

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE VEÍCULOS AUTOMÓVEISDYNAMIC ANALYSIS OF VEHICLE STRUCTURES

JOSE A. S. ALMACINHA *

LÚCIA M. J. S. DINIS **

RESUMO

Apresentam-se dois métodos que correspondem a técnicas de análise dinâmica de estruturas de veículos distintas: o Método dos Elementos Componentes e o Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos Componentes é empregue na análise do comportamento dinâmico de sistemas rígidos e rígido-flexíveis, podendo ter características não-lineares.

O Método dos Elementos Finitos é utilizado em análises detalhadas de modelos estruturais complexos, nomeadamente, na determinação das frequências e modos próprios de vibração, mais relevantes para o comportamento da estrutura.

Faz-se também uma breve referência às técnicas de solução utilizadas e apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

ABSTRACT

Two methods are presented which can be used for the dynamic vehicle structural analysis: the Component Element Method and the Finite Element Method.

The Component Element Method is considered for the analysis of rigid and rigid/flexible systems. This method is applicable to linear or non-linear systems.

The Finite Element Method is used for the detailed analysis of complex structural models, including the dynamic effects, namely in what concerns the calculations of the relevant eigenvalues and eigenvectors of the vehicle structure.

Some examples are presented in order to assess the efficiency of the methods for the analysis of vehicle structures.

* Assistente

** Professora Associada

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1. INTRODUÇÃO

A utilização da análise estrutural, apoiada em métodos numéricos e no cálculo automático, no projecto de veículos automóveis teve um grande incremento nos últimos vinte e cinco anos. Este tipo de análise desenvolveu-se a partir da análise estática de tensões e rigidez das estruturas dos veículos e estendeu-se sucessivamente à análise dinâmica e à análise não linear do impacto.

Um dos factores que, a nível mundial, mais contribuiu para o aparecimento desta nova atitude face ao projecto de veículos automóveis foi a crise do petróleo entretanto ocorrida. Diferentes estudos efectuados, ao demonstrarem que uma redução do peso dos componentes e equipamento mecânico, a introdução de novos materiais, bem como, uma nova configuração e disposição dos elementos estruturais dos veículos, com o objectivo de diminuir as inércias de translação e rotação e a resistência ao movimento, tinham bastante influência no consumo de combustível, provocaram um aumento de importância da análise estrutural.

Assim, observou-se uma rápida alteração dos conceitos até aí utilizados no projecto, já que apareceram protótipos de novos veículos, com dimensões, distância do centro de gravidade ao solo e peso total diferentes do habitual.

A necessidade de prever o comportamento em estrada dos novos veículos e analisar a sua estrutura cada vez mais aligeirada - consequentemente mais flexível e com frequências naturais mais baixas - levou os projectistas a dirigirem uma crescente atenção para a análise dinâmica de veículos.

Simultaneamente com a possibilidade de recorrer a métodos de análise estrutural cada vez mais complexos, desenvolveu-se o interesse por análises simples, em que grandes simplificações do modelo estrutural são possíveis. A secção de estruturas da "School of Automotive Studies", Cranfield (U.K.), defende a possibilidade de obter informação útil a partir de modelos mais pequenos e menos detalhados [1]. Idêntica opinião é partilhada por Pawlowski [2].

Para analisar qualquer estrutura, podem assim ser considerados diferentes modelos matemáticos, com técnicas de solução distintas, conforme a complexidade estrutural e o nível de sofisticação requerido para a análise. O valor dos resultados de qualquer análise estrutural é função das aproximações envolvidas ao estabelecer o modelo matemático para a estrutura, do método de solução utilizado e da definição das diferentes acções actuantes [3].

Assim por exemplo, a definição dos diferentes parâmetros dos modelos estruturais, utilizados na concepção da suspensão de um novo veículo, obtida através da solução de um problema

de optimização, permite constatar que modelos muito sofisticados e com grande número de parâmetros, ajudarão pouco nesse trabalho, a menos que a metodologia ou a linha de acção seguidas sejam bastante válidas para conduzir o processo de optimização [4]. As dificuldades de análise aumentam ainda pelo facto de, nas suspensões de veículos, existirem componentes com comportamento não-linear.

Pode-se então afirmar que modelos matemáticos simples, baseados em elementos rígidos de massa concentrada (sistemas mecânicos rígidos) e simultaneamente em elementos flexíveis com características de sistemas contínuos (sistemas mecânicos rígido-flexíveis), fig. 1, que tratem com igual grau de dificuldade características lineares e não-lineares, são ferramentas eficientes na concepção de veículos. O sucesso de qualquer análise dinâmica, apoiada neste tipo de modelos, depende, entre outros factores, da possibilidade do projectista poder formular com simplicidade as equações de movimento que regem o equilíbrio do sistema e da existência dum algoritmo que permita calcular a respectiva resposta dinâmica, de forma rápida, simples e precisa.

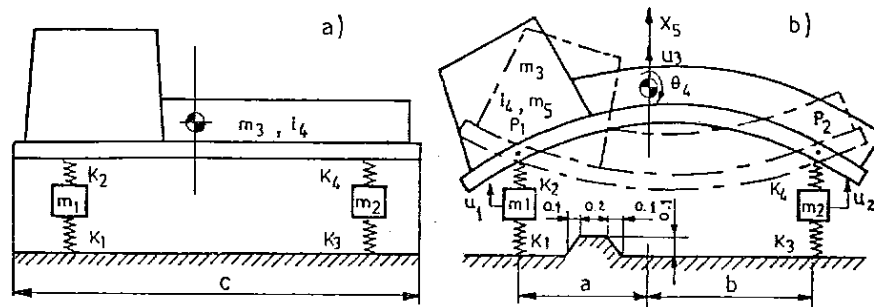


Fig. 1 - Modelação da estrutura de um veículo
 a) Sistema mecânico rígido
 b) Sistema mecânico rígido-flexível

Por outro lado, a previsão dos complexos modos de vibração e das respectivas frequências das estruturas de veículos, como por exemplo, automóveis e autocarros, exige a formulação de um modelo por elementos finitos.

O valor destas análises dinâmicas muito detalhadas situa-se fundamentalmente no campo do ruído e redução de vibrações dos componentes estruturais [1]. As frequências e os modos próprios de vibração permitem localizar os picos de vibração dos elementos da estrutura, o que pode evitar um apreciável gasto de tempo em testes pós-fabrico. A análise dinâmica por elementos finitos pode também ser utilizada na determinação dos deslocamentos e tensões dinâmicas máximas.

Neste texto, abordam-se dois métodos que correspondem a técnicas de análise distintas: o Método dos Elementos Componentes e o Método dos Elementos Finitos [5].

O Método dos Elementos Componentes (MEC) [6] é empregue na análise do comportamento dinâmico de modelos estruturais simples, mas que podem ter componentes não-lineares. As equações de movimento são formuladas de forma simples e desligadas umas das outras, recorrendo à utilização de coeficientes de ligação. A sua posterior ligação faz-se através de um algoritmo implementado num programa de computador, que trata, de forma interligada, características de elementos rígidos e flexíveis e simultaneamente elementos lineares e não-lineares, sem acréscimo de dificuldade.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) [7] permite efectuar análises dinâmicas detalhadas de estruturas de veículos, através da utilização de modelos estruturais complexos. As estruturas de veículos pesados (camiões, autocarros, etc) são em geral estruturas mistas, constituídas por elementos lineares reforçados por painéis. Neste texto, apresentam-se os elementos isoparamétricos de viga e de placa, baseados na teoria das vigas de Timoshenko e na teoria das placas de Mindlin, que possibilitam a modelação daquele tipo de estruturas.

Faz-se também uma breve referência às técnicas de solução utilizadas e apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS COMPONENTES

2.1. Características gerais

As equações de movimento de um sistema mecânico discreto podem ser escritas genericamente da seguinte forma [8]:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{a}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{a}} + \underline{\underline{K}} \underline{a} = \underline{P} \quad (1)$$

em que

- $\underline{\underline{M}}$ - é a matriz de massa do sistema ;
- $\underline{\underline{C}}$ - é a matriz de amortecimento ;
- $\underline{\underline{K}}$ - é a matriz de rigidez ;
- \underline{P} - é o vector das acções exteriores actuates ;
- \underline{a} , $\dot{\underline{a}}$ e $\ddot{\underline{a}}$ - são respectivamente, o vector das coordenadas generalizadas, o vector das velocidades e o vector das acelerações.

Nos sistemas rígidos, as propriedades físicas essenciais em qualquer sistema estrutural - massa, rigidez, amortecimento e as acções exteriores actuates - encontram-se concentradas em diferentes elementos físicos, fig. 1-a).

As matrizes $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{C}}$ podem ser consideradas constantes, se o comportamento da estrutura for linear. Caso contrário, elas podem variar no tempo, de acordo com o tipo de não-linearidade considerada.

Nos sistemas rígido-flexíveis analisados através do MEC, a flexibilidade de alguns componentes estruturais é modelada considerando os primeiros modos próprios de vibração correspondentes às frequências de vibração mais baixas de vigas e placas com diferentes condições de apoio, que pretendem simular esses componentes, fig. 1-b). Tal como nos sistemas discretos, as amplitudes modais podem ser consideradas como coordenadas generalizadas.

Assim, para cada modo de vibração considerado, deve ser acrescentada ao sistema de equações que representa o equilíbrio dinâmico do sistema, uma equação do tipo:

$$m_n \ddot{X}_n + \omega_n^2 m_n X_n = P_n \quad (2)$$

em que

$$m_n = \int_V \bar{m} \phi_n^2 dv \quad (3)$$

e

- ω - é a frequência de vibração considerada;
- ϕ_n - é o modo de vibração respectivo;
- m_n - é a massa generalizada;
- X_n - é a amplitude modal respectiva, que funciona como coordenada generalizada;
- \bar{m} - é a massa por unidade de volume;
- P_n - é a força generalizada.

