

VIOLAÇÕES DA PROPRIEDADE DA MONOTONICIDADE DOS PREÇOS DE OPÇÕES SOBRE O ÍNDICE CAC 40

MOISÉS LIMA *, MARCELO RAMALHO** E CLÁUDIA RIBEIRO***

1. INTRODUÇÃO

A monotonicidade é uma das três propriedades¹ que os modelos de difusão unidimensional apresentam. Esta propriedade assenta na premissa que o preço de uma opção *call* (*put*) é sempre uma função crescente (decrescente) e convexa do preço do ativo subjacente (Bergman et al. (1996)), e deste modo as suas variações apresentam sempre o mesmo (oposto) sinal que a variação do preço do ativo subjacente. Significa isto que o produto das variações dos preços das opções *call* (*put*) e do ativo subjacente são sempre positivos (negativos).

A não verificação desta propriedade põe em causa o poder explicativo destes modelos. Contudo, após a publicação do artigo de Black e Scholes (1973) surgiram vários estudos que introduzem novas variáveis estado (Scott (1987), Jhonson e Shanno (1987), Hull e White (1987), Wiggins (1987), Stein e Stein (1991) e Heston (1993)) oferecendo a flexibilidade necessária para melhor explicar a dinâmica dos preços das opções.

Bakshi et al. (2000) testaram a propriedade da monotonicidade (PM) para o mercado S&P 500, utilizando o ponto médio do *bid-ask spread* das opções. Utilizando o modelo de Heston (1993) demonstraram que 47% das violações da

PM são explicadas pela presença de volatilidade estocástica. Fahlenbrach e Sandas (2009) efetuaram várias simulações utilizando o mesmo modelo concluindo que a volatilidade estocástica explica um terço das violações da PM e que estas ocorrem com maior incidência quando acompanhadas de grandes variações da volatilidade e de pequenas variações do preço do ativo subjacente em sentido contrário. Os mesmos autores também identificaram a microestrutura dos mercados como umas das causas para a violação da PM. Pérignon (2006), utilizando preços de transação para analisar as violações da PM de 5 índices europeus, identificou o *bid-ask bounce* e as estratégias de negociação por parte dos investidores como causa de tais violações. Adcock e Hua (2011) com base em simulações em contexto Black-Scholes (volatilidade constante) concluíram que para intervalos intradiários e diários o efeito *time decay* apresenta um papel importante na análise das violações da PM, obtendo conclusões semelhantes às de Bakshi, et al. (2000).

A não verificação da PM tem implicações ao nível da performance das estratégias dos investidores, seja de cobertura de risco, de especulação ou de arbitragem. Assim, por exemplo, na estratégia de cobertura de uma posição longa

* - Universidade do Porto, Faculdade de Economia (moisesfonteslima@gmail.com)

** - Universidade do Porto, Faculdade de Economia (marceloramalho241@gmail.com)

*** - Universidade do Porto, Faculdade de Economia e CEF.UP (reclaudia@fep.up.pt)

1- A par das propriedades da correlação perfeita e da redundância.

numa ação com uma posição curta numa opção de compra, a ocorrência de uma violação da PM poderá gerar uma dupla perda para o investidor se o preço do ativo subjacente variar positivamente ($\Delta S > 0$) e a opção *call* variar negativamente ($\Delta C < 0$). Por outro lado, o investidor pode ver os seus ganhos duplicar se ocorrer a violação ($\Delta S < 0$), ($\Delta C > 0$).

Outra questão que a literatura refere e que a violação da PM põe em causa é a frequência do reajustamento da carteira de ativos na sequência de uma estratégia de cobertura. Quanto mais dinâmica for a estratégia, mais eficaz se torna, isto é, a revisão deve ocorrer o mais frequentemente possível, idealmente de forma contínua, pois dessa forma os erros de cobertura tenderão a anular-se². Ao ocorrer a violação da PM, a partir de um determinado ponto, quanto mais dinâmica for a estratégia de cobertura, maior será a ocorrência de erros, Bakshi et al. (2000) usando o Modelo Black-Scholes, demonstraram esse mesmo facto. À medida que aumenta a frequência das revisões, os erros de cobertura inicialmente decrescem, mas aumentam a partir de um certo ponto, apresentando um comportamento em forma de U. Esta situação é causada pela correlação imperfeita entre o preço das opções e o preço do ativo subjacente.

O artigo encontra-se estruturado da seguinte forma: no próximo capítulo serão abordadas as tipologias das violações, seguido da descrição dos dados e da metodologia. No capítulo 4 apresentaremos os resultados, e por fim, no capítulo 5 serão apresentadas as conclusões.

2. FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Partindo da evidência recolhida dos estudos realizados por Bakshi et al. (2000) e Pérignon (2006), pretende-se com este estudo aprofundar a análise do comportamento das violações da PM, considerando para tal, uma volatilidade variável, para assim aferir sobre o seu impacto nas violações da propriedade.

Nos estudos desenvolvidos até agora sobre violações da PM, apenas se considerou a relação entre variações do preço do ativo subjacente e variações do preço da opção. Considerando o efeito positivo que o aumento da volatilidade tem no valor de uma opção, independentemente de ser uma *call* ou uma *put*, parte das violações será justificada por variações no mesmo sentido da opção e da volatilidade mesmo que o respetivo ativo subjacente não varie no sentido que seria de esperar. Assim, sem a inclusão da volatilidade, os estudos realizados sobrestimaram o número de violações, pois consideraram muitas violações que não o seriam se se tivesse tido em consideração a eventual variação da volatilidade.

A metodologia adotada é semelhante à utilizada por Pérignon (2006), já que a análise incide sobre os preços das transações efetuadas, com dados intradiários, em vez de se utilizar os *bid-ask midpoints*, tal como Bakshi et al. (2000). Pretende-se assim controlar o impacto dos efeitos de microestrutura na análise e nas conclusões. O grande contributo é, portanto, a introdução da volatilidade na análise.

2- Nesta circunstância os custos de transação serão elevados. A maior eficácia da estratégia de cobertura só é conseguida com custos de transação mais elevados, dando origem a um *trade-off* que será resolvido pelo investidor.

A PM refere que o preço de uma *call* aumenta monotonicamente e o preço de uma *put* diminui monotonicamente, com o aumento do respetivo ativo subjacente. Isto significa que a derivada do preço de uma *call* em ordem ao ativo subjacente deverá ser sempre não negativa e, por outro lado, a derivada do preço de uma *put* em ordem ao respetivo ativo subjacente deverá ser sempre não positiva.

Desta definição resulta que o produto entre a variação do preço de uma *call* e do preço do respetivo ativo subjacente deverá ser sempre maior ou igual a zero e, por contrapartida, o produto entre a variação do preço de uma *put* e do preço do ativo subjacente será sempre menor ou igual a zero.

Por outro lado, o módulo da variação da opção, independentemente de se tratar de uma *call* ou de uma *put*, deverá ser inferior ao módulo da variação do respetivo ativo subjacente, o que equivale a dizer que a divisão da variação do preço de uma *call* pela variação do respetivo ativo subjacente, deverá ser inferior a 1, e a divisão da variação do preço de uma *put* pela variação do respetivo ativo subjacente deverá ser superior a -1.

O valor de uma opção é constituído pelo seu valor intrínseco acrescido do seu valor temporal. O valor temporal da opção representa a possibilidade de uma opção evoluir favoravelmente no tempo que resta para a maturidade, o que significa que, quanto maior for o tempo para a maturidade, maior o seu valor temporal. A volatilidade influencia positivamente o valor da opção, o que significa que quanto maior for a volatilidade, *ceateris paribus*, maior será o valor da opção, independentemente de ser uma *call* ou uma *put*.

