

INTERPRETAÇÃO NUMÉRICA DE SONDAgens ELÉCTRICAS VERTICAIS

Abílio A.T. Cavalheiro

J.A.C. da Rocha e Silva

Alexandre J.M. Leite

Resumo

O Departamento de Minas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto dispõe de software desenvolvido para interpretar sondagens eléctricas verticais; recentemente foi incumbido pela Reitoria da Universidade do Porto da realização do estudo geoelectrico dos terrenos do Polo2, situados na Asprela; neste trabalho dá-se conta dos algoritmos utilizados no apoio à interpretação das sondagens eléctricas realizadas, bem como exemplos de interpretação de alguns casos mais significativos. O algoritmo de inversão utilizado conjuga o filtro linear de Ghosh que vulgarmente é utilizado em substituição dos antigos ábacos de curvas padrão, com o método numérico de minimização de Marquardt, que se revela particularmente adequado pela sua rapidez de convergência em problemas que envolvam mínimos quadrados.

1 Obtenção de curvas padrão pelo método do filtro linear de Ghosh

Não se pretende neste breve artigo proceder a uma explanação em profundidade dos formalismos e métodos matemáticos que estão na base dos algoritmos desenvolvidos e utilizados para interpretar os dados de campo. Tentaremos referir o conjunto de expressões que conduzem directamente à obtenção de um dos algoritmos que permite obter curvas padrão para uma determinada configuração : o método da filtragem linear de Ghosh.

Passemos então a rever algumas definições necessárias ao estabelecimento das expressões que representam a propagação da corrente eléctrica no subsolo.

O gradiente é o campo vectorial que é associado a um campo escalar:

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k$$

De modo análogo se associamos a um campo vectorial A o correspondente campo escalar da sua divergência :

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

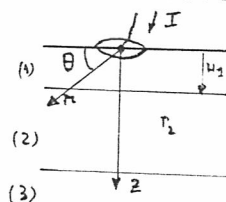
O potencial gerado pela injeção de corrente eléctrica deve

satisfazer a equação de Laplace que se traduz por:

$$\text{div}(\text{grad } V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

O caso que nos interessa consiste no campo eléctrico criado pela passagem da corrente eléctrica entre dois electrodos que se introduzem na superfície do terreno; considerando um sistema de coordenadas cilíndricas com origem no ponto onde está a se injectada corrente, sendo z a cota medida na vertical desse ponto, r o raio polar medido no plano vertical que une os dois electrodos de corrente e θ o respectivo ângulo polar, a equação de Laplace (1) passa a escrever-se no novo referencial cilíndrico:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$



No caso particular que nos interessa, devido à simetria do campo eléctrico em relação aos electrodos de corrente, a equação de Laplace aparece simplificada em coordenadas cilíndricas, já que as derivadas em ordem a θ se anulam.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Obtém-se assim uma condição diferencial a que deve obedecer $V(r,z)$; a solução geral que se obtém para (3) é dada por uma combinação linear das suas soluções separadas, de acordo com o integral seguinte:

$$V = \int_0^\infty (A(l)e^{-lz} + B(l)e^{lz}) J_0(lr) dl \quad (4)$$

J_0 - função de primeira espécie de ordem zero de Bessel
 $A(l)$, $B(l)$ - funções arbitrárias de l , que variam consoante as condições de fronteira de cada caso concreto

É vantajoso apresentar (4) numa forma que contenha, como termo separado, a parcela que corresponde ao potencial gerado por uma corrente I num terreno homogêneo que tenha a resistividade ρ_1 da primeira camada:

$$V = \frac{\Gamma_1 l}{2\pi\sqrt{r^2+z^2}} \quad (5)$$

A equação (5) pode-se escrever de uma forma mais conveniente recorrendo ao integral de Lipschitz, que decorre da teoria das funções de Bessel:

$$\int_0^\infty e^{-lz} J_0(lr) dl = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad (6)$$

Recorrendo a (6) podemos escrever (5) na forma:

$$V = \frac{\Gamma_1 l}{2\pi} \int_0^\infty e^{-lz} J_0(lr) dl \quad (7)$$

Finalmente (4) pode passar a escrever-se da forma pretendida, isto é, numa forma que destaque a expressão do campo na primeira camada suposta homogênea:

$$V = \frac{\Gamma_1 l}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-lz} + \Theta(l)e^{-lz} + X(l)e^{+lz}] J_0(lr) dl \quad (8)$$

em que $\Theta(l)$ e $X(l)$ são funções arbitrárias de l , que não são necessariamente iguais nos diferentes estratos pelo que a solução (8) varia, no caso geral, de estrato para estrato; essa variação é evidenciada em (9):

$$V = \frac{\Gamma_1 l}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-lz} + \Theta_i(l)e^{-lz} + X_i(l)e^{+lz}] J_0(r) dl \quad (9)$$

dizendo i respeito aos diferentes estratos.

Esta solução geral (9) que acabamos de obter ainda não sofreu as restrições que resultam das condições de fronteira que passamos a enunciar:

F1) O potencial deve ser uma função contínua em cada plano-fronteira (plano que separa as camadas)

F2) Em cada plano fronteira a componente vertical da densidade de corrente deve ser contínua

F3) No plano da superfície (plano em contacto com o ar) a componente vertical da densidade de corrente e a da intensidade do campo eléctrico devem anular-se em todo o lado excepto numa vizinhança infinitesimal do ponto de injeção

F4) Junto ao ponto de injeção a expressão do potencial deve aproximar-se da de um terreno homogêneo, seja $\Gamma_1/2\pi\sqrt{r^2+z^2}$

F5) O potencial deve tender para zero quando a profundidade tende para infinito

Prova-se (Koefoed pg 23 e seguintes) que as mencionadas condições físicas que impomos nas fronteiras originam as seguintes condições analíticas, respectivamente:

$$(F1) \quad \Theta_i(l)e^{-lh} + X_i(l)e^{lh} = \Theta_{i+1}(l)e^{-lh} + X_{i+1}(l)e^{lh}$$

$$(F2) \quad \frac{1}{\Gamma_i} [\{1 + \Theta_i(l)\} e^{-lh} - X_i(l) e^{lh}] = \frac{1}{\Gamma_{i+1}} [\{1 + \Theta_{i+1}(l)\} e^{-lh} - X_{i+1}(l) e^{lh}]$$

$$(F3) \quad \Theta_1(l) = X_1(l)$$

(F4) Não implica nova expressão analítica

$$(F5) \quad X_n(l) = 0 \text{ (último estrato)}$$

A imposição simultânea das condições de fronteira permite obter um sistema de $2n$ equações lineares a $2n$ funções incógnitas $\Theta(l)$ e $X(l)$; esse sistema pode ser resolvido obtendo-se qualquer função $\Theta_i(l)$ e $X_i(l)$, e em particular $\Theta_1(l)$ e $X_1(l)$, que são as duas funções incógnitas que mais nos interessam, visto darem solução para a determinação do potencial à superfície do terreno; resolvendo o referido sistema para o caso de dois estratos obtemos a expressão:

$$X_1(l) = \Theta_1(l) = \frac{k_1 e^{-2lh_1}}{1 - k_1 e^{-2lh_1}} \quad (10)$$

e para o caso de dois estratos a expressão:

$$X_1(l) = \Theta_1(l) = \frac{k_1 e^{-2lh_1} + k_2 e^{-2lh_2}}{1 + k_1 k_2 e^{-l(h_2 - h_1)} - k_1 e^{-2lh_1} - k_2 e^{-2lh_2}} \quad (11)$$

em (10) e (11) k_i representa o coeficiente de reflexão:

$$k_i = \frac{\Gamma_{i+1} - \Gamma_i}{\Gamma_{i+1} + \Gamma_i}$$

A expressão que nos permite calcular o potencial na primeira camada será dado pelo integral (4), após ter sofrido as restrições impostas pelas condições fronteiras; assim obtemos para esse estrato a seguinte expressão para o potencial:

$$V = \frac{\Gamma_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + 2\theta_1(l)] J_0(lr) dl \quad (12)$$

V - potencial num ponto da superfície
 I - intensidade da corrente injectada no terreno
 Γ_1 - resistividade da camada superficial
 l - variável de integração
 $\theta_1(l)$ - função, por vezes designada função nuclear (kernel function) que depende das alturas h_i , bem como das resistividades Γ_i .

A expressão (12) costuma ser apresentada de uma forma mais compacta, fazendo

$K(l) = 1 + 2\theta_1(l)$ aparecendo a expressão do potencial na forma:

$$V = \frac{\Gamma_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} K(l) J_0(lr) dl \quad (13)$$

$K(l)$ - função nuclear de Slichter (kernel de Slichter)
 $J_0(lr)$ - função nuclear de Stefanescu (kernel de Stefanescu)

A equação (13) tem sido resolvida, dada uma determinada hipotética configuração, por diversos métodos ao longo dos tempos, sendo conhecidos catálogos de curvas padrão desde 1933; a solução de (13) para uma dada configuração electrodica e para uma determinada configuração do terreno, isto é, à determinação das curvas teóricas que correspondem a uma dada configuração dá-se o nome de problema directo; o problema inverso consiste em, dadas as medidas de campo, obter as resistividades e as espessuras da formação que foi sondada.

Partindo das condições de fronteira (F1), adicionando e^{-lh} a ambos os membros e dividindo ambos os membros da igualdade pelos

correspondentes da igualdade (F2), obtêm-se, após algumas simplificações a seguinte relação recorrente de Pekeris:

$$K_i = [K_{i+1} + P_i \tanh(lt_i)] / [P_i + K_{i+1} \tanh(lt_i)] \quad (14)$$

Com

$$K_i = \frac{1 + \theta_i(1) + X_i(1)e^{+2lh_i-1}}{1 + \theta_i(1) - X_i(1)e^{+2lh_i-1}}$$

$$P_i = \rho_i / \rho_{i+1}$$

t_i - espessura da camada i

A relação de Pekeris (14) permite obter com toda a generalidade o Kernel de Slichter para uma determinada configuração de terreno; para isso basta notar que para o estrato mais profundo, devido à condição fronteira (F5) vem

$$K_n = 1 \quad (15)$$

A partir de (15) podemos obter por (14) K_{n-1} e, aplicando sucessivas vezes a relação recorrente, obter o kernel de Slichter da primeira camada K_1 . De notar que no plano físico a relação de Pekeris corresponde a ir-se adicionando um estrato de baixo para cima e, simultaneamente, ir-se deslocando o electrodo de corrente para a superfície do novo estrato que acabou de ser adicionado.

Koefoed introduziu o conceito de transformada resistiva T_i que se define por

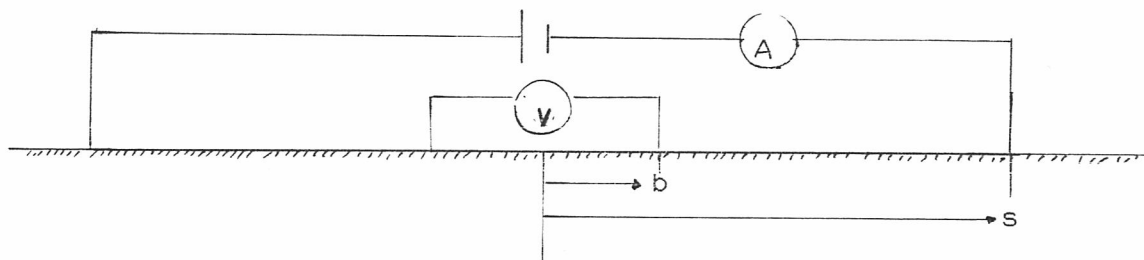
$$T_i = \rho_i K_i \quad (16)$$

A relação de Pekeris passa a escrever-se em termos de transformada resistiva:

$$T_i = [T_{i+1} + \rho_i \tanh(lt_i)] / [1 + T_{i+1} \tanh(lt_i) / \rho_i] \quad (17)$$

A expressão do potencial tem vindo a reflectir as sucessivas restrições que lhe vamos impondo; primeiro foram as condições de fronteira para terrenos de estratos horizontais; depois as simplificações que resultam do facto de só estarmos interessados no kernel do primeiro estrato; a próxima restrição que podemos impor será a que resulta da utilização de uma determinada configuração electrodica; no caso que nos interessa utilizamos a configuração de Schlumberger que, como se sabe, é uma configuração linear simétrica, estando os electrodos de potencial na parte interior e os de corrente na parte exterior, de acordo

com a figura seguinte



Conforme se sabe os dados de campo costumam ser tratados de forma a transformar a resistência equivalente em resistividade aparente que corresponde à resistividade que um terreno homogêneo deverá ter para apresentar, para uma dada configuração dos electrodos, a mesma diferença de tensão nos electrodos de potencial; facilmente se obtém a expressão (18) para resistividade aparente no caso da configuração de Schlumberger, na hipótese de se desprezar a distância b na presença de s ; esta hipótese equivale a considerar a distância entre electrodos de potencial como sendo infinitesimal.

$$\Gamma_{apSch} = \Gamma_1 + s^2 \int_0^{\infty} [T(l) - \Gamma_1] J_1(ls) l dl \quad (18)$$

Além disso é boa norma de trabalho colher medidas de resistividade aparente escolhendo uma progressão geométrica da abscissa no terreno; esta última condição leva-nos a adoptar a seguinte transformação logarítmica para as variáveis s e l de (14):

$$\begin{aligned} x &= \log_e(s) \\ y &= \log_e(1/l) = -\log_e(l) \end{aligned} \quad (19)$$

