

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
LICENCIATURA EM ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Exercícios de Investigação Operacional

ANTÓNIO MIGUEL GOMES
JOÃO CLARO
JOSÉ CARLOS DOS SANTOS ALVES
JOSÉ FERNANDO OLIVEIRA
JOSÉ SOEIRO FERREIRA
MARIA ANTÓNIA CARRAVILLA
©2003, 2001, 1999

1

Exercícios de Formulação Enunciados

Problema 1

“Publicações Polémicas” vai publicar uma autobiografia de um político controverso, e admite que a 1ª edição vai ser vendida por completo se não houver atrasos. Foi decidido que versões de Luxo (L) e Normal (N) vão aparecer simultaneamente e são conhecidas as seguintes condicionantes do projecto:

- (a) O departamento de impressão pode produzir no máximo 10000 cópias (incluindo versões L e N).
- (b) O departamento de encadernação pode concluir 12000 cópias N ou 8000 cópias L se trabalhar em cada um destes tipos isoladamente. Se produzir as duas versões, pode produzir proporções daquelas quantidades que totalizem 1.
- (c) O armazém pode despachar um máximo de 15000 cópias N ou 9000 cópias L, ou proporções que totalizem 1.
- (d) Já existem pedidos de 2000 versões N e 1000 versões L, que deverão ser satisfeitos na 1ª edição.
- (e) Pelo menos $\frac{1}{4}$ do total das cópias deverá ser em versão de Luxo (L).

O lucro resultante da venda de uma cópia N é de 600\$00 e de uma cópia L é de 720\$00. “Publicações Polémicas” pretende saber qual o número de cópias de cada tipo a produzir de modo a obter o maior lucro possível.

- (a) Formule este problema como Programação Linear.
- (b) Resolva-o graficamente, ilustrando o conjunto das soluções admissíveis.
- (c) Resolva pelo método Simplex uma versão simplificada do problema, em que não se consideram as condições (d) e (e).

Qual o significado que atribui ao valor das variáveis de folga?

A solução obtida será a solução óptima do problema inicial?

- (d) Substitua a condição (e) pela seguinte:

Se houver produção de cópias na versão L então o seu número deverá ser superior a 2000.

Como incluiria esta condição no modelo formulado, mantendo a sua estrutura linear (inteira)?

Justifique.

Problema 2

Considere o seguinte Problema de Distribuição que consiste na determinação de uma estratégia óptima de distribuição que satisfaça a procura e, ao mesmo tempo, respeite as capacidades e limitações existentes:

Uma empresa tem duas fábricas e quatro armazéns e vende produtos a seis clientes que podem ser abastecidos a partir dos armazéns ou directamente das fábricas. A empresa suporta os custos de distribuição apresentados nas tabelas 1 e 2. Os traços indicam que a entrega correspondente não se realiza.

<i>Destinos</i> <i>Armazéns</i>	<i>Origens</i>	
	Bragança (fábrica)	Évora (fábrica)
Coimbra	0.5	—
Faro	1.0	0.2
Lisboa	0.8	0.6
Porto	0.4	0.8

Tabela 1: Custos de distribuição (em 1000\$ por ton.)

<i>Destinos</i> <i>Clientes</i>	<i>Origens</i>					
	Bragança (fábrica)	Évora (fábrica)	Coimbra (armazém)	Faro (armazém)	Lisboa (armazém)	Porto (armazém)
C1	1.0	2.0	—	1.0	—	—
C2	—	—	1.5	0.5	1.5	—
C3	1.5	—	0.5	0.5	2.0	0.2
C4	2.0	—	1.5	1.0	—	1.5
C5	—	—	—	0.5	0.5	0.5
C6	1.0	—	1.0	—	1.5	1.5

Tabela 2: Custos de distribuição (em 1000\$ por ton.)

Nas tabelas 3 e 4 estão representadas as capacidades mensais máximas das fábricas e dos armazéns. Na tabela 5, apresenta-se a procura típica mensal dos clientes.

Fábrica	Capacidade (toneladas)
Bragança	150 000
Évora	200 000

Tabela 3: Capacidade máxima mensal de produção das fábricas

O objectivo da empresa é a determinação dum plano óptimo de distribuição que minimize os custos em questão.

Construa um modelo de Programação Linear para este problema.

Armazém	Capacidade (toneladas)
Coimbra	70 000
Faro	50 000
Lisboa	100 000
Porto	40 000

Tabela 4: Capacidade máxima mensal de fornecimento dos armazéns

Cliente	Procura mensal (toneladas)
C1	50 000
C2	10 000
C3	40 000
C4	35 000
C5	60 000
C6	20 000

Tabela 5: Procura típica mensal dos clientes

Problema 3

Um produto em fabrico resulta duma montagem constituída por duas peças, **A** e **B**. Para a elaboração dessas peças recorre-se a uma máquina **M1** e a cinco máquinas **M2**. A produtividade de cada máquina relativamente às duas peças é a indicada na tabela 1:

Peça	M1	M2
A	3	20
B	5	15

Tabela 1: Tempo de produção (em minutos por peça) das peças **A** e **B** nas máquinas **M1** e **M2**

A carga das máquinas **M2** é repartida igualmente pelas 5 máquinas. O objectivo do problema é saber como se pode obter o máximo de montagens completas por dia. Considere que um dia corresponde a 8 horas de trabalho.

- (a) Apresente um modelo matemático para este problema.
- (b) Considere agora a situação em que também se pretende manter uma utilização equilibrada entre as máquinas de modo que nenhuma delas seja utilizada mais 30 minutos por dia do que qualquer outra das máquinas.

Será possível resolver este novo problema por Programação Linear? Justifique.

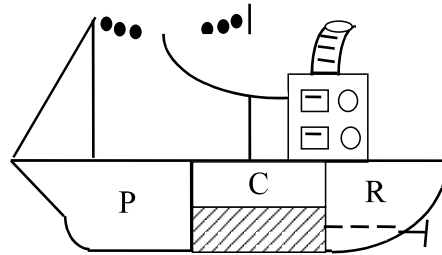
Problema 4

Formule o seguinte problema como um problema de Programação Linear:

Com vista à organização de um hospital consideram-se as seguintes condições:

- (a) há n classes de doentes, com $i = 1, 2, \dots, n$, designando cada classe;
- (b) cada classe é dividida em doentes que pagam e doentes que não pagam;
- (c) cada doente da classe i requer r_{ij} unidades de serviço tipo j , $j = 1, 2, \dots, m$;
- (d) cada unidade de serviço j requer a_{kj} unidades de recurso tipo k , $k = 1, 2, \dots, l$;
- (e) para um dado período de tempo existem t_k unidades disponíveis do recurso k ;
- (f) há um limite superior u_i , sobre o número de doentes na classe i , a serem tratados;
- (g) bem como um limite inferior l_i , no número de doentes na classe i , a serem tratados;
- (h) por outro lado, a proporção de doentes que não pagam, da classe i , não será superior a v_i ;
- (i) os doentes que pagam, pagarão p_j por cada unidade de serviço tipo j ;
- (j) é c_k o custo unitário do recurso tipo k ;
- (k) há custos fixos e subsídios, a e b , respectivamente;
- (l) exige-se um nível mínimo, e , para o lucro;
- (m) atribui-se um peso w_i a cada classe de doentes i , que reflecte a importância dessa classe para o hospital;
- (n) o objectivo é maximizar a soma pesada de todos os doentes tratados, respeitando as restrições indicadas.

Problema 5



Uma companhia de navegação possui um navio com 3 porões de carga (à proa, à ré e ao centro) possuindo os limites de capacidade apresentados na tabela 1:

Porão	Tonelagem (toneladas)	Volume (m^3)
Proa	2000	100000
Centro	3200	14000
Ré	1800	80000

Tabela 1: Limites de capacidade (em tonelagem e em volume) de cada um dos porões

À empresa são oferecidas as cargas da tabela 2, cada uma das quais pode ser aceite parcial ou totalmente:

Carga	Peso (toneladas)	Volume por tonelada ($\frac{m^3}{tonelada}$)	Lucro ($\frac{escudos}{tonelada}$)
A	7000	60	20
B	6500	50	24
C	4000	25	16

Tabela 2: Peso, volume e lucro associados a cada carga

A fim de preservar o equilíbrio do navio, deve manter-se a proporção entre o peso em cada porão e o volume respectivo. Admita que em cada porão podem ser transportadas partes de cargas diferentes. Pretende-se maximizar o lucro da empresa, relativo à utilização deste navio.

Construa um modelo de Programação Linear para o problema apresentado.

Problema 6

Duas fábricas, **A** e **B**, situadas em locais diferentes produzem ambas os produtos P_1 e P_2 . A fábrica **A** tem 3 máquinas e a fábrica **B** tem 2 máquinas. Todas as máquinas fazem os produtos P_1 e P_2 . Depois de fabricados, os produtos podem ser transportados entre as fábricas de modo a satisfazer a procura. O número de unidades produzidas por dia, os custos de produção e de transporte, a procura dos produtos e o número de dias em que cada máquina está disponível por mês estão indicados nas tabelas 1 e 2.

- (a) Apresente um modelo geral (usando variáveis indexadas e coeficientes convenientes a definir) que permita determinar os esquemas de utilização das máquinas em cada fábrica e de distribuição dos produtos entre as fábricas, a que corresponda um custo total mínimo.
- (b) Concretize o modelo para o caso descrito.
- (c) Refira-se à resolução do problema em questão.

Fábrica	A						B			
Máquina	M ₁		M ₂		M ₃		M ₁		M ₂	
Disponibilidade (dias)	30		28		24		26		28	
Produto	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
Produção por dia	40	35	42	38	40	37	41	37	42	40
Custo por dia	100	102	104	106	98	104	102	105	103	106

Tabela 1: Capacidades de produção das fábricas

Produto	P_1		P_2	
Fábrica	A	B	A	B
Procura	1200	800	1500	1100
Custo de transporte por unidade	$A \rightarrow B = 4$	$B \rightarrow A = 4$	$A \rightarrow B = 3$	$B \rightarrow A = 4$

Tabela 2: Procura e custos de transporte dos produtos

Problema 7

A Superboa tem 3 fábricas de cerveja e 10 pontos principais de distribuição.

Em cada mês a fábrica i produz no máximo a_i kl de cerveja em regime normal, com um custo $r_i \frac{\text{contos}}{kl}$, $i = 1, 2, 3$. Qualquer fábrica também pode trabalhar em regime extraordinário, produzindo nessa situação um máximo de b_i kl com um custo $s_i \frac{\text{contos}}{kl}$, com $s_i > r_i$.

O custo de transporte da fábrica i para o posto j , $j = 1, \dots, 10$ é de $c_{ij} \frac{\text{contos}}{kl}$. Toda a cerveja produzida num dado mês pode ser transportada, no mesmo mês, para os postos de distribuição.

No posto j a procura é de d_j kl . A procura poderá não ser satisfeita, contudo, cada kl distribuído no posto j rende α_j *contos* e cada kl que fique por distribuir penaliza a empresa em β_j *contos*.

Se a quantidade de cerveja transportada para o posto j exceder a procura nesse posto, o excesso pode ser vendido para um armazém ao preço de $\gamma_j \frac{\text{contos}}{kl}$, com $\gamma_j < \alpha_j$, em quantidades ilimitadas.

- (a) Apresente um modelo matemático para o problema da determinação da estratégia ótima mensal de produção, transporte e venda da empresa.
- (b) Refira-se ao tipo de modelo que apresentou.

Problema 8

Edmundo Terra, agricultor de corpo e alma, está entusiasmado em alargar a sua actividade. Poderá arrendar terra até um máximo de $400ha$. Pagará $15\frac{euros}{ha \times ano}$, se arrendar até $240ha$. Terra acima dos $240ha$ também pode ser arrendada mas a $25\frac{euros}{ha \times ano}$. A actividade principal em vista é a cultura de cereais, podendo proceder em regime normal ou em regime intensivo (mais fertilizantes, irrigações frequentes, etc). Em regime normal poderá conseguir $2.8\frac{kl}{ha}$ e em regime intensivo $4.0\frac{kl}{ha}$. Haverá que considerar os recursos necessários indicados na tabela 1.

Recursos necessários	Regime normal	Regime intensivo
Mão-de-obra ($\frac{pessoa \times hora}{ha \times ano}$)	5	7
Materiais (Sementes, fertilizantes, água, ...)		
($\frac{euros}{ha \times ano}$)	50	90

Tabela 1: Recursos necessários em cada um dos regimes de cultura

A colheita requer $12.5\frac{pessoa \times hora}{kl}$. O cereal pode ser vendido por $62.5\frac{euros}{kl}$, em mercado grossista. Edmundo Terra também poderá criar aves (galinhas, ...), considerando-se como medida de produção a unidade de criação. Para 1 unidade de criação são necessários $1kl$ de cereal, $20pessoa \times hora$ de trabalho e $4m^2$ de chão coberto. Pode utilizar o cereal que produz ou comprá-lo no mercado a retalho, ao preço de 87.5 euros por kl. Cada unidade de criação pode ser vendida por 175 euros, em mercado grossista, até ao máximo de 200 unidades. Acima de 200 unidades a venda será por 160 euros. Dispõe apenas de um espaço coberto de $1350m^2$ que poderá usar para a criação de aves. Ele e a família poderão contribuir com $4000pessoa \times hora$ de trabalho por ano, sem custo. Caso precise de mais mão-de-obra poderá contratá-la ao custo de $4\frac{euros}{pessoa \times hora}$, até $3000pessoa \times hora$. Contratações acima deste limite custarão $7\frac{euros}{pessoa \times hora}$. Embora o seu amor à terra seja grande, está naturalmente preocupado com os resultados, esperando maximizar os seus ganhos líquidos.

Contribua com um modelo de optimização, para o plano a seguir por Edmundo Terra.

1

Exercícios de Formulação Resoluções

Problema 1

(a) Definam-se as seguintes variáveis de decisão:

x_L quantidade de livros a produzir na versão Luxo;

x_N quantidade de livros a produzir na versão Normal.

Com essas variáveis de decisão o modelo de Programação Linear será o seguinte:

Objectivo:

$$\max \quad Z = 600x_N + 720x_L \quad (1.1)$$

Sujeito a:

$$x_N + x_L \leq 10000 \quad (1.2)$$

$$\frac{x_N}{12000} + \frac{x_L}{8000} \leq 1 \quad (1.3)$$

$$\frac{x_N}{15000} + \frac{x_L}{9000} \leq 1 \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{4}(x_N + x_L) \leq x_L \quad (1.5)$$

$$x_N \geq 2000 \quad (1.6)$$

$$x_L \geq 1000 \quad (1.7)$$

A restrição (1.2) é devida à condicionante referida no ponto (a) do problema. As restrições (1.3) e (1.4) são devidas às condicionantes referidas nos pontos (b) e (c) do problema. A restrição (1.5) é devida à condicionante referida no ponto (e) do problema. Por último, as restrições (1.6) e (1.7) representam a condicionante referida na alínea (d).

O modelo apresentado é equivalente ao seguinte modelo:

$$\max \quad Z = 600x_N + 720x_L \quad (1.8)$$

Sujeito a:

$$x_N + x_L \leq 10000 \quad (1.9)$$

$$2x_N + 3x_L \leq 24000 \quad (1.10)$$

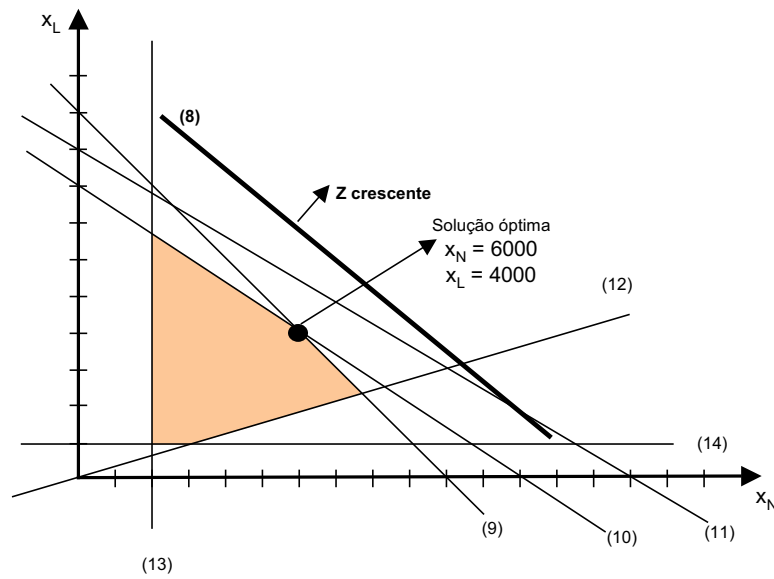
$$3x_N + 5x_L \leq 45000 \quad (1.11)$$

$$x_N - 3x_L \leq 0 \quad (1.12)$$

$$x_N \geq 2000 \quad (1.13)$$

$$x_L \geq 1000 \quad (1.14)$$

(b) Representação gráfica:



(c) Resolução pelo Algoritmo Simplex

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	1	1	0	0	10
s_2	2	3	0	1	0	24 \Rightarrow
s_3	3	5	0	0	1	45
$-\frac{Z}{10}$	60	72	0	0	0	0

↑↑

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
s_1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	2 \Rightarrow
x_L	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	8
s_3	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	5
$-\frac{Z}{10}$	12	0	0	-24	0	-576

↑↑

	x_N	x_L	s_1	s_2	s_3	
x_N	1	0	3	-1	0	6
x_L	0	1	-2	1	0	4
s_3	0	0	1	-2	1	7
$-\frac{Z}{10}$	0	0	-36	-12	0	-648

Problema 2

- Índices

i fábricas $i \in [1, 2]$;

j armazéns $j \in [1, \dots, 4]$;

k clientes $k \in [1, \dots, 6]$.

- Variáveis de decisão

x_{ij} quantidade a enviar da fábrica i para o armazém j ;

y_{ik} quantidade a enviar da fábrica i para o cliente k ;

z_{jk} quantidade a enviar do armazém j para o cliente k .

Como algumas das entregas não podem ser efectuadas (traços nas tabelas), as variáveis de decisão correspondentes não serão definidas. Uma outra solução para o problema consistiria em definir as variáveis todas e restringir o valor dessas variáveis a zero.

As variáveis em causa são então:

$x_{21}, y_{12}, y_{15}, y_{22}, y_{23}, y_{24}, y_{25}, y_{26}, z_{11}, z_{15}, z_{26}, z_{31}, z_{34}, z_{41}, z_{42}$

- Função objectivo

O objectivo pretendido é a minimização do custo Z , isto é:

$$\begin{aligned} \min Z = & 0.5x_{11} + 1.0x_{12} + 0.8x_{13} + 0.4x_{14} \\ & + 0.2x_{22} + 0.6x_{23} + 0.8x_{24} \\ & + 1.0y_{11} + 1.5y_{13} + 2.0y_{14} + 1.0y_{16} \\ & + 2.0y_{21} \\ & + 1.5z_{12} + 0.5z_{13} + 1.5z_{14} + 1.0z_{16} \\ & + 1.0z_{21} + 0.5z_{22} + 0.5z_{23} + 1.0z_{24} + 0.5z_{25} \\ & + 1.5z_{32} + 2.0z_{33} + 0.5z_{35} + 1.5z_{36} \\ & + 0.2z_{43} + 1.5z_{44} + 0.5z_{45} + 1.5z_{46} \end{aligned}$$

- Restrições

Cada fábrica tem uma capacidade máxima, o que quer dizer que a soma de todos os x_{ij} com todos os y_{ik} para uma dada fábrica i não pode exceder a capacidade da fábrica i .

Dado que existem duas fábricas, esse limite de capacidade resulta em duas restrições.

Por exemplo para a fábrica de Bragança ($i = 1$):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + y_{11} + y_{13} + y_{14} + y_{16} \leq 150000 \quad (1.1)$$

Também há limites para a capacidade de fornecimento de um armazém e como há quatro armazéns, há quatro restrições do mesmo tipo.

Para o armazém de Coimbra ($j = 1$):

$$x_{11} \leq 70000 \quad (1.2)$$

Os pedidos dos clientes também devem ser satisfeitos e como há 6 clientes, há 6 restrições do mesmo tipo.

Para o cliente C1 ($k = 1$):

$$y_{11} + y_{21} + z_{21} = 50000 \quad (1.3)$$

É também necessário considerar as restrições de continuidade para os armazéns, que obrigam a que não saia mais mercadoria de um armazém do que a que entra. Como há 4 armazéns, há quatro restrições do mesmo tipo.

Para o armazém de Coimbra ($j = 1$):

$$z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{16} \leq x_{11} \quad (1.4)$$

Por fim, é necessário garantir que todas as variáveis têm valores maiores ou iguais a zero:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, y_{11}, y_{13}, y_{14}, y_{16}, y_{21}, z_{12}, z_{13}, \\ z_{14}, z_{16}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{25}, z_{32}, z_{33}, z_{35}, z_{36}, z_{43}, z_{44}, z_{45}, z_{46} \geq 0 \quad (1.5)$$

Complete agora o modelo!

Problema 3

- (a) • Variáveis de decisão

x_{A1} quantidade de peças do tipo **A** a produzir na máquina **M1**;

x_{A2} quantidade de peças do tipo **A** a produzir na máquina **M2**;

x_{B1} quantidade de peças do tipo **B** a produzir na máquina **M1**;

x_{B2} quantidade de peças do tipo **B** a produzir na máquina **M2**.

- Função objectivo

Pretende-se maximizar o número de montagens completas:

$$\max Z = \min(x_{A1} + x_{A2}, x_{B1} + x_{B2})$$

Esta função objectivo pode ser linearizada, acrescentando mais uma variável auxiliar e duas restrições:

$$\begin{aligned} \max Z &= Y \\ x_{A1} + x_{A2} &\geq Y \\ x_{B1} + x_{B2} &\geq Y \end{aligned}$$

- Modelo

$$\max Z = Y \tag{1.1}$$

Sujeito a:

$$3x_{A1} + 5x_{B1} \leq 8 \times 60 \text{ (minutos)} \tag{1.2}$$

$$20x_{A2} + 15x_{B2} \leq 8 \times 60 \times 5 \text{ (minutos)} \tag{1.3}$$

$$x_{A1} + x_{A2} - Y \geq 0 \tag{1.4}$$

$$x_{B1} + x_{B2} - Y \geq 0 \tag{1.5}$$

$$x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2} \geq 0 \tag{1.6}$$

Onde 1.2 e 1.3 correspondem às restrições de capacidade das máquinas 1 e 2 respectivamente (há 5 máquinas tipo 2). As restrições 1.4 e 1.5 são as restrições auxiliares para linearização da função objectivo. Por último, as restrições 1.6 exigem que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero.

- (b) A restrição (não linear) que modeliza a situação pretendida nesta alínea é a seguinte:

$$\left| (3x_{A1} + 5x_{B1}) - \frac{20x_{A2} + 15x_{B2}}{5} \right| \leq 30$$

Simplificando obtém-se:

$$|3x_{A1} + 5x_{B1} - 4x_{A2} - 3x_{B2}| \leq 30 \tag{1.7}$$

Para obter um modelo de Programação Linear, será necessário transformar a restrição 1.7 em duas restrições lineares:

$$3x_{A1} + 5x_{B1} - 4x_{A2} - 3x_{B2} \leq 30 \tag{1.8}$$

$$-3x_{A1} - 5x_{B1} + 4x_{A2} + 3x_{B2} \leq 30 \tag{1.9}$$

Problema 4

- Índices

i classes de doentes $i \in [1, \dots, n]$;

j tipo de serviço $j \in [1, \dots, m]$;

k recurso $k \in [1, \dots, l]$.

- Variáveis de decisão

x_i número de doentes da classe i que pagam;

y_i número de doentes da classe i que não pagam.

- Função objectivo

Com a função objectivo, equação 1.1, pretende-se modelizar as condições (m) e (n) do enunciado.

$$\max Z = \sum_{i=1}^n w_i(x_i + y_i) \quad (1.1)$$

- Restrições

$$\forall_k \sum_{i,j} r_{ij} a_{kj} (x_i + y_i) \leq t_k \quad (1.2)$$

$$\forall_i \quad x_i + y_i \leq u_i \quad (1.3)$$

$$\forall_i \quad x_i + y_i \geq l_i \quad (1.4)$$

$$\forall_i \quad v_i(x_i + y_i) \geq y_i \quad (1.5)$$

$$\forall_i \quad x_i, y_i \geq 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_i \left(\sum_j r_{ij} p_j - \sum_{j,k} r_{ij} a_{kj} c_k \right) x_i - \sum_i \left(\sum_{j,k} r_{ij} a_{kj} c_k \right) y_i + b - a \geq e \quad (1.7)$$

As restrições 1.2 garantem que não são utilizados mais recursos do tipo k do que os disponíveis, satisfazendo as condições (c), (d) e (e) do enunciado. As restrições 1.3 e 1.4 garantem que não serão ultrapassados quer os limites inferiores quer os limites superiores dos número de doentes de cada classe i , satisfazendo as condições (f) e (g) do enunciado. As restrições 1.5 garantem que se verifica a condição referida na alínea (h) do enunciado. A restrição 1.7 garantem que não se terá um lucro inferior a e (condição (l) do enunciado). Por último a restrição 1.6 garante que todas as variáveis são maiores ou iguais a zero.

Problema 5

- Índices

i tipo de carga (A, B e C) $i \in [1, 2, 3]$;

j tipo de porão (P, C, R) $j \in [1, 2, 3]$.

- Variáveis de decisão

x_{ij} quantidade de carga i a transportar no porão j (em toneladas).

- Função objectivo

Pretende-se maximizar o lucro com o transporte das cargas i em todos os porões j , o que corresponde à soma do lucro obtido com o transporte da carga A, com o lucro com transporte da carga B e da carga C.

$$\max Z = 20 \sum_j x_{1j} + 24 \sum_j x_{2j} + 16 \sum_j x_{3j} \quad (1.1)$$

- Restrições

$$\sum_j x_{1j} \leq 7000 \quad (1.2)$$

$$\sum_j x_{2j} \leq 6500 \quad (1.3)$$

$$\sum_j x_{3j} \leq 4000 \quad (1.4)$$

$$\sum_i x_{i1} \leq 2000 \quad (1.5)$$

$$\sum_i x_{i2} \leq 3200 \quad (1.6)$$

$$\sum_i x_{i3} \leq 1800 \quad (1.7)$$

$$60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31} \leq 100000 \quad (1.8)$$

$$60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32} \leq 14000 \quad (1.9)$$

$$60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33} \leq 80000 \quad (1.10)$$

$$\frac{60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31}}{\sum_i x_{i1}} = \frac{100000}{2000} \quad (1.11)$$

$$\frac{60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32}}{\sum_i x_{i2}} = \frac{14000}{3200} \quad (1.12)$$

$$\frac{60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33}}{\sum_i x_{i3}} = \frac{80000}{1800} \quad (1.13)$$

$$\forall_{i,j} x_{ij} \geq 0 \quad (1.14)$$

As restrições 1.2, 1.3 e 1.4 garantem que não se transporta mais carga do que a que existe de cada um dos tipos. As restrições 1.5, 1.6 e 1.7 garantem que não se ultrapassa a tonelagem máxima permitida em cada um dos porões. As restrições 1.8, 1.9 e 1.10 garantem que não se ultrapassa a capacidade (volume) máxima permitida

em cada um dos porões. As restrições 1.11, 1.12 e 1.13 garantem que se mantém a proporção entre o peso em cada porão e a respectiva capacidade. Por fim, as restrições 1.14 garantem que todas as variáveis de decisão são maiores ou iguais a zero.

• Modelo

O modelo apresentado (equações 1.1 a 1.14) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\max Z = 20 \sum_j x_{1j} + 24 \sum_j x_{2j} + 16 \sum_j x_{3j}$$

$$\sum_j x_{1j} \leq 7000$$

$$\sum_j x_{2j} \leq 6500$$

$$\sum_j x_{3j} \leq 4000$$

$$\sum_i x_{i1} \leq 2000$$

$$\sum_i x_{i2} \leq 3200$$

$$\sum_i x_{i3} \leq 1800$$

$$60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31} \leq 100000$$

$$60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32} \leq 14000$$

$$60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33} \leq 80000$$

$$10x_{11} - 25x_{31} = 0$$

$$178x_{12} + 146x_{22} + 66x_{32} = 0$$

$$100x_{13} + 72x_{23} + 37x_{33} = 0$$

$$\forall_{i,j} \quad x_{ij} \geq 0$$

Problema 6

(a) • Índices

- i fábricas (**A** e **B**) $i \in [1, 2]$;
- j máquinas (**M**₁, **M**₂, **M**₃) $j \in [1, 2, 3]$;
- k produtos (P_1 e P_2) $k \in [1, 2]$.

• Variáveis de decisão

- x_{ijk} número de dias de produção durante um mês do produto k , na fábrica i , máquina j ;
- y_{ik} quantidade do produto k a transportar a partir da fábrica i ;
- z_{ik} quantidade do produto k a transportar para a fábrica i .

• Coeficientes

- c_{ijk} custo diário de produção do produto k , na fábrica i , máquina j ;
- p_{ijk} produção diária do produto k , na fábrica i , máquina j ;
- m_{ij} disponibilidade (em dias) da máquina j da fábrica i ;
- d_{ik} procura na fábrica i do produto k ;
- s_{ik} custo de transporte, a partir da fábrica i do produto k ;
- t_{ik} custo de transporte, para a fábrica i do produto k .

• Modelo

Objectivo

$$\min \text{Custo} = \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i,k} s_{ik} y_{ik} + \sum_{i,k} t_{ik} z_{ik} \quad (1.1)$$

$$\forall_{i,k} \quad \sum_j p_{ijk} x_{ijk} - y_{ik} + z_{ik} = d_{ik} \quad (1.2)$$

$$\forall_{i,j} \quad \sum_k x_{ijk} \leq m_{ij} \quad (1.3)$$

$$\forall_{i,j,k} \quad x_{ijk}, y_{ik}, z_{ik} \geq 0 \quad (1.4)$$

As restrições 1.2 garantem que a procura do produto k na fábrica i é satisfeita. As restrições 1.3 são restrições de capacidade (disponibilidade) das máquinas. Finalmente as restrições 1.4 garantem que todas as variáveis tomam valores maiores ou iguais a zero.

(b) Concretize agora o modelo genérico apresentado, de tal forma que corresponda à situação descrita no enunciado.

(c) Ao resolver a alínea anterior, teve com certeza que tratar o caso das variáveis x_{231} e x_{232} , dado que essas variáveis foram definidas no modelo genérico, mas na realidade não existe nenhuma máquina 3 na fábrica 2. Há várias formas de resolver esta questão:

- quando se "concretiza" o modelo, pode-se não definir as variáveis em causa (ver resolução do exercício 2);
- pode-se associar um valor nulo à produção nessa máquina não existente ($p_{23k} = 0$) (será que é suficiente?);

- pode-se associar um custo infinito (muito grande) à produção nessa máquina não existente ($c_{23k} = \infty$), dado que se trata de um problema de minimização e nessa situação as variáveis serão nulas na solução final;
- podem-se acrescentar restrições do tipo $x_{23k} = 0$.

