

INTRODUÇÃO À PROJECCÃO CENTRAL

1. GENERALIDADES

A projecção central é um processo de representação gráfica de objectos que procura identificar-se com a imagem visual, razão porque também é conhecida como perspectiva rigorosa.

Reproduz-se, por intermédio da projecção central, a imagem materializada pela máquina fotográfica na fotografia. O método supõe o observador colocado em determinado ponto, a distância finita do objecto e do plano em que se faz a representação.

Este método exige para a sua execução um trabalho que nem sempre se justifica. Por este facto, empregam-se por vezes outros processos de representação dos objectos de execução menos demorada mas com imagens diferentes das obtidas pela projecção central. Pela sua rapidez designam-se de perspectivas rápidas ou, também, por perspectivas paralelas dado apoiarem-se em sistemas de projecção cilíndrica ou paralela.

A perspectiva rigorosa, obtida por projecção central tem sobretudo interesse na representação de edifícios ou de conjuntos de edifícios e de outras obras de grandes dimensões como pontes, barragens, etc. Também é corrente a sua utilização na representação de interiores arquitectónicos.

2. DEFINIÇÕES

A *figura 1* mostra o modo de obter a perspectiva dum objecto, que no caso da figura é, por simplicidade, um triângulo. Esta figura auxiliar-nos-á a definir alguns termos que são utilizados com grande frequência no estudo da perspectiva obtida por projecção central.

O ponto V, onde se localiza o observador, designar-se-á por ponto de vista, centro de projecção ou polo. As rectas que unem

este ponto com os que definem o objecto a representar chamam-se projectantes . O plano α , onde se pretende obter a perspectiva é referido como quadro ou plano de projecção. As intersecções com este plano das projectantes definem as perspectivas dos pontos correspondentes. Unindo entre si as perspectivas dos vértices do triângulo fica definida a perspectiva do triângulo.

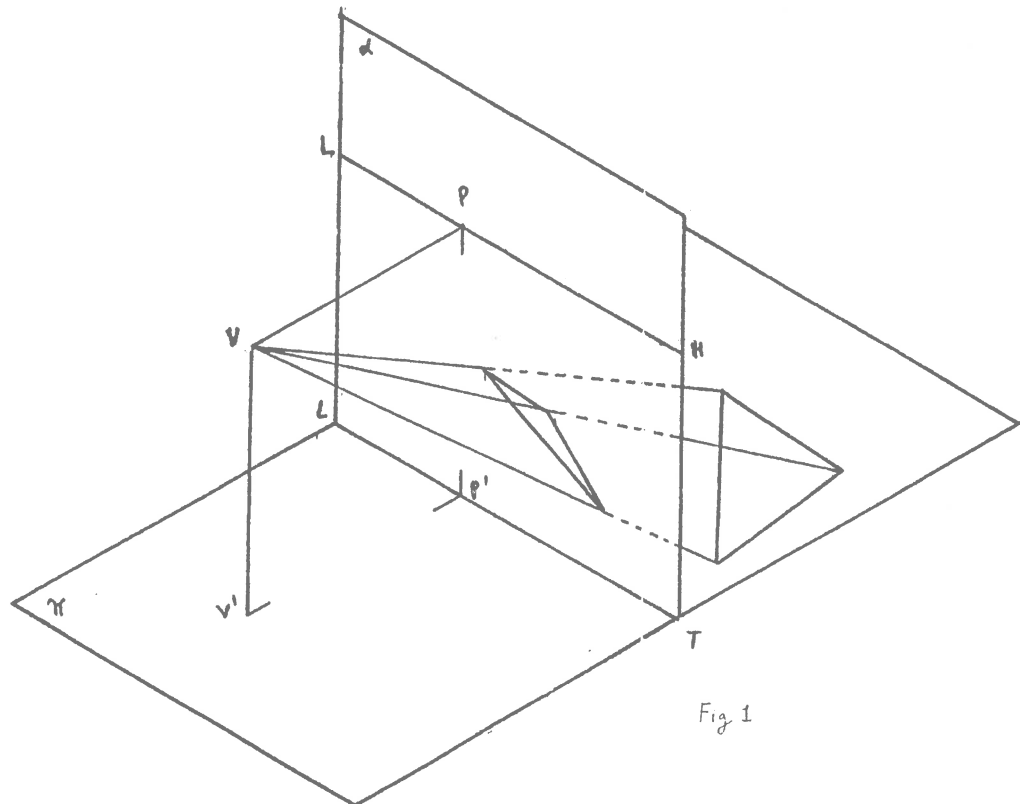


Fig 1

O plano π utiliza-se como referência para as alturas dos diferentes pontos que definem os objectos a representar e designa-se por plano horizontal de referência, simplesmente horizontal ou ainda geometral. A recta LT, intersecção do quadro com o geometral, chama-se Linha de Terra.

O plano horizontal que contém o ponto de vista chama-se plano do horizonte e a sua intersecção com o quadro - a recta LH - designa-se por linha do horizonte. Sobre esta linha situa-se o pé da perpendicular baixada do ponto de vista sobre o quadro - ponto P - chamado ponto principal. A projectante que passa pelo ponto P, designa-se por eixo de visão ou raio principal. A distância VP é referida como distância principal.

Os planos perpendiculares ao plano horizontal designam-se por planos verticais. O plano vertical que contém o raio principal chama-se plano principal de visão ou plano vertical principal. Sobre este plano encontram-se os pontos V e P e as suas projecções ortogonais sobre o plano horizontal V' e P' .

A *figura 1* representa uma situação em que o quadro se situa entre o ponto de vista e o objecto a representar. Nestas condições, as dimensões da perspectiva obtida vêm reduzidas relativamente às do objecto. Se o objecto estiver entre o observador e o quadro, a sua perspectiva ainda seria obtida pela intersecção com o quadro de um conjunto de rectas projectantes. Neste caso, as dimensões da perspectiva seriam maiores do que as do objecto. A representação em perspectiva rigorosa pode, pois aumentar ou diminuir as dimensões gerais do objecto, tudo dependendo da posição relativa do ponto de vista, do objecto ou do quadro.

3. PERSPECTIVA DUMA RECTA ASSENTE NO PLANO HORIZONTAL

Consideremos uma recta r assente no plano horizontal tal como está ilustrado na *figura 2*. Todas as projectantes correspondentes a pontos da recta r , estão contidas no plano definido pelo ponto V e pela recta r . A perspectiva da recta r é a intersecção deste plano com o plano do quadro.

Seja A a intersecção de r com a linha de terra. A perspectiva deste ponto coincide com ele próprio. Façamos passar por V uma recta paralela a r . Esta recta intersecta o quadro no ponto F . Este ponto pertence necessariamente ao plano (V,r) , pelo que a intersecção deste plano com o plano do quadro é a recta AF , perspectiva da recta r . O ponto F situa-se sobre a linha de horizonte. Todos os pontos da recta r situados no semi-espaço posterior ao quadro têm a sua perspectiva sobre o segmento AF e tanto mais próximo de F quanto mais afastado de A se situar o ponto. No limite poderemos dizer que o ponto F é a perspectiva de um ponto da recta r situado no infinito. Designa-se F como ponto de fuga da recta.

