrão-volt

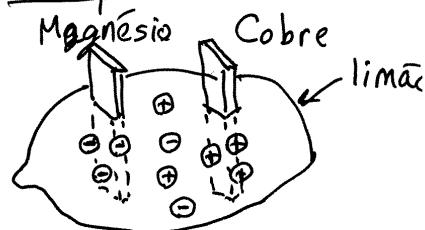
$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

PILHAS QUÍMICAS

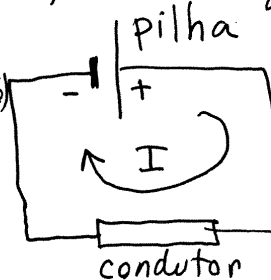
Colocam-se duas barras metálicas (elétrodos), dentro de uma substância com íons positivos e negativos (eletrólito).

Se os dois metais forem diferentes, num dos metais acumulam-se os íons positivos (cátodo) e no outro metal acumulam-se íons negativos (ânodo). Essa separação de

Exemplo:



cargas dá origem a uma diferença de potencial entre os elétrodos ($V_{\text{cátodo}} > V_{\text{ânodo}}$). Se for ligado um condutor entre os elétrodos, circulam cargas positivas (corrente) através do condutor, do cátodo para o ânodo, como se representa no diagrama de

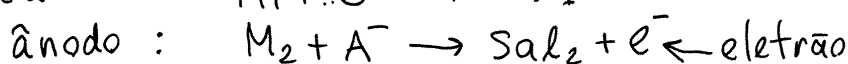
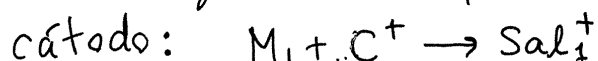


circuito à direita, onde a barra maior da pilha representa o cátodo e a barra menor o ânodo.

A corrente I passa pelo condutor enquanto existirem íons no eletrólito. A carga da pilha é a carga total dos íons positivos (catiões), igual a menos a carga total dos íons negativos (aniões).

Força eletromotriz (fem)

Nos eletrodos há reações químicas de oxidação e redução (redox) entre os metais (M_1 e M_2), os aniões A^- , com uma carga elementar negativa e os catiões C^+ , com uma carga elementar positiva.



Quando há corrente no condutor ligado aos eletrodos, cada elétron que passa pelo condutor provém de uma reação no cátodo e outra reação no ânodo. A energia (U) que esse elétron fornece ao condutor é igual à diferença entre as energias associadas às reações de oxidação e redução e costuma ser da ordem de alguns elétron-volt, por exemplo, 1.5 eV. A energia que a pilha fornece, por unidade de carga é então igual a U dividida pela carga elementar; no exemplo anterior seria 1.5 V. Essa energia por unidade de carga é uma grandeza própria dos materiais usados na pilha (eletrodos e eletrólito) e mede-se em volts:

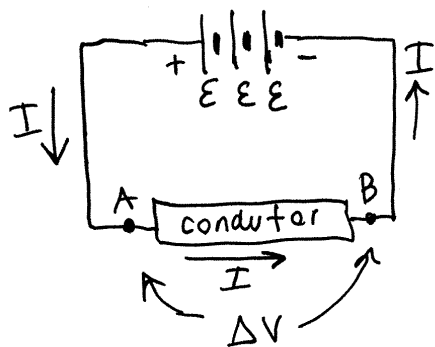
$\mathcal{E}$ = força eletromotriz = energia fornecida pela pilha, por unidade de carga (unidades de potencial).

Se a carga inicial da pilha for Q_0 , a sua energia será então:

$$U_0 = \mathcal{E} Q_0$$

que é a energia total que pode fornecer até ficar descarregada. Nas pilhas recarregáveis, as reações são reversíveis e pode recarregar-se o eletrólito.

Exemplo com 3 pilhas idênticas em série:



A diferença de potencial no condutor é: $\Delta V = V_A - V_B = 3E$ ($V_A > V_B$)

Que produz corrente I , no sentido do campo $\vec{E}$ (de A para B).

A potência elétrica dissipada no condutor é:

$$P = I \Delta V = 3IE = \text{potência fornecida pelas 3 pilhas}$$

Essa potência será dissipada em calor no condutor, mas parte dela pode ser convertida em energia mecânica (se o condutor faz parte de um motor), em energia luminosa (se o condutor é o filamento duma lâmpada incandescente), etc.

Se ΔV e I permanecem constantes, a energia ΔU fornecida pelas pilhas e dissipada no condutor, num intervalo Δt é:

$$\Delta U = P \Delta t = 3E I \Delta t = 3E \Delta Q \quad \left(\begin{array}{l} \Delta Q = I \Delta t = \text{carga que} \\ \text{passa pelas} \\ \text{3 pilhas em } \Delta t \end{array} \right)$$

Como tal, uma pilha com carga Q_0 e fem E pode manter uma corrente I durante um tempo:

$$\Delta t = \frac{U_0}{P} = \frac{Q_0 (nE)}{I (nE)} = \frac{Q_0}{I}$$

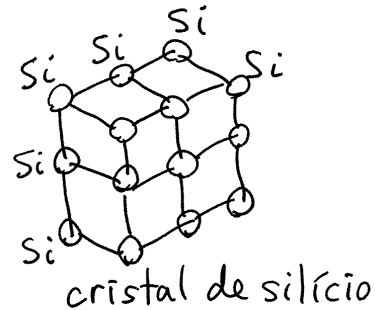
Exemplo: Uma pilha AA recarregável, com $E = 1.5V$, tem carga inicial $2300 \text{ mA} \cdot \text{h}$. Se for usada para produzir corrente de 1 mA , poderá funcionar durante:

$$\Delta t = \frac{2300 \text{ mA} \cdot \text{h}}{1 \text{ mA}} = 2300 \text{ h} \approx 96 \text{ dias}$$

SEMICONDUCTORES

Cristais formados por átomos de elementos com 4 elétrons de valência (silício ou gálio), que se distribuem uniformemente numa rede em que os 4

elétrons estão ligados a elétrons de átomos vizinhos por enlace covalente (força magnética atrativa entre elétrons).



Semicondutor tipo n (negativo)

Com impurezas de átomos de valência 5, que acrescentam um elétron livre na rede. Transportam corrente, tal como os metais, por deslocamento da nuvem de elétrons.

Analogia:



Semicondutor tipo p (positivo)

Com impurezas de átomos com valência 3. Em cada átomo de valência 3 fica uma lacuna (ou buraco), que pode ser preenchida rapidamente por elétrons na vizinhança. Atuam como se tivessem cargas livres positivas (lacunas) que se deslocam rapidamente.

Analogia:



Os carros praticamente não andam, mas quando aparece uma lacuna, esta desloca-se rapidamente para a esquerda, porque os automóveis preenchem-na rapidamente.

Aula 4, 2018-09-28

DIODOS

Cristal semicondutor com uma região p e uma região

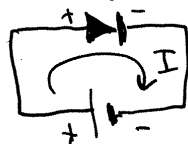


Na interface entre as duas regiões passam algumas cargas negativas para a região p e cargas positivas para a região n, criando-se uma

circuito:

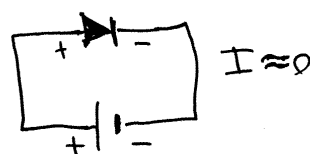
diferença de potencial na interface (menor potencial no lado p)

modo direto



circula corrente I (as cargas + que entram em p são atraídas para a interface). O tamanho da região sem cargas livres diminui.

modo inverso

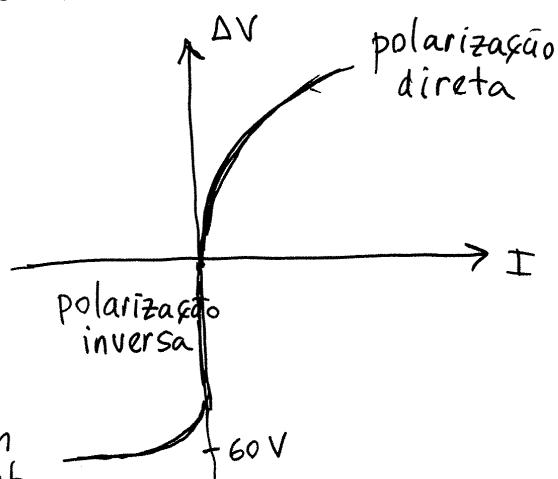


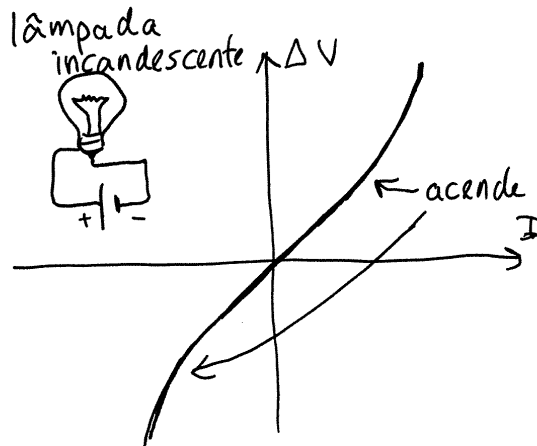
Não circula corrente (as cargas positivas que entram em n são repelidas na interface). O tamanho da região sem cargas livres aumenta.

CURVA CARACTERÍSTICA

Gráfico da diferença de potencial, ΔV , no diodo, vs. a corrente. No modo inverso, se ΔV for muito elevada, pode aparecer corrente de avalanche,

Ossinais negativos de ΔV e I no gráfico indicam que são no sentido oposto do que no modo direto

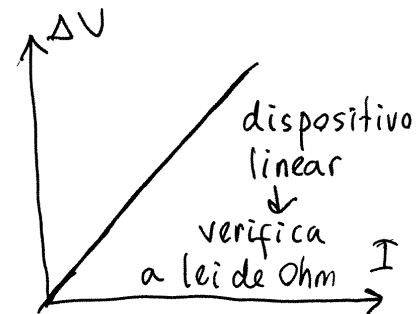




Em outros dispositivos a característica é simétrica no primeiro e terceiro quadrantes. Ou seja, é indiferente qual dos terminais é ligado ao cátodo ou o ânodo. Basta então representar o 1º quadrante

LEI DE OHM

Em alguns dispositivos, por exemplo, um fio metálico, a característica é uma reta com declive constante. Como tal, a relação entre ΔV e a corrente é:



$$\boxed{\Delta V = RI} \quad \text{lei de Ohm}$$

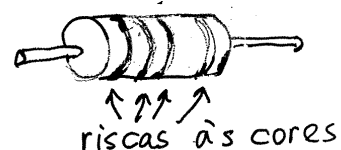
Em que R é uma constante, chamada **resistência** com unidades de potencial sobre corrente.

Unidade SI de resistência $\rightarrow \Omega$ (ohm) $1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$

Nesses dispositivos, a potência elétrica dissipada é:

$$P = \Delta V I = R I^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (1W = 1\Omega \cdot A^2 = 1 \frac{V^2}{\Omega})$$

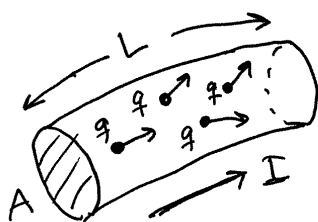
As resistências (resistores) usados em circuitos são pequenos cilindros de carvão, cobertos por um isolador e com quatro riscas de cores que indicam o valor de R



RESISTIVIDADE

A lei de Ohm é válida em materiais em que as forças dissipativas nas cargas de condução são diretamente proporcionais à velocidade:

$$\vec{F}_d = -k\vec{v} \quad (k = \text{constante positiva})$$



Num pedaço de condutor, de comprimento L e área da seção igual a A , onde circula corrente I , há muitas cargas livres do mesmo valor, com velocidade média $\vec{v}$ igual à velocidade

da nuvem de cargas de condução. Admitindo cargas livres positivas, $\vec{v}$ tem a direção e sentido da corrente. A força dissipativa $\vec{F}_d$ é igual e oposta à força que o campo elétrico produz sobre cada carga livre q ; ou seja:

$$q\vec{E} = -\vec{F}_d \Rightarrow q\vec{E} = k\vec{v} \rightarrow v = \frac{qE}{k}$$

Volume de cargas transferidas em $\Delta t = A v \Delta t$

($v\Delta t$ = deslocamento da nuvem)

Carga total transferida em $\Delta t = \Delta Q = nq(Av\Delta t)$

onde n = número de cargas de condução por unid. de volume

$$\Rightarrow \Delta Q = nqA\Delta t \left(\frac{qE}{k} \right) = \frac{nq^2AE}{k} \Delta t$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nq^2A}{k} E = \frac{nq^2A}{k} \left(\frac{\Delta V}{L} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta V = \left(\frac{k}{nq^2} \right) \left(\frac{L}{A} \right) I \quad k, n, q, L, A \text{ são constantes}$$

que é a lei de Ohm com resistência:

$$R = \left(\frac{k}{nq^2} \right) \left(\frac{L}{A} \right)$$

$\xleftarrow{\text{tipo de material}}$ $\xleftarrow{\text{tamanho do condutor}}$

A constante knq^2 chama-se resistividade e é uma propriedade de cada tipo de material

$$\rho = \frac{k}{nq^2} = \text{resistividade do material, com unidades de } \Omega \cdot \text{m}$$

A resistência de um condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à sua secção transversal (A):

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

VARIAÇÃO DA RESISTÊNCIA COM A TEMPERATURA.

k = constante das forças dissipativas $\rightarrow$ aumenta com a temperatura T .

(L e A também aumentam com T , mas não tanto quanto k)
 $\Rightarrow \rho$ aumenta com a temperatura T .

Experimentalmente observa-se uma relação quase linear para a resistência de um condutor ohmico, em função de T :

$$R = R_{20}(1 + \alpha_{20}(T - 20))$$

R_{20} = resistência a 20°C T = temperatura em $^\circ\text{C}$

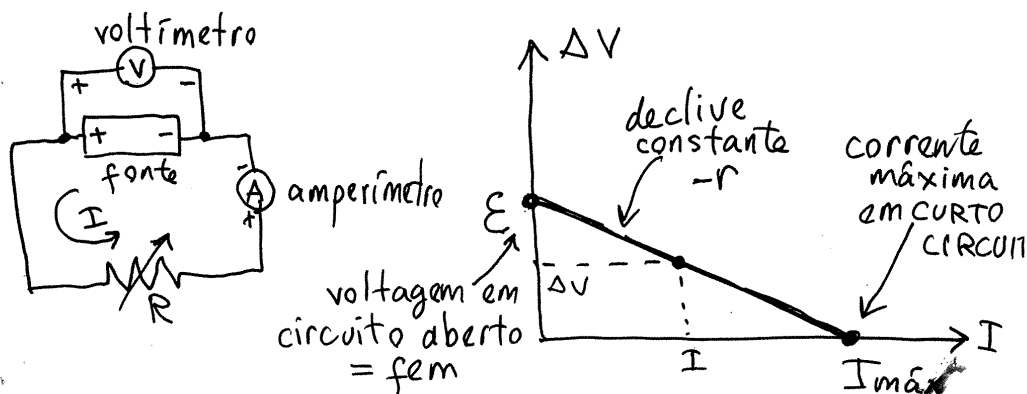
α_{20} = coeficiente de temperatura, a 20°C

Observe-se que o declive da reta é $R_{20}\alpha_{20}$ que é o mesmo, por exemplo, a 30°C : $R_{20}\alpha_{20} = R_{30}\alpha_{30}$ mas $\alpha_{20} \neq \alpha_{30}$ porque $R_{20} \neq R_{30}$

Aula 5. 2018-10-03

Diagrama de circuito de uma resistência: 
 = resistência com valor variável, que pode ser ajustado rodando um eixo.

CARACTERÍSTICA DE UMA FONTE



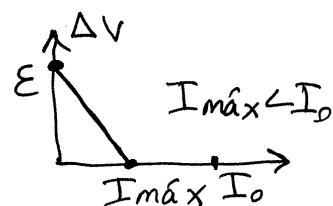
A voltagem entre os terminais da fonte, ΔV , diminui em função da corrente que fornece, I :

$$\boxed{\Delta V = \mathcal{E} - rI} \quad r = \text{resistência interna}$$

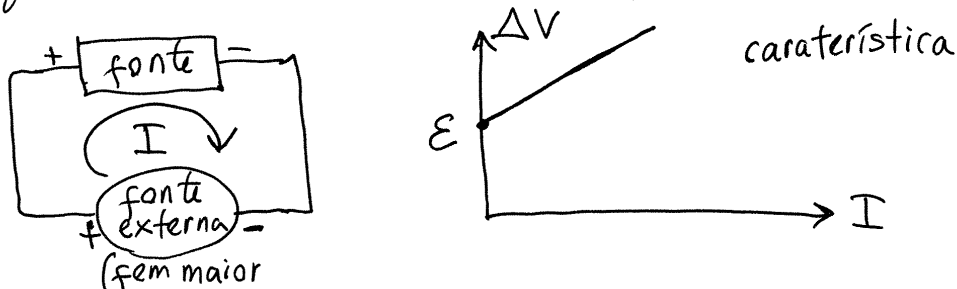
A energia por unidade de carga fornecida pelas reações químicas é a f.e.m. $\mathcal{E}$. Apenas uma parte dessa energia ΔV , é fornecida ao circuito externo; a parte restante, rI , é a energia dissipada em calor no eletrólito, já que a passagem de cargas no eletrólito sofre forças dissipativas que dão origem a r .

À medida que a bateria descarrega, a resistência interna aumenta e $I_{\text{máx}}$ diminui:

$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Chega um momento em que não é possível obter-se a corrente I_0 , necessária num circuito.



O sentido da corrente na bateria pode ser invertido, ligando uma fonte externa com fem maior:



Nesse caso ΔV na bateria é maior que a sua fem.

$$\Delta V = \varepsilon + rI$$

a energia, por unidade de carga, fornecida à bateria (ΔV) tem uma parte que é dissipada em calor no eletrólito, rI , e outra parte, ε , que pode ser usada para reverter as reações químicas no eletrólito, recarregando a bateria.

Quando a corrente passa pela fonte de - para +, diz-se que está em modo GERADOR (fornece energia). Se a corrente for de + para -, estará em modo RECEPTOR (absorve energia de outra fonte.)

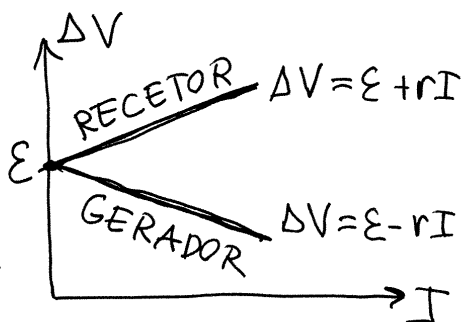
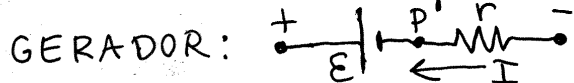
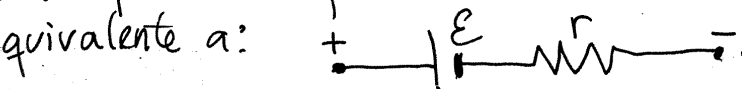
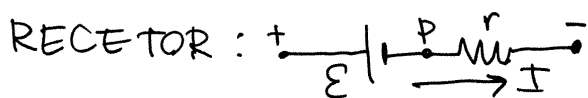


DIAGRAMA DE CIRCUITO EQUIVALENTE

Uma fonte com fem ε e resistência interna é equivalente a:

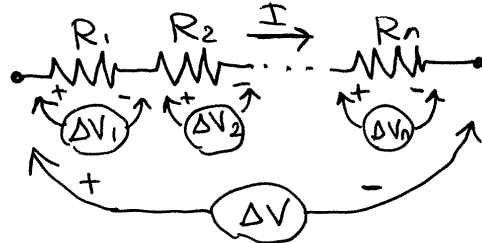


$$\begin{aligned} V_+ - V_P &= \varepsilon, \quad V_- - V_P = rI \\ \Rightarrow V_+ - V_- &= \varepsilon - rI \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_+ - V_P &= \varepsilon, \quad V_P - V_- = rI \\ \Rightarrow V_+ - V_- &= \varepsilon + rI \end{aligned}$$

RESISTÊNCIAS EM SÉRIE



$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n$$

$$\Delta V_1 = R_1 I, \Delta V_2 = R_2 I, \dots$$

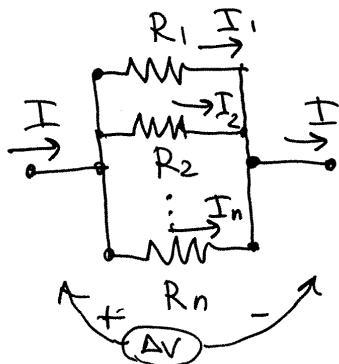
$$\Rightarrow \Delta V = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$$

circuito equivalente:



$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

RESISTÊNCIAS EM PARALELO



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \dots = \Delta V_n = \Delta V$$

$$\Delta V_1 = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\Delta V}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \dots I_n = \frac{\Delta V}{R_n}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \Delta V$$

circuito equivalente:



$$R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1}$$

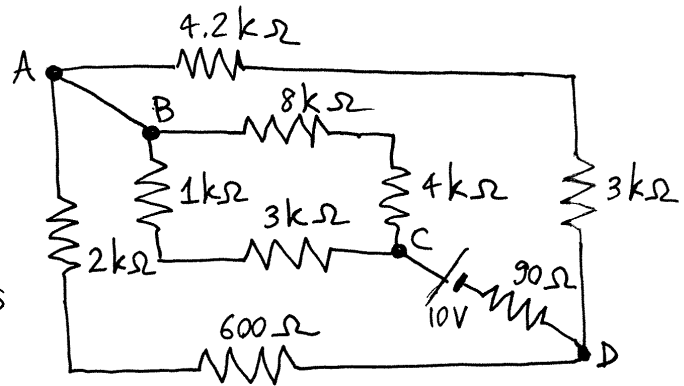
Caso particular: duas resistências R_1 e R_2 .

$$R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

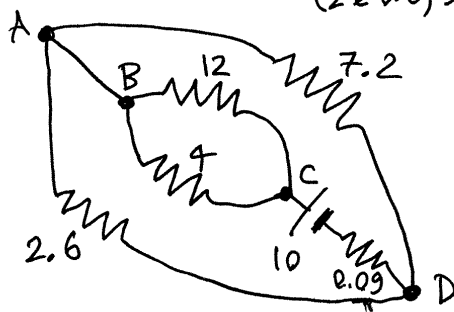
Exemplo.

Determine a voltagem e a corrente em cada uma das resistências no circuito.



Unidades. $R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V \Rightarrow I \rightarrow mA$

As resistências de 8 e 4 estão em série, tal como as de 1 e 3. Substituem-se por uma equivalente:

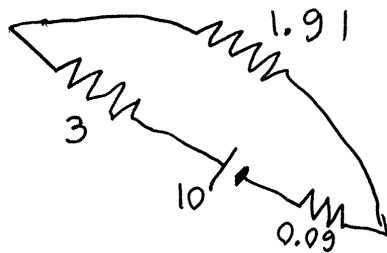


7.2 está em paralelo com 2.6, entre os nós A e D:

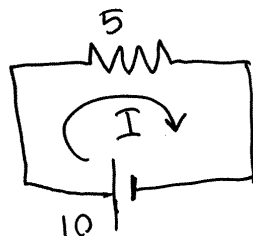
$$R_p = \frac{7.2 \times 2.6}{7.2 + 2.6} = 1.91$$

4 e 12 estão em paralelo, entre C e D:

$$R_p = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3$$

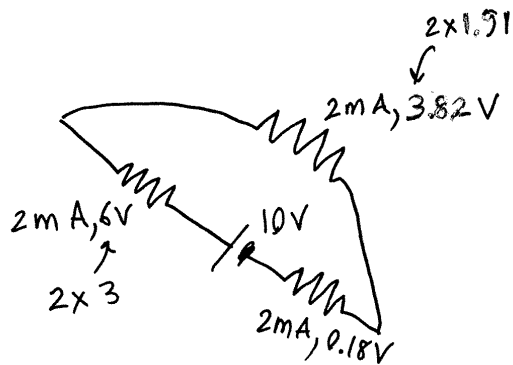


A, B, C e D deixaram de ser nós, porque já não há separação de corrente nesses pontos. As 3 resistências estão em série.



$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ mA}$$

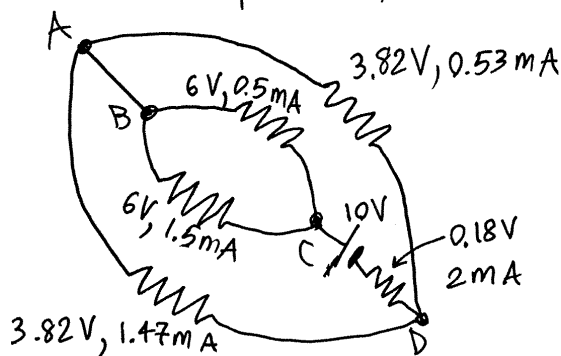
Conhecida a corrente, regressa-se às resistências em série do passo anterior, e determinam-se as voltagens nas resistências, usando a lei de Ohm, $\Delta V = RI$



Observe-se que a queda de voltagem nas 3 resistências é igual ao aumento de voltagem na fonte: $6 + 3.82 + 0.18 = 10$

Regressa-se ao passo anterior, e com as voltagens nas resis-

tências em paralelo, encontram-se as correntes ($\frac{\Delta V}{R}$) nelas:



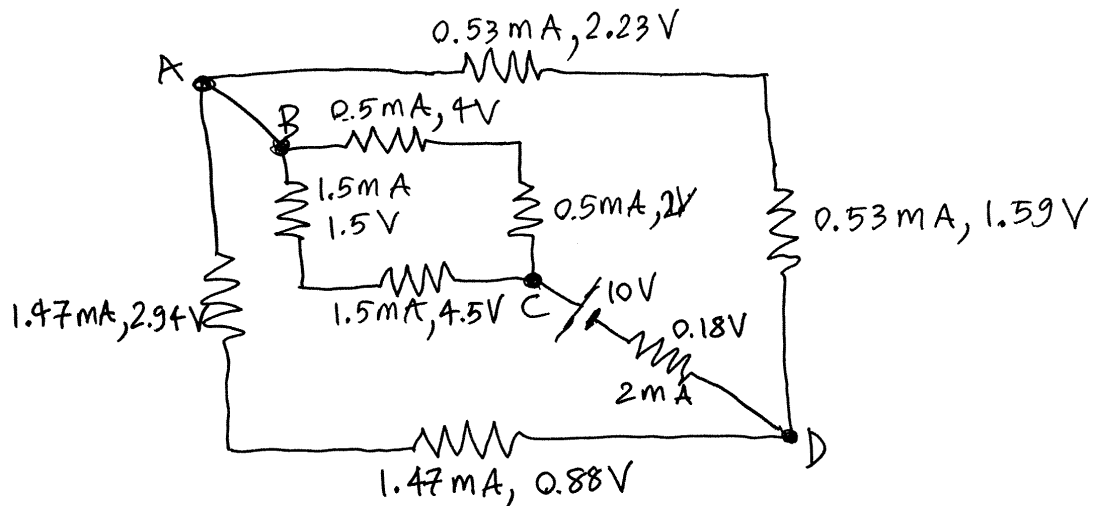
Observe-se a soma das correntes nos nós A, B, C e D:

$$0.53 + 1.47 = 2$$

$$0.5 + 1.5 = 2$$

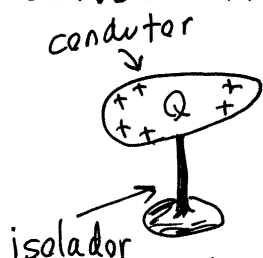
Finalmente, no circuito original calculam-se as

voltagens nas resistências em série ($\Delta V = RI$):



Aula 6, 2018-10-10

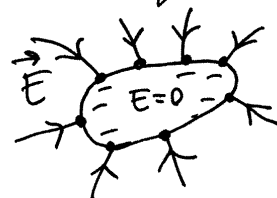
CONDUTOR ISOLADO COM CARGA



As forças repulsivas entre as cargas de condução faz com que fiquem distribuídas na sua superfície.