Problema 7

- Índices

i fábricas $i \in [1, \dots, 3]$;

j postos de venda $j \in [1, \dots, 10]$.

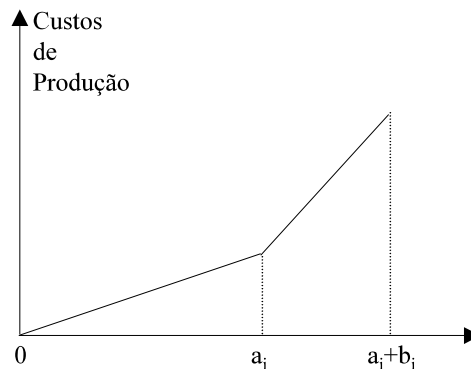
- Variáveis de decisão

y_{1i} quantidade de kl de cerveja a produzir em i , em regime normal;

y_{2i} quantidade de kl de cerveja a produzir em i , em regime extraordinário;

q_{ij} quantidade de kl de cerveja a transportar da fábrica i para o posto de venda j .

- Coeficientes



a_i quantidade máxima de kl de cerveja a produzir em regime normal na fábrica i ;

r_i custo de produção de $1 kl$ de cerveja em regime normal;

b_i quantidade máxima de kl de cerveja a produzir em regime extraordinário na fábrica i ;

s_i custo de produção de $1 kl$ de cerveja em regime extraordinário;

c_{ij} custo de transporte de $1 kl$ de cerveja da fábrica i para o posto j ;

d_j procura no posto j (em kl);

α_j preço de venda de $1 kl$ de cerveja no posto j (em contos);

β_j custo por perda de venda de cada kl de cerveja no posto j (em contos);

γ_j preço de venda a um armazém de $1 kl$ de cerveja em excesso no posto j .

- Variáveis auxiliares

Vai ser necessário considerar duas variáveis auxiliares que correspondam ao excesso e à escassez de cerveja no posto de venda j .

u_j excesso de cerveja no posto j , em kl ;

v_j escassez de cerveja no posto j , em kl .

- Função objectivo

Pretende-se com a função objectivo encontrar o valor máximo para o lucro, satisfazendo as restrições impostas. O valor do lucro obtém-se (obviamente) subtraindo as despesas das receitas.

– Receitas

Venda de cerveja directamente no posto ((procura no posto j - escassez no posto j) \times preço de venda no posto j)

$$\sum_j (d_j - v_j)\alpha_j \quad (1.1)$$

Venda de cerveja ao armazém (excesso de cerveja no posto j \times preço de venda do posto j ao armazém)

$$\sum_j u_j\gamma_j \quad (1.2)$$

– Despesas

Despesa com produção de cerveja em regime normal e com produção de cerveja em regime extraordinário.

$$\sum_i (r_i y_{1i} + s_i y_{2i}) \quad (1.3)$$

Despesa com transporte de cerveja da fábrica i para o posto j .

$$\sum_{i,j} c_{ij} q_{ij} \quad (1.4)$$

Despesa com perda de venda de cerveja no posto j .

$$\sum_j v_j \beta_j \quad (1.5)$$

A função objectivo será então:

$$\max \sum_j ((d_j - v_j)\alpha_j + u_j\gamma_j - v_j\beta_j) - \sum_i (r_i y_{1i} + s_i y_{2i}) - \sum_{i,j} c_{ij} q_{ij} \quad (1.6)$$

• Restrições

$$\forall_i \quad y_{1i} \leq a_i \quad (1.7)$$

$$\forall_i \quad y_{2i} \leq b_i \quad (1.8)$$

$$\forall_i \quad \sum_j q_{ij} \leq y_{1i} + y_{2i} \quad (1.9)$$

$$\forall_j \quad \sum_i q_{ij} - d_j = u_j - v_j \quad (1.10)$$

$$\forall_{i,j} \quad q_{ij} \geq 0 \quad (1.11)$$

$$\forall_j \quad u_j, v_j \geq 0 \quad (1.12)$$

$$\forall_i \quad y_{1i}, y_{2i} \geq 0 \quad (1.13)$$

Considerando que, tal como é afirmado no enunciado, o custo de produção de cerveja em regime normal é inferior ao custo de produção de cerveja em regime extraordinário ($r_i < s_i$), e dado que o problema é de maximização de lucros (minimização de custos) não será necessário garantir, a partir das restrições impostas, que só se começa a produzir em regime extraordinário depois de ter produzido toda a quantidade

possível em regime normal. Nesse caso as restrições 1.7 e 1.8 são suficientes para garantir as restrições impostas no enunciado.

As restrições 1.9 garantem que a quantidade transportada de uma fábrica para todos os armazéns não excede a quantidade produzida nessa fábrica.

As restrições 1.11 e 1.13 garantem que as variáveis são maiores ou iguais a zero.

As restrições 1.10 e 1.12 são devidas às variáveis auxiliares criadas. Repare-se que assim uma quantidade de cerveja num posto de venda que seja positiva, negativa ou nula, será representada pela diferença de duas variáveis ≥ 0 . Questões em aberto:

- Será que esta representação é única?
- Justifique porque razão a imposição destas restrições modeliza o excesso ou a escassez de cerveja num determinado posto.

Problema 8

- Índices

regime da cultura – $i \in \{1, 2\}$ (intensivo ou não)

destino da colheita – $j \in \{1, 2\}$ (venda directa ou alimentação de criação)

- Dados

Cultura de cereais

400ha – Número máximo de hectares a arrendar.

240ha – Limiar de mudança de custo de arrendamento do hectare.

Custha $_{\leq 240ha}$ – Custo de arrendamento do hectare abaixo ou igual ao limiar (15euros).

Custha $_{> 240ha}$ – Custo de arrendamento do hectare acima do limiar (25euros).

MdO $_i$ – Quantidade de mão de obra necessária por hectare e por ano no regime i . ($5 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{\text{ha} \times \text{ano}}$, $7 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{\text{ha} \times \text{ano}}$)

CustMat $_i$ – Custo dos materiais necessários por hectare e por ano no regime i . ($50 \frac{\text{euros}}{\text{ha} \times \text{ano}}$, $90 \frac{\text{euros}}{\text{ha} \times \text{ano}}$)

Colheita $_i$ – Colheita por hectare e por ano no regime i .

($2.8 \frac{\text{kl}}{\text{ha} \times \text{ano}}$, $4.0 \frac{\text{kl}}{\text{ha} \times \text{ano}}$)

$12.5 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{\text{kl}}$ – Quantidade de mão de obra para colheita.

$62.5 \frac{\text{euros}}{\text{kl}}$ – Preço de venda dos cereais.

Criação

1350m² – Número máximo de m² de espaço coberto para criação.

$1 \frac{\text{kl}}{\text{unidade}}$ – Quantidade de kl de cereais necessários por unidade de criação.

$20 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{\text{unidade}}$ – Quantidade de mão-de-obra necessária por unidade de criação.

$4 \frac{\text{m}^2}{\text{unidade}}$ – Quantidade de chão coberto necessário por unidade de criação.

$87.5 \frac{\text{euros}}{\text{kl}}$ – Custo dos cereais comprados no exterior.

200unidades – Limiar de mudança de preço de venda de unidade de criação.

VendUC $_{\leq 200unidades}$ – Preço de venda de cada unidade de criação abaixo ou igual ao limiar (175euros).

VendUC $_{> 200unidades}$ – Preço de venda de cada unidade de criação acima do limiar (160euros).

Pessoal - recurso necessário para cereais e para criação

4000pessoa × hora – Número máximo de pessoa × hora grátis por ano.

3000pessoa × hora – Limiar de mudança de custo por pessoa-hora.

CustPess $_{\leq 3000\text{pessoa} \times \text{hora}}$ – Custo de contratação de uma pessoa × hora abaixo ou igual ao limiar (4euros).

CustPess $_{> 3000\text{pessoa} \times \text{hora}}$ – Custo de contratação de uma pessoa × hora acima do limiar (7euros).

• Variáveis de decisão

Neste problema o que é realmente preciso decidir? Em primeiro lugar é necessário decidir quantos *ha* de terreno devem ser arrendados (há um limite superior) e seguidamente qual o regime de cultura dos cereais. Esse regime de cultura será aplicado a **toda** a cultura. A próxima decisão será qual a quantidade de cereais a vender e qual a quantidade a usar para alimentação de criação (a quantidade de criação a considerar está limitada pelos m^2 de chão coberto existentes).

As variáveis de decisão terão que ser divididas de acordo com os limiares de custo ou de preço de venda.

x_{ij} quantidade de hectares a arrendar $\leq 240ha$, a cultivar no regime i e cuja colheita vai ser utilizada para j .

y_{ij} quantidade de hectares a arrendar $> 240ha$, a cultivar no regime i e cuja colheita vai ser utilizada para j .

p quantidade de unidades de criação $\leq 200ha$.

q quantidade de unidades de criação $> 200ha$.

δ é uma variável auxiliar que permitirá forçar que a cultura seja toda realizada em regime normal ou toda realizada em regime intensivo.

$$\delta \begin{cases} 1 & \text{se cultura em regime normal} \\ 0 & \text{se cultura em regime intensivo} \end{cases} \quad (1.1)$$

• Função Objectivo

Para obter a função objectivo é necessário obter $\sum \text{custos}$ e os $\sum \text{lucros}$ e, por exemplo, maximizar $\sum \text{lucros} - \sum \text{custos}$.

– Lucros das vendas dos cereais

$$\sum_i (x_{i1} + y_{i1}) \times \mathbf{Colheita}_i \times 62.5 \frac{\text{euros}}{kl}$$

– Lucros das vendas da criação

$$p \times 175 \text{euros} + q \times 160 \text{euros}$$

– Custos de arrendamento de terras

$$\sum_{ij} x_{ij} \times 15 \text{euros} + \sum_{ij} y_{ij} \times 25 \text{euros}$$

– Custos de materiais para cultura

$$\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{CustMat}_i)$$

– Mão-de-obra total \mathbf{MdOTot} (em *pessoa* \times *hora*)

Mão-de-obra total corresponde à soma da mão-de-obra para cultura com a mão-de-obra para colheita e a mão-de-obra para criação.

Mão-de-obra para cultura

$$\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{MdO}_i)$$

Mão-de-obra para colheita

$$\sum_{ij} ((x_{ij} + y_{ij}) \times \mathbf{Colheita}_i) \times 12.5 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{kl}$$

Mão-de-obra para criação

$$(p + q) \times 20 \frac{\text{pessoa} \times \text{hora}}{\text{unidade}}$$

- Custos da mão-de-obra
 $\max(0, \mathbf{MdOTot} - (4000\text{pessoa} \times \text{hora} + 3000\text{pessoas} \times \text{hora})) \times (7 - 4)\text{euros} + \max(0, \mathbf{MdOTot} - 4000\text{pessoa} \times \text{hora}) \times 4\text{euros}$
- Custos da aquisição de cereais (só se compra no exterior a diferença entre os cereais necessários e os cereais próprios que não são vendidos)
 $((p + q) \times 1 \frac{\text{kl}}{\text{unidade}}) - \sum_i (x_{i2} + y_{i2}) \times \mathbf{Colheita}_i \times 87.5 \frac{\text{euros}}{\text{kl}}$

• Restrições

$$\sum_j x_{1j} + y_{1j} \leq \delta \times M \quad (1.2)$$

$$\sum_j x_{2j} + y_{2j} \leq (1 - \delta) \times M \quad (1.3)$$

$$(p + q) \times 4 \frac{\text{m}^2}{\text{unidade}} \leq 1350(\text{m}^2) \quad (1.4)$$

$$\sum_{ij} x_{ij} + y_{ij} \leq 400(\text{ha}) \quad (1.5)$$

$$\forall_{ij} x_{ij}, y_{ij} \geq 0 \quad (1.6)$$

As restrições (1.2) e (1.3) impõem que toda a cultura seja realizada em regime normal ou em regime intensivo. A restrição (1.4) não permite que se considere um número de unidades de criação que exija um mais chão coberto do que o que existe. A restrição (1.5) impede que se arrendem mais *ha* de terreno do que o máximo permitido. As restrições 1.6 impõem que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero.

2

Exercícios de Método Simplex Enunciados

Problema 1

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 5000 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 15000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 2

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\max z = 45x_1 + 80x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 20x_2 &\leq 400 \\ 10x_1 + 15x_2 &\leq 450 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Resolva-o pelo algoritmo Simplex.
- (b) Entre que valores poderá variar o coeficiente c_1 de x_1 na função objectivo (agora vale 45), por forma a que uma solução óptima tenha sempre valores positivos ($x_1, x_2 > 0$)?

Problema 3

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 4

Considere o problema PL seguinte:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Resolva-o pelo método Simplex.
- (b) Haverá soluções óptimas alternativas? Justifique. No caso afirmativo como poderá obter outra? E obtê-las todas?

Problema 5

$$\min z = 4x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 6

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

suj. a:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 7

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 8

$$\max F = x + 2y + 3z$$

suj. a:

$$\begin{aligned} x - y &\geq 0 \\ y + z &\leq 2 \\ -x + z &= 0 \\ x &\in \mathfrak{R} \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

2

Exercícios de Método Simplex Resoluções

Problema 1

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

subj. a:

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15000 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

O problema proposto é um problema de programação linear: a função objectivo e as restrições são funções lineares das variáveis de decisão x_1 e x_2 . Este exemplo simples será usado para ilustrar a aplicação do método Simplex para resolver problemas de programação linear. Embora a resolução prática de problemas deste tipo seja (sempre) feita recorrendo a programas de computador que permitem obter a solução de problemas com milhares de restrições e variáveis, é conveniente a compreensão do funcionamento da técnica para facilitar a interpretação dos resultados obtidos.

Para se aplicar o método Simplex, é necessário que o problema satisfaça os requisitos seguintes (*forma standard*):

- (a) Todas as variáveis são não negativas (só podem assumir valores positivos ou nulos);
- (b) Todas as restrições são equações (ou restrições do tipo '=');
- (c) Todos os termos independentes são positivos.

No nosso exemplo, a primeira e última condição são satisfeitas. Para representar o problema na forma standard é necessário transformar as duas inequações em equações. Para isso, são introduzidas no primeiro membro das inequações novas variáveis (também não negativas) com coeficiente +1. Estas variáveis representam a “folga” entre o primeiro e o segundo membro das inequações, chamando-se por isso variáveis de folga e representando-se por s (de slack).

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

subj. a:

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 5000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & + & s_2 & = & 15000 \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A aplicação do método Simplex requer o conhecimento de uma solução básica admissível inicial, que servirá de ponto de partida para o processo iterativo. Em problemas que apenas contenham restrições do tipo \leq , a introdução das variáveis de folga conduz a uma solução básica admissível inicial imediata: fazem-se nulas as variáveis originais do problema (no nosso exemplo x_1 e x_2), e as variáveis de folga ficam iguais aos termos independentes das equações respectivas:

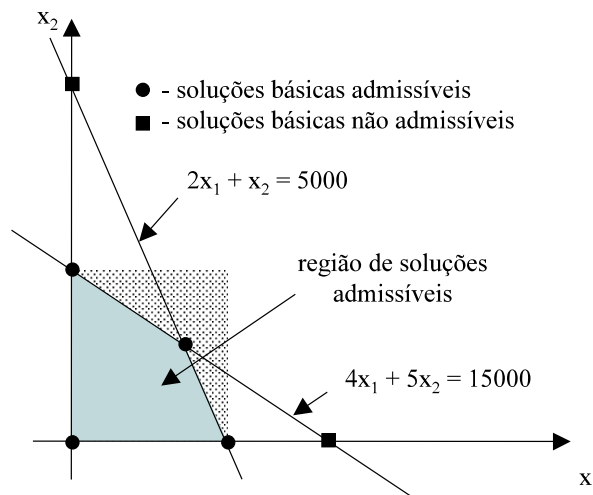
$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 5000, 15000)$$

Note-se que esta solução inicial corresponde à origem da região de soluções admissíveis, o que é sempre verdade se todas as restrições de um problema forem do tipo \leq com termos independentes positivos. Neste caso a origem é uma solução básica admissível obtida imediatamente com a introdução das variáveis de folga em todas as restrições. O método Simplex pode ser aplicado manualmente recorrendo a um quadro onde se representam de

forma condensada todos os parâmetros do problema (matriz dos coeficientes, termos independentes e função objectivo). Sobre esse quadro são aplicadas transformações algébricas de acordo com determinadas regras, que conduzem à obtenção da solução óptima.

variáveis básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	termos independentes
↓					↓
s_1	2	1	1	0	5000
s_2	4	5	0	1	15000
$-F$	10	7	0	0	0
↗					↑
custos marginais					simétrico do valor da função objectivo

Uma iteração consiste em trocar uma variável da base: das variáveis não básicas escolhe-se uma para entrar para a base (irá passar de zero a um valor positivo-eventualmente nulo), e das variáveis básicas é seleccionada uma para sair da base. Esta operação corresponde a “saltar” para uma solução básica admissível vizinha (ou adjacente). Matematicamente falando, duas soluções adjacentes são aquelas que diferem de apenas uma variável básica; geometricamente são dois “cantos” da região de soluções admissíveis que estão unidos por um “lado” do poliedro que representa no espaço essa região. As soluções básicas de um problema correspondem a todas as intersecções entre as restrições, considerando também as restrições $x_i \geq 0$. De entre estas, são admissíveis aquelas que são representadas apenas por variáveis não negativas:



variáveis básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	termos independentes
↓					↓
s_1	2	1	1	0	5000
s_2	4	5	0	1	15000
$-F$	10	7	0	0	0
↗					↑
custos marginais	o mais positivo				simétrico do valor da função objectivo

• **Critério de entrada na base:**

Entra na base a variável que tiver um coeficiente mais positivo na linha F . Estes coeficientes (custos marginais) representam o peso relativo das variáveis não básicas (neste caso x_1 e x_2), no valor da função objectivo. Podemos dizer assim que, entrando a variável x_1 para a base, o valor de F cresce 10 unidades por unidade de crescimento x_1 . Note-se que isto apenas é verdade se na linha F existirem coeficientes nulos sob as variáveis básicas (porquê?). Na realidade, a linha de F é considerada como sendo uma equação adicional, onde F representa uma variável que nunca sai da base:

$$F = 10x_1 + 7x_2$$

pode ser representada como a equação seguinte:

$$-F + 10x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

Escrito desta forma, F aparece com o coeficiente -1; daí a razão de o valor que aparece no 2º membro da linha F ser igual ao simétrico do valor da função objectivo. Sendo interpretada como uma equação, podemos sempre eliminar variáveis (usando operações de pivotagem apropriadas) por forma a que os coeficientes de F sob as variáveis básicas sejam sempre nulos.

Para um problema de minimização o critério de entrada na base será obviamente o contrário: entra na base a variável não básica que provoca um maior decréscimo no valor de F , ou seja, a que tiver um coeficiente mais negativo na linha F .

• **Critério de saída da base:**

Sai da base a variável x_k (básica na equação i) que tiver um coeficiente $\frac{b_i}{a_{ij}}$ menor (sendo x_j a variável que entrou para a base).

As duas equações representadas no quadro acima podem-se escrever ($x_2 = 0$, não básica):

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + s_1 & = & 5000 \\ 4x_1 & + & s_2 = 15000 \end{array}$$

ou:

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 5000 - 2x_1 \\ s_2 & = & 15000 - 4x_1 \end{array}$$

Entrando x_1 para a base, isso significa que x_1 vai passar de zero para um valor positivo. A variável a sair da base vai ser aquela que primeiro se anular, limitando assim o crescimento de x_1 (note-se que todas as variáveis envolvidas só podem assumir valores positivos ou nulos).

Pela 1ª equação, x_1 pode subir até $\frac{5000}{2} = 2500$ para s_1 se anular (sair da base); pela segunda equação, o valor máximo para x_1 é $\frac{15000}{4} = 3750$. Logo, a variável a sair da base será s_1 , pois quando x_1 cresce é s_1 que primeiro se anula, impondo assim o limite no crescimento da variável x_1 em 2500. Como regra prática, basta calcular os quocientes entre os termos independentes e os coeficientes da matriz sob a variável que vai entrar para a base, retirando da base a variável básica da equação que tiver o menor quociente.

Analiseemos com mais detalhe a 1ª equação acima:

5000 (termo independente) é o valor que a variável básica s_1 tomava na iteração anterior.

2 (coeficiente da matriz sob x_1) é o simétrico do peso da variável x_1 nessa equação. Por outras palavras, podemos dizer que s_1 decresce 2 unidades por unidade de crescimento de x_1 , anulando-se (i. e. saindo da base) quando x_1 atinge $\frac{5000}{2}$.

Podem assim ser tiradas algumas conclusões interessantes, em função do valor dos coeficientes da matriz, a_{ik} , sob a variável que foi escolhida para entrar para a base, x_k :

$a_{ik} > 0$ x_{bi} , a variável básica na equação i , decresce a_{ik} unidades por unidade de crescimento de x_k , impondo assim um limite superior a x_k igual a $\frac{b_i}{a_{ik}}$ (b_i é o termo independente da equação i).

$a_{ik} = 0$ x_{bi} , a variável básica na equação i , não vê alterado o seu valor, quando x_k entra para a base. Isso significa que x_{bi} nunca sairá da base pois não limita de forma alguma o crescimento de x_k .

$a_{ik} < 0$ x_{bi} , a variável básica na equação i , cresce a_{ik} unidades por unidade de crescimento de x_k . Assim, do mesmo modo que para o caso anterior, x_{bi} não limita o crescimento de x_k , logo nunca sairá da base.

variáveis básicas	x_1	\cdots	x_k	\cdots	x_m	b
\downarrow						
x_{b1}	\cdots	\cdots	a_{1k}	\cdots	\cdots	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\Leftarrow x_{bi}$	\cdots	\cdots	a_{ik}	\cdots	\cdots	b_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{bn}	\cdots	\cdots	a_{nk}	\cdots	\cdots	b_n
$-F$	\cdots	\cdots	f_k	\cdots	\cdots	$-F_0$
			$\uparrow\uparrow$			

Com base no que se disse, podemos concluir o seguinte: se todos os coeficientes da variável que se escolheu para entrar para a base forem negativos ou nulos, isso significa que nenhuma das variáveis básicas decresce com o crescimento da nova variável candidata a básica. Assim, se esta variável pode crescer sem que qualquer das básicas se anule, então pode-se concluir que o problema não tem uma solução óptima limitada. Situações destas ocorrem quando a região de soluções admissíveis é um domínio aberto no sentido de crescimento da função objectivo.

Continuando com a resolução do exemplo dado:

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2500 $\frac{2500}{\frac{1}{2}} = 5000$
$\Leftarrow s_2$	0	3	-2	1	5000 $\frac{5000}{3} = 1666.7$
$-F$	0	2	-5	0	-25000
		$\uparrow\uparrow$			

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5000}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5000}{3}$
$-F$	0	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{85000}{3}$

Solução óptima encontrada:

Não existe nenhuma variável não básica (s_1 ou s_2 , neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F . Se uma dessas variáveis tivesse um coeficiente nulo, isso significava que ela poderia entrar para a base sem alterar o valor da função objectivo F (chamam-se a estas soluções alternativas à solução óptima encontrada). Note-se que as soluções alternativas assim obtidas são igualmente óptimas, já que mantêm o mesmo valor para a função objectivo F .

O valor da solução óptima para este problema seria $F = \frac{85000}{3}$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = \frac{5000}{3}, \quad x_2 = \frac{5000}{3}$$

Problema 2

(a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$\Leftarrow x_3$	5	20	1	0	400
x_4	10	15	0	1	450
$-z$	45	80	0	0	0
		\Uparrow			

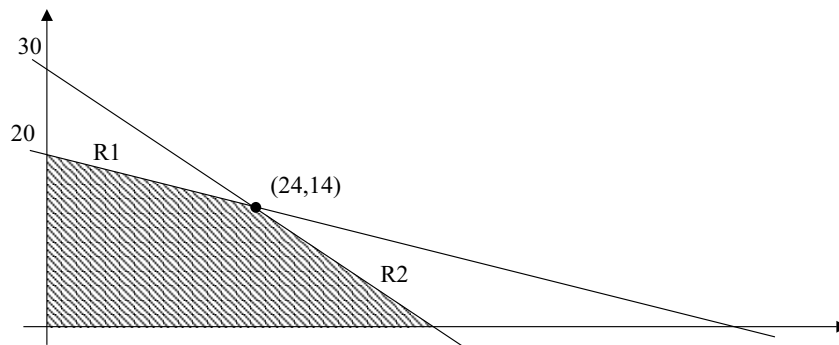
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$\frac{5}{20}$	1	$\frac{1}{20}$	0	20
$\Leftarrow x_4$	$\frac{125}{20}$	0	$-\frac{15}{20}$	1	150
$-z$	25	0	-4	0	-1600
	\Uparrow				

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{25}$	14
x_1	1	0	$-\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	24
$-z$	0	0	-1	-4	-2200

Solução óptima: $(x_1, x_2)^* = (24, 14)$ com $z^* = 2200$

- (b) Como a solução óptima terá que estar necessariamente num vértice da região admissível e, olhando para a figura abaixo, se constata que apenas um vértice (o que corresponde à actual solução óptima) tem x_1 e x_2 estritamente positivos, então para responder a esta pergunta teremos apenas que ver entre que valores pode variar c_1 de modo a que a solução óptima continue no mesmo vértice. Como a solução óptima saltará de vértice quando as linhas de nível da função objectivo forem paralelas à restrição (R1) ou à restrição (R2), isto é, quando $\frac{c_1}{80} = \frac{5}{20}$ ou $\frac{c_1}{80} = \frac{10}{15}$, isso conduz-nos a:

$$20 \leq c_1 \leq \frac{160}{3}$$



Problema 3

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

subj. a:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Em primeiro lugar é necessário representar o problema na forma standard, introduzindo variáveis de folga para transformar as inequações em equações. A variável de folga da primeira restrição tem coeficiente -1 porque a inequação é do tipo \geq (note-se que todas as variáveis são positivas).

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

subj. a:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - s_1 &= 2 \\x_1 + x_2 + s_2 &= 4 \\x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Neste caso já não se obtém a solução básica inicial fazendo as variáveis de folga iguais aos termos independentes. Apesar dessa ser uma solução básica, não é admissível e como tal não pode ser usada como ponto de partida para o método Simplex.

Serão apresentados dois métodos para resolver esta questão, que permitem usar o próprio Simplex para encontrar uma solução básica admissível inicial. Os métodos são:

- método das duas fases
- método das penalidades

Antes de aplicar qualquer um dos métodos, é no entanto necessário acrescentar variáveis (chamadas **variáveis artificiais**) nas restrições que não têm variáveis básicas.

Introduzindo uma variável artificial na 1ª equação:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - s_1 + a_1 &= 2 \\x_1 + x_2 + s_2 &= 4 \\x_1, x_2, s_1, s_2, a_1 &\geq 0\end{aligned}$$

Seguidamente, ambos os métodos usam o método Simplex para anular (retirar da base) essas variáveis artificiais. Quando isso acontece, a solução que então se tem é uma solução básica admissível do problema original, que é usada como solução de partida para aplicar o método Simplex.

Descrição sucinta dos dois métodos:

Método das duas fases

1ª fase minimizar a função objectivo artificial $W = \sum a_i$; o objectivo desta primeira fase é retirar todas as variáveis artificiais da base, situação em que W atinge o valor mínimo de zero. A solução básica admissível assim obtida é uma solução básica admissível inicial para se aplicar o método Simplex ao problema original.

2ª fase Usando como solução básica inicial a obtida na primeira fase, resolver o problema normalmente usando o algoritmo do simplex, depois de eliminar do quadro a linha correspondente à função objectivo artificial W , e as colunas relativas às variáveis artificiais, a_i .

Método das penalidades

A função objectivo $\max F = 2x_1 + x_2$ é substituída pela função objectivo $\max F = 2x_1 + x_2 - M \sum a_i$, onde M tem um valor muito elevado. Dado que se trata de um problema de maximização, a melhoria da função objectivo implica que as variáveis artificiais passem a valer zero (sejam retiradas da base). A solução básica assim obtida é uma solução básica admissível para o problema original.

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W , teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W . Dado que as variáveis x_1 e x_2 têm o mesmo coeficiente (-1), podemos escolher uma das duas variáveis para entrar na base.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	1	1	-1	0	1	2
s_2	1	1	0	1	0	4
$-F$	2	1	0	0	0	0
$-W$	-1	-1	1	0	0	-2 (simétrico de W)

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
x_1	1	1	-1	0	1	2
s_2	0	0	1	1	-1	2
$-F$	0	-1	2	0	-2	-4
$-W$	0	0	0	0	1	0

O quadro apresentado corresponde ao fim da 1ª fase do método das duas fases, dado que a função objectivo W foi minimizada até zero ($a_1 = 0$). A solução básica admissível assim obtida é uma solução básica admissível inicial para se aplicar o método Simplex ao problema original.

2ª fase:

Nesta fase pretende-se maximizar a função objectivo inicial, F , tomando como quadro de partida o último quadro da 1ª fase, depois de eliminar a linha correspondente a W e as colunas relativas às variáveis artificiais.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	-1	0	2
s_2	0	0	1	1	2
$-F$	0	-1	2	0	-4

↑↑

Note-se que x_1 nunca poderia sair da base! Entrando s_1 para a base, x_1 cresce 1 unidade por unidade de crescimento de s_1 , logo nunca se iria anular (e consequentemente sair da base). s_2 sai da base limitando o crescimento de s_1 em $\frac{2}{1} = 2$.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	0	1	4
s_1	0	0	1	1	2
$-F$	0	-1	0	-2	-8

Não existe nenhuma variável não básica (x_2 ou s_2 , neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F . O valor da solução óptima para este problema seria $F = 8$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0$$

Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:

Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

Assim, a função objectivo a maximizar será:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 - Ma_1 \\ &= 2x_1 + x_2 - M(2 - x_1 - x_2 + s_1) \\ &= -2M + (2 + M)x_1 + (1 + M)x_2 - Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.:

$2 + M$).

