Do Espaço da Física Clássica ao Espaço das Redes

António Machuco Rosa*

O momento inaugural do espaço das redes

Podemos situar no ano de 1736 o nascimento de um novo conceito de espaço. Ele é diferente de um outro que se estava então a tornar dominante, o conceito de espaço imposto pela física de Galileu e Newton consistindo num continuum homogéneo e dotado de uma métrica euclidiana. Por contraposição, e partindo da solução de um quebra-cabeças bastante particular, L. Euler iria, nesse ano, avançar a ideia de que um espaço discreto e reduzido a certas características bastante gerais era imposta pelos próprios fenómenos. O problema sobre que Euler se debruçou decorria do facto de a cidade de Königsberg ser atravessada por um rio que se separa em dois braços, formando uma ilha entre eles, e tendo três outras regiões adjacentes. Nesse espaço, existiam sete pontes para ir de uma a outra dessas quatro regiões, e o quebra-cabeças consistia em saber se é possível encontrar na cidade um percurso que atravesse as pontes uma única vez (cf. figura 1).

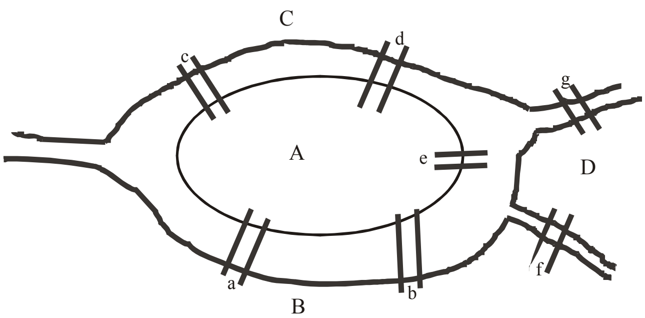
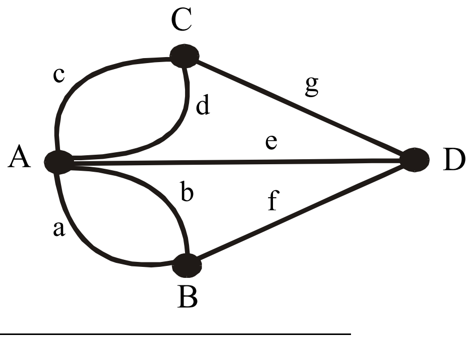


Figura 1. As pontes de Königsberg.

Euler provou que um tal percurso não existe (Euler, 1736). Para obter a prova, ele começou por reduzir o problema à sua estrutura essencial, precisamente a da figura 1. De seguida, introduziu um conjunto de letras e chegou a uma estrutura já mais abstracta, representada na figura 2. Euler tinha assim criado um ramo da então titubeante topologia, ramo posteriormente designado por teoria dos grafos. A ideia essencial consistiu em reduzir as regiões de Königsberg a um conjunto de vértices (também chamados nós) ligados entre si por arestas (também chamadas ligações e, ainda, conexões), podendo então provar que o percurso que os habitantes da cidade buscavam não existe.



---

* Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias. Este artigo foi elaborado no quadro do projecto de investigação *Trends on Portuguese Networks Culture*, projecto financiado pela FCT/POCTI/34436.

Figura 2. O grafo de Euler.

Este exemplo não é apenas importante por representar o momento inaugural da teoria dos grafos, e assim da teoria das redes.[1] Nem tão pouco devido a essa teoria introduzir um novo conceito de espaço, um espaço discreto apenas composto por nós e ligações, tudo o resto ficando indeterminado. Ele é igualmente importante por a estratégia de Euler já envolver, mesmo se em estado ainda bastante embrionário, momentos epistemológicos fundamentais na constituição de diversas teorias científicas, em particular aquelas que tomam o espaço como tema fundamental. Veremos a função desses momentos nalgumas teorias que tomam o espaço como substrato universal, quer na física clássica quer nos recentes desenvolvimentos da teoria dos grafos e sua aplicação às redes. Mas o ponto de vista de Euler já permite começar a sua identificação, e assim precisar algumas questões epistemológicas e terminológicas presentes ao longo deste artigo.

Euler partiu do dado empírico constituído pelo rio e regiões de Königsberg. Procedeu de seguida a uma primeira representação esquemática dessa estrutura, representada na figura 1. Em si mesma, ela pode ser ambígua no que respeita à sua interpretação (a métrica é importante?), mas é claro que Euler visa salientar que são apenas relevantes a relação estrutural (a posição topológica) entre os elementos que são as regiões (os nós) e as pontes (as ligações). Esse momento é tornado definitivamente claro na figura 2. Utilizando, generalizando, a terminologia de E. Kant, designamos por *forma da intuição* o espaço consistindo apenas por nós e ligações (Kant, 1781-1787, B 160). Essa forma é dada na experiência mas pode, de seguida, servir de base para construções posteriores. Em particular, ela pode servir de base para o estudo de certas propriedades que esses nós e ligações possuem - por exemplo, verificar, em qualquer grafo, se os nós estão todos conectados entre si, ou por quantos nós, em média, é preciso passar para ir de qualquer nó a qualquer nó. Sempre no seguimento do espírito da filosofia kantiana, designamos por *intuição pura formal* esse nível de reconstrução matemática da forma da intuição (cf. Kant, 1781-1787, B 160). Essa intuição parte da definição mais geral de um grafo - nós conectados por ligações sem qualquer métrica -, investigando de seguida as propriedades que possam existir num grafo assim definido.

Adequadamente desenvolvido, o nível da intuição formal vai funcionar como um nível *a priori* para os fenómenos que ele determina. *A priori* significa que o grafo com as suas propriedades é uma estrutura geométrica que *constrange* os fenómenos. No caso elementar sob análise, quais são esses fenómenos? Trata-se obviamente do próprio problema que inicialmente motivou Euler, a saber, se existe ou não um percurso entre todas as regiões que passe por cada uma das pontes uma e uma só vez. Designamos esse nível como o *objecto material* que a teoria visa determinar. Ele não é um mero objecto empiricamente dado - o objecto dado a qualquer habitante de Königsberg nas suas tentativas em minimizar a distância entre as regiões -, mas sim o objecto determinado pelo nível *a priori* da intuição formal que Euler obteve. Noutros termos, é o objecto tal como ele é necessariamente constrangido pelo grafo em questão, isto é, pela sua estrutura topológica. De facto, a prova de Euler consistiu em mostrar que a estrutura topológica da cidade de Königsberg impossibilita a existência de um certo percurso. Designamos por *processos dinâmicos* o nível epistemológico do objecto material determinado por uma forma da intuição convertida em intuição formal. Conforme mostraremos, os processos dinâmicos são o objecto de uma teoria geral das redes, sendo constrangidos pela estrutura espacial que estas possuem.