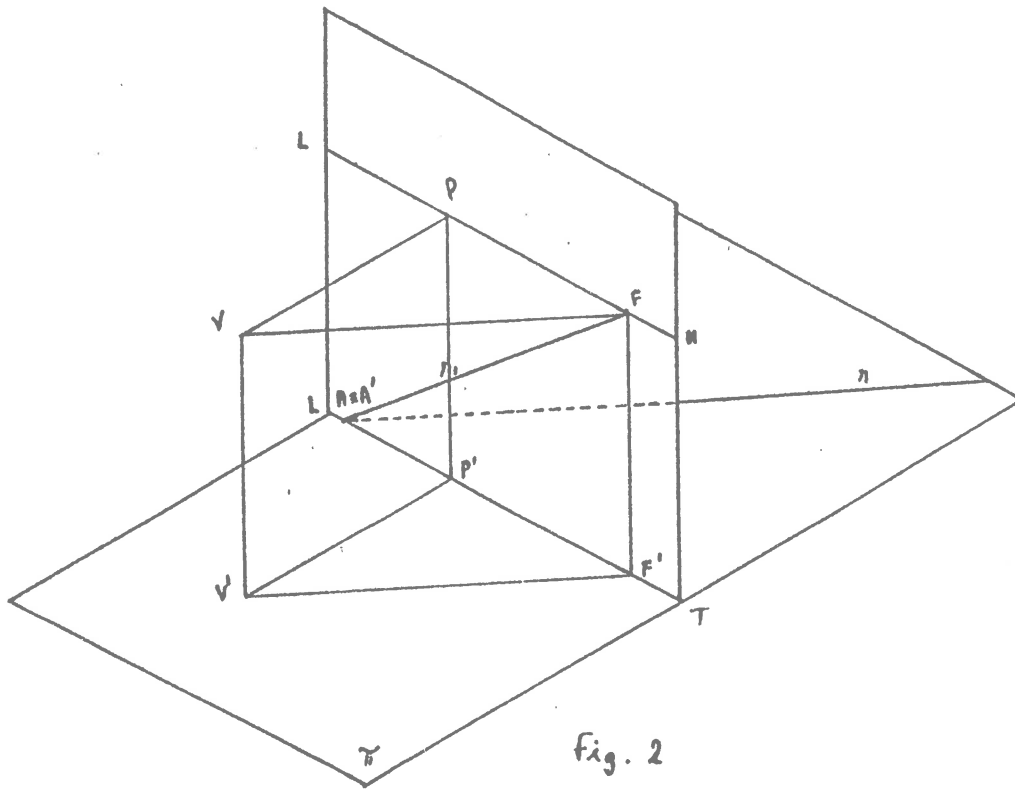


Fig. 2

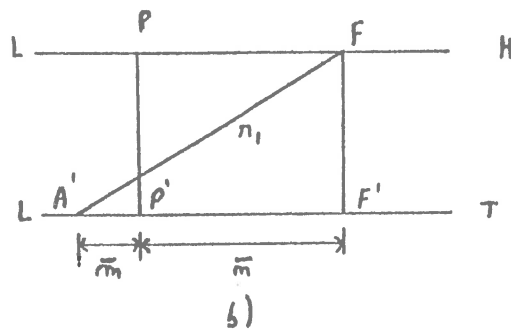
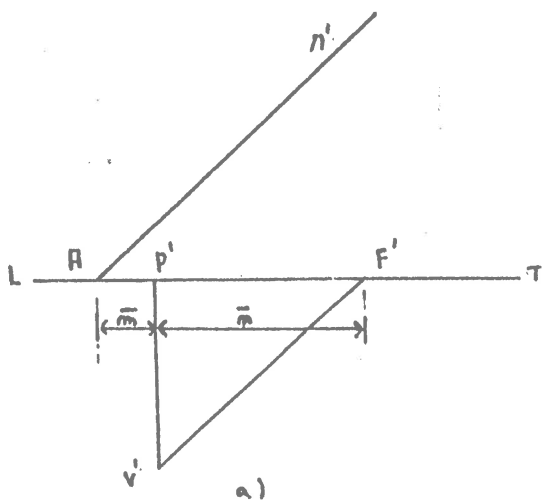
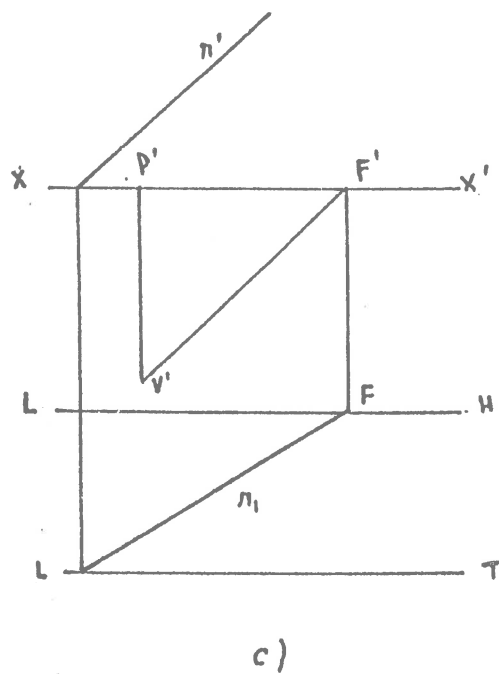


Fig. 3



Nas *figuras 3.a e 3.b*, representam-se, separadamente e em projecção, as porções do plano horizontal e do quadro que estão representados na *figura 2*. Em *3.a* faz-se passar por V' uma recta paralela a r que define F' e, em seguida, medem-se os comprimentos m e n que permitem marcar em *3.b* os pontos A' e F' . Unindo estes dois pontos obtém-se a recta r_1 , perspectiva da recta r .

Sobrepondo as *figuras 3.a e 3.b* é possível obter uma representação com a disposição exemplificada na *figura 3.c*, evitando a transposição dos comprimentos m e n . Para tornar a figura mais clara a linha de terra que aparece duas vezes, uma no plano horizontal e outra no quadro, é designada no primeiro caso por XX' e no segundo por LT' . Doutro modo, podemos dizer que a recta XX' representa a projecção horizontal da linha do horizonte.

Deve-se notar que a distância entre as rectas LH e XX na *figura 3.c* e noutras análogas, é perfeitamente indiferente para a construção da perspectiva, podendo mesmo LH estar acima de XX' . A disposição adoptada é, regra geral, ditada por razões de ordem estética e de espaço disponível no desenho.

Das figuras referidas fica claro que o comprimento do segmento $V'P'$ é a distância do ponto de vista ao quadro e que a distância entre as rectas LT e LH é a cota do ponto de vista relativamente ao geometral, designada por vezes como altura da linha do horizonte.

Atendendo ao modo como é determinado o ponto de fuga duma recta, (fazendo passar pelo ponto de vista uma recta paralela à dada e determinando a sua intersecção com o quadro) resulta evidente uma importante propriedade deste ponto: o ser também ponto de fuga de todas as rectas que são paralelas à dada. Doutro modo, podemos dizer que um ponto de fuga é característico duma determinada direcção. No caso particular das rectas de topo, o seu ponto de fuga é o ponto principal. A construção exposta não nos permite determinar a perspectiva de uma recta do plano horizontal paralela ao quadro. Com efeito não poderemos determinar nem o seu ponto de fuga, situado sobre LH no infinito, nem o seu ponto de intersecção com o quadro. Para determinar a perspectiva duma recta nestas condições teremos que determinar a perspectiva de dois dos seus pontos, problema de que se tratará de seguida.

4. PERSPECIVA DE UM PONTO DO PLANO HORIZONTAL

A perspectiva de qualquer ponto do plano horizontal fica definida pela intersecção da perspectiva de quaisquer duas rectas desse plano que contêm o ponto.