Seguindo os tipos de violação usadas em Bakshi et al. (2000), e incorporando agora a volatilidade, Adcock, Areal e Ribeiro (2012), propuseram uma nova tipologia das violações da PM que é analisada com profundidade neste estudo:

- Tipo I – Preços das opções e respetivos ativos subjacentes variam:
- Tipo I.i ($\Delta S > 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta C < 0$)
e ($\Delta S < 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta P < 0$)
- Tipo I.ii ($\Delta S < 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta C > 0$)
e ($\Delta S > 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta P > 0$)
- Tipo II – Preços das opções mantêm-se enquanto os dos ativos subjacentes variam:
- Tipo II.i ($\Delta S > 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta C = 0$)
e ($\Delta S < 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta P = 0$)
- Tipo II.ii ($\Delta S < 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta C = 0$)
e ($\Delta S > 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta P = 0$)
- Tipo III – Preços das opções variam enquanto os dos ativos subjacentes se mantêm:
- Tipo III.i ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma = 0 \Rightarrow \Delta C \neq 0$)
e ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma = 0 \Rightarrow \Delta P \neq 0$)
- Tipo III.ii ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta C < 0$)
e ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma \geq 0 \Rightarrow \Delta P < 0$)
- Tipo III.iii ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta C > 0$)
e ($\Delta S = 0$; $\Delta \sigma \leq 0 \Rightarrow \Delta P > 0$)

Para melhor compreender o impacto da introdução da volatilidade na análise, comparamos a frequência das violações com e sem a introdução da volatilidade na análise. A tipologia de violações sem a introdução da volatilidade considerada é análoga à apresentada, não incorporando essa dimensão, e é diferenciada em termos de notação por «'». Neste caso, a violação tipo III.i' ($\Delta S = 0 \Rightarrow \Delta C \neq 0$ para as *calls*; $\Delta S = 0 \Rightarrow \Delta P \neq 0$ para as *puts*) foi eliminada uma vez que seria exatamente igual à soma dos tipos de violação III.ii' e III.iii'.

Neste estudo não são quantificados os efeitos de alterações na volatilidade nas variações do preço do ativo subjacente e do valor das opções nas observações que deixam de ser consideradas violações da PM pela introdução da volatilidade na análise. Assim, se os estudos anteriores sobrestimam o número de violações por não considerarem o impacto de alterações da volatilidade, o presente estudo poderá subestima-lo uma vez que poderemos estar a excluir violações em que o efeito da variação da volatilidade não é suficiente para justificar o efeito da violação provocada pelas variações das outras variáveis (em particular, do preço à vista do ativo subjacente). No entanto, temos a certeza de que todas as observações consideradas violações para efeitos da análise o serão de facto, enquanto em estudos anteriores tal não seria necessariamente verdade. Fica assim em aberto a necessidade de realização de um estudo que quantifi-

que estes casos para aferir quantos deles não são efetivamente violações³.

3. DADOS E METODOLOGIA

Este estudo incide sobre opções sobre o índice de ações Francês, o CAC 40. Os contratos analisados são opções europeias, o que significa que são opções que só podem ser exercidas na sua maturidade, e são transacionadas no NYSE Euronext Paris. Os dados deste estudo reportam ao período compreendido entre Outubro de 2008 e Setembro de 2009, do qual foram obtidas cerca de 229 mil observações de preços de *calls* e *puts*, referentes a mais de 7,2 milhões de contratos transacionados. A fonte para os dados das opções foi a NYSE Euronext, enquanto as cotações para o índice CAC 40 foi a Olsen. As principais informações sobre as opções estão compiladas na Tabela 1.

Tabela 1 – Informação sobre os contratos de Opções e Ativo Subjacente utilizados para o período amostral de Outubro de 2008 a Setembro de 2009

	Descrição
Ativo Subjacente	CAC 40
<i>Option Ticker</i>	PXA
Mercado das Opções	NYSE Euronext Paris
Número de contratos	1.351
Número de transações	228.508
Número de contratos transacionados	7.236.409
<i>Tick Size</i> (valor)	0,10 index points (EUR 10)
Número de observações do Índice	484.388

3- A realização desse estudo exige a adoção de um modelo de avaliação de opções que quantifique o impacto de variações do preço do ativo subjacente e da volatilidade no preço da opção. A presente análise tem a vantagem de ser universal (*model free*).

Neste estudo são utilizados preços de transações, como em Pérignon (2006), em alternativa à utilização de pontos médios das cotações *bid-ask*, como em Bakshi et al. (2000). Desta forma, os resultados são menos sujeitos às distorções provocadas por manipulações do *spread* que podem ser criadas mesmo sem ocorrer qualquer transação. No entanto, as conclusões poderão estar mais sujeitas a um enviesamento provocado pelo *bid-ask bounce*, isto é, pelo simples facto de haver uma sequência de duas transações em que uma é iniciada por uma cotação *bid* e outra iniciada por uma cotação *ask* poderá dar origem à ocorrência de uma violação mesmo sem haver alteração da cotação *spot*, resultante deste fenómeno.

Antes de começar a trabalhar os dados, foi feita uma limpeza dos dados que tipicamente incluem erros de registo. Desde logo, foram excluídas observações que tivessem qualquer tipo de erro: transações fora do horário de funcionamento da bolsa (dias ou horas incorretos); transações com valor zero; transações com quantidade igual a zero. Além disto, por forma a excluir observações que pudessem potencialmente provocar enviesamentos nas conclusões deste estudo, foram aplicados três filtros à base de dados original:

- Todas as observações com menos de seis dias para a maturidade foram excluídas;
- Apenas são consideradas observações cujo valor da opção seja superior a duas vezes o valor do *tick size*;
- Foram eliminadas todas as observações de um determinado dia relativas a contratos com menos de 10 observações nesse dia.

Destes filtros, verificamos que 34.369 observações (17.353 *calls* e 17.016 *puts*) tinham menos de seis dias para a maturidade, 301 observações (125 *calls* e 176 *puts*) não tinham valor superior a dois *tick sizes* e 66.477 observações (31.156 *calls* e 35.321 *puts*) não tinham mais de 10 transações desse mesmo contrato nesse mesmo dia. Da aplicação destes filtros resultou a eliminação de 96.619 observações (46.645 *calls* e 49.974 *puts*), um montante inferior à soma das observações eliminadas por cada filtro isoladamente, uma vez que existem observações que se enquadram em mais do que um filtro. O estudo incide sobre um total de 131.889 observações, 70.860 relativas às *calls* e 61.029 relativas às *puts*.

Para aprofundar o estudo, a base de dados foi dividida em várias categorias, de acordo com o grau de *moneyness* e o tempo para a maturidade. Assim, as *calls* são consideradas *in-the-money* (ITM) se $S/X \geq 1,03$, *at-the-money* (ATM) se $S/X \in (0,97;1,03)$ e *out-of-the-money* (OTM) se $S/X \leq 0,97$, onde S representa o preço do ativo subjacente e X ao preço de exercício da opção. O mesmo raciocínio é aplicado às *puts* apenas substituindo S/X por X/S. Por outro lado, uma opção será classificada com prazo curto (*short*) se o tempo para a maturidade for $t \leq 30$ dias corridos, prazo médio (*medium*) se $t \in]30;60[$ ou prazo longo (*long*) se $t \geq 60$. A Tabela 2 apresenta estatísticas descritivas da amostra, referindo o preço médio das opções bem como o número total de observações distribuídos por grau de *moneyness* e prazo para a maturidade. Os dados relativos às *puts* encontram-se entre parênteses, sendo os restantes dados relativos às *calls*.