Adoptando a notação $2s=2e^x$ para a distância entre electrodos de corrente, no caso da configuração de Schlumberger, obtemos a seguinte expressão para a resistividade aparente:

$$\Gamma_{apSch} = \Gamma_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} [T(y) - \Gamma_1] J_1(e^{x-y}) e^{2(x-y)} dy \quad (20)$$

O método de cálculo de (20) que utilizamos no presente trabalho pertence aos métodos designados por filtragem linear e deve-se a Ghosh. Em primeiro lugar deve-se referir que os dados de campo correspondem a uma amostragem feita sobre uma curva; a condição que se deve verificar para ser reconstituída o sinal $T(y)$ inicial é que o intervalo de amostragem da função seja

inferior a metade do período correspondente aos sinais de maior frequência, ou o que é o mesmo, que a transformada de Fourier do sinal de entrada seja nula para os valores de frequências superiores $1/2Dy$, sendo Dy o intervalo de amostragem escolhido. Verificada esta condição a teoria da filtragem linear garante-nos que a função original pode ser reconstituída desde que se substitua cada valor amostral por um seno cardinal com período $2Dy$ centrado no valor de cada amostra; este facto traduz-se pela expressão:

$$T(y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} T(y_0 + jDy) \frac{\sin[\pi(y - y_0 - jDy)/Dy]}{\pi(y - y_0 - jDy)/Dy} \quad (21)$$

Embora as curvas medidas no campo apresentem um espectro com frequências não nulas acima da frequência crítica $1/2Dy$, na prática revela-se vantajoso não entrar com essas frequências visto elas normalmente corresponderem a ruídos da medida. O método da filtragem linear consiste em obter-se cada ponto da curva de resistividade aparente como uma combinação linear (que é dada pelos coeficientes do filtro) da transformada resistiva. Isto é

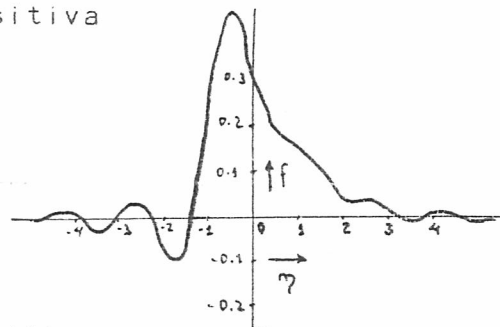
$$\Gamma_{ap}(x_0) = \sum_j f_j T(y_0 - jDy) \quad (22)$$

f_j - coeficientes do filtro linear

x_0 - abcissa do ponto a que corresponde uma dada resistividade aparente

y_0 - abcissa do primeiro ponto da transformada resistiva cujo valor é maior ou igual a x_0

T - valores da transformada resistiva que se podem obter por exemplo usando a relação recorrente de Pekeris da transformada resistiva



O aspecto típico de um filtro aparece na figura anterior; em abcissa é representado o índice j e em ordenada o valor correspondente de f_j . A notação utilizada em (22) deve ser usada segundo a regra:

- os coeficientes do filtro com índice zero ou negativo devem ser multiplicados pelos valores da transformada resistiva que ficam à direita do ponto que está a ser calculado; estes

coeficientes do filtro são designados por coeficientes preditores - os coeficientes do filtro, de índice positivo, devem ser multiplicados pelos valores da transformada resistiva que precedem (estão à esquerda) o ponto cuja resistividade aparente está a ser determinada.

O programa em Pascal, que listamos em anexo, permite calcular para uma dada configuração do terreno, os valores da resistividade aparente numa sucessão de afastamentos inter-electródicos distanciados entre si segundo uma progressão geométrica de raiz $\exp(\ln(10)/8)$ cujo primeiro termo é a abcissa inicial, isto é, existem oito leituras por década da abcissa.

2. O algoritmo de minimização

De posse de um modelo que nos gera curvas de resistividade aparente a partir de $2k-1$ parâmetros estruturais (sendo k o número camadas a ajustar), pretendemos minimizar o desvio que essa curva apresenta em relação ao caso real. Se $y(i)$ representar o valor medido da resistividade aparente para a distância inter-electródica i (expressa em metros) e sendo o modelo $\phi(x,i)$ dependente dessa mesma distância e de x (matriz vector dos parâmetros estruturais) a nossa tarefa resume-se a minimizar globalmente, e em relação aos parâmetros os resíduos

$$f_i(x) = y(i) - \phi(i, x) \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (23)$$

sendo: $\{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n=2k-1$), o vector dos parâmetros estruturais
 $\{y\} = \{y_1, \dots, y_m\}$ o conjunto de valores de campo

Por razões várias, que seria ocioso mencionar aqui, para fins de minimização, é habitual agrupar estes resíduos sob a forma de somatório das suas potências quadradas, ou seja,

$$S(x) = \sum_{i=1}^m [f_i(x)]^2 \quad (24)$$

que passará a constituir a nossa função objectivo. Note-se que, caso vertente, ela é não-linear e continuamente derivável em ordem a parâmetros, como se retira de (20), bastando para o efeito notar que o kernel de (20) é um quociente de exponenciais, cujas expressões, para o caso de um e dois estratos, foram escritas em (10) e (11), respectivamente. A condição primeira para que o modelo possua validade é que o valor de $\|f(x)\|$, tomado no mínimo, seja pequeno e, ainda, que n , o número de

leitura de campo, seja muito maior do que o número de resíduos m . Se esta última condição se não cumprir, corre-se o risco de tomar como válidas interpretações perfeitamente arbitrárias.

Estamos perante um caso de minimização de uma função escalar da variável vectorial, definida num espaço n -dimensional. Então é condição necessária e suficiente para que exista um seu mínimo x^* que se cumpram as seguintes condições:

1. O gradiente de S deve anular-se no ponto de mínimo

$$g(x^*) = 0, \quad (25)$$

o que é o mesmo que dizer que x^* é um ponto singular;

2. A Hesseana de S é definida positiva no ponto de mínimo. Prova-se que é possível definir em torno do mínimo dessa função uma vizinhança, mais ou menos lata (consoante as características de "suavidade" da função), onde é legítimo proceder à sua aproximação através de uma função quadrática. Tal se consegue, muito simplesmente tomando os três primeiros termos do seu desenvolvimento em série de Taylor,

$$S(x+p) = S(x) + g(x)^T \cdot p(x) + 1/2 p^T \cdot H(x) \cdot p \quad (26)$$

em que x é o ponto do espaço n -dimensional onde estamos a considerar a função; p , é o passo de iteração, que se supõe tomado em direcção ao mínimo; g e H representam respectivamente, o gradiente e a hesseana de S tomados no ponto x .

