

REDES E IMITAÇÃO

António Machuco Rosa

1. Introdução

Há cerca de vinte anos, Pierre Rosenstiehl escrevia que ‘a nossa época será marcada pelo ‘fenómeno rede’. Como todos os fenómenos morfológicos profundos, de carácter universal, o fenómeno pertence não só à ciência mas também à vida social’ (Rosenstiehl, 1988, ed. org: 1982). Descrição e previsão exacta, como os anos mais recentes confirmaram. Ela era ainda algo incipiente nos setenta e oitenta, mas avanços teóricos fundamentais, conjugados com a concomitante difusão de novas tecnologias, tornaram o ‘fenómeno rede’ definitivamente omnipresente. Neste artigo passar-se-ão em revista alguns desses avanços, tomando-se como objecto de estudo as redes complexas e acentradas que satisfazem um princípio de localidade, deixando de lado as redes centradas e hierárquicas que analisámos extensamente noutras ocasiões (cf. Machuco Rosa, 1999, Machuco Rosa, 2001a).

Do ponto de vista teórico, a teoria física das transições de fase da matéria forneceu o paradigma para o surgimento da teoria geral dos fenómenos críticos, a qual progressivamente tem vindo a invadir as mais diversas regiões do conhecimento. Esse paradigma será aqui exposto com base nas redes de *spins* e sua aplicação a um tipo específico de rede, as redes neuronais artificiais. Paralelamente, assistiu-se ao ressurgimento de uma teoria matemática que remonta aos anos sessenta, a teoria dos grafos aleatórios. Ela fornece o enquadramento *a priori* mais geral do ‘fenómeno rede’, na medida em que se integra na teoria geral dos fenómenos críticos e em que é actualizada devido ao surgimento de redes omnipresentes como a rede de redes Internet e a rede virtual WORLD WIDE WEB. Analisaremos o ressurgimento da teoria dos grafos aleatórios levado a cabo pelo modelo proposto por Steve Strogatz e Duncan Watts (modelo dos ‘mundos-pequenos’) e pelo modelo desenvolvido por Albert Barabási e colaboradores. Mostraremos igualmente que todos os modelos analisados neste artigo podem ser entendidos como uma formalização da imitação, utilizando-se exemplos que vão desde a estrutura da WORLD WIDE WEB até à adopção de *standards* tecnológicos e à dinâmica dos mercados de capitais. Finalmente, concluiremos de forma sumária que as redes complexas baseadas na imitação colocam em questão alguns postulados clássicos da racionalidade.

2. Fenómenos Críticos

Criada no anos sessenta e setenta do século passado, a teoria dos fenómenos críticos tornou-se a principal matriz interdisciplinar do pensamento contemporâneo. Em particular, ela é um elemento essencial para o desenvolvimento de uma teoria geral das redes. O conceito de rede encontra-se efectivamente presente num exemplo arquetípico da teoria dos fenómenos críticos, precisamente as redes de *spins*, as quais são o objecto de estudo da teoria das transições críticas de fase à segunda ordem (cf., por exemplo, Fisher, 1983). Começamos por resumir os elementos essenciais dessa teoria.

As redes de *spins* são sistemas compostos por átomos cujo comportamento é local: esse comportamento é determinado pelo estado de cada átomo e pela sua interacção com os átomos vizinhos. Um sistema de *spins* pode ser representado por uma rede unidimensional ou por uma rede bidimensional. No primeiro caso, cada *spin* interage com os dois *spins* vizinhos, com quatro *spins* vizinhos no segundo caso. O conceito de *spin* designa o momento magnético de cada átomo, o qual tem dois estados possíveis: aponta numa de

duas direcções opostas do espaço. Finalmente, o comportamento do sistema depende de um parâmetro que controla o seu comportamento global. Esse parâmetro pode ser a interacção magnética ou acoplamento entre os átomos da rede ou então de um outro como a temperatura. A figura 1 representa esse tipo de redes no caso bidimensional, com os dois estado possíveis representados por círculos preenchidos ou círculos em branco e as ligações representando a interacção entre os spins.

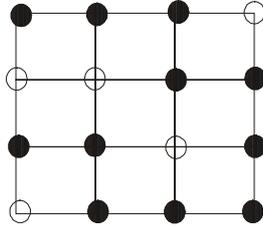


Figura 1.: representação de uma de *spins* bidimensional, Os círculos preenchidos designam os *spins* que apontam numa das duas direcções do espaço.; os círculos brancos os *spins* que apontam na outra. Os *spins* interagem com quatro *spins* vizinhos.

Seguindo a variação do parâmetro externo que controla o sistema, verificam-se três tipos gerais de situações possíveis. No caso em que a temperatura tem um valor próximo de 0 (ou a interacção magnética é infinita), a energia total do sistema minimiza-se e os *spins* apontam todos na mesma direcção. Diz-se que existe nesse caso uma interacção ferromagnética, a qual é caracterizada por uma magnetização espontânea correspondendo à emergência de um estado macroscópico global a partir das interacções locais: os *spins* apontam todos numa mesma direcção. No caso em que a temperatura tende para infinito (e a interacção magnética tende para 0), diz-se que existe uma interacção paramagnética e os *spins* adjacentes apontam alternadamente nas duas direcções opostas do espaço. A terceira situação verifica-se quando a temperatura aumenta a partir de 0 e atravessa o que se designa por um *ponto crítico* (matematicamente, trata-se de um ponto fixo instável). O sistema sofre então uma *transição de fase*, por exemplo, passa de uma fase de ordem ferromagnética (os *spins* apontam todos na mesma direcção) para a fase de maior desordem ou maior entropia (em média, a probabilidade de um *spin* apontar numa das duas direcções é de 50%). A fase de ordem é uma fase em que os elementos do sistema estão dependentes uns dos outros, enquanto, ao invés, na fase de desordem eles são independentes.

O terceiro estado, o estado em que o sistema se encontra no ponto crítico de transição de fase, é naturalmente fundamental. Em termos intuitivos, trata-se de um estado em que as duas fases opostas estão fundidas, e na realidade é a competição existente entre as duas fases opostas que explica a existência da transição crítica de fase. Se observarmos o estado crítico numa transição do tipo paramagnético/ferromagnético, verificamos que, nesse ponto, existem conjuntos de *spins* que apontam todos na mesma direcção, no interior dos quais existem conjuntos de *spins* apontando aleatoriamente nas duas direcções opostas. Se, de seguida, aumentarmos a escala de observação, isto é, se fizermos um *zoom*, verificamos que os conjuntos de *spins* aleatórios contêm conjuntos de *spins* apontando todos na mesma direcção, e assim sucessivamente *por invariância de escala*, de acordo com o que se designa uma estrutura fractal: em cada escala, veríamos exactamente o mesmo padrão constatado em qualquer outra escala¹. A invariância de escala significa precisamente que os elementos do sistema se encontram todos correlacionados uns com os outros: eles ‘comunicam’ com elementos situados a distâncias muito superiores aos das forças físicas ‘microscópicas’ através das quais eles interagem.