As frequências mais baixas e as expressões que representam os respectivos modos de vibração de vigas e placas com diferentes condições de apoio encontram-se tabeladas em várias publicações [6, 9].

Os sistemas mecânicos, a analisar através do MEC, são descritos por três características:

- Coordenadas generalizadas;
- massas;
- elementos de força.

As coordenadas generalizadas a utilizar podem ser: deslocamentos e rotações dos centros de massa dos elementos rígidos e amplitudes dos modos de vibração dos elementos flexíveis. Esta escolha de coordenadas, tem por objectivo desligar dinamicamente o sistema de equações.

As massas representam as propriedades de inércia do sistema. Podem ser consideradas massas concentradas e momentos de inércia relativamente aos centros de massa, nos elementos rígidos e massas generalizadas obtidas através da expressão (3), nos elementos flexíveis.

Os elementos de força representam as propriedades elásticas e os mecanismos de perda de energia dos sistemas

mecânicos. Nos sistemas discretizados com elementos rígidos, estas características, que podem ter uma variação linear ou não linear com o tempo, assumem a forma de elementos simples e sem massa. Na fig. 2, apresentam-se alguns desses elementos.

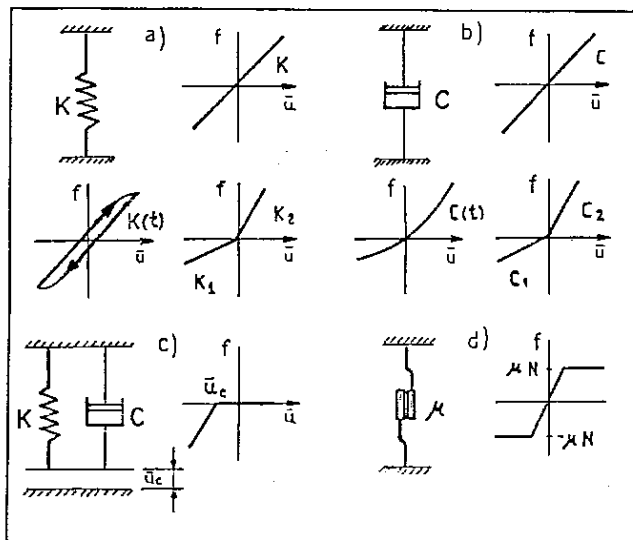


Fig. 2 - Elementos de força

- a) Molas
- b) Amortecedores
- c) Batente
- d) Elemento de atrito

2.2 Equações de movimento

O MEC permite formular as equações de movimento, que regem o equilíbrio dinâmico de sistemas rígidos e rígido-flexíveis, mesmo com grande número de elementos, a partir de simples condições de equilíbrio para cada um dos elementos de massa.

Assim, para cada massa i , o equilíbrio pode exprimir-se do seguinte modo:

$$m_{ii} \ddot{a}_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

em que

- n - é o número total de massas do sistema;
- m_{ii} - é a massa generalizada;
- \ddot{a}_i - é a aceleração respectiva;
- p_i - é a força generalizada.

O conceito de força generalizada está associado a cada coordenada generalizada. Se as forças actuantes num corpo forem conhecidas e a coordenada generalizada a_i escolhida, a força generalizada p_i é definida por considerações derivadas do princípio dos trabalhos virtuais, da seguinte forma:

- Dando um pequeno incremento δa_i à coordenada generalizada a_i do corpo, mantendo as restantes coordenadas constantes, o trabalho realizado pelas forças actuantes é igual a $p_i \delta a_i$.

Como consequência daquele princípio, os coeficientes utilizados na obtenção das forças generalizadas, a partir das forças actuantes, são os mesmos que se utilizam na determinação dos deslocamentos efectivos dos pontos de aplicação destas, a partir das coordenadas generalizadas. Estes coeficientes designam-se por coeficientes de ligação.

O coeficiente de ligação, entre uma força actuante e uma coordenada generalizada de um corpo, é definido como sendo o deslocamento do ponto de aplicação da força actuante, resultante do deslocamento unitário daquele em termos dessa coordenada generalizada.

Assim, a força generalizada p_i resulta do somatório:

$$p_i = \sum_k b_{ik} f_k \quad (5)$$

em que

f_k - são as forças actuantes na massa i ;
 b_{ik} - são os respectivos coeficientes de ligação.

Por sua vez, o deslocamento efectivo \bar{a}_k do ponto de aplicação de uma determinada força f_k vem expresso por:

$$\bar{a}_k = \sum_i b_{ki} a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

em que a_i é a coordenada generalizada.

As forças actuantes nas diferentes massas são de dois tipos:

- Forças internas do sistema transmitidas pelos diversos elementos de força, que representam a elasticidade e os mecanismos de perda de energia.

- Forças exteriores aplicadas.

Atendendo à equação (1), as forças internas do sistema são negativas se traccionam os respectivos elementos. Por sua vez, os coeficientes de ligação são positivos, quando o deslocamento da massa distende o respectivo elemento de força.

Generalizando as expressões (4), (5) e (6) para um sistema de múltiplos graus de liberdade, podemos escrever na forma matricial:

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{a}} = \tilde{P} \quad (7-a)$$

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{a}} = \tilde{B} \tilde{F} \quad (7-b)$$

e

$$\tilde{\bar{a}} = \tilde{B}^T \tilde{a} \quad (8)$$

em que

\underline{M} - é a matriz de massa (diagonal) do sistema;
 \underline{P} - é o vector das forças generalizadas;
 \underline{B} - é a matriz dos coeficientes de ligação;
 \underline{F} - é o vector das forças actuantes do sistema.

A transformação do sistema de equações (7-b) no sistema de equações genérico (1) é feita automaticamente num programa de computador, tendo em conta as propriedades da matriz de ligação, atrás descritas.

Para exemplificar esta metodologia, considere-se o modelo rígido-flexível dum camião, representado na fig. 1-b). Este modelo tem cinco graus de liberdade, admitindo-se como coordenadas generalizadas: os deslocamentos lineares u_1 e u_2 dos elementos rígidos simulando os dois eixos do veículo, o deslocamento linear u_3 e a rotação θ_4 do centro de massa do elemento rígido representando a estrutura e a amplitude X_5 do 1º modo de vibração de uma viga de bordos livres simulando a flexibilidade da estrutura. A rigidez da suspensão e dos pneus está representada por molas de coeficiente de rigidez K_1 e a rigidez do elemento flexível vem expressa por $\omega^2 m_5$. O amortecimento do sistema não foi considerado.

Admitindo que o movimento é registado a partir da posição de equilíbrio, as equações de movimento (7-b) podem ser escritas:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & I_4 & \\ 0 & & & & m_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{X}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -b & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & -d_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Atendendo à equação (8), os deslocamentos dos elementos de força são determinados a partir dos deslocamentos generalizados, do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{X}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & a & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -b & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Seguidamente, as forças de cada elemento são calculadas atendendo às expressões (1) e (2) e à convenção de sinais referida anteriormente

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & & & & \\ & -K_2 & & & \\ & & -K_3 & & \\ & & & -K_4 & \\ 0 & & & & -\omega^2 m_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{x}_5 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Finalmente, substituindo (10) em (11) e esta em (9), obtém-se:

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{a}} + \tilde{K} \tilde{a} = 0 \quad (12)$$

em que

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + K_2) & 0 & -K_2 & -aK_2 & -d_1 K_2 \\ 0 & (K_3 + K_4) & -K_4 & bK_4 & d_2 K_4 \\ -K_2 & -K_4 & (K_2 + K_4) & (aK_2 + bK_4) & (d_1 K_2 - d_2 K_4) \\ -aK_2 & bK_4 & (aK_2 - bK_4) & (a^2 K_2 + b^2 K_4) & (aK_2 d_1 + bK_4 d_2) \\ -d_1 K_2 & d_2 K_4 & (d_1 K_2 - d_2 K_4) & (aK_2 d_1 + bK_4 d_2) & (d_1^2 K_2 + d_2^2 K_4 + \omega^2 m_5) \end{bmatrix} \quad (13)$$

A resolução manual deste exemplo, utilizando os mesmos passos do algoritmo implementado no programa de computador, permite verificar que o sistema de equações a ser resolvido é igual ao que se obtém através das diversas formulações clássicas [8].

A grande vantagem deste tipo de formulação reside no facto de apenas ser necessário definir os diversos elementos de força e os respectivos coeficientes de ligação, para cada coordenada generalizada.

3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Formulação das equações de movimento

A discretização de qualquer estrutura por elementos finitos envolve a sua divisão num número apropriado de elementos de dimensão arbitrária, ligados entre si pelos chamados pontos nodais (nós), aos quais se considera associado um conjunto de deslocamentos generalizados do sistema.

As equações de movimento (1) dum sistema linear elástico discretizado por elementos finitos, podem ser formuladas recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_V \delta \epsilon_{\sim}^T \sigma_{\sim} dv - \int_V \delta u_{\sim}^T (b_{\sim} - \rho \ddot{u}_{\sim} - c \dot{u}_{\sim}) dv - \int_{A_t} \delta u_{\sim}^T t_{\sim} dA = 0 \quad (14)$$

em que:

- δu_{\sim} - é o vector dos deslocamentos virtuais;
- $\delta \epsilon_{\sim}$ - é o vector das deformações virtuais associadas;
- b_{\sim} - é o vector das forças de volume aplicadas
- t_{\sim} - é o vector das forças de superfície;
- σ_{\sim} - é o vector das tensões;
- ρ - é a massa específica;
- c - é o coeficiente de amortecimento;
- \ddot{u}_{\sim} e \dot{u}_{\sim} - são respectivamente, o vector das acelerações e o vector das velocidades.