O espaço da física clássica

O estatuto epistemológico da teoria das redes apenas será tornado mais claro em ulteriores secções. Com esse fim, devemos agora passar em revista os traços essenciais da concepção do espaço associada à física clássica, permitindo assim antever, simultaneamente, a contraposição e a analogia entre esse tipo de espaço e o espaço das redes.

O espaço como um contínuo desempenha um papel fundamental na mecânica clássica. Segundo o espírito da reconstrução que Kant levou a cabo dessa mecânica na *Crítica da Razão Pura* e nos *Primeiros Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza*, podemos supor que ele está dado numa forma da intuição - o espaço fenomenológico -, a qual é convertida, através da sua determinação matemática, numa intuição formal.[2] Na mecânica, essa determinação é fornecida pela geometria euclidiana, a qual postula a existência da relação métrica que define a distância entre quaisquer dois pontos, dada pelo teorema de Pitágoras: $ds^2= dx^2+ dy^2$.

Em linguagem mais moderna, um *a priori* fundamental da mecânica clássica (não relativista) consiste em partir de um espaço de base que consiste numa variedade diferencial dotada de uma métrica localmente euclidiana (cf. mais abaixo). Além disso, é igualmente um *a priori* fundamental a existência de um grupo de relatividade. No caso da mecânica clássica, trata-se do grupo galilaico de transformações, o qual garante a objectividade física: os referenciais (a escolha de coordenadas) são arbitrários, mas as leis devem permanecer invariantes por mudança de referencial.

Se a intuição formal da mecânica é o contínuo fenomenológico matematicamente reconstruído, já o objecto material da mecânica é efectivamente o *movimento*. Ele é rectlíneo e uniforme na ausência de forças, o que equivale à formulação da lei da inércia. No caso em que existe uma força, tem-se a segunda lei da mecânica: força = massa * aceleração ou, sem pressupor que a massa é constante, $F = dP/dt$, onde P é o momento linear (produto da massa pela velocidade). No caso específico de uma força como a da gravidade, tem-se a terceira lei: $G = g * (mm'/r2)$, onde g é uma constante, m e m' duas massas e r a distância entre elas.

O conteúdo essencial da mecânica clássica está contido nas suas leis de conservação. Assim, vê-se a partir da equação da segunda lei que, na ausência de qualquer força, o momento linear P conserva-se ao longo da evolução do sistema físico. Igualmente se conserva o momento angular (= vector velocidade * momento linear ou impulso). Finalmente, um conceito fundamental da física clássica é o conceito de energia. A energia total de um sistema é dada pelo integral de acção $L = T - V$, onde T é a energia cinética, $mv^2/2$, e V a energia potencial. A energia também se conserva.

Essas leis de conservação podem ser descritas de forma um pouco mais precisa referindo que, através de um teorema fundamental, o teorema de Noether, o conteúdo da mecânica clássica se reduz à existência de certos grupos de simetria (de relatividade). De acordo com esse teorema (cf. Arnold, 1976), afirmar que o momento linear ou impulso se conserva decorre de o sistema físico ser simétrico por translação no espaço, isto é, da não existência de uma origem absoluta do espaço (o espaço é homogéneo). Por outro lado, afirmar que o momento angular ou cinético se conserva decorre de o sistema ser simétrico por rotação, isto é, da não existência de uma orientação privilegiada no espaço (o espaço é isotrópico). Finalmente, afirmar que a energia se conserva decorre de o sistema ser simétrico por translação no tempo, isto é, da não existência de uma origem absoluta do tempo.

Portanto, a invariância por transformações de simetria implica que certas grandezas se conservam e que não existem certos absolutos inobserváveis: as leis que resumem o conteúdo da mecânica clássica são uma consequência de propriedades geométricas de simetria, isto é, uma consequência de um princípio geral de relatividade. O espaço enquanto um contínuo dotado de um princípio *a priori* de relatividade determina o objecto 'movimento', concluindo-se que o conteúdo essencial da mecânica clássica fica reduzido aos seus *a priori* espaciais. Podemos resumir o que acabamos de ver através da tabela seguinte (in Cohen-Tannoudji e Spiro, 1986).

Simetria	Inobservável	Lei de Conservação
Translação no espaço	Origem do espaço	Momento linear

Rotação	Direcção privilegiada	Momento cinético
Translação no tempo	Origem do tempo	Energia

Relatividade

É bem conhecido que a teoria da relatividade (geral) representou um outro momento de geometrização ou redução da física ao espaço. Essa geometrização está associada a um processo de generalização segundo o qual os níveis *a priori* e a *posteriori* mudam de nível. Por generalização entendemos aqui um processo intra-matemático tributário do *Programa de Erlangen* enunciado por F. Klein no século XIX a propósito do espaço geométrico. É também conhecido que Klein utilizou a noção de grupo para classificar as geometrias possíveis (cf. Machuco Rosa 2003 para uma análise). Cada uma de entre elas é classificada de acordo com o seu grupo de invariância, e é *mais geral* se deixa invariantes um mais pequeno número de propriedades geométricas. Pelo contrário, uma geometria é *mais específica* se ela discerne certas propriedades que ficam indiscerníveis numa geometria mais geral. Por exemplo, a distância é um invariante do grupo das isometrias, mas deixa de ser um invariante do grupo projectivo. Em sentido inverso, por exemplo, o grupo dos difeomorfismos preserva as propriedades de continuidade e de diferenciabilidade do espaço, mas já não discerne entre diversos tipos de métricas.

Na mesma época que F. Klein, B. Riemann obteve um novo conceito de espaço ao isolar precisamente o grupo de invariância dos difeomorfismos como um grupo de invariância *a priori* de toda a física. Essa concepção consiste em afirmar que os axiomas métricos não são 'lógicos'; eles são *a posteriori*, e a geometria que se lhes encontra associada não é independente das forças que agem na matéria. Mais especificamente, Riemann libertou as coordenados de todo o seu sentido métrico, de acordo com a orientação heurística segundo a qual o único ponto de vista que intrinsecamente descreve o espaço é o ponto de vista local. Só este é *a priori*, pois todas as suas outras propriedades são empíricas (*a posteriori*). Ele partiu então das variedades, que constituem um espaço que se assemelha localmente a um espaço a $\mathbf{R}^n$ dimensões. Uma variedade pode ser definida por um *atlas* constituído por *cartas* que descrevem uma parte assemelhando-se a um bocado de $\mathbf{R}^n$ e definindo coordenadas locais (ver figura 4). Um ponto numa variedade de *n* dimensões é representado pelos valores atribuídos a *n* parâmetros variáveis, x_1, x_2, x_3,..., e o agregado desses pontos constitui a variedade; portanto, as coordenados estão libertas do seu sentido métrico, pois são apenas uma função que indexa os pontos. Finalmente, uma variedade diferencial consiste nas funções contínuas diferenciáveis que fazem passar de uma a outra carta. A concepção revolucionária acerca do espaço introduzida por Riemann consistiu em colocar como nível *a priori* da física o grupo de invariância dessas funções.