3. Redes Neurais

A teoria das transições de fase à segunda ordem encontra-se na origem de um novo conceito de rede, o conceito de rede neuronal artificial. É conhecido que foi a estrutura e comportamento das redes de *spins* que levou J. Hopfield (Hopfield, 1982) a propor o moderno conceito de rede neuronal - após o esquecimento em que o conceito tinha caído a partir os anos sessenta. As redes neuronais possuem uma dupla aplicação: o estudo do enraizamento cerebral da cognição e o *design* de um novo tipo de arquitectura computacional. Elas possuem as mesmas características que os sistemas de *spins* correspondentes (cf. Nadal, 1993, para uma panorâmica geral). As unidades ou elementos do sistema são agora os neurónios, os quais também podem assumir apenas dois estados, existindo uma constante de interacção ou parâmetro externo - usualmente chamado um peso sináptico e designado por W - que assume valores contínuos e que é o análogo do acoplamento magnético dos sistemas de *spins*. Esse parâmetro ou interacção pode ser 'treinado'; pode ser submetido à influência de uma algoritmo local, provando-se que a rede converge então para um atractor - em termos computacionais, esse processo corresponde à memorização e reconhecimento de uma forma tal como, por exemplo, uma letra do alfabeto. Deve desde já referir-se que esse parâmetro pode também ser interpretado como um *parâmetro de imitação* que designa a tendência de os neurónios estarem alinhado, isto é, assumirem o mesmo estado. Um diagrama de uma rede neuronal pode ser o da figura 2.

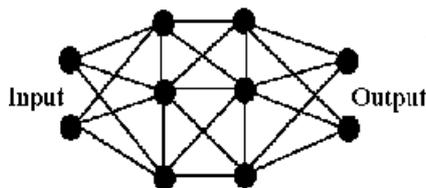


Figura 2.: diagrama esquemático de uma rede neuronal. Os nós podem representar neurónios, os quais podem assumir dois estados. As ligações representam interacções ou pesos sinápticos.

Existem redes neuronais mais complexas que o tipo acima apresentado, as redes neuronais recorrentes. Estas redes são generalizações do modelo elementar de Hopfield, no sentido em que se assume a existência de múltiplas camadas de neurónios (*hidden units*) e se permite que certas camadas subsequentes de neurónios retroajam sobre camadas anteriores, isto é, que se gere um efeito de *feedback* através do qual uma certa camada pode recalculer um certo sinal que lhe é reenviado por uma camada posterior. Pode-se mesmo afirmar que essas redes não satisfazem o esquema clássico *input* → *output* e não são compostas por camadas, antes consistindo num certo número de unidades, cada uma podendo receber efeitos de qualquer outra. Um seu diagrama pode ser o da figura 3.

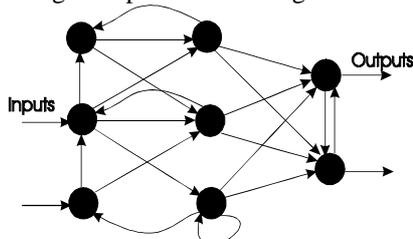


Figura 3.: diagrama de uma rede neuronal recorrente.

Quer nas redes neuronais mais simples quer nas redes neuronais recorrentes, constatam-se as características essenciais do conceito de rede até

agora exposto. Existem certas unidades de base e o seu comportamento é determinado por interacções locais, sendo a partir dessas interacções locais que emerge um estado global a que corresponde um atractor (usualmente um ponto fixo). Por outro lado, as representações que podem ser codificadas numa rede não se encontram localizadas em qualquer unidade ou módulo específico, pelo que as redes neuronais operam um cálculo distribuído e em paralelo.

4. Redes e pânico nos mercados bolsistas

Através do conceito de rede neuronal, a teoria das transições de fase encontra uma das suas principais aplicações tecnológicas no *design* de novas arquitecturas de hardware e software. Não se aborda aqui esse tipo de aplicações, mostrando-se antes como essa teoria tem igualmente vindo a invadir múltiplas áreas das ciências sociais, em particular a economia. É a possibilidade de pensar os processos sociais em termos de redes locais e sem centro coordenador que fica assim estabelecida. Um exemplo é o estudo dos mercados bolsistas. De entre os múltiplos modelos inspirados nas redes de *spins* que têm vindo a ser aplicados no estudo dos comportamentos das bolsas (cf. Johansen e Sornette, 1999, Iori, 2000, Kaizoji, 2000) expomos aqui as linhas essenciais do modelo de A. Johansen e D Sornette.

O modelo de Sornette insere-se numa tendência geral que consiste em eliminar os constrangimento característicos da teoria neoclássica da economia e suas extensões (cf. Arthur, 1997). Dito tão sumariamente quanto possível, essa teoria supõe que os agentes económicos são independentes uns dos outros e apenas comunicam entre si através de uma realidade exterior e objectiva comum a todos: os preços. A teoria pode ser complementada pela teoria das expectativas racionais e uma sua extensão, a hipótese acerca da eficiência dos mercados de capitais. Esta última é uma teoria que supõe que os agentes económicos são racionais, que existe um modelo que permite calcular os preços futuros, que todos os agentes seguem identicamente esse modelo (e cada um sabe que cada um outro segue de facto esse modelo), e ainda que os agentes possuem a totalidade da informação relevante. Com base no modelo, os agentes formam as suas expectativas respeitantes aos retornos futuros (de um título cotado em bolsa, por exemplo). Mostra-se ainda que os preços seguem um percurso aleatório e que eles oscilam em torno de um valor objectivo, o seu valor fundamental.

Existem no entanto numerosos dados empíricos que mostram que a teoria neoclássica é, senão falsa, pelo menos de aplicação limitada. Os novos modelos dos mercados financeiros propõem, pelo contrário, que o mercado seja encarado como uma rede complexa na qual os agentes interagem directa e localmente. O mecanismo fundamental de interacção local é a *imitação*. D. Sornette e colaboradores partiram desse mecanismo em vista a explicar uma aparente regularidade empírica dos mercados de acções. Essa regularidade é a existência de precursores de *crashes* bolsistas, designados pelos analistas financeiros por oscilações de logaritmo periódico: a curva dos preços exhibe uma série de máximos e mínimos na sucessão temporal t_n tal que $(t_{n+1} - t_n) / (t_n - t_{n-1}) = \lambda$, onde λ é um factor constante de escalamento (veja-se a nota 1, inserida a propósito dos sistemas de *spins*). Essa contracção geométrica converge para um ponto de acumulação que é um ponto crítico instável no tempo t_c , o tempo de *crash*. Nesse momento, acontece uma maciça ordem de vendas, a qual representa um enorme desvio da situação 'normal' do mercado, a existência de um equilíbrio aproximado entre ordens de venda e ordens de compra.