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	1	1	-1	0	1	2 $\frac{2}{1}$
s_2	1	1	0	1	0	4 $\frac{4}{1}$
$-F$	2	1		0	0	0
	M	M	$-M$			$2M$
	\Uparrow					

A partir deste quadro, não é necessário manter a coluna correspondente a a_1 , dado que a_1 já saiu da base.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	-1	0	2
$\Leftarrow s_2$	0	0	1	1	2
$-F$	0	-1	2	0	-4
			\Uparrow		

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	0	1	4
s_1	0	0	1	1	2
$-F$	0	-1	0	-2	-8

Não existe nenhuma variável não básica (x_2 ou s_2 , neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F . O valor da solução óptima para este problema seria $F = 8$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0$$

Problema 4

(a) Resolução pelo método das duas fases:

$$w = a_1 + a_2 = 35 - 3x_1 - 3x_2 - 8x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	
a_1	1	2	3	0	1	0	15
a_2	2	1	5	0	0	1	20
x_4	1	2	1	1	0	0	10
$-w$	-3	-3	-8	0	0	0	-35
$-z$	1	2	3	0	0	0	0

$$w = a_1 + a_2 = 35 - 3x_1 - 3x_2 - 8x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	
a_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	3
x_3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	4
x_4	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	6
$-w$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	-3
$-z$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	
x_2	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{15}{7}$
x_3	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{25}{7}$
x_4	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$
$-w$	0	0	0	0	-1	-1	0
$-z$	0	0	0	0			-15

Quadro óptimo

(b) Há soluções óptimas alternativas porque há variáveis não básicas que apresentam um custo marginal nulo no quadro óptimo, nomeadamente a variável x_1 . Para obter outra solução óptima deveria fazer mais uma iteração, metendo x_1 na base. O conjunto completo de soluções óptimas seria obténível fazendo a combinação linear das duas soluções óptimas geradas nos quadros simplex. Esta combinação linear representa a aresta do conjunto das soluções admissíveis que une os dois vértices óptimos.

Problema 5

Resolução pelo método das duas fases:

$$F = a_1 + a_2 = 7 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	
a_1	2	1	2	1	0	4
a_2	3	3	1	0	1	3
$-z$	4	1	1	0	0	0
$-F$	-5	-4	-3	0	0	-7

	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	
a_1	0	-1	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	2
x_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
$-z$	0	-3	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	-4
$-F$	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-2

	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	
x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-z$	0	$-\frac{13}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$-F$	0	0	0	1	1	0

	x_1	x_2	x_3	
x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$
$-z$	$\frac{13}{5}$	0	0	$-\frac{11}{5}$

Solução óptima: $(x_1, x_2, x_3)^* = (0, \frac{2}{5}, \frac{9}{5})$ com $z^* = \frac{11}{5}$

Problema 6

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

subj. a:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Representação na forma standard:

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

subj. a:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	-4	1	1	0	4
s_2	2	-3	0	1	6
$-F$	1	2	0	0	0
		↑↑			

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	-4	1	1	0	4
s_2	-10	0	3	1	18
$-F$	9	0	-2	0	-8
	↑↑				

x_1 pode entrar para a base (i. e., crescer a partir de 0), conseguindo um ganho de 9 unidades em F por unidade de crescimento de x_1 . No entanto, nem x_2 nem s_2 decrescem com o crescimento de x_1 , logo não limitam o crescimento de x_1 . Isto significa que a região de soluções admissíveis é um domínio aberto no sentido de crescimento de F (solução não limitada).

Problema 7

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Representação na forma standard:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - s_1 + a_1 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + a_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1 + a_2$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 1 + x_1 - x_2 + s_1$$

Da 2ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + a_2 = 2$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 + a_2 = 1 + x_1 - x_2 + s_1 + 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$W = 3 - x_1 + x_2 + x_3 + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W , teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W , neste caso será x_1 .

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	-1	1	0	-1	1	0	1
$\Leftarrow a_2$	2	-2	-1	0	0	1	2
$-F$	1	1	1	0	0	0	0
$-W$	-1	1	1	1	0	0	-3 (simétrico de W)
	\uparrow						

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$-W$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-2 (simétrico de W)

Atingiu-se o valor mínimo de W (não existindo nenhum coeficiente negativo na linha W , não se pode baixar mais o seu valor), mas esse mínimo não é zero. Quer isto dizer que não é possível encontrar uma solução básica admissível para o problema original, ou seja, a região de soluções admissíveis é um conjunto vazio.

Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:

Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 1 + x_1 - x_2 + s_1$$

Da 2ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + a_2 = 2$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

Assim, a função objectivo a minimizar será:

$$\begin{aligned} F &= x_1 + x_2 + x_3 + M(a_1 + a_2) \\ &= 2x_1 + x_2 - M(1 + x_1 - x_2 + s_1 + 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3) \\ &= 3M + (1 - M)x_1 + (1 + M)x_2 + (1 + M)x_3 + Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $1 - M$).

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	-1	1	0	-1	1	0	1
a_2	2	-2	-1	0	0	1	2
$-F$	1	1	1	0	0	0	0
	$-M$	M	M	M	0	0	$-3M$
	\uparrow						

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1
	0	0	$\frac{1}{2}M$	M	0	$\frac{1}{2}M$	$-2M$

Atingiu-se o valor mínimo de F (todos os custos marginais são \geq zero) sem que tenham saído da base toda as variáveis artificiais. Isso significa que não é possível encontrar uma solução básica admissível para o problema original, ou seja, a região de soluções admissíveis é um conjunto vazio.

Problema 8

$$\max F = x + 2y + 3z$$

subj. a:

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \mathfrak{R} \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Como a variável x não é limitada apenas a valores não negativos, é necessário substituí-la pela diferença de duas variáveis não negativas:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 - x_2 \\ & & x_1 , x_2 \geq 0 \end{array}$$

A representação do problema na forma standard (depois de introduzidas as variáveis artificiais) será então:

$$\max F = x_1 - x_2 + 2y + 3z$$

subj. a:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & x_2 & - & y & & - & s_1 & & + & a_1 & & = & 0 \\ & & & & y & + & z & & & + & s_2 & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & z & & & & & + & a_2 & = & 0 \\ x_1 & , & x_2 & , & y & , & z & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & , & a_2 \geq 0 \end{array}$$

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1 + a_2$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 - x_2 - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x_1 + x_2 + y + s_1$$

Da 3ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 + z + a_2 = 0$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = x_1 - x_2 - z$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 + a_2 = -x_1 + x_2 + y + s_1 + x_1 - x_2 - z = y + s_1 - z$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W , teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W , neste caso será z .

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	0	0	1	1	0	1	0	0	2
$\Leftarrow a_2$	-1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	1	-1	2	3	0	0	0	0	0
$-W$	0	0	1	-1	1	0	0	0	0

↑↑

Note-se que embora W seja já zero (a solução básica é degenerada porque a_1 e a_2 são iguais a zero), ainda há variáveis artificiais na base que devem sair para se obter uma solução básica inicial do problema original.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
$\Leftarrow a_1$	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	1	-1	1	0	0	1	0	-1	2
z	-1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	4	-4	2	0	0	0	0	-3	0
$-W$	-1	1	1	0	1	0	0	1	0

↑↑

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	0	2	0	1	1	-1	-1	2
z	0	0	-1	1	-1	0	1	1	0
$-F$	0	0	6	0	4	0	-4	-3	0
$-W$	0	0	0	0	0	0	1	1	0

↑↑

Note-se que embora a solução actual representada no quadro acima seja degenerada ($x_1 = 0$ e $z = 0$), o processo iterativo não entra em ciclo, uma vez que a próxima solução é necessariamente não degenerada. Com efeito, entrando y para a base as variáveis x_1 e z vão crescer (coeficientes a_{13} e a_{33} iguais a -1) uma unidade por unidade de crescimento de y , passando de zero para um valor positivo.

2ª fase:

Nesta fase pretende-se maximizar a função objectivo inicial, F , tomando como quadro de partida o último quadro da 1ª fase, depois de eliminar a linha correspondente a W e as colunas relativas às variáveis artificiais.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	0	0	1	-3	-6

↑↑

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	1	0	0	1	2
s_1	0	0	2	0	1	1	2
z	0	0	1	1	0	1	2
$-F$	0	0	-2	0	0	-4	-8

Solução óptima encontrada.

Analisemos agora cuidadosamente as restrições do problema:

$$\begin{aligned} x - y &\geq 0 \\ y + z &\leq 2 \\ -x + z &= 0 \\ x &\in \mathfrak{R} \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Da terceira equação pode-se retirar que $z = x$. Dado que $z \geq 0$ então $x \geq 0$. Podemos assim escrever o problema equivalente ao problema dado, mas de resolução muito mais simples (já na forma standard):

$$\max F = x + 2y + 3z = 4x + 2y$$

suj. a:

$$\begin{aligned} x - y - s_1 + a_1 &= 0 \\ x + y + s_2 &= 2 \\ x, y, s_1, s_2, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x + y + s_1$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 = -x + y + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W , teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W , neste caso será x .

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	1	-1	-1	0	1	0
s_2	1	1	0	1	0	2
$-F$	4	2	0	0	0	0
$-W$	-1	1	1	0	0	0
	\Uparrow					

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
x	1	-1	-1	0	1	0
$\leftarrow s_2$	0	2	1	1	-1	2
$-F$	0	6	4	0	-4	0
$-W$	0	0	0	0	1	0

↑↑

2ª fase:

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\leftarrow y$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	1	-3	-6

↑↑

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	0	1	2
s_1	0	2	1	1	2
$-F$	0	-2	0	-4	-8

↑↑

Solução óptima: $x = z = 2$, $y = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $F = 8$.

Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:

Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 - x_2 - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x_1 + x_2 + y + s_1$$

Da 3ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 + z + a_2 = 0$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = x_1 - x_2 - z$$

Assim, a função objectivo a maximizar será:

$$\begin{aligned} F &= x_1 - x_2 + 2y + 3z - M(a_1 + a_2) \\ &= x_1 - x_2 + 2y + 3z - M(-x_1 + x_2 + y + s_1 + x_1 - x_2 - z) \\ &= x_1 + x_2 + (2 - M)y + (3 + M)z - Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $2 - M$).

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	0	0	1	1	0	1	0	0	2
$\Leftarrow a_2$	-1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	1	-1	2	3	0	0	0	0	0
	0	0	$-M$	$+M$	$-M$	0	0	0	0

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
$\Leftarrow a_1$	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	1	-1	1	0	0	1	0	-1	2
z	-1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	4	-4	2	0	0	0	0	-3	0
	$+M$	$-M$	$-M$	0	$-M$	0	0	$-M$	0

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	0	2	0	1	1	-1	-1	2
z	0	0	-1	1	-1	0	1	1	0
$-F$	0	0	6	0	4	0	-4	-3	0
	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0

Note-se que embora a solução actual representada no quadro acima seja degenerada ($x_1 = 0$ e $z = 0$), o processo iterativo não entra em ciclo, uma vez que a próxima solução é necessariamente não degenerada. Com efeito, entrando y para a base as variáveis x_1 e z vão crescer (coeficientes a_{13} e a_{33} iguais a -1) uma unidade por unidade de crescimento de y , passando de zero para um valor positivo.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	0	0	1	-3	-6

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	1	0	0	1	2
s_1	0	0	2	0	1	1	2
z	0	0	1	1	0	1	2
$-F$	0	0	-2	0	0	-4	-8

Solução óptima encontrada.

Analisemos agora cuidadosamente as restrições do problema:

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \mathfrak{R} \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Da terceira equação pode-se retirar que $z = x$. Dado que $z \geq 0$ então $x \geq 0$. Podemos assim escrever o problema equivalente ao problema dado, mas de resolução muito mais simples (já na forma standard):

$$\max F = x + 2y + 3z = 4x + 2y$$

subj. a:

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & - & s_1 & & + & a_1 & = & 0 \\ x & + & y & & & + & s_2 & & = & 2 \\ x & , & y & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= 4x + 2y - M(a_1) \\ &= 4x + 2y - M(-x + y + s_1) \\ &= (4 + M)x + (2 - M)y - Ms_1 \end{aligned}$$

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	1	-1	-1	0	1	0
s_2	1	1	0	1	0	2
$-F$	4	2	0	0	0	0
	$+M$	$-M$	$-M$	0	0	0
	\Uparrow					

A variável artificial foi retirada da base.

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	-1	-1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	2	1	1	2
$-F$	0	6	4	0	0
		\Uparrow			

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	1	-3	-6
			\Uparrow		

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	0	1	2
s_1	0	2	1	1	2
$-F$	0	-2	0	-4	-8
			\Uparrow		

Solução óptima: $x = z = 2$, $y = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $F = 8$.

3

Exercícios de Programação Inteira Enunciados

Problema 1

Considere o seguinte problema de Programação Inteira:

Maximizar:

$$F = 3x + 7y$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}x &\leq 3.5 \\5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\x, y &\geq 0 \text{ e inteiras}\end{aligned}$$

Resolva o problema graficamente, utilizando o algoritmo de “Branch-and-Bound”.

Problema 2

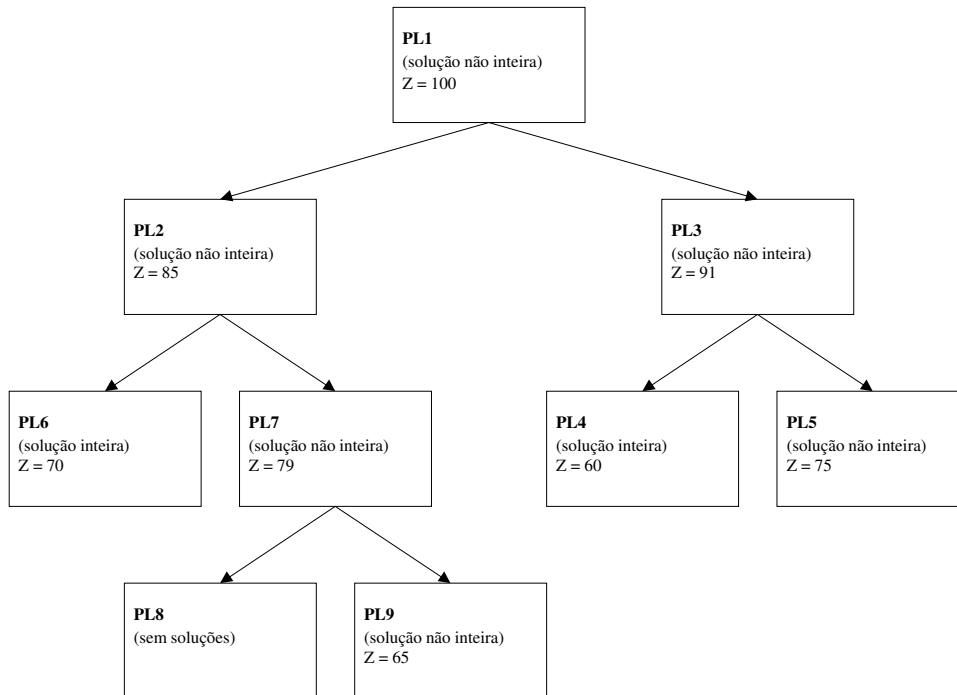
Foi utilizado o algoritmo de “Branch-and-Bound” para resolver um problema de programação inteira (minimização), tendo sido gerados e resolvidos os seguintes subproblemas:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
x_1	5	$5\frac{13}{18}$	–	3	$3\frac{1}{2}$	–	5	3	–
x_2	2	$2\frac{4}{9}$	–	3	3	–	$2\frac{5}{8}$	$3\frac{1}{8}$	–
<i>Z</i>	–20	$-23\frac{2}{3}$	<i>SSA</i>	–21	–22	<i>SSA</i>	$-23\frac{1}{8}$	$-21\frac{5}{8}$	<i>SSA</i>

Represente a árvore de problemas correspondente a esta resolução, indicando nos ramos a restrição adicionada em cada ramificação, e diga qual é a solução ótima.

Problema 3

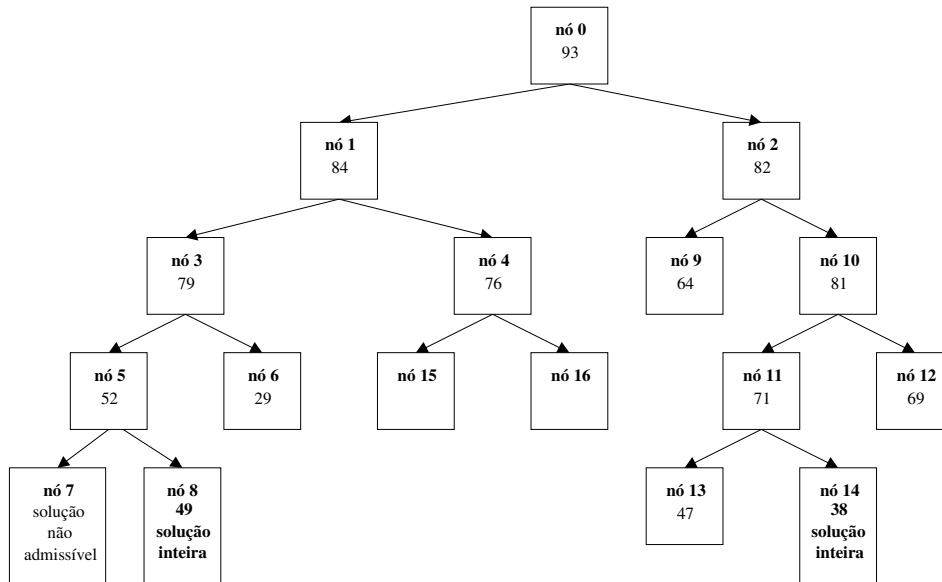
Considere um problema de maximização exclusivamente com variáveis inteiras. Resolvendo o problema através de “Branch-and-Bound”, obtém-se, num dado estágio, a seguinte árvore:



- (a) Qual é, nesta altura, o melhor **limite superior** sobre a solução inteira óptima?
- (b) Qual é, nesta altura, o melhor **limite inferior** sobre a solução inteira óptima?
- (c) Indique que **nós já** foram **explorados** e explique porquê.
- (d) Indique os nós que **ainda não** foram **explorados** e explique porquê.
- (e) Já foi atingida a solução óptima do problema inteiro? Porquê?
- (f) Qual o valor máximo do erro absoluto sobre a solução óptima inteira, se o algoritmo for terminado neste ponto?

Problema 4

Para um problema de maximização, foi desenvolvida uma árvore de “Branch-and-Bound” como a representada na figura. Na árvore está representada a ordem de criação dos nós, bem como os limites superiores (majorantes) e inferiores (minorantes), sempre que disponíveis.



- (a) Que informação se pode extrair desta árvore?
- (b) Que nós se encontram explorados?
- (c) Sugira que estratégia poderá ter sido adoptada no desenvolvimento da árvore.

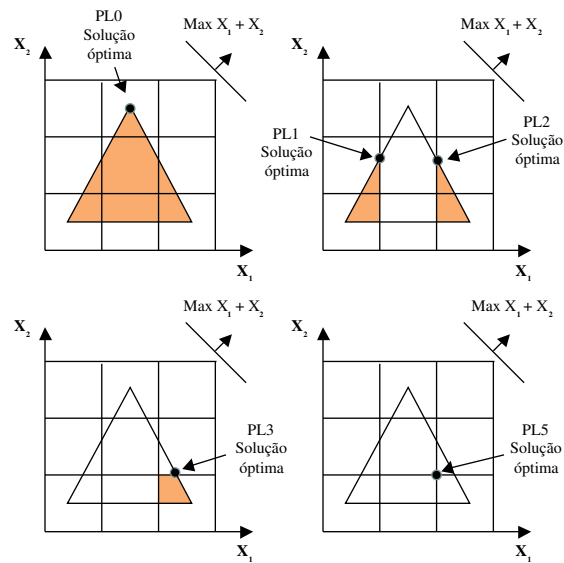


Figura 1: Passos da resolução por “Branch-and-Bound” de um problema de Programação Linear Inteira.

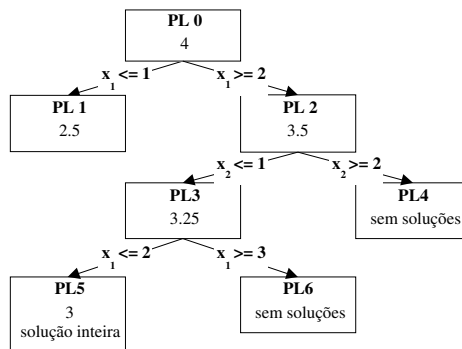


Figura 2: A árvore binária solução do problema.

Problema 5

Considere o problema de Programação Linear Inteira representado nas figuras 1 e 2. Pretende-se maximizar $x_1 + x_2$, tais que x_1 e x_2 pertencem à zona de soluções admissíveis definida pelo Δ e x_1 e x_2 são inteiros.

Descreva os passos percorridos na resolução do problema, através da interpretação das figuras 1 e 2.

3

Exercícios de Programação Inteira Resoluções

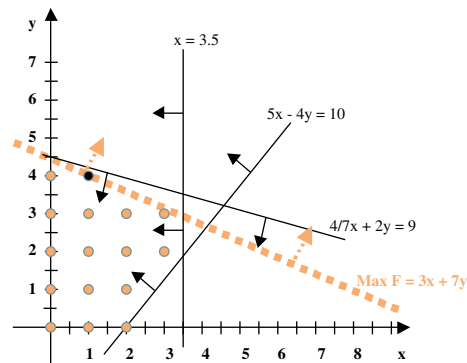


Figura 1: Resolução gráfica do problema original (de programação inteira).

Problema 1

O problema a resolver é de Programação Inteira (PI) com apenas duas variáveis de decisão. Neste caso é possível obter a solução óptima logo directamente a partir do gráfico, tal como se pode ver na figura 1.

Neste caso especial também se pode usar o algoritmo Branch-and-Bound graficamente, resolvendo os vários problemas de Programação Linear (PL).

Paralelamente à resolução dos problemas de PL construiu-se uma árvore onde se representam as várias ramificações geradas durante a aplicação do método.

O algoritmo Branch-and-Bound começa por resolver o problema de PL associado ao problema de PI dado, ou seja, retirando as restrições de integralidade para as variáveis de decisão (problema usualmente designado por problema relaxado), aqui identificado por $\mathcal{PL0}$.

Problema $\mathcal{PL0}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

subj. a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Na figura 2 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{PL0}$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

$$\begin{aligned} x &= 3.5 \\ \frac{4}{7}x + 2y &= 9 \end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (3.5, 3.5)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = 35$. Na figura 3 está representado o nó inicial da árvore do Branch-and-Bound.

Uma vez que a solução é não inteira, o algoritmo prossegue com a geração de dois novos problemas, obtidos pela introdução de duas restrições numa das variáveis cujo valor é não inteiro. Neste caso foi escolhida arbitrariamente a variável x , tendo sido criados dois

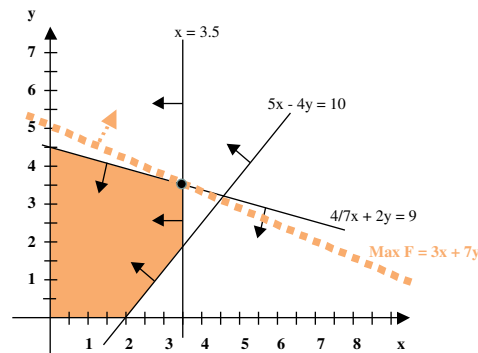


Figura 2: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL0}$.

<p>PL0 (solução não inteira) $x = 3.5$ $y = 3.5$ $F = 35$</p>

Figura 3: Árvore do B&B

problemas, o problema $\mathcal{PL01}$, com a introdução da restrição $x \leq 3$, e o problema $\mathcal{PL02}$, com a introdução da restrição $x \geq 4$.

Deste modo é garantido que, a solução óptima inteira do problema original, que neste caso existe, está necessariamente num destes problemas. Note-se que a reunião das regiões admissíveis de $\mathcal{PL01}$ e $\mathcal{PL02}$ contém todas as soluções inteiras admissíveis do problema dado, não sendo desta forma excluída qualquer solução inteira. Por outro lado, tratando-se de um problema de maximização, o valor da função objectivo óptima de v é sempre menor ou igual que o seu valor para o problema “pai”, $\mathcal{PL0}$ (ou \geq , se se tratar de um problema de minimização). Prosseguindo, resolvem-se os problemas $\mathcal{PL01}$ e $\mathcal{PL02}$. A ordem de resolução considera-se arbitrária, já que nada permite concluir à priori qual dos problemas contém a solução inteira óptima.

Problema $\mathcal{PL01}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

subj. a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

Na figura 4 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{PL01}$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

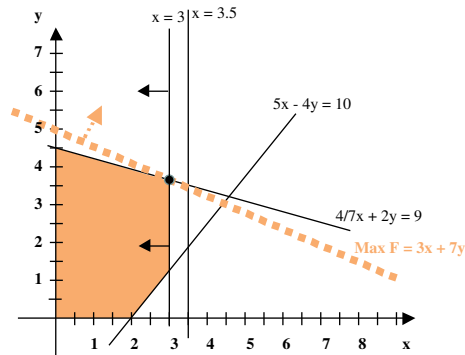


Figura 4: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL01}$.

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ \frac{4}{7}x + 2y &= 9 \end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (3, \frac{51}{14}) \approx (3, 3.6)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = 34.5$.

Analisemos agora o problema $\mathcal{PL02}$, já que este pode eventualmente conduzir a uma solução inteira, com um valor para a função objectivo superior ao obtido para $\mathcal{PL01}$. Se isso acontecer, então não é necessário resolver sub-problemas gerados por $\mathcal{PL01}$, uma vez que qualquer solução desses problemas, tem necessariamente um valor da função objectivo não superior ao de $\mathcal{PL01}$. Esta operação de “corte” na geração e análise dos problemas de PL é consequência de valores limite (Bound) impostos pelo algoritmo.

Problema $\mathcal{PL02}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

subj. a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Para este problema pode concluir-se facilmente (ver figura 5) que não existe qualquer solução admissível. Com efeito, as regiões definidas por $x \leq 3.5$ e $x \geq 4$ são disjuntas.

Na figura 6 está representada a árvore do Branch-and-Bound construída até ao momento.

Continuando, é necessário resolver os problemas $\mathcal{PL011}$ e $\mathcal{PL012}$, gerados pela ramificação do problema $\mathcal{PL01}$. A ordem de resolução é arbitrária (escolha-se primeiro $\mathcal{PL011}$).

Problema $\mathcal{PL011}$:

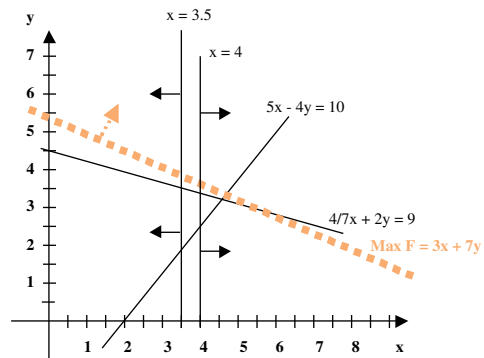


Figura 5: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL02}$.

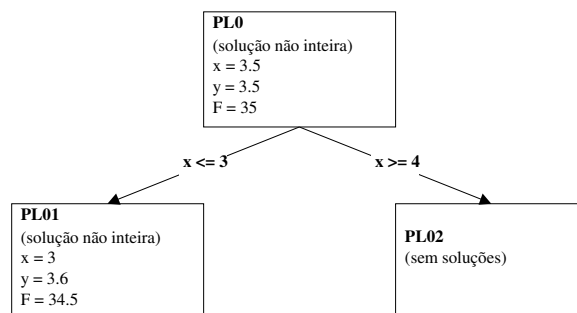


Figura 6: Árvore do B&B

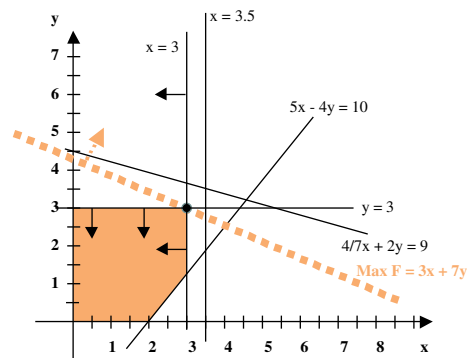


Figura 7: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL}011$.

$$\max F = 3x + 7y$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\leq 3 \\ y &\leq 3 \end{aligned}$$

Na figura 7 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{PL}011$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (3, 3)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = 30$. Apesar de ser a primeira solução inteira obtida até então, não se pode contudo afirmar que ela é a solução óptima do problema de \mathcal{PI} , dado que ainda não se explorou a solução do problema $\mathcal{PL}012$. Pode no entanto registar-se esta solução inteira como a melhor obtida até aqui.

Dado que se trata de um problema de maximização, o valor correspondente da função objectivo é considerado como um limite inferior para o valor óptimo de F . Durante a aplicação do algoritmo, qualquer solução (inteira ou não) que se obtenha com um valor para o objectivo inferior a 30 pode ser imediatamente desprezada, pois existe já uma solução inteira com esse valor.

Prosseguindo, resolva-se o problema $\mathcal{PL}012$:

$$\max F = 3x + 7y$$

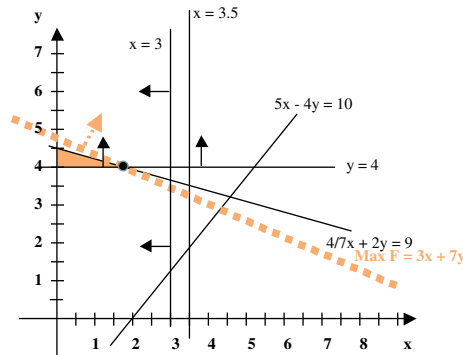


Figura 8: Resolução gráfica do problema $\mathcal{P}\mathcal{L}012$.

suj. a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\leq 3 \\ y &\geq 4 \end{aligned}$$

Na figura 8 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{P}\mathcal{L}012$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

$$\begin{aligned} \frac{4}{7}x + 2y &= 9 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (\frac{7}{4}, 4) \approx (1.7, 4)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = \frac{133}{4} \approx 33.2$.

Na figura 9 está representada a árvore do Branch-and-Bound construída até ao momento.

Uma vez que a solução obtida é não inteira, é necessário comparar o valor da função objectivo com o seu actual limite inferior, F , que neste momento está fixado em 30. Como é superior, isso significa que na região admissível deste problema pode existir ainda uma solução inteira com um valor para a função objectivo superior ao actual limite inferior. Por este motivo é necessário prosseguir, gerando dois novos problemas a partir de $\mathcal{P}\mathcal{L}012$, introduzindo as restrições $x \leq 1$ e $x \geq 2$.