O volume V pode ser considerado limitado por dois tipos de fronteira: A_t , área na qual está definido o vector de força superficial t_{\sim} e A_u , área onde estão definidos os deslocamentos u_{\sim} .

A aplicação do MEF permite escrever os deslocamentos e as deformações, em qualquer ponto de um elemento finito, em função dos respectivos valores nodais a_{\sim}^e :

$$u_{\sim}^e = \sum_{i=1}^m N_{\sim i}^e a_{\sim i}^e = N_{\sim}^e a_{\sim}^e \quad (15)$$

$$\epsilon_{\sim}^e = \sum_{i=1}^m B_{\sim i}^e a_{\sim i}^e = B_{\sim}^e a_{\sim}^e \quad (16)$$

em que

- m - é o número total de nós do elemento;
- N_{\sim}^e - é o conjunto de funções de forma associadas a cada elemento;
- B_{\sim}^e - é a matriz das deformações do elemento.

Substituindo (15) e (16) em (14), atendendo a que esta equação deve ser satisfeita para qualquer valor do deslocamento virtual δa_{\sim}^e e que, através da lei de Hooke, as tensões podem ser definidas em função das deformações, as

equações de movimento para um elemento finito são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_V e (\tilde{N}^e)^T \rho^e \tilde{N}^e \ddot{\tilde{a}}^e dv + \int_V e (\tilde{N}^e)^T c^e \tilde{N}^e \dot{\tilde{a}}^e dv + \int_V e (\tilde{B}^e)^T \tilde{D} \tilde{B}^e \tilde{a}^e dv = \\ = \int_V e (\tilde{N}^e)^T \tilde{b}^e dv + \int_{A_t} e (\tilde{N}^e)^T \tilde{t} dA = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

onde

$$\tilde{M}^e = \int_V e (\tilde{N}^e)^T \rho^e \tilde{N}^e dv \quad (18)$$

$$\tilde{K}^e = \int_V e (\tilde{B}^e)^T \tilde{D} \tilde{B}^e dv \quad (19)$$

são respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de um elemento, em que \tilde{D} é a matriz de elasticidade.

A equação de equilíbrio global (1) é obtida por associação, de modo adequado, dos diversos elementos que constituem o modelo estrutural.

3.2. Elemento isoparamétrico de viga

3.2.1. Teoria das vigas de Timoshenko

Esta teoria [10] considera os efeitos do esforço cortante no empenamento das secções rectas da viga e da inércia de rotação, podendo por isso ser aplicada na análise de vigas finas e espessas.

As hipóteses de base da teoria das vigas de Timoshenko são as seguintes:

- Os deslocamentos transversais são pequenos, quando comparados com a espessura das vigas.
- Normais ao eixo neutro antes da deformação permanecem rectas, mas não necessariamente normais àquele eixo após a deformação.
- Tensões normais ao eixo neutro são irrelevantes, quando comparadas com as restantes componentes do tensor das tensões.

Admite-se ainda que, o eixo dos xx coincide com o eixo neutro da viga e os eixos dos yy e dos zz correspondem a direcções principais da secção recta, fig.3.

O campo de deslocamentos considerado é o seguinte:

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x,t) - z \theta_y(x,t) - y \theta_z(x,t) \\ v_0(x,t) - z \theta_x(x,t) \\ w_0(x,t) + y \theta_x(x,t) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

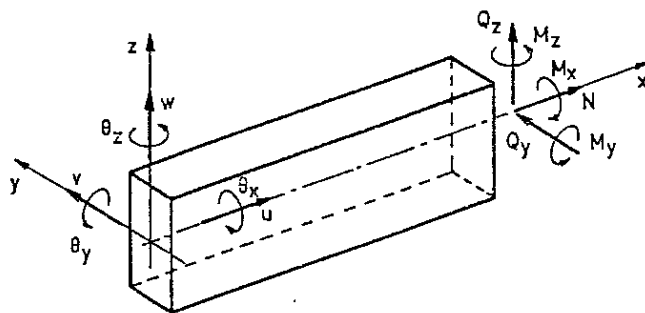


Fig. 3 - Elemento de viga de Timoshenko

Os deslocamentos em qualquer ponto (x,y,z) podem exprimir-se directamente em função das translações do eixo neutro u_0, v_0 e w_0 e das rotações independentes das normais θ_x, θ_y e θ_z .

As rotações θ_y e θ_z , sofridas pelas normais, são iguais à soma algébrica das inclinações do eixo neutro, com as rotações devidas à deformação de corte, fig. 4.

$$\begin{aligned} \theta_y &= \partial w_0 / \partial x - \phi_z \\ \theta_z &= \partial v_0 / \partial x - \phi_y \end{aligned} \tag{21}$$

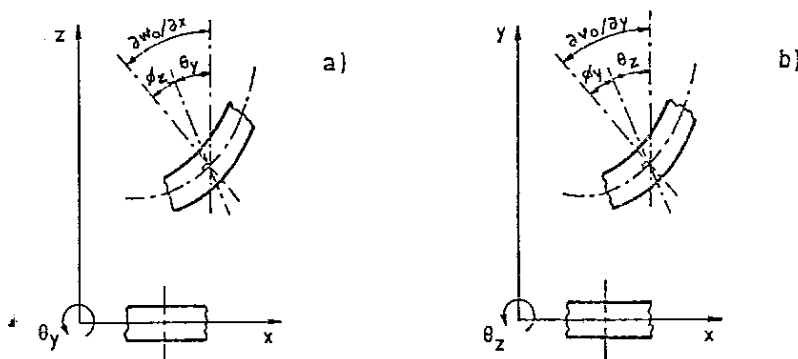


Fig. 4 - Deformação do elemento de viga espesso
 a) Plano xz
 b) Plano xy

Atendendo à teoria das pequenas deformações e aplicando a teoria de Timoshenko ao estado tridimensional de tensão, as relações constitutivas são dadas na forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} \tag{22}$$

em que

$$\underline{\sigma} = \{N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z\}^T \quad (23)$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} EA & & & & & 0 \\ & KGA & & & & \\ & & KGA & & & \\ & & & GJ & & \\ 0 & & & & EI_y & EI_z \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (24)$$

e

$$\underline{\varepsilon} = \{\partial u_o / \partial x, \phi_y, \phi_z, \partial \theta_x / \partial x, \partial \theta_y / \partial x, \partial \theta_z / \partial x\} \quad (25)$$

são respectivamente, o vector dos esforços na secção recta da viga, fig. 3, a matriz de elasticidade e o vector das deformações resultantes. O coeficiente K é um factor de correcção do esforço cortante.

3.2.2. Discretização por elementos finitos

No elemento finito isoparamétrico da viga recta, a cada nó i , consideram-se associados seis graus de liberdade, três de translação e três de rotação. Os elementos mais utilizados são os lineares (2 nós) e os quadráticos (3 nós), fig. 5.

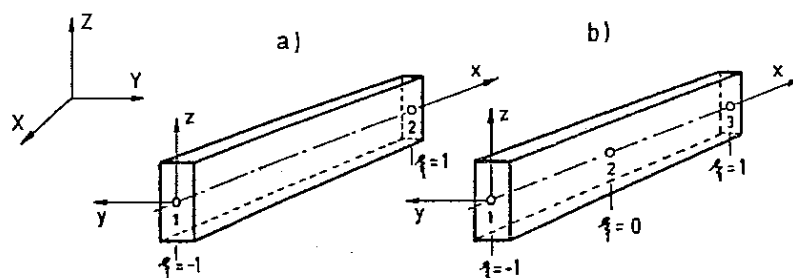


Fig. 5 - Elemento finito isoparamétrico de viga tridimensional
a) Linear
b) Quadrático

O vector dos deslocamentos nodais, para cada um desses elementos, toma a seguinte forma:

$$\underline{a}^e = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}^T \quad \text{e} \quad \underline{a}^e = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}^T \quad (26)$$

em que

$$\underline{a}_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \quad (27)$$

Os três sistemas de eixos coordenados, que são necessários à formulação do elemento de viga, fig. 5, são:

- i) Sistema natural do elemento, para o qual ξ varia entre -1 e 1.
- ii) Sistema cartesiano do elemento (x,y,z).
- iii) Sistema cartesiano global (X,Y,Z).

Na discretização por elementos finitos, o elemento de viga de Timoshenko tem a vantagem de requerer apenas o uso de funções de forma Lagrangeanas, do tipo C(0) (função contínua) para garantir a continuidade.

As funções de forma associadas a cada um dos nós do elemento, no sistema de eixos natural, são as seguintes:

a) Elemento linear

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/2 (1-\xi) && \text{associada ao nó 1} \\ N_2 &= 1/2 (1+\xi) && \text{associada ao nó 2} \end{aligned} \quad (28)$$

b) Elemento quadrático

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/2 \xi (1-\xi) && \text{associada ao nó 1} \\ N_2 &= (1-\xi)(1+\xi) && \text{associada ao nó 2} \\ N_3 &= 1/2 \xi (1+\xi) && \text{associada ao nó 3} \end{aligned} \quad (29)$$

De notar, que se usam as mesmas funções de forma para todas as variáveis independentes.

Assim, o campo de deslocamentos, expresso em termos dos deslocamentos do eixo neutro e das rotações das normais da viga, é definido por:

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\xi) \tilde{a}_i, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad (30)$$

De forma análoga, a geometria, campo de tensões e propriedades do material, podem exprimir-se em termos das funções de forma e dos valores nodais respectivos.