Para explicar esses precursores de *crash*, D. Sornette e *al* partiram da hipótese que cada agente financeiro (um investidor individual ou um fundo de investimento) age localmente: ele baseia a sua decisão em conversas e contactos diversos com alguns conhecidos e nas notícias disponíveis. A hipótese é então que cada agente age por imitação local. Esse processo imitativo pode ser formalizado assumindo que a taxa de risco $h(t)$ designa a

probabilidade de um *crash* ocorrer no caso de ele ainda não ter ocorrido. Noutros termos, $h(t)$ designa a probabilidade de um grande número de agentes emitir um grande número de vendas, vendas não compensadas por compras, fazendo assim descer substancialmente os preços. No modelo de Sornette e *al*, a dinâmica da taxa de risco evolui segundo a equação

$$\frac{dh}{dt} = Ch^\delta \quad \text{com } \delta > 1 \quad (1)$$

C é uma constante. O expoente $\delta > 1$ quantifica o número de agentes que interagem com um dado agente, e é a existência dessas *interacções* que faz aumentar $h(t)$. A integração da equação (1) permite obter um ponto crítico, sempre sob a condição fundamental $\delta > 1$. Essa integração dá

$$h(t) = \frac{B}{(t_c - t)^\alpha} \quad \text{com } \alpha \equiv \frac{1}{\delta - 1} \quad (2)$$

Não é aqui fundamental avaliar até que ponto um modelo como o de Sornette e *al* é efectivamente capaz de explicar a existência de precursores dos *crashes* nos mercados bolsistas. Tão pouco vamos descrever as ulteriores hipóteses económicas que acompanham o modelo. O ponto essencial é ele apontar para uma situação bastante geral: existe uma competição entre duas fases opostas e é essa competição que explica a existência de transições críticas de fase.

Assim, se *eliminarmos a interacção imitativa* que tipo de comportamentos temos? Temos uma fase em que os agentes agem em função de certos dados ‘objectivos’, em função da avaliação pessoal e independente que cada um faz do valor dos títulos – dividendos esperados, etc. Trata-se da situação normal do mercado, a situação sem crises e na qual os agentes são independentes. Intuitivamente, chamamos a esse estado um estado de ‘ordem’. Tecnicamente, segundo a terminologia da teoria da informação, é no entanto a situação de ‘desordem’, dado que a situação em que as compras e as vendas no mercado se equilibram é aquela onde existe maior entropia – a probabilidade de aleatoriamente se encontrar uma ordem de venda tende para 50%.

Portanto, na ausência de interacções, temos independência e uma situação de equilíbrio aproximado no mercado. Mas o modelo de Sornette e *al* mostra que se considerarmos as interacções – se fizermos a hipótese que os agentes agem em função de pressões locais - a probabilidade de um *crash* cresce exponencialmente. O modelo é mesmo preciso acerca desse ponto, pois já se referiu que a condição $\delta > 1$ é *necessária* para se obter o ponto crítico (o *crash*) para que (2) converja. Com o aumento da probabilidade do *crash* – sem que no entanto o tempo t_c seja exactamente o tempo do *crash*, pois este poderia ocorrer num qualquer outro momento - os agentes vão ficando alinhados num estado de cada vez maior coordenação global, sem que no entanto dele tenham consciência. Essa coordenação global é marcada pelo aumento da taxa de risco $h(t)$, o que significa, por exemplo, que os agentes continuam a comprar, mas debaixo da expectativa de retornos maiores devido a continuarem a apostar num mercado cujo *crash* pode acontecer. Naturalmente que isso faz aumentar o preço até se atingir um ponto crítico ou ponto fixo instável no qual as cascatas de imitação local se propagam em coordenação global por todo o sistema. Nesse momento, os agentes ficam sincronizados em fase comum e ordens massivas de venda (em todas as escalas – desde a escala dos pequenos investidores até aos grandes grupos de

investidores) provocam o *crash*. O *crash* consumado, volta-se à situação normal de desordem.

Em resumo, o modelo de Sornette é uma aplicação dos conceitos oriundos dos processos físicos de transição crítica de fase e do conceito de rede que lhes está associado. O parâmetro de controlo externo desses processos é agora explicitamente interpretado como uma interacção imitativa, sendo o acumular da imitação local guiando o comportamento dos agentes financeiros que é a causa, distribuída, da emergência de um estado global de coordenação que desencadeia um *crash*.

5. *Standards Tecnológicos*

Para além dos mercados de capitais, a teoria geral dos fenómenos críticos revelou-se particularmente adaptada para descrever outros tipos de processos económicos associados ao que se convencionou designar por 'nova economia'. Na sua forma rigorosa e moderna, não jornalística, a teoria foi desenvolvida por W. Brian Arthur (cf. Arthur, 1994). Mais precisamente, os conceitos de rede, de ponto crítico, de interacção local e imitação são cruciais para compreender o mecanismo de adopção de *standards* tecnológicos. Vejamos como a dinâmica das redes se coloca nesse tipo de mecanismo.

Existem *standards* públicos e *standards* privados. No primeiro caso, a adopção do *standard* pode ter sido imposta por um organismo governamental ou então pode ter tido origem num processo de desenvolvimento espontâneo que conduziu os utilizadores a adoptar um *standard* sob a égide de uma organização mais ou menos *ad hoc* – um exemplo são alguns dos *standards* da Internet, e daí muita da força dessa rede de redes (Machuco Rosa, 1998). Mas eles podem também ser privados. Nesse caso, uma empresa que logra impor o seu *standard* tende a exhibir lucros crescentes de escala, nos quais o custo por unidade produzida decresce exponencialmente com o nível de produção. Os lucros crescentes de escala podem estar associados a situações de monopólio de um certo mercado; nesse caso, não se verifica a lei da 'velha economia' segundo a qual o preço do produto tende assintoticamente a ser igual ao seu custo marginal segundo uma dinâmica de lucros decrescentes.

A importância revolucionária do trabalho de Brian Arthur consistiu em demonstrar, utilizando o formalismo da teoria matemática dos sistemas dinâmicos, quais os mecanismos subjacentes à existência de lucros crescentes de escala. Sem se entrar nos detalhes formalismo matemáticos, é possível mostrar que dois *standards* em competição podem estar inicialmente numa situação de ponto fixo ou de equilíbrio instável, e que então certas pequenas perturbações farão convergir o sistema para um ponto fixo estável – que corresponde à situação na qual um dos produtos acaba por conquistar a quase totalidade do mercado. Na realidade, subjacente à adopção de um *standard* encontra-se o princípio de *externalidades em rede*, segundo o qual o valor de uma rede cresce exponencialmente (expoente = 2) com o número de utilizadores. Noutros termos, é importante compreender que a adopção de um *standard* e a monopolização do seu mercado tem por base a *imitação*, sem que esse conceito designe a imputação de uma particular disposição psicológica aos indivíduos (cf. o modelo de Arthur e Lane, 1993). O bem conhecido exemplo do sistema operativo Windows torna o processo claro. É correcto dizer que eu estou neste momento a utilizar o sistema operativo Windows porque estou a imitar os outros. De facto, sou forçado a imitá-los porque a maioria dos computadores pessoais já possuem o Windows instalado. E isso porque os fabricantes são forçados a imitarem-se uns aos outros. E porquê? Porque os criadores de software são eles próprios obrigados a imitarem-se uns aos outros, isto é, quantas mais aplicações são desenvolvidas para Windows maior o incentivo para a utilização desse mesmo sistema, o que é um ulterior incentivo (o valor da rede cresce) para o desenvolvimento de novas aplicações para Windows, e assim sucessivamente até à conhecida e actual situação de monopólio. Trata-se de um processo de

retroacção positiva, o qual é um mecanismo característico dos redes enquanto sistemas complexos.