Problema $\mathcal{P}\mathcal{L}0121$:

$$\max F = 3x + 7y$$

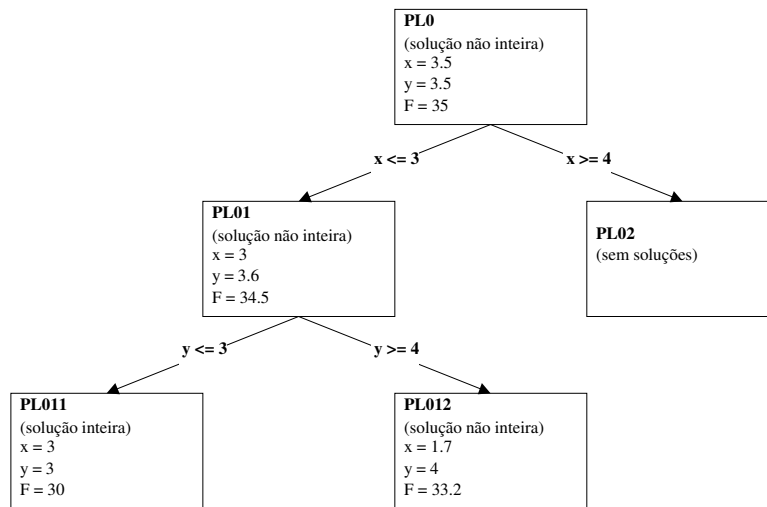


Figura 9: Árvore do B&B

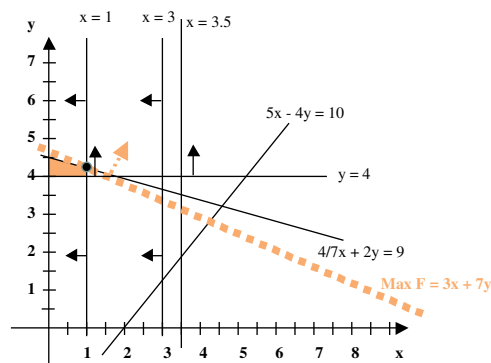


Figura 10: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL0121}$.

suj. a:

$$\begin{aligned}
 x & \leq 3.5 \\
 5x - 4y & \leq 10 \\
 \frac{4}{7}x + 2y & \leq 9 \\
 x, y & \geq 0 \\
 x & \leq 3 \\
 y & \geq 4 \\
 x & \leq 1
 \end{aligned}$$

Na figura 10 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{PL0121}$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{7}x + 2y & = 9 \\
 x & = 1
 \end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (1, \frac{59}{14}) \approx (1, 4.2)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = \frac{133}{4} \approx 32.5 \geq 30$ (valor superior ao da melhor solução inteira obtida até ao momento).

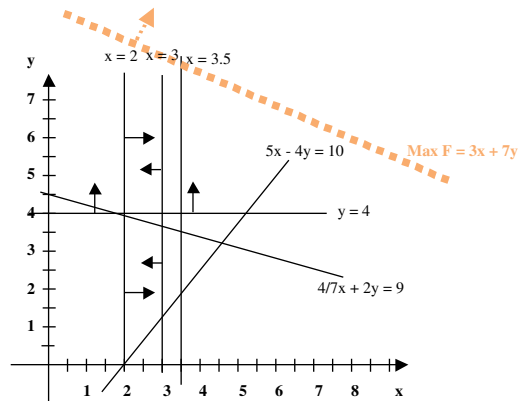


Figura 11: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL0122}$.

Problema $\mathcal{PL0122}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\leq 3 \\ y &\geq 4 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Analisando a figura 11, pode-se concluir facilmente que o problema $\mathcal{PL0122}$ não tem qualquer solução admissível.

Na figura 12 está representada a árvore do Branch-and-Bound construída até ao momento.

Partindo do problema $\mathcal{PL0121}$ e introduzindo duas novas restrições em y , $y \leq 4$ e $y \geq 5$, obtêm-se dois novos problemas, $\mathcal{PL01211}$ e $\mathcal{PL0122}$.

Problema $\mathcal{PL01211}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x &\leq 3.5 \\ 5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \\ x &\leq 3 \\ y &\geq 4 \\ x &\leq 1 \\ y &\leq 4 \end{aligned}$$

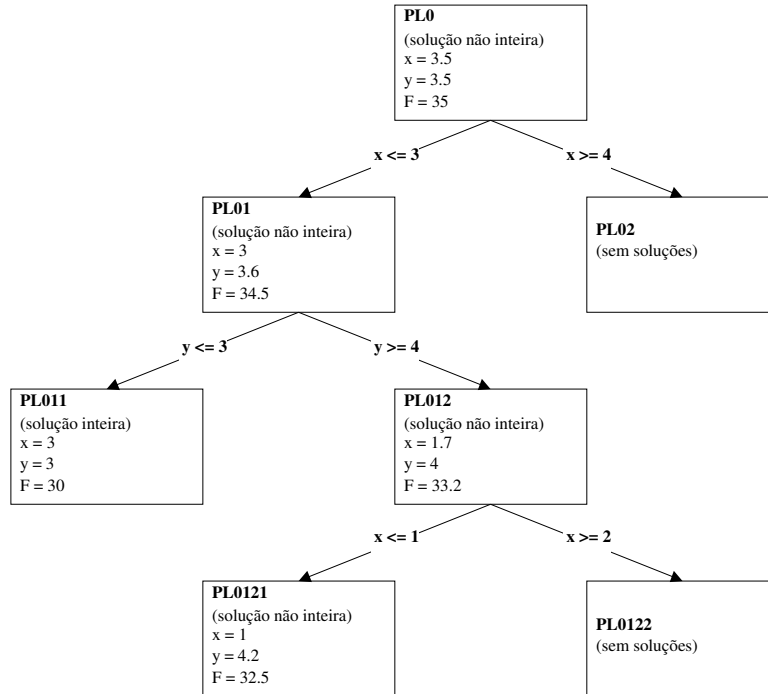


Figura 12: Árvore do B&B

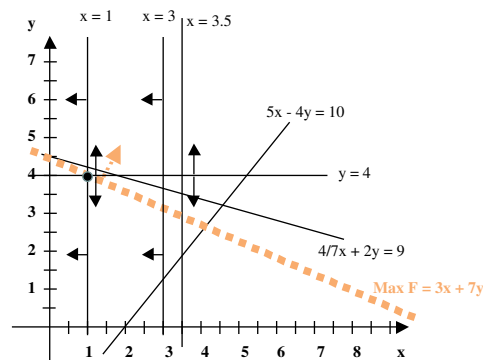


Figura 13: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL01211}$.

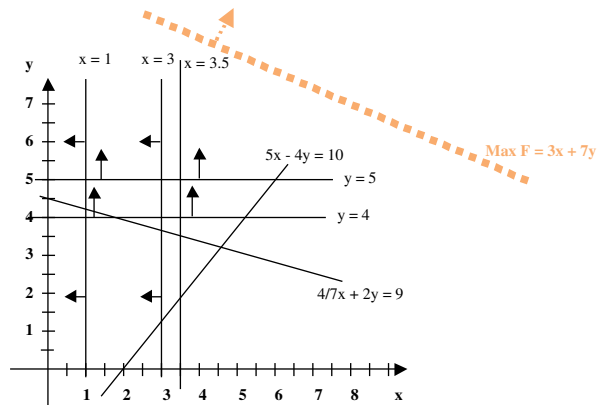


Figura 14: Resolução gráfica do problema $\mathcal{PL01212}$.

Na figura 13 pode-se verificar que a solução do problema $\mathcal{PL01211}$ se obtém calculando a intersecção das rectas:

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= 4\end{aligned}$$

Essa intersecção faz-se no ponto $(x, y) = (1, 4)$. O valor da função objectivo nesse ponto é $F = 31$.

Problema $\mathcal{PL01212}$:

$$\max F = 3x + 7y$$

subj. a:

$$\begin{aligned}x &\leq 3.5 \\5x - 4y &\leq 10 \\ \frac{4}{7}x + 2y &\leq 9 \\x, y &\geq 0 \\x &\leq 3 \\y &\geq 4 \\x &\leq 1 \\y &\geq 5\end{aligned}$$

Analisando a figura 14, pode-se concluir facilmente que o problema $\mathcal{PL01212}$ não tem qualquer solução admissível. Assim, a solução do problema $\mathcal{PL01211}$ é a solução óptima (inteira) do problema dado.

Na figura 15 está representada toda a árvore do Branch-and-Bound, construída para resolução deste problema.

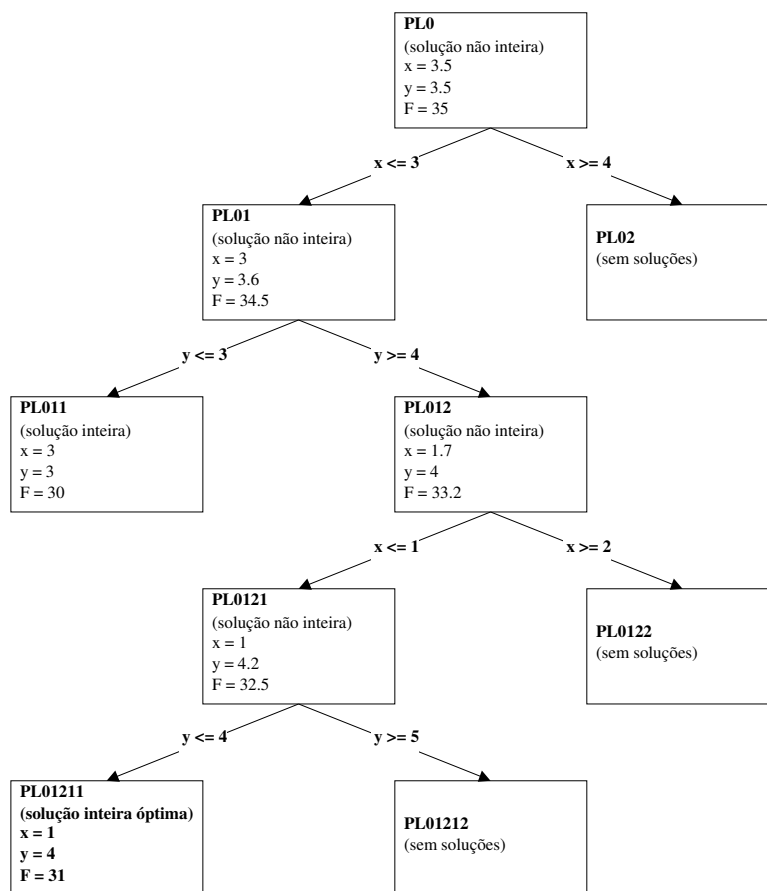


Figura 15: Árvore do B&B

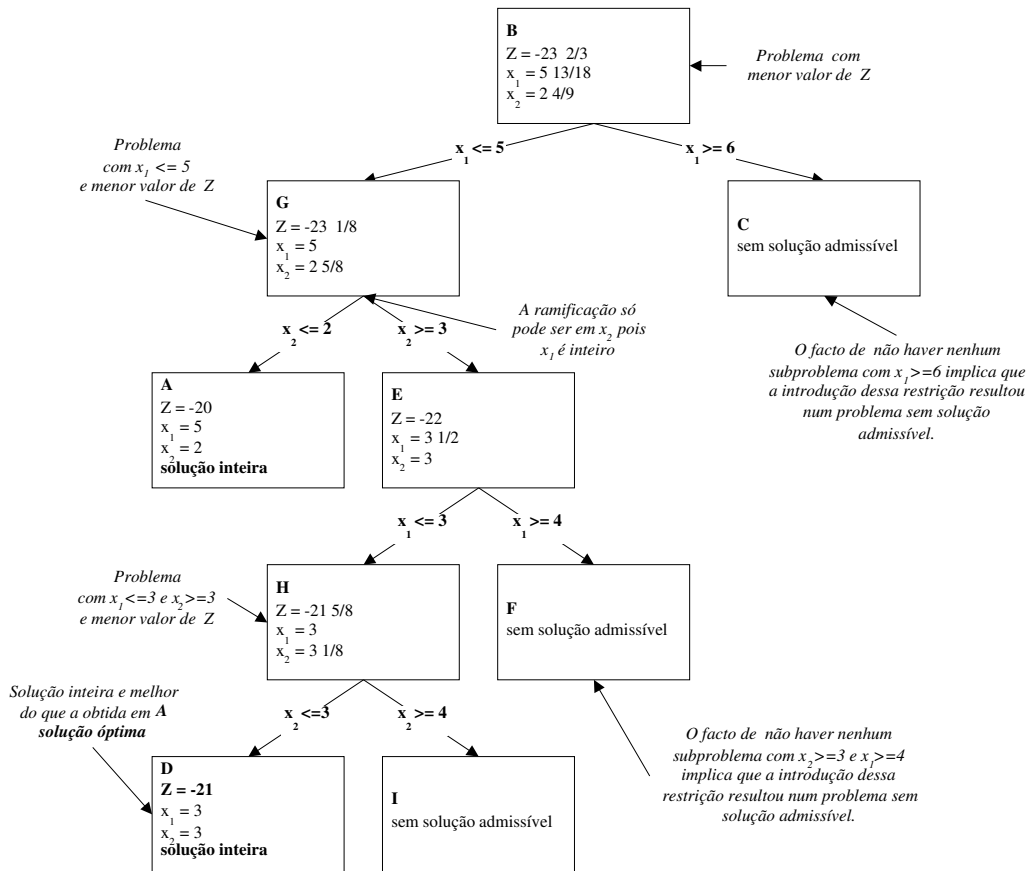


Figura 1: Árvore do B&B

Problema 2

Para obtenção da árvore de problemas (1) correspondente aos subproblemas apresentados no enunciado, é necessário ter em conta que o valor da função objectivo “piora” à medida que se desce na árvore (tem um maior valor neste caso, dado que se trata de um problema de minimização), dado que a descida na árvore corresponde à introdução de restrições adicionais.

A primeira ramificação teve que ser feita em x_1 , dado que:

- em nenhum dos restantes subproblemas existe uma solução com $x_1 \in]5, 6[$ (consequência de se ter imposto $x_1 \leq 5$ e $x_1 \geq 6$);
- se a ramificação tivesse sido em x_2 , todos os restantes subproblemas teriam que ter $x_2 \leq 2$ ou $x_2 \geq 3$, mas o subproblema G contradiz essa assumption.

Problema 3

- (a) O melhor **limite superior** sobre a solução inteira óptima no momento de resolução retratado na árvore é dado pela solução do problema *PL5* e é igual a 75. Qualquer solução inteira que surja a partir da exploração desse nó terá um valor da função objectivo ≤ 75
- (b) Os limites inferiores são dados por valores de soluções admissíveis (variáveis já inteiras) que ainda se desconhece se são ou não óptimas. Neste caso temos já 2 soluções inteiras, para *PL6* e para *PL4*. A que tem o maior valor da função objectivo fornece o melhor **limite inferior**, 70 neste caso.
- (c) Já foram explorados os nós *PL1*, *PL2*, *PL3* e *PL7* porque já têm ramos.
Os nós *PL4* e *PL6* já foram explorados porque deram origem a soluções inteiras.
O nó *PL8* já está explorado porque corresponde a um problema sem solução admissível.
O nó *PL9* já foi explorado porque pode ser cortado. Corresponde a um problema com solução óptima não inteira e com um valor para a função objectivo inferior ao valor da solução inteira do problema *PL6*.
- (d) O nó *PL5* ainda não foi explorado, dado que corresponde a um problema com solução óptima não inteira, mas com um valor para a função objectivo superior ao valor da melhor solução inteira obtida até ao momento (problema *PL6*).
- (e) Não se sabe ainda se já foi obtida a solução óptima do problema inteiro, porque ainda há nós por explorar (*PL5*). Só quando os melhores limites inferiores e superiores coincidirem é que se pode afirmar que a melhor solução inteira obtida é a óptima.
- (f) O valor máximo do erro absoluto sobre a solução óptima inteira, se o algoritmo for terminado neste ponto será 5, isto é, a diferença entre os melhores limites superior e inferior.

Problema 4

(a) Pode-se extrair da árvore que:

- o melhor limite superior até ao momento é 76 (máximo valor da função objectivo de entre os nós ainda não explorados);
- o melhor limite inferior é 49 (valor da função objectivo da melhor solução inteira obtida até ao momento).

(b) Já foram explorados os nós 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 e 11 porque já têm ramos.

Os nós 8 e 14 já foram explorados porque deram origem a soluções inteiras.

O nó 7 já está explorado porque corresponde a um problema sem solução admissível.

Os nós 6 e 13 já foram explorados porque podem ser cortados. Correspondem a problemas com solução óptima não inteira e com um valor para a função objectivo inferior ao valor da solução inteira do problema do nó 8.

(c) A estratégia adoptada no desenvolvimento da árvore foi a de ramificar o nó ainda não explorado e com maior valor de função objectivo.

4

Exercícios de Transportes Enunciados

Problema 1

Três reservatórios, com capacidades diárias de 15, 20 e 25 milhões de litros de água, abastecem 4 cidades com consumos diários de 8, 10, 12 e 15 milhões de litros de água. O custo de abastecimento, por milhão de litros, é apresentado na tabela 1.

Tabela 1: Custo de abastecimento, por milhão de litros.

		Cidades			
		A	B	C	D
Reservatórios	1	2	3	4	5
	2	3	2	5	2
	3	4	1	2	3

O problema consiste em determinar a política de abastecimento óptima (aquela com menor custo).

Formule o problema como um problema de transportes e resolva-o usando o respectivo algoritmo.

Problema 2

Uma empresa possui duas fábricas (P1 e P2) onde produz um produto que é exportado para 3 locais num país vizinho (L1, L2 e L3). O transporte é feito através de duas fronteiras (F1 e F2) (não se impõe limites máximos à quantidade que pode atravessar diariamente cada uma delas). Por outro lado, cada fronteira cobra uma taxa por cada unidade do referido produto que a atravessa (independentemente de vir de P1 ou P2) – tabela 1.

São conhecidas as disponibilidades diárias em cada fábrica, que são suficientes para satisfazer as necessidades diárias de cada local, também conhecidas (tabela 1). Sabe-se também quais são os custos para transportar uma unidade do produto, de cada produtor para cada fronteira e de cada fronteira para cada destino, indicados na figura 1.

Tabela 1: Disponibilidades, necessidades e taxas de fronteira.

PRODUTORES	P1	P2	
Disponibilidades	120	80	
LOCAIS DE DESTINO	L1	L2	L3
Necessidades	50	70	60
FRONTEIRAS	F1	F2	
Taxa por unidade	4	3	

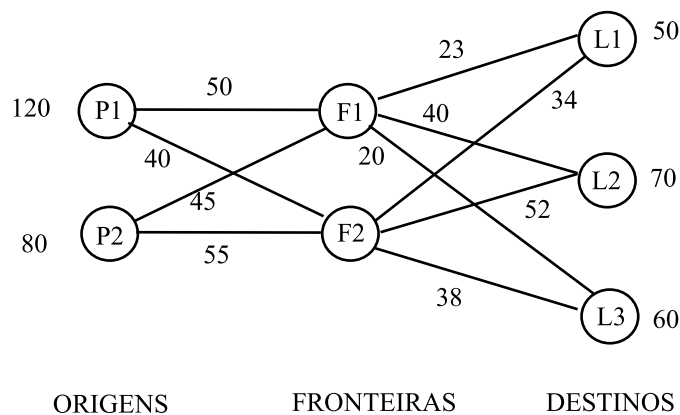


Figura 1: Rede de transportes.

- Considere o problema que permite encontrar a política óptima de transporte do produto entre cada produtor, fronteira e local de destino. Formule-o (sem resolver!) como um problema de transportes na forma standard.
- Considere agora que diariamente chegam às fronteiras F1 e F2 100 e 90 unidades do produto, respectivamente. Usando o algoritmo de transportes, determine quais as quantidades a transportar de cada fronteira para cada um dos locais de destino, por forma a minimizar o custo global associado a esse transporte. Considere iguais os restantes dados do problema.

Problema 3

Uma companhia construtora de aviões pretende planejar a produção de um motor, durante os próximos 4 meses.

Para satisfazer as datas de entrega contratuais, necessita de fornecer os motores nas quantidades indicadas na 2^a coluna da tabela 1. O número máximo de motores que a companhia produz por mês, bem como o custo de cada motor (em milhões de dólares) são dados na 3^a e 4^a colunas da mesma tabela.

Dadas as variações nos custos de produção, pode valer a pena produzir alguns motores um ou mais meses antes das datas programadas para entrega. Se se optar por esta hipótese, os motores serão armazenados até ao mês de entrega, com um custo adicional de 0.015 milhões de dólares/mês.

Tabela 1: Encomendas, produção e custos.

Mês	Quantidades a entregar	Produção máxima	Custo unitário de produção	Custo unitário de armazenagem
1	10	25	1.08	—
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	0.015

O director de produção quer saber quantos motores deve fabricar em cada mês (e para que meses de entrega) por forma a minimizar os custos globais de produção e armazenagem.

Formule o problema e resolva-o pelo algoritmo de transportes.

Problema 4

Durante a semana de exames do Instituto de Altos Estudos, realizados sob a forma de provas de escolha múltipla preenchidas a lápis, sendo este fornecido pelo Instituto (conforme o modelo usado nos EUA), são necessários 60, 50, 80, 40 e 50 lápis afiados no início de cada dia, de segunda a sexta-feira respectivamente. Os lápis afiados podem ser comprados por 15\$00 cada. Os lápis usados num dia de exame podem ser afiados, recorrendo ao serviço da *Afiadora Lda.* - a um custo de 2\$00 a unidade - que os devolve 2 dias depois, isto é, os lápis usados na segunda-feira só poderão ser reutilizados (já afiados) na quarta-feira, e assim sucessivamente. No fim da semana os lápis podem ser revendidos a um preço de 5\$00 a unidade.

- (a) Formule este problema como um Problema de Transportes, de forma a que o fornecimento de lápis para o exame seja feito a um custo mínimo.
- (b) Resolva o problema.

4

Exercícios de Transportes Resoluções

Problema 1

Solução inicial pela regra dos custos mínimos:

	A	B	C	D	F	
1	-	-	-	-	15	15
	2	3	4	5	0	
2	5	-	-	15	-	20
	3	2	5	2	0	
3	3	10	12	-	-	25
	4	1	2	3	0	
	8	10	12	15	15	

A cidade F é uma cidade fictícia introduzida para equilibrar a oferta com a procura, isto é, para colocar o problema na forma “standard”.

Para que existam 7 variáveis básicas (número de origens + número de destinos - 1) é ainda necessário promover uma variável não básica a básica. A variável x_{1A} foi então considerada como básica com o valor de zero. A escolha de x_{1A} em concreto seguiu a regra de o grafo representativo das variáveis básicas dever ser conexo e sem ciclos.

Resolvendo:

	0	-3	-2	-1	-2	
2	$0+\theta$	-	-	-	$15-\theta$	
	2	4 3	4 4	4 5	0	
3	5	-	-	15	-	
	3	2 2	4 5	2	-1 0	
4	$3-\theta$	10	12	-	θ	
	4	1	2	0 3	-2 0	

$\theta = \min\{3, 15\} = 3$

	0	-1	0	-1	-2	
2	$3+\theta$	-	-	-	$12-\theta$	
	2	2 3	2 4	4 5	0	
3	$5-\theta$	-	-	15	θ	
	3	0 2	2 5	2	-1 0	
2	-	10	12	-	3	
	4	1	2	2 3	0	

$\theta = \min\{5, 12\} = 5$

	0	-1	0	0	-2	
2	8	-	-	-	7	
	2	2 3	2 4	3 5	0	
2	-	-	-	15	5	
	1 3	1 2	3 5	2	0	
2	-	10	12	-	3	
	2 4	1	2	1 3	0	

Custo = 80

Solução óptima: $1 \xrightarrow{8} A$; $3 \xrightarrow{10} B$; $3 \xrightarrow{12} C$; $2 \xrightarrow{15} D$

Problema 2

(a) Formulação como problema de transportes:

	L1	L2	L3	RP1	RP2	X	
P1/F1	77	94	74	0	∞	0	120
P1/F2	77	95	81	0	∞	0	120
P2/F1	72	89	69	∞	0	0	80
P2/F2	92	110	96	∞	0	0	80
	50	70	60	120	80	20	400

Pi/Fj – quantidade exportada a partir da fábrica Pi através da fronteira Fj.

X – coluna introduzida para equilibrar a oferta com a procura. Corresponde às quantidades que ficarão nas fábricas.

RPi – Restrição respeitante à fábrica Pi e que garante que o somatório do que atravessa as duas fronteiras, vindo da fábrica Pi, não excede a oferta em Pi.

(b) Solução inicial pela regra dos custos mínimos:

30	–	60	10	100	90	30	0
23	40	20	0				
20	70	–	–	90	70	0	
34	52	38	0				
50	70	60	10				
20	0	0	0				
0							

Aplicando o algoritmo de transportes:

	0	18	-3	-23
23	30+ θ	–	60	10- θ
	23	-1 40	20	0
34	20- θ	70	–	θ
	34	52 7 38	-11 0	

$\theta = 10$

	0	18	-3	-34
23	40- θ	θ	60	–
	23	-1 40	20	11 0
34	10+ θ	70- θ	–	10
	34	52 7 38		0

$\theta = 40$

	0	18	-2	-34
22	–	40	60	–
	1 23	40	20	12 0
34	50	30	–	10
	34	52 6 38		0

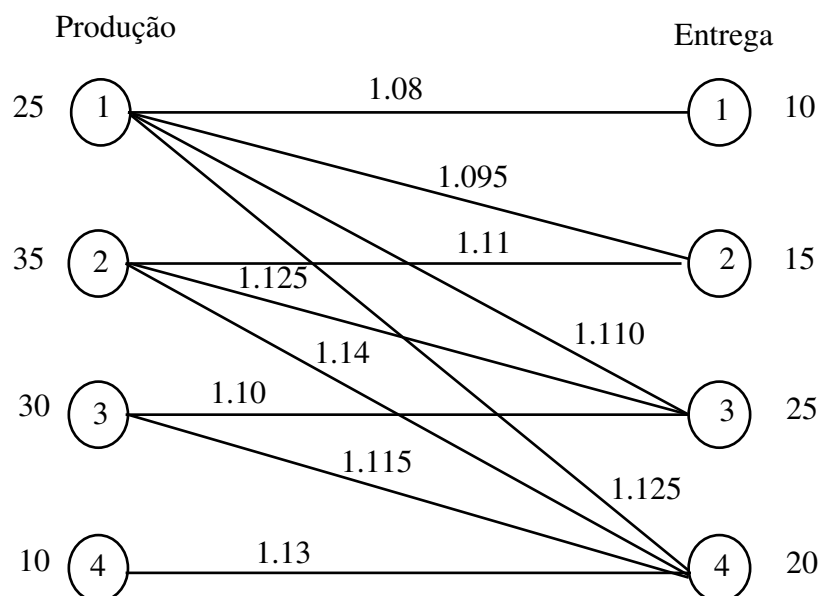
Quadro óptimo

Solução óptima:

De	Para	Quantidade
F1	L1	0
	L2	40
	L3	60
F2	L1	50
	L2	30
	L3	0

Custo óptimo = 6060

Problema 3



		Mês de entrega					X
		1	2	3	4	X	
Mês de produção	1	1.080	1.095	1.110	1.125	0	25
	2	∞	1.110	1.125	1.140	0	35
	3	∞	∞	1.100	1.115	0	30
	4	∞	∞	∞	1.130	0	10
		10	15	25	20	30	100

(segue-se a resolução pelo algoritmo de transportes)

Problema 4

(a) Formulação como problema de transportes:

		Destinos						
		2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	X	
Origens	Novos	10	10	10	10	10	0	60+50+80+40+50
	Usados na 2 ^a	∞	∞	2	2	2	0	60
	Usados na 3 ^a	∞	∞	∞	2	2	0	50
	Usados na 4 ^a	∞	∞	∞	∞	2	0	80
		60	50	80	40	50	190	

(b) ...

5

Exercícios de Afectação Enunciados

Problema 1

Existem quatro desenhadores para desenhar quatro projectos. Embora todos possam cumprir essas tarefas, as suas eficiências relativas variam de trabalho para trabalho.

Com base em desempenhos já conhecidos, produziu-se a seguinte tabela de custos:

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	8	7	9	9
P_2	5	2	7	8
P_3	6	1	4	9
P_4	2	3	2	6

O objectivo é afectar os desenhadores aos vários projectos de modo a minimizar o custo total de desenho.

Problema 2

Uma fábrica possui quatro locais (1,2,3,4) para receber três máquinas novas (A,B,C). O local 4 é demasiado pequeno para conter a máquina A. O custo da manipulação dos materiais que são processados nas máquinas, em centenas de escudos/hora, envolvendo cada máquina com as respectivas posições, é o seguinte:

	1	2	3	4
A	5	1	3	x
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2

Pretende-se determinar que local ocupará cada uma das novas máquinas, com o objectivo de minimizar o custo total de manipulação dos materiais.

Problema 3

Dois jovens recém-casados, Romeu e Julieta, querem dividir as tarefas domésticas entre si, de forma a que cada um tenha o mesmo número de tarefas (duas para cada um) e de forma a que o tempo total gasto por semana seja mantido no mínimo.

- (a) Considerando a tabela seguinte, onde se encontram os tempos que cada um deles gasta a executar cada uma das tarefas, resolva o problema deste casal.

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa
Romeu	2	6	4	3
Julieta	1.5	8.5	5.5	4

- (b) Considere agora que, após uma negociação assaz difícil, Romeu conseguiu com que a restrição das duas tarefas para cada um fosse levantada, isto é, todas as combinações do número de tarefas atribuídas a cada um são possíveis.

Reformule o problema atendendo a esta nova situação.

Problema 4

A empresa de transportes Asa de Luxo comprou 3 novos pequenos aviões. Após um estudo de mercado foram identificados 4 possíveis destinos para os novos voos a estabelecer: Monte Carlo, Ilhas Canárias, Biarritz, e as Ilhas Gregas. Para cada um dos destinos foi estimado o lucro (em M\$) que cada um dos aviões proporcionaria:

Destino	A_1	A_2	A_3
Monte Carlo	8	11	10
Ilhas Canárias	10	9	9
Biarritz	9	4	8
Ilhas Gregas	6	7	5

Numa reunião, o administrador da Asa de Luxo (que possui um apartamento em Biarritz) decidiu que Biarritz seria necessariamente o destino de um dos três aviões.

Por outro lado, o Director de Marketing considerou que, por uma questão de estratégia, se deveria atingir o maior número possível de destinos, não enviando portanto mais do que um avião para cada destino.

O responsável pela manutenção chamou a atenção para o facto de os aviões A_1 e A_3 não poderem aterrar nas Ilhas Gregas.

Decida que avião deve seguir para cada destino e ganhe uma viagem grátis para duas pessoas, para um destino à sua escolha (oferecida pela Asa de Luxo, claro!...).

Problema 5

Para o preenchimento de 5 lugares, foi pedido a 5 candidatos que manifestassem as suas preferências. Estas foram expressas da seguinte forma:

- indiferença relativamente ao lugar: $\boxed{\text{ind}}$;
- preferência positiva: numa escala de +1 a +10;
- inconveniente: numa escala de -1 a -10.

Candidatos	Lugares				
	1	2	3	4	5
1	-5	+8	-1	$\boxed{\text{ind}}$	+4
2	-4	+2	+2	+3	+2
3	$\boxed{\text{ind}}$	$\boxed{\text{ind}}$	-5	-1	+3
4	-3	+3	+2	-2	-1
5	-1	+5	$\boxed{\text{ind}}$	+3	+5

- (a) Atribua os lugares aos candidatos por forma a maximizar a satisfação global das preferências;
- (b) Resolva o problema de modo a que o candidato menos satisfeito seja “colocado” com o mínimo de “inconveniência”.