A relação entre os sistemas natural e cartesiano do elemento, estabelece-se através da matriz Jacobiana, que é definida por:

$$\tilde{J} = \partial x / \partial \xi = \sum_{i=1}^n \partial \tilde{N}_i / \partial \xi x_i, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad (31)$$

As deformações resultantes são definidas em termos de deslocamentos nodais do elemento, através da seguinte expressão, envolvendo as funções de forma e suas derivadas:

$$\tilde{\epsilon} = \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i a_i, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad (32)$$

em que

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (33)$$

Refira-se que, a matriz das deformações \tilde{B}_i contém as derivadas das funções de forma $\delta N_i / \delta x$, que são calculadas pela regra de derivação em cadeia

$$\partial N_i / \partial x = \partial N_i / \partial \xi \cdot \partial \xi / \partial x = \partial N_i / \partial \xi \cdot \tilde{J}^{-1} \quad (34)$$

De acordo com a equação (19), cada sub-matriz da matriz de rigidez \tilde{K}^e , contemplando a contribuição associada aos nós i e j , é obtida através da expressão:

$$\tilde{K}_{ij}^e = \int_1 B_i^T \tilde{D} B_j dx \quad (35)$$

em que

$$dx = \det \tilde{J} d\xi = \tilde{J} d\xi \quad (36)$$

Por sua vez, as sub-matrizes da matriz de massa são expressas por:

$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_1 N_i^T \tilde{I} N_j dx \quad (37)$$

em que a matriz de inércia \tilde{I} é definida como

$$\tilde{I} = \rho \begin{bmatrix} A(\xi) & & & & & 0 \\ & A(\xi) & & & & \\ & & A(\xi) & & & \\ & & & I_o(\xi) & & \\ 0 & & & & I_y(\xi) & \\ & & & & & I_z(\xi) \end{bmatrix} \quad (38)$$

A matriz de massa \tilde{M}^e (18) designa-se por matriz de massa consistente, por ser formulada a partir das mesmas funções de forma N_i empregues na definição da matriz de rigidez \tilde{K}^e .

As matrizes de massa e rigidez do elemento são calculadas por integração numérica, recorrendo à quadratura de Gauss.

No caso das propriedades da secção do elemento variarem ao longo do comprimento e também para elementos não prismáticos, as matrizes \tilde{D} e \tilde{I} são calculadas através das expressões:

$$\tilde{D}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \tilde{D}_i, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad (39)$$

$$\tilde{I}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \tilde{I}_i, \quad n = 2 \text{ ou } 3 \quad (40)$$

em que, os valores das propriedades nos pontos de integração de Gauss são interpolados a partir dos correspondentes valores nodais.

3.3. Elemento isoparamétrico de placa

3.3.1. Teoria das placas de Mindlin

Esta teoria [11] considera os efeitos do esforço cortante no empenamento das secções rectas da placa e da inércia de rotação, podendo por isso ser aplicada na análise de placas finas e espessas.

A teoria bidimensional, desenvolvida por Mindlin, assenta nas seguintes hipóteses de base:

- Os deslocamentos são pequenos, quando comparados com a espessura da placa.
- A tensão normal à superfície média da placa é desprezável, qualquer que seja o tipo de carregamento existente.
- As normais à superfície média antes da deformação mantêm-se rectas mas não necessariamente normais àquela superfície após a deformação.

O vector deslocamento $u = \{u, v, w\}^T$, em que qualquer ponto de coordenadas (x, y, z) , pode ser expresso em função das translações u_0, v_0, w_0 , da superfície média e das rotações independentes das normais θ_x e θ_y , fig. 6:

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) - z \theta_y(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) - z \theta_x(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

em que

$$\begin{aligned} \theta_x &= \partial w_0 / \partial y - \phi_y \\ \theta_y &= \partial w_0 / \partial x - \phi_x \end{aligned} \quad (42)$$

As rotações das normais à superfície média da placa são iguais às somas algébricas das inclinações do eixo neutro, com as rotações devidas à deformação de corte.

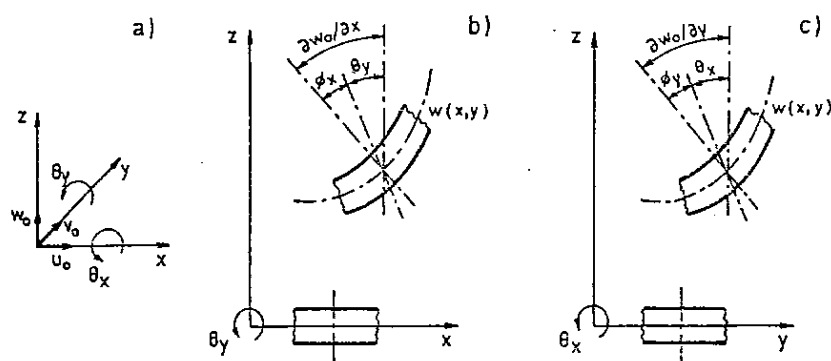


Fig. 6 - Elemento de placa de Mindlin

- a) Campo de deslocamentos
 b) Deformação da secção da placa no plano xz
 c) Deformação da secção da placa no plano yz

Atendendo à teoria das pequenas deformações e aplicando a teoria de Mindlin ao estado tridimensional de tensão, as relações constitutivas são expressas na forma

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D} \tilde{\epsilon} \quad (43)$$

em que

$$\tilde{\sigma} = \{N, M, Q\}^T \quad (44)$$

é o vector dos esforços unitários na secção da placa, fig. 7, onde

$$\tilde{N} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T \quad (45)$$

$$\tilde{M} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T \quad (46)$$

e

$$\tilde{Q} = \{Q_x, Q_y\}^T \quad (47)$$

são respectivamente os esforços de membrana, flexão e torção e corte;

$$\tilde{D} = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \tilde{D}_m & 0 \\ 0 & \tilde{D}_f \\ 0 & \tilde{D}_s \end{bmatrix} \quad (48)$$

é a matriz de elasticidade, onde

$$\tilde{D}_m = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\underline{D}_f = \begin{bmatrix} t^2/12 & \nu t^2/12 & 0 \\ \nu t^2/12 & t^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & t^2(1-\nu)/24 \end{bmatrix} \quad (50)$$

e

$$\underline{D}_s = \begin{bmatrix} (1-\nu)/2K & 0 \\ 0 & (1-\nu)/2K \end{bmatrix} \quad (51)$$

são respectivamente as sub-matrizes de membrana, flexão e torção e corte:

$$\underline{\varepsilon} = \{ \underline{\varepsilon}_m, \underline{\varepsilon}_f, \underline{\varepsilon}_s \}^T \quad (52)$$

é o vector das deformações resultantes, onde

$$\underline{\varepsilon}_m = \{ \partial u_0 / \partial x, \partial v_0 / \partial y, \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \}^T \quad (53)$$

$$\underline{\varepsilon}_f = \{ -\partial \theta_y / \partial x, -\partial \theta_x / \partial y, -(\partial \theta_y / \partial y + \partial \theta_x / \partial x) \}^T \quad (54)$$

$$\underline{\varepsilon}_s = \{ \partial w_0 / \partial x - \theta_y, \partial w_0 / \partial y - \theta_x \}^T \quad (55)$$

são respectivamente as componentes das deformações de membrana, flexão e torção e corte. O coeficiente K é um factor de correcção, para contabilizar o efeito dos esforços cortantes e t é a espessura da placa.

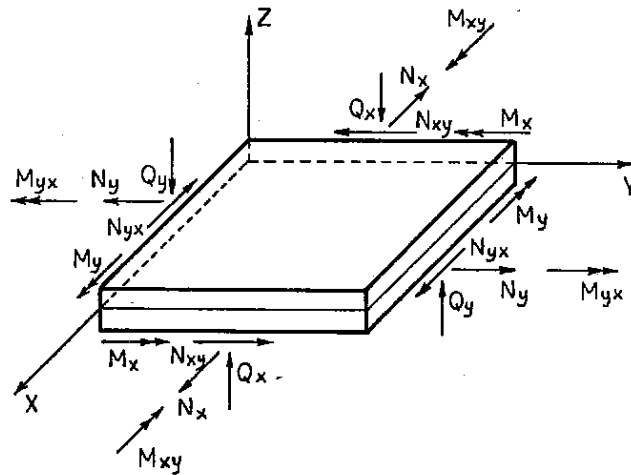


Fig. 7 - Esforços existentes num elemento infinitesimal de placa espessa

3.3.2. Discretização por elementos finitos

No elemento finito isoparamétrico quadrático de placa (8 nós), fig. 8, utilizado nesta discretização, a cada nó i , consideram-se associados cinco graus de liberdade, três de translação e dois de rotação. Na formulação por elementos finitos, o elemento de placa de Mindlin requer também apenas funções de forma lagrangeanas, do tipo $C(0)$, para garantir a continuidade.