Tabela 2 – Resumo das estatísticas descritivas dos dados por grau de *moneyness* e maturidade.

<i>Moneyness</i>	Tempo para a Maturidade						Todas as Maturidades	
	<i>Short</i>		<i>Medium</i>		<i>Long</i>		Pr. Md.	# Obs.
	Pr. Md.	# Obs.	Pr. Md.	# Obs.	Pr. Md.	# Obs.		
OTM	25,35 (32,86)	26.054 (27.362)	40,93 (63,28)	15.342 (11.382)	49,29 (66,95)	8.607 (6.892)	34,25 (45,59)	50.003 (45.636)
ATM	62,52 (81,37)	16.314 (11.449)	120,92 (170,90)	2.615 (1.747)	221,91 (304,38)	812 (690)	76,81 (103,71)	19.741 (13.886)
ITM	247,92 (299,53)	640 (934)	372,01 (446,47)	108 (198)	409,49 (508,22)	366 (375)	313,04 (370,77)	1.114 (1.507)
Soma <i>Moneyness</i>	42,76 (53,10)	43.008 (39.745)	54,49 (83,08)	18.065 (13.327)	77,08 (108,34)	9.785 (7.957)	50,49 (66,85)	70.858 (61.029)

Da informação compilada na Tabela 2 conclui-se que, regra geral, existem mais transações à medida que se aproxima o prazo da maturidade e, por outro lado, existem mais transações quanto menos perto do grau *in-the-money* estiverem, comportamento típico nestes mercados. Quanto aos preços médios, como é natural, as opções ITM são as mais caras, e o preço será tanto maior quanto maior for o tempo para a maturidade. Isto acontece uma vez que, quanto maior for o prazo para a maturidade de uma determinada opção, maior será o seu valor temporal.

Cálculo da Volatilidade

O principal contributo deste estudo para uma melhor compreensão das violações da PM, reside no facto de explorar o impacto da introdução da volatilidade na frequência das violações da propriedade.

Bakshi et al. (2000) já tinham abordado a hipótese de as violações poderem resultar de variações da volatilidade, no contexto de um modelo de volatilidade estocástica (Heston, 1993). Verificaram que, de facto, algumas violações poderiam ser explicadas por alterações na volatilidade. Contudo, o estimador de volatilidade utilizado não seria o mais adequado para análise do efeito em causa na medida em que não apresenta grande variabilidade em

dados intradiários.

Neste estudo utilizamos o estimador de volatilidade realizada de Andersen e Bollerslev (1998). De acordo com os autores, a volatilidade realizada calculada a partir de retornos intradiários de elevada frequência é uma medida eficaz da volatilidade, com a vantagem adicional de ser de cálculo trivial. A volatilidade realizada é dada pela raiz quadrada da soma do quadrado das rentabilidades intradiárias de elevada frequência (r_i) em cada período intradiário:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i^2)} \quad (1)$$

Trata-se de um estimador independente da disponibilidade de informação no momento do cálculo da volatilidade, ao contrário de, por exemplo, em Bakshi et al. (2000) onde se utiliza um estimador dependente do montante de opções transacionadas, que é variável ao longo do tempo.

Para a estimação da volatilidade utilizam-se períodos de 30 minutos, o que significa que temos no máximo 17 observações por dia. O cálculo da volatilidade é feito com base na rentabilidade contínua em cada 5 minutos da respetiva meia hora, o que implica que para o cálculo de cada valor da volatilidade sejam utilizadas 6 observações.

Correspondência dos preços à vista com os das Opções

Os preços à vista (valores do índice CAC 40) não têm, necessariamente, correspondência exata (preços no mesmo segundo) com os preços das opções. Esta situação deriva do facto de o preço do índice ser calculado a cada 15 segundos (podendo inclusive existir falhas), enquanto os preços das opções são transações efetivas que podem acontecer a qualquer segundo. Assim, de forma a ser possível fazer a correspondência entre os preços do índice e os preços das opções teve de se adotar um critério: todas as observações de opções existentes na base de dados viram a sua hora de transação arredondada para o múltiplo de 15 segundos mais próximo, ou seja, para um dado múltiplo de 15 (t_0) segundos seriam correspondidas todas as observações que estivessem no intervalo $[t_0-7,5$ segundos; $t_0+7,5$ segundos].

Relativamente à volatilidade, esta está diretamente interligada com um preço do índice, pelo que a correspondência com o preço das opções será feita exatamente da mesma forma que com os dados *spot*.

Metodologia de Cálculo das Variações de Preços

Dado que a volatilidade é um fator muito importante neste estudo, e tendo em conta que o valor da volatilidade apenas se altera a cada 30 minutos, pela metodologia de cálculo adotada previamente explicada, apenas se irá estudar as violações da PM em intervalos fixos de 30 minutos, 1 hora, 2 horas, 3 horas e 1 dia, excluindo neste estudo, quando comparado com estudos anteriores, a análise *tick-by-tick*. Este

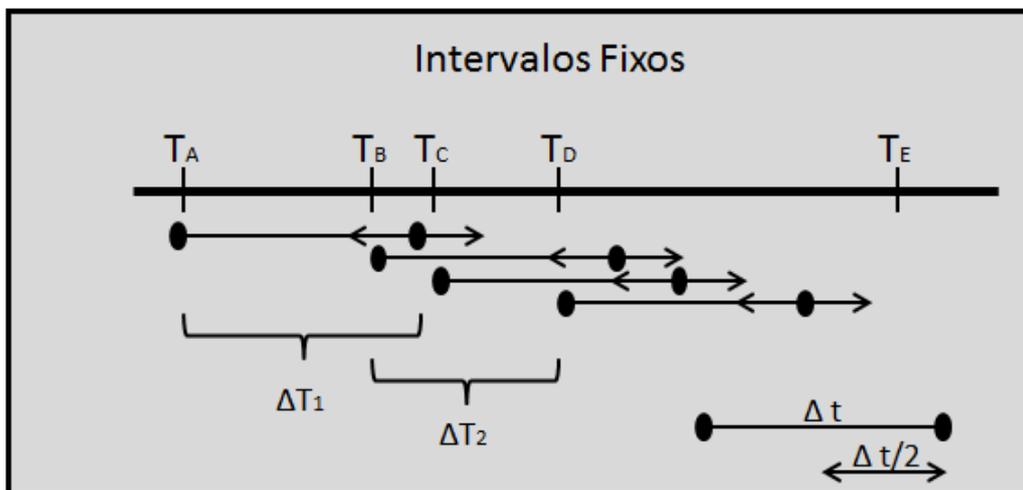
último tipo de análise, quando se trabalha com dados de alta frequência, pressupõe um número significativo de observações potencialmente separadas por um intervalo inferior a 30 minutos, o que significa que a introdução da volatilidade na análise, apenas variando a cada 30 minutos, não teria o impacto que se pretende analisar, uma vez que duas observações dentro do mesmo período de 30 minutos teriam a mesma volatilidade associada.