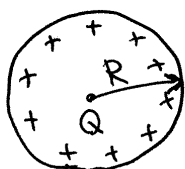
Quando o condutor atinge o equilíbrio eletrostático — estado em que não há movimento das cargas livres — o campo $\vec{E}$ no condutor é nulo (se não fosse, existiria movimento das cargas livres).

Como tal, todas as linhas de campo começam (se $Q > 0$) ou terminam (se $Q < 0$) na superfície do condutor.



ESFERA CONDUTORA ISOLADA, COM CARGA

(apêndice B do livro)



esfera de raio R

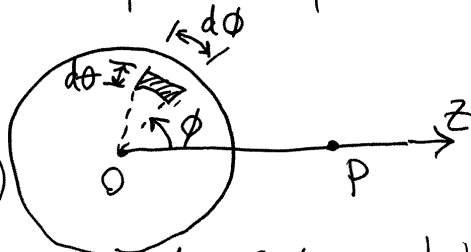
Devido à simetria da esfera, a carga distribui-se uniformemente na superfície. A carga por unidade de superfície é então constante e igual a:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

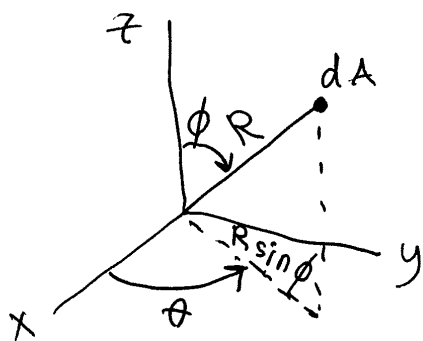
Para determinar o campo $\vec{E}$ produzido num ponto P a uma distância r do centro da esfera, define-se o eixo z com origem no centro e passando por P .

A superfície divide-se em pedaços infinitesimais de área:

$$dA = (R d\phi)(R \sin\theta d\theta)$$



Onde ϕ é o ângulo desde o eixo dos z (azimute) e θ o ângulo no plano xy (longitude).



A carga infinitesimal na área dA é:

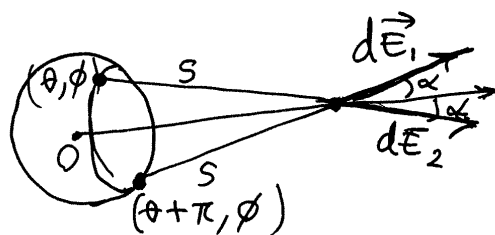
$$dq = \sigma dA = \frac{Q}{4\pi} \sin\phi \, d\theta \, d\phi$$

Admite-se que dq é carga pontual e usa-se a lei de Coulomb para calcular $|d\vec{E}|$ em P .

Cada carga dq na superfície da esfera encontra-se a uma distância S (varia em função de ϕ) e produz campo com módulo

$$dE = \frac{k|dq|}{S^2} = \frac{k|Q|}{4\pi} \frac{\sin\phi \, d\theta \, d\phi}{S^2}$$

Por cada carga dq , na posição (θ, ϕ) , há outra na posição $(\theta + \pi, \phi)$ que está à mesma distância e, como tal produz campo com o mesmo módulo e a mesma inclinação α em relação ao eixo dos z .

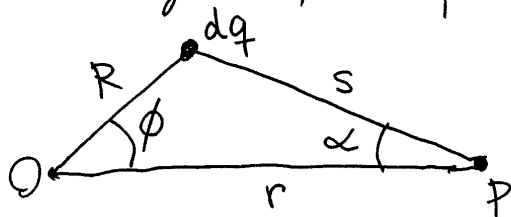


A soma vetorial desses dois campos é na direção de z e com módulo $2dE \cos\alpha$

$$d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2dE \cos\alpha \, \hat{k}$$

$$|d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2| = \frac{k|Q| \sin\phi \cos\alpha \, d\theta \, d\phi}{2\pi S^2}$$

Os ângulos ϕ e α podem escrever-se em função de S :



leis dos cossenos:

$$\begin{cases} R^2 = r^2 + S^2 - 2rS \cos\alpha \\ S^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} \\ 2s ds = 0 + 0 + 2rR \sin \phi d\phi \end{cases} \quad \begin{matrix} (r \text{ e } R \text{ são constantes} \\ \text{em relação a } \phi \text{ e } s \end{matrix}$$

Substitui-se na expressão de $dE_{12} = |d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2|$

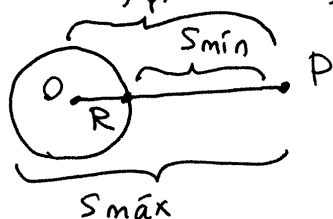
$$dE_{12} = \frac{k|Q|(r^2 + s^2 - R^2)}{4\pi r^2 R s^2} ds d\theta$$

E o campo total da esfera obtém-se integrando θ , desde 0 até π , e s desde o seu valor mínimo, $s_{\min}$, até o seu valor máximo, $s_{\max}$.

$$\begin{aligned} E &= \frac{k|Q|}{4\pi r^2 R} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{r^2 + s^2 - R^2}{s^2} ds \int_0^\pi d\theta = \frac{k|Q|}{4\pi r^2 R} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds \\ &= \frac{k|Q|}{4\pi r^2 R} \left(s_{\max} - s_{\min} + (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{s_{\min}} - \frac{1}{s_{\max}} \right) \right) = \frac{k|Q|(s_{\max} - s_{\min})}{4\pi r^2 R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s_{\max} s_{\min}} \right) \end{aligned}$$

Há dois casos:

① P fora da esfera ($r > R$)

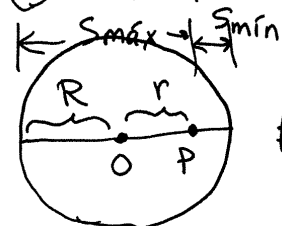


$$s_{\min} = r - R, \quad s_{\max} = r + R$$

$$E = \frac{k|Q|(2R)}{4\pi r^2 R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{r^2 - R^2} \right) = \frac{k|Q|}{r^2}$$

$\vec{E}$ é igual ao de uma carga pontual Q , no centro da esfera

② P dentro da esfera ($r < R$)

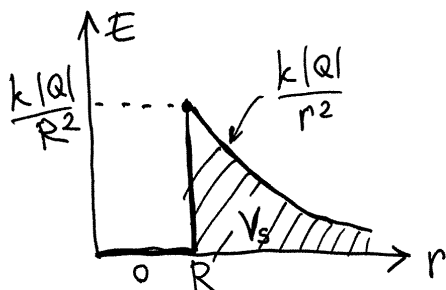


$$s_{\min} = R - r, \quad s_{\max} = R + r$$

$$E = \frac{k|Q|(2R)}{4\pi r^2 R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{R^2 - r^2} \right) = 0$$

No interior da esfera o campo é nulo.

POTENCIAL NA ESFERA CONDUTORA



Em relação a $r \rightarrow \infty$, onde arbitra-se $V=0$, o potencial na superfície da esfera é:

$$V_s = \int_R^{\infty} E dr = k|Q| \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_s = \frac{k|Q|}{R}}$$

Em qualquer outro condutor isolado, σ será diretamente proporcional à carga total Q . Como tal, E e V_s também serão diretamente proporcionais a carga $|Q|$. O inverso da constante de proporcionalidade chama-se **capacidade** do condutor. Ou seja, por definição, a capacidade de um condutor isolado é uma constante obtida dividindo a carga $|Q|$ no condutor, pelo potencial V_s que essa carga produz na superfície:

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V_s}}$$

unidade SI de capacidade:

farad: $1 F = 1 \frac{C}{V}$ ← (Coulomb, não capacidade)

Em particular, numa esfera de raio R , a capacidade é:

$$C_{\text{esfera}} = \frac{|Q|}{\left(\frac{k|Q|}{R}\right)} = \frac{R}{k} \quad \left(k = 9 \times 10^9 \frac{m}{F}\right)$$

Exemplo: Uma esfera com 9 cm de raio ($9 \times 10^{-2} m$) tem capacidade de $C_{\text{esf.}} = 10^{-11} F = 10 pF$

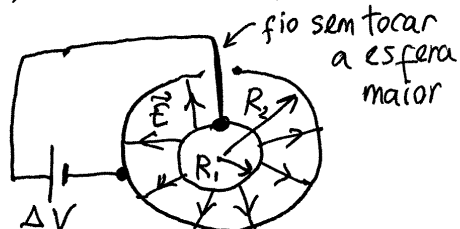
Ligando uma f.e.m. de 5V entre a terra e a esfera, a esfera armazena carga de valor:

$$|Q| = CV_s = 10^{-11} \times 5 = 50 pC$$

CONDENSADORES

A capacidade pode aumentar-se drasticamente, colocando um segundo condutor próximo do condutor isolado.

Por exemplo, no caso de uma esfera de raio R_1 , coloca-se uma segunda esfera de raio $R_2 > R_1$, concêntrica com a primeira. Se ligarmos uma



fonte entre as duas esferas (ΔV), entrará carga $+Q$ numa das esferas e $-Q$ na outra. O campo elétrico $\vec{E}$ na região $R_1 < r < R_2$ é devido unicamente a esfera menor, de raio R_1 , porque a região está dentro da esfera maior:

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \Rightarrow \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = k|Q| \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Define-se a capacidade do **condensador** esférico assim formado:

$$C = \frac{|Q|}{\Delta V} \Rightarrow C_{\text{esf}} = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

Exemplo: fora da esfera condutora de $R_1 = 9\text{ cm}$ do exemplo anterior, coloca-se outra esfera, concêntrica, de raio 10 cm , obtendo-se um condensador esférico de capacidade:

$$C_{\text{esf}} = \frac{9 \times 10^{-2} \times 10^{-1}}{9 \times 10^9 \times 10^{-2}} \text{ F} = 10^{-10} \text{ F} = 100 \text{ pF}$$

a capacidade é 10 vezes maior do que a da esfera.

Se a segunda esfera estiver ainda mais próxima, por exemplo, $R_2 = 9.1\text{ cm}$,

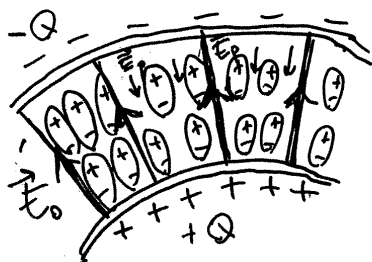
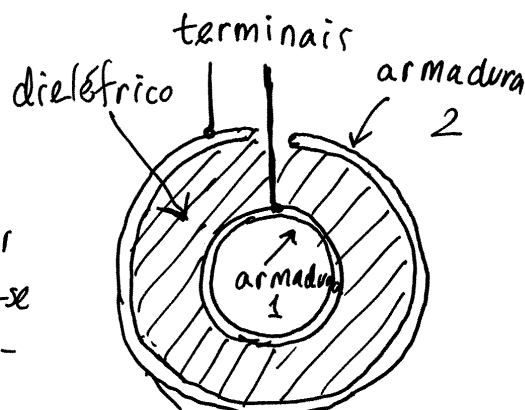
$C = 910 \text{ pF}$ com uma f.e.m. armazena carga de 4.5 nF

Aula 7, 2018-10-12

DIELÉTRICOS

Para evitar que as duas armaduras de um condensador entrem em contacto, separam-se com um dielétrico, que é simplesmente qualquer isolador.

Por exemplo, no condensador esférico, basta cobrir a esfera menor com algum material isolador e colocar por cima a esfera maior. O campo $\vec{E}$ é nulo fora do dielétrico, porque os campos das cargas Q e $-Q$, nas duas armaduras, anulam-se fora das esferas.



Entre as duas esferas, a polarização das moléculas do dielétrico produz um campo elétrico, o posto ao campo $\vec{E}$ criado pelas cargas Q e $-Q$ nas armaduras, que reduz o campo

total num fator K (constante dielétrica). O campo é então:

$$E = \frac{k|Q|}{K r^2} \quad \text{se } R_1 < r < R_2$$

K = constante maior que 1, sem unidades.

Em geral, na lei de Coulomb k deverá ser substituído por k/K , quando existir um dielétrico com constante K .

A voltagem no condensador também diminui num fator K :

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{K}$$

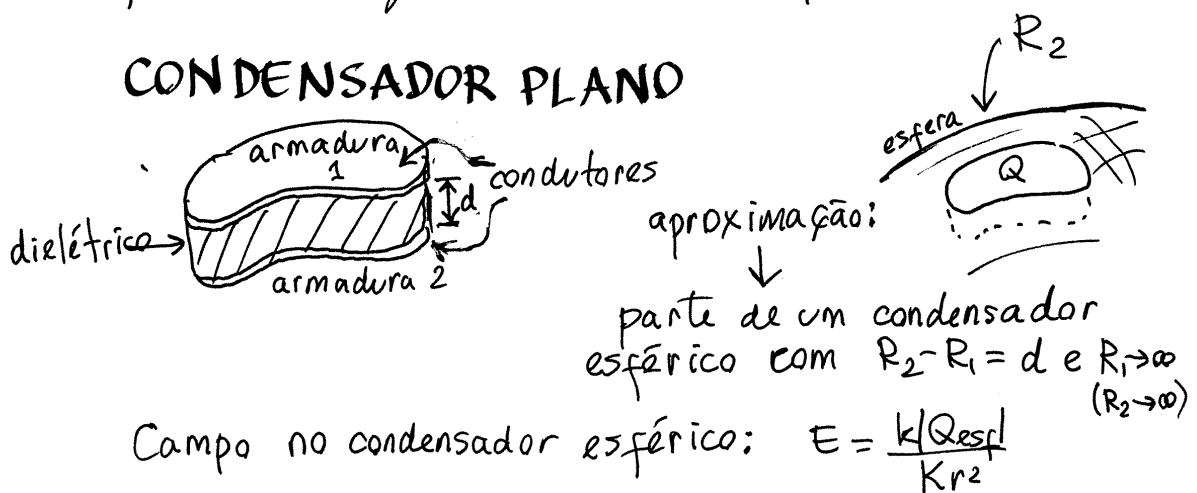
$$\Delta V_0 = k|Q| \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

↖ sem dielétrico

É a capacidade do condensador esférico, tal como a capacidade de qualquer outro condensador ou condutor, aumenta num fator K : $C = KC_0$ $C_0 =$ capacidade sem dielétrico

Para além de aumentar a capacidade, o dielétrico aumenta também a ~~voltagem~~ tensão máxima no condensador, porque quando o campo $\vec{E}$ ultrapassa um valor característico de cada isolador (chamado **rigidez dielétrica**), as moléculas rompem-se, o condensador fica descarregado e o dielétrico queimado.

CONDENSADOR PLANO



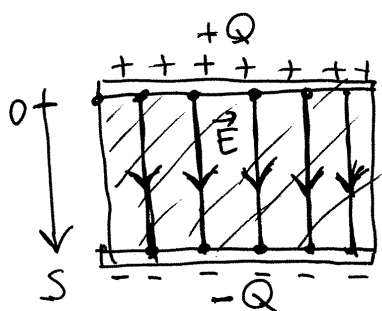
Campo no condensador esférico: $E = \frac{k|Q_{\text{esf}}|}{Kr^2}$

A carga na esfera $|Q_{\text{esf}}|$ está relacionada com a carga $|Q|$ no condensador plano de acordo com:

$$|Q_{\text{esf}}| = 4\pi R_1^2 \left(\frac{|Q|}{A} \right) \quad A = \text{área do condensador plano}$$

$$\Rightarrow E \approx \frac{k}{KR_1^2} \left(\frac{4\pi R_1^2 |Q|}{A} \right) = \frac{4\pi k|Q|}{KA} = \text{constante!}$$

($R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$, mas $d = R_2 - R_1$ permanece finito e, portanto, muito menor que R_1 e R_2)
 $\Rightarrow r \approx R_1 \approx R_2$

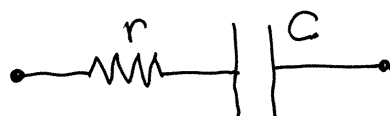


$$E = \frac{4\pi k Q}{KA} \quad \Delta V = \int_0^d E \, ds$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{4\pi k d}{KA} |Q|$$

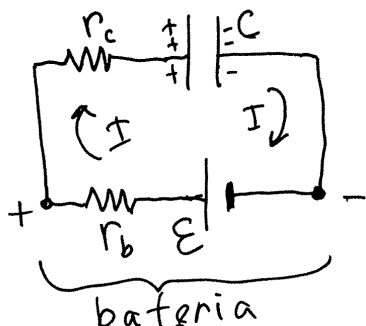
$$\Rightarrow \boxed{C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi k d}}$$

Diagrama de circuito de um condensador:



r = resistência das armaduras
(bastante baixa)

ENERGIA ARMAZENADA NUM CONDENSADOR



Durante alguns instantes circula corrente, acumulando-se carga $+Q$ numa das armaduras e $-Q$ na outra.

Inicialmente, quando $Q=0$, ΔV no condensador é zero, mas à medida que Q aumenta,

a voltagem no condensador, $\Delta V = \frac{Q}{C}$, aumenta, até chegar a ser igual a E . Nesse instante já não há mais corrente (ΔV em r_c e r_b é nula) e o condensador fica com carga final Q e energia U .

Quando a carga for q ($0 < q < Q$), a corrente I implica entrada de carga dq na armadura com potencial maior, V_+ , e carga $-dq$ na armadura com potencial menor, V_- , num intervalo dt .

A energia elétrica adicionada ao condensador nesse

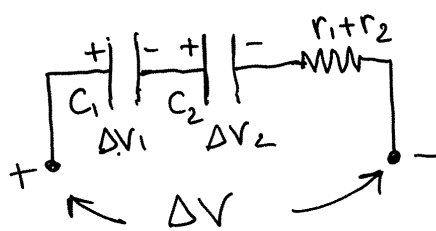
intervalo $\tilde{e}$: $dU = V_+ dq - V_- dq = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$
 e a energia total, desde $q=0$ até a carga final $q=|Q|$ será então:

$$U = \int_{q=0}^{q=|Q|} dU = \int_0^{|Q|} \frac{q}{C} dq$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}} \quad \text{ou, como } \Delta V = \frac{Q}{C}, \quad U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Repare que, no fim, $\Delta V = \mathcal{E}$, ou seja, $U = \frac{1}{2} Q \mathcal{E}$, mas a energia fornecida pela f.e.m. é $Q \mathcal{E}$. A restante energia, $Q \mathcal{E} - \frac{1}{2} Q \mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \mathcal{E}$, foi dissipada em calor nas resistências.

CONDENSADORES EM SÉRIE



No estado estacionário ($I=0$):

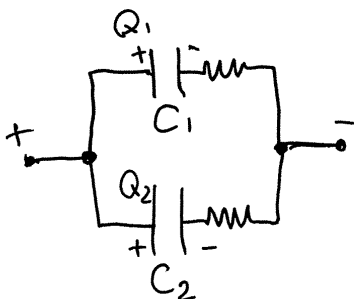
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

mas $Q_1 = Q_2 = Q = \text{carga no sistema}$

$$\Rightarrow \Delta V = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

equivalente a 1 condensador com capacidade: $\boxed{C_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}}$

CONDENSADORES EM PARALELO



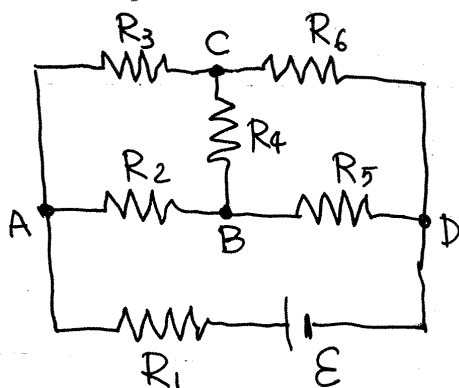
$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\begin{aligned} \text{carga total: } Q &= Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 \\ &= (C_1 + C_2) \Delta V \end{aligned}$$

Condensador equivalente:

$$\boxed{C_p = C_1 + C_2}$$

Aula 8. 2018-10-17

ANÁLISE DE CIRCUITOS

Em alguns casos, como no circuito ao lado não é possível reduzir o número de resistências com equivalentes em série ou paralelo. Contudo, a lei de Ohm e o facto de que as correntes são estacionárias (não há acumulação de

carga em nenhum ponto) são suficientes para encontrar todas as correntes e voltagens nas resistências.

Admitindo que $V_A > V_B > V_C > V_D$, a lei de Ohm aplicada às 6 resistências relaciona as intensidades das correntes nas resistências com as potenciais V_A, V_B, V_C e V_D :

$$I_1 = \frac{(V_D + E) - V_A}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_A - V_C}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{V_B - V_C}{R_4} \quad I_5 = \frac{V_B - V_D}{R_5} \quad I_6 = \frac{V_C - V_D}{R_6}$$

Nos pontos A, B, C e D, a corrente que chega ao ponto deverá ser igual à que sai:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad I_2 = I_4 + I_5 \quad I_3 + I_4 = I_6 \quad I_6 + I_5 = I_1$$

Temos pois 10 equações lineares, que permitem encontrar as 10 variáveis $I_1, \dots, I_6, V_A, V_B, V_C, V_D$, para valores conhecidos da fem. e das resistências.

No entanto, existem vários métodos mais simples. Dois desses métodos serão discutidos a seguir.

LEIS DE KIRCHHOFF

1. **Lei das voltagens** (ou das malhas): Em qualquer malha num circuito (percurso fechado que percorre vários dispositivos regressando ao ponto inicial), a soma algébrica das voltagens é igual a zero.

Exemplo. No circuito anterior, uma possível malha inclui a fem, R_1 , R_3 e R_6 , passando por A, C e D.

$$\Rightarrow \mathcal{E} - \Delta V_1 - \Delta V_3 - \Delta V_6 = 0 \quad -\Delta V_i = \text{diminuição da voltagem na resistência } R_i.$$

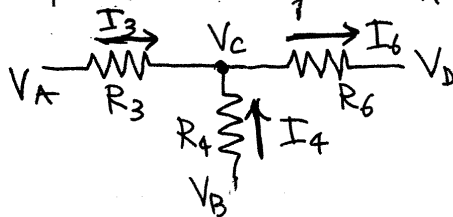
Conferir:

$$\mathcal{E} - (V_D + \mathcal{E} - V_A) - (V_A - V_C) - (V_C - V_D) = 0$$

2. **Lei das correntes** (ou dos nós): Em cada nó (ponto onde a corrente pode seguir vários caminhos diferentes) a soma das correntes que chegam ao nó é igual à soma das correntes que saem desse nó.

Exemplo. No nó C no circuito anterior, $I_3 + I_4 = I_6$

Observe-se a necessidade de ser consistente com a suposição de que $V_A > V_C$, $V_B > V_C$ e $V_C > V_D$



Cada corrente segue o sentido de maior para menor potencial (sentido do campo $\vec{E}$).

Se após resolver as equações, por exemplo, a resposta para I_4 ficar negativa, automaticamente o valor obtido para V_B ficará menor que o de V_C . Isso indicará que I_4 vai realmente de C para B.

MÉTODO DAS MALHAS

- ① Escolhem-se n malhas diferentes, que sejam suficientes para construir o circuito, e em cada uma dessas malhas define-se uma corrente de malha $i_1, i_2, \dots, i_n$, todas em sentido horário ou anti-horário (à sua escolha).
- ② Define-se uma matriz $\mathbb{R}$, com n linhas e n colunas, em que os elementos na diagonal, $R_{1,1}, R_{2,2}, \dots, R_{n,n}$, são iguais à soma de todas as resistências nas malhas $1, 2, \dots, n$. Os elementos não diagonais, $R_{j,k}$ com $j \neq k$, são iguais a menos a soma de todas as resistências na parte comum às malhas j e k .
- ③ Define-se uma matriz $\mathbb{E}$, com uma coluna e n linhas, tal que $E_{j,1}$ é igual à soma algébrica de todas as fem. na malha j : positiva se i_j passa do ânodo, $|$, para o cátodo, $|$, ou negativa, caso contrário.
- ④ Resolve-se o sistema de equações lineares:

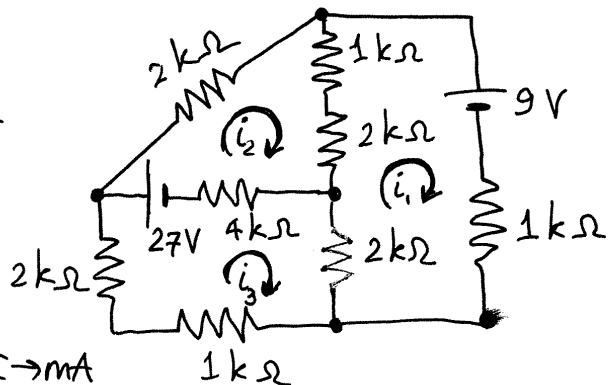
$$\mathbb{R} \vec{i} = \mathbb{E}, \text{ onde } \vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{i} = \mathbb{R}^{-1} \mathbb{E}}$$
 encontrando-se assim as correntes de malha.
- ⑤ A corrente numa resistência, I_a , será igual a corrente de malha i_j , se a resistência estiver apenas na malha j , ou $i_j - i_k$, se estiver entre as malhas j e k (tendo em conta os sinais obtidos)

Exemplo. Determine as voltagens e correntes nas resistências.