As funções de forma associadas a cada um dos nós do elemento, em termos de coordenadas (ξ, η) , são as seguintes:

$$\begin{aligned} N_i &= 1/4 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad , \text{ nós de canto} \\ N_i &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad , \text{ nós do meio } \xi_i = 0 \quad (56) \\ N_i &= 1/2 (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad , \text{ nós do meio } \eta_i = 0 \\ \text{com } \xi_0 &= \xi / \xi_i \text{ e } \eta_0 = \eta / \eta_i \end{aligned}$$

Assim, o campo de deslocamentos expresso em termos dos deslocamentos da superfície média e das rotações independentes das normais é definido por:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \tilde{a}_i \quad (57)$$

As deformações resultantes são definidas de forma idêntica às do elemento de viga

$$\tilde{\epsilon} = \sum_{i=1}^8 \tilde{B}_i \tilde{a}_i \quad (58)$$

em que

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial N_i / \partial x \\ 0 & 0 & 0 & -\partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial N_i / \partial x & -\partial N_i / \partial y \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial y & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

As derivadas das funções de forma da matriz \tilde{B}_i são calculadas pela regra da derivação em cadeia

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} = \tilde{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (60)$$

em que, a matriz Jacobiana J é definida por:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (61)$$

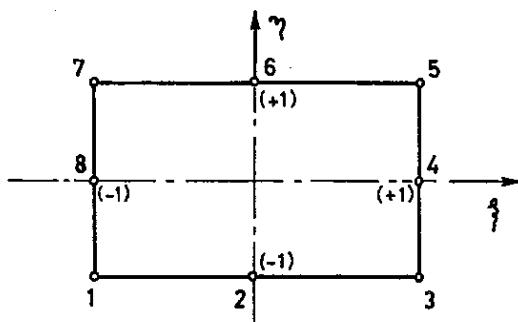


Fig. 8 - Elemento finito isoparamétrico quadrático de placa

As sub-matrizes de rigidez e de massa são expressas por:

$$\tilde{K}_{ij}^e = \int_A \tilde{B}_i^T \tilde{D} \tilde{B}_j \, dx \, dy \quad (62)$$

$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_A \tilde{N}_i^T \tilde{I} \tilde{N}_j \, dx \, dy \quad (63)$$

em que, a matriz de inércia \tilde{I} é dada por

$$\tilde{I} = \rho \begin{bmatrix} t & & & & & & & 0 \\ & t & & & & & & \\ & & t & & & & & \\ & & & t & & & & \\ & & & & t^3/12 & & & \\ 0 & & & & & & & t^3/12 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (64)$$

e

$$dx \, dy = \det J \, d\xi \, d\eta \quad (65)$$

No caso da espessura da placa variar ao longo da superfície, o seu valor nos pontos de integração de Gauss, para o cálculo das matrizes \tilde{D} e \tilde{I} , é obtido através da expressão

$$t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i \quad (66)$$

como resultado da interpolação a partir dos respectivos valores nodais.

3.4. Formulação consistente das cargas nodais

As forças e momentos concentrados aplicados fora dos nós ou qualquer tipo de forças ou momentos distribuídos têm que ser representados em termos de cargas nodais equivalentes. As cargas nodais equivalentes devidas a forças ou momentos concentrados em posições arbitrárias são definidas por:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i^e &= \tilde{P} \tilde{N}_i(\xi_p) && \text{(vigas)} \\ \tilde{P}_i^e &= \tilde{P} \tilde{N}_i(\eta_p, \xi_p) && \text{(placas)} \end{aligned} \quad (67)$$

em que ξ_p e η_p são as coordenadas locais do ponto da aplicação das cargas.

Por sua vez, as cargas nodais equivalentes devidas a forças ou momentos distribuídos são calculados pela expressão:

$$\tilde{P}_i^e = \int \tilde{N}_i q dv \quad (68)$$

As funções de forma, utilizadas na determinação das forças nodais equivalentes, são as aplicadas na formulação das matrizes de massa e rigidez.

4. APLICAÇÕES

Para a implementação dos métodos de análise descritos, desenvolveram-se, respectivamente, os programas DYNAMICS.F77 e DINAMI.F77 [5]. Estes programas estão codificados em Fortran 77 e foram implementados no computador Eclipse MV8000 do DEMec.

O programa DYNAMICS.77, tendo por base um programa referido em [6], permite determinar a resposta dinâmica de sistemas rígidos e rígido-flexíveis em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações dos elementos de massa e deformações e forças nos elementos de força.

O programa DINAMI.F77, tendo por base um programa desenvolvido por Dias Rodrigues [12], permite, o estudo de vibrações livres de estruturas discretizadas por elementos finitos, através do cálculo das frequências naturais e respectivos modos de vibração, assim como, a obtenção da resposta dinâmica, em termos de deslocamentos, em pontos de interesse para a análise estrutural. Na fig. 9 apresenta-se o respectivo diagrama de sequência.

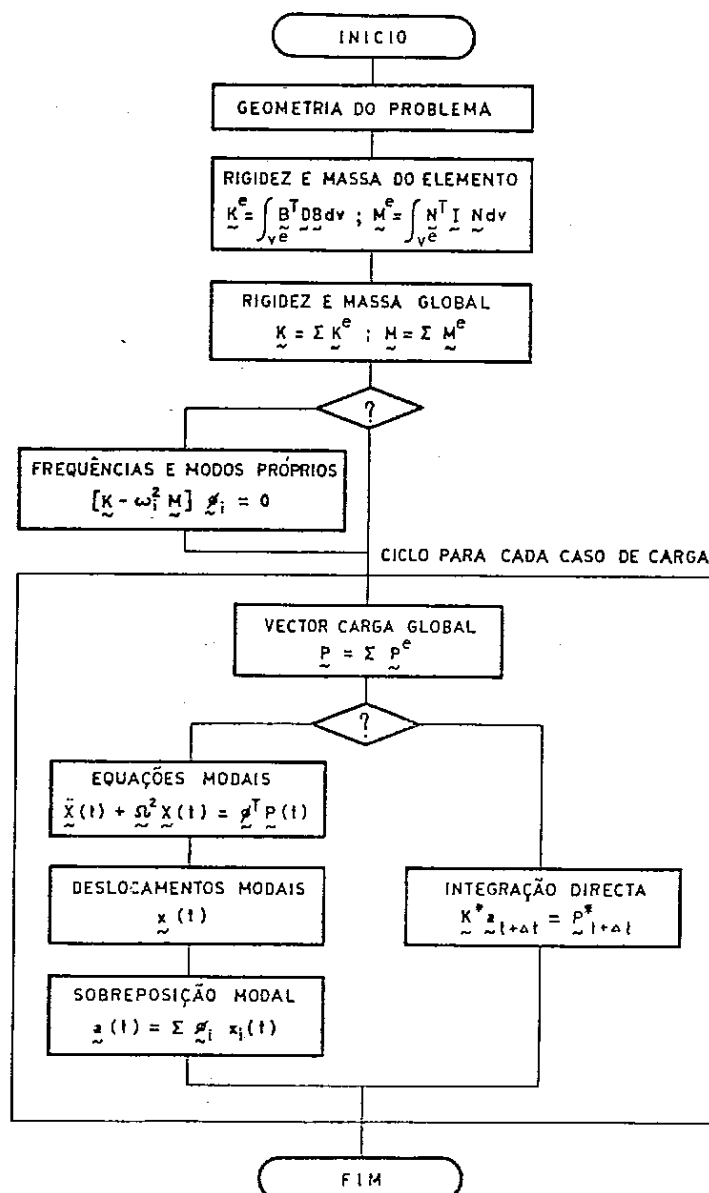


Fig. 9 - Diagrama de seqüência do programa DINAMI.F77

4.1. Solução das equações de movimento

A solução das equações de movimento, resultantes das discretizações estruturais utilizadas nos métodos de análise abordados neste texto, é obtida através de diferentes métodos numéricos.

A solução de problemas dinâmicos não-lineares, um dos objectivos mais importantes do MEC, reduz-se à ligação dum método de integração no tempo com um modelo estrutural previamente desenvolvido.

McNamara [13] comparando o método explícito das diferenças centrais com alguns métodos de integração directa implícitos [14], para um certo número de problemas não

lineares, concluiu que, tomando em consideração aspectos de precisão, capacidade de memória central de computador necessária e custos de operação, o método das diferenças centrais é a melhor aproximação.

A eficiência numérica deste método é muito grande, se as matrizes \tilde{M} e \tilde{C} do sistema de equações de equilíbrio (1) forem diagonais, pois permite a determinação da resposta do sistema, elemento a elemento, sem requerer grande espaço de memória central do computador.

No MEC, a resposta dinâmica de um sistema é obtida integrando as equações de movimento por um processo de integração directa por diferenças finitas. Este processo de integração numérica passo a passo resulta de uma alteração ao método das diferenças centrais, de modo a conferir-lhe maior eficiência numérica, já que nos sistemas mecânicos a analisar, apenas a matriz de massa é diagonal.

Assim neste processo, a aceleração de cada elemento i , no instante de tempo t , obtém-se através da expressão de diferenças centrais:

$$\ddot{a}_{ti} = 1/(\Delta t)^2 (a_{t+\Delta ti} - 2a_{ti} + a_{t-\Delta ti}) \quad (69)$$

e a velocidade é determinada pela expressão de diferenças finitas à esquerda:

$$\dot{a}_{ti} = 1/2 \Delta t (3a_{ti} - 4a_{t-\Delta ti} + a_{t-2\Delta ti}) \quad (70)$$

em que Δt é o intervalo de integração. Verifica-se que \dot{a}_t não depende de $a_{t+\Delta t}$.

Esta modificação no método das diferenças centrais permite a obtenção da aceleração de cada elemento, a partir de:

$$\ddot{a}_{ti} = p_i/m_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (71)$$

pois as forças generalizadas p_i são apenas função dos deslocamentos actuais e anteriores. Os deslocamentos $a_{t+\Delta t}$, no instante de tempo $t+\Delta t$, são calculados seguidamente através da expressão (69).

A utilização desta formulação ao longo de todo o processo de integração leva a que no arranque, o cálculo de \ddot{a}_{oi} e \dot{a}_{oi} seja feito considerando que:

$$a_{-\Delta ti} = a_{oi} - \dot{a}_{oi} \Delta t \quad (72)$$

e

$$a_{-2\Delta ti} = a_{oi} - 2\dot{a}_{oi} \Delta t \quad (73)$$

Este método, tal como o método das diferenças centrais, é condicionalmente estável, ou seja, requer um intervalo de tempo de integração Δt menor que um determinado valor crítico

Δt_{cr} . Leech et al [15], mostraram que a amplitude do intervalo de tempo a considerar está limitada pela expressão

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = T_n / \pi = 2 / \omega_n \quad (74)$$

onde T_n é o menor período e ω_n é a máxima frequência angular da estrutura.