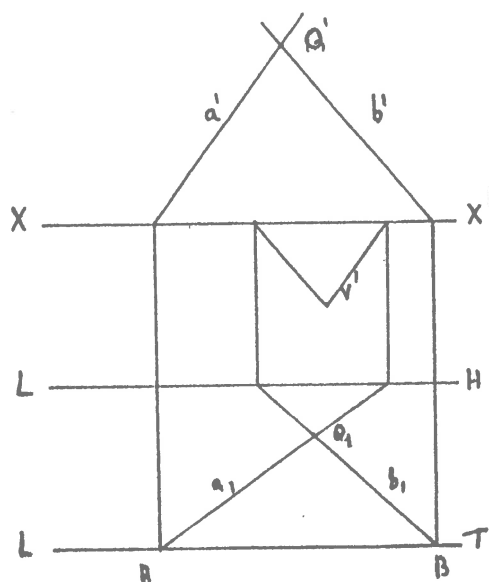


Fig. 4

Na *figura 4*, encontra-se representado o ponto Q cuja perspectiva se pretende determinar. O ponto Q pertence ao plano horizontal. Pelo ponto Q fazem-se passar as rectas a e b , do plano horizontal, que nele se intersectam. Determinaram-se as perspectivas, a_1 e b_1 , destas rectas. O ponto Q_1 é a perspectiva do ponto Q . As rectas a utilizar para a determinação da perspectiva de um ponto são, por razões de economia de tempo, aquelas cujas perspectivas sejam fáceis de determinar. As rectas normalmente escolhidas são as rectas horizontais de topo e as fazem 45° com o plano do quadro. Estas rectas são as mais utilizadas dado que os seus pontos de fuga são de simples determinação. Com efeito o ponto de fuga das rectas de topo é o ponto principal e o das rectas que fazem 45° com o quadro, denominado ponto de distância, goza da propriedade de estar a uma distância do ponto principal igual à distância entre o ponto de vista e o ponto principal.

5. PERSPECTIVA DUMA FIGURA ASSENTE NO PLANO HORIZONTAL

Conhecidas as construções para obter a perspectiva de um ponto ou duma recta do plano horizontal é possível determinar a perspectiva de qualquer figura desse plano, limitada por contornos curvos ou rectos, a partir da consideração de um numero suficiente de pontos e rectas característicos capazes de a definir. Normalmente não é necessário determinar individualmente a perspectiva de cada um dos pontos que definem a figura, pois a consideração dos pontos de fuga das suas linhas, simplifica consideravelmente o trabalho.

Na *figura 7* constrói-se a perspectiva de um rectângulo ABCD do plano horizontal. As rectas AD e BC de topo têm por ponto de fuga o ponto principal P, sendo imediata a determinação da sua perspectiva. Obteve-se em seguida a perspectiva da diagonal AC. A intersecção desta recta com a perspectiva das rectas AD e BC define os pontos A₁ e C₁, respectivamente. Os lados AB e CD, sendo paralelos ao quadro, têm perspectivas que lhe são paralelas. A partir dos pontos A₁ e C₁, resultam pois, imediatamente as perspectivas dos lados AB e CD. A sua intersecção com as perspectivas dos lados de topo definem os pontos B₁ e D₁.

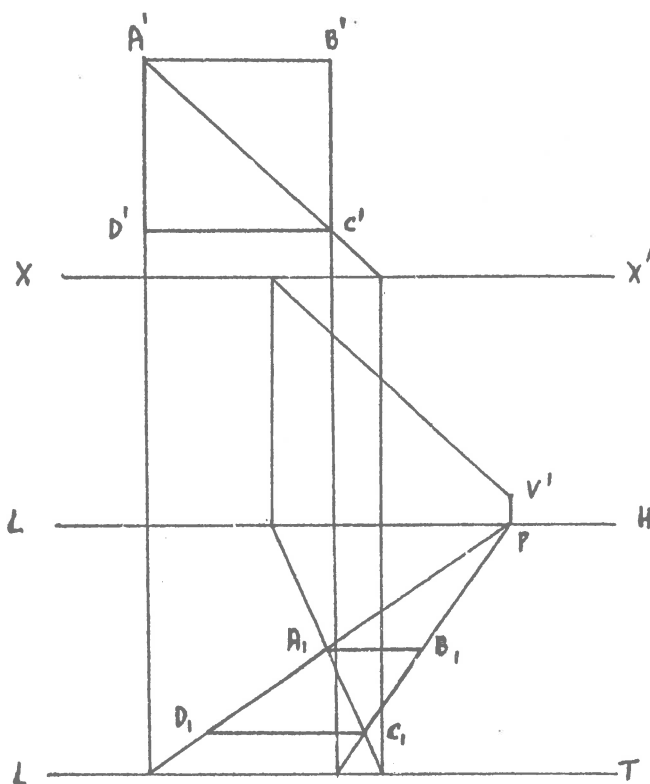


Fig. 7

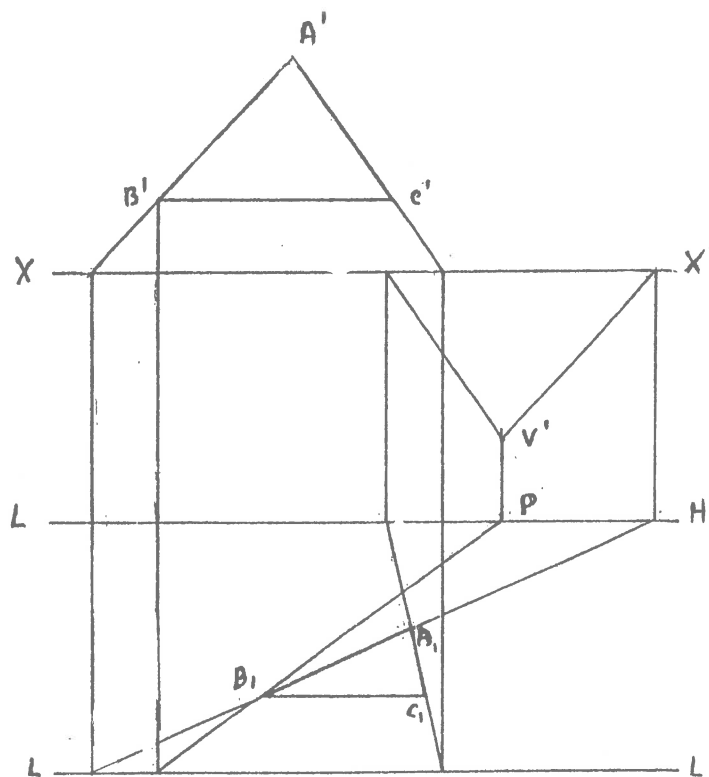


Fig. 8

Na *figura 8* apresenta-se a construção para obter a perspectiva de um triângulo ABC, em que o lado BC é paralelo à linha de terra. Utilizando os pontos de fuga das rectas AB e AC obtiveram-se as perspectivas destas rectas. O seu ponto de intersecção define A1, perspectiva de A. Conhecemos a direcção da perspectiva de BC. Para a traçar é necessária a perspectiva de um dos seus pontos. Utilizando uma recta de topo que contém o ponto B, cujo ponto de fuga é o ponto principal P, obtém-se B1. Traçando por B1 uma paralela à LT tem-se a perspectiva do terceiro lado do triângulo.

Se em vez de um polígono houvesse que determinar a perspectiva de uma curva qualquer, proceder-se-ia do mesmo modo, achando a perspectiva de um número suficiente de pontos para a definir. Na *figura 9* exemplifica-se a construção da perspectiva de uma circunferência assente no plano horizontal, através da consideração de um conjunto de pontos convenientemente escolhidos que são os pontos de tangência da circunferência ao quadrado que a circunscreve e os pontos de intersecção com as diagonais do quadrado.