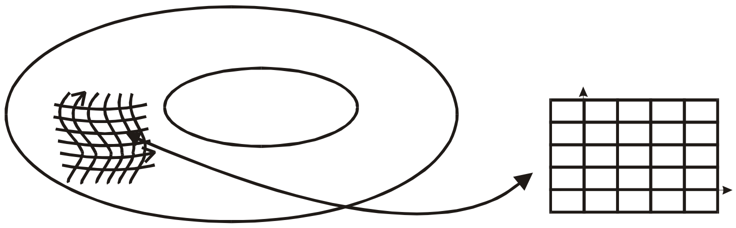


Figura 3. O conceito de variedade. Do lado esquerdo está uma variedade que é uma superfície de dimensão 2. Do lado direito está a carta que é um bocado de $\mathbf{R}^2$ e onde estão definidas coordenadas locais.

Como o nível das variedades é indiferente à métrica, esta tem de ser introduzida posteriormente. A ideia de Riemann foi definir nas variedades uma métrica típica das superfícies, e de que a métrica euclidiana é um caso particular que se verifica em superfícies de curvatura nula (o plano de $\mathbf{R}^2$). A linha mais curta entre dois pontos passa ser uma curva e não uma recta como sucede no plano euclidiano, pelo que a métrica passa a ser definida como a generalização da distância euclidiana entre quaisquer dois pontos:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

onde os g_{ij} são funções das coordenadas x_1, $x_2 \ldots x_n$.

Se, na mecânica newtoniana, a distância euclidiana permanece invariante por acção do grupo galilaico de relatividade, é a nova fórmula métrica acabada de escrever que vai permanecer invariante por transformação das coordenadas generalizadas de Riemann. Contudo, e tal como Clifford e o próprio Riemann anteciparam, visto essa métrica poder variar de ponto a ponto (e, no plano, reduzir-se a uma curvatura nula, isto é, à métrica euclidiana), ela é dada pela matéria. É o que vai constituir a ideia fundamental da teoria da relatividade geral de Einstein: a métrica é uma propriedade da matéria, donde ela passar de *a priori* para *a posteriori*. Aquilo que na física newtoniana era *a priori* (grupo de relatividade galilaico conservando a métrica euclidiana) passou a ser a *posteriori*. É dessa forma que foi possível construir geometricamente a força, a qual passa a ter um estatuto análogo ao que a inércia possuía em Newton. Mas o nível *a priori* não desapareceu, antes subiu para o nível de estruturas matemáticas mais gerais, o do grupo dos difeomorfismos. Este passa a ser a intuição formal que funciona como princípio *a priori* ou princípio de invariância que permite deduzir (construir geometricamente) as forças e a matéria. A relatividade geral identifica a massa e a força com a estrutura geométrica do espaço-tempo, pelo que é possível afirmar que o *objecto material* da relatividade geral deixa de ser, como vimos que ocorre na física newtoniana, o movimento, para passar a ser o espaço-tempo contínuo dotado localmente de uma métrica riemeniana. O momento cinemático da antiga mecânica (o espaço métrico invariante) é convertido num momento dinâmico que é *a priori* determinado pelo seu grupo de invariância.

O espaço das redes

Podemos agora voltar ao espaço das redes, mostrando, de um ponto de vista epistemológico, as semelhanças e contrastes existentes entre a constituição da física clássica, com os conceitos de espaço que se lhe encontram associados, e a constituição progressiva dos diversos espaços associados à teoria das redes.

O espaço das redes é tematizado pela teoria dos grafos. Os grafos constituem um espaço topológico que não é contínuo nem é dotado de qualquer métrica natural (do tipo euclidiano). Como se referiu na primeira secção, a sua primeira tematização foi levada a cabo por Euler, para quem uma rede é um espaço apenas composto por nós e ligações entre esses nós. As redes constituem uma diversidade empírica que funciona como uma espécie de *forma da intuição*. Esta forma consiste em nós ligados (ou não) entre si e ela é *dada* no seguinte duplo sentido: a) ela é dada empiricamente, e, b), dada por, pelo menos num primeiro momento, esconder as condições da sua génese. Mas, tal como sucede no caso da física clássica - na qual existem múltiplas reconstruções do espaço partindo da sua estrutura simplesmente contínua -, é possível afirmar que a forma de intuição 'rede' é sobrederminada em relação à sua intuição formal, pois o conceito de rede ser reconstruído formalmente através de uma multiplicidade de modelos. E tal como o espaço contínuo dotado de certas propriedades é um *a priori* da determinação de fenómenos físicos, também o espaço dos grafos é um novo espaço substrato universal dos fenómenos (os processos dinâmicos que neles se desenrolam). Todas essas declarações genéricas irão tornando-se progressivamente mais claras.

Vimos que Euler levou a cabo uma incipiente tematização de um novo tipo de espaço partindo de uma rede empírica, construindo então um grafo que reproduzisse de forma estática e tão exacta quanto possível a sua estrutura (cf. figura 2, acima). É desse modo que começa a reconstrução da forma da intuição que é ponto de partida. O grafo resultante é um grafo dado em bloco, no sentido de ele ser conexo e de os seus nós e ligações estarem imediatamente presentes. Demasiado próximo da realidade que ele modela, o tipo geral de grafos propostos por Euler em 1773 está bastante longe da generalidade que uma teoria dos grafos pode alcançar. Durante dois séculos e meio,k múltiplos trabalhos foram desenvolvidos no âmbito da teoria dos grafos, sem no entanto a sua inspiração diferir, no essencial, do ponto de vista introduzido por Euler.

Ocorre um momento fundamental da teoria dos grafos quando se dá o que podemos designar como uma segunda conversão da forma de intuição 'rede' numa intuição formal. Essa intuição formal vai de seguida funcionar como um novo o quadro *a priori* topológico para certos processos dinâmicos. Trata-se da teoria dos grafos aleatórios, criada por Erdös e Rényi no final dos anos cinqüenta do século passado (Erdös e Rényi, 1959).