Unidades: $\Delta V \rightarrow V$

$R \rightarrow k\Omega \Rightarrow I \rightarrow mA$



Designando as 3 malhas como foi indicado no circuito e com correntes de malha no sentido horário, as matrizes são:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \\ -27 \end{bmatrix}$$

No Maxima, o sistema resolve-se com o comando:

$$\Rightarrow i_1 = -2, i_2 = 1, i_3 = -3$$

Com as correntes de malha podem calcular-se as correntes, voltagens e potências nos dispositivos do sistema. Por exemplo, na resistência de $2k\Omega$ na diagonal, I é igual a i_2 , e como i_2 deu positiva, quer dizer que $I = 1mA$, de baixo para cima, $\Delta V = 2 \times 1 = 2V$.

Na fonte de $27V$, $|i_3| = 3mA$ passa de direita para esquerda (i_3 deu negativa) e $|i_2| = 1mA$, também de direita para a esquerda. Como tal, $I = 4mA$, e a fonte (gerador) fornece potência $P = 27 \times 4 = 108mW$.

Na fonte de $9V$, $I = |i_1| = 2mA$, de baixo para cima. Essa fonte também está como gerador e fornece $18mW$.

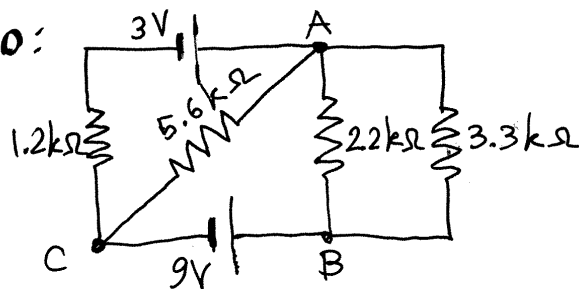
Aula 9.2018-10-19

MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

Num circuito com várias fontes, as correntes e tensões são a sobreposição das correntes e tensões produzidas por cada uma das fontes, quando as outras não atuam (estão em curto-circuito).

Este método consiste em resolver vários circuitos, em que apenas uma das fontes atua e as outras são substituídas por curto-circuitos. No fim somam-se as correntes/tensões de todos os circuitos. É útil apenas se os circuitos obtidos podem ser resolvidos facilmente, sem usar o método das malhas (senão, era melhor usar método das malhas com todas as fontes).

Exemplo:



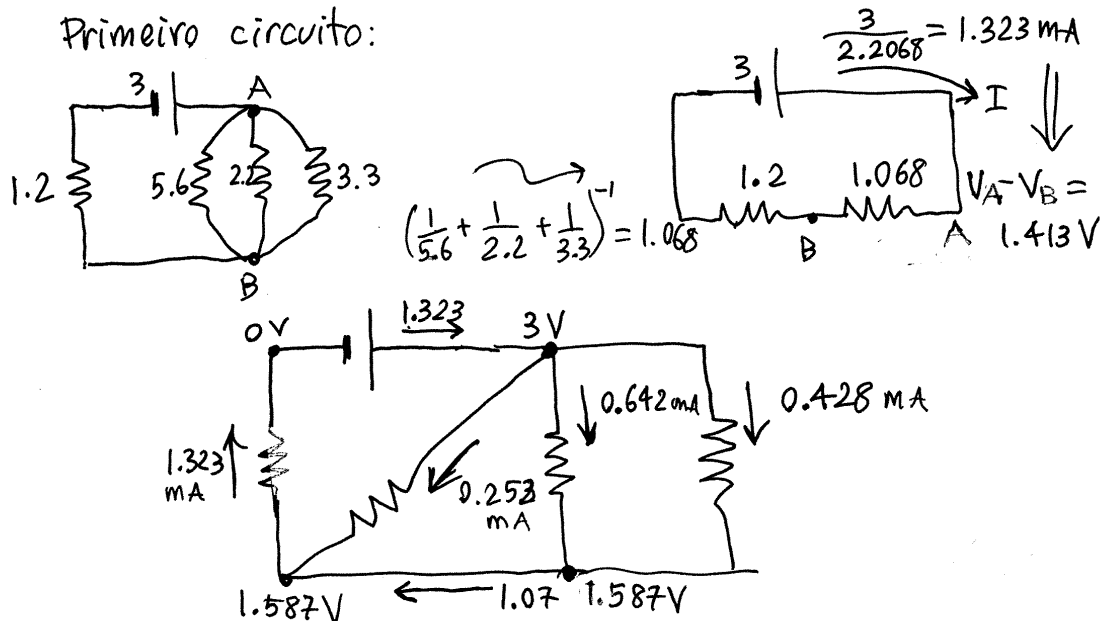
Unidades:

$R \rightarrow k\Omega$

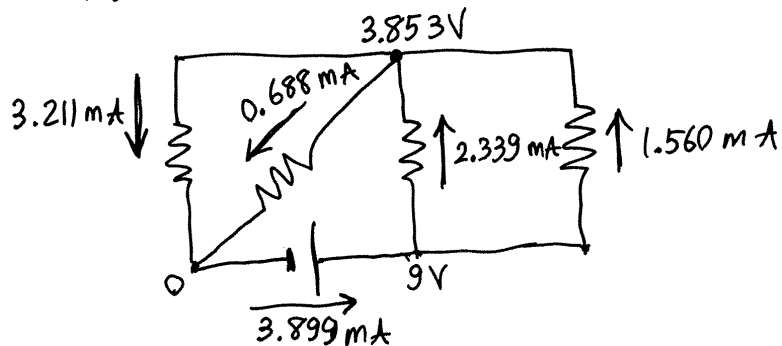
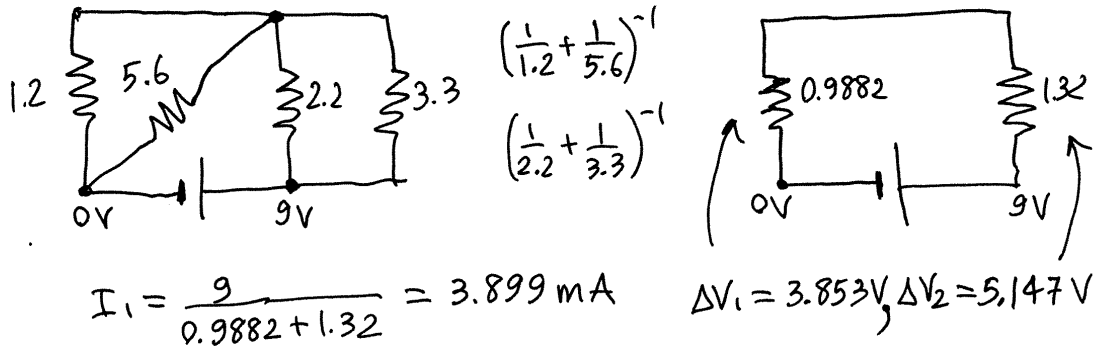
$\Delta V \rightarrow V$

$I \rightarrow mA$

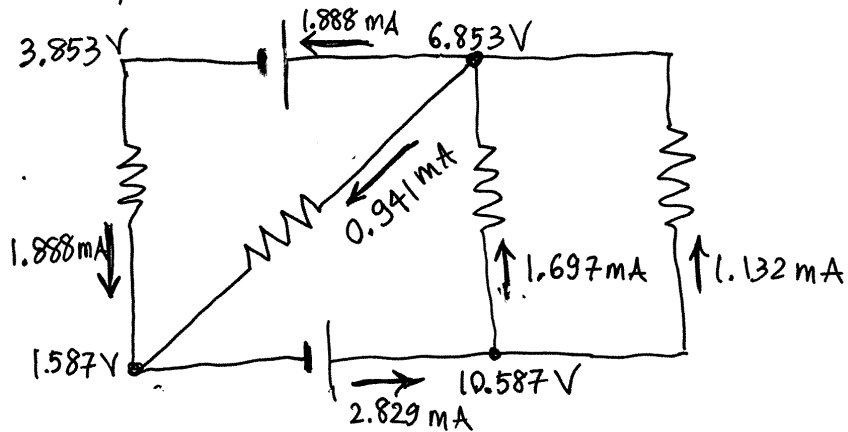
Primeiro circuito:



Segundo circuito:



Sobreposição dos dois circuitos:



A fonte de 9V fornece potência (gerador) e a fonte de 3V absorve potência (recetor).

CIRCUITOS COM CONDENSADORES E RESISTÊNCIAS

- (a) No instante inicial, admitindo todos os condensadores descarregados:

$$Q_0 = 0 \Rightarrow \Delta V_0 = 0 \quad I_0 = \frac{dQ}{dt} \text{ pode ter qualquer valor}$$

os condensadores estão todos em curto-circuito

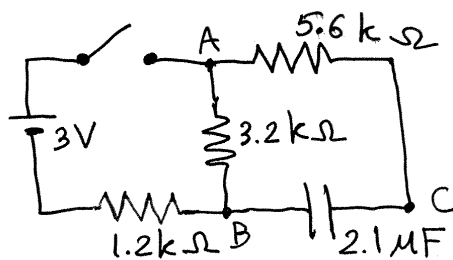
- (b) No estado estacionário, $Q_\infty = \text{constante}$

$$\Rightarrow I_\infty = 0 \quad \Delta V_\infty = \frac{Q_\infty}{C} \text{ pode ter qualquer valor}$$

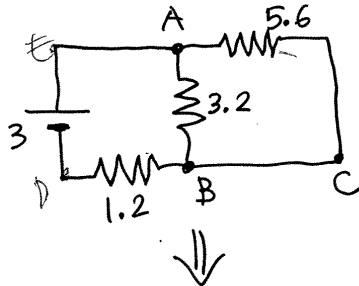
os condensadores são equivalentes a interruptores abertos.

- (c) Num estado intermédio, em que $\Delta V \neq 0$ e $I \neq 0$,
 $\Rightarrow Q \neq 0$; o condensador é equivalente a uma f.e.m. $\mathcal{E} = \frac{Q}{C}$

Exemplo. O condensador está inicialmente descarregado. Fecha-se o interruptor em $t_0 = 0$, e volta a abrir-se em $t = t_1$, muito tempo depois de t_0 . Determine a corrente na resistência de $5.6 \text{ k}\Omega$, em t_0 e t_1 .

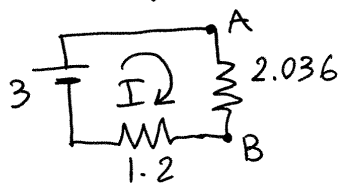


Resolução a) Em t_0 o circuito equivalente é o seguinte:
($R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$)



as resistências de 3.2 e 5.6 estão em paralelo:

$$R_p = \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{3.2} \right)^{-1} = 2.036$$

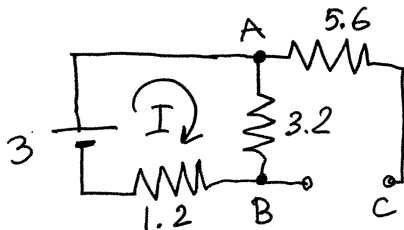


$$I = \frac{3}{1.2 + 2.036} = 0.9270 \quad (I \rightarrow \text{mA})$$

$$\Delta V_{BA} = 2.036 \times 0.9270 = 1.888$$

a corrente em $R=5.6$ é: $I = \frac{\Delta V_{BA}}{5.6} = 0.337 \text{ mA}$ (de A para C)

b) Em $t \rightarrow t_1$ (antes de ser aberto o interruptor), o condensador está no estado estacionário e o circuito é:



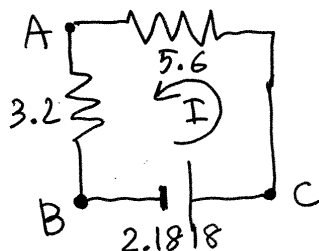
Não passa corrente de A para C!

$$\Rightarrow I = \frac{3}{1.2 + 3.2} = 0.618$$

e a diferença de potencial no condensador (ΔV_{BC}) é igual à dif. de potencial na resistência de 3.2 (ΔV_{BA})

$$\Delta V_{\text{cond.}} = RI = 3.2 \times 0.618 = 2.1818 \text{ V} \quad \begin{matrix} (+ \text{ em } C \\ - \text{ em } B \end{matrix}$$

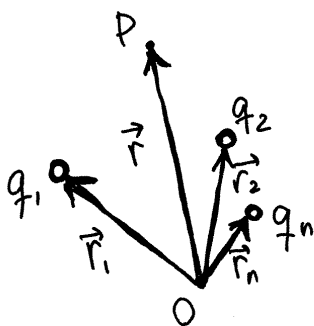
c) Em $t = t_1$ a fem de 3V está desligada mas o condensador é uma fonte de 2.1818V



$$I = \frac{2.1818}{3.2 + 5.6} = 0.248 \text{ mA}$$

(agora de C para A, sentido inverso do que em t_0)

Aula 10. 2018-10-24

CAMPO ELÉTRICO DE VÁRIAS CARGAS PONTUAIS

n cargas q_i ($i=1,2,\dots,n$), nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

O campo que a carga q_i produz no ponto P , na posição $\vec{r}$, pode expressar-se de forma vetorial:

$$\vec{E}_i = k \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{r}_i \quad |\vec{r} - \vec{r}_i| = \text{distância de } q_i \text{ até } P$$

$\hat{r}_i = \text{versor desde } q_i \text{ até } P$

$$\hat{r}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \Rightarrow \vec{E}_i = k \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

O campo total, produzido pelas n cargas no ponto P , é:

$$\boxed{\vec{E} = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}$$

componente x :

$$E_x = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (x - x_i)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2)^{3/2}}$$

e semelhante para E_y e E_z .

Numa distribuição contínua de cargas, a soma é substituída por um integral triplo, e q_i é substituído por $dq_i = \rho_i dx_i dy_i dz_i$, onde ρ_i é a carga volumica na posição (x_i, y_i, z_i) .

No entanto, em alguns casos, em que existe simetria, é possível determinar o campo elétrico, sem ser necessário calcular integrais, usando a lei de Gauss.

A lei de Gauss enuncia-se mais facilmente introduzindo o conceito de fluxo elétrico.

FLUXO ELÉTRICO

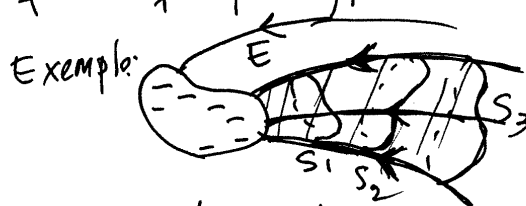
Como o campo elétrico $\vec{E}$ é semelhante ao campo de velocidades $\vec{v}$ de um fluido incompressível, pode pensar-se que $\vec{E}$ implica movimento de "fluido elétrico" no espaço. Numa superfície S , perpendicular às linhas de campo, e com área A , a quantidade de fluido que passa através de S , por unidade de tempo é:

$$\Phi = EA \quad (\text{se } E \text{ for constante})$$

Φ chama-se fluxo elétrico.

tubo de fluxo: volume delimitado pelas linhas de campo que passam pela fronteira duma superfície S .

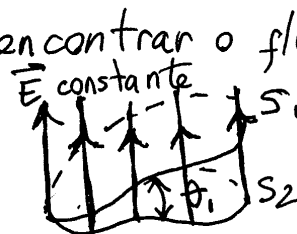
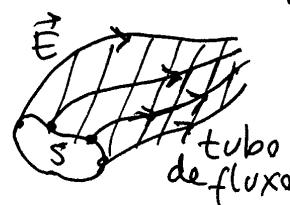
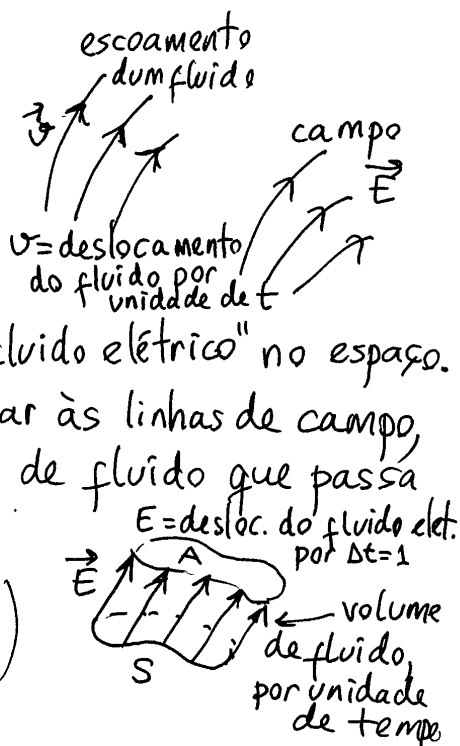
O fluxo em qualquer outra superfície que seja fronteira do tubo será o mesmo (o volume de fluido que passa, por unidade de t , é o mesmo).



$$\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = \Phi_{S3}$$

Esse facto pode usar-se para encontrar o fluxo através duma superfície S_1 , plana, que faz um ângulo θ_1 com a perpendicular ao campo:

S_2 = superfície no mesmo tubo de fluxo de S_1 , mas perpendicular ao campo.

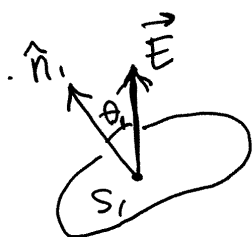


$$\Phi_{S_2} = EA_2 \quad (\text{se } E \text{ for constante.}) \quad (A_2 = \text{área de } S_2, \text{ perpendicular a } \vec{E})$$

$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} \quad (\text{estão no mesmo tubo})$$

Mas, observe-se que: $A_2 = A_1 \cos \theta_1$ ($A_1 = \text{área de } S_1$)

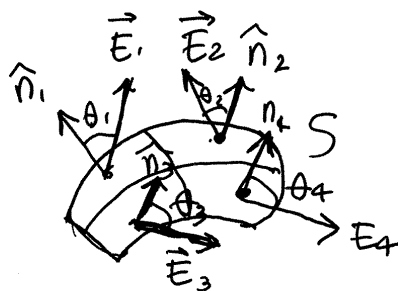
$$\Rightarrow \Phi_{S_1} = EA_2 = EA_1 \cos \theta_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{fluxo numa superf.} \\ \text{inclinação } \theta_1 \\ \text{na perpendicular} \end{array} \right)$$



O ângulo θ_1 é também o ângulo entre o campo $\vec{E}$ e o versor $\hat{n}_1$, normal à superfície S_1 .

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{S_1} = A_1 (\vec{E} \cdot \hat{n}_1)} \quad \text{Se } S_1 \text{ é plana e } \vec{E} \text{ constante nela.}$$

Num campo qualquer $\vec{E}$, não constante, e uma superfície S curva, divide-se a superfície em pequenos pedaços, aproximados por planos, numa região infinitesimal, em que $\vec{E}$ é aproximadamente constante, e somam-se os fluxos nesses pedaços:



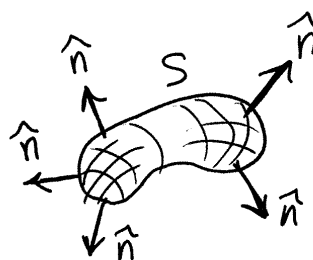
$$\Phi_S \approx A_1 (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1) + A_2 (\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2) + A_3 (\vec{E}_3 \cdot \hat{n}_3) + A_4 (\vec{E}_4 \cdot \hat{n}_4)$$

O resultado aproxima-se do valor exato (se $\vec{E}$ for contínuo e $\hat{n}$ também), no limite quando o número de pedaços for infinito. Como tal, o fluxo elétrico através da superfície S é igual ao integral de superfície da função $\vec{E}(x, y, z)$ na superfície S :

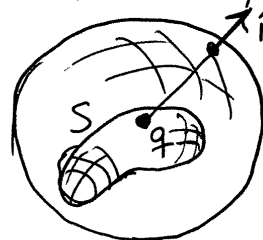
$$\boxed{\Phi_S = \iint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dA}$$

LEI DE GAUSS

Seja S uma superfície fechada, e $\hat{n}$ o versor normal a S , apontando para fora, em qualquer ponto de S .



Para calcular o fluxo Φ_S através de S , do campo produzido por uma carga pontual q , dentro de S , observa-se que qualquer esfera com centro em q está no mesmo tubo de fluxo da superfície S .



esfera com centro em q e raio R

O campo que q produz na superfície da esfera é: $\vec{E} = \frac{kq}{R^2} \hat{n}$ ($\hat{n}$ = normal à esfera, é na direção radial desde q .)

$$\Rightarrow \Phi_{\text{esfera}} = \iint_{\text{esfera}} \left(\frac{kq}{R^2} \hat{n} \right) \cdot \hat{n} dA = \frac{kq}{R^2} \iint_{\text{esfera}} dA$$

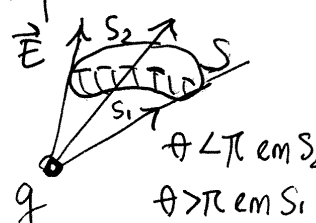
O integral é igual à área total da superfície da esfera, $4\pi R^2$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{\text{esfera}} = 4\pi kq = \Phi_S} \quad \text{porque } S \text{ está no mesmo tubo da esfera}$$

Se $q > 0$, o fluxo será positivo, que quer dizer que as linhas de campo saem de dentro de S .

$q < 0$ implica fluxo negativo, que corresponde a linhas de campo a entrar para dentro de S .

Se q estiver fora de S , entram linhas por uma parte S_1 , e saem por outra parte S_2 .



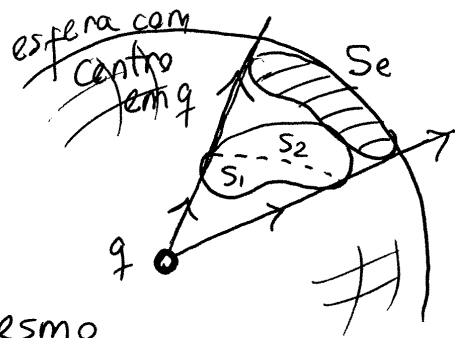
O fluxo através de S é:

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2}$$

em que Φ_{S_1} e Φ_{S_2} têm sinais opostos.

S_1 e S_2 encontram-se no mesmo tubo de fluxo de uma superfície S_e , na superfície duma esfera com centro em q . Como tal:

$$\Phi_{S_1} = -\Phi_e, \quad \Phi_{S_2} = \Phi_e \Rightarrow \Phi_S = -\Phi_e + \Phi_e = 0$$



Resumindo, o fluxo elétrico devido a uma carga pontual q , através duma superfície S , fechada, é:

$$\Phi_S = \begin{cases} 0, & \text{se } q \text{ estiver fora de } S \\ 4\pi k q, & \text{se } q \text{ estiver dentro de } S \end{cases}$$

Qualquer distribuição de carga pode ser dividida em n cargas pontuais. Como tal o fluxo elétrico devido a qualquer distribuição de cargas, através duma superfície fechada S é:

$$\Phi_S = \sum_{i=1}^n \Phi_i \quad \Phi_i = \text{fluxo devido à carga } q_i$$

$$\Rightarrow \Phi_S = \sum_{\text{dentro de } S} \Phi_i + \sum_{\text{fora de } S} \Phi_i = 4\pi k \sum_{\substack{q_i \text{ dentro} \\ \text{de } S}} q_i + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}}} \quad \text{Lei de Gauss}$$

q_{int} = carga total no interior de S
= soma das cargas q_i dentro de S .

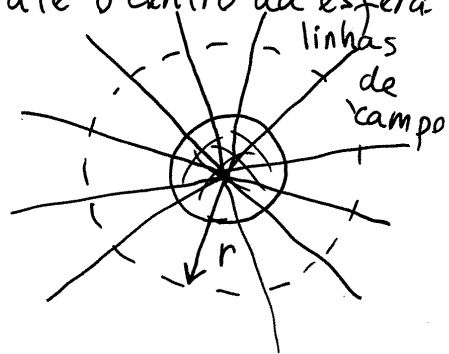
Aula 11. 2018-10-26

ESFERA CONDUTORA ISOLADA E CARREGADA

Como a carga Q distribui-se uniformemente na superfície, há simetria esférica; ou seja, se existir campo $\vec{E}$, deverá ser na direção radial, e poderá depender apenas da distância r até o centro da esfera.

Considere-se uma superfície imaginária S , esférica, de raio r e com centro no mesmo centro da esfera condutora.

Como $|\vec{E}|$ depende apenas de r , será constante em S . E como $\vec{E}$ é perpendicular, conclui-se que:



$$\Phi_s = EA = 4\pi r^2 E \quad (E = \text{componente radial de } \vec{E})$$

Mas como S é superfície fechada, pela lei de Gauss:

$$\Phi_s = 4\pi k q_{\text{int}}$$

Comparando as duas equações anteriores, encontra-se o valor de E :

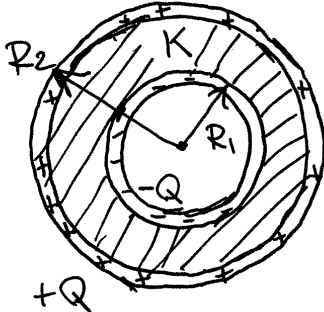
$$E = \frac{k q_{\text{int}}}{r^2}$$

(a) se $r > R$, toda a carga Q está dentro de $S \Rightarrow q_{\text{int}} = Q$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{kQ}{r^2}} \quad (r > R)$$

(b) se $r < R$, como a carga está na superfície esférica de raio R , então $q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0} \quad (r < R)$

CONDENSADOR ESFÉRICO



Novamente, devido à simetria esférica, se houver campo $\vec{E}$, deverá ser radial. Dentro do dielétrico, $R_1 < r < R_2$ (r = distância desde o centro) a constante k deverá ser substituída por $\frac{k}{K}$ na lei de Gauss; sendo

a esfera de raio r :

$$\Phi_s = \begin{cases} 4\pi k q_{int}, & r < R_1 \text{ ou } r > R_2 \\ \frac{4\pi k}{K} q_{int}, & R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

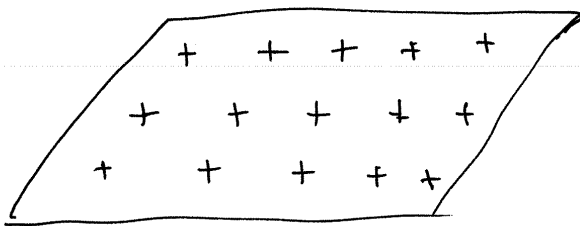
em $r < R_1$, $q_{int} = 0$, em $r > R_2$, $q_{int} = -Q + Q = 0$
e dentro do dielétrico, $R_1 < r < R_2$, $q_{int} = -Q$

$$\Rightarrow \Phi_s = \begin{cases} -\frac{4\pi k}{K} Q, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r < R_1 \text{ ou } r > R_2 \end{cases}$$

Como $\Phi_s = 4\pi r^2 E$, conclui-se que a componente radial do campo é:

$$E = \begin{cases} -\frac{kQ}{Kr^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r < R_1 \text{ ou } r > R_2 \end{cases}$$

PLANO INFINITO COM CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE



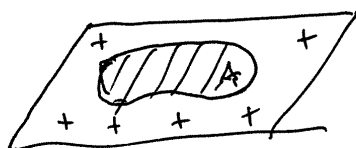
σ = carga superficial
= constante
(carga por unidade de superfície)

Por simetria, as linhas de campo têm de ser perpendiculares ao plano, e só dependerá da distância a plano. Considere-se a superfície fechada S que é um cilindro reto com duas tampas de área A , paralelas ao plano e à mesma distância d , nos dois lados do plano.