Deve igualmente salientar-se que a dinâmica de adopção de *standards* aponta para uma característica fundamental das redes sociais ou socialmente mediadas. A dinâmica das redes complexas funcionando segundo o princípio de retroacção positiva tem como consequência que certos critérios objectivos de *qualidade* são praticamente irrelevantes. Esse ponto já foi visto a propósito de modelo de Sornette, assim como a ele retornaremos no contexto das redes que descreveremos nas secções seguintes. No caso presente da adopção de *standards*, deve notar-se que um seguidor dos princípios neoclássicos da economia tentará desesperadamente mostrar que são apesar de tudo certos factores objectivos (relação qualidade/preço definindo a ‘utilidade’ de cada consumidor individualmente considerado, etc.) que determinarão que um certo *standard* se imponha, excluindo todos os outros do mercado. Foi, por exemplo, o que tentaram fazer S. Leibowitz e S. Margolis². Mas deve-se permanecer indiferente a esses esforços. Se, por exemplo, o sistema operativo Ms-Dos era de facto melhor que os outros sistemas operativos para PC (o que, em todo o caso, é duvidoso), isso é *irrelevante* do ponto de vista da sua adopção: não foi por ser melhor ou pior que ele foi adaptado, mas sim devido à dinâmica de externalidades em rede. Enredados e interdependentes, os indivíduos são forçados a imitarem-se uns aos outros, e pode-se mesmo afirmar que, visto o sistema se encontrar inicialmente num ponto de fixo instável, a imitação tanto pode ir num sentido como no outro; tanto pode ir no sentido do ‘bom’ ponto fixo estável como no sentido do ‘mau’. Não há nenhuma realidade objectiva a decidir, apenas o acumular das interacções imitativas.

6. Grafos aleatórios

Não nos devemos deixar iludir com alguns dos diagramas anteriormente utilizados na representação de redes. Esses diagramas não representavam intrinsecamente a topologia das redes que eles resumiam. Apresentam-se agora redes cujos grafos exibem a topologia intrínseca de que a teoria visa dar conta. Essa teoria é, em certo sentido, a teoria mais geral das redes, podendo ser incluída no quadro geral da teoria dos fenómenos críticos na medida em que o conceito de transição crítica continua a ser decisivo. Referimo-nos à teoria dos grafos, mais especificamente a teoria dos grafos aleatórios criada por Erdős nos anos sessenta (Erdős, 1960). Ela parte das redes na sua forma mais estilizada: uma rede é composta por nós e pela existência (ou não) de ligações entre esses nós.

Na teoria dos grafos aleatórios parte-se de um número previamente dado de nós e de seguida conectam-se esses nós. Mais exactamente, parte-se de n nós (também designados por vértices) e nenhuma ligação (as ligações também podem ser designadas por arestas), e de seguida conecta-se aleatoriamente com probabilidade p cada par de vértices. Essa probabilidade pode calcular-se como a fracção entre as ligações actuais e a totalidade das ligações possíveis³. Um exemplo é a da figura 4.

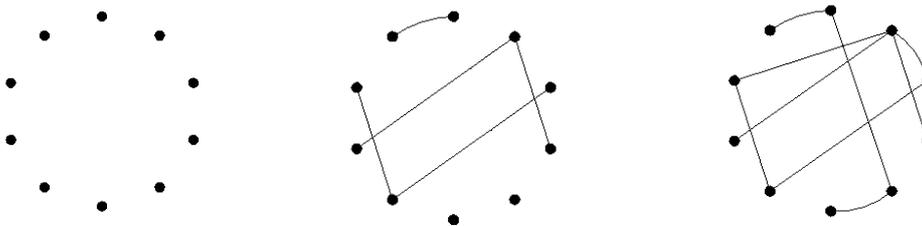


Figura 4.: construção de grafos aleatórios. Da esquerda para a direita tem-se $p=0$, $p \approx 0,1$, $p=0,2$.

A teoria dos grafos aleatórios permite encontrar *transições críticas de fase*, pelo que repetimos que ela faz parte do quadro transdisciplinar que hoje em dia se tornou a teoria dos fenómenos críticos (cf. Bunde e Havlin, 1995). Isso significa que em certos pontos de transição crítica *emergem* certas propriedades.

Afirmar que uma certa propriedade emerge num ponto crítico significa que essa emergência se dá numa escala temporal muito rápida quando comparada com a escala temporal da totalidade do processo de construção de um grafo. Um caso importante é a emergência de um *agrupamento (cluster)* ‘gigante’ num momento súbito da construção de um grafo aleatório. Um ‘agrupamento gigante’ emerge quando o parâmetro de que o grafo depende ultrapassa um certo valor crítico. No caso dos grafos aleatórios, esse parâmetro é a probabilidade, p , de dois nós ou vértices se encontrarem ligados. Mostra-se então (Bollábas, 1985) que existe um valor de probabilidade crítica p_c com o valor crítico $c \approx 1$, isto é, quando $p \approx 1/n$ emerge um agrupamento gigante. Naturalmente que se fala em ‘agrupamento gigante’ por relação ao tamanho do grafo. A emergência de um agrupamento conectando ‘quase’ todos os vértices do grafo seria mais visível se, em vez de grafos com apenas dez vértices, a figura 4 apresentasse grafos com um número de vértices muito maior. O tamanho desse agrupamento torna-se ‘quase’ do tamanho do grafo no limite assintótico $n \rightarrow \infty$, onde é possível atingir ‘quase’ todo o vértice a partir de qualquer outro. Quando se dá a transição crítica a partir da qual é possível atingir qualquer vértice a partir de qualquer outro, vértices muito distantes no grafo *comunicam uns com os outros*⁴.

Viu-se nas secções anteriores que o parâmetro fundamental das redes de *spins* e das redes neuronais era o parâmetro de acoplamento magnético ou o parâmetro W designando a interacção entre os elementos do sistema. Na teoria dos grafos aleatórios, o único parâmetro de que a rede depende é p . De acordo com o espírito funcionalista da ciência (cf. mais abaixo), ele pode também designar a imitação. O parâmetro não assume valores contínuos: existe uma ligação entre dois nós ou não existe: se existir, pode dizer-se que um nó (um indivíduo) imita o outro; caso contrário, não. Em secção anterior também se viu que os modelos de *spins* podem ser modelos dos mercados das bolsas de valores, em particular quando destinados a explicar as tendências regulares que parecerem ser precursoras de um *crash*. Mas existem outros dados empíricos bem atestados nesses mercados, em particular o facto de a variação dos preços não obedecer à distribuição (uma distribuição gaussiana) prevista pela teoria neoclássica. Em vista a explicar esse facto pode utilizar-se também a teoria dos grafos aleatórios para modelar os mercados bolsistas, tal como foi mostrado pelo modelo proposto por R. Cont e J.P. Bouchoud (Cont e Bouchoud, 1997).