Essa teoria determina o primitivo 'rede' em termos puramente geométricos, reduzindo o espaço das redes a uma intuição formal construída e estudada a partir de instrumentos matemáticos sofisticados. Diferentemente dos instrumentos matemáticos utilizados pela física clássica e relativista para determinar o espaço, a intuição formal dos grafos é construída através da *mecânica estatística*. Ao mesmo tempo, é de sobremaneira importante referir que também Erdös foi conduzido à sua teoria devido ao estudo de *processos dinâmicos*, isto é, ele foi motivado por um problema das redes de telecomunicações que consiste em apurar as condições que têm de ser satisfeitas para que qualquer nó possa comunicar com qualquer outro (cf. Erdös e Rényi, Idem). O quadro epistemológico geral da teoria é pois o que temos vindo a identificar: uma forma da intuição convertida numa intuição formal susceptível de determinar o seu objecto material, certos processos dinâmicos. Podemos mostrá-lo expondo os elementos essenciais da teoria

Na teoria dos grafos aleatórios de Erdös parte-se de um número previamente dado de nós e de seguida eles são conectados. Mais exactamente, parte-se de *n* nós e nenhuma ligação, e de seguida conecta-se aleatoriamente com probabilidade *p* cada par de nós. Essa probabilidade pode calcular-se como a fracção entre as ligações actuais e a totalidade das ligações possíveis (iguais a n(n-1/2)). Um exemplo é a da figura 4.

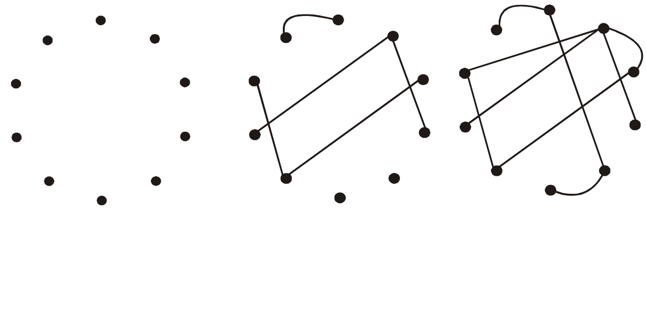


Figura 6. Construção de grafos aleatórios. Da esquerda para a direita tem-se *p*=0, p ≈0,1, *p*=0,2.

Uma das propriedades tipológicas existente nesse tipo de espaço é a distribuição, *P(k)*, das *k* ligações entre os nós. A teoria de Erdös prevê uma distribuição binomial das ligações, que se traduz no facto de cada nó possuir, em média, aproximadamente o mesmo número de ligações:

A distribuição é uma propriedade topológica global de um grafo. Existem outras, a começar pela *distância* máxima entre quaisquer pares de nós. 'Distância' não possui qualquer relação com distância euclidiana, sendo antes quantificada pelo número de nós intermédios que têm de ser percorridos para ir de um nó a um qualquer outro. A distância em grafos aleatórios tende a ser pequena - quando comparada com o valor em grafos nos quais o valor de *k* é sempre o mesmo, os chamados grafos regulares. Em grafos aleatórios, a distância média é $\log n / \log k$.

Uma outra propriedade importante nessa teoria dos grafos é a existência de *transições críticas de fase*. Isso quer dizer que em certos pontos de transição crítica *emergem* certas propriedades. Afirmar que uma certa propriedade emerge num ponto crítico significa que essa emergência se dá numa escala temporal muito rápida quando comparada com a escala temporal da totalidade do processo de construção de um grafo. Um caso importante é a emergência de um *agrupamento* (*cluster*) 'gigante' num momento súbito da construção de um grafo aleatório. Um 'agrupamento gigante' emerge quando o parâmetro de que a construção do grafo depende ultrapassa um certo valor crítico. No caso dos grafos aleatórios, esse parâmetro é a probabilidade, *p*, de dois nós ou vértices se encontrarem ligados. Mostra-se então (Bollábas, 1985) que existe um valor de probabilidade crítica p_c com o valor crítico $c \approx 1$, isto é, quando $p \approx 1/n$ emerge um agrupamento gigante. Naturalmente que se fala em 'agrupamento gigante' por relação ao tamanho do grafo. O tamanho desse agrupamento torna-se 'quase' do tamanho do grafo no limite assimptótico $n \rightarrow \infty$, onde é possível atingir 'quase' todo o vértice a partir de qualquer outro. Quando se dá a transição crítica a partir da qual é possível atingir qualquer vértice a partir de qualquer outro; vértices muito distantes no grafo *comunicam uns com os outros*. Encontramos uma constrição topológica dos processos dinâmicos que possam ocorrer na rede.

Quantidades globais como a distribuição, diâmetro e existência de um grande agrupamento podem determinar processos dinâmicos. É no entanto necessário explicitar em que sentido se pode afirmar que os grafos aleatórios são completamente *a priori*. Eles são *a priori* por serem construídos de modo totalmente geométrico, sendo assim uma representação formal imediata do conceito de rede. Um grafo aleatório é simplesmente a probabilidade de estabelecer *k* ligações de entre a totalidade das ligações possíveis entre um número fixo de nós previamente dados. Portanto, não é feita nenhuma hipótese específica que elimine a aleatoriedade das ligações, nem que de algum modo elimine à partida a possibilidade de realização de qualquer um dos grafos de entre o conjunto estatístico de todas as realizações possíveis. Nos grafos aleatórios, o espaço (a topologia) está *geometricamente dada*; um grafo aleatório é uma consequência puramente dedutiva do seu procedimento geométrico de construção. Nessa medida, pode-se mesmo afirmar que eles não se afastam de forma radical dos grafos do tipo dos de Euler (Albert e Barabási, 2002), pois também modelam e reproduzem de forma estática a estrutura de uma rede. Mas, ponto importante, eles são contingentes, no sentido de estarem longe de esgotar forma de intuição 'rede'. Este ponto será tornado mais claro quando apresentarmos um tipo radicalmente diferente, mas devemos começar por ver como os processos são constrangidos pelo espaço das redes aleatórias.

Processos dinâmicos em grafos aleatórios

A teoria dos grafos pode ser considerada como a posição de um espaço topológico que funciona como princípio *a priori* de determinação de objectos materiais, isto é, de processos dinâmicos. Para ilustrarmos essa afirmação, expomos agora sumariamente um exemplo de processos dinâmicos determinados pelo seu *a priori* espacial. Sem dúvida que um dos maiores interesses da teoria dos grafos consiste na redução ao espaço de um tipo geral de fenómenos, num sentido similar à redução do movimento ao espaço levada a cabo pela física clássica.