Normalmente, o valor ω_n não é calculado, utilizando-se, em alternativa a (74), expressões aproximadas e adaptadas a cada situação. Levy e Wilkinson [6] sugerem que o intervalo de tempo a adoptar, seja obtido a partir da expressão:

$$\Delta t \leq 1/3 \sqrt{(m_i/k_i)_s} \quad (75)$$

em que, $(m_i/k_i)_s$ é o menor dos cocientes entre as várias massas do sistema e a soma da rigidez dos elementos nelas actuantes.

A utilização deste método de integração possibilita a implementação do MEC em computadores de pequena capacidade de memória.

Relativamente aos sistemas estruturais discretizados por elementos finitos, considerou-se uma análise dinâmica linear elástica, em que o amortecimento estrutural e o amortecimento viscoso da suspensão foram desprezados. A não consideração de forças dissipativas, reduz as equações de equilíbrio dinâmico (1), dum sistema discretizado por elementos finitos, à seguinte forma:

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{a}} + \tilde{K} \tilde{a} = \tilde{P} \quad (76)$$

em que as matrizes globais \tilde{M} e \tilde{K} da estrutura resultam do agrupamento das respectivas matrizes dos diferentes elementos finitos, previamente calculados no sistema de coordenadas globais.

A determinação das frequências e modos próprios de vibração da estrutura faz-se através do estudo das vibrações livres desta, quando não existem fontes exteriores de excitação \tilde{P} . Como as vibrações livres são harmónicas, a equação (76) transforma-se em:

$$\tilde{K} \tilde{\phi} = \omega^2 \tilde{M} \tilde{\phi} \quad (77)$$

em que ω é a frequência angular de vibração e $\tilde{\phi}$ é o modo próprio respectivo.

Esta equação matricial traduz-se no problema clássico de valores e vectores próprios, em que os valores próprios são os quadrados das frequências angulares de vibração e os vectores próprios são os modos próprios de vibração. A resolução deste problema é conseguida através da aplicação do método numérico da iteração por sub-espacos, que se tem mostrado eficiente na análise de sistemas complexos [14].

Por sua vez, a determinação da resposta dinâmica da estrutura requer também a utilização de métodos numéricos. A análise dinâmica pode ser feita, quer através do método da sobreposição modal, aproveitando a prévia análise de valores e vectores próprios, quer utilizando o método de integração directa passo a passo de Newmark [14, 16].

Os dois métodos são equivalentes, se na sobreposição modal forem incluídos todos os modos de vibração e se for usado o mesmo esquema de integração para as equações de movimento, ou se na integração directa, o passo de tempo de integração for escolhido suficientemente grande, de modo a eliminar a componente da resposta dinâmica resultante das frequências mais elevadas. Na fig. 10, apresenta-se o esquema de integração numérica implementado no programa DINAMI.F77, utilizando os métodos atrás referidos.

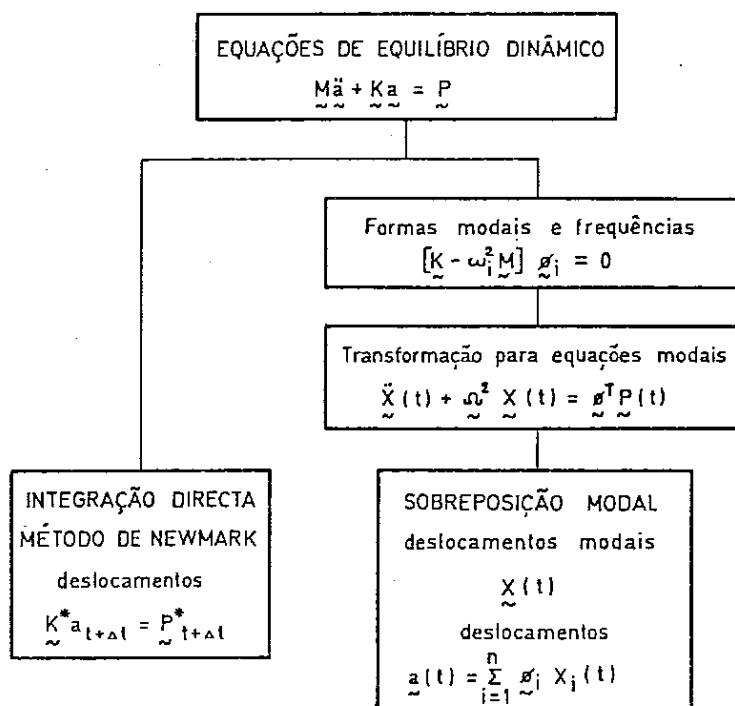


Fig. 10 - Métodos para a análise dinâmica linear elástica implementados no programa DINAMI.F77

Atendendo a que, no tipo de estruturas em análise, as frequências mais baixas e os respectivos modos de vibração são as mais importantes em termos da resposta da estrutura e que o MEF conduz a aproximações pouco correctas das frequências mais elevadas, o estudo de vibrações livres destas estruturas é feito considerando apenas um número reduzido de frequências e respectivos modos de vibração.

4.2. Exemplos de aplicação

4.2.1. Modelo rígido-flexível bidimensional de um camião

Neste exemplo, o modelo rígido-flexível bidimensional, representado na fig. 1-b) e descrito no ponto 2.2, é utilizado para observar o comportamento de um camião circulando a uma velocidade de 10 km/h, quando o rodado do eixo dianteiro passa sobre um obstáculo de 0.1m de altura. O veículo está assim sujeito a uma acção vertical simétrica, resultante das condições de circulação.

O modelo inclui as características de amortecimento introduzidas pelos pneus e suspensão. As características dos diferentes elementos constituintes, típicas de veículos comerciais Norte Americanos [17], estão indicados na tab. 1.

Estrutura

Dimensões	- a = 1.27 m
	- b = 3.03 m
	- c = 5.70 m
massa	- $m_3 = 5350 \text{ Kg}$
mom. Inércia	- $I_4 = 3400 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
massa modal	- $m_5 = 507 \text{ Kg}$
rigidez modal	- $K_5 = 8.79 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
ampl. modal unitária nos apoios	- $d_1 = 0.069 \text{ m}$
	- $d_2 = -0.122 \text{ m}$

Eixo dianteiro

massa	- $m_1 = 360 \text{ Kg}$
suspensão -rigidez	- $K_2 = 3.57 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
-amortec.	- $C_2 = 1.15 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$
pneus -rigidez	- $K_1 = 1.56 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
-amortec.	- $C_1 = 7.00 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$

Eixo traseiro

massa	- $m_2 = 675 \text{ Kg}$
suspensão -rigidez	- $K_4 = 6.30 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
-amortec.	- $C_4 = 2.90 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$
pneus -rigidez	- $K_3 = 5.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
-amortec.	- $C_3 = 1.20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$

TAB. 1 - Características do modelo bidimensional

Este modelo permite simular a perda de contacto das rodas com o pavimento. Para tal, é necessário considerar o peso bruto do conjunto e as respectivas condições iniciais, não podendo efectuar-se a análise a partir da posição de equilíbrio estático, sem estas considerações.

Nas figs. 11, 12 e 13, apresentam-se alguns dos resultados obtidos nos primeiros 0.25s da análise. Verifica-se que entre os instantes de tempo $t=0.1325\text{s}$ e $t=0.1850\text{s}$, o rodado dianteiro deixa de contactar com o solo, já que a força actuante no elemento mola/amortecedor, representando os pneus dianteiros, é nula e a deformação do respectivo elemento é positiva. A estrutura do veículo está sujeita a uma aceleração máxima de 1.27g, e o maior deslocamento

vertical do seu centro de massa C.G., ocorre para o instante $t=0.2075s$ e tem o valor $\delta=(u_{30}-u_3)+0.3595 \times 5=0.673 \times 10^{-2} m$, em que 0.3595 é o valor da deformação modal no C.G., para uma amplitude modal unitária. O tempo de CPU gasto na análise, foi de 6.7s.