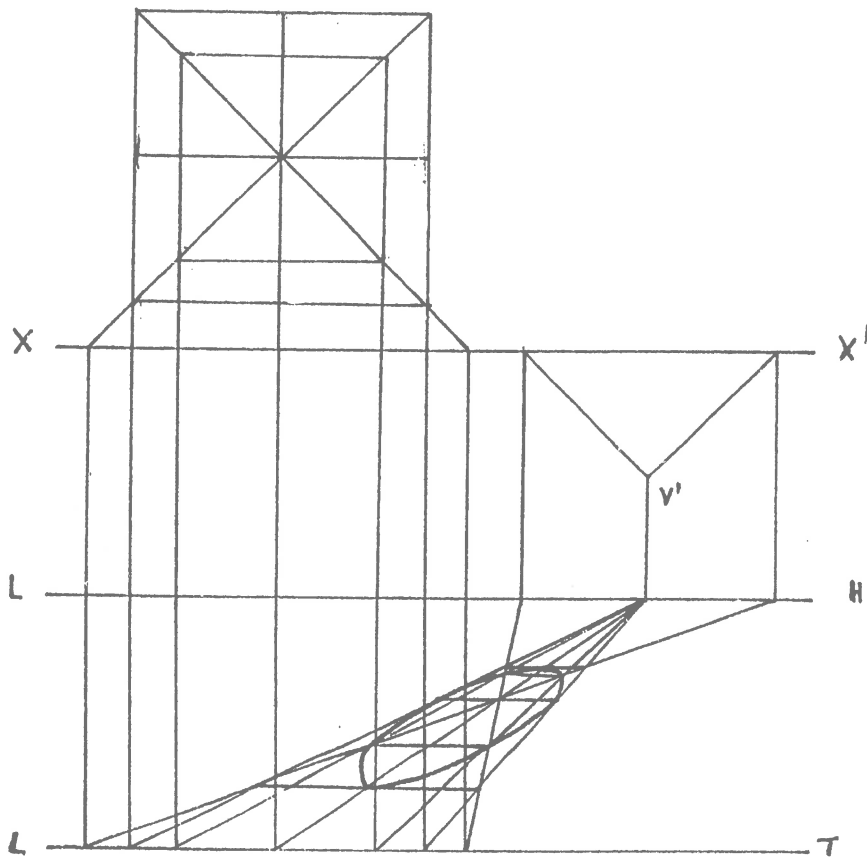


Fig. 9

Uma vez determinada a perspectiva do quadrado traçam-se as diagonais e obtém-se o centro, pelo qual se fazem passar as medianas. Traçou-se ainda a perspectiva do quadrado inscrito na circunferência que tem as mesmas diagonais do primeiro. Deste modo obtiveram-se as perspectivas de oito pontos da circunferência.

Um método prático de construir a perspectiva duma curva irregular qualquer, consiste em traçar uma quadricula sobre a curva e determinar a perspectiva dessa quadricula e, finalmente referenciar por meio dum conjunto de pontos a perspectiva da curva à perspectiva da quadricula.

6. PERSPECTIVA DE RECTAS E PONTOS DO ESPAÇO

A *figura 10* mostra a construção para a determinação da perspectiva de uma recta horizontal r cuja cota é h . O ponto A é o traço da recta r no quadro pelo que coincide com a sua perspectiva. O ponto F é a intersecção com o quadro de uma recta que passa pelo ponto de vista e é paralela à recta r - ponto de fuga de r . Os pontos A e F pertencem ao plano definido pelo ponto V e pela recta r e pertencem ao plano do quadro pelo que pertencem à intersecção destes planos. A recta r_1 que definem é a perspectiva da recta r .

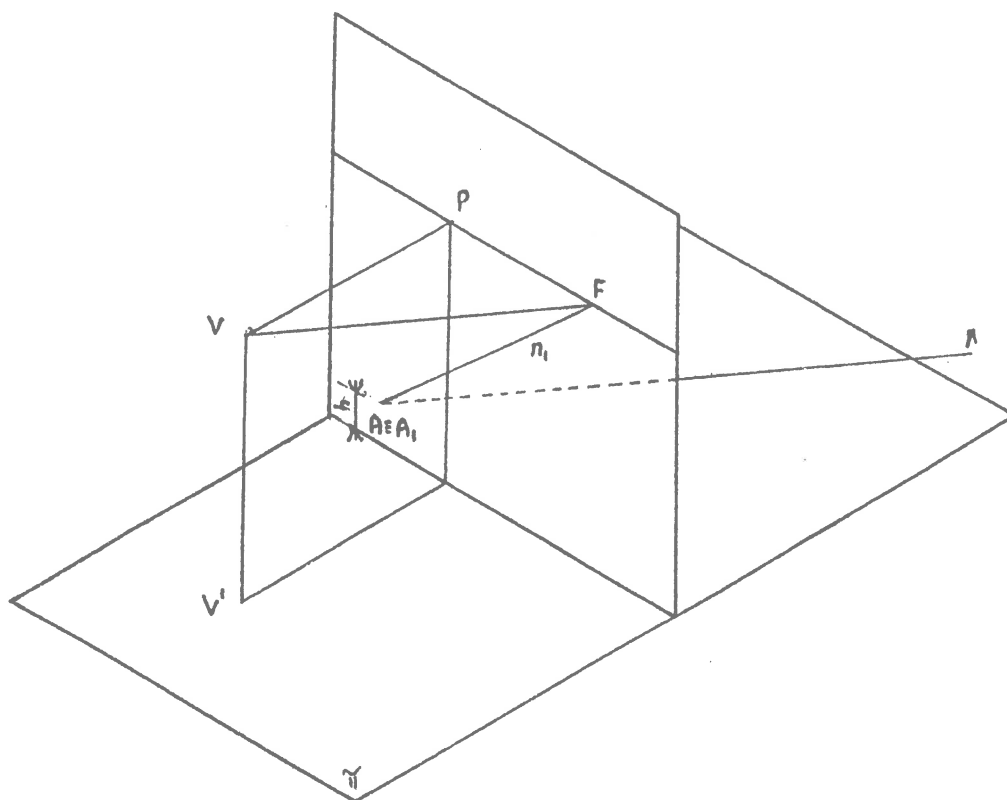


Fig. 10

A *figura 11* representa a construção para a determinação da perspectiva da recta r , em que h é a cota dos pontos da recta. Do que ficou dito pode-se concluir que os pontos de fuga de todas as rectas horizontais se situam sobre a linha de horizonte.

Na *figura 12* expõe-se a construção da perspectiva das rectas horizontais r , s e t de cotas h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente contidas num mesmo plano vertical.

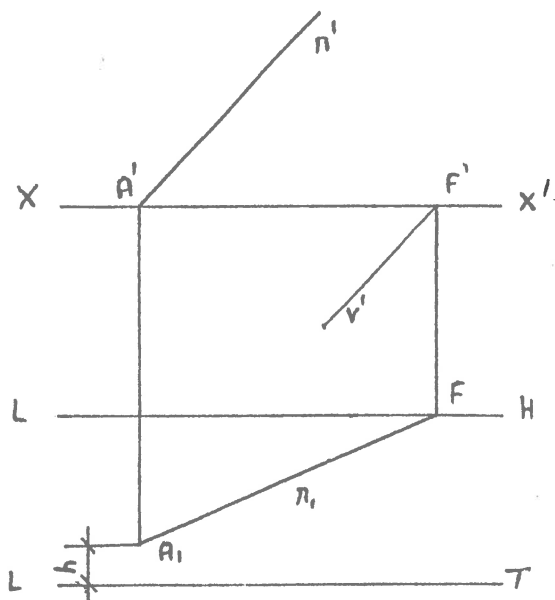


Fig. 11

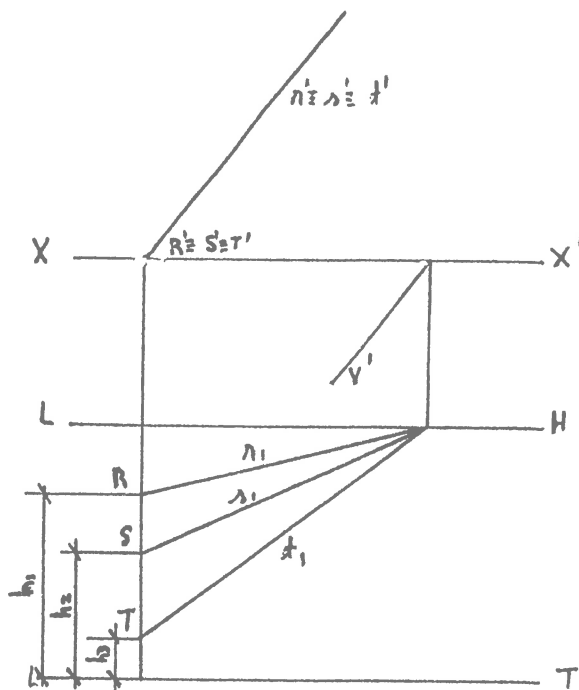


Fig. 12

Na *figura 13* faz-se a determinação da perspectiva de um ponto S de cota x e afastamento y . Para esse fim, construíram-se as perspectivas de duas rectas horizontais que se cruzam no ponto S : uma de topo em relação ao plano do quadro e outra fazendo com este plano um ângulo igual a 45° .