Esse exemplo de um processo determinado pela sua rede *a priori* é uma espécie de imitação. Ele torna ainda mais clara a natureza dos processos dinâmicos desenrolando-se em redes: existe uma entidade saliente que são os nós (indivíduos, agentes, etc.) entre os quais se propaga uma espécie de fluido que pode provocar neles um certo efeito (alteração de estado). Esse fluido ou propagação é reduzido e controlado pela geometria quando o representamos por ligações. É manifestamente o que ocorre na propagação dos vírus, dando-se o caso da teoria clássica da propagação de epidemias ser, no essencial, uma aplicação da teoria dos grafos aleatórios. Deve ter-se presente que o exemplo é típico, no sentido em que as suas propriedades serão partilhadas por qualquer outro sistema em que as entidades sejam nós e as ligações sem o veículo de propagação de qualquer entidade.

Uma das variantes da teoria clássica das epidemias é o chamado modelo SIR (cf. Anderson e May, 1991). Nesse modelo existem os indivíduos *susceptíveis*, isto é, aqueles que estão vulneráveis a uma infecção mas ainda não se encontram infectados, os *infectados*, isto é, os que estão infectados e podem infectar outros, e os *removidos*, isto é, aqueles que já não podem infectar ninguém. Também aqui as interacções ou ligações são aleatórias e os resultados previstos pelo modelo são os que a teoria de Erdös permite antever: existem duas grandes fases, uma fase em que a epidemia é recessiva e uma outra em que ela atinge uma grande fracção da população, fases essas separadas por um ponto crítico. Esse ponto crítico dá-se quando a taxa de reprodução da epidemia ultrapassa1, e então epidemia torna-se dominante (cf. figura 6). A evolução da epidemia é portanto determinada pelas propriedades topológicas globais *a priori* do grafo.

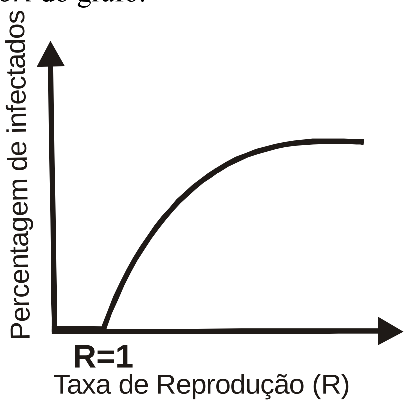


Figura 6. O modelo SIR possui um ponto crítico.

O modelo de Barabási

De um ponto de vista epistemológico, o espaço dos grafos aleatórios é uma intuição formal *a priori* que determina o objecto de uma teoria geral das redes, os processos dinâmicos, em particular os processos de tipo 'propagativo'. Numa linguagem de inspiração kantiana, e no duplo sentido a que já aludimos, *a posteriori* significa, por um lado, 'derivado da experiência' e, por outro, significa também poder derivar uma topologia global dada a partir de algo outro, isto é, a partir de um mecanismo que não seja ele próprio integralmente geométrico. Em certo sentido, a teoria dos grafos permitiu mesmo realizar aquilo que vimos ser um objectivo final da física quântica e relativista: proceder a uma génese física do próprio espaço. Esse objectivo implica que não existe qualquer nível *a priori*, mas apenas um mecanismo que vai fazer emergir o próprio espaço das redes. Contudo, posteriormente, esse espaço vai novamente tornar-se um princípio *a priori* de determinação dos fenómenos ou processos dinâmicos.

É dentro desse quadro que, em nossa opinião, se pode inscrever o tipo de modelos recentemente proposto por A. Barabási e colaboradores (Barabási *et al*, 1999). É um tipo de modelos que diverge radicalmente do de Erdös, pois ele assume que novos nós vão sendo sucessivamente criados e que a ligação entre esses nós não se processa aleatoriamente. Isso vai implicar que a topologia final do grafo passe a ser uma consequência de um processo de crescimento, e é nesse sentido que essa topologia deixa de ser *a priori*.

Antes de entrarmos numa análise mais detalhada do modelo, existe um ponto que deve desde logo ser mencionado e em cuja relevância epistemológica já insistimos por duas vezes. De facto, insistimos que os modelos de Euler e Erdös foram motivados pela necessidade de encontrar uma topologia que funcionasse como princípio de determinação de certos processos dinâmicos. Ora, parece ser bastante significativo que A. Barabási *não* tenha partido do estudo de processos que se desenrolam em redes para elaborar um modelo que os determinasse. Ele *partiu da própria topologia das redes enquanto dada*. Isto é, o seu motivo foi a constatação *empírica* de que uma certa rede (a *world wide web*) possui uma certa propriedade topológica inesperada (cf. Barabási, 2002, para as motivações que levaram à elaboração do modelo). Essa propriedade é a distribuição de ligações nessa rede. Utilizando um robô que realizou uma pesquisa exaustiva a partir das ligações dos nós de um certo domínio da *web*, constatou-se que a distribuição de ligações (*links*) nesse domínio possui uma propriedade muito particular: a distribuição segue uma lei em potência, isto é, uma lei sem escala característica. Essa lei consiste em que a probabilidade $P(k)$ de um nó (uma página *web*) estar conectado a k outros nós decresce segundo uma razão constante dada por um expoente λ, de acordo com a equação $P(k) \sim k^{-\lambda}$. Esta equação significa que a probabilidade da existência de páginas *web* apontadas por um grande número de *links* é pequena, sendo grande a probabilidade de existir um grande número de páginas pouco conectadas. Noutros termos, deverão existir muito poucas páginas densamente conectadas e um grande número de páginas muito pouco conectadas, segundo a razão $\lambda \approx 2.1$ (Albert *et al*, 2000). Portanto, por exemplo, se, existe uma redução para metade no número de *links* que apontam para páginas, o número de páginas com esse número de *links* aumentará, em média, pelo factor de 2 levantado a 2.1.

Após a investigação empírica de Barabási e colaboradores, subsequentes medições (cf. Broder et *al*, 2000) confirmaram o valor do expoente λ. Nós mesmos o confirmámos para o caso da WWW em domínio *.pt.