Problema 6

Uma companhia de navegação aérea assegura, entre três cidades (A, B, C), os serviços representados na tabela seguinte:

Vôo nº	Partida de	às	Chegada a	às
1	A	09h00	B	12h00
2	A	10h00	B	13H00
3	A	15h00	B	18H00
4	A	20h00	C	24H00
5	A	22h00	C	02H00
6	B	04h00	A	07H00
7	B	11h00	A	14H00
8	B	15h00	A	18H00
9	C	07h00	A	11H00
10	C	15h00	A	19H00

O custo de espera de um avião no solo é considerado como proporcional ao tempo de espera.

Organize os voos (encadeando-os e associando-os aos aviões necessários), por forma a minimizar os custos globais de espera no solo.

Nota: Considere apenas o caso de definição de um ciclo diário, isto é, faça o planeamento para um período de 24 horas.

5

Exercícios de Afectação Resoluções

Problema 1

Primeiro quadro do problema

8	7	9	9
5	2	7	8
6	1	4	9
2	3	2	6

Subtração em cada linha do menor elemento dessa linha

1	0	2	2
3	0	5	6
5	0	3	8
0	1	0	4

Subtração em cada coluna do menor elemento dessa coluna

1	0	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
0	1	0	2

1ª iteração ($3 < 4$)

1	0	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
0	1	0	2

2ª iteração ($3 < 4$)

0	0	1	0
2	0	4	4
4	0	2	6
0	2	0	3

Solução óptima ($4 = 4$)

0	2	1	0
0	0	2	2
2	0	0	4
0	4	0	3

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 17.

Uma possível solução óptima seria:

- $D_4 \iff P_1$
- $D_2 \iff P_2$
- $D_3 \iff P_3$
- $D_1 \iff P_4$

Problema 2

Quadro inicial.

Foi acrescentada uma máquina fictícia, para que o problema de afectação ficasse na forma standard (número de máquinas igual ao número de locais disponíveis para colocar máquinas).

Para impedir que a máquina A ficasse no local 4, considerou-se que o custo associado a essa afectação era infinito.

	1	2	3	4
A	5	1	3	∞
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2
Fictícia	0	0	0	0

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

4	0	2	∞
2	0	3	2
1	1	2	0
0	0	0	0

1ª iteração ($3 < 4$)

4	0	2	∞
2	0	3	2
1	1	2	0
0	0	0	0

Solução óptima ($4 = 4$)

2	0	0	∞
0	0	1	0
1	3	2	0
0	2	0	0

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 6.

Uma possível solução óptima seria:

- $A \iff 2$
- $B \iff 1$
- $C \iff 4$
- $F \iff 3$

Problema 3

(a) Quadro inicial:

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa
Romeu 1	2	6	4	3
Romeu 2	2	6	4	3
Julieta 1	1.5	8.5	5.5	4
Julieta 2	1.5	8.5	5.5	4

Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

0	4	2	1
0	4	2	1
0	7	4	2.5
0	7	4	2.5

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna

0	0	0	0
0	0	0	0
0	3	2	1.5
0	3	2	1.5

1ª iteração ($3 < 4$)

0	0	0	0
0	0	0	0
0	3	2	1.5
0	3	2	1.5

Solução óptima ($4 = 4$)

1.5	0	0	0
1.5	0	0	0
0	1.5	0.5	0
0	1.5	0.5	0

O custo da solução óptima (soma dos tempos) é 15.5.

Uma possível solução óptima seria:

- Romeu \iff cozinha
- Romeu \iff limpeza
- Julieta \iff compras
- Julieta \iff roupa

(b) Quadro inicial:

	Compras	Cozinha	Limpeza	Roupa	Nada 1	Nada 2	Nada 3	Nada 4
Romeu 1	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 2	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 3	2	6	4	3	0	0	0	0
Romeu 4	2	6	4	3	0	0	0	0
Julieta 1	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 2	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 3	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0
Julieta 4	1.5	8.5	5.5	4	0	0	0	0

Problema 4

Quadro inicial.

Problema de maximização.

Acrescentou-se um avião fictício para que número de aviões = número de destinos.

Destino	A_1	A_2	A_3	Fictício
Monte Carlo	8	11	10	?
Ilhas Canárias	10	9	9	?
Biarritz	9	4	8	?
Ilhas Gregas	6	7	5	?

Problema de minimização.

Complemento para o máximo 11 dos elementos da matriz.

Destino	A_1	A_2	A_3	Fictício
Monte Carlo	3	0	1	?
Ilhas Canárias	1	2	2	?
Biarritz	2	7	3	?
Ilhas Gregas	5	4	6	?

Para evitar que A_1 ou A_3 sejam afectos às Ilhas Gregas, coloca-se ∞ no custo dessa afectação.

Para obrigar que um dos aviões reais vá para Biarritz, impede-se que o avião fictício seja afecto a Biarritz, colocando ∞ no custo dessa afectação.

3	0	1	0
1	2	2	0
2	7	3	∞
∞	4	∞	0

Subtração em cada coluna do menor elemento dessa coluna

Subtração em cada linha do menor elemento dessa linha

2	0	0	0
0	2	1	0
0	6	1	∞
∞	4	∞	0

1ª iteração ($3 < 4$)

2	0	0	0
0	2	1	0
0	6	1	∞
∞	4	∞	0

Solução óptima ($4 = 4$)

3	0	0	1
0	1	0	0
0	5	0	∞
∞	3	∞	0

O valor (lucro) da solução óptima é 29 M\$.

Uma possível solução óptima seria:

- $A_1 \iff$ Ilhas Canárias
- $A_2 \iff$ Monte Carlo
- $A_3 \iff$ Biarritz
- Fictício \iff Ilhas Gregas

Problema 5

- (a) Atribuir os lugares aos candidatos por forma a maximizar a satisfação global das preferências:

Quadro inicial.

Associar um valor zero às afecções

$\boxed{\text{ind}}$.

Problema de maximização.

Candidatos	Lugares				
	1	2	3	4	5
1	-5	+8	-1	0	+4
2	-4	+2	+2	+3	+2
3	0	0	-5	-1	+3
4	-3	+3	+2	-2	-1
5	-1	+5	0	+3	+5

Somar +5 a todos os elementos, para que todos os elementos ≥ 0 .

Problema de maximização.

Candidatos	Lugares				
	1	2	3	4	5
1	0	13	4	5	9
2	1	7	7	8	7
3	5	5	0	4	8
4	2	8	7	3	4
5	4	10	5	8	10

Problema de minimização.

Complemento para o máximo $\boxed{13}$ dos elementos da matriz.

13	0	9	8	4
12	6	6	5	6
8	8	13	9	5
11	5	6	10	9
9	3	8	5	3

Subtração em cada linha do menor elemento dessa linha

Subtração em cada coluna do menor elemento dessa coluna

10	0	8	8	4
4	1	0	0	1
0	3	7	4	0
3	0	0	5	4
3	0	4	2	0

1ª iteração ($5 = 5$)

Solução ótima

10	$\boxed{0}$	8	8	4
4	1	0	$\boxed{0}$	1
$\boxed{0}$	3	7	4	0
3	0	$\boxed{0}$	5	4
3	0	4	2	$\boxed{0}$

O valor da solução óptima é 18.

Uma possível solução óptima seria:

- $Candidato1 \iff Lugar2$
- $Candidato2 \iff Lugar4$
- $Candidato3 \iff Lugar1$
- $Candidato4 \iff Lugar3$
- $Candidato5 \iff Lugar5$

- (b) A resolução do problema de modo a que o candidato menos satisfeito seja “colocado” com o mínimo de “inconveniência”, corresponde a resolver um problema denominado “Bottleneck Assignment Problem”.

Considere-se então uma afecção inicial igual à afecção óptima obtida na alínea (a):

-5	+8	-1	0	+4
-4	+2	+2	+3	+2
0	0	-5	-1	+3
-3	+3	+2	-2	-1
-1	+5	0	+3	+5

$$\text{Min}\{0, 8, 2, 3, 5\} = 0$$

Faça-se então a seguinte substituição:

- valores $> 0 \rightarrow 0$
- valores $\leq 0 \rightarrow 1$

1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0

Dado que a primeira coluna do quadro só tem valores = 1, a afecção óptima para o “Bottleneck Assignment Problem” é a obtida na alínea (a).

Problema 6

Para resolver o problema proposto, é necessário começar por determinar, para cada aeroporto, que voo deve realizar um avião que tenha chegado no voo x . O objectivo será a minimização do tempo de espera em cada aeroporto.

Ter-se-ão então que resolver 3 problemas de afecção (um para cada aeroporto). Esses problemas poderão ser resolvidos com quadros independentes ou então com um quadro único:

Voo de chegada	Voo de partida									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	∞	∞	∞	∞	16	23	3	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞	15	22	2	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	10	17	21	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7	15
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	13
6	2	3	8	13	15	∞	∞	∞	∞	∞
7	19	20	1	6	8	∞	∞	∞	∞	∞
8	15	16	21	2	4	∞	∞	∞	∞	∞
9	22	23	4	9	11	∞	∞	∞	∞	∞
10	14	15	20	1	3	∞	∞	∞	∞	∞

Subtracção em cada coluna do menor elemento dessa coluna
Subtracção em cada linha do menor elemento dessa linha

∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	19	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	7	12	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	

1ª iteração ($8 < 10$)

∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	0	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	19	∞	∞	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	7	12	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
17	17	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
12	12	19	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	

2ª iteração ($9 < 10$)

∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	24	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	0	12	12	12	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
12	12	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞

3ª iteração ($10 = 10$)
Solução óptima.

∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	0	24	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0
0	0	24	24	24	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	24	0	0	∞	∞	∞	∞	∞

Uma possível solução óptima será:

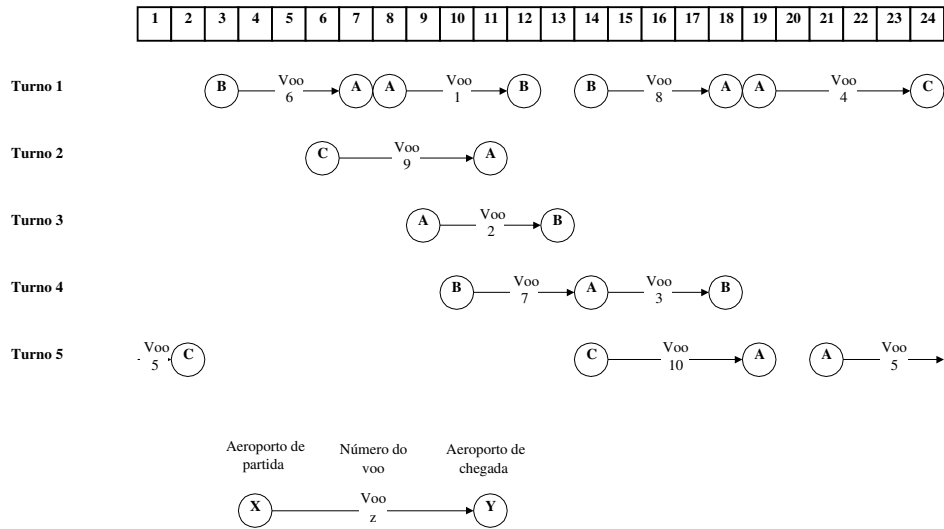
- Voo de chegada 1 \iff Voo de partida 8
- Voo de chegada 2 \iff Voo de partida 7
- Voo de chegada 3 \iff Voo de partida 6
- Voo de chegada 4 \iff Voo de partida 9
- Voo de chegada 5 \iff Voo de partida 10
- Voo de chegada 6 \iff Voo de partida 1
- Voo de chegada 7 \iff Voo de partida 3
- Voo de chegada 8 \iff Voo de partida 4
- Voo de chegada 9 \iff Voo de partida 2
- Voo de chegada 10 \iff Voo de partida 5

Construindo uma “cadeia” por concatenação das soluções encontradas obtém-se:

$$1 \implies 8 \implies 4 \implies 9 \implies 2 \implies 7 \implies 3 \implies 6 \implies 1$$

$$5 \implies 10 \implies 5$$

O plano diário dos voos está representado na figura seguinte:



São portanto necessários 5 aviões. Contudo, para que se verifique o “encadeamento” óptimo encontrado, 4 aviões deverão rodar nos turnos 1 a 4 e o 5º avião deve fazer o turno 5, num ciclo de 4 dias (A_i , avião i).

Turno	Dia					...
	1	2	3	4	5	
1	A_1	A_4	A_3	A_2	A_1	...
2	A_2	A_1	A_4	A_3	A_2	...
3	A_3	A_2	A_1	A_4	A_3	...
4	A_4	A_3	A_2	A_1	A_4	...
5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	...

6

Exercícios Fluxo Máximo Enunciados

Problema 1

De três depósitos A, B e C, dispondo respectivamente de 20, 10 e 35 toneladas de um dado produto, pretende-se fazer chegar a três destinos D, E e F, respectivamente 25, 20 e 20 toneladas do produto. As disponibilidades de transporte em camião entre os diferentes pontos, são as seguintes:

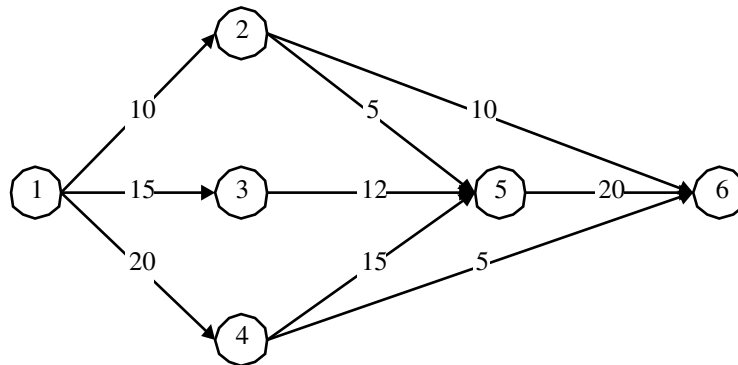
	D	E	F
A	15	10	—
B	5	—	10
C	10	5	5

Estabeleça o melhor plano de transportes.

(Sugestão: considere um nó fictício agregando a oferta e um nó fictício agregando a procura).

Problema 2

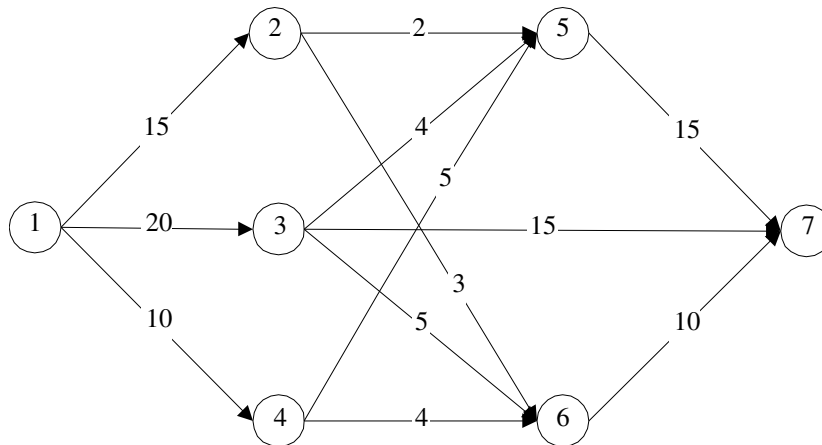
Considere a seguinte rede, em que os números nos arcos representam a capacidade do arco (quantidade de fluxo que o pode atravessar):



Determine o fluxo máximo possível (entre os nós 1 e 6) e represente os fluxos na rede na situação de fluxo máximo.

Problema 3

Considere a seguinte rede, em que os números nos arcos representam a capacidade do arco (quantidade de fluxo que o pode atravessar):



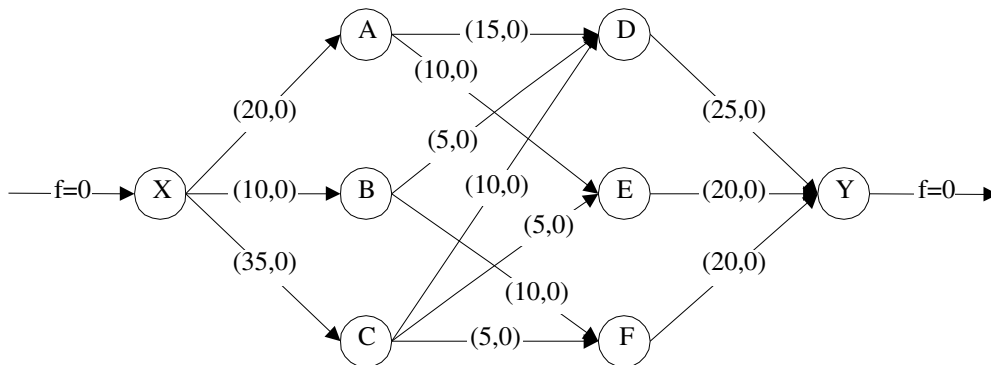
Determine o fluxo máximo possível (entre os nós 1 e 7) e represente os fluxos na rede na situação de fluxo máximo.

6

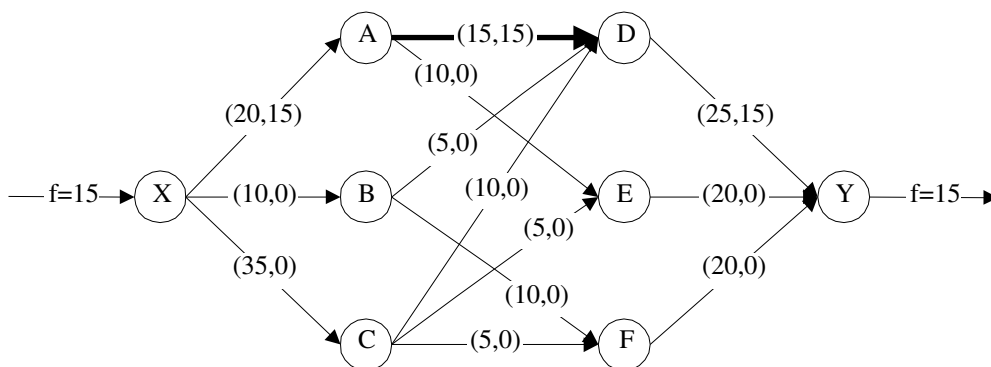
Exercícios de Fluxo Máximo Resoluções

Problema 1

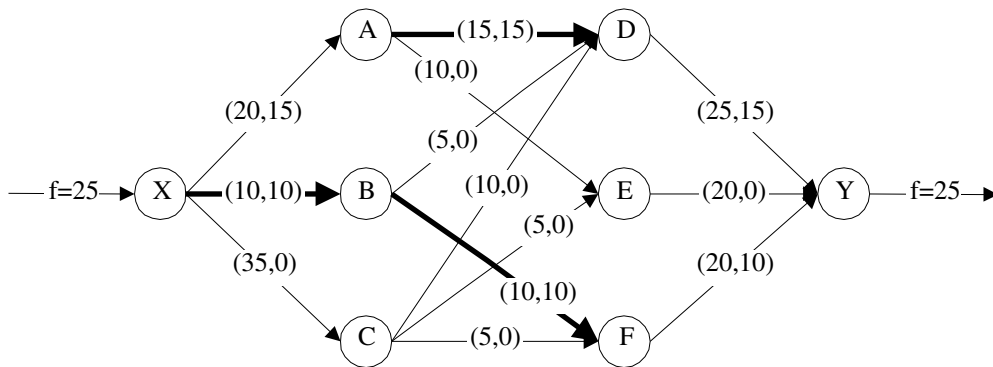
O problema proposto é um problema de fluxo máximo. Seguindo a sugestão do enunciado, acrescentou-se ao problema um nó fictício (X) agregando a oferta dos depósitos A , B e C e um nó fictício (Y) agregando a procura dos destinos D , E e F . A rede inicial está representada na figura seguinte.



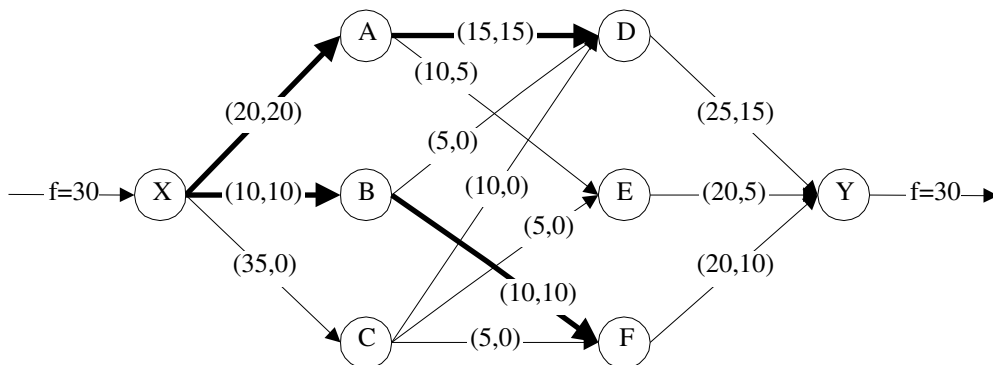
Seguindo o algoritmo de fluxo máximo, seleccionou-se um caminho não saturado entre o nó de entrada e o nó de saída. O caminho seleccionado foi $X \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 15 (capacidade do ramo com menor capacidade $A \rightarrow D$). Na figura seguinte o ramo $A \rightarrow D$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 15 ao fluxo de entrada e de saída.



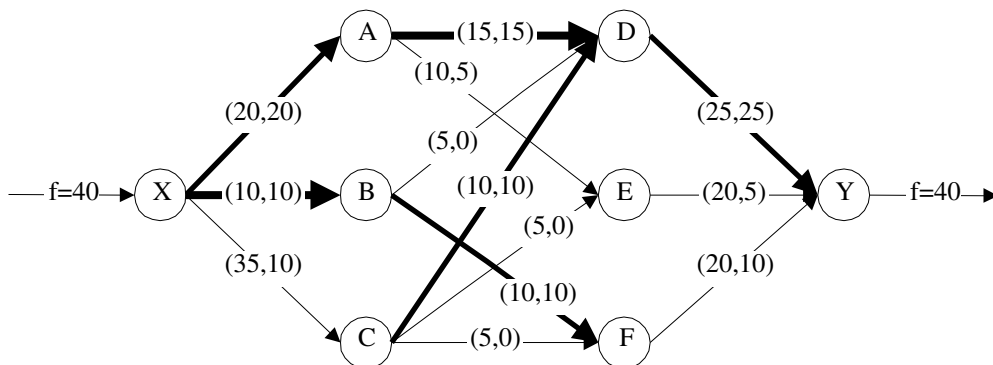
O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade dos ramos com menor capacidade $X \rightarrow B$ e $B \rightarrow F$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $X \rightarrow B$ e $B \rightarrow F$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $X \rightarrow A$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $X \rightarrow A$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.

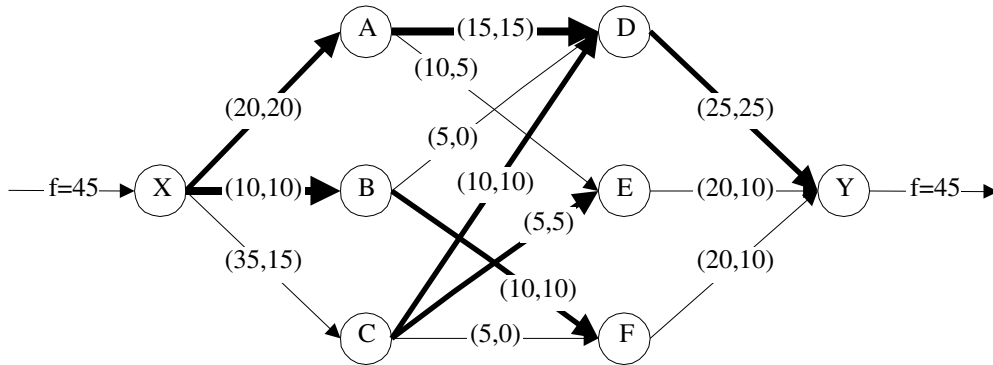


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \rightarrow D$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \rightarrow D$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.

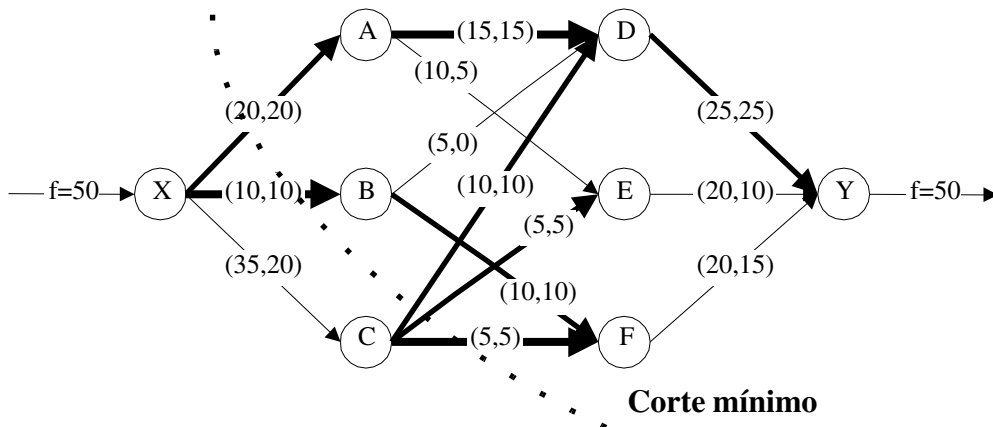


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \rightarrow E$).

Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \rightarrow E$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $X \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow Y$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $C \rightarrow F$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $C \rightarrow F$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede (a quantidade máxima de toneladas que pode ser transportada dos depósitos para os destinos) é 50.

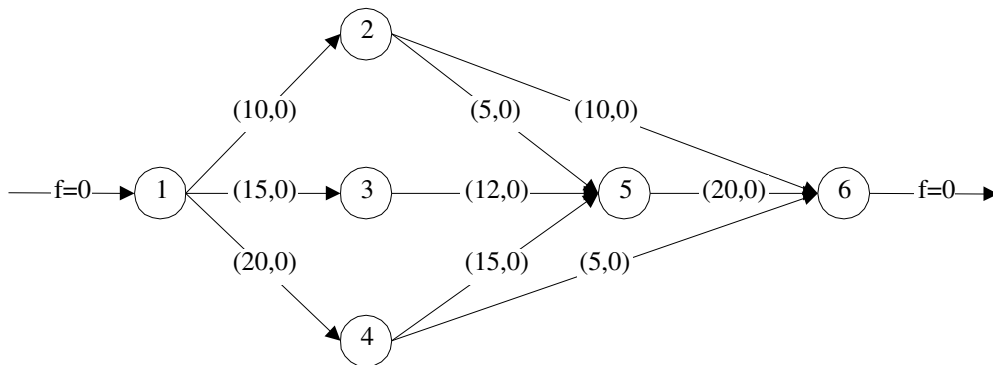
O melhor plano de transportes será então:

	D	E	F
A	15	5	—
B	0	—	10
C	10	5	5

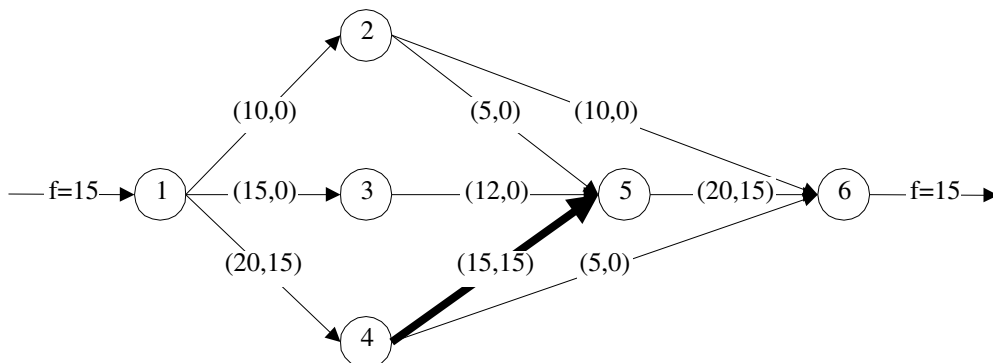
Os destinos E e F não são completamente abastecidos, não porque não exista disponibilidade nos depósitos (C ficou ainda com 15 toneladas), mas porque a disponibilidade de transporte não o permite. Para resolver este caso concreto seria necessário incrementar as disponibilidades de transporte a partir de C , nomeadamente para E e F .

Problema 2

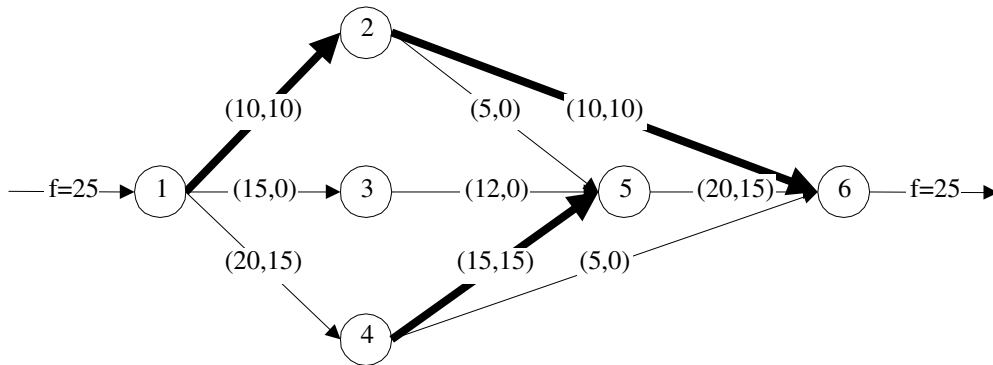
A rede inicial está representada na figura seguinte.



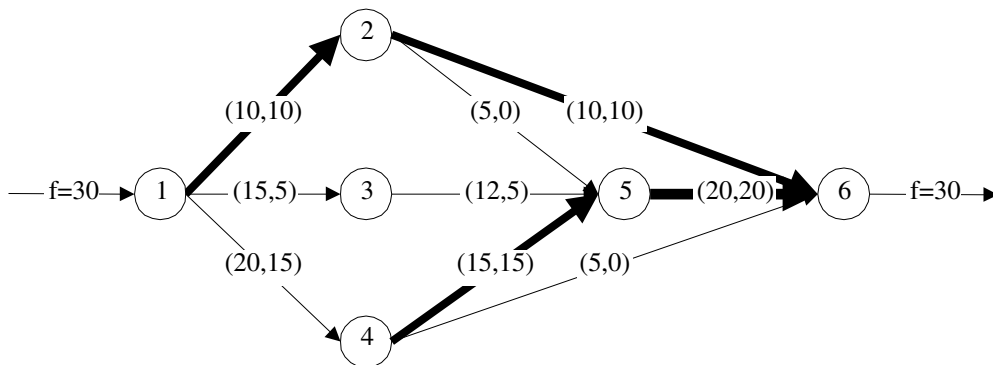
Seguindo o algoritmo de fluxo máximo, seleccionou-se um caminho não saturado entre o nó de entrada e o nó de saída. O caminho seleccionado foi $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 15 (capacidade do ramo com menor capacidade $4 \rightarrow 5$). Na figura seguinte o ramo $4 \rightarrow 5$ foi representado a traço mais grosso e somou-se 15 ao fluxo de entrada e de saída.