Formulando esta função quadrática (26) em função do seu passo de iteração p , verifica-se que o mínimo do seu segundo membro se obtém para um valor que minimize a função quadrática seguinte

$$r(p) = g(x)^T \cdot p + 1/2 p^T \cdot H(x) \cdot p(x)^T \quad (27)$$

Ora, prova-se que as condições necessárias e suficientes atrás enunciadas para a existência de mínimo, correspondem a afirmar, no caso de uma função quadrática, que

$$H(x) \cdot p - g(x) \quad (28)$$

com a Hesseana definida positiva.

As soluções deste sistema linear correspondem, portanto,

passo único necessário para chegar desde o ponto onde tomamos a função até ao seu mínimo, desde que o modelo quadrático que adoptamos represente, sem erro algum, a nossa função dos mínimos quadrados. A direcção dada pelo vector solução de (26), dá-se o nome de direcção de Newton.

Como este caso é bem pouco provável, no caso mais geral, precisamos de encontrar um processo iterativo que nos conduza ao mínimo. Felizmente que, numa vizinhança restrita do mínimo x^* em que a Hesseana seja definida positiva, garante-se que a direcção de Newton é uma direcção de decrescimento da função, visto que

$$g^T \cdot p = -g^T \cdot H^{-1} \cdot g < 0 \quad (29)$$

Por isso é sempre possível atingir o mínimo, resolvendo iterativamente o sistema

$$p_{k+1} = -H^{-1}_k \cdot g_k \quad (30)$$

utilizando a solução de cada iteração para definir o ponto de partida para a iteração seguinte (condição de Kantorovitch). Qualquer que seja a função não-linear que tenhamos entre mãos, o método de Newton converge a um ritmo quadrático para o mínimo, para pontos de partida que se situem na vizinhança atrás definida, o que o torna um método extremamente atraente para processos de minimização.

No nosso caso particular, em que a função a minimizar é constituída por um somatório de quadrados, o gradiente e a hesseana da função têm, respectivamente, as seguintes formas particulares :

$$g(x_k) = J(x_k)^T \cdot f(x_k) \quad (31)$$

$$H(x_k) = J(x_k)^T \cdot J(x_k) + Q(x_k), \quad (32)$$

$$\text{sendo } Q(x_k) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot G_i(x_k). \quad (33)$$

Vê-se, portanto, que a matriz hesseana (32) de uma função somatório de mínimos quadrados consiste numa combinação de informação de 1ª e de 2ª ordem. Sabe-se que (Gill, Murray & Wright, 1981 pp.134), podemos representar a hesseana pelo seu termo de 1ª ordem desde que os valores dos resíduos sejam suficientemente pequenos, ou seja, tenham como limite superior o maior valor próprio de $J(x^*)^T \cdot J(x^*)$. Sendo, substituindo em (28) H e Q dados por (32) e (33), começamos por obter

$$(J^T J + Q) \cdot p = -J^T \cdot f \quad (34)$$

Se $\|f\| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x^*$, a matriz $Q \rightarrow 0$ e, então a direcção de Newton é aproximada pelo sistema

$$J^T J \cdot p = -J^T \cdot f,$$

ou, sob a forma iterativa:

$$(J(x_k)^T J(x_k)) \cdot p = -J^T \cdot f \quad (35)$$

em que x_k , é o ponto corrente no processo iterativo.

O vector solução da equação anterior é comumente designado por direcção de Gauss-Newton e é único se J_k é não-singular.

Verifica-se assim que, num processo de minimização de uma função somatório de mínimos quadrados, numa vizinhança do mínimo em que a hesseana seja definida positiva e $\|f\|$ seja, no máximo, da ordem de grandeza do maior valor próprio de $J^T J$, se garante a existência de processo iterativo que converge para o mínimo a uma velocidade quadrática, apesar de apenas se utilizar derivadas de primeira ordem no cálculo do vector direcção de Gauss-Newton.

Como garantir a chegada a tal vizinhança? Ora, independentemente da distância ao mínimo da função, $J^T J$ é definida positiva e, aliás, simétrica, se J for não-singular (Ortega e Rheinboldt, 1970, pp.38). Portanto, a direcção definida por (direcção de Gauss-Newton) na equação (35), é mesmo uma direcção de descida, aproximando-se da direcção de Newton perto do mínimo assegurando aí uma convergência quadrática.

Contudo existem ainda três importantes questões a ter em consideração na resolução do sistema (35), a saber:

1. Não há garantia alguma de que durante uma qualquer iteração se não verifique a singularidade de $J^T J$; se assim for a solução de (35) é indeterminada (problema da singularidade).

2. É fundamental que $J^T J$ possua uma condição limitada, sob pena de a coincidência da direcção de Gauss-Newton com a direcção de descida não passar de uma situação fortuita (problema do condicionamento).

3. Não se pode afirmar nunca que um passo dado pelo

método iterativo numa direcção de descida corresponder efectivamente a uma aproximação do mínimo, dado que se passo fôr excessivamente longo podemos estar a subir (no valor da função) pela "encosta fronteira" acima. E, portanto fundamental, um controle efectivo sobre o comprimento do passo do processo iterativo.

Estes três problemas foram resolvidos com uma elegância espantosa por Marquardt (1963), no seguimento de anterior trabalho de Levenberg (1944). A essência do método consiste em substituir a matriz definidora da direcção de descida $J^T J$ por uma outra $J^T J + \lambda I$, com λ real e não negativo, sendo I a matriz identidade de ordem n .

Dado que os valores próprios de uma matriz A são as raízes da equação característica

$$A - \theta I = 0$$

constata-se imediatamente que os valores próprios de $J^T J + \lambda I$ são os valores próprios de $J^T J$, adicionados de λ .

Então, mesmo que J seja singular, existe pelo menos um $\lambda \geq 0$ tal que todos os valores próprios de $J^T J + \lambda I$ são positivos, ou seja, a matriz é definida positiva.

Por outro lado, segundo Fox (1964, pg 142), uma medida da condição da matriz é constituída pelo quociente entre os seu maior e menor valores próprios e, assim, o real λ controla a condição da matriz definidora da direcção de descida, que será tanto menor quanto maior fôr λ .

Por último, λ controla também o passo dado na direcção de descida, variando inversamente com ele.

Deste modo, a equação de iteração escreve-se agora

$$p_{k+1} - p_k = -(J_k^T J_k + \lambda I)^{-1} J_k^T f_k$$

Note-se que quando $\lambda \rightarrow 0$, a equação anterior reduz-se ao método de Gauss-Newton, enquanto que quando $\lambda \rightarrow \infty$, obtemos a equação da descida segundo o gradiente local, ou seja,

$$p_{k+1} = -\lambda g_k$$

O algoritmo utilizado corresponde a uma versão modificada do proposto por Nash (1979, pp.175), onde se utiliza, para a resolução do sistema de equações lineares (28) a decomposição ortogonal pelo método de Choleski, o que possui a vantagem de não introduzir erros numéricos adicionais proporcionados pelo

mau condicionamento da matriz $J^T J$. Quando numa qualquer iteração o algoritmo se vê confrontado com um problema de singularidade, não se efectua a resolução do sistema e decuplica-se o valor de λ tantas vezes quantas as necessárias para ultrapassar o problema, isto é, a "zona perigosa".