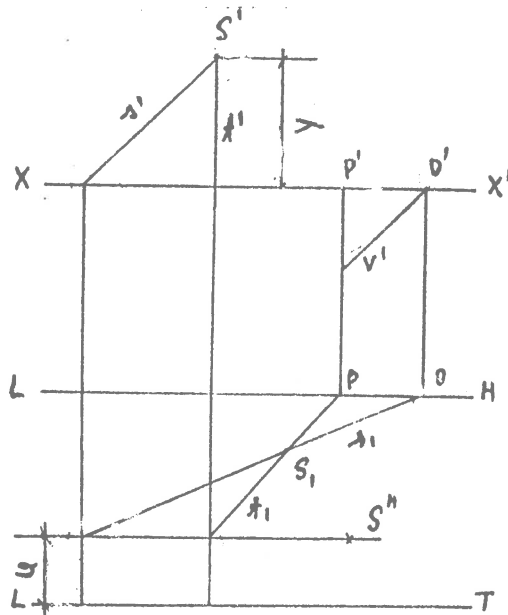


Fig. 13

Nessa figura apresenta-se um ponto identificado por S'' cuja função é indicar a cota do ponto S e que não tem que estar necessariamente sobre a linha de referência do ponto S' .

Na *figura 14*, apresenta-se a determinação da perspectiva do ponto S utilizando uma recta horizontal r e a projectante que passa por S . A perspectiva de S está naturalmente sobre a recta r_1 , perspectiva de r .

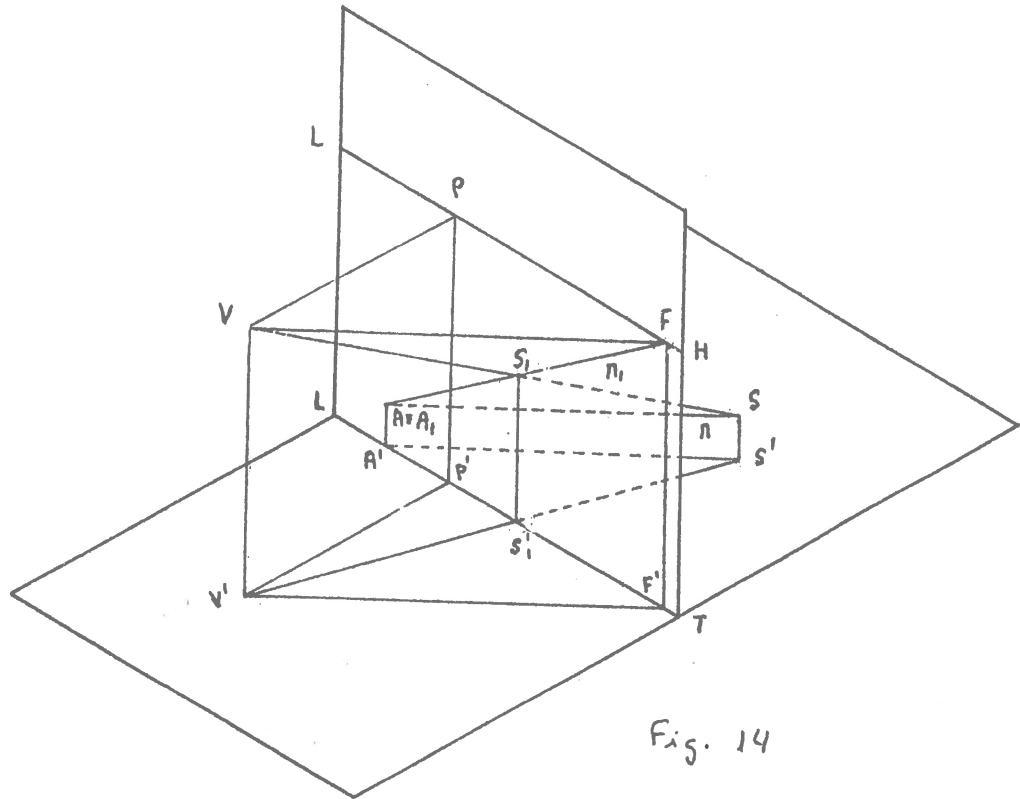


Fig. 14

Este ponto S_1 está ainda sobre a vertical do ponto S_1' , traço no plano do quadro da projecção horizontal da projectante VS' .

Na *figura 15* apresenta-se a construção que se realiza no conjunto planificado.

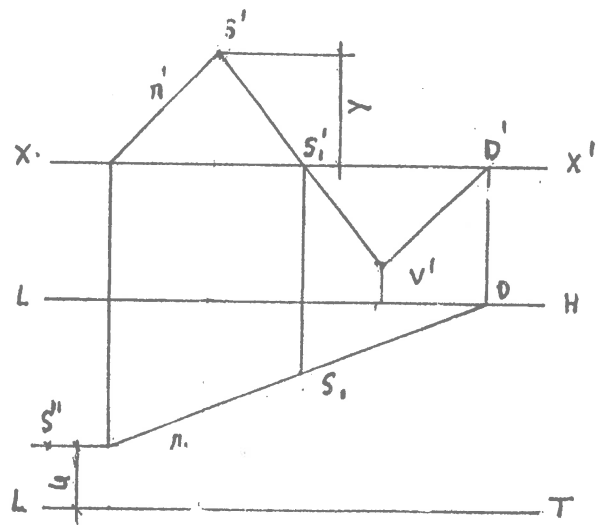


Fig. 15

Quando houver que representar a perspectiva de vários pontos fazem-se passar por todos eles rectas paralelas, de forma a que todos os pontos de fuga utilizados sejam sempre os mesmos.

Conhecida a forma de determinar a perspectiva de qualquer ponto do espaço é possível obter a perspectiva de qualquer recta oblíqua do espaço a partir de dois dos seus pontos. É ainda possível construir a perspectiva de rectas do espaço paralelas ao plano do quadro.

A *figura 16* apresenta o processo de determinar a perspectiva duma recta v vertical e duma recta h paralela à linha de terra.

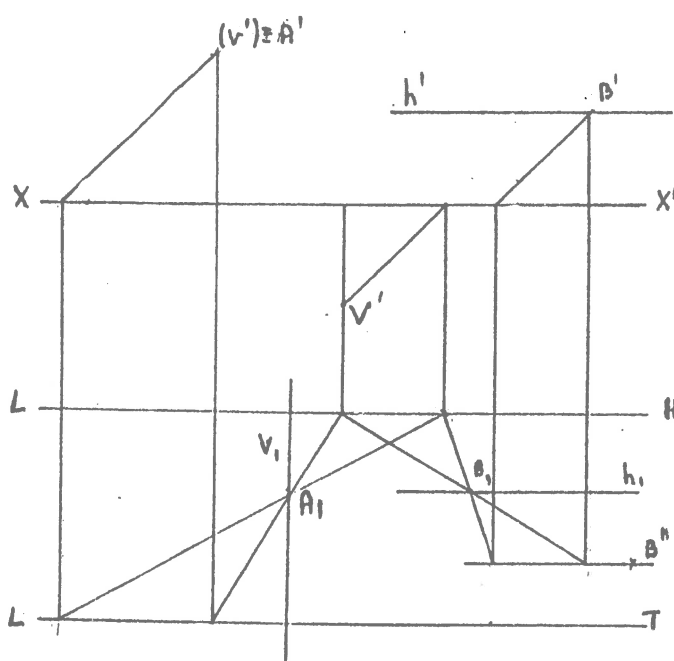


Fig. 16

7. PERSPECTIVA DE SÓLIDOS

A construção da perspectiva de objectos tridimensionais é realizada a partir das perspectivas dos pontos e dos segmentos que os definem.