$\vec{E}$ não produz fluxo na parede lateral do cilindro, por ser perpendicular a $\hat{n}$. Nas duas tampas, $\vec{E}$ é perpendicular e com módulo constante (igual nas duas):

$$\Rightarrow \Phi_s = 0 + EA + EA = 2EA$$

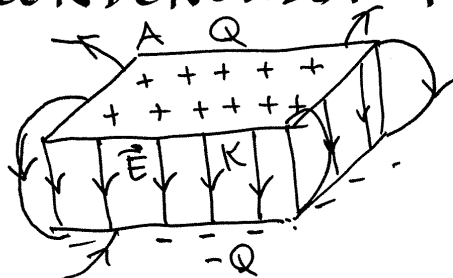


A carga interna em S é a carga numa superfície de área A no plano: $q_{\text{int}} = \sigma A$

$$\Rightarrow \text{Lei de Gauss: } \Phi_s = 4\pi k q_{\text{int}} = 4\pi k \sigma A$$

$$\Rightarrow \boxed{E = 2\pi k \sigma} \quad \text{Constante. Não depende da distância } d.$$

CONDENSADOR PLANO.



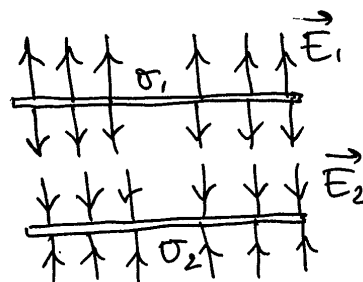
No centro do condensador as linhas de campo são aproximadamente paralelas, entre as armaduras e o campo é aproximadamente igual ao campo de dois

planos infinitos, com $\sigma_1 = \frac{Q}{A}$ e $\sigma_2 = -\frac{Q}{A}$

O campo total $\vec{E}$ é a soma vetorial dos dois campos

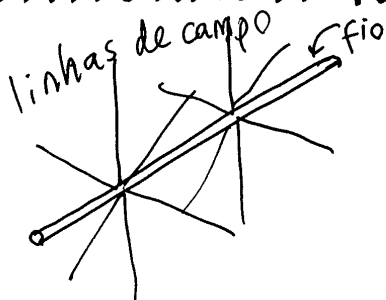
$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = 2\pi k |\sigma|$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \begin{cases} \frac{4\pi k |Q|}{A}, & \text{entre as armaduras} \\ 0, & \text{fora do condensador} \end{cases}$$



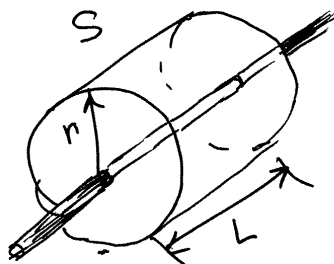
$$\Delta V = \int_0^d |\vec{E}| ds = \frac{4\pi k |Q| d}{A} \quad C_0 = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{A}{4\pi k d}$$

FIO RETILÍNEO COM CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE



λ = carga linear = constante (carga por unidade de comprimento).

Por simetria, as linhas de campo serão perpendiculares ao fio e $|\vec{E}|$ dependerá apenas da distância r ao fio.



S = cilindro de raio r , tampas perpendiculares ao fio e eixo no fio.

$$\Phi_S = 0 + 2\pi r L E + 0 \quad \leftarrow \Phi \text{ nulo nas tampas}$$

$\leftarrow$ área da parede lateral do cilindro de raio r e altura L .

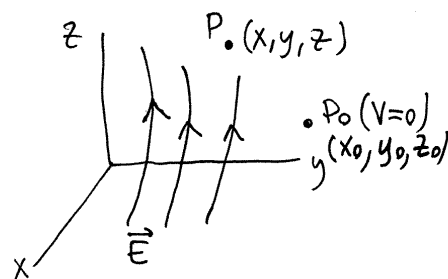
$$\Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}} = 4\pi k L \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{2k\lambda}{r}}$$

Aula 12. 2018-11-07

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

O potencial V é uma função escalar, que a cada ponto P do espaço atribui um valor $V(x, y, z)$ definido pelo integral de linha do campo:



$$V(x, y, z) = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (P_0 \text{ ponto onde arbitra-se que } V=0)$$

A diferença de potencial entre dois pontos (x, y, z) e $(x+\Delta x, y, z)$ é:

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Como o integral não depende do percurso ($\vec{E}$ é conservativo), usando um percurso reto entre os pontos, com $d\vec{r} = \hat{i} dx$, obtém-se:

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} E_x dx = - \bar{E}_x \Delta x$$

onde $\bar{E}_x$ é o valor médio da componente E_x do campo, ao longo do percurso reto; no limite $\Delta x \rightarrow 0$, esse percurso é muito curto e $\bar{E}_x$ aproxima-se do valor de E_x no ponto (x, y, z) . Como tal,

$$E_x(x, y, z) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$

que é a derivada parcial de V , em ordem a x , e denota-se:

$$\boxed{E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}}$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ calcula-se derivando V em ordem a x , enquanto y e z permanecem constantes.

De forma semelhante obtêm-se:
$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

E observe-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

E como $V(x, y, z)$ é função contínua, a ordem das duas derivadas não interessa; como tal:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}} \quad \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}} \quad \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}}$$

Que são as condições para que o campo $\vec{E}$ seja conservativo e são equivalentes a dizer que a sua matriz jacobiana

$$\mathbb{J}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{é simétrica} \\ & (= -\text{hessiana de } V) \end{aligned}$$

Operador nabla: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

O campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

e, portanto, o seu rotacional é nulo:

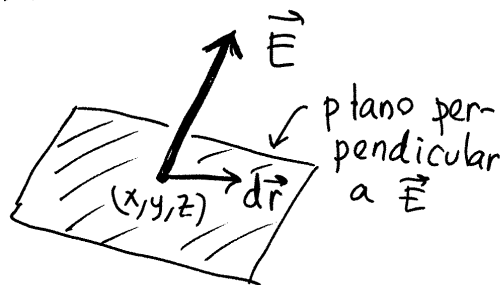
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

Num ponto (x, y, z) um deslocamento $d\vec{r}$ no plano perpendicular a $\vec{E}$ conduz a:

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

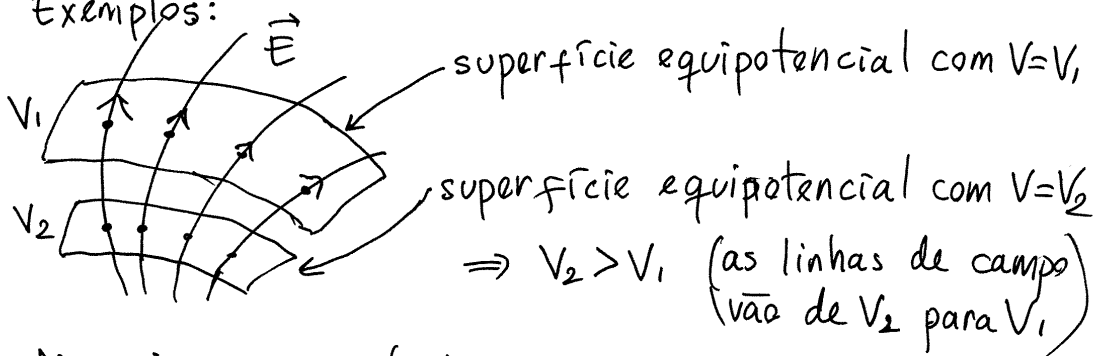


Como tal, não existe diferença de potencial entre os pontos na vizinhança de (x, y, z) , no plano perpendicular a $\vec{E}$. Os pontos onde V tem o mesmo valor formam uma **superfície equipotencial** contínua, perpendicular às linhas de campo $\vec{E}$.

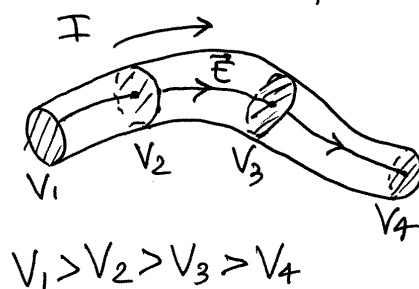
O valor máximo de $-\vec{E} \cdot d\vec{r}$ obtém-se quando $d\vec{r}$ apontar na direção de $\vec{E}$, mas no sentido oposto; ou seja:

$\vec{E}$ indica a direção e sentido em que o potencial decresce mais rapidamente

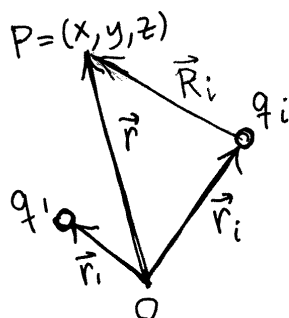
Exemplos:



Num fio com corrente I ,
(condutor)
as equipotenciais são perpendiculares ao fio e com valores decrescentes no sentido da corrente.



POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS PONTUAIS



No ponto P na posição $\vec{r} = (x, y, z)$, a carga q_i produz campo:

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i \hat{R}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \quad \hat{R}_i = \text{versor de } (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

usando origem no ponto onde está q_i , $\vec{E}_i = \frac{k q_i \hat{R}_i}{R_i^2}$ ($\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$)

E arbitrando $V=0$ em $r \rightarrow \infty$, o potencial devido a q_i é:

$$V_i = - \int_{\infty}^P \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^{R_i} \frac{k q_i}{R^2} dR = \frac{k q_i}{R} \Big|_{\infty}^{R_i} = \frac{k q_i}{R_i} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mesmo} \\ \text{ sinal} \\ \text{ de } q_i \end{array} \right)$$

$d\vec{r} = \hat{R} dR$ (percurso de integração reto, direção $\hat{R}_i$)

Ou seja, o potencial do sistema de n cargas é:

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2)^{1/2}}$$

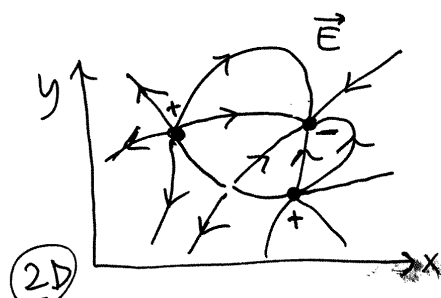
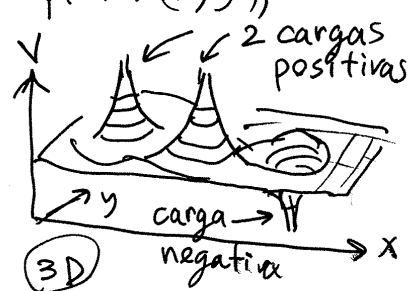
Cargas num plano. Se todas as cargas estiverem no mesmo plano, por exemplo, o plano (x, y) ,

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}$$

é uma função de duas variáveis, que pode ser representada num gráfico em 3D.

As equipotenciais passam a ser curvas no plano (x, y) .

(interseção das superfícies equipotenciais com o plano das cargas.)



Aula 13. 2018-11-09

Exemplo. Três cargas pontuais, de $-4\mu\text{C}$, $3\mu\text{C}$ e $2\mu\text{C}$, nas posições $(20,10)$, $(10,-30)$ e $(-30,0)$ do plano xy (distâncias em cm).

Unidades: $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 9 \times 10^{9+1-6} \frac{\text{V} \cdot \text{dm}}{\mu\text{C}} = 90 \frac{\text{kV} \cdot \text{dm}}{\mu\text{C}}$

No Maxima, as cargas (em μC) e as posições (em decímetros), guardam-se em 3 listas:

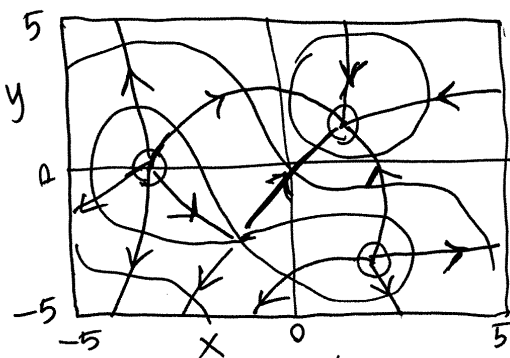
$$q: [-4, 3, 2]$$

$$xq: [2, 1, -3] \quad yq: [1, -3, 0]$$

O potencial, em função de x e y é:

$$V = 90 * \text{sum}(q[i] / \text{sqrt}((x - xq[i])^2 + (y - yq[i])^2), i, 1, 3);$$

E o gráfico das equipotenciais e linhas de campo é:

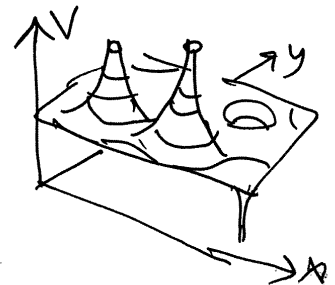


Clica-se para traçar equipotenciais. Entra-se no menu de configuração, define-se uma cor para "fieldlines", apaga-se a cor de "curves" e clica-se para traçar linhas de campo.

$V(x,y)$ pode também visualizar-se em 3D:

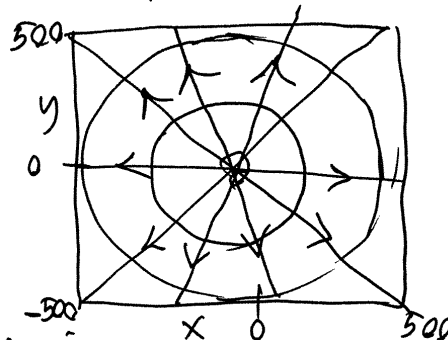
$$\text{plot3d}(V, [x, -5, 5], [y, -5, 5], [z, -800, 800]);$$

V aproxima-se de $+\infty$ nas cargas positivas, e de $-\infty$ nas cargas negativas.

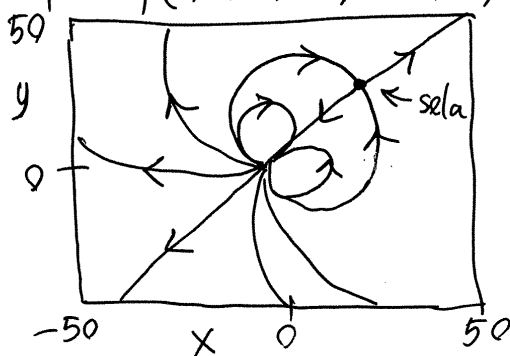


Como a carga total é
 $q_t = -4 + 3 + 2 = +1 \mu C$,
 visto de longe, as linhas
 de campo são radiais
 e as equipotenciais
 são esferas

`ploteg(V,[x,-500,500],[y,-500,500])`



`ploteg(V,[x,-50,50],[y,-50,50]);`



Num domínio intermédio
 descobre-se um segundo ponto
 de sela aproximadamente
 em $(24.5, 25.9)$
 (decímetros)

POTENCIAL DE SISTEMAS SIMÉTRICOS

É mais fácil determinar $\vec{E}$, pela lei de Gauss, e integrar
 para obter o potencial: $V(x,y,z) = \int_{(x,y,z)}^{(x_0,y_0,z_0)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ← ponto onde $V_0=0$

Exemplo 1. Esfera condutora, de raio R e carga Q .

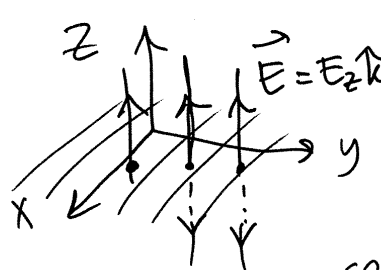
$$E_r(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad \text{arbitra-se } V_0=0 \text{ se } r_0 \rightarrow \infty$$

Ⓐ Se $r > R$, $V(r) = \int_r^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r}$

Ⓑ Se $r < R$, $V(r) = \int_r^R 0 dr + \int_R^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{R}$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r}, & r \geq R \\ kQ (\text{constante}), & r \leq R \end{cases}$$

Exemplo 2. Carga superficial constante, σ , no plano xy



$$\vec{E} = E_z \hat{k} \quad E_z = \begin{cases} 2\pi k \sigma, & z > 0 \\ -2\pi k \sigma, & z < 0 \end{cases}$$

(a) $z > 0$, $V(z) = \int_z^{z_0} 2\pi k \sigma dz = 2\pi k \sigma (z_0 - z)$
 como não é possível, $z_0 \rightarrow \infty$, seja $z_0 = 0$

$$\Rightarrow V(z) = -2\pi k \sigma z$$

(b) $z < 0$, $V(z) = \int_z^0 -2\pi k \sigma dz = 2\pi k \sigma z$

$$\rightarrow \boxed{V(z) = -2\pi k \sigma |z|}$$

CONDUTORES EM EQUILÍBRIO

condutor isolado

$$E_{int} = 0$$

$E = 0$ em qualquer ponto dentro do condutor.

(a) Se P e Q estão dentro do condutor,

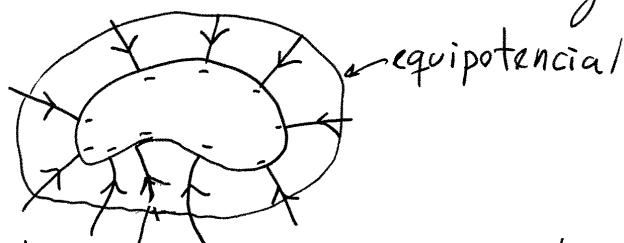
$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{O potencial é constante em todo o condutor}}$$

(b) $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0$ em qualquer superfície S , fechada dentro do condutor $\Rightarrow$ Não há carga dentro do condutor. Apenas na superfície

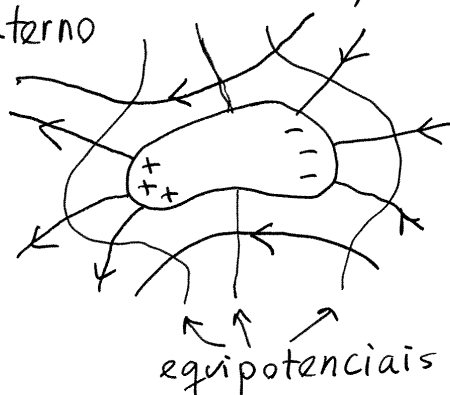
(c) A superfície do condutor (com potencial constante) é uma superfície equipotencial.

$\Rightarrow$ As linhas de campo $\vec{E}$ são perpendiculares ao condutor, e começam, ou terminam, na superfície, sem entrar no condutor

Exemplos: 1. Condutor isolado com carga negativa

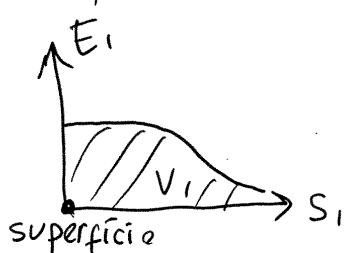
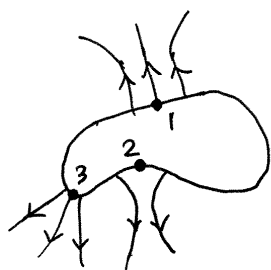


2. Condutor isolado, sem carga, dentro dum campo $\vec{E}$ externo



As cargas dentro do condutor são polarizadas.

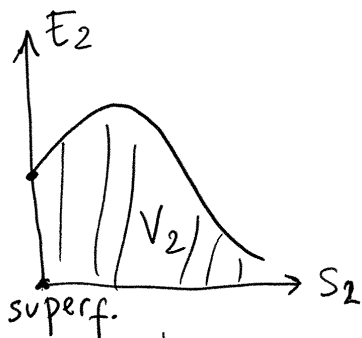
Distribuição de carga na superfície



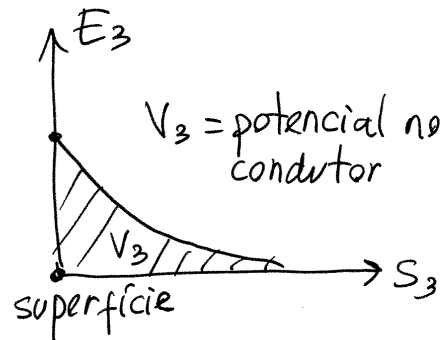
No ponto 1, onde a superfície é plana, as linhas de campo são inicialmente paralelas mas depois afastam-se $\Rightarrow E$ é aproximadamente constante e depois começa a decrescer.

$V_1 = \text{área sob } E_1$, desde $S_1 = 0 \rightarrow \infty = \text{potencial no condutor.}$

Na vizinhança do ponto 2, onde a superfície é côncava, as linhas aproximam-se e depois afastam-se $\Rightarrow E$ aumenta inicialmente e depois diminui:



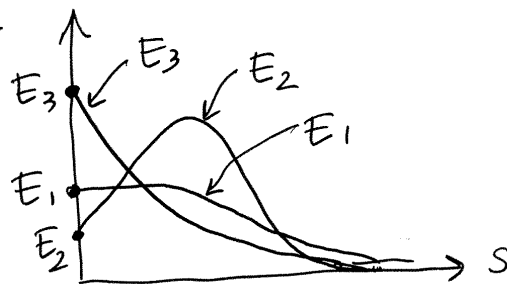
$V_2 = \text{potencial no condutor}$



$V_3 = \text{potencial no condutor}$

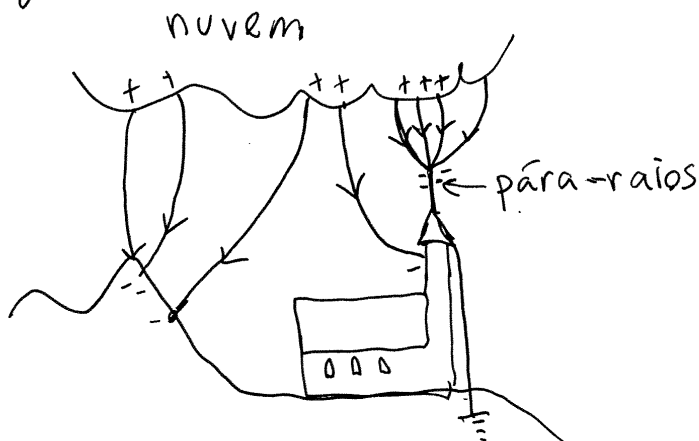
Na vizinhança do ponto 3, onde o condutor é convexo, o campo está sempre a diminuir

Como $V_1 = V_2 = V_3$, os 3 gráficos devem ser assim:



Como tal, na superfície do condutor, $E_3 > E_1 > E_2$

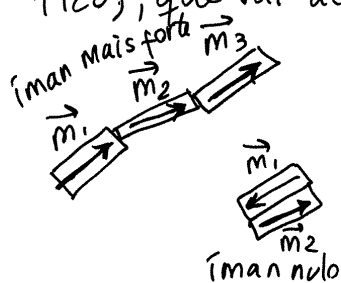
⇒ O campo elétrico (e a carga) é maior nas pontas (regiões mais convexas) do condutor.



Aula 14. 2018-11-14

FORÇA MAGNÉTICA

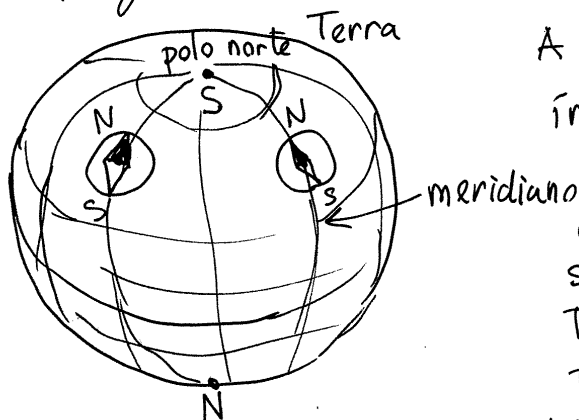
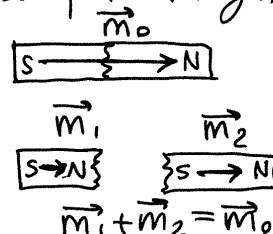
Força atrativa ou repulsiva entre ímanes. Cada íman tem dois polos, norte e sul. A força entre polos opostos é atrativa e entre polos semelhantes é repulsiva. Uma forma conveniente de representar um íman é com um vetor $\vec{m}$ (momento magnético), que vai do polo sul para o norte.



Os momentos magnéticos alinhados, um a seguir ao outro, atuam como um íman mais forte. Alinhados um ao lado do outro, em sentidos opostos, anulam-se produzindo um íman nulo.

À diferença das cargas elétricas, os polos magnéticos nunca podem ser separados.

Se um íman for quebrado em duas partes, cada parte fica com polo norte e sul e com momento magnético menor.

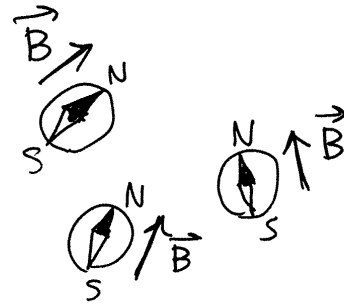
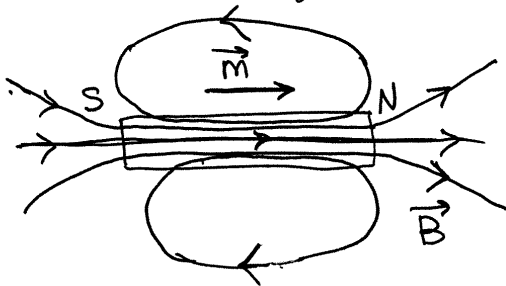


A bússola é um pequeno íman que roda, apontando na direção do meridiano, e com o seu polo norte no sentido do polo norte de Terra, porque a Terra é também um íman, com polo sul no seu polo norte geográfico.

CAMPO MAGNÉTICO

Se numa região do espaço uma bússola orienta-se, em direções (sempre) específicas, diz-se que há um campo magnético $\vec{B}$. As linhas

de campo magnético são as curvas que em cada ponto são tangentes à direção em que se orienta a bússola, e seguem o sentido do polo norte da bússola.