A tentativa do ajuste é, sempre que possível, no sentido aproximar o método do de Gauss-Newton ($\lambda \rightarrow \infty$), mas, se este processo não levar momentaneamente a resultados mais baixos, aumenta-se λ , de modo que a descida se aproxime do gradiente local. Mal o valor da função objectivo diminuir, passa-se de novo a decrementar λ dividindo-o por 10 de molde a aumentar a velocidade de convergência, por aumento do peso do método de Gauss-Newton.

O ajuste possui um critério de paragem do tipo "força-bruta" dado que só pára quando, na definição do passo de progressão, se atinge a precisão do computador em que está a correr. Tal critério é perfeitamente divergente do que foi utilizado por Espain (1984, pp131,139), mas justifica-se por questões pragmáticas que não cabe aqui considerar.

Na sua presente configuração o algoritmo tem tido comportamento excelente dado que, sob solicitações muito diversas sempre mostrou convergir de um modo rápido e seguro para um mínimo.

Como é compreensível, quer com este método de minimização quer com qualquer outro, não existe a mínima garantia de que o ponto encontrado não corresponda a um mínimo local. Para este problema não dispomos de solução e, na verdade, no caso presente, deparamos com várias situações em que o ponto detectado não era o mínimo absoluto. Este senão foi contornado lançando uma nova corrida a partir de um ponto inicial diferente.

3. Descrição sucinta do software

Os métodos do filtro linear de Gosh e de Levenberg-Marquardt descritos atrás, foram, para efeitos de trabalho, englobados num único algoritmo de ajuste escrito em Pascal a que se deu o nome de SEVMARQ. Constitui a peça de software mais importante de um conjunto de programas intercomunicantes, de que também fazem parte SEVGRAF, VISTA1, WRITEPILHA, PILHA.BAT (estes dois últimos pequenos programas devem-se a João M. Valente da Fonseca).

O processo de interpretação de uma sondagem isolada tem o seguinte encadeamento (Fig 1):

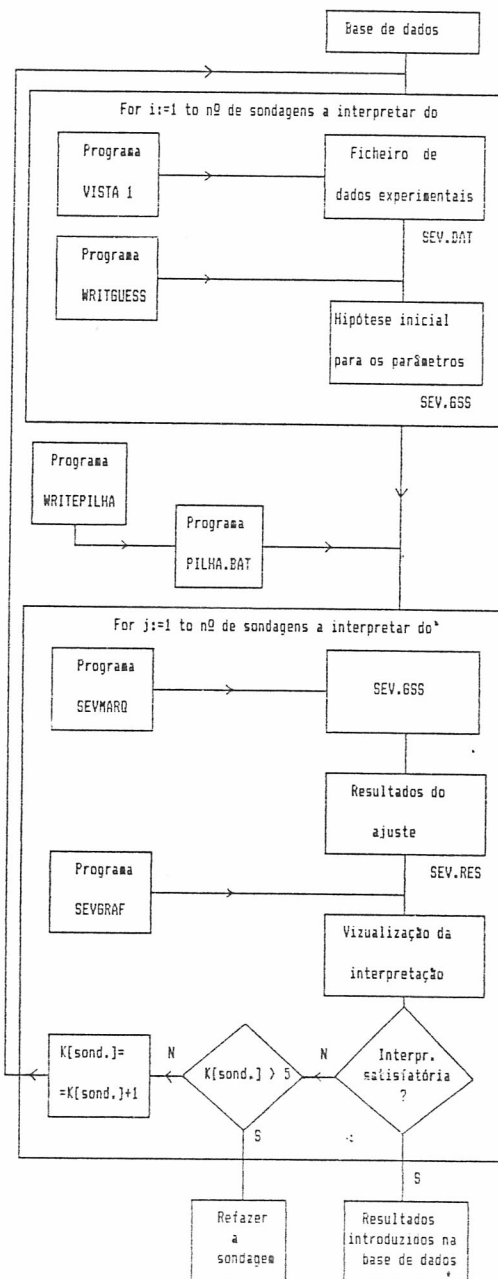


figura 1

1. Criação do ficheiro de dados experimentais (SEV.DAT), a partir de uma base de dados;
2. Visualização do gráfico log-log que os dados proporcionam, através de VISTA1, o que permite fazer uma avaliação prévia do ponto de partida do algoritmo de ajuste;
3. Criação do ficheiro que contém a hipótese inicial para os parâmetros (SEV.GSS);
4. Com SEV.DAT e SEV.GSS como ficheiros de entrada, lança-se uma corrida de SEVMARQ, que terminará quando se cumprir o critério de paragem (precisão da máquina), o que gerará um ficheiro de resultados de interpretação (SEV.RES);
5. Visualização da qualidade do ajuste através do programa gráfico SEVGRAF, que recebe os dados de SEV.RES;
6. Se se puder considerar o ajuste como satisfatório (em particular, se o erro percentual médio, por medida, for igual ou inferior a 5%, valor que se revelou aceitável em presença dos erros de medida, introduzem-se os parâmetros estruturais (nº de camadas, resistividades e possanças) na base de dados. Caso não nos possamos dar por satisfeitos com a qualidade do ajuste, recomeça-se o processo, partindo de uma nova hipótese inicial para os parâmetros.

Regra geral as sondagens não são interpretadas isoladamente mas sim em conjuntos de quinze a vinte e cinco o que permite que as corridas sejam feitas a horas mortas, recolhendo-se os frutos do trabalho do computador na manhã seguinte, com a consequente economia de tempo do operador. Deste modo, a intervenção inteligente (presume-se que do operador) fica conscrita à análise prévia dos gráficos de sondagens e consequente escolha dos pontos de partida para os parâmetros estruturais e, ainda, à tarefa de decidir se o ajuste tem qualidade suficiente.

Não se pense contudo que não foram encontradas dificuldades.

Como já ficou dito atrás, foi várias vezes detectada a presença de mínimos locais para onde o algoritmo de minimização inadvertidamente escorregava, problema só resolúvel com uma nova corrida apoiada numa nova escolha do ponto de partida (Figs. 2 e 3). Acontece ainda que um ajuste de boa qualidade sob o ponto de vista numérico não o é, necessariamente, sob o ponto de vista geológico e geofísico. Exemplo disso, é a ocorrência de ajustes com baixo erro numérico que propõem a presença de camadas com possanças centimétricas a profundidades onde elas são consabidamente indetectáveis (Fig. 4).