Esses autores partem de agentes individuais ou de grupos de maior dimensão (fundos de acções, por exemplo) que estabelecem ligações com outros e que, em função dessas ligações, podem assumir dois estados (compram ou vendem). Note-se que se trata de ligações locais. O modelo mostra que o comportamento da rede formada por agentes financeiros imitando-se localmente depende de um parâmetro c , que designa o número médio de ligações que um agente possui com outros; portanto, um parâmetro análogo ao parâmetro p mencionado a propósito dos grafos aleatórios. Se uma ligação (uma aresta) existe, um agente imita um outro, e é levado ao mesmo tipo de acção que o outro (vender, por exemplo). Sem se entrar nos detalhes do modelo – naturalmente importantes do ponto de vista de uma teoria dos mercados financeiros –, a conclusão principal que dele se retira é que com $c = 1$ se tem um ponto de transição crítica, tal como a teoria dos grafos aleatórios prevê. Nesse ponto começam a emergir ciclos de todas as ordens, o que aqui significa que os agentes se imitam uns aos outros, entram em fase comum e emitem todos a mesma ordem (venda, por exemplo). Em termos de mercados financeiros, a consequência é uma descida vertiginosa no valor dos títulos, isto é, com $c=1$ existe um *crash* bolsista. No ponto

crítico, a comunicação propaga-se por todo o sistema e existem ordens de venda em todas as escalas (desde o pequeno investidor aos grandes fundos). Trata-se de uma rede em que actos *locais* – imitação entre dois agentes – fazem emergir um estado *global* de ordem (um grande número de agentes encontra-se alinhado), sem que exista qualquer centro coordenador e sem que qualquer agente tenha qualquer consciência, ou possa antecipar, o estado global para que está não intencionalmente contribuindo. A teoria dos grafos aleatórios surge assim como uma teoria que permite modelar os processos comunicativos *por contágio*. Outros exemplos poderiam ser mencionados (cf. Machuco Rosa, 2001a).

7. *Mundos-pequenos*

A teoria dos grafos aleatórios permite modelar diversos processos sociais e comunicativos. Existem no entanto exemplos que mostram de forma clara algumas das suas limitações. Segundo essa teoria, a probabilidade de quaisquer dois vértices ou nós estarem conectados é aproximadamente a mesma. Mas é evidente que as redes sociais violam muitas vezes esses princípios. Por exemplo, se um indivíduo A é amigo do indivíduo B e do indivíduo C, é provável que B e C sejam também amigos. No entanto, em grafos aleatórios a probabilidade de B e C serem amigos (terem uma ligação) é a mesma que quaisquer dois outros indivíduos serem também amigos. Devemos ver agora o tipo de grafos que modelam esse tipo de redes.

Na teoria dos grafos, existe uma quantidade que permite medir a fracção média de pares de vértices ligados a um dado vértice que estão igualmente ligados um ao outro. Essa quantidade é designada por *coeficiente de agrupamento*, designada por C . O seu valor é baixo nos grafos aleatórios, baixo por relação ao que se verifica num outro tipo de grafos, os *grafos regulares*. Os grafos regulares são grafos em que qualquer vértice tem o mesmo número de arestas incidentes, e um exemplo foi da figura 1 inserida a propósito dos sistemas de *spins*. Eles podem ser distinguidos dos grafos aleatórios não apenas pelo valor do seu coeficiente de agrupamento mas igualmente através de uma outra importante quantidade, a *distância*, L , de um grafo. Esta é definida como o número médio de passos (medidos na passagem por cada vértice intermédio) entre quaisquer dois vértices do grafo.

Em dimensão 1, o coeficiente de agrupamento C calcula-se segundo a expressão (3), na qual v são os vértices e k são as arestas ou ligações:

$$C = \frac{3(k-2)}{4(k-1)} \quad (3)$$

E a distância calcula-se:

$$L = \frac{v(v+k-2)}{2k(v-1)} \quad (4)$$

A figura 5 ilustra os conceitos acabados de introduzir.

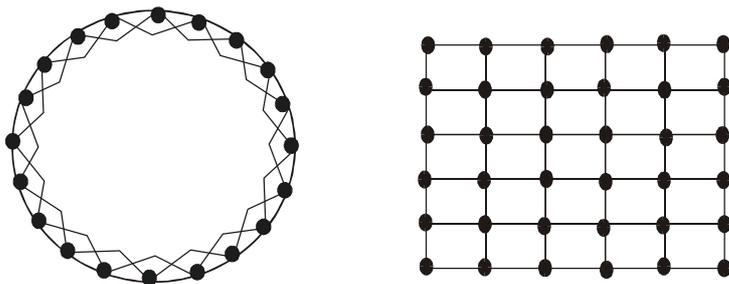


Figura 5: no grafo regular da esquerda tem-se $v=20$ e $k=4$, donde $L=2,89473$ e $C=0,5$. No da direita tem-se um grafo em duas dimensões com $L=4,764$. Para um número suficientemente grande k , C tende para $\frac{3}{4}$.

Num grafo regular, L aumenta com o número de vértices. Por outro lado, L é muito menor em grafos aleatórios - é uma propriedade intuitiva, pois poderão existir 'atalhos' entre quaisquer dois vértices. Temos pois dois tipos de grafos que apresentam certas características próprias e opostas. De um lado, os grafos regulares, que são grafos ordenados que possuem um alto valor de coeficiente de agrupamento e uma grande distância média entre os vértices. Do outro, os grafos aleatórios, que são grafos desordenados que não exibem agrupamento mas que fazem diminuir a distância média entre os vértices.

A questão que se coloca é então a seguinte: existem grafos que retêm ambas as propriedades, isto é, um valor de L da ordem do verificado em grafos aleatórios e um coeficiente de agrupamento da ordem dos grafos regulares? O já célebre modelo de Watts-Strogatz (Watts e Strogatz, 1998) permite responder afirmativamente a essa questão. Duncan Watts e Steve Strogatz propuseram um novo tipo de grafos, o qual exibe uma *transição crítica* entre ordem (grafos regulares) e desordem (grafos aleatórios). Esses grafos são construídos partindo de grafos regulares, mas num certo momento crítico emergem conexões de longo alcance, uma propriedade que, no início da anterior secção, vimos ser emergentes nos grafos aleatórios.

Mais especificamente, o modelo de Watts-Strogatz original parte de um grafo regular com ligações entre um vértice e o seu vértice vizinho e ainda com o vértice vizinho deste último. No caso unidimensional, o número de coordenação ou número de arestas incidentes a cada vértice é pois $k = 4$. De seguida, o grafo é reconectado, isto é, com probabilidade p a extremidade de uma aresta é deslocada para um outro vértice aleatoriamente escolhido. Prova-se então que, para um valor baixo de p , existe uma transição crítica, em que o grafo resultando da operação de reconexão faz diminuir drasticamente a distância média entre cada vértice, preservando no entanto o coeficiente de agrupamento. Um grafo de Watts-Strogatz tem pois um valor de C semelhante aos dos grafos regulares e um valor de L semelhante aos dos grafos aleatórios. Ele faz a transição entre esses dois tipos de grafos extremos.

A figura 6 ilustra a construção de um grafo de Watts-Strogatz com $n=10$, $k=4$ e a probabilidade de reconexão = 0.4

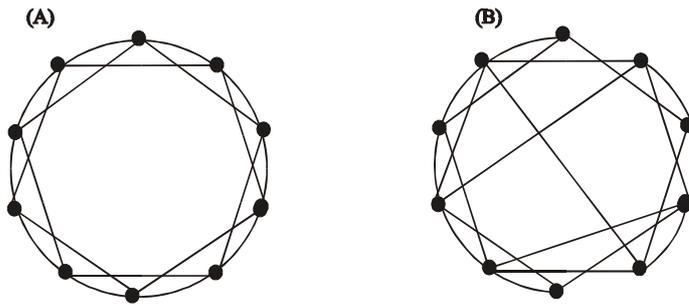


Figura 6.: construção de um grafo de Watts-Strogatz. Em a) tem-se um grafo regular com $n=10$ e $k=4$. Em b), alguns vértices são religados com 3 atalhos. Mesmo após a reconexão, C mantém em média o mesmo valor mas o valor de L baixa.