Por exemplo, as linhas de campo de um ímã em barra saem do polo norte e curvam-se entrando no polo sul. Dentro do ímã seguem o sentido de $\vec{m}$

Como não existem polos norte ou sul isolados (monopolos magnéticos), não existem pontos de equilíbrio atrativos ou repulsivos nos campos magnéticos. Existem apenas centros e pontos de sela e o traço da matriz jacobiana de $\vec{B}$ é nulo: $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ ($= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$)

Ou seja, o campo $\vec{B}$ tem divergência nula em todos os pontos, mas o seu rotacional, $\vec{\nabla} \times \vec{B}$, não tem de ser nulo em todos os pontos ($\vec{B}$ não é conservativo).

Há linhas de campo fechadas; nessas linhas $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$ é obviamente diferente de zero. e, como tal, o integral $\int_P^Q \vec{B} \cdot d\vec{r}$ depende do percurso

$C = \text{linha de campo}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

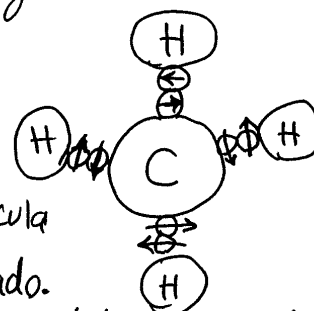
$$= \int \vec{B} \cdot d\vec{r} - \int \vec{B} \cdot d\vec{r} \Rightarrow S \neq S$$

FONTES DO CAMPO MAGNÉTICO

1. **Spin.** Momento magnético próprio das partículas elementares. Em alguns átomos, como Fe, os spins dos elétrons alinham-se produzindo momento magnético diferente de zero para o átomo.

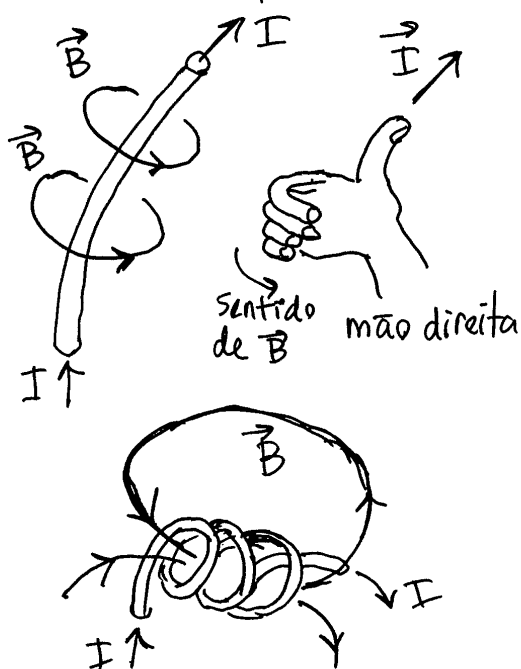
Os momentos magnéticos dos vários átomos podem também ser alinhados dando origem a um ímã.

Elétrons de valência de átomos diferentes podem juntar-se, um ao lado do outro, com spins opostos, formando moléculas, como a molécula de metano (CH_4) na figura ao lado.



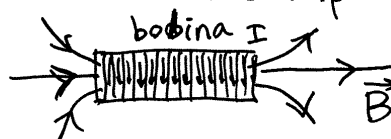
Cada átomo de hidrogênio tem um elétron de valência, que se cola a um dos 4 elétrons de valência do carbono.

2. **Corrente elétrica.** Hans Christian Ørsted descobriu, em 1820, que um condutor com corrente I produz

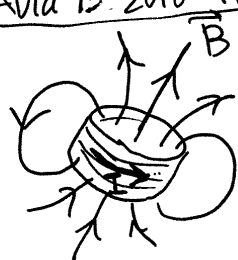


campo magnético à sua volta, com linhas de campo circulares perpendiculares a $\vec{I}$ e orientadas no sentido da regra da mão direita.

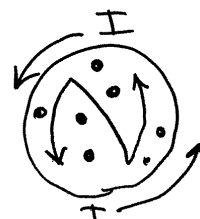
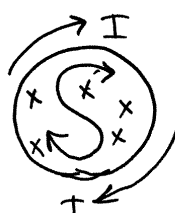
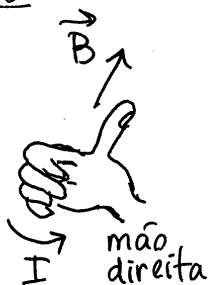
O campo de um condutor é fraco, mas enrolando-o, formando uma bobina com várias voltas, consegue-se aumentar o campo.



Aula 15. 2018-11-16



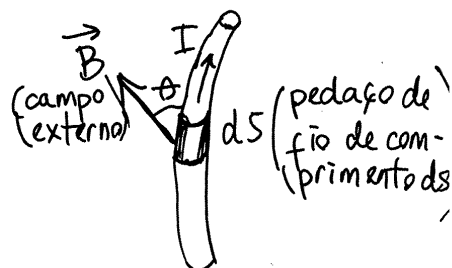
bobina com corrente I



vista de lados: linhas de campo a entrar (x) → polo sul.
Linhas a sair (•) → polo norte

FORÇA MAGNÉTICA NOS CONDUTORES COM CORRENTE

Como um condutor com corrente atua como ímã, também sofre força magnética se estiver na presença de um campo $\vec{B}$ externo.



Experimentalmente observa-se que a força em cada pedaço do condutor, de comprimento ds , é diretamente proporcional a I , a ds e ao seno do ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{I}$:

$$d\vec{F} = \text{constante} \times I \times \sin \theta \times ds$$

A constante de proporcionalidade define o módulo do campo $\vec{B}$. O sentido e direção da força $d\vec{F}$ segue a regra da mão direita, de $\vec{I}$ para $\vec{B}$.

Como tal, escreve-se: $d\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) ds$

E a força sobre o condutor será o integral:

$$\vec{F} = \int_{\text{condutor}} (\vec{I} \times \vec{B}) ds$$

FIO RETILÍNEO NUM CAMPO UNIFORME.

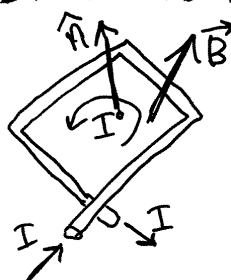
$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \int_{\text{condutor}} ds \Rightarrow \boxed{\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) L}$$

$\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{I}$ e a $\vec{B}$ $L = \text{comprimento do condutor}$

UNIDADE SI DE CAMPO MAGNÉTICO

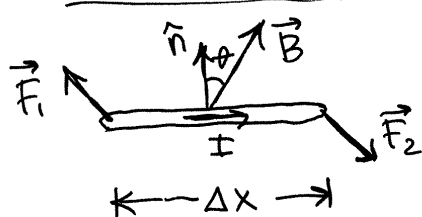
Tesla (T): $1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ Gauss (G): $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$

BINÁRIO MAGNÉTICO EM ESPIRAS COM CORRENTE

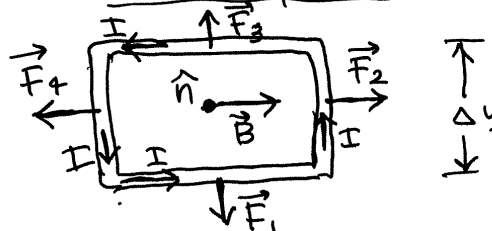


Espira (condutor numa curva fechada) retangular, dentro de campo magnético externo $\vec{B}$, uniforme, que faz um ângulo θ com o versor normal à espira ($\hat{n}$ no sentido da mão direita segundo I).

Vista lateral.



Vista superior



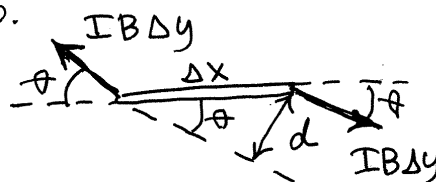
$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e $\vec{F}_4 \rightarrow$ forças magnéticas nos quatro lados da espira: $\vec{F}_i = (\vec{I}_i \times \vec{B}) L_i$ ($L_1 = L_3 = \Delta x$, $L_2 = L_4 = \Delta y$)

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = IB \Delta x \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right| \quad |\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = IB \Delta y$$

$\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ anulam-se (estão na mesma linha de ação)

$\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ produzem um binário.

A distância entre as suas linhas de ação é: $d = \Delta x \sin \theta$



E o binário é:

$$M = IB \Delta y \Delta x \sin \theta = I |\vec{B} \times \hat{n}| A$$

A ← área da espira

e produz rotação no plano perpendicular a $\vec{B}$ e $\hat{n}$, no sentido da regra da mão direita, de $\hat{n}$ para $\vec{B}$.

$$\Rightarrow \vec{M} = I (\hat{n} \times \vec{B}) \cdot A$$

ou: $\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$ onde $\vec{m} = I A \hat{n}$ é o **momento magnético** da espira.

Em geral, o binário de um campo $\vec{B}$ uniforme sobre um ímã de momento magnético $\vec{m}$ é $\vec{m} \times \vec{B}$ e faz rodar $\vec{m}$ na direção e sentido de $\vec{B}$.

Quando o campo $\vec{B}$ não é uniforme, é necessário integrar

$$\vec{M} = I \iint_{\text{espira}} (\hat{n} \times \vec{B}) dA$$

BOBINAS

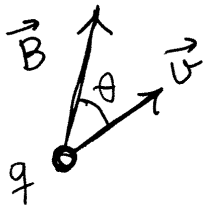
Uma bobina, formada por N espiras paralelas, todas com o mesmo versor normal $\hat{n}$ e com a mesma área A , é um eletroímã com momento magnético:

$$\vec{m} = N I A \hat{n}$$

O binário magnético sobre a bobina, produzido por um campo $\vec{B}$ externo é usado nos motores elétricos para produzir a rotação.



FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PONTUAIS



Experimentalmente observa-se que a força magnética, $\vec{F}_m$, é perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{B}$, no sentido da regra da mão direita, de $\vec{v}$ para $\vec{B}$, e com módulo:

$$|\vec{F}| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta$$

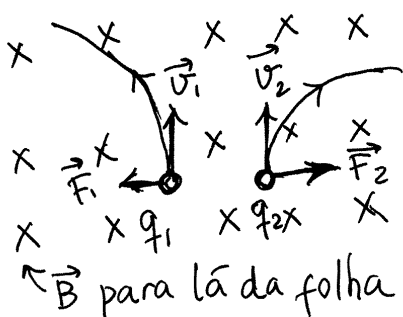
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})}$$

↙ versor
tangente

$$\Rightarrow \vec{F}_m \cdot \hat{e}_t = 0 \Rightarrow \vec{F}_m \text{ não realiza trabalho (não altera a energia cinética)}$$

Como $\vec{v}$ define a tangente à trajetória, então $\vec{F}_m$ é sempre perpendicular à trajetória

MOVIMENTO DE CARGAS NUM CAMPO $\vec{B}$ UNIFORME



Se a velocidade inicial de cada partícula ($\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) é perpendicular a $\vec{B}$, a força magnética $\vec{F}_m$ produz movimento circular uniforme com força centrípeta.

$$F_m = |q_i| v_i B = \frac{m_i v_i^2}{r_i}$$

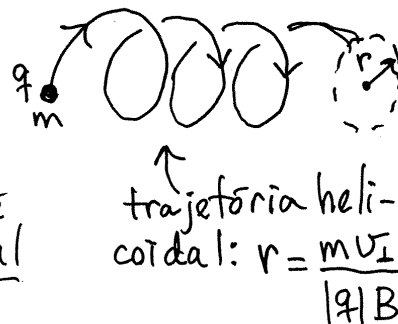
como tal, o raio da trajetória é diretamente proporcional à quantidade de movimento, $m_i v_i$, e inversamente proporcional à carga $|q_i|$ ao campo:

$$\boxed{r_i = \frac{m_i v_i}{|q_i| B}}$$

$$\text{período: } T = \frac{2\pi r_i}{v_i} = \frac{2\pi m_i}{|q_i| B}$$

As partículas com cargas opostas rodam em sentidos opostos (na figura, $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$)

Se $\vec{v}_i$ não for perpendicular a $\vec{B}$, a sua componente perpendicular, $\vec{v}_{i\perp}$, roda com movimento circular uniforme, enquanto a componente paralela, $\vec{v}_{i\parallel}$, permanece constante. O resultado é movimento helicoidal.

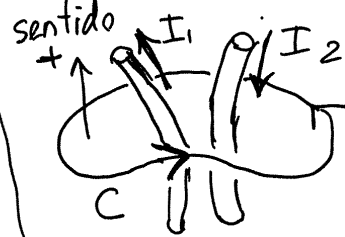


Aula 16. 2018-11-21

LEI DE AMPÈRE

O integral de linha do campo magnético, numa curva fechada C , é proporcional à corrente total que passa através da região delimitada por C , no sentido da regra da mão direita em relação ao sentido de integração:

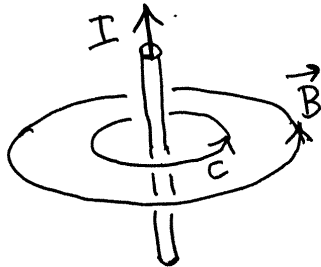
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}}$$



A constante de proporcionalidade, k_m tem o valor:

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$$

$$I_{\text{int}} = +I_1 - I_2$$

CAMPO DE UM FIO RETO COM CORRENTE I

Seja C uma curva que segue uma linha de campo

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C B ds = B(2\pi r)$$

(r = raio de C)

e, segundo a lei de Ampère:

$$2\pi r B = 4\pi k_m I$$

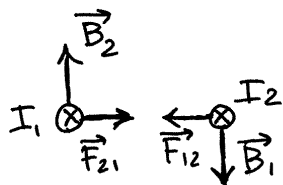
$$\Rightarrow B_{\text{fio}} = \frac{2k_m I}{r}$$

FORÇA ENTRE CONDUTORES COM CORRENTE

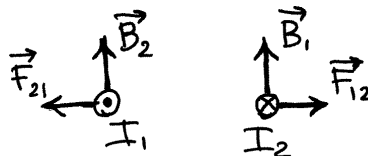
O campo magnético produzido por um fio com corrente produz força magnética em outros fios com corrente.

Entre dois fios rectos e paralelos a força é atrativa, se as correntes são no mesmo sentido, ou repulsiva, caso contrário.

correntes no mesmo sentido



correntes em sentidos opostos

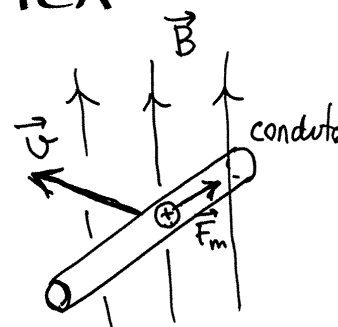


$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \ell |\vec{I}_2 \times \vec{B}_1| = \ell |\vec{I}_1 \times \vec{B}_2| = \frac{2 k_m \ell I_1 I_2}{d}$$

ℓ = comprimento dos fios d = distância entre fios

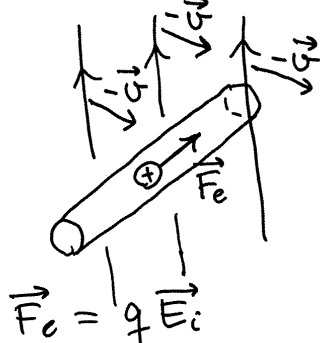
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Num fio condutor, em movimento numa região onde há campo $\vec{B}$, atuam forças sobre as cargas no condutor. Se $\vec{v} \times \vec{B}$ for na direção tangente ao fio, as cargas de condução deslocam-se dando origem a **corrente induzida**.



$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Visto no referencial em que o fio está em repouso, não há força magnética ($\vec{v}_{\text{cond.}} = \vec{0}$), mas o movimento das linhas de força origina um **campo elétrico induzido**, $\vec{E}_i$, que produz força elétrica nas cargas de condução. Em geral: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$



$\vec{F}_e = q \vec{E}_i$

referencial com $\vec{B}$ em repouso

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ são manifestações dum mesmo campo

referencial com $\vec{B}$ em movimento

$$\vec{F}_e = q \vec{E}_i$$

como as forças devem ser iguais, independentemente do referencial (inercial), conclui-se que:

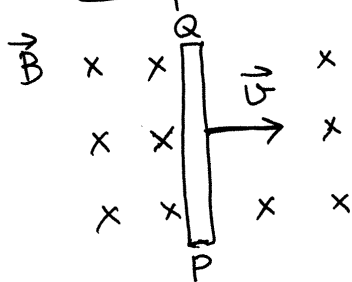
$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Campo elétrico ^{induzido} num condutor que se desloca com velocidade $\vec{v}$, num campo magnético $\vec{B}$.

O integral de linha do campo induzido, ao longo do condutor, é a **f.e.m. induzida** no condutor (diferença de potencial entre os seus extremos).

$$\mathcal{E}_i = \int_{\text{condutor}} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_{\text{condutor}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

Exemplo: condutor reto, de comprimento l , num campo $\vec{B}$ uniforme, perpendicular ao fio e à sua velocidade $\vec{v}$.

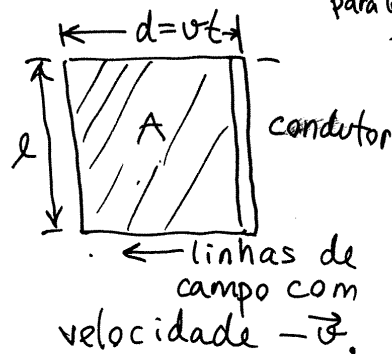


$\Rightarrow \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$ aponta para cima, ao longo do condutor.

$$\Rightarrow \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = |\vec{v} \times \vec{B}| ds = vB ds$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_i = \int_P^Q \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = vB \int_P^Q ds = vBl \quad (\text{corrente induzida de P para Q})$$

Observe-se que $v l$ é igual à área em que as linhas de campo $\vec{B}$ deslocam-se, numa unidade de tempo, em relação ao condutor.



Como tal, a f.e.m. induzida, $\mathcal{E}_i = vBl$, é igual a fluxo magnético que passa pelo condutor, por unidade de tempo.

Esse resultado pode ser generalizado para outras situações mais gerais em que exista variação de fluxo magnético (lei de Faraday).

LEI DE FARADAY

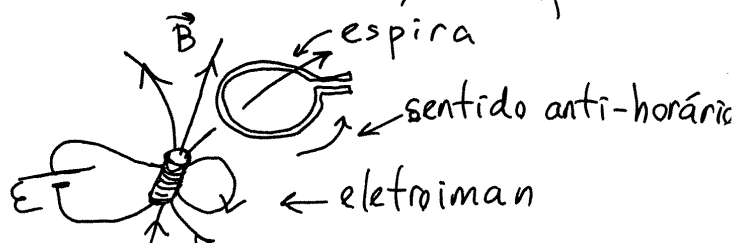
A f.e.m. induzida numa espira condutora é igual à variação de fluxo magnético, no seu interior, por unidade de tempo:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\Psi = \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \text{fluxo magnético através da espira}$$

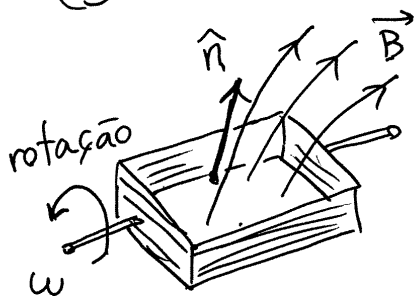
O sinal negativo interpreta-se segundo a **lei de Lenz**: A f.e.m. e corrente induzidas são no sentido que contrarie a mudança do fluxo magnético.

Exemplos: ①



O eletroímã produz fluxo Ψ de baixo para cima. Se a fonte do eletroímã for desligada, esse fluxo diminui. A corrente induzida na espira, no sentido anti-horário, produz campo induzido $\vec{B}_i$ que produz fluxo para cima. $\mathcal{E}_i = - \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = - \frac{(0 - \Psi_0)}{\Delta t} = \frac{\Psi_0}{\Delta t}$

② Bobina a rodar num campo magnético $\vec{B}$:



o fluxo através da bobina é:

$$\Psi = NAB \cos \theta$$

N = número de espiras

A = área de cada espira

θ = ângulo entre $\vec{B}$ e o versor normal à espira, $\hat{n}$.

Se a espira roda com velocidade angular ω constante:

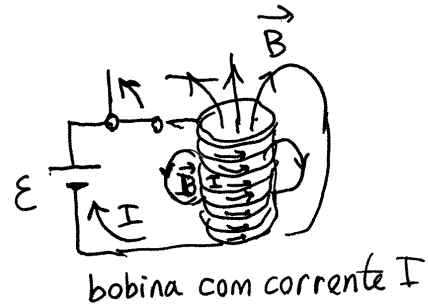
$$\theta = \omega t + \theta_0 \Rightarrow \Psi = NAB \cos(\omega t + \theta_0) \quad \mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = \omega NAB \sin(\omega t + \theta_0)$$

a f.e.m. induzida é alternada.

Aula 17. 2018-11-23

AUTO INDUÇÃO

Em qualquer espira ou bobina, se a corrente muda, o campo magnético dentro dela também muda, e a variação de fluxo

bobina com corrente I

através da espira dá origem a f.e.m. induzida. Por exemplo, na bobina da figura, quando o interruptor for aberto, a diminuição da corrente dá origem a uma f.e.m. induzida que contraria a diminuição da corrente; como tal, a corrente não diminui instantaneamente até zero, mas o faz de forma gradual.

O campo $\vec{B}$ produzido pela bobina é diretamente proporcional à corrente I e ao número de espiras, N :

$$\vec{B}(\vec{r}) = N I \vec{f}(\vec{r}) \quad (\vec{f} = \text{função da posição}).$$

O fluxo magnético através da bobina é o fluxo total através das N espiras:

$$\Psi = N \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dA = N^2 I \iint_{\text{espira}} \vec{f} \cdot \hat{n} \, dA$$

o integral de superfície de $\vec{f}$ é um número, K , que depende da forma e tamanho da espira (quanto maior for, maior K)

$$\Rightarrow \Psi = N^2 I K$$

Aplicando a lei de Faraday, a f.e.m. induzida é:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = -N^2 \dot{I} K$$

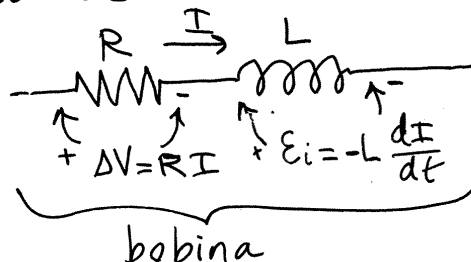
a constante $\boxed{L = N^2 K}$ chama-se **indutância** da bobina. Em geral, em qualquer dispositivo onde há fluxo magnético, o fluxo é proporcional a I : $\Psi = L I$

E a f.e.m. auto-induzida no dispositivo é:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}}$$

L = indutância do dispositivo

Diagrama de circuito:



R representa o efeito Joule no condutor.

L representa a auto-indução no condutor

Unidade S.I. de indutância

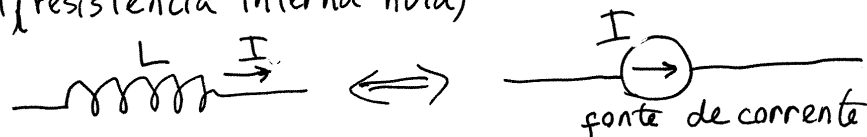
henry (H) $1H = 1 \frac{V \cdot s}{A}$

CIRCUITOS D.C. COM INDUTORES

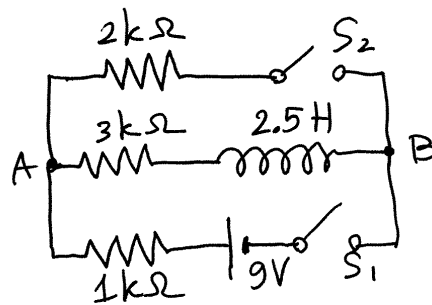
- ① $I=0$ no indutor. $\Rightarrow$ Não há campo magnético, mas $\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$ pode ter qualquer valor.
 $\Rightarrow$ o indutor é equivalente a um interruptor aberto.

- ② Estado estacionário ($\frac{dI}{dt} = 0$) $\Rightarrow \Delta V = -L \frac{dI}{dt} = 0$
 voltagem nula mas corrente com qualquer intensidade.
 $\Rightarrow$ equivalente a um curto-circuito.

- ③ $I \neq 0$ e a mudar (estado não estacionário)
 O indutor é equivalente a uma fonte de corrente I_0 ideal (resistência interna nula)



mas é uma fonte variável (I pode ser diferente de I_0).
(I pode ser diferente de I_0 noutros instantes)

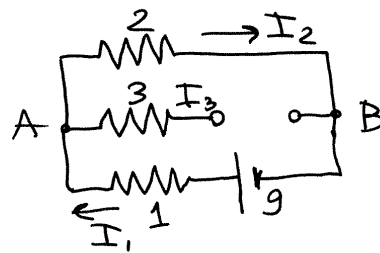
Exemplo.

Em $t < t_1$, os dois interruptores S_1 e S_2 estão abertos e não há corrente no indutor. Em t_1 fecham-se simultaneamente S_1 e S_2 , e em t_2 (muito tempo depois de t_1), abre-se S_2 , mantendo S_1 fechado. Determine as correntes nas três resistências em t_1 , t_2 e $t \rightarrow \infty$.

Resolução. Unidades: $R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow mA$.