Uma vez que neste estudo, as observações dizem respeito a preços de transações efetivas de opções, estas não se encontram espaçadas no tempo de forma uniforme. Neste estudo iremos adotar uma metodologia semelhante à utilizada em Pérignon (2006). Para fazer a correspondência entre duas observações para um dado intervalo Δt , que corresponde ao intervalo de tempo entre as observações no momento zero e no momento um, soma-se Δt a t_0 e procura-se o valor mais próximo desse intervalo com uma margem de erro máxima de $\Delta t/2$, isto é, a observação que será correspondida com a inicial será a mais próxima de $t_0 + \Delta t$ no intervalo $[t_0 + \Delta t - \Delta t/4; t_0 + \Delta t + \Delta t/4]$. A única exceção relativamente a este método encontra-se na análise dos dados diários, a qual é feita apenas contando com uma margem de 4 horas, isto é, a observação será a mais próxima de $\Delta t + 24$ horas, situada no intervalo $[t_0 + 22$ horas; $t_0 + 26$ horas]. Se para determinada observação, não for possível encontrar uma observação correspondente que obedeça às regras previamente definidas, essa observação não será incluída na análise. De realçar ainda que para efeitos de correspondência de observações, apenas são consideradas observações que ocorram no mesmo dia, exceção feita ao intervalo de análise de 24 horas.

Para melhor compreensão deste método encontra-se de seguida a Ilustração 1, onde se pode

ver uma demonstração das correspondências entre observações, idêntica à de Pérignon (2006).

Ilustração 1 – Correspondência entre observações para intervalos de tempo fixos



Como se pode ver na ilustração acima, para a transação T_A haveria duas possibilidades para fazer a correspondência: T_B e T_C . Como T_C é transação mais próxima de $T_A + \Delta t$, será a transação selecionada. Para a transação T_B a mais próxima será inequivocamente T_D . Quanto às restantes transações, não é possível encontrar nenhuma observação correspondente que re-

speite as regras definidas, pelo que seriam excluídas da análise.

A imposição destas regras levou a que neste estudo fossem consideradas 181.249 observações para as *calls* e 144.000 observações para as *puts* conforme divisão na Tabela 3 com o número de observações por intervalo.

Tabela 3 – Número de observações por intervalo.

Intervalo	Call	Put
30 Minutos	30.696	22.678
1 Hora	35.536	27.642
2 Horas	35.365	28.222
3 Horas	33.598	27.314
1 Dia	46.054	38.144
Total	181.249	144.000

A base de dados considerada incluía um total de 70.859 transações de *calls* e 61.029 transações de *puts*, o que demonstra que não foi possível fazer a correspondência de muitas observações. Esta questão é justificada com o facto de alguns contratos não serem muito líquidos pelo que, como se está a considerar intervalos de tempo bastante pequenos, não se consiga encontrar observação que respeite os critérios de correspondência definidos. Daí que, como se pode ver na Tabela 3, o número de observações seja em geral crescente à medida que cresce o intervalo entre observações, atingindo o pico no intervalo com 24 horas, com a exceção do intervalo de 3 horas, tanto nas *calls* como nas *puts*, o que se justifica com o facto de apenas se fazerem corresponder transações no próprio dia, o que, aliado ao facto de a margem de erro considerada neste tipo de intervalo apenas permita que se faça correspondência entre observações no intervalo $[t_0 + 2h15; t_0 + 3h45]$, automaticamente impossibilita a correspondência de qualquer observação a partir do momento em que faltam menos de 2 horas e 15 minutos para o fecho dos mercados.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo fazemos uma análise estatística dos resultados. Começamos por comparar a frequência das violações antes e após a introdução da volatilidade na análise, para aferir sobre a capacidade explicativa desta nova variável. É também quantificada e analisada a frequência de violações pelos diferentes tipos definidos anteriormente.

Posteriormente, aprofundamos o efeito da volatilidade nas violações da PM, fazendo uma análise bidimensional, onde se analisam as violações por níveis de volatilidade e de preços do ativo subjacente. A análise prossegue com o estudo da incidência de violações em períodos de elevada e reduzida volatilidade.

Por fim, aprofundamos um efeito de microestrutura subjacente à metodologia adotada, nomeadamente o efeito *bid-ask bounce* originado pela utilização de preços de transações efetivas em vez de *bid-ask midpoints*.

Violações antes e após a introdução da volatilidade na tipologia

Um ponto fulcral deste estudo prende-se com a introdução da volatilidade na análise das violações da PM. Assim, torna-se importante perceber a diferença entre os resultados obtidos em termos de frequência de violações antes e após a introdução da volatilidade. Para tal, quantificou-se o número de violações da propriedade em ambas as circunstâncias, considerando para o efeito, os tipos de violação identificados anteriormente.

Nas Tabelas 4 e 5 encontram-se as frequências das violações da PM não considerando a volatilidade e depois considerando a volatilidade, respetivamente, e encontram-se divididos por intervalo e por tipo de violação. Estes resultados dizem respeito ao número de violações da PM dividido pelo número total de observações. Os dados das *puts* encontram-se apresentados entre parênteses, sendo os restantes relativos às *calls*.

Tabela 4 – Frequência das violações da propriedade da monotonicidade sem considerar a volatilidade, em %.

Intervalo	Frequência das violações não considerando a volatilidade						Total
	Tipo I.i'	Tipo I.ii'	Tipo II.i'	Tipo II.ii'	Tipo III.ii'	Tipo III.iii'	
30 Minutos	6,33 (5,02)	6,52 (4,60)	3,06 (3,14)	2,53 (2,63)	0,01 (0,07)	0,01 (0,00)	18,46 (15,47)
1 Hora	5,48 (4,63)	5,03 (3,84)	2,07 (1,95)	1,86 (1,82)	0,01 (0,01)	0,00 (0,02)	14,46 (12,26)
2 Horas	5,02 (5,10)	4,30 (3,70)	1,49 (1,54)	1,24 (1,12)	0,01 (0,01)	0,02 (0,00)	12,07 (11,48)
3 Horas	5,30 (5,01)	3,86 (3,65)	1,64 (1,31)	0,98 (1,08)	0,01 (0,03)	0,00 (0,00)	11,79 (11,09)
1 Dia	10,69 (8,27)	0,75 (0,54)	1,00 (0,69)	0,10 (0,19)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	12,54 (9,69)
Total	6,83 (5,82)	3,84 (3,02)	1,77 (1,60)	1,24 (1,24)	0,01 (0,02)	0,01 (0,00)	13,69 (11,71)

Tabela 5 – Frequência das violações da propriedade da monotonicidade considerando a volatilidade, em %.

Intervalo	Frequência das violações considerando a volatilidade							Total
	Tipo I.i	Tipo I.ii	Tipo II.i	Tipo II.ii	Tipo III.i	Tipo III.ii	Tipo III.iii	
30 Minutos	2,58 (2,17)	4,11 (3,49)	1,51 (1,22)	1,64 (1,76)	0,00 (0,03)	0,00 (0,03)	0,01 (0,00)	9,85 (8,70)
1 Hora	1,54 (1,40)	3,41 (2,68)	0,87 (0,80)	1,27 (1,32)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	0,00 (0,02)	7,09 (6,22)
2 Horas	1,80 (1,68)	2,87 (2,72)	0,59 (0,64)	0,87 (0,82)	0,00 (0,00)	0,01 (0,00)	0,01 (0,00)	6,15 (5,87)
3 Horas	1,82 (2,11)	2,46 (2,67)	0,76 (0,52)	0,52 (0,63)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	5,57 (5,93)
1 Dia	5,10 (3,98)	0,31 (0,27)	0,51 (0,40)	0,04 (0,08)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)	5,96 (4,72)
Total	2,72 (2,39)	2,46 (2,18)	0,81 (0,68)	0,80 (0,83)	0,00 (0,00)	0,00 (0,01)	0,01 (0,00)	6,81 (6,09)

Como se pode deprender da análise às tabelas acima apresentadas, verificamos que a frequência das violações diminui consideravelmente, quando consideramos a volatilidade, independentemente do tipo de violação e do tipo de intervalo que estamos a considerar. A soma de todos os tipos de violações da propriedade nas *calls* sem considerar a volatilidade situa-se en-

tre 11,79% e 18,46% enquanto considerando a volatilidade a frequência das violações desce para o intervalo compreendido entre 5,57% e 9,85%. Por outro lado, a nível das *puts*, não considerando a volatilidade, a frequência de todos os tipos de violações situa-se entre 9,69% e 15,47%, enquanto considerando a volatilidade, descem para frequências situadas entre 4,72% e 8,70%.