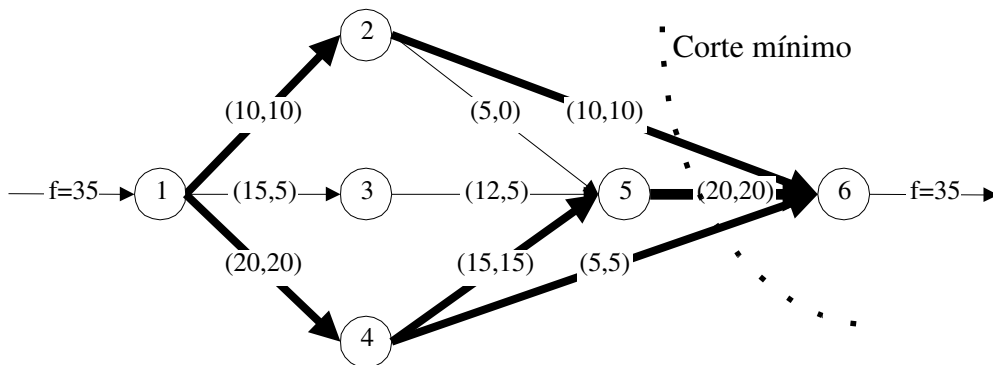
O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 10 (capacidade dos ramos com menor capacidade $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 6$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 10 ao fluxo de entrada e de saída.



O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade do ramo com menor capacidade $\rightarrow 5 \rightarrow 6$). Na figura seguinte o ramo com menor capacidade $5 \rightarrow 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.

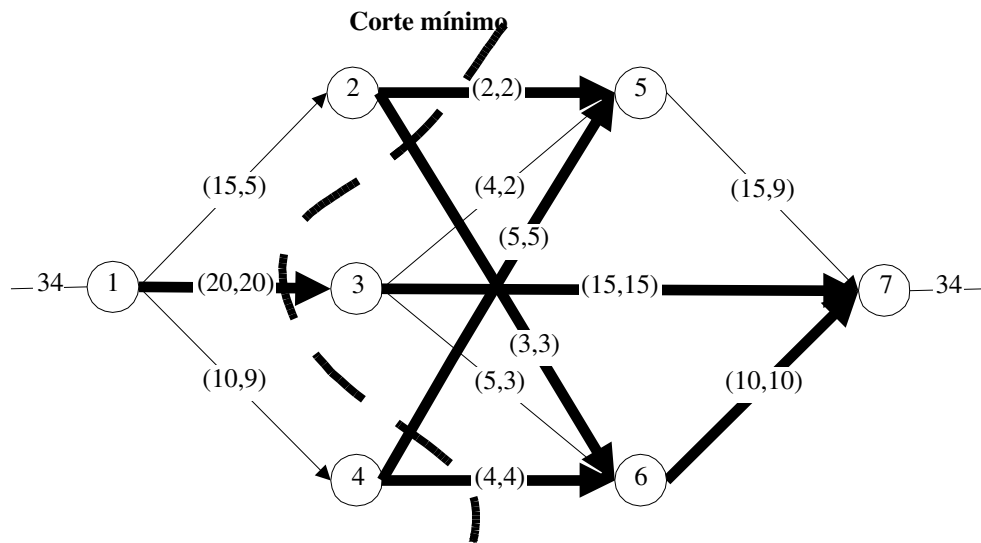


O caminho não saturado seleccionado a seguir foi $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$. Esse caminho tem uma capacidade máxima de 5 (capacidade dos ramos com menor capacidade $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 6$). Na figura seguinte os ramos com menor capacidade $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 6$ foram representados a traço mais grosso e somou-se 5 ao fluxo de entrada e de saída.



Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede é 35.

Problema 3



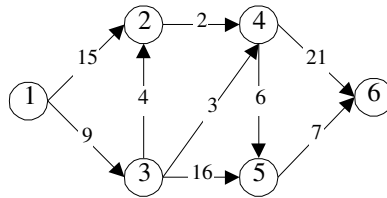
Na figura anterior está representado um corte mínimo (que separa totalmente a entrada da saída). Pode-se então afirmar que o fluxo máximo nesta rede é 34.

7

Exercícios de Caminho Mínimo Enunciados

Problema 1

Considere a seguinte rede:



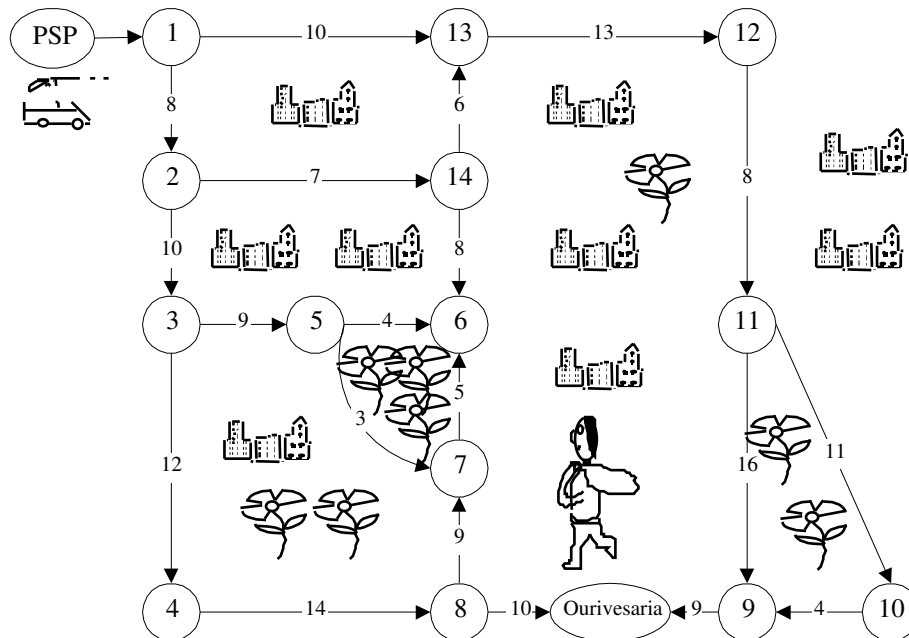
- (a) Usando o algoritmo de Dijkstra, determine a distância mínima do nó 1 ao nó 6 e indique o respectivo caminho.
- (b) Pode, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4? Justifique.
- (c) Poderia, nas mesmas circunstâncias, indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6? Justifique.

Problema 2

A esquadra da PSP de Cedofeita (Porto) recebeu um pedido muito urgente para intervir numa tentativa de assalto numa ourivesaria localizada numa rua próxima.

O Comando Operacional deseja conhecer qual será o melhor trajecto a tomar, por forma a minimizar o tempo da viagem até ao objectivo pretendido. Usando um mapa daquela zona da cidade, representado esquematicamente na figura, e conhecidos os tempos (médios, em segundos) necessários para percorrer cada um dos troços de rua representados, utilizaram então o algoritmo de Dijkstra para determinar esse caminho mais curto (e, entretanto os ladrões...).

Coloque-se no lugar do Comando, e, partindo da rede apresentada, encontre esse caminho mínimo.



Problema 3

Considere um tabuleiro com 3×4 quadrículas. Cada quadrícula contém um número:

0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

O objectivo do jogo consiste em deslocar um peão desde o canto superior esquerdo até ao canto inferior direito, através de uma sequência de movimentos para a direita ou para baixo, de forma a minimizar o somatório dos pontos correspondentes às quadrículas por onde se passou.

- (a) Formule este jogo como um problema de caminho mínimo.
- (b) Resolva-o, usando uma das técnicas estudadas na cadeira.

Problema 4

O Sr. Ven de Dor, técnico de vendas, vai comprar um carro novo. Dadas as características da profissão do Sr. Ven de Dor, o veículo sofrerá uma utilização muito grande, o que implica que, apesar de o Sr. Ven de Dor se ir reformar daqui a 3 anos, possa ser economicamente mais favorável trocar de carro ao fim de 1 ou 2 anos, em vez de o manter durante os 3 anos. Isto sobretudo porque os custos de utilização e manutenção crescem muito rapidamente com o envelhecimento dos veículos.

O Sr. Ven de Dor sentou-se à sua secretária e calculou o custo total, preço de um carro novo menos o que o stand dá pelo usado, mais os custos de utilização e manutenção (oficina...), de comprar um carro novo no ano i e trocá-lo no fim do ano j (o ano 0 é agora). Na tabela seguinte estão representados (em milhares de escudos) os custos calculados pelo Sr. Ven de Dor.

		i		
		0	1	2
j	1	800		
	2	1800	1000	
	3	3100	2100	1200

Assim, por exemplo, trocar o carro agora comprado (fim do ano 0) no fim do ano 1 e depois manter o carro comprado no fim do ano 1 até ao fim do ano 3, corresponde a um custo de $800 + 2100 = 2900$.

O Sr. Ven de Dor tem que decidir quantas vezes deve trocar de carro (se alguma) de forma a minimizar a sua despesa total com carros durante estes 3 anos.

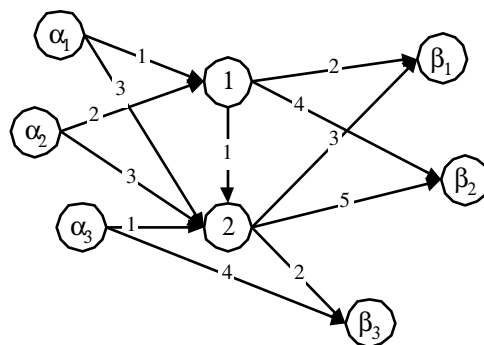
- (a) Formule este problema como um problema de caminho mínimo.
- (b) Resolva o problema utilizando o algoritmo de Dijkstra.

Problema 5

O País Azul foi subitamente atacado pelas tropas do País Verde. O Estado-Maior das Forças Azuis reuniu de imediato para decidir sobre as movimentações de tropas que se deviam efectuar, de modo a fazer frente à invasão das Forças Verdes.

O Estado-Maior das Forças Azuis foi informado que o ataque se estava a processar em 3 frentes distintas, com nomes de código β_1 , β_2 e β_3 . Chegou-se de imediato à conclusão que seria necessário transportar duas divisões de combate para β_1 , uma divisão para β_2 e uma outra para β_3 . As Forças Azuis dispunham nessa altura de 5 divisões de combate nas cidades mais próximas da fronteira atacada, duas aquarteladas em α_1 (em código, claro!), duas em α_2 e uma aquartelada em α_3 . Essas divisões poderiam ser transportadas para os locais em perigo, contudo os Aviões Verdes já sobrevoavam o País Azul, e a movimentação das divisões teria que se fazer com o menor risco humano possível.

Após uma rápida inspecção do mapa do território fez-se o esquema da figura seguinte, onde se representam as estradas que podem ser utilizadas pelas divisões de combate das Forças Azuis (os valores representados nos troços dos percursos são distâncias em quilómetros).



Os generais das Forças Azuis, peritos em Investigação Operacional, precisavam de decidir de que aquartelamento deviam seguir as divisões necessárias em β_1 , β_2 e β_3 . O objectivo era a minimização das perdas humanas, relacionado directamente com o perigo de bombardeamento.

Durante a reunião do Estado-Maior das Forças Azuis, o general de 20 estrelas Foj (em código, como não podia deixar de ser) disse: “O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β . Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema”. O general Jac acrescentou: “Podíamos também usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, considerando também as distâncias como uma medida para o perigo”. Por fim, o general Soj ordenou “A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo”.

Siga as instruções dos generais Foj, Jac e Soj e informe-nos quais foram as decisões tomadas pelo Estado-Maior das Forças Azuis, porque nós somos as Forças Verdes!!!!

7

Exercícios de Caminho Mínimo

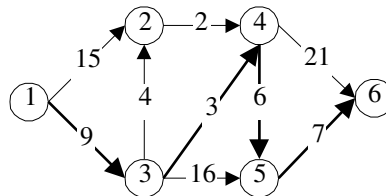
Resoluções

Problema 1

(a) Usando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o seguinte quadro:

	Nós					
iter	1	2	3	4	5	6
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	15	9*	∞	∞	∞
2	0*	13	9*	12*	25	∞
3	0*	13*	9*	12*	18	33
4	0*	13*	9*	12*	18*	33
5	0*	13*	9*	12*	18*	25*

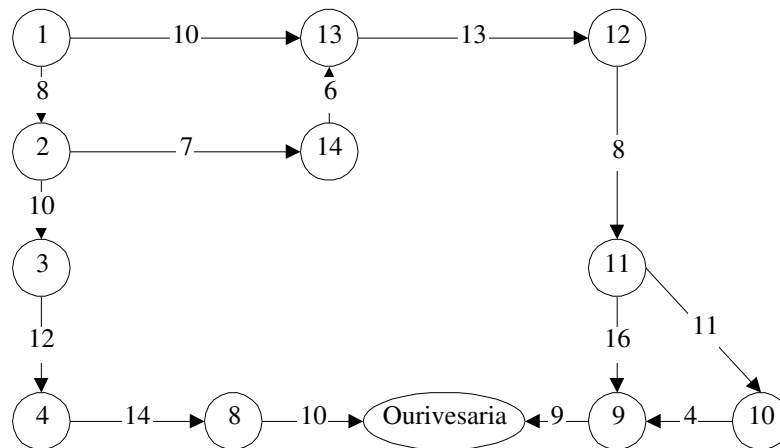
A distância mínima entre o nó 1 e o nó 6 é igual a 25. O caminho mínimo ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) está representado na figura seguinte.



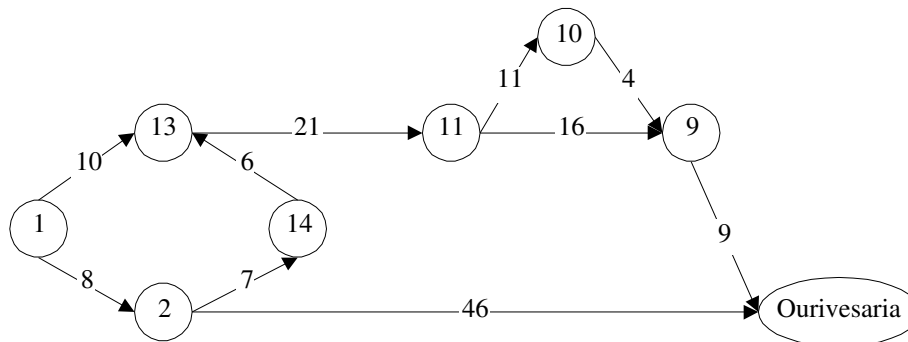
- (b) É possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4, dado que essa distância seria igual ao valor da etiqueta definitiva do nó 4 (12), uma vez que, por definição, o valor da etiqueta definitiva do nó i é igual à distância mínima entre o nó i e a origem.
- (c) Não é possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6, dado que a distância mínima entre os dois nós não é igual à diferença entre as distâncias mínimas desses nós à origem.

Problema 2

Simplificando o mapa da zona da cidade referida, este pode ser representando esquematicamente tal como na figura seguinte. Repare que os nós 5, 6 e 7 do esquema inicial formam um beco sem saída.



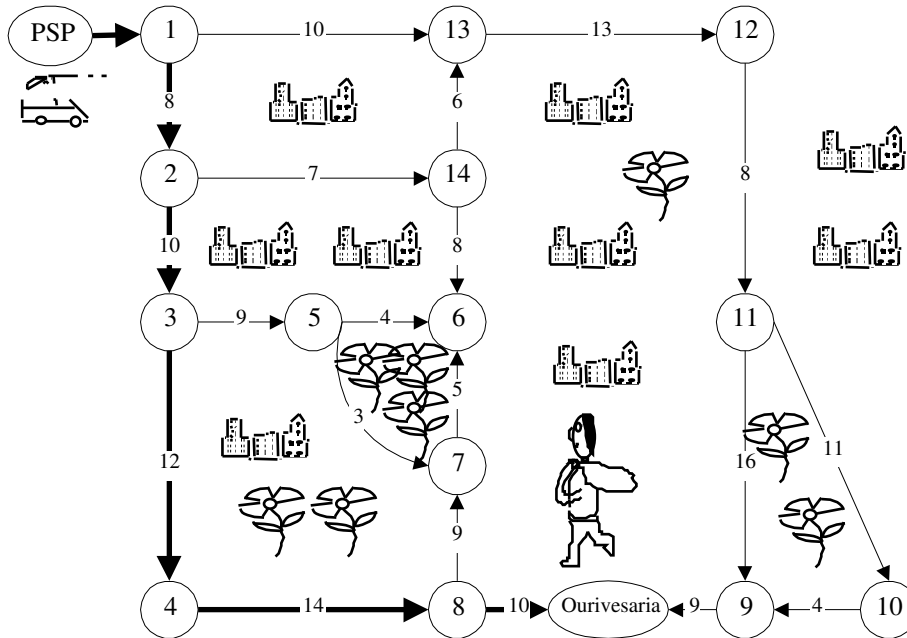
Simplificando ainda um pouco mais a rede da figura, obtém-se a seguinte rede:



Utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

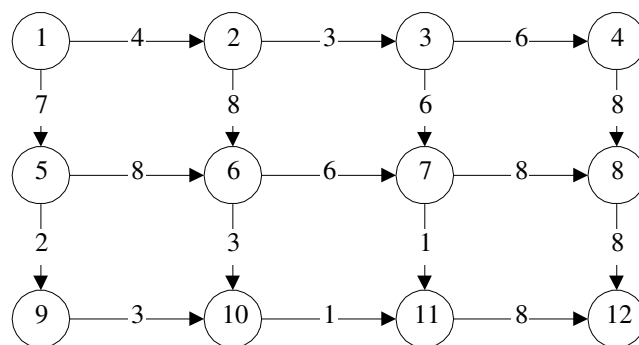
iter	Nós							
	1	2	9	10	11	13	14	Our
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	8*	∞	∞	∞	10	∞	∞
2	0*	8*	∞	∞	∞	10*	15	54
3	0*	8*	∞	∞	31	10*	15*	54
4	0*	8*	∞	∞	31*	10*	15*	54
5	0*	8*	47	42*	31*	10*	15*	54
6	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54
7	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54*

A distância mínima entre a esquadra e a ourivesaria será então igual a 54 e o caminho mínimo será $1 \rightarrow 2 \rightarrow \text{Ourivesaria}$, ou seja, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \text{Ourivesaria}$.



Problema 3

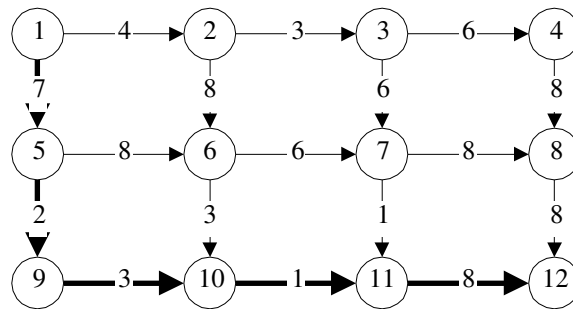
- (a) A formulação do jogo descrito como um problema de caminho mínimo passa por fazer corresponder a cada quadrícula um nó, que será numerado de cima para baixo e da esquerda para a direita: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... Entre quadrículas adjacentes existirão ramos, orientados de acordo com os movimentos no tabuleiro. A distância associada a cada ramo será o número constante na quadrícula correspondente ao nó de chegada. Na figura seguinte está representado o problema de caminho mínimo associado ao jogo descrito.



- (b) A partir da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

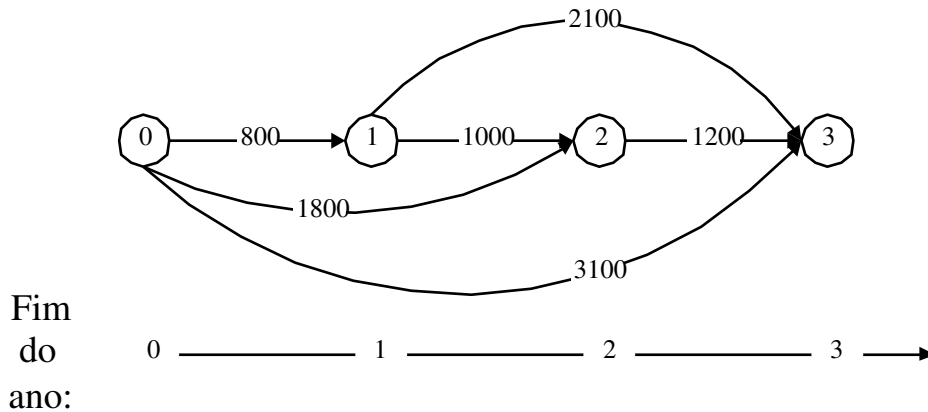
iter	Nós											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	4*	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0*	4*	7*	∞	7	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	∞	∞	∞	∞
4	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	9*	∞	∞	∞
5	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12	∞	∞
6	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12*	∞	∞
7	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13	∞	9*	12*	13	∞
8	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13	∞
9	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	∞
10	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	21*

A solução mínima para o jogo descrito no enunciado é 21, e corresponde à distância mínima entre o nó 1 e o nó 12. O percurso óptimo está representado a traço grosso na figura seguinte:



Problema 4

- (a) A representação do problema do Sr. Ven de Dor como um problema de caminho mínimo está na figura seguinte.



- (b) Partindo da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

iter	Nós			
	0	1	2	3
0	0*	∞	∞	∞
1	0*	800*	1800	3100
2	0*	800*	1800*	2900
3	0*	800*	1800*	2900*

O caminho mínimo, que corresponde no problema ao custo mínimo para o Sr. Ven de Dor, será 2900. Esse custo corresponde à seguinte política ótima de aquisição de automóveis:

O Sr. Ven de Dor deve trocar de automóvel ao fim de 1 ano e deve manter esse automóvel até ao fim do período analisado.

Problema 5

Numa primeira fase, vai ser necessário determinar os caminhos mínimos entre os α_i e os β_j , para depois usar esses valores tanto no algoritmo de afectação sugerido pelo general *Foj* como no algoritmo de transportes sugerido pelo general *Jac*.

(a) Determinação dos caminhos mínimos entre α_1 e os β_j :

	Nós					
iter	α_1	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	1*	3	∞	∞	∞
2	0*	1*	2*	3	5	∞
3	0*	1*	2*	3*	5	4
4	0*	1*	2*	3*	5	4*
5	0*	1*	2*	3*	5*	4*

Resultados:

- caminho $\alpha_1 \rightarrow 1 \rightarrow \beta_1$, com “custo” 3;
- caminho $\alpha_1 \rightarrow 1 \rightarrow \beta_2$, com “custo” 5;
- caminho $\alpha_1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_3$, com “custo” 4.

(b) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_2 :

	Nós					
iter	α_2	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	2*	2	∞	∞	∞
2	0*	2*	2*	4	6	∞
3	0*	2*	2*	4*	6	5
4	0*	2*	2*	4*	6	5*
5	0*	2*	2*	4*	6*	5*

Resultados:

- caminho $\alpha_2 \rightarrow 1 \rightarrow \beta_1$, com “custo” 4;
- caminho $\alpha_2 \rightarrow 1 \rightarrow \beta_2$, com “custo” 6;
- caminho $\alpha_2 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_3$, com “custo” 5.

(c) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_3 :

	Nós					
iter	α_3	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	∞	1*	∞	∞	4
2	0*	∞	1*	4	6	3*
3	0*	∞	1*	4*	6	3*
4	0*	∞	1*	4*	6*	3*

Resultados:

- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_1$, com “custo” 4;
- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_2$, com “custo” 6;
- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_3$, com “custo” 3.

(a) Seguindo a sugestão do general *Foj*: “O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β . Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema”.

Utilizem-se então os valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de afectação. O destino X no quadro abaixo corresponde à ordem do general *Soj* “A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo”.

Divisões disponíveis		Divisões necessárias				
		β_1	β_1	β_2	β_3	X
α_1	1	3	3	5	4	0
α_1	2	3	3	5	4	0
α_2	3	4	4	6	5	0
α_2	4	4	4	6	5	0
α_3	5	4	4	6	3	0

	1	2	3	4	X
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0
3	1	1	1	2	0
4	1	1	1	2	0
5	1	1	1	0	0

4 traços < 5

	1	2	3	4	X
1	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0
5	1	1	1	0	1

5 traços, solução óptima com custo $3 + 3 + 6 + 3 + 0 = 15$.

A conclusão deste estudo é a seguinte:

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1 ;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será 15.

- (b) Seguindo a sugestão do general *Jac*: “Podíamos também tentar usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, usando também as distâncias como uma medida para o perigo”.

Utilização dos valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de transportes:

	β_1	β_2	β_3	X	
α_1	3	5	4	0	2
α_2	4	6	5	0	2
α_3	4	6	3	0	1
	2	1	1	1	

Obtenção da solução inicial pela regra dos custos mínimos:

1	--	--	1	2 / 0
3	5	4	0	
1	1	--	--	2 / 0
4	6	5	0	
--	--	1	0	1 / 0
4	6	3	0	
2	1	1	1	
1	0	0	0	
0				

Primeiro quadro do algoritmo de transportes:

		0	2	0	-3	
		1+θ	--	--	1-θ	
3		3	0	5	1	4
		1-θ	1	--	θ	
4		4	6	1	5	-1
		--	--	1	0	
3		1	4	1	6	3
						0

Do quadro anterior retira-se que $\theta = 1$ e pode-se obter segundo quadro do algoritmo de transportes:

		0	2	-1	-4	
		2	--	--	--	
3		3	0	5	1	4
		0	1	--	1	
4		4	6	2	5	0
		--	--	1	0	
4		0	4	0	6	3
						0

A conclusão deste estudo é igual à obtida pelo algoritmo de afectação (como seria de esperar):

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1 ;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será $2 \times 3 + 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 3 = 15$.

8

Exercícios de CPM e PERT Enunciados

Problema 1

O banco TTM (Tostão a Tostão se faz um Milhão) decidiu transferir e ampliar a sua sede e serviços centrais para a cidade do Porto. Este projecto foi dividido em tarefas, tendo as suas precedências sido estabelecidas e os tempos de execução médios, e seus desvios-padrão, estimados:

Actividade	Descrição	Duração média (semanas)	Desvio-Padrão (semanas)	Actividades imediatamente posteriores
LO	Obtenção de licenças de obras	5	1	OA, ME RTF
OA	Obras de alteração do edifício	21	2	II
ME	Medição do espaço	1	0	PAI, PAM
RTF	Recrutamento e treino dos funcionários	21	1	M
PAI	Planeamento e aquisição de infra-estruturas	24	1	II
II	Instalação de infra-estruturas	7	1	IM
PAM	Planeamento e aquisição de mobiliário	10	1	IM
IM	Instalação de mobiliário	1	0	M
M	Mudança	2	0	—

- (a) Desenhe a rede de actividades correspondente ao projecto.
- (b) Calcule as folgas totais e livres e determine o caminho crítico.
- (c) Qual é a probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais?
- (d) Durante a execução do projecto conclui-se que as actividades OA e PAM sofrerão atrasos de 4 e 8 semanas, respectivamente. Será necessário alterar a execução dessas actividades para que a data prevista para a conclusão do projecto não seja comprometida? Justifique.

Problema 2

No quadro seguinte estão representadas as actividades que constituem um determinado projecto. Para cada uma é fornecida a sua duração e as actividades que lhe são imediatamente posteriores:

Actividade	Duração média (semanas)	Actividades imediatamente posteriores
A	2	G
B	4	—
C	7	E, I, B
D	3	A, F
E	3	G
F	3	I, B
G	4	H
H	5	—
I	9	H

Desenhe a rede de actividades associada a este projecto e determine o caminho crítico e as folgas totais e livres de todas as actividades do projecto.

Problema 3

Considere o seguinte projecto:

Actividade	Duração média (semanas)	Desvio-Padrão (semanas)	Actividades imediatamente precedentes
A	8	3	D
B	1	0	H
C	5	1	—
D	8	2	—
E	10	3	C, D
F	6	2	H
G	4	1	B, I, J
H	5	1	A, E
I	9	2	D
J	2	0	A, E

- (a) Trace a rede de actividades para este projecto.
- (b) Defina o caminho crítico (em termos de durações médias).
- (c) Defina as folgas médias (total e livre) das actividades H, J e I.
- (d) Determine a probabilidade de o projecto estar concluído antes da semana 27 (admita que o projecto arranca no início da semana 0). Critique a estimativa da probabilidade obtida.
- (e) Qual a probabilidade de o projecto estar concluído entre o início da semana 27 e o fim da semana 30?
- (f) Que data de conclusão do projecto deverá ser proposta, para que haja apenas 5% de probabilidade de não a cumprir?
- (g) No fim da semana 13, o estado de execução das diferentes actividades é o seguinte:
 - actividades completas: C e D
 - actividades em execução:
 - E (valor esperado da duração restante: 1 semana)
 - A (valor esperado da duração restante: 1 semana)
 - I (valor esperado da duração restante: 8 semana)
 - actividades não iniciadas: as restantes

Redefina a rede. Indique sobre a rede os valores esperados das datas de início mais cedo e das datas de fim mais tarde para as actividades não terminadas, bem como o(s) caminho(s) crítico(s), na nova situação.

Problema 4

Um dado projecto envolve as 9 actividades que se caracterizam na tabela seguinte:

Actividade	Duração média (semanas)	Desvio- Padrão (semanas)	Actividades imediatamente anteriores
A	10	2	—
B	7	1	—
C	16	3	—
D	12	1	A
E	5	1	B
F	12	2	B
G	8	2	E, D
H	10	2	F, E, D
I	8	2	G, H

- Defina os números de ordem das actividades, desenhe a rede correspondente e determine o caminho crítico.
- Calcule as folgas médias total e livre das actividades F, B e D. Qual o interesse desses valores no controlo de um projecto?
- Calcule a probabilidade de o projecto não estar completo ao fim de 50 semanas. Que confiança tem no valor encontrado?