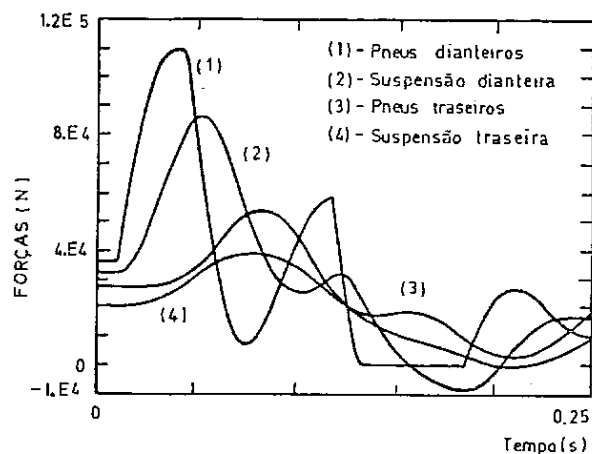


Fig. 11 - Forças actuantes nos pneus e suspensão

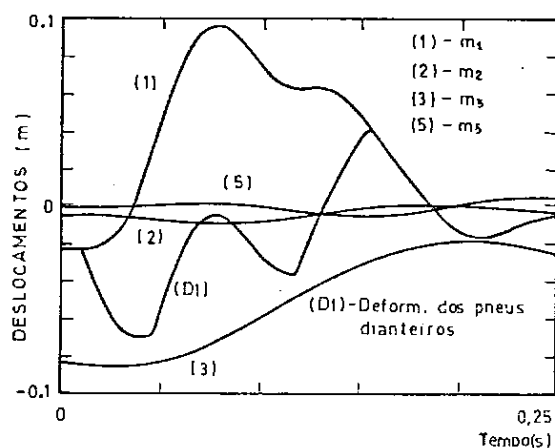


Fig. 12 - Deslocamentos verticais dos C.G. dos vários elementos

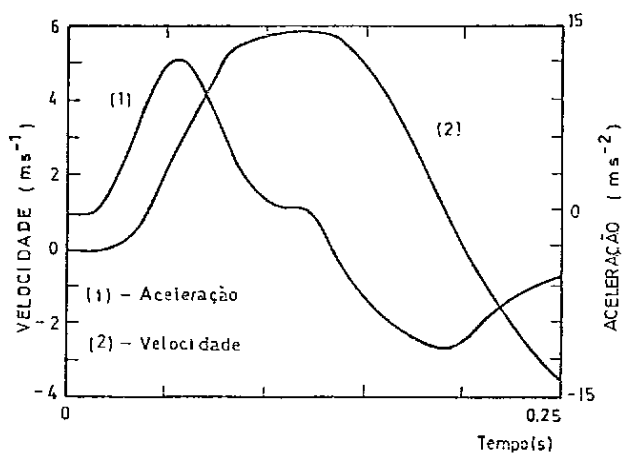


Fig. 13 - Aceleração e velocidade do C.G. da estrutura

4.2.2. Modelo rígido tridimensional de um automóvel

O modelo rígido de um automóvel, com 11 graus de liberdade, representado na fig. 14, foi proposto por Levy e Wilkinson [6]. Este modelo é muito simplificado, quando comparado com um verdadeiro automóvel. Por exemplo, o movimento lateral e a rotação em torno do eixo dos z , não são considerados.

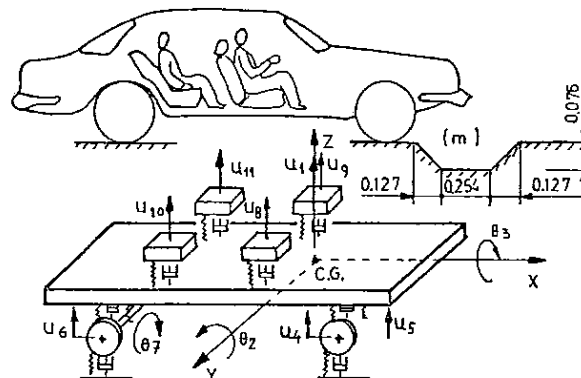


Fig. 14 - Modelo tridimensional de um automóvel [6]

O modelo inclui 12 elementos mola/amortecedor lineares, para simular o comportamento dos pneus, suspensão e molas dos assentos e 4 batentes, para limitar o deslocamento das rodas no sentido da estrutura. Na tab. 2, indicam-se as características dos diferentes elementos constituintes do modelo.

- - indica posição dos elementos mola
- 1,2 - localização das rodas da frente, suspensão dianteira
- 3,4 - localização das rodas traseiras
- 5 a 8 - localização dos passageiros
- 9,10 - suspensão traseira
- (todas as dimensões em metros)

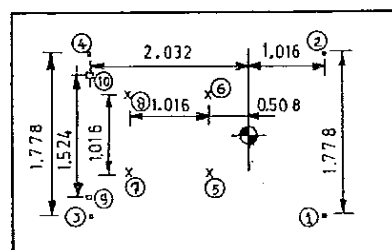


Fig. 15 - Geometria do automóvel

Cada passageiro e o respectivo assento são modelados em conjunto. A suspensão dianteira é independente e o eixo traseiro é rígido, o que é característico de automóveis de tracção atrás. Na fig. 15, indica-se a disposição relativa dos diversos elementos do conjunto.

Estrutura

massa	- m_1	= 1134 Kg
mom. Inércia yy	- I_2	= 1829 Kg.m ²
mom. Inércia xx	- I_3	= 7306 Kg.m ²

Rodas dianteiras

massa	- $m_{4,5}$	= 45 Kg
suspensão -rigidez	- $K_{3,4}$	= 1.75×10^4 N.m ⁻¹
-amortec.	- $C_{3,4}$	= 5.25×10^3 N.s.m ⁻¹

Eixo traseiro

massa	- m_6	= 136 Kg
mom. Inércia	- I_7	= 79 Kg.m ²
suspensão -rigidez	- $K_{7,8}$	= 1.05×10^4 N.m ⁻¹
-amortec.	- $C_{7,8}$	= 3.15×10^3 N.s.m ⁻¹

<u>Pneus</u> -rigidez	- $K_{1,2,5,6}$	= 4.11×10^5 N.m ⁻¹
-amortec.	- $C_{1,2,5,6}$	= 8.75×10^3 N.s.m ⁻¹

<u>Bacentes</u> -rigidez	- $K_{s1,2,3,4}$	= 1.75×10^5 N.m ⁻¹
-folga	- $U_{c1,2,3,4}$	= 0.127 m

Passageiros + assentos

massa	- $m_{8,9,10,11}$	= 80 Kg
rigidez	- $K_{9,10,11,12}$	= 5.25×10^3 N.m ⁻¹
amortec.	- $C_{9,10,11,12}$	= 1.4×10^3 N.s.m ⁻¹

TAB. 2 - Características do modelo tridimensional

Como acção resultante das condições de circulação considerou-se uma acção vertical assimétrica, provocada pela passagem da roda dianteira direita sobre um obstáculo, quando o veículo circula à velocidade de 16km/h.

Alguns dos resultados obtidos são apresentados nas fig. 16 e 17. Assim por exemplo, pode-se verificar o efeito da suspensão do veículo na redução da amplitude e variação mais gradual do deslocamento do passageiro da parte da frente direita, comparativamente à configuração do obstáculo. Por outro lado, constata-se que o mesmo passageiro está sujeito à maior variação de forças induzidas pelo veículo (423 N à tracção e 512 N à compressão), o que tendo em conta o peso considerado para o conjunto passageiro + assento (779 N), implica a sujeição do passageiro a acelerações de 1/2g em excesso. Convem notar que, este modelo não prevê a possibilidade das rodas perderem o contacto com o pavimento. O tempo de CPU gasto na análise, foi de 5s.

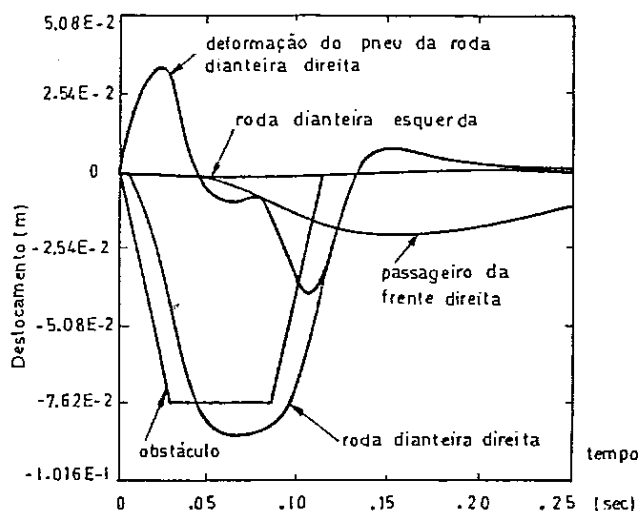


Fig. 16 - Resposta de alguns elementos em termos de deslocamento.

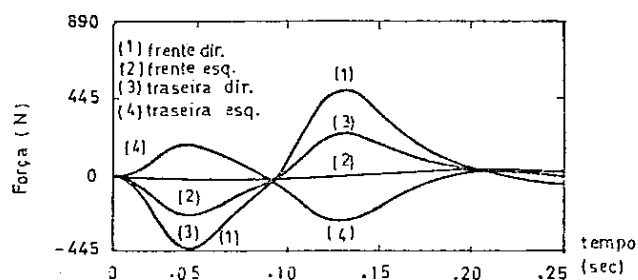


Fig. 17 - Forças que sujeitam os passageiros do automóvel

4.2.3. Modelo de elementos finitos de um semi-reboque rebaixado (38t)

A plataforma de um semi-reboque rebaixado foi discretizada por elementos finitos, a partir da sua configuração de anteprojecto [18]. A suspensão do veículo foi simulada através de elementos de viga com rigidez axial idêntica à rigidez, correspondente ao carregamento estático, indicada no catálogo da suspensão. As translações de corpo rígido no plano da estrutura foram restringidas. Na fig. 18, apresenta-se a discretização com elementos finitos de viga e de placa utilizada na análise.

A carga transportável (24 440 Kg) considerou-se uniformemente distribuída pela superfície do veículo e foi modelada através de massa concentradas nos nós da estrutura.

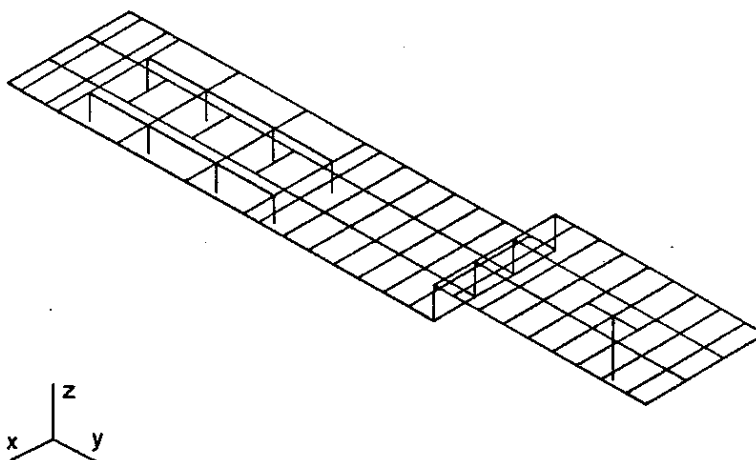


Fig. 18 - Discretização com elementos de viga e de placa

Na análise de vibrações livres efectuada, determinaram-se os primeiros 10 modos de vibração livre da estrutura e as respectivas frequências, utilizando duas discretizações diferentes. Na tab. 3, apresentam-se os valores obtidos numericamente para as frequências naturais, bem como as primeiras frequências de torção e flexão determinadas por métodos analíticos [19]. Apesar das simplificações efectuadas no modelo de cálculo analítico, os resultados obtidos são bastante interessantes.