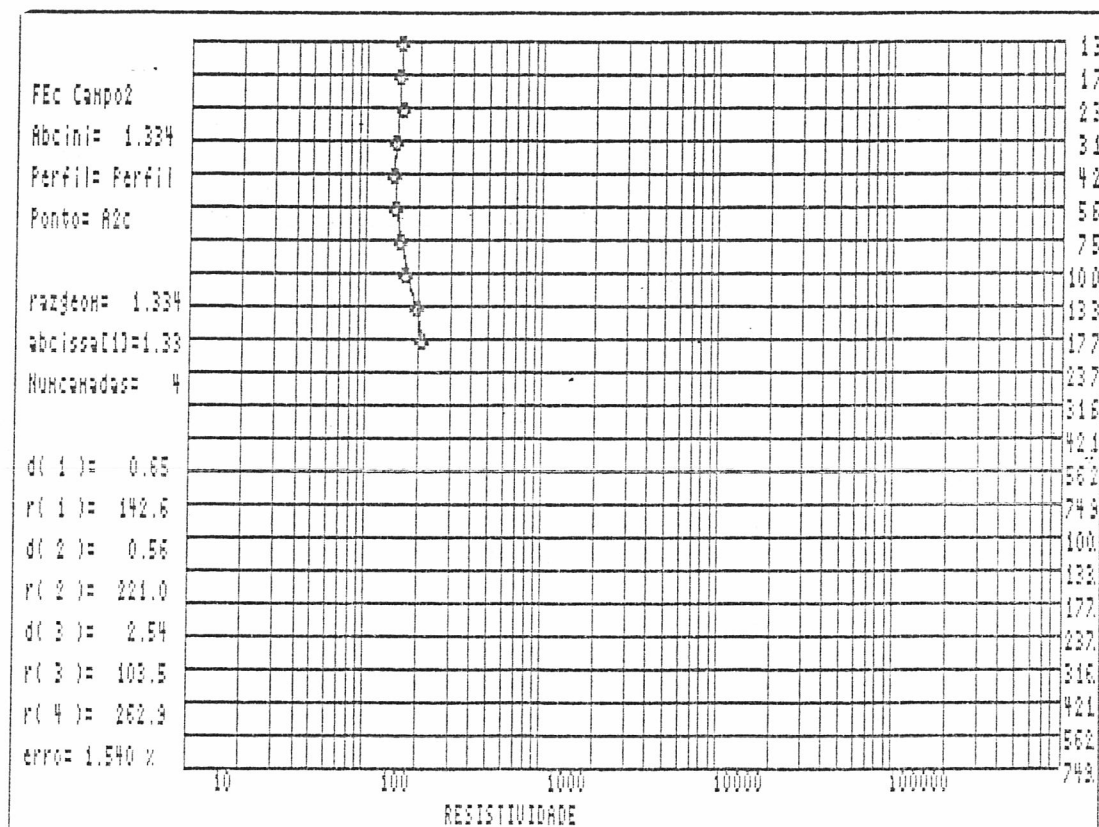


figura 2

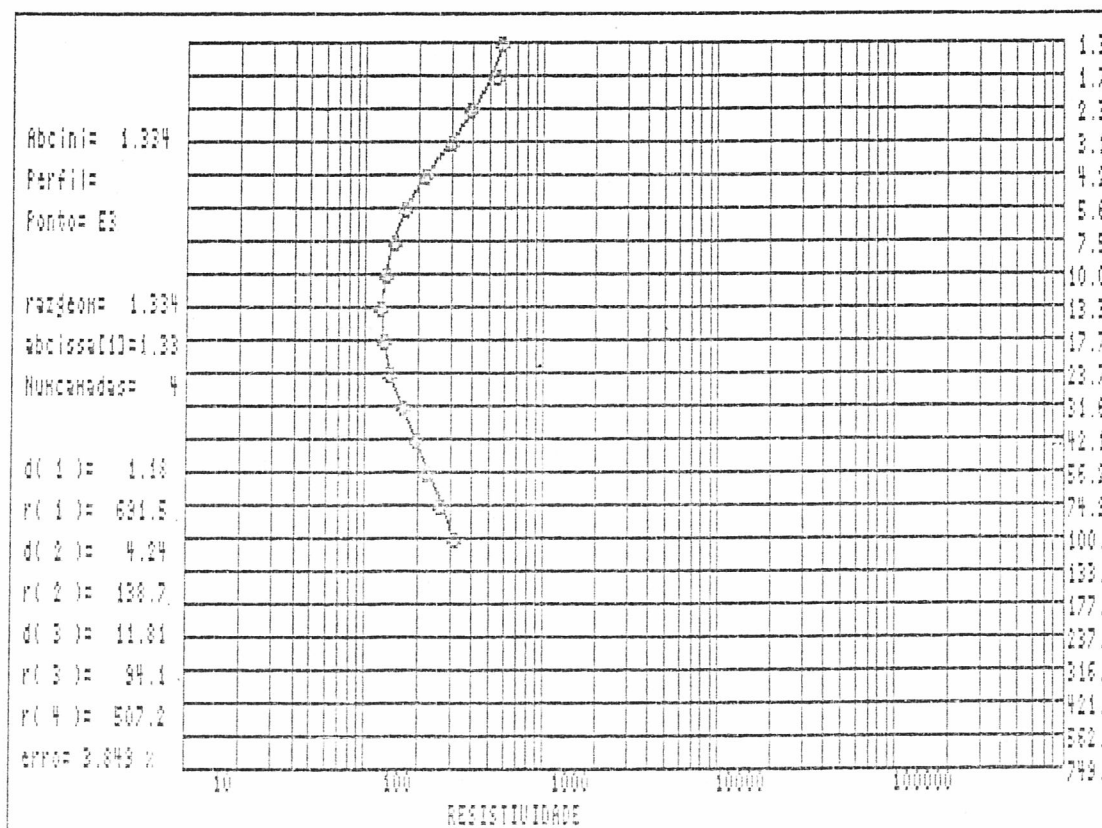


figura 3

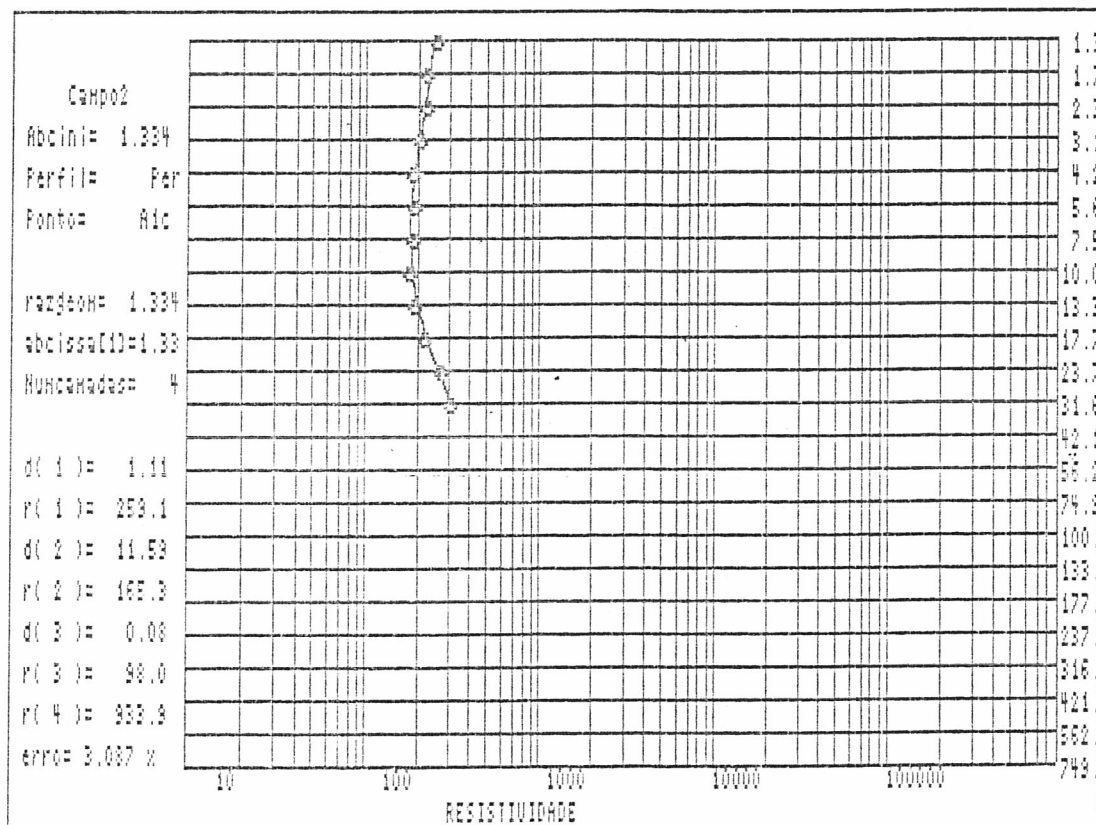


figura 4

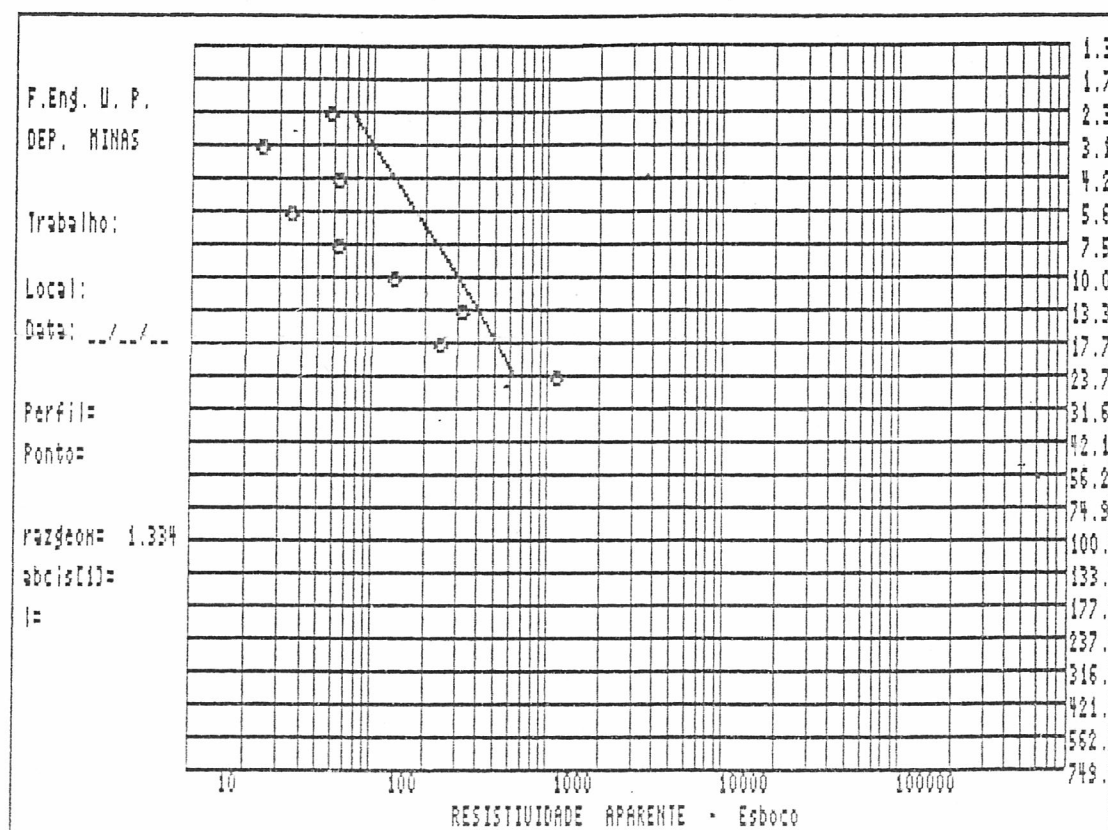


figura 5

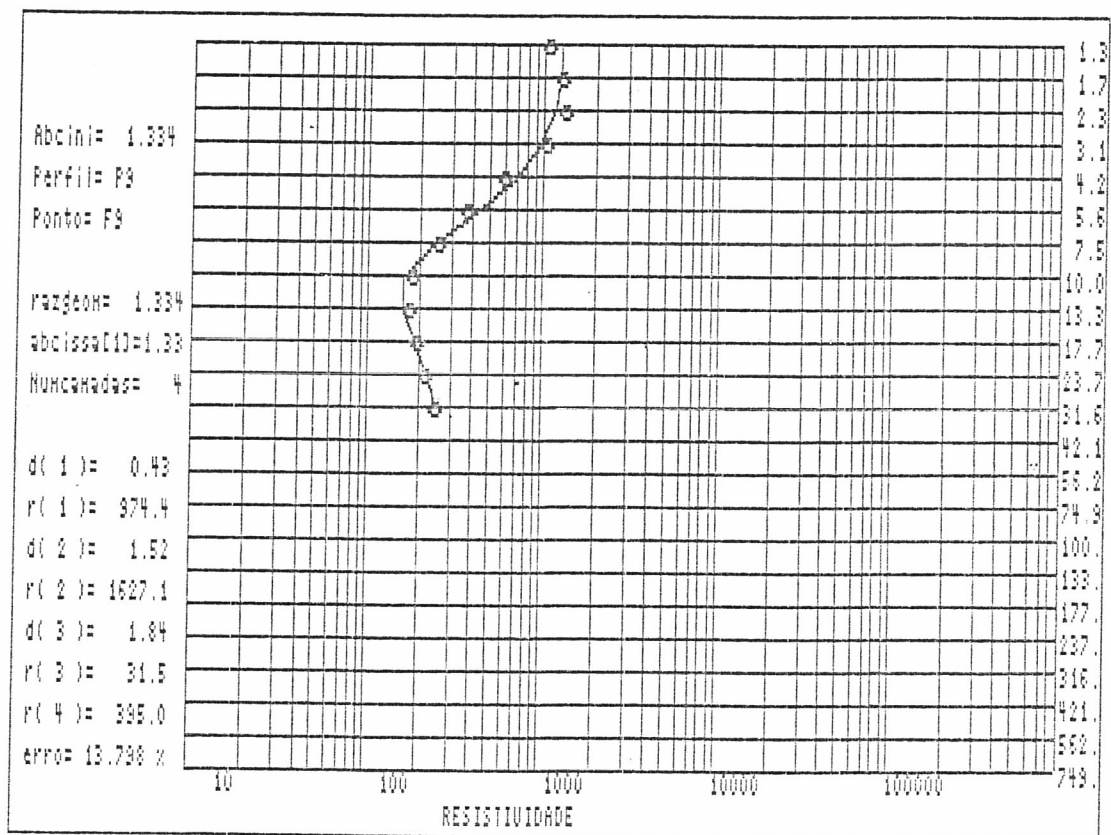


figura 6

Escolho adicional é a ocorrência de sondagens em que as heterogeneidades laterais são patentes (Fig. 5), o que só é resolúvel (quando o é) recomeçando a sondagem com o dispositivo alinhado noutra direcção.

Note-se ainda que o filtro linear de Gosh tem uma certa relutância em "pegar" em curvas de SEV a quatro camadas do tipo KH (Fig 6), problema que ainda não foi investigado (mas que tencionamos analisar mais tarde) e para que chamamos a atenção do interpretador de geofísica menos prevenido.

Os exemplos que se seguem foram retirados de um conjunto de cerca de duzentas sondagens eléctricas verticais realizadas sobre os terrenos do POLO 2 da Universidade do Porto, sitos à Asprela, onde, num futuro próximo, se irá localizar a Faculdade de Engenharia. As sondagens foram espaçadas segundo uma malha quadrada média de trinta e cinco metros de lado, muito embora a regularidade da malha fosse condicionada pela presença de construções e campos cultivados. Durante este trabalho utilizou-se um dispositivo de Schlumberger com oito pontos por década e com abcissa inicial igual a 1.33 metros e semi-distância máxima entre eléctrodos de injeção de corrente de 31.62 metros, o que corresponde a uma profundidade máxima investigada da ordem dos dezoito metros. O aparelho utilizado foi um resistivímetro de corrente alterna ABEM Terrameter cuja fonte de potencial gera uma onda quadrada de 4 Hz. Ficam assim eliminados os problemas de polarização dos eléctrodos ao mesmo tempo que se minimizam os "efeitos de pele".