8

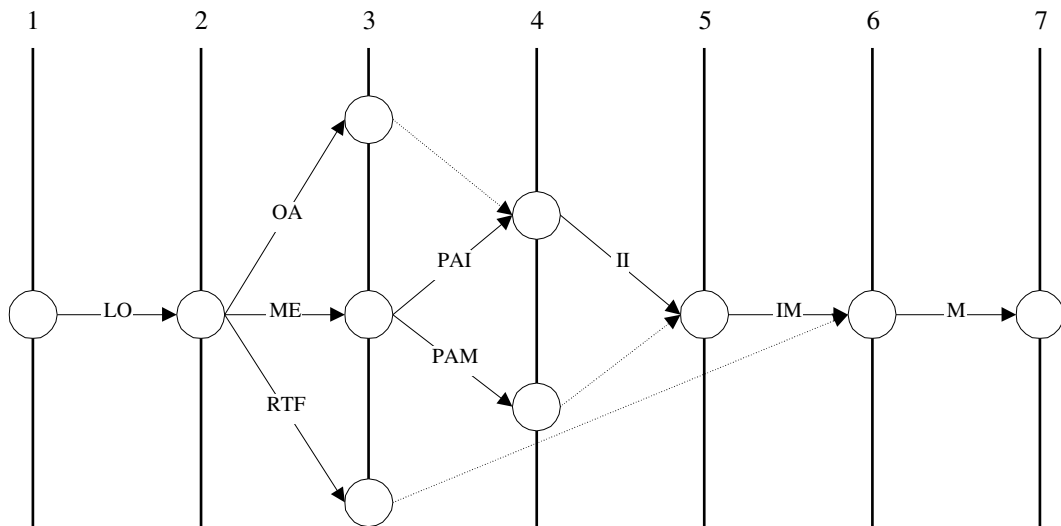
Exercícios de CPM e PERT Resoluções

Problema 1

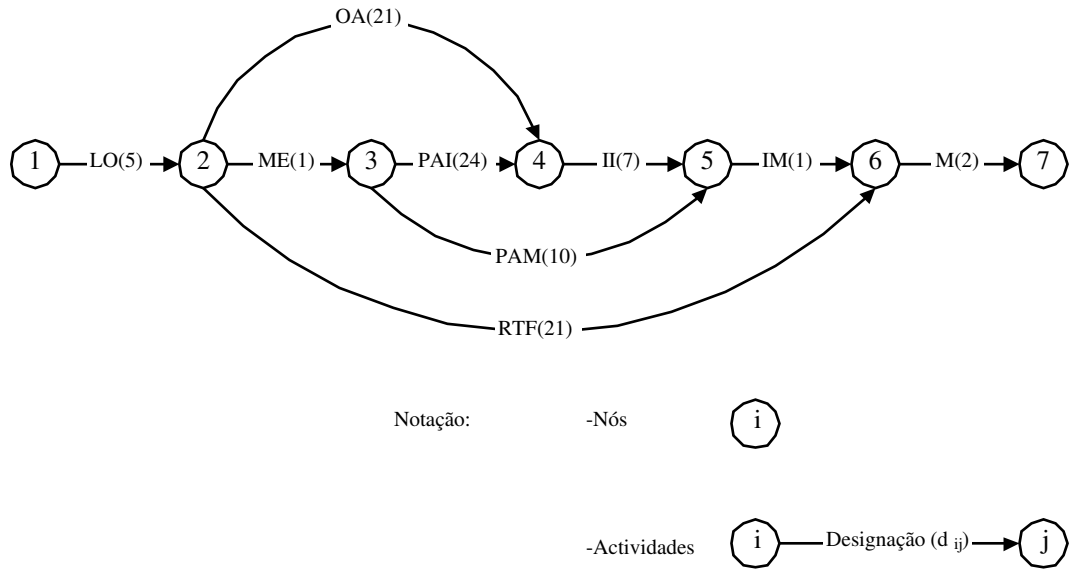
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

Actividade	Actividades imediatamente subsequentes (posteriores)									Número de ordem
	LO	OA	ME	RTF	PAI	II	PAM	IM	M	
LO		x	x	x						1
OA						x				2
ME					x		x			2
RTF									x	2
PAI						x				3
II								x		4
PAM								x		3
IM									x	5
M										6

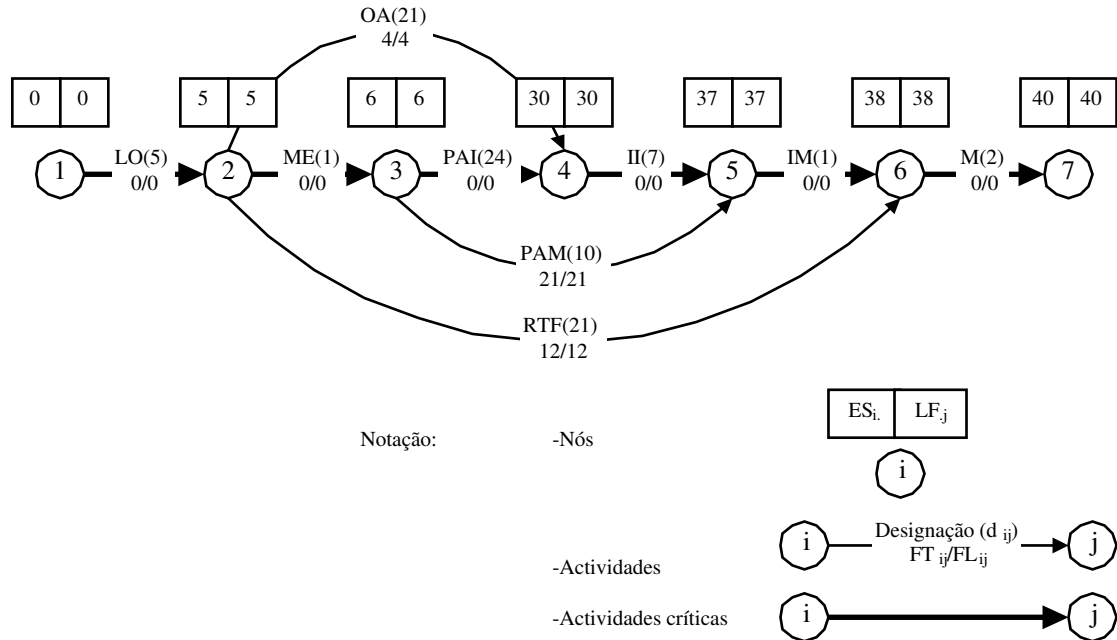
Seguidamente, desenham-se $6 + 1 = 7$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



(b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $LO \rightarrow ME \rightarrow PAI \rightarrow II \rightarrow IM \rightarrow M$



(c) Duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 40$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 40$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 = 3$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

A probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais, corresponde à probabilidade de a duração do projecto ser ≥ 42 .

$$P(D \geq 42) = P\left(Z \geq \frac{42 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \geq \frac{42 - 40}{\sqrt{3}}\right) = P(Z \geq 1.15) \approx 0.1251 \approx 12.5\%$$

(d) Dado que o atraso de 4 semanas na actividade OA, é \leq que a folga total de OA, esse atraso não compromete a data de fim do projecto.

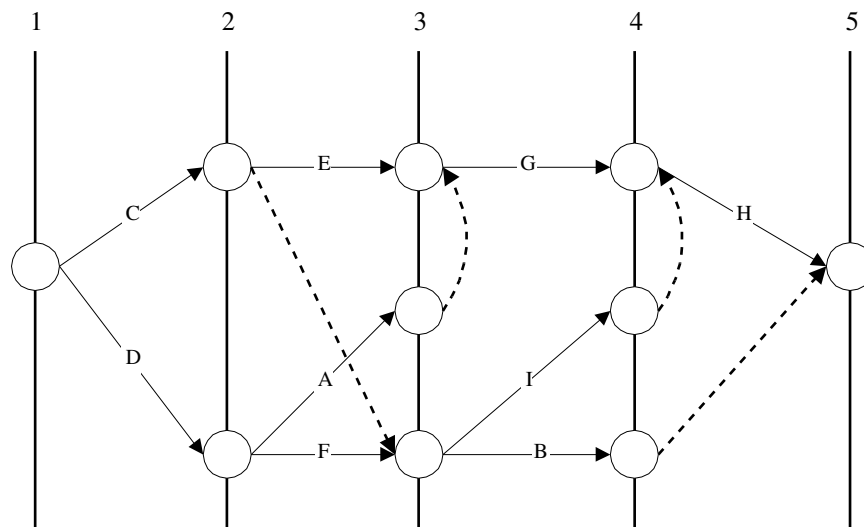
Dado que o atraso de 8 semanas na actividade PAM, é \leq que a folga total de PAM, esse atraso não compromete a data de fim do projecto.

Problema 2

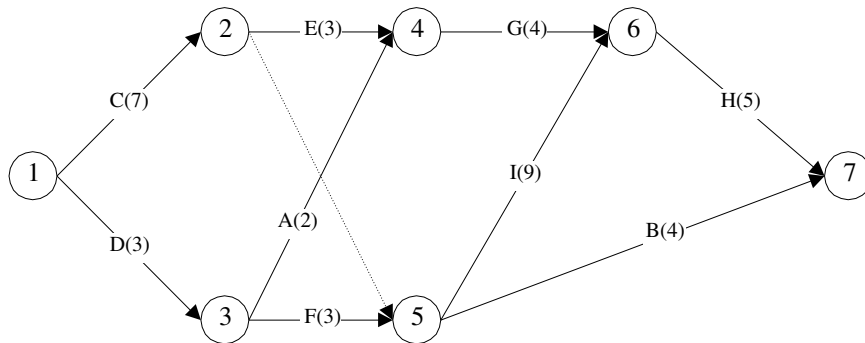
Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

Actividade	Activ. imediatamente posteriores									Número de ordem
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
A							x			2
B										3
C		x			x				x	1
D	x					x				1
E							x			2
F		x							x	2
G								x		3
H										4
I								x		3

Seguidamente, desenham-se $4 + 1 = 5$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



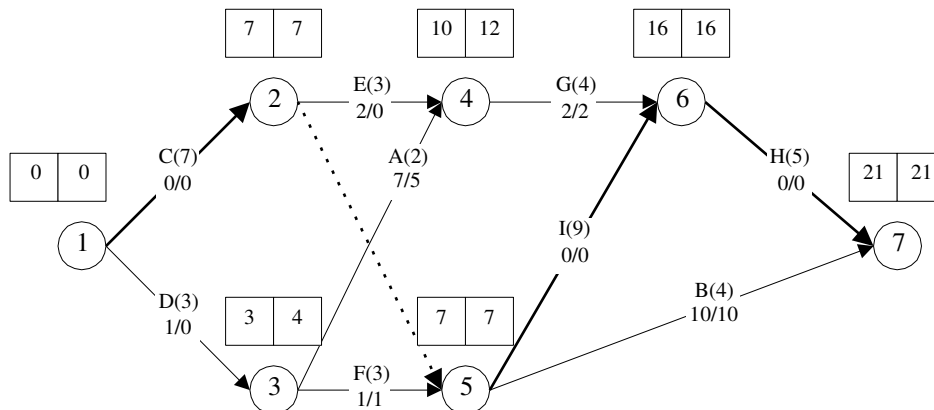
Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



Notação: -Nós \textcircled{i}

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_{ij})} \textcircled{j}$

Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $C \rightarrow I \rightarrow H$ e tem uma duração média de 21 semanas.



Notação: -Nós $\begin{matrix} \text{ES}_i & \text{LF}_j \\ \textcircled{i} \end{matrix}$

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_{ij})} \textcircled{j}$
 $\text{FT}_{ij}/\text{FL}_{ij}$

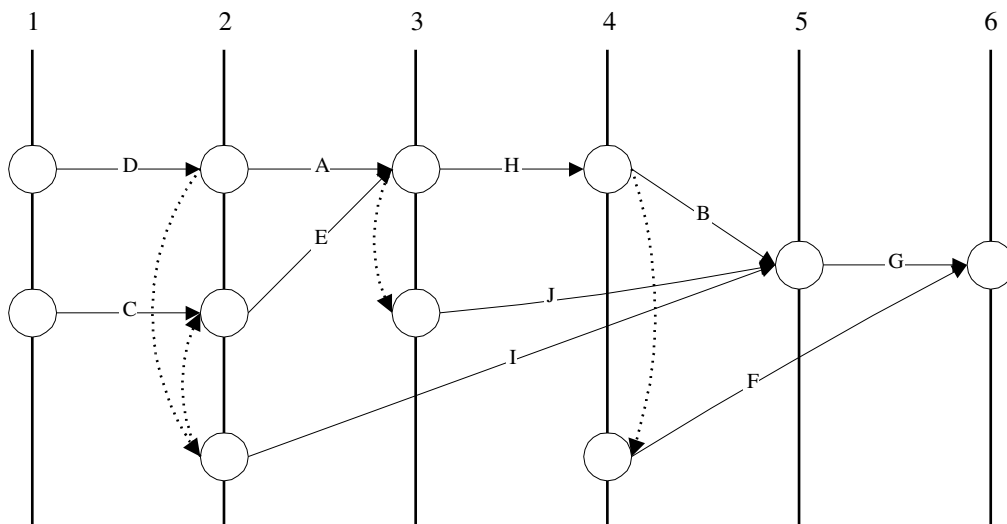
-Actividades críticas $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{thick arrow}} \textcircled{j}$

Problema 3

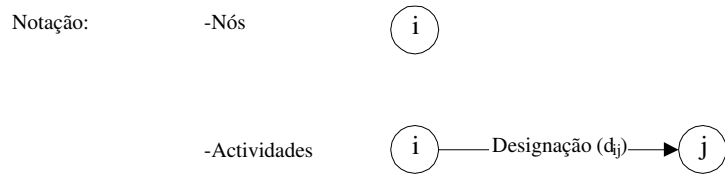
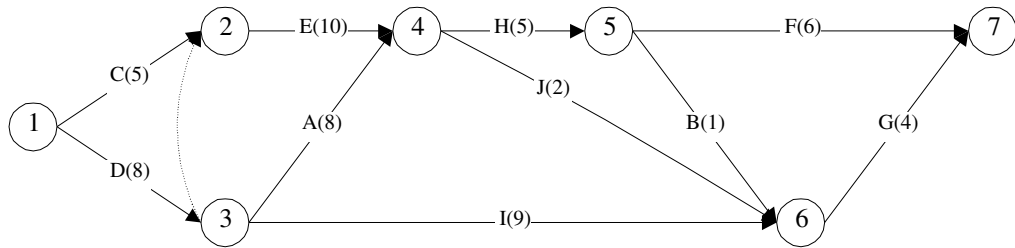
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

Actividade	Actividades imediatamente posteriores										Número de ordem
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A								x		x	2
B							x				4
C					x						1
D	x				x				x		1
E								x		x	2
F											4
G											5
H		x				x					3
I							x				2
J							x				3

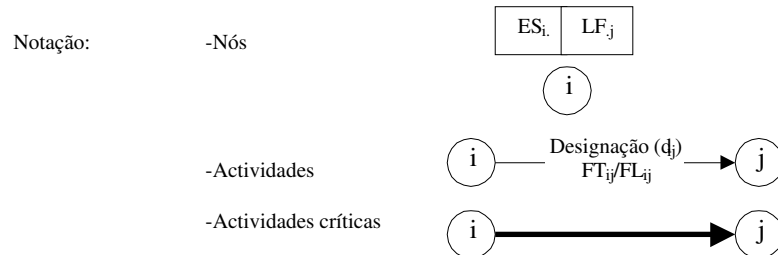
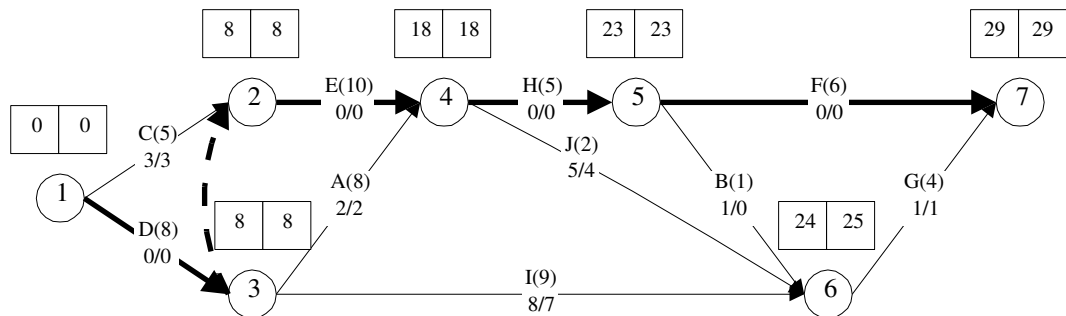
Seguidamente, desenharam-se $5 + 1 = 6$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



(b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F$ e tem uma duração média de 29 semanas.



(c) Ver figura anterior.

(d) A duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 29$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 8 + 10 + 5 + 6 = 29$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 = 18$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

Neste caso teremos então:

$$P(D \leq 27) = P\left(Z \leq \frac{27 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \leq \frac{27 - 29}{4.24}\right) = P(Z \leq -0.47) \approx 0.5 - 0.1808 \approx 0.32$$

A probabilidade de o projecto estar concluído antes da semana 27 é de aproximadamente 30%.

Foi dito que a duração do caminho crítico tinha uma distribuição que tendia para a distribuição normal. Isso significa que a sua distribuição não será exactamente normal, tal como nós a consideramos. Estamos pois perante uma possível fonte de erro para a estimativa da probabilidade encontrada. Outro pressuposto que pode falsear os resultados é de que a duração do projecto é a duração do caminho crítico encontrado. Ora este é o caminho crítico quando as actividades demoram exactamente a sua duração média. Se isso não acontecer pode o caminho crítico ser alterado e a duração do projecto não corresponder à duração do caminho crítico “médio”.

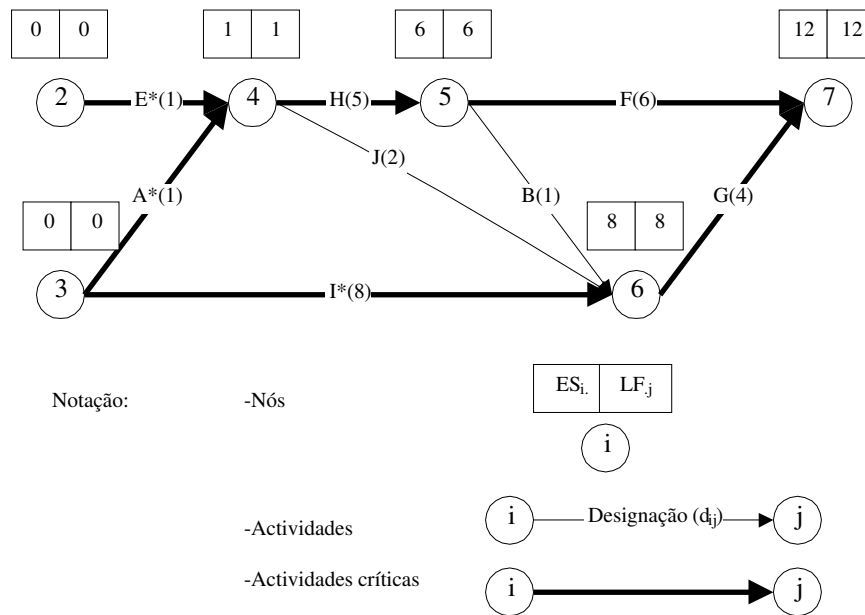
- (e) A probabilidade de o projecto estar concluído entre o início da semana 27 e o fim da semana 30 é a probabilidade de a duração do projecto estar entre 27 e 31.

$$P(27 \leq D \leq 31) = P\left(\frac{27 - 29}{4.24} \leq Z \leq \frac{31 - 29}{4.24}\right) = P(-0.47 \leq Z \leq 0.47) = 2 \times 0.1808 \approx 0.36$$

- (f) Devem-se propor 36 semanas até à conclusão do projecto, para que haja apenas 5% de probabilidade de não cumprimento.

$$P(D \geq d) = 0.05 \equiv P\left(Z \geq \frac{d - 29}{4.24}\right) = 0.05 \equiv \frac{d - 29}{4.24} = 1.645 \equiv d = 36 \text{ semanas}$$

- (g) A situação intermédia referida no enunciado, está representada na figura seguinte.



Os caminhos críticos correspondem às actividades $E \rightarrow H \rightarrow F$, $A \rightarrow H \rightarrow F$ e $I \rightarrow G$ e têm uma duração média de 12 semanas

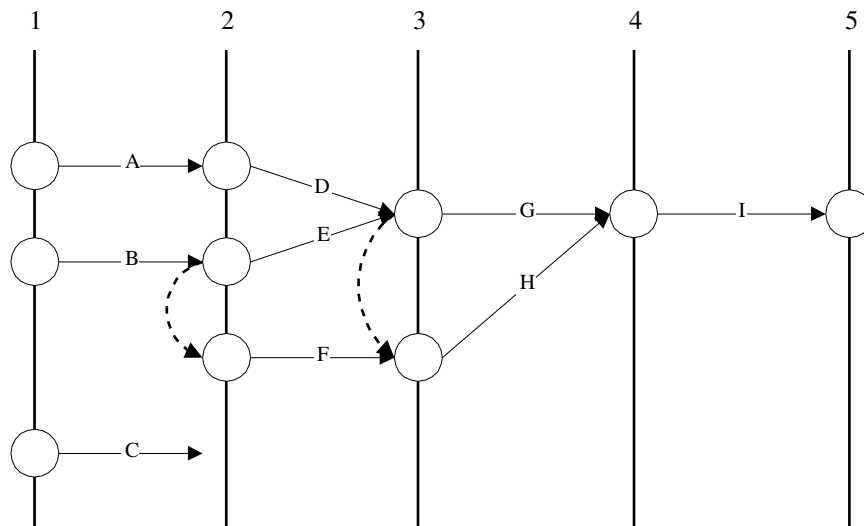
A semana 0 desta rede corresponde à semana 14 da rede inicial, o que significa que o projecto pode terminar no início da semana 26 (ou fim da semana 25), estando 3 semanas adiantado face à previsão inicial.

Problema 4

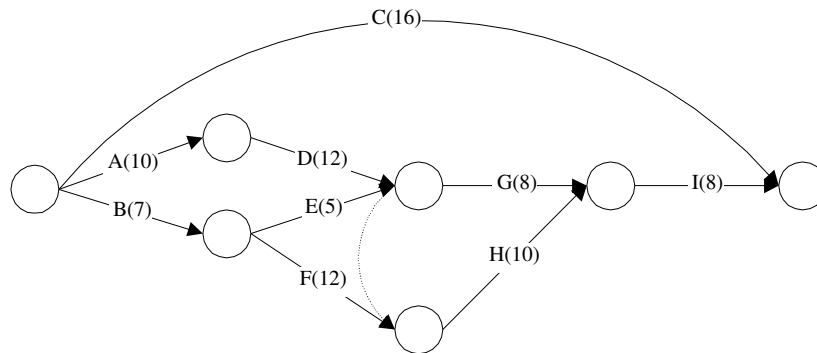
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

Actividade	Activ. imediatamente posteriores									Número de ordem
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
A				x						1
B					x	x				1
C										1
D							x	x		2
E							x	x		2
F								x		2
G									x	3
H									x	3
I										4

Seguidamente, desenham-se $4 + 1 = 5$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



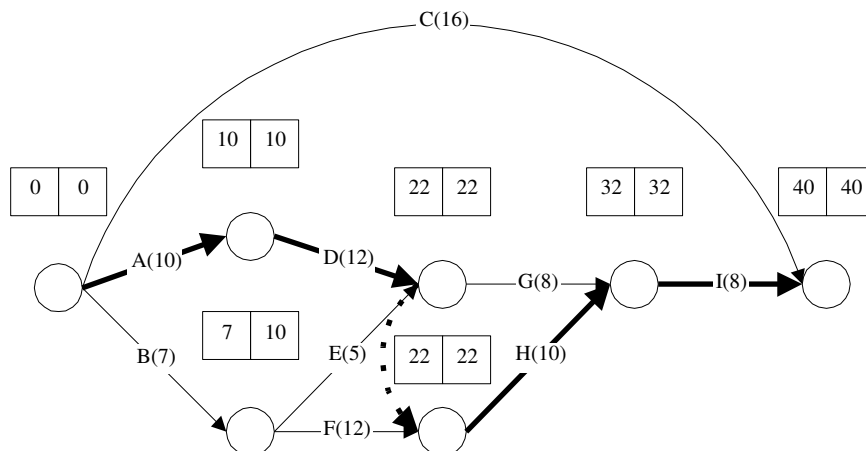
Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



Notação: -Nós \textcircled{i}

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_j)} \textcircled{j}$

O caminho crítico corresponde às actividades $A \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow I$ e tem uma duração média de 40 semanas.

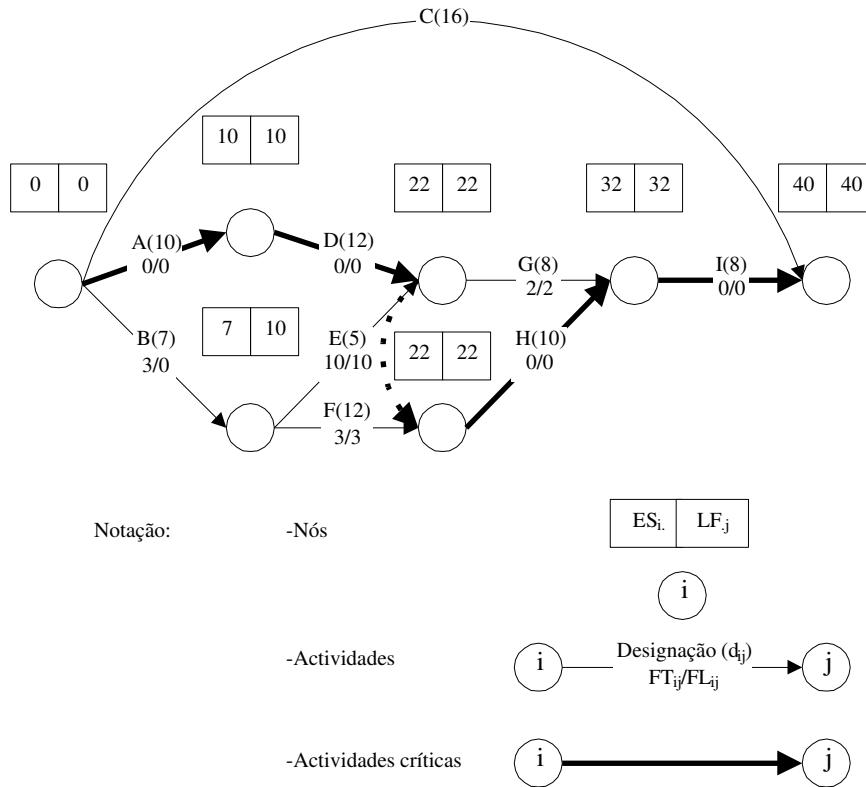


Notação: -Nós $\begin{matrix} \text{ES}_i & \text{LF}_j \\ \textcircled{i} \end{matrix}$

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_j)} \textcircled{j}$

-Actividades críticas $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{thick arrow}} \textcircled{j}$

(b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades.



(c) A duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 40$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 10 + 12 + 10 + 8 = 40$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 13$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

Neste caso teremos então:

$$P(D \geq 51) = P\left(Z \geq \frac{51 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \geq \frac{51 - 40}{3.61}\right) = P(Z \geq 3.05) \approx 1 - 0.5 - 0.4989 \approx 0.0011$$

A probabilidade de o projecto não estar concluído ao fim de 50 semanas é de aproximadamente 1%.

9

Exercícios de Teoria da Decisão Enunciados

Problema 1

Uma empresa de automóveis aposta numa nova peça para carros. Como alternativa à i&d por conta própria, a direcção da empresa admite a possibilidade de se ligar a uma firma de consultoria em engenharia. A tabela 1 apresenta os lucros esperados, em valor actual, para os próximos 5 anos, conforme o sucesso alcançado:

Lucros (M\$)	Grande sucesso (p_1)	Sucesso moderado (p_2)	Sem sucesso (p_3)
D (desenvolvimento próprio)	300	40	-60
C (em colaboração com outra empresa)	200	30	-20

Tabela 1: Lucros esperados (em valor actual) para os próximos 5 anos, conforme o sucesso alcançado

Com base em estudos de viabilidade e consulta a grupos de marketing e de desenvolvimento, encontraram-se as probabilidades de $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.4$, para as ocorrências consideradas.

- Qual a decisão a que corresponde ao *máximo valor esperado*? Apresente uma árvore de decisão.
- Qual a decisão a tomar caso se utilize o critério *maximin*?
- Determine o *ganho esperado com informação certa*, e explique o seu significado.

Problema 2

Um gestor vai decidir sobre quantas máquinas de um dado tipo comprar, que são fundamentais para a produção de um certo artigo. Após uma análise inicial, a questão resume-se a duas alternativas: comprar 1 máquina ou comprar 2 máquinas. Se 1 máquina for comprada e a procura do artigo for elevada, a 2^a máquina ainda poderá ser comprada mais tarde. Contudo, o custo por máquina será menor se as 2 forem compradas ao mesmo tempo. As probabilidades estimadas para a procura do artigo são: procura baixa 0.30 e procura alta 0.70. O valor actual associado aos resultados de compra de 2 máquinas no início é de 750c, se a procura for baixa, e de 1300c se for alta a procura do artigo.

O valor correspondente para uma máquina sob procura baixa é de 900c. Se a procura for alta há 3 hipóteses: nada fazer resulta no valor de 900c; subcontratar dará 1100c; comprar a 2^a máquina permitirá obter 1000c. Quantas máquinas deverão ser compradas no início?

Nota: Utilize uma árvore de decisão para analisar o problema.

Problema 3

Uma grande companhia de energia oferece \$60 000 ao proprietário de determinado local, pelos direitos de exploração do gás natural e opção para desenvolvimento futuro. A opção, se concretizada, é equivalente a um adicional de \$600 000 ao proprietário, mas somente ocorrerá se o gás natural for descoberto durante a fase de exploração. O proprietário, vendo que o interesse da companhia é uma boa indicação de que o gás existe, está disposto a desenvolver o empreendimento ele mesmo. Para isso, é necessário contratar especialistas em exploração e desenvolvimento. O custo inicial é de \$100 000, os quais serão perdidos se nenhum gás for encontrado. Se o gás for descoberto, entretanto, o proprietário estimará um lucro de \$2 milhões.

As alternativas de decisão do proprietário são D_1 (aceitar a oferta da companhia de energia) e D_2 (explorar e desenvolver ele próprio). Os estados naturais são S_1 (não existe gás na terra) e S_2 (existe gás na terra). Os ganhos (em milhares de \$) do proprietário, para cada combinação de eventos, são dados na tabela 1. O proprietário estima a probabilidade de encontrar gás igual a 0.6.