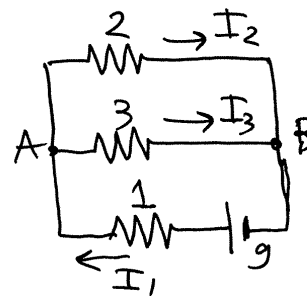
a) $t = t_1$. O indutor é equivalente a um interruptor aberto $\Rightarrow I_3 = 0$.

$$I_1 = I_2 = \frac{9}{2+1} = 3 \text{ mA}$$



b) $t \rightarrow t_2^-$. Indutor em estado estacionário (curto-circuito).

$$I_1 = \frac{9}{\left(1 + \frac{3 \times 2}{3+2}\right)} = 4.09 \text{ mA}$$



$$V_A - V_B = 4.09 \left(\frac{3 \times 2}{3+2} \right) = 4.91 \text{ V}$$

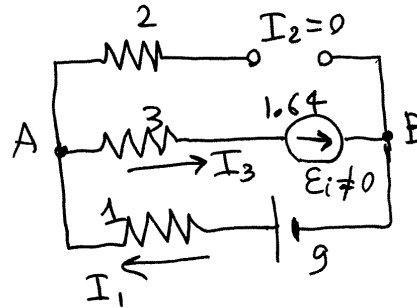
$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{2} = 2.45 \text{ mA} \quad (I_2 + I_3 = I_1)$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{3} = 1.64 \text{ mA}$$

© $t = t_2$

$I_2 = 0$

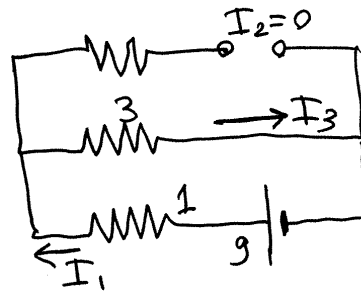
$I_1 = I_3 = I_{\text{fonte}} = 1.64 \text{ mA}$



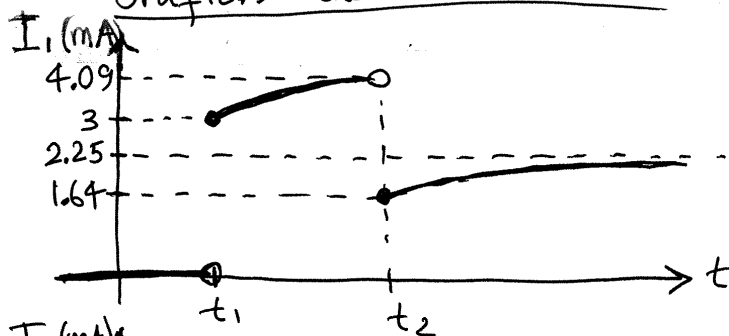
Ⓐ $t \rightarrow \infty$. Indutor no estado estacionário.

$I_2 = 0$

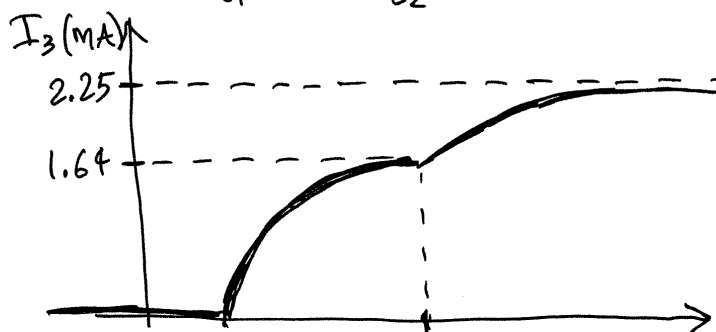
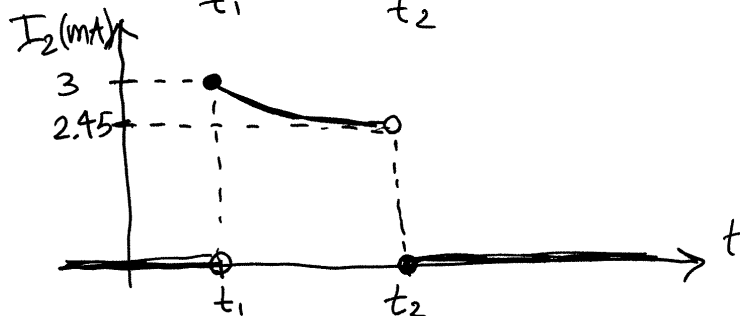
$I_1 = I_3 = \frac{9}{3+1} = 2.25 \text{ mA}$



Gráficos das 3 correntes:

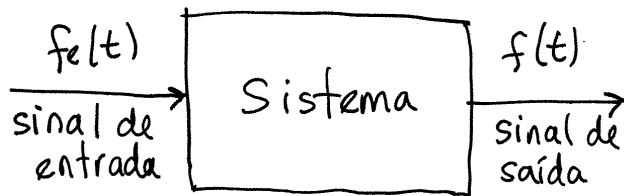


As correntes em $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ são descontínuas em t_1 e t_2 .

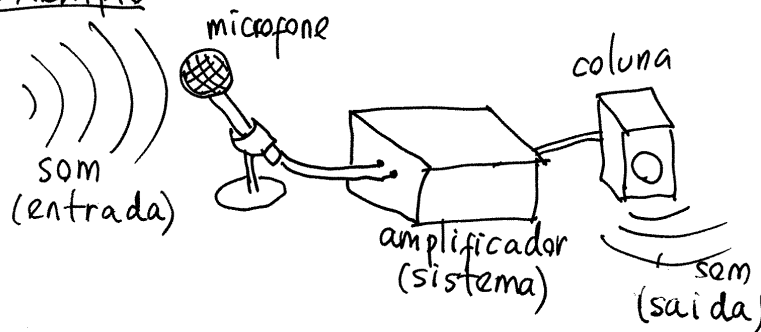


A corrente em $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ tem de ser contínua porque é a mesma corrente no indutor, que é contínua, porque a sua derivada, $\frac{dI}{dt} = -\frac{E_i}{L}$ existe

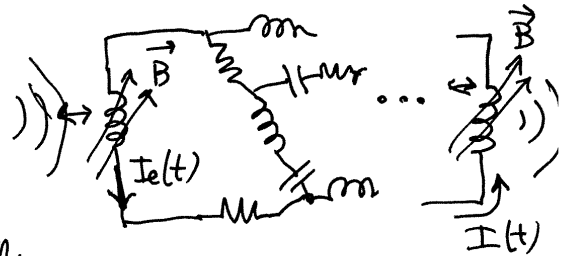
Aula 18. 2018-11-28

PROCESSAMENTO DE SINAIS

Um "sinal" é uma função que depende de t .
 O problema consiste em descobrir o sinal de saída, $f(t)$, correspondente a um sinal de entrada, $f_e(t)$, conhecido, num sistema conhecido.

Exemplo

No amplificador, a entrada é a corrente $I_e(t)$, na bobina do microfone, induzida pela vibração da membrana fixa a essa bobina, perto dum íman.



O sinal de saída $I(t)$ é a corrente na bobina que está fixa a um cone no altifalante. A variação dessa corrente dentro do campo dum íman, faz vibrar o cone, produzindo som.

Os sistemas que vamos analisar estão formados por elementos ativos (fontes) e elementos passivos (resistências, condensadores e indutores). A entrada é a tensão ou corrente duma fonte e a saída é a tensão ou corrente num elemento passivo.

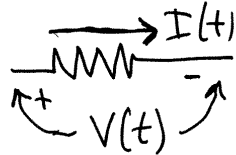
Fontes variáveis: tensão → 

o símbolo + indica o lado com maior potencial, quando V_e for positiva. Quando for negativa + terá menor potencial

corrente 

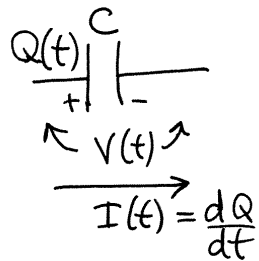
A seta indica o sentido da corrente, nos intervalos em que $I(t)$ for positiva

Resistências.



$$V(t) = R I(t)$$

Condensadores.

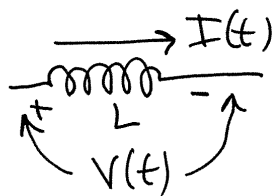


$$Q(t) = C V(t)$$

o aumento da carga, $\frac{dQ}{dt}$ é igual à corrente, no sentido de + para -.

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{I(t)}{C}$$

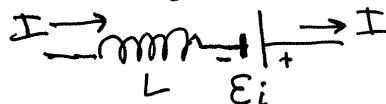
Indutores



$$V(t) = L \frac{dI}{dt}$$

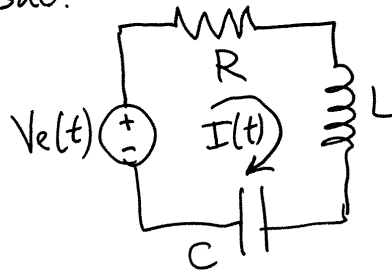
O sinal positivo é pelo facto de estar a ser considerado como elemento passivo. No capítulo

anterior, em que foi considerado elemento ativo, a f.e.m. induzida tinha o sentido oposto de $V(t)$:



$$E_i = -L \frac{dI}{dt}$$

Exemplo. Circuito RLC em série, com fonte de tensão.



a entrada é $V_e(t)$ e a saída que se pretende medir é a corrente $I(t)$.

Regra da malha: soma das voltagens nos elementos passivos = voltagem da fonte

$$\Rightarrow L \dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = V_e$$

derivam-se os dois lados da equação

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}_e$$

EDO linear, de coeficientes constantes, não homogênea.

para um sinal V_e dado, resolve-se essa equação diferencial, para encontrar $I(t)$, usando qualquer método.

Por exemplo, o método da transformada de Laplace:

$$\tilde{V}_e(s) = \mathcal{L}\{V_e(t)\} = \int_0^{\infty} V_e(t) e^{-st} dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{função de um} \\ \text{parâmetro real } s, \\ \text{com unidades de} \\ \text{frequência} \end{array} \right)$$

$$\tilde{I}(s) = \int_0^{\infty} I(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{I}(t)\} = s \tilde{I} - I_0 \quad (I_0 = \text{valor de } I(t) \text{ em } t=0)$$

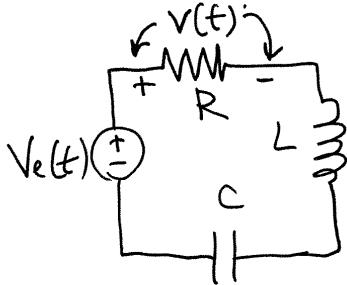
$$\mathcal{L}\{\ddot{I}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d\dot{I}}{dt}\right\} = s \mathcal{L}\{\dot{I}\} - \dot{I}_0 = s^2 \tilde{I} - s I_0 - \dot{I}_0$$

A equação diferencial fica então equação algébrica:

$$L(s^2 \tilde{I} - s I_0 - \dot{I}_0) + R(s \tilde{I} - I_0) + \frac{\tilde{I}}{C} = s \tilde{V}_e - V_{e0}$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{s \tilde{V}_e - V_{e0} + L s I_0 + L \dot{I}_0 + R I_0}{L s^2 + R s + \frac{1}{C}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{polinômio} \\ \text{característico.} \end{array}$$

$I(t)$ será a transformada inversa de $\tilde{I}$.



O sinal de saída pode ser outro, por exemplo, se fosse a voltagem na resistência: $V(t) = RI(t)$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V(t)}{R}$$

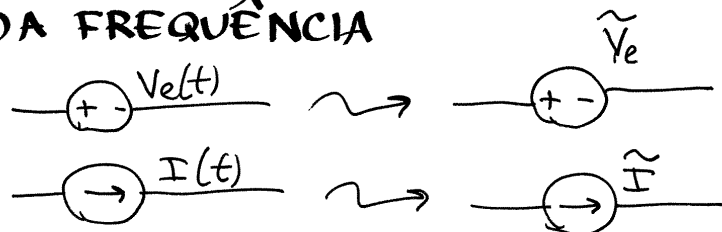
e a equação diferencial será:

$$\frac{L}{R} \ddot{V} + \dot{V} + \frac{V}{RC} = \dot{V}_e$$

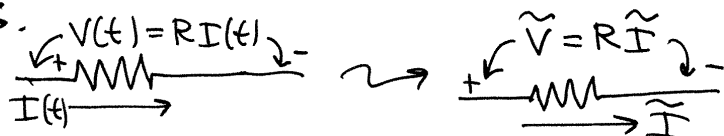
observe-se que RC e $\frac{L}{R}$ têm ambas unidades de tempo!

Em vez de usar as regras de Kirchhoff, encontrar a equação diferencial e logo a sua transformada de Laplace, é mais fácil encontrar logo a transformada de Laplace das leis dos 4 tipos de elementos (fontes, resistências, condensadores e indutores) e resolver logo o circuito, no domínio da frequência s , para determinar $\tilde{I}$ ou $\tilde{V}$.

DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
fontes.



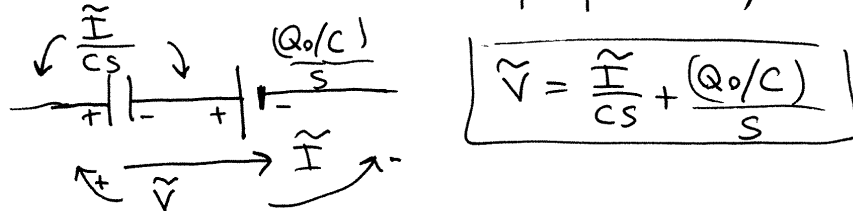
resistências.



condensadores

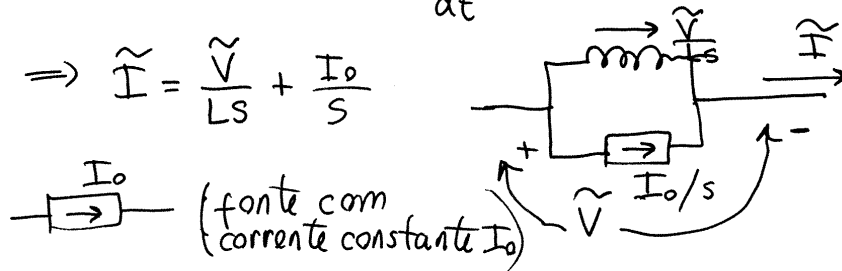
$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} \Rightarrow s\tilde{V} - \underset{\substack{\uparrow \\ Q_0/C}}{V_0} = \frac{\tilde{I}}{C} \rightarrow \tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} + \frac{(Q_0/C)}{s}$$

o termo $\frac{(Q_0/c)}{s}$ é a transformada de Laplace de uma fonte com tensão constante $\frac{Q_0}{c}$; o circuito equivalente, no domínio da frequência, é então:



indutores. $v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \tilde{V} = Ls\tilde{I} - LI_0$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Ls} + \frac{I_0}{s}$$



Se $t=0$ pode ser escolhido como o instante em que não há cargas nem correntes nos condensadores e indutores ($Q_0=I_0=0$), então os resultados para os 3 tipos de elementos passivos resumem-se como:

$$\tilde{V}(s) = \begin{cases} R \tilde{I}(s) & , \text{ resistências} \\ \frac{\tilde{I}}{cs} & , \text{ condensadores} \\ Ls \tilde{I} & , \text{ indutores} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\boxed{\tilde{V} = Z \tilde{I}}$$

lei de Ohm no domínio da frequência

em que a função $Z(s)$ é chamada **impedância** real, com unidades de resistência e igual a:

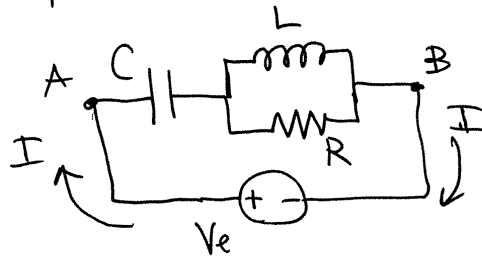
$$Z = R \text{ (resistências)} \quad Z = \frac{1}{cs} \text{ (condensadores)} \quad Z = Ls \text{ (indutores)}$$

Como os 3 tipos de elementos verificam a lei de Ohm, no domínio da frequência, os circuitos podem então ser resolvidos usando o mesmo método do capítulo 3 (associações em série ou paralelo):

$$Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$$Z_{\text{paralelo}} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right)^{-1}$$

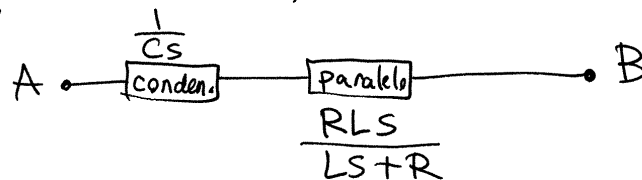
Exemplo. Determine $\tilde{I}$, em função da entrada $\tilde{V}_e$



$$\tilde{V}_e = Z_{AB} \tilde{I}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{V}_e}{Z_{AB}} = \tilde{I}$$

para determinar Z_{AB} , começa-se por combinar as impedâncias do indutor, Ls , e da resistência, R , em paralelo:



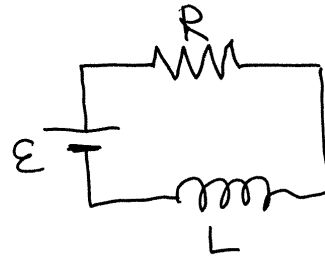
$$\Rightarrow A \text{ --- } [Z_{AB}] \text{ --- } B \quad Z_{AB} = \frac{1}{Cs} + \frac{RLS}{LS+R}$$

divide-se $\tilde{V}_e$ por Z_{AB} e encontra-se a transformada inversa de $\tilde{I}$, para determinar $I(t)$.

A diferença com o capítulo 3 é que em vez de valores numéricos para R , temos agora funções de s .

Aula 19. 2018-11-30

Exemplo 1. Circuito RL,
com fonte de voltagem constante,
 $\mathcal{E}$. $t=0$ é o instante em que
é ligada a fonte, com $I_0=0$.



Maxima: transformada de Laplace da fonte:

$$v_e: \text{laplace}(E, t, s); \rightarrow \frac{E}{s}$$

E representa $\mathcal{E}$ e usaremos letras minúsculas para
representar as funções no domínio da frequência, $\tilde{V}(s)$,
e maiúsculas para as funções no domínio do tempo, $V_e(t)$

Impedância total:

$$Z: R + L \cdot s;$$

transformada de Laplace da corrente:

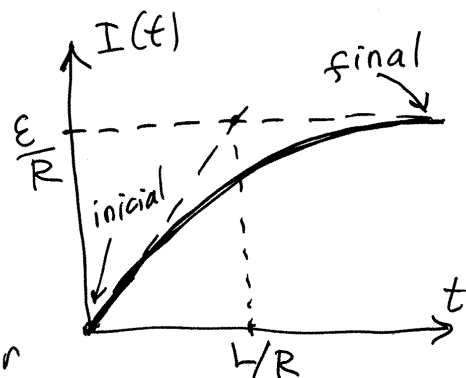
$$i: v_e/z; \rightarrow \tilde{I} = \frac{E}{s(Ls + R)}$$

corrente $I(t)$, no domínio do tempo (transformada
inversa de Laplace de $\tilde{I}(s)$):

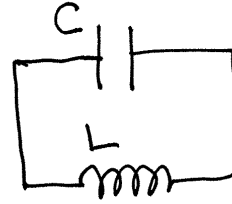
$$I: \text{ilt}(i, s, t); \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)}$$

$\frac{L}{R}$ tem unidades de tempo
e chama-se constante de tempo
do circuito. Em $t=0$, o declive
de I é E/L e em $t \rightarrow \infty$ I
aproxima-se de E/R .

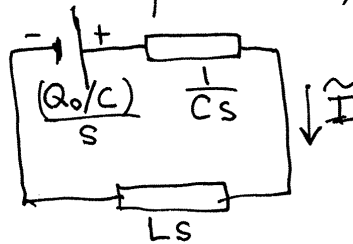
Como tal, $\frac{L}{R}$ é o tempo que
o circuito demorava a atingir
a corrente estacionária E/R , se a sua variação
continuasse à mesma taxa inicial.



Exemplo 2. Circuito oscilador LC. Em $t=0$, o condensador, com carga $Q_0 \neq 0$, liga-se ao indutor ($I_0=0$).



Como tal, o circuito equivalente, no domínio da frequência é:



$$v_e: Q_0/C/s; \quad Z: 1/C/s + L*s;$$

$$\tilde{i}: \text{ratsimp}(v_e/Z); \quad \tilde{I}(s) = \frac{Q_0}{CLs^2 + 1}$$

assume($C>0, L>0$);

$$I: \text{ilt}(i, s, t);$$

$$I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

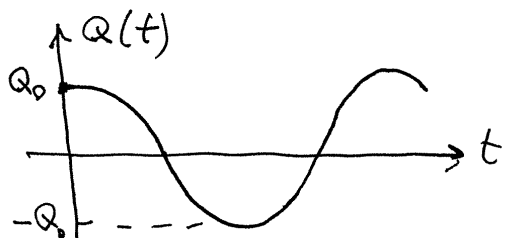
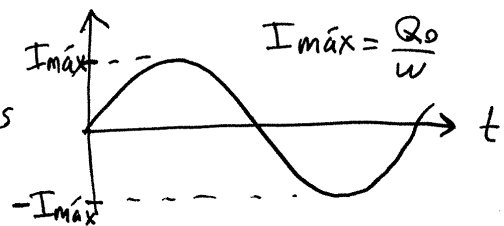
que é uma função sinusoidal com frequência angular

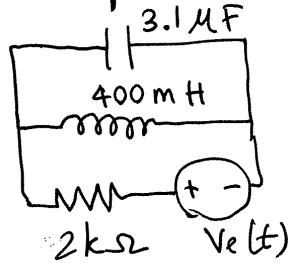
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Observe-se que $I(t)$ é menos a derivada da carga:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$$

Num circuito real, há também resistência R , que faz com que a oscilação seja amortecida.



Exemplo 3.

Em $t=0$, $I_0=0$ e $Q_0=0$.

A voltagem da fonte é:

$$V_e(t) = 5(1 - e^{-600t}) \quad (\text{SI})$$

Determine a expressão da voltagem na resistência, em função de t .

Unidades: $V \rightarrow V(\text{volt})$, $R \rightarrow k\Omega \Rightarrow I \rightarrow \text{mA}$

Se escolhermos $C \rightarrow \mu\text{F}$, como $\frac{1}{C s}$ deverá ter unidades

de $k\Omega \Rightarrow \boxed{S \rightarrow \text{kHz}}$ $\left(\frac{1}{10^{-6} \text{F} \times 10^3 \text{Hz}} = \frac{10^3}{\text{F} \cdot \text{Hz}} = 10^3 \Omega \right)$

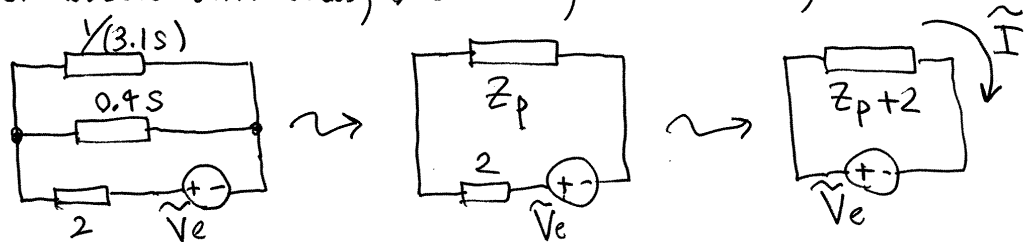
e como a unidade de tempo é a inversa da frequência,

$$t \rightarrow \text{ms}$$

finalmente, como $L = \frac{Z}{S}$, as unidades de indutância

serão: $L \rightarrow \text{H}$ $\left(1 \frac{k\Omega}{\text{kHz}} = 1 \frac{\Omega}{\text{Hz}} = 1 \text{H} \right)$

Com essas unidades, o circuito, no domínio s , é:



$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_p + 2} \Rightarrow \tilde{V}_R = 2\tilde{I} = \frac{2}{Z_p + 2} \tilde{V}_e$$

$$Z_p: \text{ratsimp}(1/(3.1 \times s + 1/(0.4 \times s))); \quad Z_p = \frac{10s}{31s^2 + 5}$$

$$V_e: 5 * (1 - \exp(-0.6 * t));$$

$$v_e: \text{ratsimp}(\text{laplace}(V_e, t, s));$$

$$v_R: \text{ratsimp}(2 * v_e / (Z_p + 2)); \rightarrow \frac{465s^2 + 375}{155s^4 + 118s^3 + 140s^2 + 75s}$$

$$V_R: \text{ilt}(v_R, s, t); \rightarrow e^{-\frac{5t}{62}} \left(\dots \right)$$

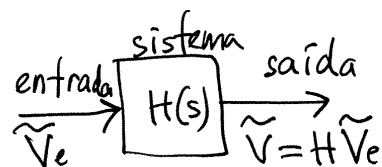
FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$H(s) = \frac{\tilde{V}}{\tilde{V}_e}$$

(nos sistemas lineares)

é uma função própria do sistema, independente da entrada $V_e(t)$.
(como o sistema, nos circuitos considerados, é linear, a saída $\tilde{V}$ é sempre proporcional a $\tilde{V}_e$).

Como tal, qualquer sistema linear é caracterizado, no domínio da frequência, por uma função de transferência $H(s)$.



No caso do exemplo 3, a função $H(s)$ é:

$$H = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{V}_e} = \frac{2}{z_p + 2} \quad H: \text{ratsimp}(2/(z_p + 2)); \quad H = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 55s + 25}$$

A partir da função de transferência pode encontrar-se a equação diferencial do circuito:

$$\tilde{V}_R = \left(\frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 55s + 25} \right) \tilde{V}_e \Rightarrow (31s^2 + 55s + 25)\tilde{V}_R = (31s^2 + 25)\tilde{V}_e$$

↑ polin. característico

$$\Rightarrow \boxed{31\ddot{V}_R + 55\dot{V}_R + 25V_R = 31\ddot{V}_e + 25V_e}$$

cada produto por s , no domínio da frequência, corresponde a uma derivada, em ordem a t , no domínio da frequência. O processo inverso também é direto (encontrar $H(s)$ duma equação dif. linear com coeficientes constantes):

$$C_2\ddot{f} + C_1\dot{f} + C_0f = d_2\ddot{f}_e + d_1\dot{f}_e + d_0f_e \Rightarrow H = \frac{d_2s^2 + d_1s + d_0}{C_2s^2 + C_1s + C_0}$$

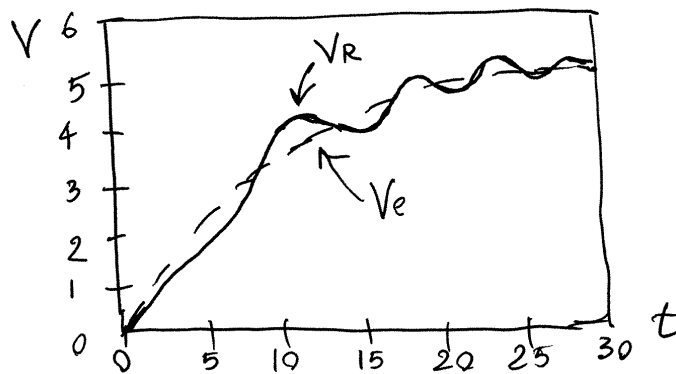
Na função de transferência do exemplo 3, os valores próprios do sistema são as raízes do denominador de H :

$$\text{solve}(\text{denom}(H)); \rightarrow s = -\frac{5}{62} \pm i \frac{5}{62} \sqrt{123}$$

$\Rightarrow$ foco atrativo com frequência angular $\omega = \frac{5}{62} \sqrt{123}$

Gráfico de $V_R(t)$ e $V_e(t)$

`plot2d([Ve,VR],[t,0,30],[legend,false],[ylabel,"V"]);`

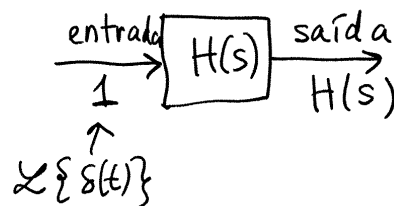


IMPULSO UNITÁRIO (delta de Dirac)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{mas} \quad \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \left(\Rightarrow \int \delta(t) f(t) dt = f(0) \right)$$

essa definição implica transformada de Laplace igual a 1: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1$

Como tal, a função de transferência é a resposta do sistema, quando a entrada for um impulso unitário.