BIBLIOGRAFIA

Vingoe P. - Electrical Resistivity Surveying
Geophysical Memorandum 5/72, ABEM (15 pp), 1972

Kollert, R. - Ground water exploration by the electric resistivity method; Geophysical Memorandum 3/69, ABEM (7 pp), 1969

Koefoed, Otto - Geosounding Principles I (resistivity sounding measurements Elsevier S. P. Company, Amsterdam (1979)

Onellana, Ernesto - Prospeccion Geoelectrica en corriente continua; Paraninfo, Madrid (1972)

Gill, Murray & Wright - Practical Optimization
Academic Press, London (1981)

Nash, J. C. - Compact Numerical Methods for Computers:
linear algebra and function minimization; Adam Hilger Ltd,
Bristol (1979)

Espain, Carlos - Parâmetros Aparentes em
Prospecção Geoelectrica: uma nova técnica de interpretação ;
Tese de Doutoramento, F.Engª da U. Porto (1984)

Fox, L. - An Introduction to Numerical Linear Algebra;
Clarendon Press, Oxford (1964)

Ortega, J.M. & Rheinboldt, W.C. - Iterative Solution of
Non-Linear Equations in Several Variables; Academic Press, London
(1970)

Marquardt, D.W. - An Algorithm for Least Squares
Estimation of Non-Linear Parameters; J.Soc. Indust. Appl. Math
(V11, pg 431 a 441)

A N E X O

```

program sonda1;
var
  r:array[1..10] of real;
  d:array[1..9] of real;
  t:array[1..35] of real;
  x1,y,b,f,s,u,a1,a2:real;
  i8,i9,i,n,j,m,k:integer;

procedure nucleo;