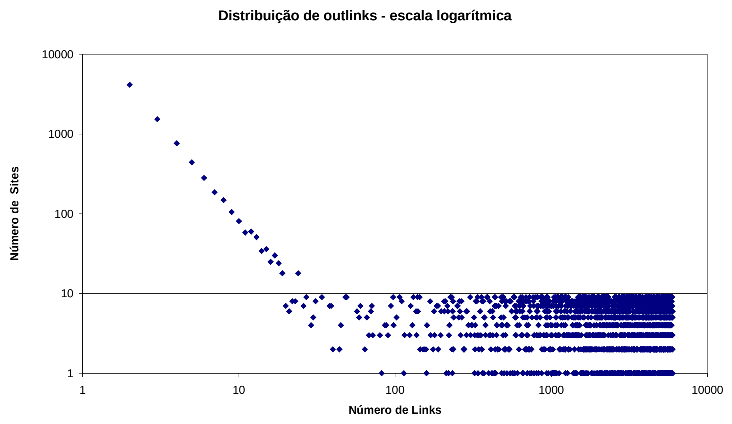


Figura 7. A existência de uma lei de escala na *web* portuguesa. O valor do expoente é $\lambda \approx$ 2.1

A existência de uma distribuição sem escala característica na WWW vai completamente contra as previsões da teoria de Erdös: um número médio aproximadamente idêntico de ligações em cada nó. Do ponto de vista epistemológico, importa de novo realçar a situação com a qual A. Barabási se viu confrontado, pois partir da topologia enquanto dada, e enquanto dada empiricamente, pode naturalmente fazer surgir o problema de fazer derivar aquilo que está dado (e que epistemologicamente é *a posteriori*) a partir de algo outro, a partir de um mecanismo não especificamente topológico, que podemos apelidar *físico* e que Barabási e colaboradores chamaram evolutivo. Não se trata apenas de afirmar que o espaço passa a ser algo empírico; o espaço não deve em parte alguma ser pressuposto, antes devendo emergir a partir de um mecanismo. Epistemologicamente, o ponto fundamental parece-nos ser o seguinte: diferentemente de modelos como o de Erdös, ou das tentativas incipientes de Euler, o *objecto a ser inicialmente determinado deixa de ser constituído pelos processos dinâmicos e passa a ser a própria rede e grafo correspondente. O objecto material a ser determinado é o próprio conceito de rede, isto é, o próprio espaço.*

Essa estratégia de determinação consiste em criar um mecanismo evolutivo que tem um duplo aspecto, o qual releva de uma estratégia explicativa bastante geral. Descrever essa estratégia vai permitir, finalmente, explicitar o modelo.

Em primeiro lugar, o conceito de evolução tem um sentido geral que não se restringe a mecanismos específicos tais como o mecanismo darwiniano de selecção natural ou o próprio mecanismo específico proposto por Barabási. Nesse sentido geral, ele é um princípio regulador que designa uma exigência metodológica de explicação: explicar aquilo que, num determinado momento, está colocado como postulado *a priori* ou facto último não derivado. Por exemplo, explicar a emergência de um primitivo dado como 'rede'. Desse ponto de vista, 'evolução' é uma outra designação do conceito central dos sistemas complexos, o de *emergência*; 'fazer evoluir' ou 'emergir' é simplesmente apurar os mecanismos, preferencialmente locais, que geram uma certa estrutura global.

Em segundo lugar, os modelos evolutivos das redes inserem-se numa outra estratégia explicativa igualmente dominante no estudo dos sistemas complexos. Trata-se de abandonar os postulados de independência dos elementos, agentes, etc., que compõem o modelo, passando a considerar explicitamente as suas interacções. Trata-se de abandonar os modelos assentando em distribuições normais, introduzindo interdependências e obtendo comportamentos determinados por pontos críticos e sem escala característica.

Perante esse duplo quadro metodológico geral, poder-se-ia afirmar ser quase possível antecipar que o modelo específico de Barabási *et al* se vai caracterizar por um processo evolutivo e pela existência de uma função específica de ligação entre os elementos ou nós do sistema. Ele assenta de facto em duas cláusulas, uma para a evolução ou crescimento e outra para as interacções:

<u>Crescimento:</u> em cada passo temporal cria-se um novo nó do qual saem *m* novas ligações.

<u>Ligação preferencial</u>: Os novos nós, *j*, conectam-se ao nó já existente, *i*, com uma probabilidade proporcional à conectividade deste, tal que

$$p_{k_i} = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Esta propriedade significa portanto que os novos nós se ligam aos anteriores na proporção da conectividade destes, pelo que quanto maior a conectividade de um nó maior a probabilidade de ele receber novas ligações (cf. figura 8).

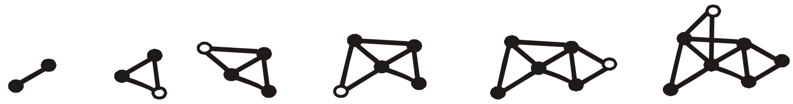


Figura 8. A formação do espaço das redes segundo o mecanismo proposto por Barabási e colaboradores. Os novos nós estão a branco. è um mecanismo de popularidade; a 'popularidade é atractiva' (Dorogovtsev e Mendes, 2003).

A solução analítica (confirmada numericamente) do modelo permite obter o valor do expoente $\lambda=3$. Esse valor único não é demasiado importante, e na realidade foram construídos diversas variações do modelo que permitem obter espectros de valores cobrindo todos os casos de redes cujos valores empíricos são conhecidos.[3] O fundamental é a filosofia do modelo (Vazquez, 2003, Pastor-Satorras, 2004), a qual irá estar presente nas suas inúmeras variações. Se nos centramos nessa filosofia, constata-se que topologia global (o espaço) é derivada a partir de algo outro, e que portanto ela é *a posteriori*. A topologia deixa de estar dada e é feita emergir através de um mecanismo evolutivo de crescimento com ligação preferencial. Este ponto pode ser demonstrado, pois é estritamente verdade que a evolução da conectividade de todos os nós segue uma lei em potência e que existe uma lei de escala entre o expoente presente na solução do modelo, isto é, o expoente da evolução, β, e o expoente global: $\lambda = 1 + 1/\beta$. Essa lei de escala entre o expoente da evolução e o expoente da distribuição final é *universal* para as redes de crescimento em lei de potência: ela não é válida apenas para o modelo original de Barabási mas para todos os modelos que assumem um processo de crescimento de nós e uma ligação preferencial linear (Dorogovtsev e Mendes, 2003). Portanto, como o expoente γ é consequência do expoente da evolução β, *segue-se que a evolução determina a topologia da rede*.