Na *figura 17* apresenta-se a construção da perspectiva de um paralelepípedo com a base $ABCD$ assente no geometral e de altura h . Iniciou-se a construção com a determinação da perspectiva da base, após o que se determinaram as perspectivas das rectas EF e HG , rectas

horizontais de cota h . As arestas verticais do paralelepípedo têm por perspectivas segmentos também verticais que passam pelos vértices da perspectiva da base do sólido. A intersecção destes segmentos verticais com a perspectiva das rectas EF e HG determinaram completamente a figura que se pretendia construir.

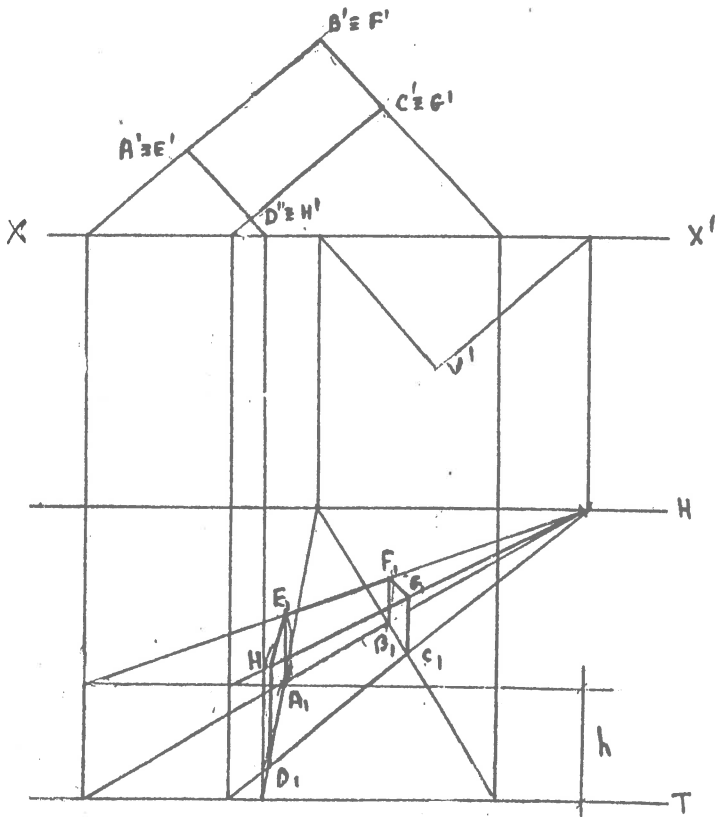


Fig. 17

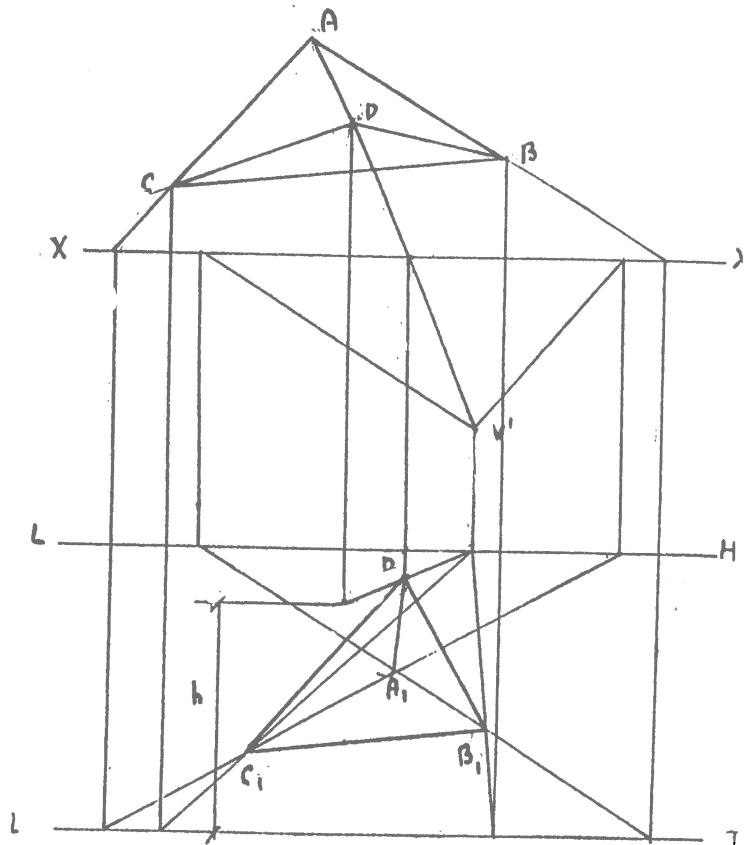


Fig. 18

Na figura 18 apresenta-se a determinação da perspectiva duma pirâmide triangular de base ABC assente no plano horizontal e de altura h . Em primeiro lugar determinou-se como no exemplo anterior, a perspectiva da base do sólido. A construção foi concluída com a determinação da perspectiva do ponto D, para o que se utilizou a recta de topo e a projectante que passam por este ponto.

Na figura 19 apresenta-se a construção da perspectiva de um objecto tridimensional definido pela sua planta e por um alçado, utilizando os processos descritos nos exemplos anteriores.

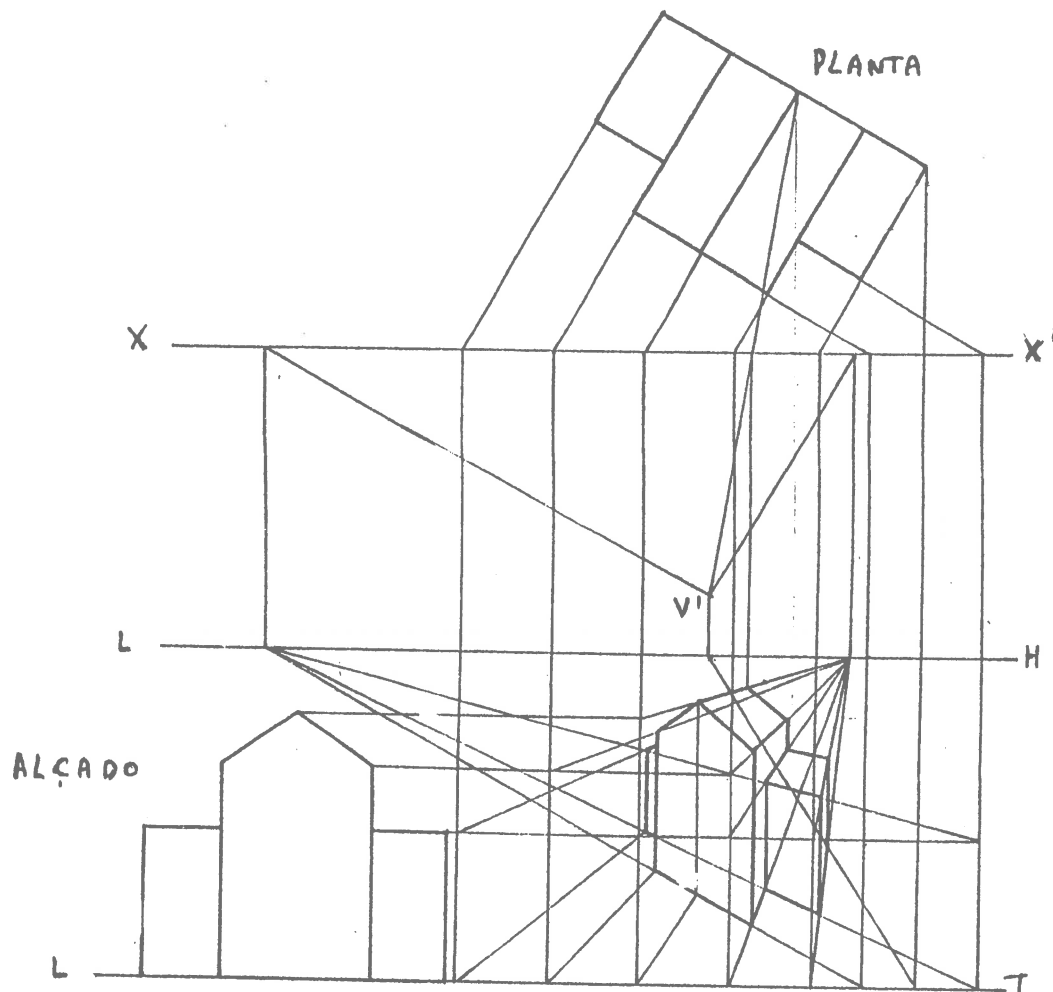


Fig. 19

Reforça-se aqui a ideia de que o alçado, cuja função é indicar a altura dos diferentes pontos do objecto, não tem necessariamente que estar em correspondência com a planta.