É importante salientar da análise às Tabelas 4 e 5, que a frequência de violações considerando todos os tipos, regra geral, diminui quando aumenta o intervalo que estamos a considerar, o que constitui um indício de uma das causas das violações: microestrutura dos mercados. A exceção a esta regra tem a ver com os intervalos diários onde, como se pode constatar pelos dados nos quadros acima, a frequência das violações das *calls* (incluindo todos os tipos) sobe, o que contraria as expectativas iniciais. Estes resultados são compatíveis com os que obtidos em Pérignon (2006).

Para melhor compreender este efeito é necessário analisar a frequência dos diferentes tipos de violações isoladamente. Assim, verifica-se que descem conforme sobe o intervalo em análise, com exceção das violações de tipo I.i (I.i' para resultados não considerando a volatilidade). Esta conclusão é válida tanto para os dados sem volatilidade como para os dados com volatilidade. Por outro lado, a exceção para o tipo de violações I.i, que até tem maior frequência de violações nos intervalos diários (5,10% nas *calls* e 3,98% nas *puts* em dados considerando volatilidade), justifica o facto de que analisando a soma de todas as violações das *calls*, a frequência de violações aumentar para intervalos diários, já que o aumento nas violações de tipo I.i supera todas as outras.

As violações de tipo I.i pressupõem que para uma dada variação do ativo subjacente (positiva nas *calls* e negativa nas *puts*), o valor da opção desça. Esta situação, quando se trabalha com intervalos diários, pode ser justificada com o efeito do *time decay*, isto é, com a simples passagem do tempo, ficando a faltar menos dias para a maturidade, o valor temporal da opção diminui, pelo que será natural que o valor da opção também diminua. Assim, se o efeito do *time decay* superar a diminuição dos efeitos de

microestrutura, acompanhados por uma determinada variação no ativo subjacente, poderá haver uma violação da PM, que na realidade apenas acontece porque a opção perdeu valor temporal. Nessa sequência, o aumento das violações de tipo I.i para intervalos diários pode em parte ser justificado pelo efeito que a passagem do tempo provoca uma diminuição no valor da opção.

Por outro lado, para ocorrer uma violação de tipo I.ii é necessário que o valor da opção suba, se o ativo subjacente descer, no caso das *calls*, ou se o ativo subjacente subir, no caso das *puts*. Pela análise às Tabelas 4 e 5, verificou-se que as violações diminuem conforme o intervalo aumenta, atingindo a frequência mínima para intervalos diários. Neste tipo de violações a passagem do tempo tem um efeito contrário uma vez que a perda de valor da opção decorrente da diminuição do tempo para a maturidade mitiga assim eventuais subidas do preço ativo subjacente associadas à violação de tipo I.ii.

Esta situação deixa em aberto a necessidade de realização de um estudo que permita quantificar o efeito do *time decay* nas violações da PM, tendo em conta que pode aumentá-las (tipo I.i) ou diminuí-las (tipo I.ii).

Verificou-se ainda que todas as violações de tipo III.i, III.ii e III.iii são residuais, uma vez que a cotação à vista do índice varia a cada 15 segundos, pelo que não será muito comum encontrar situações deste tipo nos intervalos selecionados. Agregando os dados de todos os intervalos analisados, apenas se encontraram 36 violações da propriedade em dados não considerando a volatilidade e 20 violações considerando a volatilidade, sendo natural que a frequência deste tipo de violações da PM seja muito próxima de 0,00%, independentemente do intervalo considerado ou do tipo de violação

(III.i, III.ii ou III.iii). Seria muito mais natural ter este tipo de violações se considerasse o intervalo *tick-by-tick*, uma vez que para este tipo de intervalo, as variações do preço das opções podem ocorrer com uma frequência superior à da variação dos preços dos respetivos ativos subjacentes (que variam a cada 15 segundos). Assim, uma vez que este tipo de violações não é significativo, não será aprofundado neste estudo nos pontos seguintes.

As violações de tipo II.i e II.ii são aquelas em que o ativo subjacente varia mas o preço da opção mantém-se. A frequência destas violações é elevada para intervalos mais pequenos e vai diminuindo progressivamente à medida que aumentam os intervalos, sendo que para intervalos diários apresenta uma frequência bastante reduzida. Isto leva a crer que estas violações estejam intimamente relacionadas com problemas de microestrutura, que advêm de se trabalhar com dados intradiários. É expectável que grande parte destas violações possam ser justificadas pela limitação imposta à variação mínima do preço dado pelo *tick size* uma vez que, se o ativo subjacente variar pouco, poderá não ser o suficiente para variar o valor da opção, gerando assim uma violação do tipo II.i ou II.ii.

Efeito Volatilidade

Neste ponto iremos fazer uma análise análoga à de Fahlenbrach e Sandas (2009), em que realizaram um estudo bidimensional da frequência das violações da PM em função de diferentes níveis de magnitude da variação da volatilidade e do preço do ativo subjacente. A análise de Fahlenbrach e Sandas (2009) foi realizada com base em dados simulados do modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993), dividindo as variações do ativo subjacente e da volatilidade em decis, formando assim uma matriz com 100

células, em que cada uma teria 10.000 observações, num total de 1.000.000 de observações. Neste estudo a análise é feita com base em observações reais do índice CAC 40 e de opções sobre este índice relativas ao período compreendido entre outubro de 2008 e setembro de 2009.

Quer para variações da volatilidade, quer para variações do preço do ativo subjacente, os decis correspondem a um décimo da diferença entre a variação positiva mais alta e a variação negativa mais baixa, divididos uniformemente neste intervalo. Isto faz com que determinados intervalos não tenham qualquer observação.

Esta análise foi feita apenas para as *calls*, para violações de tipo I.i e de tipo I.ii, para o intervalo de 30 minutos. Para aprofundar a análise e a poder comparar com os resultados apresentados por Fahlenbrach e Sandas (2009), foi elaborado este estudo para os dois tipos de violação, incluindo ou não a volatilidade.

Nas Tabelas 6 e 7 podemos encontrar a análise da frequência das violações para a tipologia sem volatilidade e com volatilidade, respetivamente, para o intervalo de 30 minutos. A mesma análise foi realizada para os remanescentes intervalos, tendo chegado a resultados análogos pelo que se reporta apenas os resultados para o intervalo de 30 minutos. O valor apresentado em cada célula corresponde à percentagem de violações no total das observações da célula. As células sem observações estão identificadas com N/A.