O interesse do modelo de Watts-Strogatz reside no facto de muitas redes reais verificarem de facto um valor de L da ordem dos grafos aleatórios e um valor de C da ordem dos grafos regulares. Esse tipo de redes são designadas por ‘mundos-pequenos’ (*small-worlds*), e foi o modelo de Watts-Strogatz que efectivamente permitiu iniciar o seu estudo sistemático (cf. Watts, 1999, para uma panorâmica geral).

Os ‘mundos-pequenos’ abundam. Nos anos sessenta, S. Milgram (Milgram, 1967) procedeu a um conjunto de experiências que lhe permitiu conjecturar que, partindo de um certo indivíduo, um qualquer outro indivíduo no mundo poderia ser atingido passando em média por 6 indivíduos intermediários, isto é, a relação ‘conhecido de’ formaria um caminho com uma distância aproximadamente igual a 6. Um outro exemplo popular é a contracenação de actores de cinema. Um dos actores que mais contracenou com outros foi Kevin Bacon. Partindo de um qualquer actor, existem no máximo quatro actores até se atingir um actor que contracenou com K. Bacon. Foram igualmente feitas análises detalhadas da rede eléctrica do oeste nos Estados-Unidos, bem como de certas redes neuronais, verificando-se sempre a propriedade de ‘mundo-pequeno’⁵. Mas um dos exemplos arquetípicos de redes é a Internet, em particular a WORLD WIDE WEB (WWW). E também se provou (Albert, Jeong e Barabási e *al*, 1999a) que a WWW é um ‘mundo-pequeno’. A WWW é um grafo composto por vértices (páginas *web*) e por ligações (*links*) entre as páginas. Ora, apesar de a WWW possuir mais de 1 bilião de páginas, ela é um ‘mundo-pequeno’, com estimativas apontando para o número médio de 19 passos (cliques em *links*) para ir de uma página a qualquer outra (cf. Albert e *al*, 1999a para essa estimativa).

8. Ligações preferenciais e modelo de Barabási

Os grafos que exibem a propriedade ‘mundo-pequeno’ fazem a transição crítica entre os grafos regulares e os grafos desordenados. Eles podem contudo ser englobados na categoria dos grafos aleatórios na medida em que se parte de um número fixo de vértices, os quais são de seguida aleatoriamente reconectados. Tal como sucede nos grafos aleatórios, num grafo de Watts-Strogatz cada vértice tem aproximadamente o mesmo número de ligações. *Mas existem muitas redes que não satisfazem essa condição.* Por exemplo, a WWW expande-se constantemente através da criação de novas páginas *web*, e é mais provável que essas novas páginas tenham ligações para páginas *web* muito conhecidas e já com uma grande densidade de ligações. A WWW é um tipo de rede aberta na qual novos vértices não são conectados aleatoriamente a vértices já existentes. Em vista a dar conta desse facto, A. Barabási, R. Albert e *al* (Barabási, Albert e *al*, 1999b) introduziram um novo tipo de grafos, designados por ‘grafos livres de escala’. Veremos as razões

dessa designação, que abreviamos por BA. É necessário apresentar antes as linhas gerais do modelo de Barabási e Albert.

Nesse modelo o número de vértices não está dado à partida. Parte-se de um pequeno número de vértices, v , e em cada passo temporal cria-se um novo vértice que é ligado a vértices já existentes, com o número de ligações ou arestas \leq que o número de vértices. A probabilidade de um novo vértice ser conectado a um vértice já existente depende da conectividade deste último, isto é, quanto mais conectado um vértice for maior a probabilidade de um novo vértice lhe estar conectado. Trata-se pois de um processo dinâmico de *crescimento* com *ligações preferenciais*: quantas mais ligações um vértice já possui maior a probabilidade de vir a adquirir mais ligações. A figura 7 ilustra o modelo.

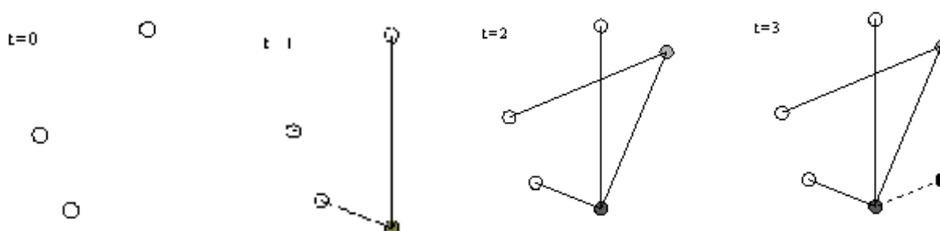


Figura 7.: o modelo BA. Em $t=0$ existem três vértices isolados. Em cada passo temporal adiciona-se um novo vértice, conectado a 2 vértices já existentes, preferencialmente aos vértices com maior conectividade. Assim, em $t=1$ adiciona-se um novo vértice e em $t=2$, existem 5 vértices e 4 arestas. Em $t=3$ é adicionado um novo vértice, ligado aos vértices com maior conectividade (segundo Barabási e *al*, 1999b).

O modelo de BA exhibe propriedades interessantes, sobretudo no que respeita ao estudo da WWW. Desde logo porque um grafo BA também forma um ‘mundo pequeno’. Mais importante é o modelo fornecer um mecanismo susceptível de explicar uma característica que inúmeros dados empíricos atestam: a distribuição de *links* na WWW exhibe *invariância de escala*. Mais exactamente, a probabilidade $P(k)$ de um vértice estar conectado a k outros vértices decresce segundo uma razão constante dada por um expoente λ . Tem-se

$$P(k) \sim k^{-\lambda} \quad (5)$$

Segue-se de (5) que a probabilidade da existência de *sites* apontados por um grande número de *links* é pequena, sendo grande a probabilidade de existir um grande número de *sites* pouco conectados. No entanto, no caso de uma lei de potência como (5), essa pequena probabilidade é estatisticamente significativa e, na realidade, usando robots que iterativamente registam todas as URL's, mostra-se que essa lei se verifica empiricamente e que $\lambda = 2.1$ (Albert e *al*, 1999a).

O expoente λ é análogo aos já anteriormente mencionados expoentes críticos que determinam as transições críticas de fase da matéria. Contudo, contrariamente ao que sucede nesse tipo de transições, não existe aqui um parâmetro externo que controla a transição crítica. Estamos agora no quadro dos fenómenos que exibem *auto-organização crítica*, um tipo de processos que se tornou um verdadeiro quadro transdisciplinar para o pensamento (cf. Bak, 1996). Nesse tipo de fenómenos, o sistema converge espontaneamente para a organização e permanece nesse estado, no qual não existe escala

característica. Mesmo que diversos pormenores tenham de ser modificados (cf. Adamic e Huberman, 1999, Vázquez, 2000), um aspecto do modelo de Barabási consiste em exibir o mecanismo que conduz o sistema para o estado crítico de equilíbrio. Esse mecanismo é o crescimento de vértices e o mecanismo de ligação preferencial.