8. INFLUENCIA DA POSIÇÃO DO QUADRO E DO PONTO DE VISTA

A forma da perspectiva de um objecto tridimensional depende da posição do quadro e do ponto de vista em relação aquele.

Na *figura 20* determina-se a perspectiva dum paralelepípedo em três posições diferentes em relação ao quadro (além do quadro (20.a), intersectando pelo quadro (20.b) e aquém do quadro (20.c)), mantendo-se, no entanto, sempre as mesmas posições relativas do ponto de vista e do quadro.

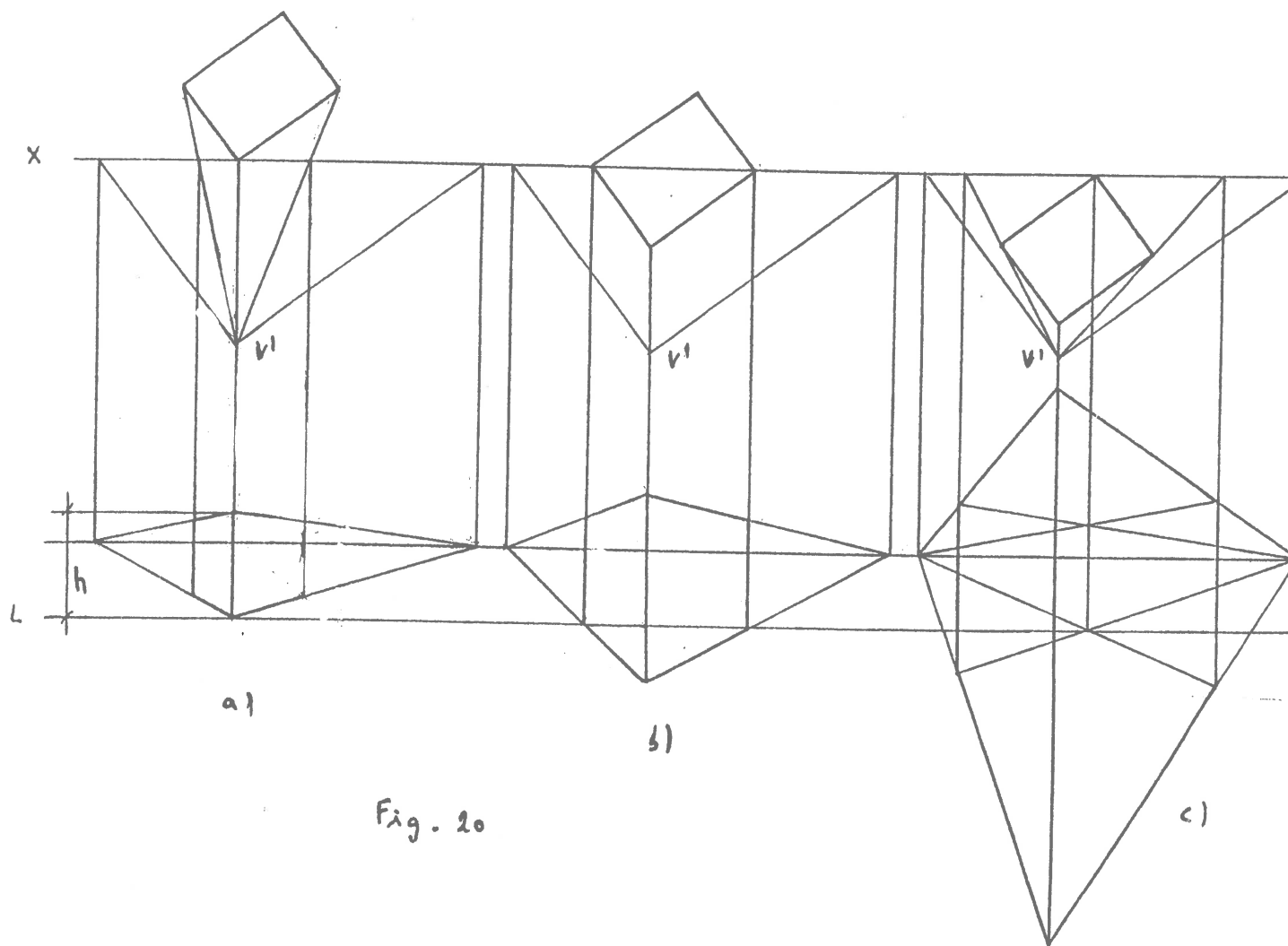


Fig. 20

Em 20.a verifica-se uma redução do objecto, em 20.c uma ampliação e em 20.b uma representação intermédia, próxima da verdadeira grandeza. Assim, de acordo com as dimensões que se pretendem obter para a perspectiva, deve-se escolher a posição relativa do quadro e do objecto.

Um outro factor que influi bastante no aspecto da perspectiva dum objecto é a posição do ponto de vista em relação ao quadro. Quando aumenta a distância do ponto de vista ao quadro, os pontos de fuga afastam-se do ponto principal e, em consequência a perspectiva dá uma noção menos clara da profundidade do objecto. Na figura 21, apresentam-se duas perspectivas de um paralelepípedo de altura h com diferentes distâncias do ponto de vista em relação ao quadro sendo, no entanto, iguais a posição do objecto em relação ao quadro e a altura do ponto de vista em relação ao geometral.