Dado estarmos a trabalhar com dados reais, em vez de simulações, e a distribuição por decis ser feita em intervalos iguais desde a variação mais alta à variação mais baixa, os decis centrais não são, necessariamente, os decis que

correspondem a variação nula. Importa referir que em relação ao preço do ativo subjacente a

variação nula encontra-se no decil 4 e em relação à volatilidade a variação nula encontra-se no decil 6.

Tabela 6 – Distribuição da frequência das violações em opções *call* sobre o CAC para o intervalo de 30 minutos (violações s/ volatilidade) em função das variações do preço do subjacente e da volatilidade

dS / dv	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Total
d1	N/A	N/A	0%	0%	0%	0%	0%	N/A	N/A	N/A	0%
d2	N/A	N/A	0%	0%	10%	0%	0%	0%	N/A	11%	2%
d3	0%	0%	13%	0%	5%	19%	2%	12%	N/A	6%	12%
d4	25%	33%	14%	21%	18%	15%	19%	7%	0%	50%	16%
d5	0%	0%	5%	5%	6%	6%	4%	0%	0%	88%	6%
d6	0%	4%	4%	0%	13%	0%	1%	0%	N/A	3%	3%
d7	0%	0%	N/A	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
d8	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
d9	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
d10	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
Total	18%	18%	8%	13%	14%	13%	11%	4%	0%	24%	13%

Tabela 7 - Distribuição da frequência das violações em opções *call* sobre o CAC para o intervalo de 30 minutos (violações c/ volatilidade) em função das variações do preço do subjacente e da volatilidade

dS / dv	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Total
d1	N/A	N/A	0%	0%	0%	0%	0%	N/A	N/A	N/A	0%
d2	N/A	N/A	0%	0%	10%	0%	0%	0%	N/A	0%	2%
d3	0%	0%	13%	0%	5%	7%	0%	0%	N/A	0%	4%
d4	25%	27%	3%	11%	12%	8%	7%	0%	0%	0%	9%
d5	0%	0%	0%	0%	0%	2%	4%	0%	0%	88%	3%
d6	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	N/A	3%	0%
d7	0%	0%	N/A	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
d8	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
d9	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
d10	N/A	N/A	N/A	N/A	0%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0%
Total	18%	14%	2%	5%	8%	7%	5%	0%	0%	21%	7%

Da análise da Tabela 6 verifica-se que as maiores frequências de violações ocorrem nos decis 1, 2 e 10 para a volatilidade (com 18%, 18% e 24% de violações, respetivamente) e nos decis 3 e 4 para o ativo subjacente (com 12% e 16%, respetivamente). Analisando a Tabela 7 encontramos resultados semelhantes aos obtidos para a análise da tipologia de violações não considerando variações na volatilidade. Ou seja, as violações de tipo I.i e I.ii são mais frequentes quando ocorrem variações reduzidas do preço do ativo subjacente e variações elevadas (positivas ou negativas) da volatilidade. Estes resultados estão em linha com os obtidos com dados simulados por Fahlenbrach e Sandas (2009).

Por outro lado, a comparação das Tabelas 6 e 7 permite pôr em evidência a limitação dos estudos realizados até então, que sobrestimam a frequência das violações, bem como a limitação do presente estudo, que subestima essa mesma frequência. De facto, com a nova tipologia de violações são desconsideradas as eventuais violações que possam ocorrer quando o preço do ativo subjacente e a volatilidade variam em sentidos opostos no caso das *call*, ou variam no mesmo sentido no caso das *put*. A identificação das violações nestas circunstâncias exige a adoção de um modelo de avaliação que permita quantificar a amplitude dos dois efeitos sobre o preço das opções, de sinal contrário, por forma a identificar qual dos dois se sobrepõe. Esta questão extravasa o objetivo do nosso estudo por se pretender realizar uma análise independente de modelos de avaliação e dos seus pressupostos de base. O presente estudo tem, contudo, a vantagem de identificar como violação da PM as observações que de facto violam a propriedade, considerando as variações ocorridas em simultâneo na volatilidade com impacto

significativo sobre os preços das opções.

Tendo em conta a importância da volatilidade nas conclusões deste estudo, torna-se pertinente introduzir uma dimensão adicional na análise: estudar a incidência das violações da PM em regimes de volatilidade distintos - volatilidade elevada ou reduzida. Para tal, através de um *regime switching model*, estimou-se a probabilidade de uma observação se encontrar num dia de elevada ou reduzida volatilidade. O modelo foi estimado para o período em análise, compreendido entre Outubro de 2008 e Setembro de 2009, e com base em observações diárias de fecho à vista para o CAC 40, num total de 261 dias. Nesse período registaram-se 192 dias de volatilidade elevada contra apenas 69 dias de volatilidade reduzida, o que é compreensível tendo em conta que este período foi de muita instabilidade nos mercados financeiros devido à crise do *subprime*, com início em 2007.

Como esta estimativa foi feita com base em cotações de fecho, o tipo da volatilidade do período é identificado numa base diária, pelo que, para relacionar os dados deste estudo com a estimativa dos períodos de volatilidade elevada ou reduzida, fez-se simplesmente a correspondência entre todas as observações de um dia e o tipo de volatilidade desse mesmo dia. A análise é desenvolvida para violações do tipo I por serem as mais significativas e de maior impacto sobre os resultados das estratégias dos investidores.

Os resultados na Tabela 8 apresentam a frequência de violações do tipo I em períodos de volatilidade elevada ou reduzida para *calls* e *puts*. A frequência foi calculada dividindo o número de violações num determinado regime, pelo número total de observações nesse mesmo regime.

Tabela 8 – Frequência de violações em regimes de volatilidade elevada e reduzida

Intervalo da amostra	Regime de elevada volatilidade			
	Call		Put	
	Tipo I.i (%)	Tipo I.ii (%)	Tipo I.i (%)	Tipo I.ii (%)
30 minutos	3,06	4,34	2,15	3,47
1 hora	1,78	3,58	1,48	2,81
2 horas	2,13	3,39	1,73	2,84
3 horas	2,13	2,76	2,06	2,78
Regime de baixa volatilidade				
30 minutos	1,77	3,72	2,21	3,54
1 hora	1,13	3,13	1,22	2,42
2 horas	1,16	1,89	1,58	2,46
3 horas	1,22	1,89	2,20	2,43

A Tabela 8 põe em evidência a maior incidência de violações do tipo I em períodos de elevada volatilidade, sendo o efeito mais nítido no caso das *calls*.

Convém ainda referir que, devido ao facto de as estimativas produzidas pelo modelo utilizado indicarem que há grande probabilidade de em cerca de 74% dos dias do período em análise serem dias de volatilidade elevada, naturalmente, o número de violações em termos absolutos é largamente superior nos dias de volatilidade elevada, quer para as *calls*, quer para as *puts*.

Efeitos Microestrutura

Os efeitos de microestrutura são particularmente relevantes em estudos em que se utilizam dados intradiários. Neste ponto iremos dar ênfase a um efeito analisado por Perignon (2006), que deriva do facto de utilizarmos preços de transação: o *bid-ask bounce*. Este efeito poderia ser contornado utilizando os *bid-ask midpoints* como em Bakshi et al. (2000).

Este efeito pode justificar o aumento de violações pelo simples facto de uma transação iniciada por um preço *ask* poder ser seguida de uma transação iniciada por um preço *bid*. A título de exemplo, se entre duas transações o preço do ativo subjacente subir, é expectável que o preço da *call* suba. No entanto, se a primeira transação for iniciada por uma cotação *ask* (mais alta) e a segunda for iniciada por uma cotação *bid* (mais baixa), o preço da opção pode inclusivamente descer devido a este efeito.