Aula 20. 2018-12-05

CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

Quando as fontes (de tensão ou de corrente) são funções sinusoidais: $V(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_v)$ ou $I(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_i)$

A voltagem/corrente em todos os elementos do circuito, no estado estacionário, será também outra função sinusoidal, com a mesma frequência angular, mas com diferentes amplitudes ($V_{\max}$, $I_{\max}$) e diferentes deslocamentos (φ_v , φ_i)

Função geral:

$$F(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

é caracterizada por 3 parâmetros:

$$\omega = 2\pi f = \text{freq. angular}$$

$F_{\max}$ = amplitude

φ = deslocamento

O período T é $\frac{1}{f}$, ou seja, $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right) \rightarrow$ função cosseno deslocada $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$ no eixo do tempo.

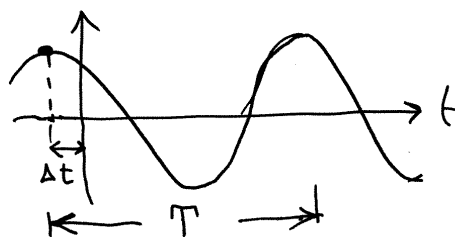
$$\Rightarrow \varphi = 2\pi\left(\frac{\Delta t}{T}\right)$$

Outras formas de escrever $F(t)$:

$$F = F_{\max} (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) = F_r \cos(\omega t) - F_i \sin(\omega t)$$

onde: $\begin{cases} F_r = F_{\max} \cos \varphi \\ F_i = F_{\max} \sin \varphi \end{cases}$ (3 parâmetros: ω , F_r , F_i)

Gráfico:



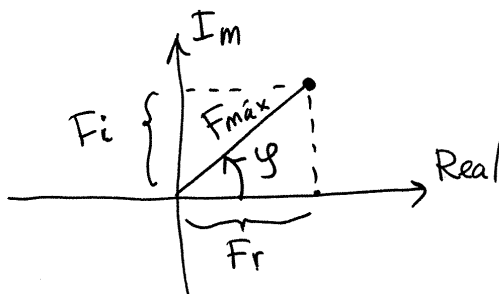
Usando números complexos, as funções trigonométricas podem escrever-se como exponenciais:

$$F = \text{Real} [(F_r + iF_i) (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))] \\ = \text{Real} [(F_r + iF_i) e^{i\omega t}] \quad \begin{matrix} \text{(um parâmetro real, } \omega) \\ \text{+ um parâmetro complexo,} \\ F_r + iF_i \end{matrix}$$

FASORES

O número complexo $F = F_r + iF_i$, chama-se fasor, e representa a função sinusoidal com amplitude e desfasamento:

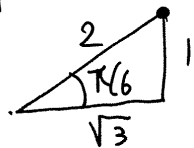
$$\begin{cases} F_{\max} = \sqrt{F_r^2 + F_i^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{F_i}{F_r} \right) \end{cases}$$



No plano complexo, $F_{\max}$ é o módulo $|F|$ do fasor F e φ é o argumento de F .

Outra notação usada em circuitos é: $F = F_{\max} \angle \varphi$

Exemplo:



O número complexo (fasor)

$$\sqrt{3} + i = 2 \angle \pi/6$$

representa a função:

$$F(t) = 2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

No Maxima, as funções `cabs()` e `carg()` calculam o módulo e argumento (em radianos) de um número complexo.

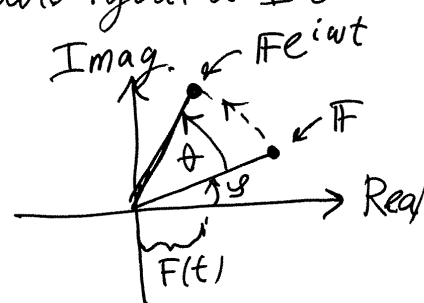
Soma de números complexos

$$F+G = (F_r+G_r)+i(F_i+G_i)$$

Produto de num. complexos

$$FG = (|F||G|) \angle (\varphi_F + \varphi_G)$$

O número complexo $e^{i\omega t}$ tem módulo igual a 1 e argumento $\theta = \omega t$. Como tal, $F(t) = \text{Real}(Fe^{i\omega t})$ é a projeção, no eixo real, do fasor FF , rodado um ângulo $\theta = \omega t$ no sentido positivo.



$F(t)$ é a projeção, no eixo real, de um vetor complexo F , que roda no plano complexo, com velocidade angular ω constante.

Como as correntes/voltagens (no estado estacionário) do circuito têm todas a mesma frequência, então $V_1(t) + V_2(t) = (V_1 + V_2)e^{i\omega t} \rightarrow$ fasor $(V_1 + V_2)$ a rodar com velocidade angular ω constante.

Exemplo: Num nó entram duas correntes:

$$I_1(t) = 5\cos(\omega t + 2) \quad I_2(t) = 3\cos(\omega t + 1)$$

Determine a expressão da corrente que sai do nó.

$$I_1 = 5\angle 2, \quad I_2 = 3\angle 1$$

No Maxima: $I_1: 5 * \exp(\%i * 2); \quad I_2: 3 * \exp(\%i);$

$$I_3: I_1 + I_2;$$

$$\text{float}(\text{cabs}(I_3)); \rightarrow 7.086$$

$$\text{float}(\text{carg}(I_3)); \rightarrow 1.636$$

$$\Rightarrow I_3(t) = 7.086 \cos(\omega t + 1.636)$$

FUNÇÕES ALTERNADAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

$$F(t) = \text{Real}(F e^{i\omega t}) \Rightarrow \mathcal{L}\{F\} = \text{Real}\left(\frac{F}{s - i\omega}\right)$$

Se a entrada num circuito for $V_e(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$
 $\Rightarrow \tilde{V}_e = \frac{V_e}{s - i\omega}$ (não escrevemos "Real"; fica implícito)
 que só interessa a parte real

A saída em qualquer parte do circuito tem a forma:

$$\tilde{V} = \frac{q(s)}{p(s)} \tilde{V}_e \quad \left(H = \frac{q(s)}{p(s)} = \text{função de transferência} \right)$$

polinômio característico

$$\Rightarrow \tilde{V} = \frac{q(s)}{(s-s_1)\dots(s-s_n)(s-i\omega)} V_e \quad \left(s_1 \dots s_n = \text{valores próprios do circuito: raízes de } p(s) \right)$$

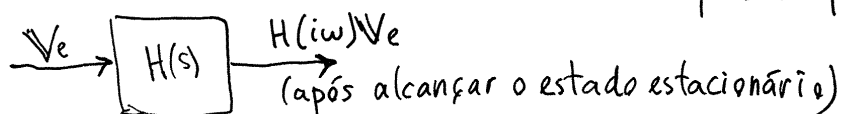
A transformada inversa pode encontrar-se usando expansão em frações parciais

$$\tilde{V} = \frac{C_1}{s-s_1} + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} + \frac{d}{s-i\omega}$$

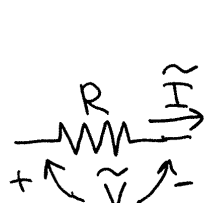
A transformada dos n primeiros termos são funções exponenciais (estado transitório). O estado estacionário é a transformada inversa do último termo:

$$d = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left(\frac{q(s)}{(s-s_1)\dots(s-s_n)} V_e \right) = \left(\lim_{s \rightarrow i\omega} \frac{q(s)}{p(s)} \right) V_e = H(i\omega) V_e$$

$$V(t)_{\text{estacion.}} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H(i\omega)}{s - i\omega} \right\} = \text{função sinusoidal correspondente ao fasor } H(i\omega)$$



Resistências



$$\tilde{V} = R \tilde{I}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} \Rightarrow \tilde{V} = R \tilde{I}$$

Condensadores. $\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs}$

$$\text{se } \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} \Rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{C(i\omega)} \tilde{I}$$

Indutores. $\tilde{V} = Ls \tilde{I} \quad (\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{s-i\omega})$

$$\Rightarrow \tilde{V} = L(i\omega) \tilde{I}$$

Resultado geral: $\boxed{\tilde{V} = Z(i\omega) \tilde{I}}$ lei de Ohm para fasores

impedância complexa: $Z = \begin{cases} R, \text{ resistências} \\ \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \text{ condensadores} \\ i\omega L, \text{ indutores} \end{cases}$

OU, usando a forma polar dos complexos:

$$Z = \begin{cases} R \angle 0, \text{ resistências} \\ \left(\frac{1}{\omega C}\right) \angle \left(-\frac{\pi}{2}\right), \text{ condensadores} \\ \omega L \angle \left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ indutores} \end{cases}$$

- $V(t)$ em fase com $I(t)$ nas resistências ($\varphi_V = \varphi_I$)
- $V(t)$ adiantada $\frac{\pi}{2}$ de $I(t)$ nos indutores ($\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$)
- $V(t)$ atrasada $\frac{\pi}{2}$ de $I(t)$ nos condensadores ($\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2}$)

Aula 21. 2018-12-07

Lei de Ohm para corrente alternada:

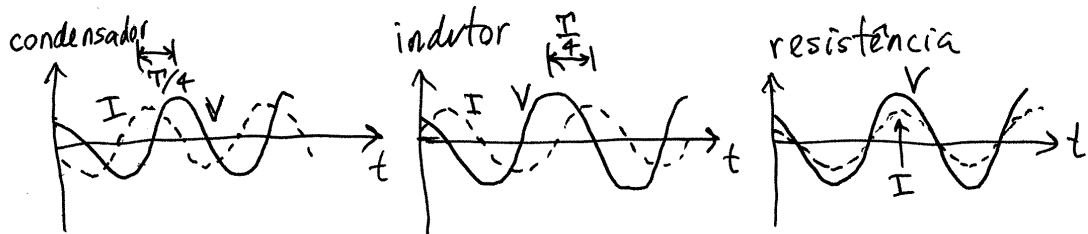
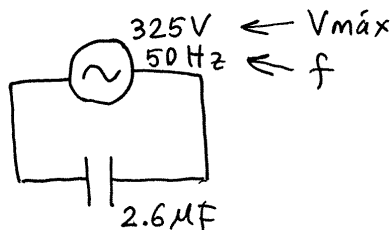
$$\boxed{V = Z I}$$

$V, Z, \text{ e } I$ são números complexos
 $\Rightarrow Z I = (|Z| I_{\max}) \angle (\varphi_Z + \varphi_I)$

como tal, pode escrever-se em duas equações reais:

$$\begin{cases} V_{\max} = |Z| I_{\max} \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \end{cases}$$

- nos condensadores, $\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$, e $I(t)$ está adiantada $\frac{\pi}{2}$ de $V(t)$
- nos indutores, $\varphi_Z = +\frac{\pi}{2}$, e $V(t)$ está adiantada $\frac{\pi}{2}$ de $I(t)$.
- nas resistências, $\varphi_Z = 0$, e $V(t)$ e $I(t)$ oscilam em fase.

Exemplo 1:

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ (Hz)}$$

$$V(t) = 325 \cos(100\pi t) \text{ (SI)} \text{ (arbitrando } \varphi_V = 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow V = 325 \text{ (parte imaginária nula)}$$

$$Z = -\frac{i}{100\pi \times 2.6 \times 10^{-6}} = -i 1224 \text{ } (\Omega)$$

$$|Z| = 1224, \varphi_Z = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} I_{\max} = \frac{325}{1224} = 0.265 \text{ A} \\ \varphi_I = \varphi_V - \varphi_Z = 0 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I(t) = 0.265 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

POTÊNCIA MÉDIA

Potência instantânea: $P(t) = V(t)I(t)$

quando a corrente é alternada, no estado estacionário,

$$V(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_V) \quad I(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= V_{\max} I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) \\ &= \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} (\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)) \end{aligned}$$

pela lei de Ohm, $\varphi_V - \varphi_I = \varphi_Z$. $\cos(\varphi_V - \varphi_I) = \cos \varphi_Z = \text{constante}$

$\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$ tem valor médio nulo. Como tal, a potência média no dispositivo é:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \varphi_Z} \quad \cos \varphi_Z = \text{fator de potência}$$

Definem-se os **valores eficazes** das funções alternadas:

$$V_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (V(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_{\max}^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_V\right) dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ef}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad I_{\text{ef}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (V_{\text{ef}} = |Z| I_{\text{ef}})$$

$$\bar{P} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi_Z$$

Exemplo 2: A tensão da rede pública em Portugal tem $V_{\max} = 325 \text{ V}$ e $f = 50 \text{ Hz}$.

$$\Rightarrow V_{\text{ef}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V}$$

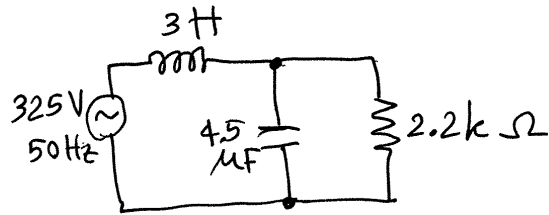
Numa resistência $R = 3 \text{ k}\Omega$, a corrente eficaz é então $I_{\text{ef}} = V_{\text{ef}}/3000 = 76.6 \text{ mA}$ e a potência média:

$$\bar{P} = 230 \times 76.6 \times 10^{-3} = 17.6 \text{ mW}$$

Nos condensadores e indutores, $\bar{P} = 0$, porque $\cos(\pm \frac{\pi}{2}) = 0$

Exemplo 3.

Determine a corrente no indutor e a potência média absorvida



pelos 3 dispositivos (potência média fornecida pela fonte)

Unidades: $Z \rightarrow k\Omega$ e $L \rightarrow H$

como $s = \frac{\omega}{L}$, então as unidades de s serão $s \rightarrow kHz$

$t \rightarrow ms$ (inverso de kHz) $C = \frac{1}{sZ_c} \Rightarrow C \rightarrow \mu F$

com voltagens em V então as correntes estarão em mA.

resistência em paralelo com o condensador:

frequência angular ω : `float(2*%pi*50/1000);` $\rightarrow kHz$

impedâncias dos 3 dispositivos:

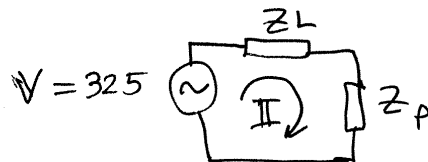
$[Z_R, Z_L, Z_C]: [22, 3*\omega*%i, -%i/4.5/\omega];$

resistência em paralelo com o condensador:

$Z_p: 1/(1/Z_R + 1/Z_C);$

corrente no indutor:

$I: 325/(Z_L + Z_p)$



$[cabs(I), carg(I)]; \rightarrow [890.1, -0.97096]$

$\Rightarrow i(t) = 890.1 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.97096\right)$

Potência média no sistema indutor, condensador, resistência

$\bar{P} = \frac{1}{2} 325 \times 890.1 \times \cos(\varphi)$ $\rightarrow$ argumento de $Z_L + Z_p$

$P: 0.5 \times 325 \times cabs(I) \times \cos(carg(Z_L + Z_p));$

$\bar{P} = 81648 \text{ mW} = 81.6 \text{ W}$ (dissipada na resistência)

RESSONÂNCIA

A potência média dissipada num circuito depende não só da tensão máxima da fonte, mas também da frequência angular ω . A freq. angular ω que faz com que $\bar{P}$ seja máxima (para um valor fixo de $V_{\max}$), chama-se frequência de ressonância.

Exemplo 4. Se no exemplo 3 a frequência da fonte for variável, determine a potência fornecida, em função de ω .

`remvalue(w);` (apaga o valor dado anteriormente a w)

`[ZR,ZL,ZC]: [22, 3*w*%i, -%i/4.5/w];`

`ZP: 1/(1/ZR + 1/ZC);`

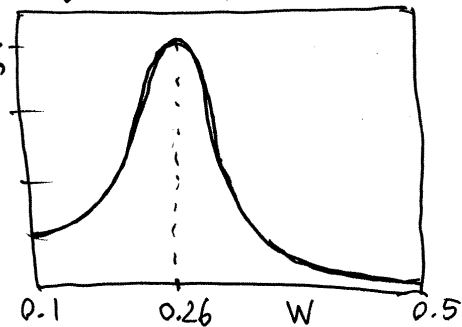
`I: 325/(ZL + ZP);`

`P: 0.5*325*cabs(I)*cos(carg(ZL + ZP));`

`plot2d(P,[w,0.1,0.5],[ylabel,"P"]);`

Como dependerá $\omega_{\text{ress.}}$ de R, C e L neste circuito?

P



`[ZR,ZL,ZC]: [R, L*w*%i, -%i/C/w];`

`ZP: 1/(1/ZR + 1/ZC);`

`I: 1/(ZL + ZP);`

`P: cabs(I)*cos(carg(ZL + ZP))/2;`

`solve(diff(P,w),w) →`

$$\omega_{\text{ress.}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}}$$

```

* freq. angular, em kHz */
:float((2*pi*50)/1000);

* Impedâncias em kΩ */
ZR,ZL,ZC: [2.2, 3*w*i, -i/(4.5*w)];

* Impedância do condensador em paralelo com a resistência */
p: 1/(1/ZR+1/ZC);

* Fator da corrente que passa pelo indutor */
: 325/(ZL+Zp);

* Corrente máxima e desfasamento da corrente */
cabs(I), carg(I)];

* Potência média fornecida pela fonte */
: 0.5*325*cabs(I)*cos(carg(ZL+Zp));

* Potência fornecida, em função da frequência angular */
emvalue(w);
ZR,ZL,ZC: [2.2, 3*w*i, -i/(4.5*w)];
p: 1/(1/ZR+1/ZC);
: 325/(ZL+Zp);
: 0.5*325*cabs(I)*cos(carg(ZL+Zp));
plot2d(P,[w,0.1,0.5],[ylabel,"P"]);

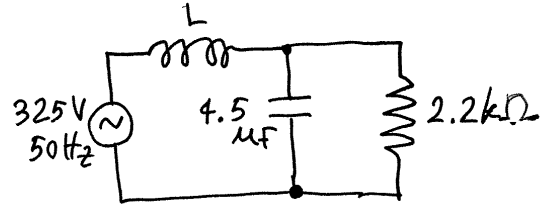
/* Cálculo da frequência angular de ressonância, em função de L, C e R */
ZR,ZL,ZC: [R, L*w*i, -i/(C*w)];
p: 1/(1/ZR+1/ZC);
: 325/(ZL+Zp);
: 0.5*325*cabs(I)*cos(carg(ZL+Zp));
solve(diff(P,w) = 0,w);
float(subst([L = 3,C = 4.5,R = 2.2],%));

/* Como o único valor real positivo é o penúltimo, então a expressão da freq.
de ressonância é a penúltima na lista obtida com solve */

```

Aula 22. 2018-12-12

No exemplo da aula anterior, substituí-se o indutor de 3 H por um que faça com que o circuito esteja em ressonância com a fonte de 325 V e 50 Hz.



Como vimos, a expressão da frequência de ressonância é:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}}$$

```
W: float(2*%pi*50)/1000); (freq.angular em kHz)
solve(W^2 = 1/L/4.5 - 1/2/2.2^2/4.5^2);
L: float(subst(%, L)); → L = 2.1409 H
```

Impedâncias:

```
[ZR, ZL, ZC]: [2.2, %i*W*L, -%i/4.5/W];
```

impedância equivalente do condensador em paralelo com a resistência:

```
Zp: 1/(1/ZR + 1/ZC);
```

Fasor da corrente que sai da fonte:

```
I: 325/(ZL + Zp);
```

Potência média fornecida pela fonte:

```
P: 0.5*325*cabs(I)*cos(carg(ZL + Zp));
```

$\bar{P}_{\text{fem}} = 250367 \text{ mW} = 250.367 \text{ W}$

Fasor da voltagem na resistência:

```
VR: Zp*I;
```

Voltagem máxima e desfasamento da voltagem na resistência:

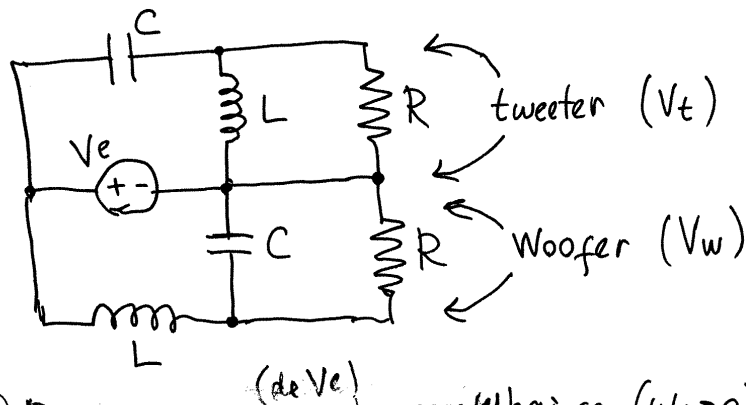
```
[cabs(VR), carg(VR)];
```

→ $V_R(t) = 1049.6 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 1.4114\right)$

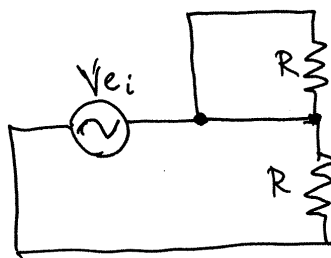
$V_{\text{máx}} = 1049.6$, quase 3 vezes $V_{\text{máx}}$ da fonte!

A função complexa $R(\omega) = H(i\omega)$ chama-se função de resposta em frequência.

Exemplo: Coluna de duas vias:



- (de V_e)
 (a) Para as componentes com ω baixa ($\omega \rightarrow 0$) os condensadores são equivalentes a circuitos abertos e os indutores a curto-circuitos:

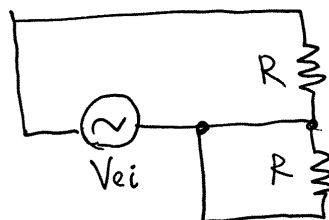


$$V_t = 0 \Rightarrow I_t = 0$$

$$V_w = V_e \Rightarrow I_w = \frac{V_e}{R}$$

toda a potência é dissipada no Woofer.

- (b) Componentes de V_e com ω elevada: condensadores em curto-circuito e indutores em circuito aberto:



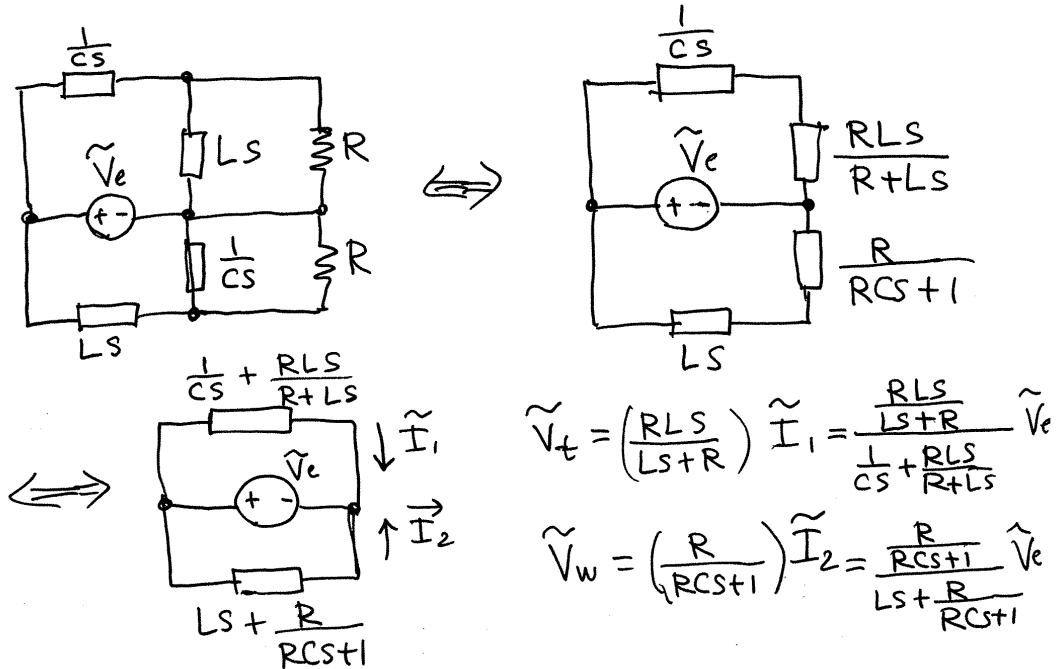
$$V_t = V_e \Rightarrow I_t = \frac{V_e}{R}$$

$$V_w = 0 \Rightarrow I_w = 0$$

toda a potência é dissipada no tweeter.

Frequência de corte = ω_c = frequência para a qual a potência dissipada nas duas resistências é igual.