Se o modelo de Barabási e colaboradores é uma determinação do conceito primitivo de rede enquanto forma da intuição, ele mostra também que existe uma sobredeterminação dessa forma da intuição por relação à sua determinação formal. É uma situação fortemente que constrasta com a do modelo de Erdös, o qual é um procedimento puramente geométrico de geração de grafos aleatórios, e sob esse aspecto ele é *único*. Já o mecanismo evolutivo não é único; a topologia final que se pretende obter (sem escala característica) não é univocamente determinada por um único modelo. O modelo de Barabási enuncia um mecanismo específico sem qualquer necessidade matemática, no sentido em que existem *diversas funções* que geram a topologia que se visa obter. A única condição é que a função de preferência seja *linear* (Dorogovtsev e Mendes, 2003). Podem ser assim propostos diversos modelos que generalizam o modelo original. O seu interesse é grande do ponto de vista da modelação das redes, mas não os pudemos examinar aqui, reenviando-se para os artigos de recensão em que eles são expostos de forma sistemática. (cf. Albert e Barabási, 2002, Newman, 2003, para uma súmula).

Pode agora concluir-se que mesmo se a topológica final não se encontra univocamente determinada por um único modelo com crescimento, não deixa de ser verdade reafirmar que essa classe de modelos assenta sempre na filosofia do modelo de Barabási original. Em geral, nos modelos de crescimento a topologia deixa de ser, como ocorre nos grafos aleatórios, algo dado a *priori* em vista à determinação dos fenómenos. O próprio conceito de rede deixa de se situar epistemologicamente no nível *a priori* de uma forma da intuição a converter numa intuição formal, e passa a ser um fenómeno *a posteriori* determinado pelo mecanismo da sua génese. É a génese integral do espaço a partir de uma *força* que, em si mesma, não é puramente geométrica. Controlada pela rede governada pelo expoente β da evolução, a força vai gerar uma topologia final que pode então tornar-se novamente uma intuição formal *a priori* que vai mudar de função: ela vai determinar processos dinâmicos.

Processos dinâmicos em redes com crescimento

Após se ter visto que um mecanismo evolutivo faz emergir uma topologia global, pode-se colocá-lo entre parêntesis e considerar de novo a topologia espacial como *dada*. Reencontra-se então a situação em que estruturas geométricas constrangem os processos. Esses processos dinâmicos devem podem mesmo ser reduzidos a *classes de universalidade*. Essa redução foi conseguida por (Goltsev, Dorogovtsev e Mendes, 2003) através de uma teoria que classifica os comportamentos críticos ou transições de fase dos processos dinâmicos em função dos tipos gerais de grafos possíveis. A redução à universalidade tem pois o mesmo sentido que em física: o comportamento do fenómeno fica completamente determinado pelo seu tipo de espaço geométrico, sendo independente dos seus detalhes microscópicos (cf. Machuco Rosa, 2002 para uma análise aprofundada do conceito de universalidade). J. F. Mendes e colaboradores mostraram que o comportamento crítico dos processos que se desenrolam em grafos é *apenas* determinado pela função de distribuição dos nós e por um parâmetro geral de simetria do sistema. Em particular, eles provaram que o comportamento crítico das diversas redes representadas por grafos depende crucialmente do valor do expoente da função de distribuição. Considerando os momentos da função de distribuição *P(k)*, demonstra-se que os processos dinâmicos são todos do mesmo tipo em rede com $\gamma > 3$ (caso das redes aleatórias, entre outras).

Um caso fundamental é $\gamma \leq 3$, no qual o segundo momento da distribuição diverge. O comportamento crítico é diferente do que ocorre nos outros tipos de grafos devido à forte influência dos nós mais conectados e à cauda extremamente longa da função de distribuição (cf. acima, figura 8). Este caso é bastante importante, pois um grande número de redes reais estão no intervalo $2 \leq 3$ (cf. a enumeração em Dorogovtsev e Mendes, 2003, Newman, 2003), donde o comportamento dos processos dinâmicos que nelas têm lugar dever ser o mesmo. Portanto, o comportamento crítico em todas as redes e para qualquer valor do expoente γ é reduzido a classes de universalidade. Esse comportamento depende apenas do espaço enquanto grafo munido de uma certa função de distribuição, e não de quaisquer outras características como o coeficiente de agrupamento, distância, etc. O comportamento crítico é completamente determinado pelo espaço enquanto *a priori* geométrico, e a cada um desses *a priori* puramente espaciais (grafos regulares, grafos aleatórios', grafos sem escala característica) corresponde um certo comportamento crítico dos processos dinâmicos que neles se desenrolam. Assim sendo, o comportamento dos processos dinâmicos em redes sem escala característica é diferente do que ocorre em redes aleatórias. Vimos que esses processos são do tipo 'contágio', tendo sido apresentados alguns exemplos no substrato espacial dos grafos aleatórios. Vamos agora sumariamente referir qual o seu comportamento em redes sem escala característica, considerando ainda o caso da *robustez* de uma rede, pelo qual começaremos.

A robustez de uma rede é investigada destruindo aleatoriamente e sucessivamente os seus nós e observando a variação de quantidades como a distância e a existência (ou não) e tamanho de um grande agrupamento conectado. No caso de uma rede aleatória, quer a distância quer a existência de um grande agrupamento possuem um comportamento semelhante ao previsto pela teoria clássica de Erdös: a distância tende a aumentar e existe uma fracção crítica de destruição de nós (cf. Albert *et al*, 2000). Isto é, em redes com uma distribuição de Poisson ou exponencial, o tamanho do grande agrupamento conectado, S, parte de 1 quando a fracção de remoção de nós f =0, fragmenta-se em grupos isolados quando $f_c \approx 0.28$ e converge de seguida para 0 (caso em que $S \approx 0$). O comportamento já é completamente diferente em redes sem escala característica com $\gamma \leq 3$. A rede permanece conectada mesmo após quase todos os nós terem sido destruídos; mais exactamente, ela continua com um grande agrupamento até aos valores de $f_c \approx 0.9$. É fácil perceber porquê (cf. Albert *et al*, 2000). Seleccione-se aleatoriamente um certo número de nós em vista à sua remoção. Como existem muito poucos nós com uma grande número de ligações, a probabilidade de um desses nós ser seleccionado é bastante baixa. Pelo contrário, é mais provável que sejam seleccionados nós com poucas ligações donde a remoção de alguns desses nós não alterar substancialmente a estrutura de ligações dos nós sobreviventes. Portanto, a razão da robustez encontra-se na cauda extremamente longa das redes com $\gamma \leq 3$, isto é, com segundo momento divergente (Dorogovtsev e Mendes, 2003).