Para comprovar a existência deste efeito, iremos estudar a magnitude da variação dos preços das opções quando ocorrem violações, que caso se apresente reduzida pode ser indicador da importância do *bid-ask bounce* na explicação da ocorrência de violações. Na Tabela 9 podemos verificar a média da variação relativa do preço das opções sempre que ocorre uma violação de tipo I.i e I.ii, por intervalo de tempo considerado. A inclusão de apenas estes dois tipos de violação nesta análise prende-se com o facto de as violações de tipo II.i e II.ii considerarem que

o valor da opção não varia, pelo que esta análise não é aplicável, e as violações de tipo III.i, III.ii e III.iii serem residuais. A magnitude será portanto o módulo da variação relativa do preço

da opção. Os valores entre parênteses dizem respeito à magnitude das variações do preço das *puts*, enquanto os restantes dizem respeito à magnitude das variações do preço das opções das *calls*.

Tabela 9 – Magnitude média do módulo da variação relativa do preço das opções quando ocorrem violações

Intervalo	Variação relativa do preço da opção	
	Tipo I.i	Tipo I.ii
30 Minutos	3,29 (2,99)	4,79 (3,15)
1 Hora	3,39 (3,60)	4,98 (3,77)
2 Horas	5,97 (3,30)	7,51 (4,25)
3 Horas	5,54 (3,99)	6,69 (5,58)
1 Dia	8,58 (8,12)	6,06 (9,17)

A análise da Tabela 9 permite constatar, como era expectável, que a variação média é crescente à medida que aumenta o intervalo de tempo considerado, pelo simples facto de o lapso temporal entre observações ser maior e consequentemente o potencial de variação de preço ser também maior.

Por outro lado, verificamos que a magnitude para violações de tipo I.i varia entre 3,29% e 8,58% para as *calls* e entre 2,99% e 8,12% para as *puts*, enquanto as violações de tipo I.ii variam entre 4,79% e 7,51% para as *calls* e entre 3,15% e 9,17% para as *puts*.

A conclusão de Pérignon (2006) de que muitas violações podem ser justificadas pelo *bid-ask bounce* decorre do facto de a magnitude das variações do preço das opções ser relativamente baixa. De facto, vários estudos indicam que o

bid-ask spread do preço das opções é, em regra, maior, como por exemplo Fahlenbrach e Sandas (2006) que evidenciaram para o FTSE 100 que o *bid-ask spread* se situa entre 5,0%-8,9% para opções ATM e 11,8-28,2% para opções OTM. Assim, tendo em conta que a magnitude encontrada neste estudo, para estes dois tipos de violação, é baixa quando comparada com o *spread* entre cotações *bid* e cotações *ask*, um dos motivos para que ocorram violações da PM será precisamente o *bid-ask bounce*.

No entanto, neste estudo em concreto não é possível quantificar o número de violações que poderiam ser justificadas pelo *bid-ask bounce* uma vez que os dados trabalhados não contêm a informação sobre que tipo de preço inicia cada transação. Assim, fica em aberto a necessidade de realizar um estudo que permita identificar as violações que sejam provocadas pelo *bid-ask bounce*.

Análise econométrica dos resultados: microestrutura dos mercados e volatilidade

Para aprofundar a análise dos determinantes das violações da PM estimou-se um modelo PROBIT que inclui, como variáveis explicativas, variáveis relacionadas com a microestrutura de mercado e com a volatilidade, à semelhança de Pérignon (2006). Uma vez que as questões relacionadas com a microestrutura dos mercados se manifestam em dados intradiários este estudo incidirá sobre os intervalos de 30 minutos, 1 hora, 2 horas e 3 horas, excluindo da análise o intervalo de 1 dia.

Assim estimou-se o seguinte modelo PROBIT:

$$\begin{aligned} \text{Violação}_i = & \alpha_1 + \beta_1 * \left| \frac{\Delta S}{S} \right| + \beta_2 \\ & * N^\circ \text{Transações}_i + \beta_3 * \text{FinalDia}_i + \beta_4 \\ & * \text{Sexta}_i + \beta_5 * \text{Segunda}_i + \beta_6 \\ & * \text{Volatilidade}_i + \varepsilon_i \quad (2) \end{aligned}$$

em que Violação_i é a variável dependente da regressão, uma variável binária que capta as violações dos tipos I.i e I.ii da PM, considerando tipologia de violações com volatilidade, que assumirá o valor 1 se se verificar uma violação ou o valor 0 caso contrário.

Para analisar o efeito da microestrutura dos mercados foram consideradas as seguintes variáveis explicativas:

- O módulo da variação relativa do preço do ativo subjacente ($|\Delta S/S|$);
- O número de transações diárias do contrato a que a observação i diz respeito ($N^\circ \text{Transações}_i$);
- Uma variável binária igual a 1 se a transação

foi efetuada nas últimas 2h30 de cada dia, e igual a 0 em caso contrário (FinalDia_i);

- Uma variável binária igual a 1 se a transação tiver ocorrido a uma sexta-feira ou a 0 em caso contrário (Sexta_i);
- Uma variável binária que será igual a 1 se a transação tiver ocorrido a uma segunda-feira e igual a 0 em caso contrário (Segunda_i).

De acordo com a análise já realizada, podemos esperar os seguintes resultados: o coeficiente associado ao módulo da variação relativa do preço do ativo subjacente deverá ter sinal negativo já que as violações da PM apresentam maior incidência quando coincidem com pequenas variações do preço do subjacente; o coeficiente associado ao número de transações deverá ser negativo na medida em que se espera uma maior incidência de violações em períodos de menor liquidez dos contratos; os coeficientes associados às restantes três variáveis binárias (violações ao final do dia, às segundas ou às sextas-feiras) apresentarão um sinal positivo se os efeitos correspondentes forem significativos.

A regressão inclui ainda a variável explicativa Volatilidade_i que capta o nível da volatilidade associado à observação i . Será expectável que o coeficiente associado assumira um sinal positivo, que significará que a incidência de violações será maior em períodos de elevada volatilidade.

Os resultados das regressões efetuadas encontram-se resumidos nas Tabelas 10 e 11, para as *calls* e as *puts*, respetivamente, distribuídos por intervalo e onde podemos encontrar, para cada variável explicativa, as estimativas dos coeficientes associados bem como o *p-value*.

Tabela 10 – Resultados da regressão (2) para as calls

Variável		30 minutos	1 hora	2 horas	3 horas
 $\Delta S/S$ 	$\beta 1$	-116,46120	-34,63602	-4,32822	-67,43097
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Nº Transações	$\beta 2$	0,000164	0,000607	0,000052	0,000631
	<i>p-value</i>	0,3580	0,0006	0,0040	0,0029
Final do dia	$\beta 3$	-0,135302	-0,112741	-0,017777	-0,692703
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003
Sextas	$\beta 4$	0,065149	0,010572	0,005293	0,159369
	<i>p-value</i>	0,0206	0,7177	0,0558	0,0000
Segundas	$\beta 5$	-0,060922	0,127095	0,007284	0,059095
	<i>p-value</i>	0,0520	0,0000	0,0125	0,0700
Nível de σ	$\beta 6$	28,11314	21,13266	4,99776	21,08578
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Admitindo um nível de significância de 5%, podemos verificar que o módulo da variação relativa do preço é estatisticamente significativa para todos os intervalos de tempo considerados e para os dois tipos de opções. O sinal obtido para a estimativa do coeficiente associado é

conforme o esperado. Estes resultados comprovam as conclusões anteriores que atestam que a incidência de violações é maior quando ocorrem variações do preço do ativo subjacente de reduzida dimensão e estão em linha com os encontrados por Pérignon (2006).