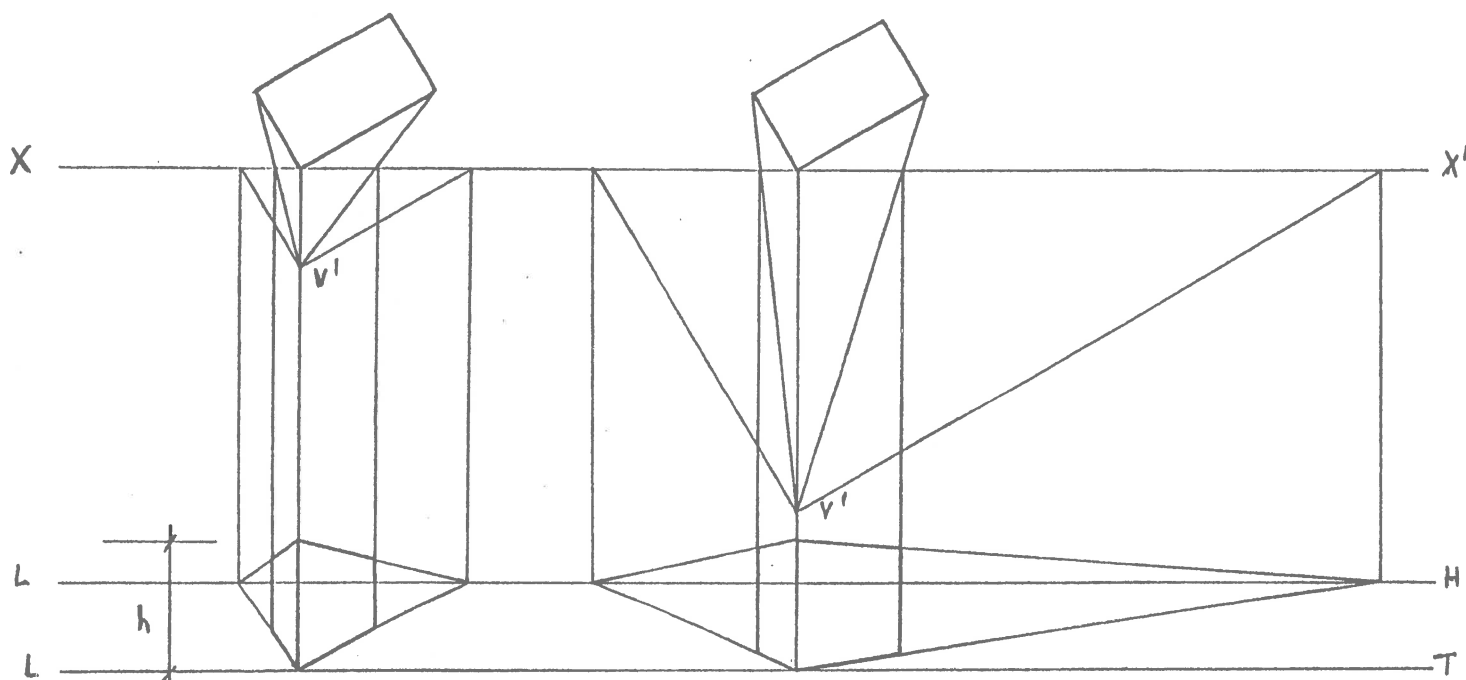


Fig. 21

A cota do ponto de vista em relação ao geometral é também um factor importante, dado que determina se o objecto é visto de baixo, de frente ou de cima. A *figura 19* é um exemplo duma perspectiva dum objecto visto de cima, enquanto que a *figura 20.a* nos mostra uma perspectiva dum objecto visto de frente. Assim, a cota do ponto de vista deverá ser escolhida em função da altura do objecto a representar e de acordo com a parte do objecto que se pretende por em evidência. Deve-se, no entanto, evitar colocar o ponto de vista muito alto ou muito baixo dado que normalmente estas posições conduzem a perspectivas muito deformadas.

A forma dos objectos pode sempre referênciar-se relativamente a um sistema de três eixos mutuamente ortogonais. Normalmente as direcções destes eixos são escolhidas de modo a serem paralelas a linhas de contorno do objecto. Estas direcções, geralmente designadas por direcções principais, são, no caso de um paralelepípedo, as direcções das arestas.

É possível definir três modalidades de perspectiva em função da posição que as direcções principais do objecto ocupam relativamente ao quadro:

- perspectiva com um ponto de fuga quando duas direcções principais são paralelas ao plano do quadro, sendo, naturalmente a terceira perpendicular a esse plano;

- perspectiva com dois pontos de fuga quando uma direcção principal é paralela ao plano do quadro e as outras duas são oblíquas;

- perspectiva com três pontos de fuga quando nenhuma das direcções principais é paralela ao plano do quadro.

As modalidades de perspectiva mais correntes são as duas primeiras. No caso da perspectiva com dois pontos de fuga, em geral, a direcção paralela ao plano do quadro é vertical e as outras duas são horizontais. Grande parte das figuras deste texto apresentam exemplos de perspectivas deste tipo.

Na *figura 22* apresenta-se, para três objectos simples, as modalidades de perspectiva referidas.

O fim a atingir condiciona a modalidade de perspectiva a considerar para a representação do objecto.

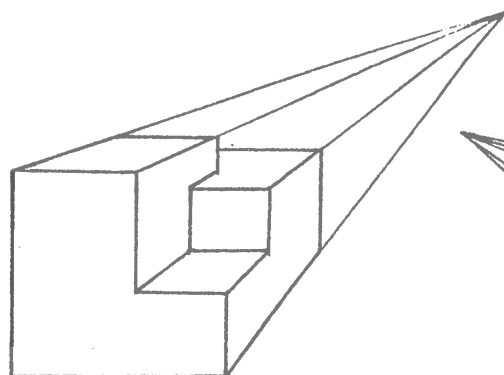
A perspectiva com dois pontos de fuga, a mais corrente, é utilizada para a representação de obras de grandes dimensões como edifícios, pontes, barragens, etc.

A perspectiva com um ponto de fuga é utilizada quando se pretendem representar objectos com contornos curvos (circulares, elípticos, etc.), que, se ficarem situados numa face de frente, continuam a ser representados na perspectiva pelo mesmo tipo de curva.

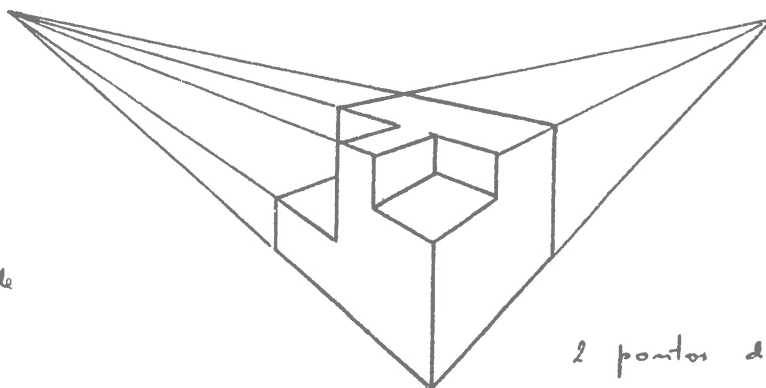
A perspectiva com três pontos de vista é utilizada quando se pretende representar objectos em que uma das dimensões é muito maior do que as outras (torres, arranha-céus, etc.).

Para a realização de perspectivas com aspecto agradável algumas regras devem ser cumpridas. Assim, e para o caso da perspectiva com dois pontos de fuga, a mais corrente, deve-se proceder do seguinte modo:

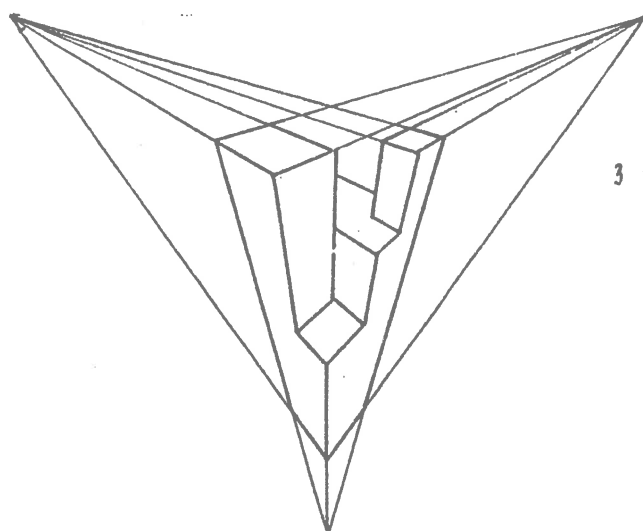
- o objecto deve ser colocado de modo a que as suas direcções principais oblíquas em relação ao plano do quadro façam ângulos da ordem dos 30° e 60° com este ;



1 ponto de
fuga



2 pontos de
fuga



3 pontos de fuga

f. g. 22

- o plano principal deve passar pela zona do objecto a que se pretende dar maior relevo na perspectiva, ou pelo centro do objecto;

- a distância do ponto de vista ao quadro deve ser tal que as projecções das rectas projectantes extremas façam entre si um ângulo da ordem dos 30° ;

- no caso da representação de edifícios o ponto de vista é colocado à altura de observação normal (1,60 a 1,80m acima do geometral, à escala); no caso de peças de pequenas dimensões normalmente o ponto de vista situa-se ligeiramente acima da parte superior do objecto.