A existência de uma distribuição de *links* seguindo a forma de (5) na WWW é um excelente exemplo da dialéctica local/global posta em destaque pela teoria dos grafos. A criação de *links* na WWW é um acto essencialmente local. No entanto, a partir dessa miríade de actos locais emerge uma regularidade global, a distribuição $P(k) \sim k^{-\lambda}$. Nesse sentido, os indivíduos contribuem não intencionalmente para a criação de uma ordem global que transcende qualquer um. Trata-se da filosofia geral dos sistemas nos quais os agentes comunicam apenas localmente. Essa comunicação gera efeitos a larga escala impossíveis de serem deduzidos a partir da análise das acções locais do sistema. Em muitos casos (cf. Alves, Machuco Rosa e Antão, 2000), a regularidade global possui mesmo características contrárias ao tipo de acção local seguida. Em geral, emergem estruturas globais que podemos interpretar como possuindo centros. No caso da WWW, emergem *sites* que tenderão a ser cada vez maiores (possuem mais caminhos na sua direcção), e quando maiores são maiores tenderão a ser. A informação tenderá portanto a orientar-se em direcção aos *sites* mais visíveis. Surge de novo o mecanismo de retroacção positiva, o qual tem como consequência inevitável a existência de um pequeno número de *sites* com uma densidade enorme de conexões e um número enorme de *sites* com uma fraca densidade de conexões.

A distribuição $P(k) \sim k^{-\lambda}$ com o expoente $\lambda = 2.1$, empiricamente observada na WWW, é gerada pelo mecanismo de ligação preferencial: quanto mais conectado um *site* é, mais conectado ele tende a ser. Na terminologia de S Dorogovtsev e J. Mendes (Dorogovtsev e Mendes, 2001) é um princípio de popularidade: a popularidade é atractiva. Mas também se pode afirmar que se trata de um princípio de imitação, e que o mecanismo de imitação está subjacente ao modelo de Barabási na medida em que a criação de um novo *link* tenderá a estar orientada para um nó para o qual muitos nós já apontam.

É no entanto claro que o modelo de Barabási não é puramente local, visto supor-se que os novos nós possuem um conhecimento de pelo menos parte da estrutura global da rede. Mesmo se o processo de imitação pode reforçar-se quando os indivíduos que criam os novos nós aderem a uma estrutura global já visível, ele deve no entanto ser inicialmente considerado como um mecanismo local. Isso implica introduzir no modelo de Barabási mecanismos puramente locais que fazem emergir o princípio de ligação preferencial. Noutros termos, trata-se de localizar o princípio de imitação de que o modelo de Barabási dá conta globalmente. É esse o objectivo de dois modelos que mostram definitivamente a importância da imitação local na estrutura global da WWW. Resumimo-los aqui de forma extremamente sucinta.

O primeiro é o modelo de Klinberg e *al* (Klinberg e *al*, 1999), que se baseia explicitamente num princípio de cópia ('random copying mechanism'). O modelo parte da existência de um certo conjunto de nós (páginas *web*) inicialmente pouco ligadas mas todas elas dedicadas a um certo tópico comum. De seguida, alguns utilizadores interessados nesse tópico copiam para as suas próprias páginas ligações existentes nas páginas páginas acabando por criar um grafo densamente conectado. Esse princípio de cópia de ligações já existente noutras páginas *web* consiste literalmente em imitar localmente o que outros já fizeram, mostrando-se que a formalização dessa ideia gera uma distribuição de ligações sem escala característica e que portanto faz emergir o princípio de ligação preferencial (Albert e Barabási, 2001). O segundo modelo foi proposto por A. Vázquez (Vázquez, 2000), e baseai-se na ideia de 'caminhar numa rede', de modo semelhante ao que muitas vezes é feito para encontrar novas referências bibliográficas acerca de um certo tema: parte-se de um certo artigo e seguem-se as referências aí incluídas para descobrir novos artigos. Trata-se de novo da imitação, na

medida em que se ‘copia’ a referência ou percurso que um outro já copiou ou seguiu. Também neste caso se obtém uma distribuição sem escala característica que faz emergir o princípio de ligação preferencial.

9. Conclusão

Para concluir gostaríamos de sublinhar três pontos, o primeiro de natureza epistemológica e os restantes reiterando duas das principais ideias gerais que podem ser extraídas da natureza das redes complexas.

De um ponto de vista epistemológico é importante referir o exacto alcance do mecanismo de imitação tal como ele surge formalizado pelos modelos analisados. Esse mecanismo é extremamente simples, sendo nessa simplicidade que reside o seu poder explicativo. Noutros termos, a única disposição imputada aos indivíduos representados por nós é a imitação, representada por ligações. Os indivíduos são, em certo sentido, reduzidos a autómatos: imitam-se ou não. É preciso realçar de que modo intervém o mecanismo de imitação. Os indivíduos são ‘caixas negras’ cuja única disposição é a imitação, *não* se fazendo qualquer hipótese acerca das causas cognitivas ou biológicas que os levam a imitarem-se. Isso encontra-se bem reflectido nos modelos baseados na teoria dos grafos, os quais abstraem de qualquer consideração acerca desse tipo de causalidade interna. Pode-se ser mais claro comparando os modelos na teoria dos grafos com os modelos tipo redes de *spins*. Nestes últimos, bem como nas redes neuronais, os elementos do sistema possuem certos estados internos (apontam numa ou noutra direcção, por exemplo), representados pelo vector de estado do sistema. Esses estados evoluem num tempo rápido por oposição ao tempo lento de variação do parâmetro *externo* que controla o sistema (cf. Machuco Rosa, 2002 para a distinção fundamental entre tempo rápido e tempo lento em vista à constituição de uma nova ‘filosofia da natureza’). A perspectiva que a teoria dos grafos oferece das redes é algo diferente. Não existem estados internos, pelo que os nós não são ‘analisados’ e o único parâmetro do sistema, a ligação ou não de ligações, *não* é um parâmetro externo, antes sendo a grandeza fundamental da rede – são redes verdadeiramente auto-organizadas. Os modelos baseados na teoria dos grafos são mais *gerais* no exacto sentido matemático desse termo (cf. Machuco Rosa, 1993, capítulo II). Eles realizam de modo pleno o ideal *funcionalista* da ciência: o sistema abstrai e negligencia múltiplas propriedades dos elementos que ele descreve – as quais são causas internas provisoriamente deixadas em suspenso –, podendo de seguida receber múltiplas e equivalentes interpretações semânticas empíricas. Por exemplo, as interacções entre os elementos podem receber diversas e equivalentes interpretações do ponto de vista formal, tendo aqui sido salientado o caso da imitação.

Em segundo lugar, as redes apresentadas baseiam-se na ideia segundo a qual os indivíduos - nós da rede – possuem apenas visão local. Ora, em indivíduos com visão local, o único princípio de acção poderá ser a imitação, pois indivíduos ‘míopes’ são indivíduos com racionalidade limitada e incapazes de prever a consequência a larga escala das suas acções (cf. Axelrod, 1997, para uma perspectiva baseada na simulação computacional de indivíduos com racionalidade limitada). Não apenas o único princípio de acção viável poderá ser a imitação como, viu-se ser esse o caso da adopção de *standards*, ele tem forçosamente de ser a linha de acção seguida. Em ambos os casos, é o princípio clássico da racionalidade baseado em indivíduos que independentemente uns dos outros adequam meios a fins gerando um somatório óptimo de comportamento que é colocado em questão. Ao invés, o princípio de imitação baseado em indivíduos dependentes causa estados ‘colectivização’ global, como sucede nos modelos dos *crashes* bolsistas baseados nos sistemas *spins*, ou então um tipo de ‘colectivização’ específica como o traduzido pela existência de uma lei do sistema sem escala característica, implicando uma forte ‘desigualdade’ entre os nós. É na medida em que explicam os fenómenos de ‘colectivização’, de ‘efervescência

colectiva', de 'ideologia', que a teoria dos fenómenos críticos pode vir a ser um elemento decisivo para as ciências sociais (cf. Machuco Rosa, 2001b).