Modos de Vibração		Frequências Naturais f [Hz] (métodos analíticos) [19]	Frequências Naturais f [Hz] (discretização por elem. de viga)	Frequências Naturais f [Hz] (discretização por elem. de viga+ placa)
1	Rotação de corpo rígido (Plano XY)	-	0.120	0.052
2	1 ^o modo de torção	0.457	0.721	0.714
3	Rotação de corpo rígido (XX) (vibração da suspensão)	-	1.071	1.064
4	1 ^o modo torção+flexão	-	2.491	2.532
5	2 ^o modo de torção	-	3.083	3.126
6	1 ^o modo de flexão	3.582	3.763	3.825
7	2 ^o modo de flexão	-	4.370	4.451
8	2 ^o modo de torção+flexão	-	5.908	5.977
9	3 ^o modo de torção+flexão	-	6.912	7.460
10	3 ^o modo de flexão	-	8.652	8.777
			223 elem. de 2 nós - - 140 nós 784 Graus de liberd.	33 elem de 2 nós 190 elem. de 3 nós 80 elem. de 8 nós 330 nós 1924 Graus de liberd.

TAB. 3 - Modos de vibração e frequências naturais

Da análise de resultados, constata-se uma predominância da torção nos modos associados a deformações estruturais correspondentes às frequências de vibração mais baixas, o que está de acordo com a importância atribuída às acções verticais assimétricas no dimensionamento deste tipo de estruturas [3]. No entanto, esta tendência deverá ser atenuada, na estrutura real, pela existência de travamentos entre a moldura lateral e as longarinas centrais. Por outro lado verifica-se que, a frequência de vibração das massas suspensas (vibração da suspensão) está dentro dos valores esperados (1 a 2 Hz) [20].

Na fig. 19 e 20, apresentam-se dois dos modos de vibração estrutural obtidos na análise.

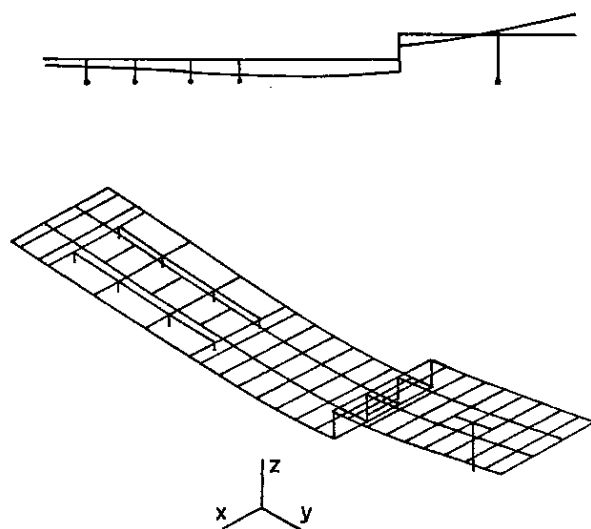


Fig. 19 - 1^o modo de flexão (50x)

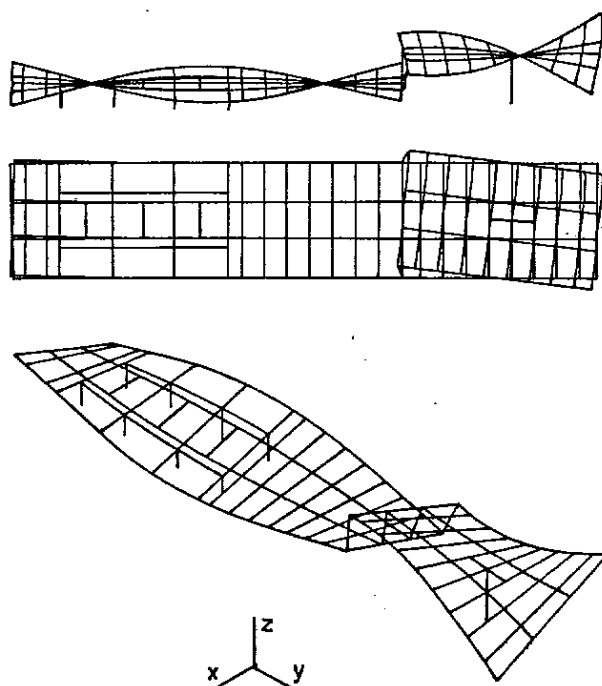


FIG. 20 - 2^o modo de torção+flexão (40x)

5. CONCLUSÕES

As várias componentes da resposta dinâmica, de sistemas mecânicos rígidos e rígido-flexíveis analisados através do MEC, podem ser úteis no projecto e selecção de diversos parâmetros e elementos constituintes dos diferentes veículos modelados, desde que a análise dinâmica esteja convenientemente enquadrada numa metodologia previamente definida.

Assim, as acelerações são utilizadas na análise do conforto na condução e na segurança da carga transportável. Os seus valores máximos empregam-se na determinação dos coeficientes dinâmicos a utilizar no dimensionamento estático das estruturas. As curvas de velocidade podem ser usadas na escolha dos amortecedores. As curvas de deslocamentos têm utilidade na selecção de pneus, no projecto de suspensão e na escolha das dimensões das folgas dos batentes. Por último, as forças e deformações dos elementos de força podem ser empregues na determinação das forças induzidas na estrutura do veículo, no projecto dos elementos de suspensão e na obtenção das forças de atrito máximas na travagem [21].

Por outro lado, as diversas acções resultantes, das condições de circulação e do funcionamento do motor do veículo excitam diferentes partes da estrutura, levando-as com frequência a vibrar concordantemente. A vibração estrutural afecta, entre outras coisas, a vida à fadiga da estrutura e a manobrabilidade e condução do veículo.

O estudo de vibrações livres de estruturas de veículos, discretizadas por elementos finitos, permite projectar estruturas com suficiente rigidez à flexão e torção, evitando que as respectivas frequências próprias sejam próximas das frequências próprias da suspensão e das frequências das diferentes acções actuantes, de modo a impedir a ocorrência de fenómenos de ressonância.

REFERENCIAS

1. G. H. TIDBURY - "Vehicle structural analysis: a survey", Int. J. of Vehicle Design, Vol. 1, no2, pp. 165-172, U. K., 1980.
2. J. PAWLOWSKI - Vehicle Body Engineering, Business Books Ltd, London, 1969.
3. J. A. ALMACINHA, L. M. DINIS - "Acções a considerar no projecto de veiculos automóveis. O cálculo estático no dimensionamento da estrutura", Tecnometal, no 45, pp. 15-22, 1986
4. A. JOLLY - "Study of ride confort using a nonlinear mathematical model of a vehicle suspension", Int. J. of Vehicle Design, Vol. 4, no3, pp. 233-244, U. K., 1983.
5. J. A. ALMACINHA - Análise Dinâmica de Estruturas de Veículos, Dissertação de Mestrado em Engenharia Estrutural, FEUP, 1985.
6. S. LEVY, J. P. D. WILKINSON - The Component Element Method in Dynamics, McGraw-Hill Book Company, U. S. A., 1976.
7. O. C. ZIENKIEWICZ - The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company (U. K.) Ltd, 1979.
8. R. W. CLOUGH, J. PENSIEN - Dynamics of Structures, McGraw-Hill Kogakusha Ltd, Tokyo, 1975.
9. W. C. HURTY, M. F. RUBINSTEIN - Dynamics of Structures, Prentice-Hall, U. S. A., 1964.
10. E. HINTON, D. R. J. OWEN - An Introduction to Finite Element Computation, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K., 1979.
11. R. D. MINDLIN - "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
12. J. F. DIAS RODRIGUES - Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado em Engenharia Estrutural, FEUP, 1984.
13. J. F. McNAMARA - "Solution schemes for problems of nonlinear structural dynamics", J. Pressure Vessel Technology, Trans. ASME, 96, Ser. J, 96-102, 1974.
14. K. J. BATHE, E. L. WILSON - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.

15. J. W. LEECH, P. T. HSU, E. W. MACK - "Stability of a finite difference method for solving matrix equations", A. I. A. A. Journal, Vol. 3, n^o11, 2172-2173, 1965.
16. N. M. NEWMARK - "A method of computation for structural dynamics", Proc. ASCE, J. of Engineering Mechanics Div., 85, 67-94, 1959.
17. S. SANKAR, R. GUNTAR, T. S. SANKAR - "Effect of wheel slip on the stability and stopping ability of a road vehicle", Int. J. of Vehicle Design, Vol.3, n^o1, pp. 77-89, U. K., 1982.
18. P. T. CASTRO, J. A. ALMACINHA - Projecto de um Semi-Reboque Rebaixado (38t), Relatório interno, DEMec, FEUP, 1983.
19. G. H. TIDBURY - Basic Vehicle Structural Analysis: textos, Curso sobre a Concepção de Estruturas de veículos, 16 a 20 Fev., DEMec, FEUP, 1981.
20. G. JEUFFROY - Conception et Construction des chaussées, Eyrolles Editeur, Paris, 1970.
21. G. R. POTTS, H. S. WALKER - "Nonlinear truck ride analysis", J. Engineering for Industry, Trans. ASME, 96, ser. B, 597-602, 1974.