Modelos de Sistemas Hidráulicos

Paulo Lopes dos Santos, Paula Malonek

Controlo, 2023

DEEC, FEUP

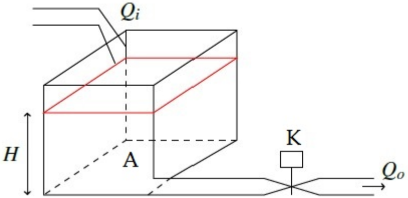
Outline

1. Nível de líquido num reservatório
   - Formulação do modelo
   - Linearização do modelo
   - Função de transferência

2. Sistemas linearizados com 2 tanques
   - Situação 1
   - Situação 2

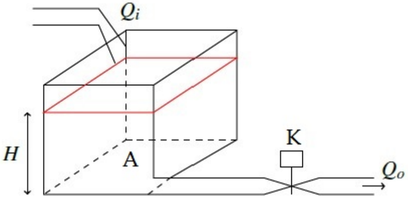
Nível de líquido num reservatório

Tanque



Nível de líquido num reservatório

Tanque

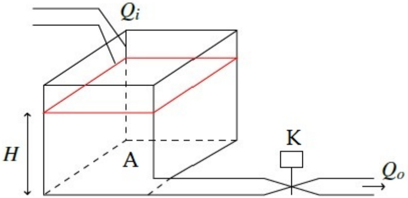


Grandezas físicas (sinais):

- H - Nível de líquido no tanque;
- Q_i - Caudal de entrada;
- Q_o - Caudal de saída.

Nível de líquido num reservatório

Tanque

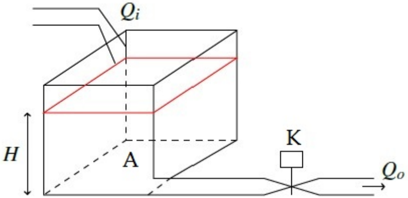


Parâmetros do sistema:

- A - Área da base do tanque;
- K - Constante da válvula de saída

Nível de líquido num reservatório

Tanque

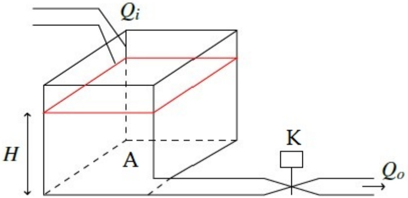


$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_i(t) - Q_o(t)$$

V - Volume do tanque $= AH$

Nível de líquido num reservatório

Tanque



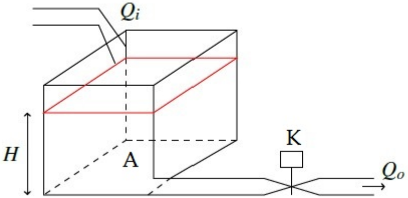
$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_i(t) - Q_o(t)$$

V - Volume do tanque $= AH$

$$A\frac{dH(t)}{dt} = Q_i(t) - Q_o(t)$$

Nível de líquido num reservatório

Tanque



Lei de Torricelli:

$$Q_o(t) = K\sqrt{H(t)}$$

Nível de líquido num reservatório

Modelo do tanque:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dH(t)}{dt} &= Q_i(t) - Q_o(t) \\
Q_o(t) &= K\sqrt{H(t)}
\end{aligned}
$$

Nível de líquido num reservatório

Modelo do tanque:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dH(t)}{dt} &= Q_i(t) - Q_o(t) \\
Q_o(t) &= K\sqrt{H(t)}
\end{aligned}
$$

- Modelo não linear

Nível de líquido num reservatório

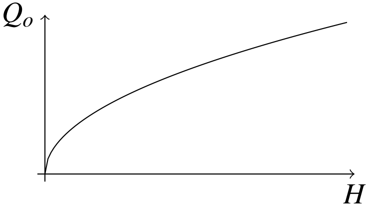
Modelo do tanque:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dH(t)}{dt} &= Q_i(t) - Q_o(t) \\
Q_o(t) &= K\sqrt{H(t)}
\end{aligned}
$$

- Modelo não linear
- Para prosseguir a análise vamos **Linearizar** o modelo.

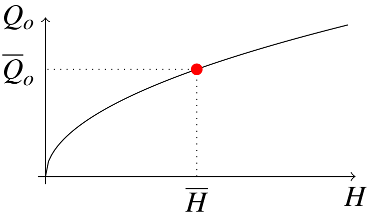
Linearização do modelo

Lei Torricelli:



Linearização do modelo

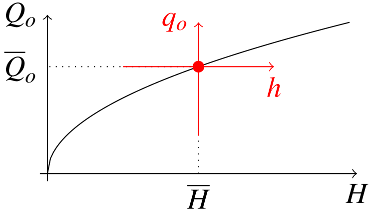
Lei Torricelli:



- Ponto de funcionamento: $(\overline{H}, \overline{Q}_o)$

Linearização do modelo

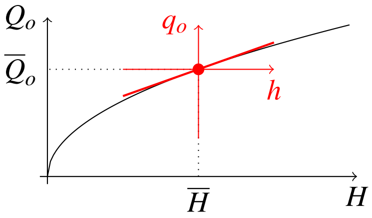
Lei Torricelli:



- Ponto de funcionamento: $(\overline{H}, \overline{Q}_o)$
- $h = \Delta H = H - \overline{H},\ q_o = \Delta Q_o = Q_o - \overline{Q}_o$

Linearização do modelo

Lei Torricelli:



- Ponto de funcionamento: $(\overline{H}, \overline{Q}_o)$
- $h = \Delta H = H - \overline{H},\ q_o = \Delta Q_o = Q_o - \overline{Q}_o$
- $q_o \approx \left.\dfrac{dQ_o}{dH}\right|_{H=\overline{H}} h = \dfrac{K}{2\sqrt{\overline{H}}} h = \dfrac{1}{R} h, \qquad R = \dfrac{2\sqrt{\overline{H}}}{K}$

Função de Transferência

- Modelo linearizado:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh(t)}{dt} & = & q_i(t) - q_o(t) \\ q_o(t) & = & \dfrac{1}{R}h(t) \end{cases}$$

Função de Transferência

- Modelo linearizado:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) \\ q_o(t) = \dfrac{1}{R}h(t) \end{cases}$$

- Transformada de Laplace (com $h(0) = 0$):

$$\begin{cases} AsH(s) = \dfrac{Q_i(s) - Q_o(s)}{s} \\ Q_o(s) = \dfrac{H(s)}{R} \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{1}{AR}Q_i(s)} = \frac{RQ_i(s)}{ARs + 1}$$

Função de Transferência

- Modelo linearizado:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh(t)}{dt} &= q_i(t) - q_o(t) \\ q_o(t) &= \dfrac{1}{R}h(t) \end{cases}$$

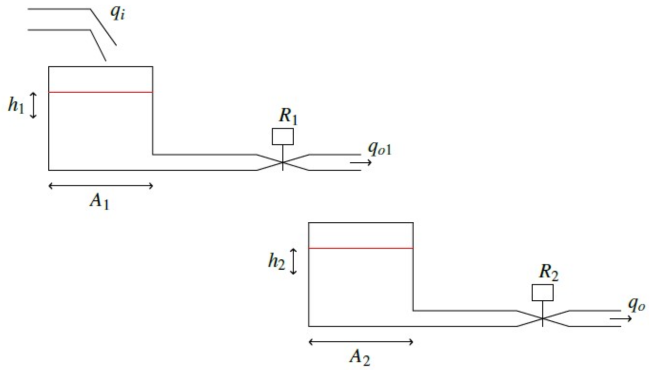
- Transformada de Laplace (com $h(0) = 0$):

$$\begin{cases} AsH(s) &= \dfrac{Q_i(s) - Q_o(s)}{s} \\ Q_o(s) &= \dfrac{H(s)}{R} \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{1}{AR}Q_i(s)} = \frac{RQ_i(s)}{ARs + 1}$$

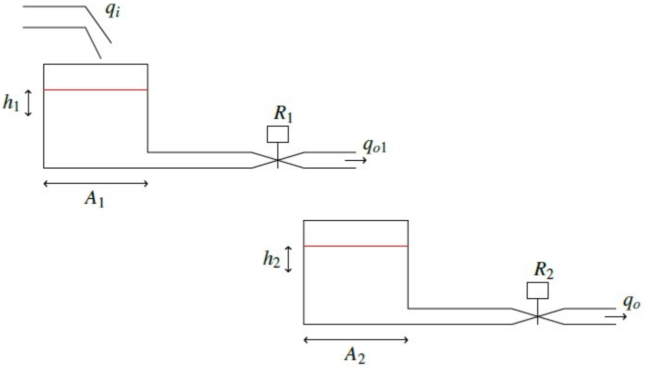
- Função de transferência:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_e}{\tau s + 1}, \quad K_e = R,\ \tau = AR.$$

Sistemas linearizados com 2 tanques: Situação 1



Sistemas linearizados com 2 tanques: Situação 1



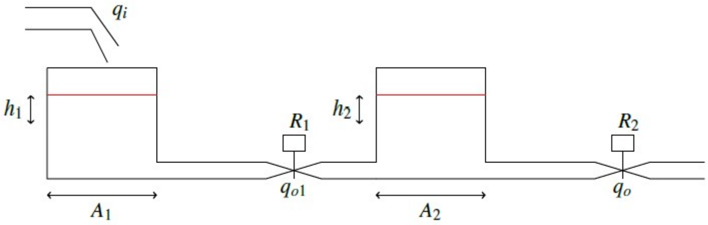
tanque 1

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{h(t)}{dt}_1 & = & q_i(t) - q_{o1}(t) \\ q_{o1}(t) & = & \dfrac{h_1(t)}{R_1} \end{cases}$$

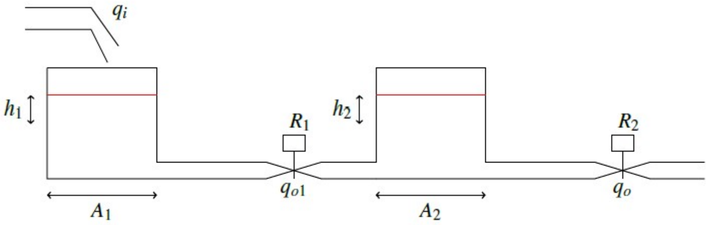
tanque 2

$$\begin{cases} A_2 \dfrac{h(t)}{dt}_1 & = & q_{o1}(t) - q_{o2}(t) \\ q_{o2}(t) & = & \dfrac{h_2(t)}{R_2} \end{cases}$$

Sistemas linearizados com 2 tanques: Situação 2



Sistemas linearizados com 2 tanques: Situação 2



tanque 1

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{h_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_{o1}(t) \\ q_{o1}(t) = \dfrac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \end{cases}$$

tanque 2

$$\begin{cases} A_2 \dfrac{h_2(t)}{dt} = q_{o1}(t) - q_{o2}(t) \\ q_{o2}(t) = \dfrac{h_2(t)}{R_2} \end{cases}$$