Só que essas situação possui evidentemente um reverso quando uma rede é sujeita a um ataque intencional por alguém conhecedor da estrutura topológica da rede. Suponhamos que um indivíduo está bem informado acerca da ausência de escala característica na WWW. Se esse indivíduo quisesse levar a cabo um ataque à rede visando causar o máximo de dano possível, certamente que ele escolheria um dos poucos nós densamente conectados, os quais são pontos centrais cuja destruição tem grandes consequências na estrutura topológica geral dos sistema. Neste caso, uma rede sem escala característica possui um ponto crítico, (f_c = 0. 18), menor que o existente numa rede de Poisson ou exponencial (f_c = 0. 28). Um grafo sem escala característica é portanto extremamente susceptível a ataques com consequências extremamente nocivas e a razão, uma vez mais, reside na heterogeneidade da rede devida existência de poucos nós muito densamente conectados.

O exemplo do estudo da robustez de uma rede poderia ser exposto de forma a mostrar que ele pertence ao tipo de geral de processos dinâmicos tipo 'contágio' (cf. Watts, 2002). Basta no entanto considerarmos como um segundo exemplo os processos mais directamente interpretados como um contágio. Nesse caso, o comportamento também é diferente consoante se trate de redes aleatórias ou redes sem escala. Assim, vimos que os modelos clássicos da propagação de epidemias prevêem que o comportamento de uma epidemia se processa segundo duas fases distintas separadas por um ponto crítico (cf. acima, figura 9). Abaixo do ponto crítico, a epidemia torna-se recessiva e acaba por desaparecer. Ao invés, acima do ponto crítico, a epidemia propaga-se através da quase totalidade dos nós do sistema. Já em grafos sem escala característica *não existe ponto crítico*, isto é, a taxa crítica de reprodução da epidemia, R_c, é igual a 0, pelo que a epidemia se pode tornar endémica (Pastor-Satorras e Vespignani, 2002). Mais uma vez, a razão desse facto está na topologia da rede, isto é, na existência de uma função de distribuição com uma cauda extremamente longa, a qual implica que os nós muito densamente conectados têm a capacidade de receber vírus de inúmeros nós e assim infectarem permanentemente o sistema. Este fica num estado de infecção endémico que não pode ser removido recorrendo às técnicas clássica de vacinação aleatória.

[1] Procuraremos usualmente designar por 'grafo' a estrutura matemática que modela o conceito de 'rede', termo que visa sobretudo denotar uma realidade empírica.
[2] Somos aqui inspirados pela leitura que J. Petitot faz da síntese kantiana da mecânica (cf. Petitot, 1991, 1992).
[3] Cf, por exemplo, (Dorogovtsev e Mendes, 2003) para uma lista desses valores, que cobrem redes tão diversas quanto a Internet, a WWW, redes de citações, ecológicas, etc.

Bibliografia

Albert, R., Barabasi, A.-L., (2002) 'Statistical mechanics of complex networks', *Rev. Mod. Phys*. 74, 47–97.

Albert, R., Jeong, H., Barabasi, A.-L., (2000), 'Attack and error tolerance of complex networks', *Nature* 406, 378–382.
Anderson, R. M., May, R. M., (1991), *Infectious Diseases of Humans*, Oxford University Press, Oxford.
Arnold, V., (1976), *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.
Barabási, A.-L., (2002), *Linked: The New Science of Networks*, Perseus, Cambridge, MA.
Barabasi, A.-L., Albert, R., Jeong, H., (1999) 'Mean-field theory for scale-free random networks', *Physica A* 272, 173–187.
Biggs, N., Lloyd, E., Wilson, R., (1986), *Graph Theory – 1736-1936¸* Clarendon Press, Oxford.
Bollabás, B., (1985), *Random Graphs*, Academic Press, London.
Cohen-Tannoudji, G., Spiro, M., (1986), *La Matière - Espace - Temp*s, Paris, Fayard.
Dorogovtsev, S. N. and Mendes, J. F. F., (2003), *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford.
Erdös, P., Renyi, A., 1959) 'On random graphs', Publicationes Mathematicae 6, 290–297.
Euler, L. (1736), 'Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis', in Biggs, N., Lloyd, E., Wilson, R., *Graph Theory – 1736-1936¸*Clarendon Press, Oxford, 1986.
Goltsev, A. V., Dorogovtsev, S. N., Mendes, J.F. F., (2003), 'Critical phenomena in networks', *Phys. Rev. E*, 67, 026123.
Iomamanides, Y., (1997), 'Evolution of Trading Structures', in W.Arthur, S. Durlauf, D. Lane (eds), *The Ecomony as an Evolving Complex System II¸* Addison-Wesley, Reading, 1997, pp. 129-168.
Kant, I., (1781-1787). *Kritik der reinen Vernunft*, in *Kants gesammelte Schriften*, Band III, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911.
Machuco Rosa A., (2002), *Dos Sistemas Centrados aos Sistemas Acentrados – Modelos em Ciências Cognitivas, Teoria Social e Tecnologias da Informação*, Vega, Lisboa.
Machuco Rosa, A., (2003), O *Conceito de Continuidade em Charles S. Peirce*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
Newman, M.E.J., (2003), 'The structure and function of complex networks', arXiv:cond-mat0303516 v1.
Pastor-Satorras, R., Vazquez, A., Vespignani, A., (2001), 'Dynamical and correlation properties of the Internet', *Phys. Rev. Lett*. 87, 258701.
Pastor-Satorras, R., Vespignani, A., (2002) ,'Epidemic dynamics in finite size scale-free networks', *Phys. Rev. E*, 65, 035108.
Pastor-Satorras, Vespignani, A., (2004) *Evolution and Stucture of the Internet – A Statistical Physics* Aproach, Cambridge University Press, Cambridge.
Petitot, J., (1991). *La Philosophie transcendantale et le problème de l'Objectivité*, (F. Marty ed.), Editions Osiris, Paris.
Petitot, J., (1992). 'Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics', in *1830-1930: A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds.), Berlin, Springer, New-York.
Broder, A., Kumar, R., Maghoul, F., Raghavan, P., Rajagopalan, , Stata, R., Tomkins, A., Wiener, J., (2000), 'Graph structure in the web', *Computer Networks* 33, 309–320.
Vazquez, A., (2002), 'Growing networks with local rules: Preferential attachment, clustering hierarchy and degree correlations', arXiv:cond-mat /0211528.
Watts, D. J., (2002), 'A simple model of global cascades on random networks', *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 99*, 5766–5771