Ou seja, $V_t = V_w$



$$H_t(s) = \frac{RLCS^2}{RLCS^2 + LS + R}$$

$$H_w(s) = \frac{R}{RLCS^2 + LS + R}$$

$$R_t(\omega) = \frac{RLC\omega^2}{RLC\omega^2 - iL\omega - R}$$

$$R_w(\omega) = \frac{R}{-RLC\omega^2 + iL\omega + R}$$

Frequência angular de corte: $|R_t| = |R_w| \Rightarrow RLC\omega_c^2 = R$

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\begin{matrix} L \rightarrow \text{H} \\ C \rightarrow \mu\text{F} \end{matrix} \quad \omega_c \rightarrow \text{kHz}$$

Exemplo: para obter $\omega_c = 2\pi \text{ kHz}$ ($f_c = 1 \text{ kHz}$)

$$LC = \frac{1}{4\pi^2} \approx 0.025 \quad \text{se } C = 2.5 \mu\text{F} \Rightarrow L = 0.01 \text{ H}$$

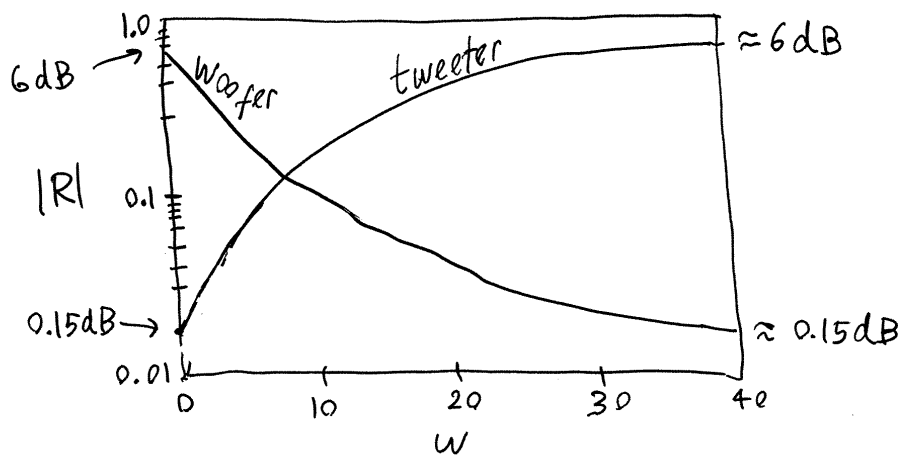
$$R \approx 0.008 \text{ k}\Omega \quad \leftarrow \text{rmvalue}(w)\$$$

$$[R, L, C] : [0.008, 0.01, 2.5]\$$$

$$Rt: R * L * C * w^2 / (R * L * C * w^2 - \%i * L * w - R)\$$$

$$Rw: -R / (R * L * C * w^2 - \%i * L * w - R)\$$$

$$\text{plot 2d} ([\text{cabs}(Rt), \text{cabs}(Rw)], [w, 1, 40], [\text{legend}, \text{false}]);$$



Capítulo 2

Exames

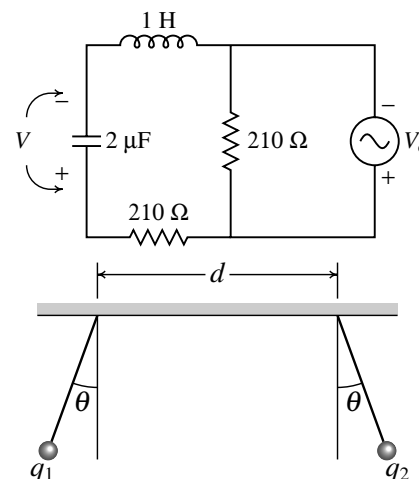
2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 23 de janeiro de 2019. Compareceram 153 estudantes e a nota média foi 10.9 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

1. (4 valores). No filtro de frequências representado no diagrama, o sinal de entrada é a tensão V_e de uma fonte de tensão alternada, com frequência angular ω , e o sinal de saída é a tensão V medida no condensador, como indica a figura. Encontre a expressão da função de resposta em frequência, em função de ω .



2. (4 valores). Duas pequenas esferas condutoras, com cargas $q_1 = +300 \text{ nC}$ e $q_2 = +500 \text{ nC}$, e com a mesma massa m , são coladas a dois fios, cada um com 8 cm de comprimento. Os fios são logo colados numa barra horizontal, em dois pontos a uma distância $d = 15 \text{ cm}$ entre si. A repulsão eletrostática entre as cargas faz com que os dois fios se inclinem um ângulo $\theta = 10^\circ$ em relação à vertical. Determine o valor da massa m .

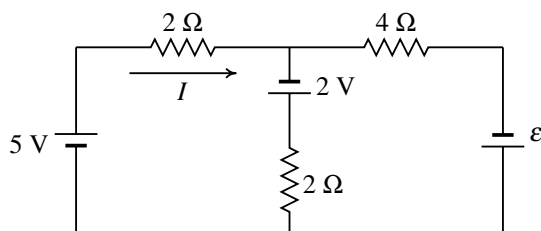
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Determine a intensidade da corrente numa bobina com indutância de 2.8 H e resistência de 762Ω , 1 mili-segundo após ter sido ligada a uma f.e.m. de 5 V .

- (A) 3.127 mA (C) 2.345 mA (E) 1.563 mA
(B) 3.908 mA (D) 0.782 mA

Resposta:

4. No circuito da figura, sabendo que a corrente I é igual a 2.5 A , determine o valor da f.e.m. ε .



- (A) 6 V (C) 2 V (E) 5 V
(B) 7 V (D) 10 V

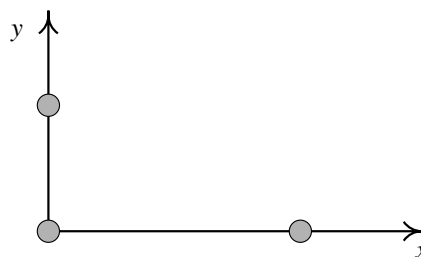
Resposta:

5. Ligam-se em série duas resistências idênticas a uma bateria ideal (resistência interna desprezável) e observa-se que a potência dissipada pelas duas resistências é 30 W . Se as mesmas duas resistências fossem ligadas em paralelo à mesma bateria, qual seria a potência total que dissipavam nesse caso?

- (A) 120.0 W (C) 15.0 W (E) 7.5 W
(B) 60.0 W (D) 30.0 W

Resposta:

6. A figura representa três fios condutores retilíneos, muito compridos e paralelos ao eixo dos z , com correntes no sentido positivo desse eixo. O primeiro fio passa pelo ponto $(x, y) = (0, 1 \text{ cm})$ e tem corrente de 0.51 A , o segundo fio passa pela origem e tem corrente de 0.25 A e o terceiro fio passa pelo ponto $(x, y) = (2 \text{ cm}, 0)$ e tem corrente de 0.23 A . Calcule o módulo da força magnética resultante, por unidade de comprimento, no fio que passa pela origem.



- (A) $2.61 \mu\text{N/m}$ (C) $0.37 \mu\text{N/m}$ (E) $0.52 \mu\text{N/m}$
(B) $0.44 \mu\text{N/m}$ (D) $0.87 \mu\text{N/m}$

Resposta:

7. O potencial no plano xy é dado pela expressão:

$$V = +\frac{18}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} + \frac{36}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}$$

em kV, se x e y estiverem em mm. Determine o valor da carga pontual no ponto $(2, 0)$.

- (A) 2 nC (C) 6 nC (E) 4 nC
(B) -4 nC (D) -2 nC

Resposta:

8. Determine o módulo do campo elétrico no ponto $x = 1.0$ m, no eixo dos x , produzido por duas cargas pontuais: a primeira, com $3 \mu\text{C}$, encontra-se no eixo dos x em $x = -1.0$ m, e a segunda, de $-4 \mu\text{C}$, encontra-se na origem.

(A) $49.5 \text{ mN}/\mu\text{C}$ (C) $42.75 \text{ mN}/\mu\text{C}$ (E) $29.25 \text{ mN}/\mu\text{C}$
 (B) $22.5 \text{ mN}/\mu\text{C}$ (D) $2.25 \text{ mN}/\mu\text{C}$

Resposta: ☐

9. Quando uma bobina de 0.521 H é ligada a uma fonte de tensão alternada, com tensão máxima 12 V e frequência $f = 20 \text{ Hz}$, a corrente máxima nela é 3.62 mA . Determine o valor da resistência dessa bobina.

(A) $3.31 \text{ k}\Omega$ (C) $1.99 \text{ k}\Omega$ (E) 688Ω
 (B) $4.61 \text{ k}\Omega$ (D) $2.76 \text{ k}\Omega$

Resposta: ☐

10. Numa região existe campo elétrico uniforme, com módulo de 6 kN/C . Determine o valor absoluto do fluxo elétrico através dum quadrado com 4 cm de aresta, colocado nessa região, sabendo que o plano do quadrado faz um ângulo de 60° com o campo.

(A) $0.48 \text{ kN}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ (D) $0.831 \text{ kN}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
 (B) $8.31 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ (E) $9.6 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
 (C) $4.8 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

Resposta: ☐

11. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) Dentro de um condutor isolado o campo elétrico é sempre nulo.
 (B) O campo elétrico na superfície de um condutor isolado é nulo.
 (C) Numa região do espaço, se não existir carga o campo elétrico será nulo.
 (D) O campo elétrico dentro de uma esfera oca é sempre nulo.
 (E) Se a carga total num condutor isolado for nula, não haverá carga em nenhuma parte da sua superfície.

Resposta: ☐

12. Calcule a potência média fornecida por uma pilha com f.e.m. de 1.5 V , durante um intervalo de 4 segundos, sabendo que o número de elétrons de condução que saíram do eletrodo negativo durante esse intervalo foram 2×10^{16} .

(A) 1.2 mW (C) 0.6 mW (E) 3.0 mW
 (B) 0.96 mW (D) 0.12 mW

Resposta: ☐

13. O coeficiente de temperatura do chumbo a 20°C , é igual a 0.0043 . Duas resistências de chumbo têm valores de $1.1 \text{ k}\Omega$ e $3.2 \text{ k}\Omega$, quando a temperatura é de 20°C . Determine o valor da resistência equivalente, quando essas duas resistências são ligadas em paralelo e a temperatura aumenta até 65°C .

(A) $1.12 \text{ k}\Omega$ (C) $1.05 \text{ k}\Omega$ (E) $0.98 \text{ k}\Omega$
 (B) $0.82 \text{ k}\Omega$ (D) $0.89 \text{ k}\Omega$

Resposta: ☐

14. Sabendo que a função de transferência de um circuito é:

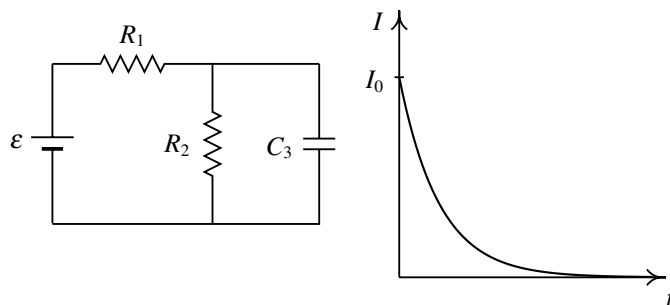
$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

determine a equação diferencial desse circuito.

(A) $\ddot{V} + 2\dot{V} + 6V = \dot{V}_e + 3V_e$
 (B) $\ddot{V} + 2\dot{V} + V = \dot{V}_e + 3V_e$
 (C) $\dot{V} + 2V = \dot{V}_e + 3V_e$
 (D) $\ddot{V} + 5\dot{V} + 6V = V_e$
 (E) $\ddot{V} + 5\dot{V} + 6V = 2\dot{V}_e + 5V_e$

Resposta: ☐

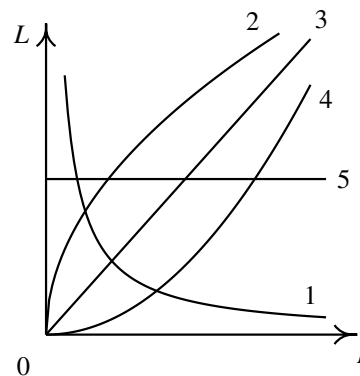
15. No circuito da figura, o condensador encontra-se descarregado no instante $t = 0$. Se I_1 for a corrente na resistência R_1 , I_2 a corrente na resistência R_2 e I_3 a corrente no condensador C_3 , quais dessas três correntes são representadas corretamente pelo gráfico da figura?



(A) unicamente I_2 e I_3 (D) unicamente I_1 e I_3
 (B) unicamente I_1 (E) unicamente I_2
 (C) unicamente I_3

Resposta: ☐

16. Qual das 5 curvas no gráfico representa melhor a indutância L de uma bobina, em função da sua corrente I ?



(A) 5 (C) 1 (E) 2
 (B) 4 (D) 3

Resposta: ☐

17. Ligam-se dois condensadores com capacidades $8 \mu\text{F}$ e $16 \mu\text{F}$, em série, a uma f.e.m. de 30 V . Determine a carga no condensador de $8 \mu\text{F}$.

(A) $200 \mu\text{C}$ (C) $160 \mu\text{C}$ (E) $120 \mu\text{C}$
 (B) $80 \mu\text{C}$ (D) $40 \mu\text{C}$

Resposta: ☐

2.1.2 Resolução

Problema 1. Usando unidades de μC para a capacidade e H para a indutância, como $LC = Z_L/(Z_C s^2)$ tem unidades de tempo ao quadrado, então o tempo deverá ser medido em ms e a frequência em kHz. As impedâncias ($Z_L = Ls$) deverão então ser medidas em $\text{k}\Omega$. Nessas unidades, os valores das impedâncias das resistências, do indutor e do condensador no circuito são:

$$Z_R = 0.21 \quad Z_L = s \quad Z_C = \frac{1}{2s}$$

No ramo onde está o condensador, encontram-se em série o condensador, o indutor e uma das resistências, com impedância total:

$$Z = 0.21 + s + \frac{1}{2s} = \frac{2s^2 + 0.42s + 1}{2s}$$

A transformada da voltagem nesse ramo é a própria transformada da voltagem de entrada, $\tilde{V}_e$. Como tal, a transformada da corrente através desse ramo é:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z} = \frac{2s\tilde{V}_e}{2s^2 + 0.42s + 1}$$

e a transformada da voltagem no condensador (sinal de saída) é:

$$\tilde{V} = Z_C \tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{2s^2 + 0.42s + 1}$$

A função de transferência do circuito é,

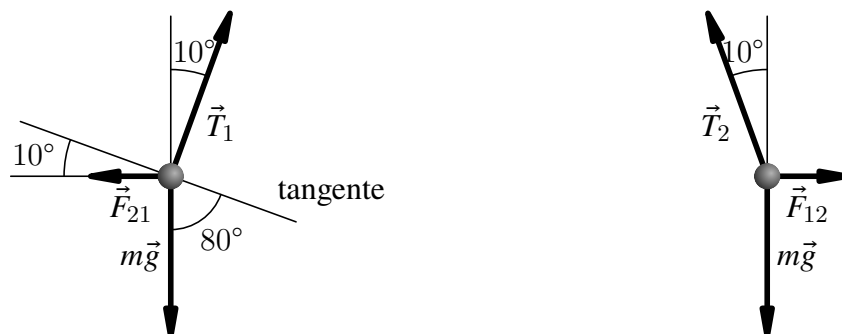
$$H(s) = \frac{\tilde{V}}{\tilde{V}_e} = \frac{1}{2s^2 + 0.42s + 1}$$

Finalmente, a função de resposta em frequência é:

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 - 2\omega^2 + i0.42\omega}$$

em que a frequência angular ω é dada em kHz.

Problema 2. Os diagramas de corpo livre das duas esferas são os seguintes:



onde $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ são as tensões nos dois fios, $\vec{F}_{21}$ é a força elétrica da esfera 2 sobre a esfera 1 e $\vec{F}_{12}$ é a força elétrica da esfera 1 sobre a esfera 2.

Realmente basta um dos diagramas para determinar o valor de m . E como a soma das 3 forças externas sobre cada esfera é nula, por estarem em repouso, e os módulos das forças elétricas $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{12}$ são iguais, os módulos das duas tensões são iguais e os dois diagramas são equivalentes.

A distância entre as duas esferas (em metros) é,

$$r = 0.15 + 2 \times 0.08 \times \sin(10^\circ) = 0.1778$$

E, usando a lei de Coulomb,

$$F_{21} = F_{12} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-7}}{0.1778^2} = 0.0427 \text{ (N)}$$

A soma das 3 forças igual a zero implica que a soma das suas componentes, ao longo de qualquer direção, é nula. Em particular, a soma das componentes na direção tangente indicada na figura é igual a:

$$m g \cos(80^\circ) - F_{21} \cos(10^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F_{21} \cos(10^\circ)}{g \cos(80^\circ)} = \frac{0.0427 \cos(10^\circ)}{9.8 \cos(80^\circ)} = 0.02472 \text{ (kg)}$$

A massa das esferas é de 24.7 gramas.

Perguntas

- | | |
|-------|-------|
| 3. E | 11. A |
| 4. A | 12. A |
| 5. A | 13. E |
| 6. A | 14. E |
| 7. E | 15. C |
| 8. E | 16. A |
| 9. A | 17. C |
| 10. B | |

2.1.3 Cotações

Problema 1

- Cálculo da impedância do ramo do condensador, com unidades compatíveis 0.8

- Cálculo da corrente no condensador0.8
- Cálculo da voltagem no condensador0.8
- Determinação da função de transferência0.8
- Substituição da frequência ω e obtenção da função pedida, indicando as unidades usadas0.8

Problema 2

- Cálculo da distância entre as cargas0.4
- Cálculo do módulo da força elétrica0.8
- Diagrama de corpo livre indicando as direções das forças1.2
- Equação (ou equações) da soma das componentes das forças igual a zero ____0.8
- Obtenção do valor da massa, com ordem de grandeza correta e indicando as suas unidades0.8

2.2 Exame de época de recurso

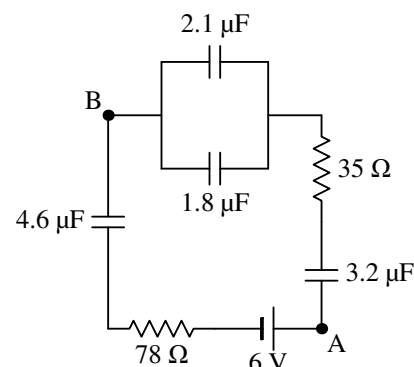
O exame realizou-se no dia 8 de fevereiro de 2019. Compareceram 81 estudantes e a nota média foi 10.7 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

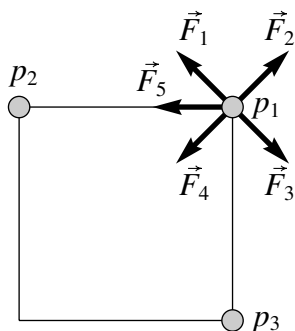
1. (4 valores). Um fio condutor retilíneo de 10 cm de comprimento transporta corrente de 1.2 A e encontra-se numa região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Quando o fio é colocado paralelo ao eixo dos x e com a corrente no sentido positivo desse eixo, a força sobre o fio, em mN, é: $-38.4 \hat{j} - 31.2 \hat{k}$. O fio é logo colocado paralelo ao eixo dos y , com a corrente no sentido positivo desse eixo, e a força, em mN, passa a ser $38.4 \hat{i} + 31.2 \hat{k}$. Encontre o campo $\vec{B}$.

2. (4 valores). Se no instante $t = 0$ os 4 condensadores no circuito da figura estão descarregados, então em qualquer instante posterior, $t > 0$, as cargas nos condensadores de $4.6 \mu\text{F}$ e $3.2 \mu\text{F}$ será a mesma. (a) Determine essa carga, quando todos os condensadores fiquem no estado estacionário. (b) Determine a diferença de potencial entre os pontos A e B, no estado estacionário. (c) Encontre o tempo que os condensadores demoram, desde $t = 0$, até ficarem com metade da carga do estado estacionário.



PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Três partículas encontram-se em vértices de um quadrado, como mostra a figura. A partícula p_1 é um eletrão; p_2 é um eletrão e p_3 um próton. Qual dos 5 vetores na figura representa melhor a força elétrica resultante sobre a partícula p_1 ?



- (A) $\vec{F}_1$ (C) $\vec{F}_5$ (E) $\vec{F}_4$
(B) $\vec{F}_3$ (D) $\vec{F}_2$

Resposta:

4. Selecione afirmação que é **falsa**. A força magnética sobre uma partícula com carga:

- (A) Depende do módulo da velocidade da partícula.
(B) É no sentido do campo magnético, se a carga for positiva.
(C) Depende do módulo do campo magnético no ponto onde estiver a partícula.
(D) Depende do sinal da carga da partícula.
(E) É perpendicular à velocidade da partícula.

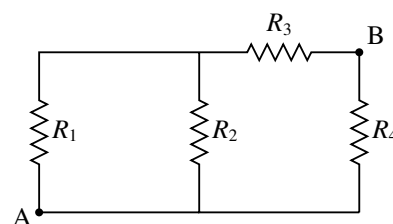
Resposta:

5. Uma carga pontual que se encontra no ponto $(x, y, z) = (4, 5, 3)$ (distâncias em cm) produz um potencial de 4 kV no ponto $(x, y, z) = (2, 4, 1)$. Calcule o valor da carga em unidades de nC.

- (A) 40.0 (C) 9.94 (E) 8.89
(B) 13.33 (D) 1.48

Resposta:

6. Determine o valor da resistência equivalente entre os pontos A e B no diagrama, sabendo que $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ e $R_4 = 3 \text{ k}\Omega$.



- (A) 6.45 kΩ (C) 4.73 kΩ (E) 1.29 kΩ
(B) 3.01 kΩ (D) 2.15 kΩ

Resposta:

7. Uma bobina tem indutância de 33 mH e resistência de 20 Ω. Calcule o módulo da impedância da bobina, para uma tensão alternada com frequência de 150 Hz.

- (A) 37.0 Ω (C) 51.1 Ω (E) 44.0 Ω
(B) 18.5 Ω (D) 102.2 Ω

Resposta:

8. Determine o valor da resistência duma lâmpada incandescente de 6 W e 6 V, nas condições normais de operação.

(A) 6.0 Ω (C) 4.5 Ω (E) 3.6 Ω
(B) 9.0 Ω (D) 18.0 Ω

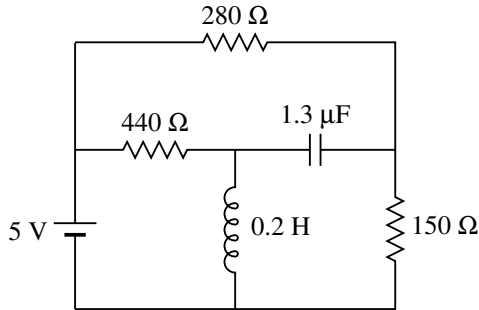
Resposta:

9. Um motor elétrico, alimentado por uma fonte com força eletromotriz de 230 V, é usado para realizar um trabalho de 7.54 kJ cada 4 segundos. Admitindo que a energia elétrica é transformada a 100% em energia mecânica, a corrente necessária será:

(A) 18.03 A (C) 27.05 A (E) 12.29 A
(B) 32.78 A (D) 8.2 A

Resposta:

10. Determine a carga acumulada no condensador, após um tempo suficientemente elevado para que o indutor e o condensador estejam em estado estacionário.



(A) 2.27 μC (C) 8.36 μC (E) 3.22 μC
(B) 1.32 μC (D) 4.38 μC

Resposta:

11. Duas superfícies condutoras esféricas isoladas têm raios de 4 cm e 7 cm e centro comum. A superfície menor tem carga total de 6 nC e a carga total na superfície maior é -9 nC. Calcule o módulo do campo elétrico num ponto que se encontra a 5 cm do centro das esferas.

(A) 32.4 kV/m (C) 50.63 kV/m (E) 11.02 kV/m
(B) 21.6 kV/m (D) 33.75 kV/m

Resposta:

12. Duas pilhas idênticas, cada uma com f.e.m. de 1.5 V e carga total igual a 2.4 A·h, são ligadas em série. Quais são os valores da f.e.m. e da carga disponível do sistema resultante? (observe-se que a energia do sistema deve ser igual à soma das energias das duas pilhas.)

(A) 3 V e 4.8 A·h (D) 1.5 V e 1.2 A·h
(B) 3 V e 2.4 A·h (E) 3 V e 1.2 A·h
(C) 1.5 V e 4.8 A·h

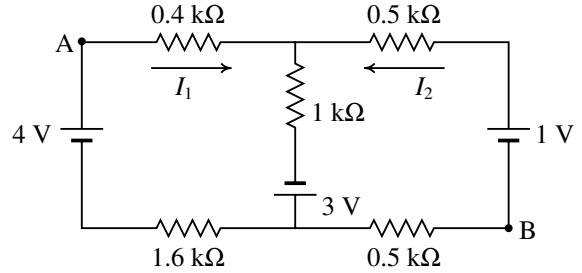
Resposta:

13. Quando o sinal de entrada num circuito é $2e^{-2t}$, o sinal de saída é igual a $e^{t/2} + 4e^{-2t}$. Encontre a função de transferência do circuito.

(A) $\frac{5}{2s-1}$ (C) $\frac{3}{s-1}$ (E) $\frac{3s}{s-1}$
(B) $\frac{5s}{2s-1}$ (D) $\frac{s}{2s-1}$

Resposta:

14. A intensidade das duas correntes indicadas no circuito da figura são $I_1 = 2 \text{ mA}$ e $I_2 = 1 \text{ mA}$. Arbitrando que o potencial seja igual a zero no ponto A, determine o valor do potencial no ponto B.



(A) -3.2 V (C) -5.6 V (E) -4.8 V
(B) -2.7 V (D) -1.3 V

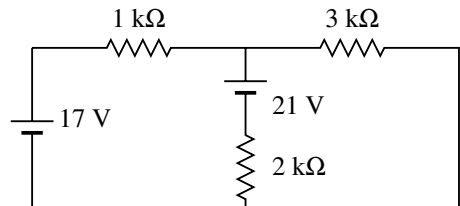
Resposta:

15. Num condensador, sem dielétrico, de placas paralelas quadradas, com 8.0 cm de lado, a distância entre as placas é 0.8 mm. Se o condensador é carregado até a diferença de potencial de 15 V, determine a carga armazenada.

(A) 1.70 nC (C) 1.06 nC (E) 70.7 nC
(B) 14.9 nC (D) 6.37 nC

Resposta:

16. Determine a intensidade da corrente na resistência de 3 k Ω .



(A) 4 mA (C) 2 mA (E) 5 mA
(B) 3 mA (D) 1 mA

Resposta:

17. Determine a corrente eficaz num indutor de 11 mH ligado a uma fonte ideal de tensão alternada, com tensão máxima 60 V e frequência de 30 Hz.

(A) 6.8 A (C) 20.5 A (E) 3.4 A
(B) 4.1 A (D) 184.2 A

Resposta:

Bibliografia

- Adams, S., & Allday, J. (2000). *Advanced physics*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros*. Lopes da Silva Editora: Porto, Portugal.
- Blinchikoff, H. J., & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.
- Brito, L., Fiolhais, M., & C, P. (1999). *Campo Electromagnético*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.
- Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Feynman, P. R., Leighton, R. B., & M, S. (1964). *The feynman lectures on physics*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Hecht, E. (1991). *Óptica*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Hecht, E. (1994). *Physics*. Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.
- Henriques, A. B., & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo*. Lisboa, Portugal: IST Press.
- Lévy-Leblond, J. M., & A, B. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*. Lisboa, Portugal: Gradiva.
- Maxima Development Team. (2017). *Maxima Manual* (5.41.0 ed.).
- Mendiratta, S. K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: Lisboa, Portugal.
- Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2*. McGraw-Hill: New York, NY, USA.
- Scherz, P., & Monk, S. (2013). *Practical electronics for inventors* (3a ed.). McGraw-Hill:

New York, NY, USA.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2004). *Physics* (5a ed.). New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.

Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Villate, J. E. (2015). *Eletricidade, magnetismo e circuitos* (2a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.

Walker, J. (1975). *O grande circo da Física*. Gradiva: Lisboa, Portugal.