Tabela 11 – Resultados da regressão (2) para as puts

Variável		30 minutos	1 hora	2 horas	3 horas
 $\Delta S/S$ 	$\beta 1$	-251,3284	-222,6320	-183,5564	-143,8546
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Nº Transações	$\beta 2$	0,001596	0,001029	0,003283	0,002522
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0071	0,0000	0,0000
Final do dia	$\beta 3$	0,025752	0,012644	-0,023502	-0,576368
	<i>p-value</i>	0,4140	0,7122	0,6295	0,0001
Sextas	$\beta 4$	-0,018582	-0,040354	0,225911	0,245746
	<i>p-value</i>	0,6095	0,2829	0,0000	0,0000
Segundas	$\beta 5$	0,083068	-0,079847	0,018433	0,083198
	<i>p-value</i>	0,0269	0,0479	0,6361	0,0291
Nível de σ	$\beta 6$	28,784150	19,06570	18,399200	23,45677
	<i>p-value</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

A liquidez do contrato, medida pelo número de transações diárias, apresenta-se individualmente significativa para *calls* e *puts* para todos os intervalos (exceto no de 30 minutos no caso dos *calls*). O aumento do número de transações parece ter contudo reduzido impacto na probabilidade de ocorrência de uma violação, mesmo de sinal contrário ao esperado. Estes resultados não estão em linha com os de Pérignon (2006) no qual uma maior liquidez dos contratos se traduz numa menor probabilidade de ocorrência de violações.

A variável Final do Dia não é estatisticamente significativa no caso dos *puts* e sendo significativa no caso das *calls*, apresenta coeficientes associados de sinal negativo sugerindo que as violações da propriedade ocorrem com maior probabilidade em períodos não próximos do final do dia.

Os dados revelam alguma evidência, apesar de mais clara no caso dos *calls*, de à segunda e à sexta-feira haver uma maior probabilidade de ocorrência de violações. Estes efeitos foram também reportados por Pérignon (2006).

O coeficiente associado ao nível da volatilidade é, de acordo com as duas tabelas, estatisticamente significativo para todos os intervalos. Tal como esperado, o coeficiente associado a esta variável explicativa é positivo, o que significa, que o aumento do nível de volatilidade aumenta a probabilidade de ocorrência de violações da PM, o que suporta as conclusões retiradas na análise da frequência de violações em períodos de elevada e reduzida volatilidade.

5. CONCLUSÃO

Neste estudo fazemos a análise das violações da PM aprofundando, face aos estudos anteriores, o efeito da volatilidade. Para tal foram utilizados os preços de transações de opções sobre o Índice CAC 40, com observações intradiárias, ocorridas entre Outubro de 2008 e Setembro de 2009.

Verificou-se que a frequência das violações da PM considerando a volatilidade desce para cerca de metade, relativamente à frequência de violações apenas considerando o valor da opção e do respetivo ativo subjacente, o que demonstra que os estudos anteriores estariam a sobrestimar o número de violações da propriedade.

Para melhor compreender o efeito da volatilidade nas violações da propriedade, foi feita uma análise sobre a distribuição das violações por períodos de volatilidade elevada ou reduzida, constatando-se que as violações são mais frequentes em períodos de volatilidade elevada, sendo o efeito mais claro no caso dos *calls*. Por outro lado, fez-se a análise da incidência de violações por intervalos de variação do ativo subjacente e da volatilidade e verificou-se que existem mais violações quando ocorrem grandes variações da volatilidade e pequenas variações do ativo subjacente, corroborando com dados reais os resultados obtidos por Fahlenbrach e Sandas (2009) com dados simulados.

Foi demonstrado que o *bid-ask bounce* poderá ser responsável por uma parte importante das violações da PM, não sendo no entanto possível

quantificar com precisão o número de violações que justifica. Para fazer este tipo de análise necessitaríamos de mais dados acerca de cada transação, nomeadamente o preço que originou cada transação (*bid* ou *ask*), pelo que fica em aberto a necessidade de realização de um estudo que consiga quantificar este tipo de situações.

Dado que a não verificação da PM põe em causa a validade de alguns modelos de avaliação de opções, para além do impacto negativo que tem sobre os resultados das estratégias delineadas pelos investidores, é pertinente a análise das circunstâncias em que estas violações ocorrem com maior frequência bem como dos fatores que as determinam. Neste estudo demonstrouse que os estudos realizados anteriormente sobrestimam as violações da propriedade enquan-

to neste há a certeza de que as violações consideradas são, efetivamente, violações. No entanto, este método subestima o número de violações efetivas da propriedade nas circunstâncias em que o efeito de variações do ativo subjacente e de variações da volatilidade sobre o preço das opções são de sinal contrário. Para identificar as violações da propriedade nestas situações ter-se-ia de adotar um modelo de avaliação de opções para quantificação da amplitude de cada um dos efeitos e posterior verificação da eventual existência de violação.

Finalmente, seria ainda interessante realizar um estudo análogo para opções sobre outro tipo de ativos subjacentes, nomeadamente ações, para assim aferir a aplicabilidade das conclusões retiradas neste estudo a outros contextos.



BIBLIOGRAFIA

- Adcock, C. J., e Hua, X. (2011). Violations In The Returns On European Options Under The Black Scholes Model. *Working Paper* .
- Adcock, C. J., Areal, N., e Ribeiro, C. (2012). How often option markets misbehave? The Monotonicity Property of option prices with changing Volatility. *Working paper* .
- Andersen, T. G., e Bollerslev, T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, Vol. 39 Nr.4 , pp. 885-905.
- Bakshi, G., Cao, C., e Chen, Z. (2000). Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction? *The Review of Financial Studies*, Vol. 13, N° 3 , pp. 549-584.
- Bergman, Y. Z., Grundy, B. D., e Wiener, Z. (1996). General Properties of Option Prices. *The Journal of Finance*, Vol. 51, N° 5 , pp. 1573-1610.
- Black, F., e Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, N° 3 , pp. 637-654.
- Coval, J. D., e Shumway, T. (2001). Expected Option Returns. *The Journal of Finance*, Vol. 56, N°3 , pp. 983-1009.
- Fahlenbrach, R., e Sandas, P. (2009). Co-movements of index options and future quotes. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 16 , pp. 151-163.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, N° 2 , pp. 327-343.
- Hull, J., e White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, Vol. 42, N° 2 , pp. 281-300.
- Johnson, H., e Shanno, D. (1987). Option Pricing when Variance is Changing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, N° 2 , pp. 143-151.
- Pérignon, C. (2006). Testing the Monotonicity Property of Option Prices. *Journal of Derivatives*, Vol. 14, nr.2 , pp. 61-76.
- Pooley, D. M., Forsyth, P., e Vetzal, K. (2003). Numerical Convergence properties of option pricing PDEs with uncertain volatility. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 23 , pp. 241-267.
- Scott, L. O. (1987). Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.22, N° 4 , pp. 419-438.
- Stein, E. M., e Stein, J. C. (1991). Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *The review of Financial Studies*, Vol. 4, N° 4 , pp. 727-752.
- Wiggins, J. B. (1987). Options values under stochastic volatility. Theory and Empirical Estimates. *Journal of Financial Economics*, Vol. 19 , pp. 351-372.