begin
  b:=r[i9];
  for k:=1 to i8 do
    begin
      i:=i9-k;
      u:=d[i]/y;
      if (5-u)>0 then begin
        a1:=exp(u);
        a2:=(a1-1/a1)/(a1+1/a1);
        b:=(b+a2*r[i])/(1+a2*b/r[i]);
      end
    end
  else b:=r[i];
end;
end; (procedure nucleo)

begin
  f:=exp(ln(10)/8);
  writeln;write('Qual o numero de camadas '); read(i9);writeln;
  i8:=i9-1;
  writeln;writeln;write('Qual a resistividade ');
  for i:=1 to i9 do
    begin
      writeln;write('r(',i:2,' )=');read(r[i]);
    end;
  writeln;writeln;write('Qual a possanca ');
  for i:=1 to i8 do
    begin
      writeln;write('d(',i:2,' )=');read(d[i]);
    end;
  writeln;
  writeln;writeln('CAMADA      RESISTIVIDADE  POSSANCA ');
  for i:=1 to i8 do
    begin
      writeln(i:2,'          ',r[i]:10:5,'          ',d[i]:10:5);
    end;
  writeln(i9:2,'          ',r[i9]:10:5);
  writeln;writeln;write('Qual a primeira abcissa=');
  read(x1);writeln;
  write('Qual o numero de amostras = ');read(n);
  writeln;writeln('VALORES DA RESISTIVIDADE APARENTE');
  y:=x1/822.8;
  for j:=1 to 34 do
    begin
      nucleo;
      t[j]:=b;
      y:=y*f;
    end;
  for m:=1 to n do
    begin
      nucleo;
      t[35]:=b;
      y:=y*f;
      s:=42*t[1]-103*t[3]+144*t[5]-211*t[7]+330*t[9]-574*t[11];
      s:=s+1184*t[13]-3162*t[15]+10219*t[17]-24514*t[19];
      s:=s+18192*t[21]+6486*t[23]+1739*t[25]+79*t[27]+200*t[29];
      s:=(s-106*t[31]+93*t[33]-38*t[35])/10000;
      for j:=1 to 34 do
        begin
          t[j]:=t[j+1];
        end;
      writeln(s:10:5);
    end;
  end;
end;

```