Finalmente, reafirma-se uma conclusão geral. As redes complexas mostram a ilusão daqueles que nelas procuram encontrar um mecanismo de optimização, o qual poderá conduzir a algo 'melhor'. Na realidade, os indivíduos enredados em redes complexas evoluindo com base em interacções locais não são orientados por factores exteriores e objectivos que determinam globalmente a acção de todos eles. Muitas teorias (como é o caso da teoria neoclássica da economia) mostraram precisamente que apenas na condição de os indivíduos agirem independentemente uns dos outros, em função de uma realidade objectiva a todos exterior, podem ser obtidas certas propriedades de optimização. Mas quando os indivíduos interagem uns com os outros – em particular através da imitação –, o princípio de acção não pode estar determinado por qualquer estado global que podemos afirmar ser um óptimo. Por exemplo, a existência de externalidades em rede determina que não seja uma suposta qualidade intrínseca que leva um produto a impor-se. De modo semelhante, não é uma qualquer qualidade intrínseca de um certo *site* da WWW que o leva a adquirir cada vez mais visibilidade por relação a outros. Contrariamente a algumas ideias essenciais da racionalidade clássica, a imitação aponta para um mecanismo instável que apenas se alimenta de si próprio e é indiferente a factores exógenos e objectivos.

¹ Isso significa que o crescimento do parâmetro que controla a evolução do sistema, a temperatura, segue uma razão geométrica que converge para um ponto fixo instável : $(T_{n+1} - T_n) / (T_n - T_{n-1}) = \lambda$, onde λ é o factor constante de escalamento, factor designado por *expoente crítico*.

² Argumentos disponíveis em <http://www.cato.org/pubs/regulation/reg18n3d.html>

³ Sendo n o número de vértices, a totalidade das ligações possíveis num grafo é igual a $n(n-1)/2$.

⁴ Mais exactamente, o agrupamento que emerge com $c \approx 1$ tem aproximadamente $n^{2/3}$ nós, e com $c > 1$ quase todos os nós passam a pertencer ao agrupamento gigante.

⁵ Na tabela apresentam-se de forma mais sistemática os resultados mencionados no texto. CRG designa o valor que C assumiria num grafo aleatório (resultados extraídos de Watts, 1999).

Rede	N	L	C
K. Bacon	225.226	3.65	0.79
Rede	282	2.65	0.28
Neuronal			
Rede	4941	18.7	0.08
Eléctrica			

Adamic, L., Huberman, B., (1999), 'Technical comment to 'Emergence of Scaling in Random Networks', *Science*, Vol. 286, 15, pp. 509-512.

Réka, A., Jeong, H., Barabási, A., (1999), 'Diameter of the World Wide Web', *Nature*, 401, 130-131.

Albert, R., Barabási, A., (2001), 'Statistical mechanics of complex networks', ArXiv: cond-mat/0106096.

Alves, C., Machuco Rosa, A., Antão, A., N., (2000), 'Distributed Causation and Emergence in Finite Models', *Interact*, <http://www.cecl.pt/interact/index.htm>.

Arthur, W. B., Lane, D., 'Information contagion', *Structural Change and Economic Dynamics*, 4, 1993, 81-104.

Arthur W. B. (1994), *Increasing returns and Path dependence in the Economy*, University of Michigan Press, Ann Arbor.

-
- Arthur, W.B., Durlauf, S., Lane D. (eds). (1997), *The Economy as an Evolving Complex System II*, Addison-Wesley, Reading.
- Axelrod, R., (1997), *The Complexity of Cooperation*, Princeton University Press, NJ.
- Bak, P., (1996), *How Nature Works*, Springer, New York.
- Barabási, A., Réka, A., Jeong. H., (1999), 'Mean-field theory for scale-free random networks', *Physica A*, 272, pp. 173-187.
- Bollabás, B., (1985), *Random Graphs*, Academic Press, London.
- Bunde, A., Havlin, S., (eds), (1996), *Fractals and Disordered Systems*, Springer, Berlin.
- Cont, R. e Bouchaud, J.-P., (1997), 'Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets', ArXiv:cond-mat/12318 v2.
- Dorogovtsev, S., Mendes, (2001), J., 'Evolution of Random Networks', ArXiv:cond-mat/01106144v1.
- Erdos, P., Renyi, A., (1960), 'On the Evolution of Random Graphs', *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5, pp. 17-61.
- Fisher. M., (1983), *Scaling, Universality and Renormalization Group Theory*, Springer, Berlin
- Kaizoji, T., (2000), 'Speculative bubbles and crashes in stock markets: an interacting-agent model of speculative activity', *Physica A*, 287, pp. 493-506.
- Keinberg e al, (1999), 'The Web as a graph: measurements, methods, and models', *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*.
- Iori, G., (2000), 'A microsimulation of traders activity in the stock market: the role of heterogeneity, agent's interactions and trade frictions', e-print adap-org/9905005.
- Hopfield, J., (1982), 'Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities', *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 79, pp. 2554-2558.
- Johansen A., Sornette, D., & Ledoit, O., (1999), 'Predicting Financial Crashes Using Discrete Scale Invariance', *J. of Risk*, Vol 1, 4, pp. 5-32.
- Machuco Rosa, A., 1993, *Le Concept de Continuité chez C.S Peirce*, Thèse de Doctorat, E.H.E.S.S., Paris.
- Machuco Rosa, (1998), *Internet- Uma História*, E.U. Lusófonas, Lisboa.
- Machuco Rosa, (1999), 'Tecnologias da Informação - Do Centrado ao Acentrado', *Revista de Comunicação e Linguagens*, 25, pp. 193-210.
- Machuco Rosa, A., (2001a), 'Modelos Formais de Comunicação', *Caleidoscópio*, 1, pp. 156-174.
- Machuco Rosa, A, (2001b), *Dos Sistemas Centrados aos Sistemas Acentrados*, Vega, Lisboa.
- Machuco Rosa, A, (2002), 'Complex Systems, Imitation and Mythical Explanations', submitted to *Journal of Mimesis, Culture and Violence*.
- Milgram, S., (1967), 'The small world problem', *Psychology Today*, 1, 61.
- Nadal, J.-P., (1993), *Réseaux de Neurones*, A. Colin, Paris.
- Rosenstiehl, P., (1988) 'Rede', *Enciclopédia Einaudi*, Vol. 13 IN-CM, Lisboa, pp. 228-246. Ed. org.: 1982.
- Vasques, A., (2000), 'Knowing a network by walking on it: emergence of scaling', ArXiv:cond-mat/0006132 v2.
- Watts, D., e Strogatz, S., (1998), 'Collective dynamics of small-world networks', *Nature*, 393, pp. 440-442.
- Watts, D., (1999), *Small Worlds - The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, Princeton.