	S_1	S_2
D_1	60	660
D_2	-100	2000

Tabela 1: Ganhos (em milhões de \$ para cada combinação de eventos)

Determine as decisões recomendadas pelos seguintes critérios:

- (a) Maximin
- (b) Média
- (c) Máximo valor esperado

Problema 4

Polido Guapo dirige a lavandaria ASSEADA que se desenvolveu a ponto de atingir o máximo de capacidade - nas duas actuais instalações, sem qualquer hipótese de crescimento. Aliás a ideia não é passar para outras instalações, pois está convencido que grande parte do seu sucesso se deve à boa localização da ASSEADA na cidade. E isto é ponto assente - é o maior valor da sua empresa. *Polido Guapo* reconhece, no entanto, que a operacionalidade da sua empresa regista dificuldades motivadas pela ocupação exagerada do espaço e, naturalmente, deseja melhorar o processo de movimentação das peças durante as várias fases do processo (separação, limpeza, passagem a ferro, ...). Reflecte na hipótese de instalar um sistema de transporte aéreo (transportador) que permita libertar parte do chão da fábrica, actualmente ocupado por caixotes móveis, que juntam as peças e as movimentam entre fases. Uma empresa de equipamentos doutra cidade propõe deslocar uma equipa e instalar o transportador adequado, mas *Polido Guapo* ainda não se decidiu. A proposta inclui a instalação dum transportador numa das instalações e a substituição dos caixotes móveis na outra por 25000 euros. Se equipar ambas as instalações, enquanto as equipas se mantêm na cidade, o custo será apenas de 45000 euros. Caso não se decida por qualquer instalação então deverá gastar 1000 euros para substituir os caixotes móveis. É claro que *Guapo* pensa que um transportador poupará tempo aos seus empregados, e melhorará a eficiência do serviço, estimando ganhos no valor de 16000 euros por instalação. Outrossim, o ganho económico potencial estará no conseqüente? crescimento do seu serviço, em parte devido à existência de mais espaço. A tabela 1 apresenta os valores estimados pela ASSEADA (por simplificação apenas considerados três valores para o aumento do negócio):

É evidente que *Guapo* poderá proceder a uma instalação de transportador por agora e, mais tarde, instalar outro (ao preço de 25000 euros) conforme a evolução do negócio (ver tabela 1).

Aumento do negócio (%)	Valor actual do lucro (por instalação)	Probabilidade de ocorrência
0	16000 euros	0.30
3	30000 euros	0.50
6	50000 euros	0.20

Tabela 1:

- (a) Analise a situação, através duma árvore de decisão.
- (b) Na perspectiva MVE qual deverá ser a decisão de *Polido Guapo*?
- (c) Qual é o VEIP? Explique qual o seu significado para a ASSEADA.

Problema 5

A comercialização do LESTO, um novo produto (que até já tem nome) da empresa *Expedita* começa a ganhar forma. Todavia, como é frequente em situações de lançamento de novas marcas, há um considerável risco associado - será que o produto se aguentará bem? Numa postura prudente, a *Expedita* acha conveniente introduzir o LESTO apenas a nível regional, para teste de mercado, antes dum lançamento nacional. Portanto, a primeira decisão a tomar respeita à condução (ou não) do teste de mercado. A empresa estima o custo de 50 000 euros para o estudo de mercado. Se for esta a opção, deverá aguardar os resultados desse teste. Então decidirá, neles apoiada, se apostará na comercialização do LESTO por todo o país. Por outro lado, se a opção inicial for não proceder aos testes, então a decisão final - comercializar ou não o produto a nível nacional, poderá desde já ser tomada. A *Expedita* avalia o sucesso do produto, no mercado nacional, em 1 200 000 euros, devendo um insucesso derivar num custo para a empresa de 500 000 euros. As probabilidades a associar aos vários acontecimentos reflectirão algum conhecimento científico e a experiência da empresa com produtos similares. Assim a *Expedita* avalia como sendo de 0.5 a probabilidade de sucesso (ou de insucesso) do LESTO a nível nacional, sem qualquer informação proveniente de testes de mercado. Contudo, se um teste for realizado e apontar para sucesso então a empresa acredita que a probabilidade de sucesso a nível nacional do produto será de 0.7, enquanto que, no caso contrário (o teste aponta para fracasso), a probabilidade de sucesso no mercado nacional será apenas de 0.2. Finalmente, supõe-se que a probabilidade do teste apontar para um sucesso é de 0.6.

- (a) Qual a estratégia conveniente a adoptar (critério MVE)?
- (b) A função do teste de mercado é a obtenção de informação mais apurada alusiva ao mercado nacional, sob a forma de probabilidades. Com base nos dados disponíveis, qual o máximo que a *Expedita* deverá pagar por esse teste de mercado?
- (c) Um acréscimo no valor atribuído ao sucesso do LESTO (1200000 euros) terá alguma consequência para a resposta em (a)?

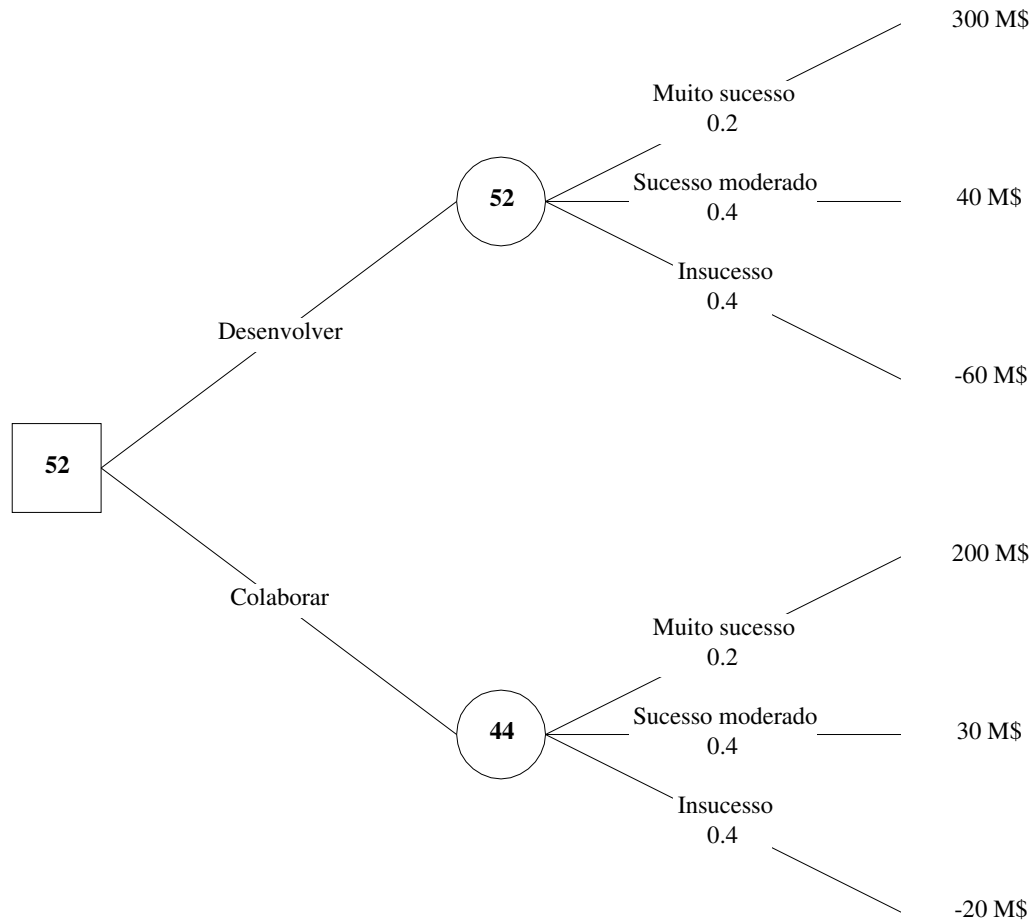
9

Exercícios de Teoria da Decisão

Resoluções

Problema 1

- (a) Como se pode ver na figura, a decisão que corresponde ao máximo valor esperado (MVE) é a decisão D (fazer o desenvolvimento próprio). Nesse caso o valor do MVE = 52.



- (b)

	<i>GS</i>	<i>SM</i>	<i>SS</i>	<i>Min</i>
<i>D</i>	300	40	-60	-60
<i>C</i>	200	30	-20	-20
	<i>Maximin</i>			-20

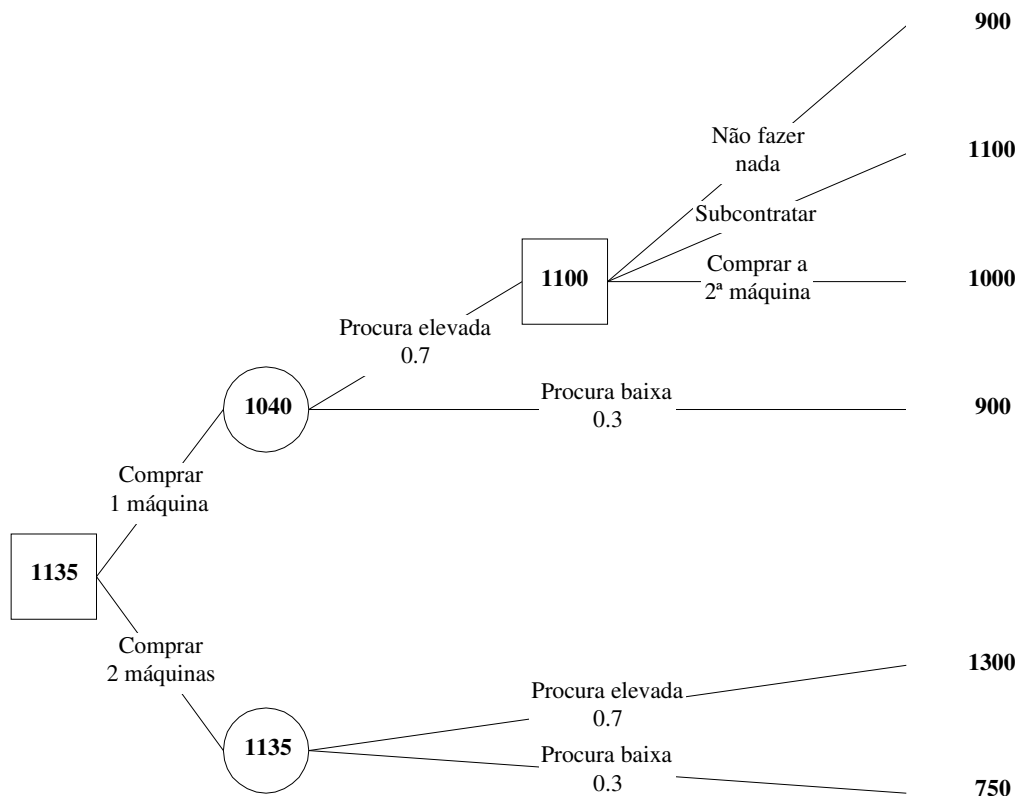
Utilizando o critério Maximin, deve-se tomar a decisão C.

- (c) O ganho esperado com informação certa será:

$$300 \times 0.2 + 40 \times 0.4 - 20 \times 0.4 - MVE = 68 - 52 = 16$$

Problema 2

Como se pode ver na figura, a decisão que dá origem ao máximo valor esperado (MVE) corresponde à compra inicial de 2 máquinas. Nesse caso $MVE = 1135$.



Problema 3

(a)

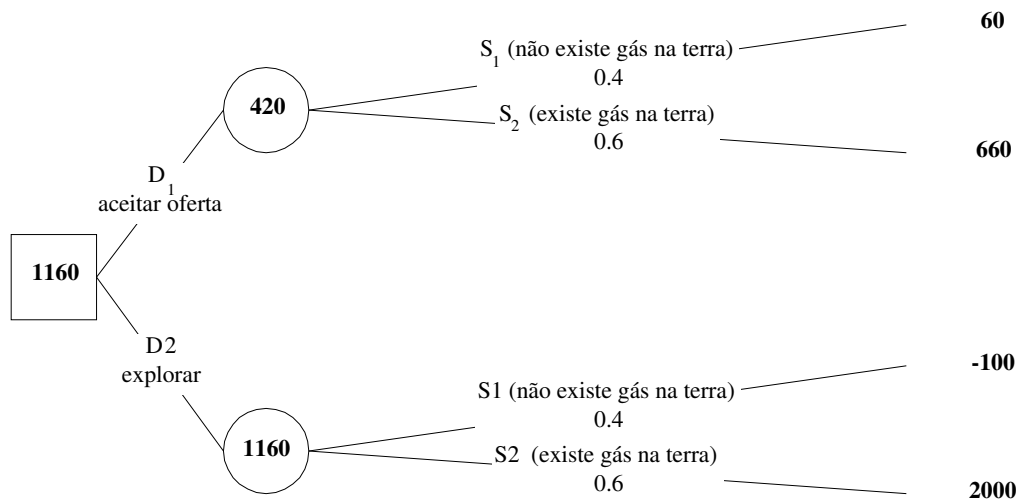
	S_1	S_2	<i>Min</i>
D_1	60	660	60
D_2	-100	2000	-100
	<i>Maximin</i>		60

Utilizando o critério Maximin, deve-se tomar a decisão D_1 .

(b)

	S_1	S_2	Média
D_1	60	660	360
D_2	-100	2000	950
			950

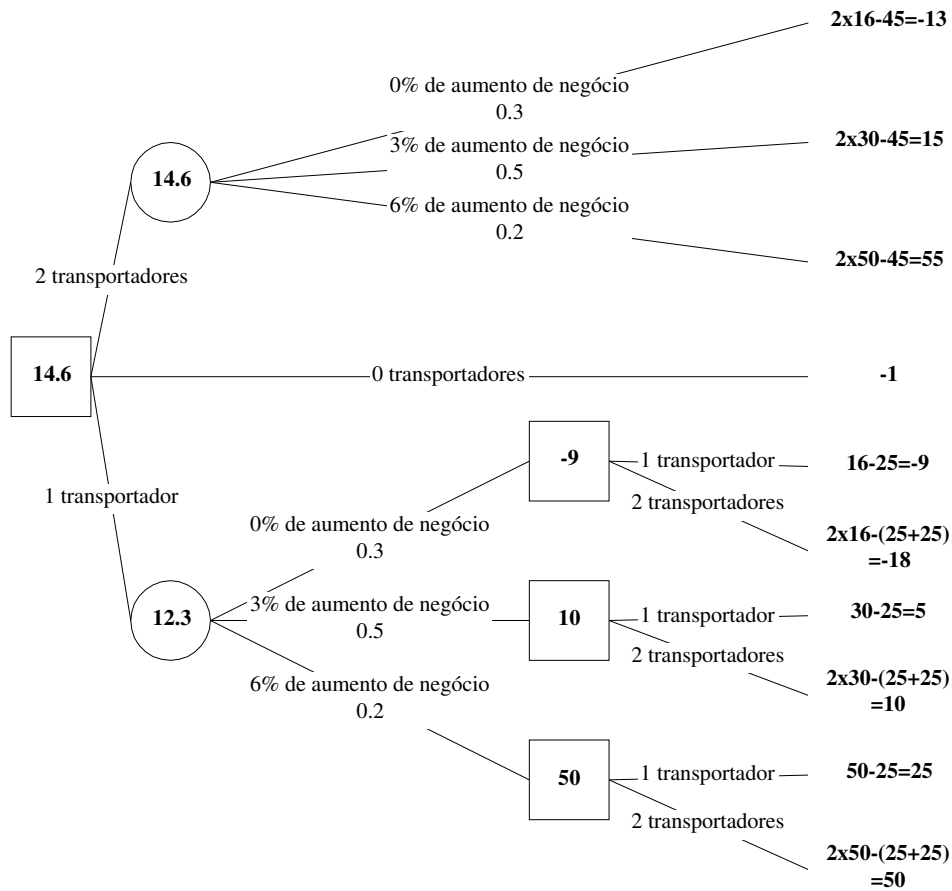
Utilizando o critério da Média, deve-se tomar a decisão D_2 .



(c)

Utilizando o critério do Máximo Valor Esperado, deve-se tomar a decisão D_2 (MVE = 1160).

Problema 4



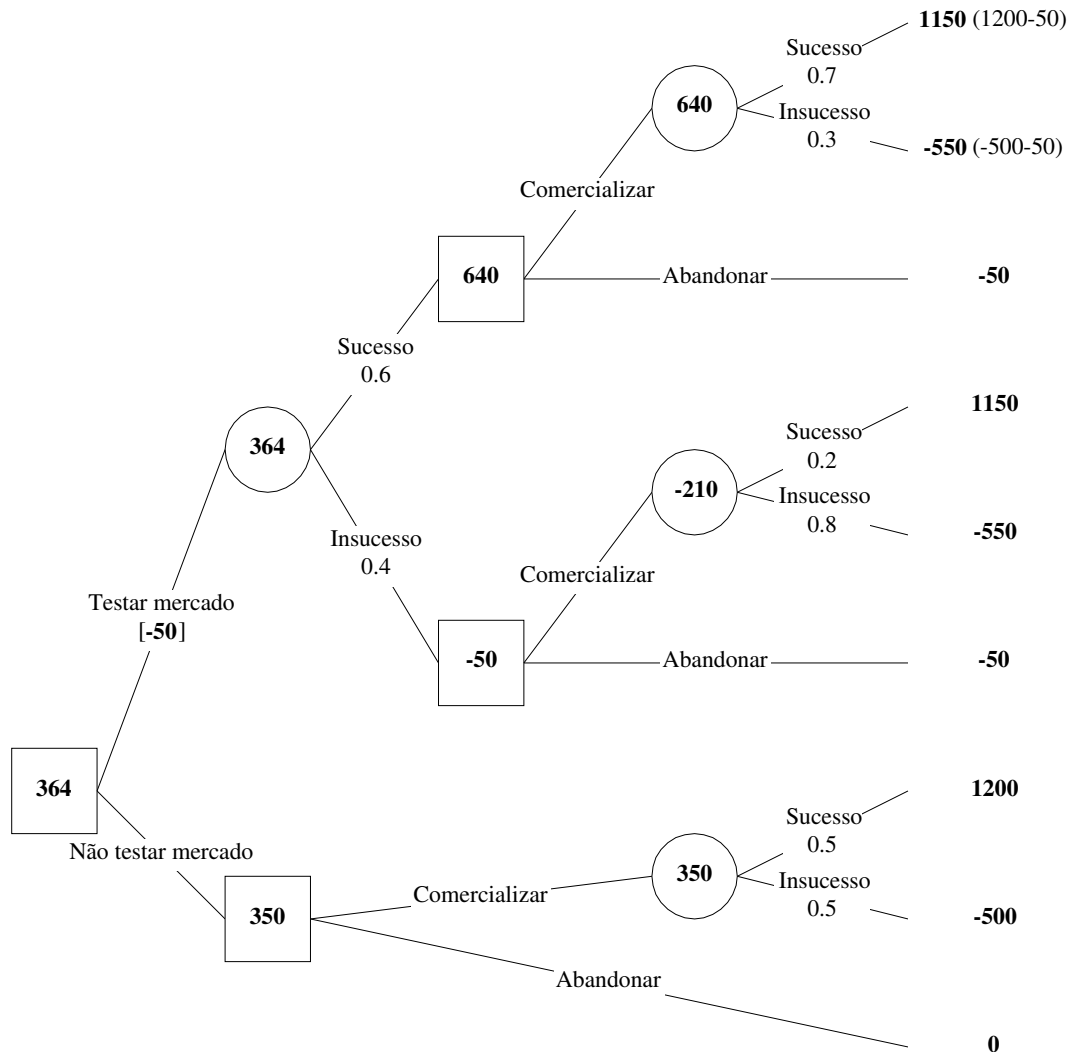
- (a)
- (b) Utilizando o critério do Máximo Valor Esperado, devem-se comprar 2 transportadores, MVE = 14.6 Keuro.
- (c)

<i>Probabilidade</i>	0.3	0.5	0.2
Aumento do negócio	0%	3%	6%
2 transportadores	-13	15	55
1 transportador	-9	10	50

Valor Esperado com Informação Perfeita, $VEIP = [0.3 \times (-9) + 0.5 \times 15 + 0.2 \times 55] - 14.6 = 15.8 - 14.6 = 1.2$ Keuro.

Problema 5

(a) MVE = 364 Keuro



(b) O valor máximo a pagar seriam 64 Keuro (valor de x na equação abaixo).

$$[(1200 - x) \times 0.7 + (-500 - x) \times 0.3] \times 0.6 - 0.4 \times x \geq 350$$

(c) A partir de 1375 Keuro, comercializar desde já, sem teste (ver equação abaixo).

$$[(x - 50) \times 0.7 - 550 \times 0.3] \times 0.6 - 0.4 \times 50 \leq x \times 0.5 - 500 \times 0.5$$

$$(0.42 - 0.5)x \leq 21 + 99 + 20 - 250$$

$$x \geq 1375$$

10

Exercícios de Filas de Espera Enunciados

Problema 1

Os autocarros de uma empresa chegam para limpeza à garagem central em grupos de cinco por hora. Os autocarros são atendidos em ordem aleatória, um de cada vez. Cada um requer 11 minutos para ser completamente limpo deixando a garagem logo que o serviço esteja pronto. Determine:

- (a) o número médio de autocarros na garagem;
- (b) o número médio de autocarros esperando para serem limpos;
- (c) o tempo médio que um autocarro permanece na garagem.

Problema 2

Numa pequena pastelaria, apenas uma empregada atende os clientes ao Sábado. O modelo de chegada de clientes nesse dia segue aproximadamente uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de chegada de 10 pessoas por hora. Os clientes, que são muitos dada a qualidade dos pasteis, são atendidos segundo o esquema FIFO. O tempo gasto para atender um cliente é estimado como sendo exponencialmente distribuído, como um tempo médio de atendimento de 4 minutos. Determine:

- (a) a probabilidade de se formar uma fila;
- (b) o comprimento médio da fila;
- (c) o tempo médio de espera de um cliente na fila;
- (d) probabilidade dum cliente estar menos de 12 min. na pastelaria.

Problema 3

A Junta Autónoma das Estradas tem três equipas de segurança para investigações, que são chamadas constantemente, e cujo trabalho é analisar as condições nas proximidades de cada acidente grave. As equipas são igualmente eficientes; cada uma trabalha uma média de 2 dias para investigar e informar sobre um acidente, sendo o tempo exponencialmente distribuído. O número de acidentes graves nas estradas principais segue aproximadamente um processo de Poisson, com uma taxa média de 300 por ano. Determine L , L_q , W e W_q para este processo e dê o significado de cada um desses valores.

Problema 4

As chegadas a uma cabina telefónica são consideradas “Poisson”, com um tempo médio entre chegadas de 10 min. Assume-se que a duração de uma chamada telefónica é distribuída exponencialmente, com média de 3 min.

- (a) Qual a probabilidade de uma pessoa que chegue à cabina ter de esperar?
- (b) Qual o comprimento médio das filas que se poderão formar?
- (c) A companhia telefónica poderá instalar uma segunda cabina, caso se conclua que um cliente espera em média pelo menos 3 minutos. Quanto é que terá de aumentar o fluxo de chegadas de modo a justificar uma segunda cabina?

Problema 5

No Boeingavela, estabelecimento de refeições frias dum aeroporto, actualmente com apenas uma empregada ao balcão, os clientes são atendidos à razão de 10 por hora. Verifica-se que os clientes chegam à razão de 7 por hora, seguindo este processo de chegada uma distribuição de Poisson. O tempo de atendimento segue uma distribuição exponencial.

A gerência admite a hipótese de contratar mais uma empregada de balcão o que permitirá, ao duplicar a razão média de atendimento, melhorar a qualidade de serviço.

- (a) Analise o desempenho do sistema de espera no estado actual ao calcular, nomeadamente, a intensidade de tráfego, a probabilidade do sistema estar desocupado, o comprimento médio da fila de espera e o tempo que um cliente aguarda, em média, para ser atendido.
- (b) Se as pessoas desistem sempre que há 3 ou mais clientes à frente (no sistema), qual é a percentagem de potenciais clientes perdidos?
- (c) Como melhora o desempenho do sistema de espera, no caso de mais uma funcionária? Deverá recorrer ao tipo de indicadores utilizados em (a).

Faça alguns comentários, que ache oportunos, sobre as situações que estudou nas várias alíneas.

Problema 6

O serviço de emergência dum pequeno hospital tem um médico em serviço permanente. Pode-se dizer que os doentes chegam segundo uma distribuição de Poisson com razão média de 2.4 por hora. O médico garante o tratamento de emergência, até outro médico chegar, a aproximadamente 3 doentes por hora. A distribuição do tempo do médico por caso é, aproximadamente, exponencial.

- (a) Em média, que parte do tempo do médico é gasta a prestar serviço de emergência?
- (b) Em média, quanto deverá esperar um doente até ser atendido pelo médico?
- (c) Se o hospital melhorar a qualidade do atendimento de emergência, ao acrescentar um médico ao serviço permanente (sistema $M/M/2$), qual passará a ser a utilização do tempo dos médicos?
- (d) Com dois médicos disponíveis, quanto deverá esperar, em média, um doente até ser atendido?
- (e) Quanto, em média, deverá um doente esperar até ser visto por um médico, numa situação em que um médico e um assistente façam parte dum sistema do tipo $M/M/1$, com razão de serviço de 6 doentes por hora, mantendo a razão de chegada em 2.4 doentes por hora?
- (f) Procure justificar porque motivo o tempo médio de espera em (d) é menor que o tempo médio de espera em (e), embora as razões médias de chegada e de serviço sejam iguais.

Problema 7

Edmundo Terra é um dos críticos do funcionamento do serviço de veterinária da Cooperativa Agrícola de Belos Ares – afirma que sempre que chama um veterinário ele nunca vem no mesmo dia.

Actualmente há dois veterinários, cada um atendendo em média 5 chamadas por dia – o serviço pode ser considerado M/M/2.

Quanto aos pedidos de apoio a animais doentes verifica-se que chegam aleatoriamente, seguindo um processo de Poisson, à razão de 9 por dia.

Sensível às críticas dos membros da Cooperativa, a direcção decidiu discutir o caso, admitindo mesmo contratar um novo veterinário. Avalie a situação, contribuindo com informação que possa ser útil para uma tomada de decisão sobre a referida contratação.

Problema 8

A secção de fotocópias duma empresa, aberta 40 horas por semana, dispõe de 2 fotocopiadoras arrendadas pelo valor total de 12.0 contos cada por semana. Os utilizadores chegam à razão de 33/hora e o tempo médio de serviço é de 3 minutos. Suponha verificadas as condições indicadas no estudo das filas de espera.

(a) Determine:

- o nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopiadora;
- o tempo médio duma pessoa na fila;
- o tempo médio duma pessoa no sistema.

(b) O custo horário médio, para a empresa, do pessoal que recorre ao serviço de fotocópias é de 1.8 contos/hora, incluindo overheads. Será conveniente aumentar ao número de fotocopiadoras arrendadas? E para que número?

Problema 9

O supervisor operacional duma empresa de máquinas eléctricas verificou que o serviço de manutenção corrente de equipamento sofria atrasos, devido à espera na secção de ferramentas. Como qualquer atraso na produção obriga a uma alteração das ordens de fabrico ou mesmo ao recurso a horas extraordinárias, o supervisor requereu um estudo sobre a viabilidade de acrescentar mais funcionários à secção em questão, para melhorar a resposta às necessidades do serviço de manutenção.

O assunto foi estudado, concluindo-se que o tempo médio entre chegadas é de 80 segundos e que o tempo médio de atendimento, por parte dum funcionário, é de 60 segundos.

O custo total dum funcionário na secção de ferramentas é de \$8.50 por hora, enquanto que o custo relativo à espera (equipamento parado) é de \$15.00 por hora. Considera-se que o dia de trabalho tem 8 horas.

A tabela seguinte, parcialmente completa, informa sobre o efeito na fila de espera de acrescentar mais funcionários (fila tipo M/M/S, $S = 2, 3$) à secção, incluindo a análise dos custos diários totais envolvidos nas várias opções.

Complete a tabela. Na perspectiva dos custos totais tabelados, qual é a melhor opção?

	Nº de funcionários		
	1	2	3
Nº médio de equipamentos na fila de espera (L_q)	2.25		
Nº médio de equipamentos no sistema (L)	3.00		
Tempo médio de um equipamento na fila de espera, em min. (W_q)	3.00		
Tempo médio de um equipamento no sistema, em min. (W)	4.00		
Percentagem de tempo de desocupação do serviço	0.25		
Custo (\$)/dia (funcionários)	68.00		
Custo (\$)/dia (esperas)	360.00		
Custo total diário	428.00		

10

Exercícios de Filas de Espera Resoluções

Problema 1

Este é um sistema determinístico, com autocarros como “clientes” e a equipa de limpeza como servidor unitário. As chegadas ocorrem uma vez por hora, mas em grupos, sendo o tempo de atendimento de 11 minutos. Um autocarro é atendido quando está em serviço de limpeza.

A tabela mostra a história do sistema ao longo do período de 1 hora, nos instantes das chegadas e partidas. Como o atendimento é feito em ordem aleatória, a sequência particular apresentada é uma das muitas possíveis para processamento dos autocarros dentro da garagem. As estatísticas requeridas, no entanto, são independentes da sequência. Além disso, como o sistema se renova a cada hora, as estatísticas que caracterizam o sistema ao longo da primeira hora são também válidas ao longo das seguintes.

Relógio Simulado (minutos)	Cientes sendo atendidos	Fila
0	#4	#3, #1, #2, #5
11	#1	#3, #2, #5
22	#5	#3, #2
33	#3	#2
44	#2	...
55

(a) Número médio de autocarros na garagem:

$$\frac{5 \times 11min + 4 \times 11min + 3 \times 11min + 2 \times 11min + 1 \times 11min + 0 \times 5min}{60min} = 2.75$$

(b) Número médio de autocarros esperando para serem limpos:

$$\frac{4 \times 11min + 3 \times 11min + 2 \times 11min + 1 \times 11min + 0 \times 16min}{60min} = 1.83$$

(c) Tempo médio que um autocarro permanece na garagem: o autocarro #4 permanece 11 min, o autocarro #1 permanece 22 min, etc ...

$$\frac{11 + 22 + 33 + 44 + 55}{5} = 33$$

Problema 2

Taxa de chegada:

$$\lambda = 10 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

Tempo médio de serviço:

$$\frac{1}{\mu} = 4 \frac{\text{minutos}}{\text{cliente}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 0.25 \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 15 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

Número de servidores:

$$S = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Fila M/M/1}$$

(a) Probabilidade de se formar uma fila:

$$1 - P_0 - P_1 = 1 - (1 - \rho) - \rho(1 - \rho) = \rho^2 = \frac{4}{9}$$

P_0 – probabilidade de não estar ninguém na loja.

P_1 – probabilidade de estar uma pessoa na loja (a ser atendida).

(b) Comprimento médio da fila:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{100}{15(15 - 10)} = \frac{4}{3} \text{ clientes.}$$

(c) Tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4}{30} \text{ horas.}$$

(d) Probabilidade de um cliente estar menos de 12 minutos = $\frac{1}{5}$ horas na pastelaria:

$$1 - P(W > \frac{1}{5}) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t} = 1 - e^{-15(1-\frac{2}{3})\frac{1}{5}} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

Problema 3

Taxa de chegada:

$$\lambda = 300 \frac{\text{acidentes}}{\text{ano}} = \frac{300}{365} \frac{\text{acidentes}}{\text{dia}}$$

Tempo médio de serviço:

$$\frac{1}{\mu} = 2 \frac{\text{dias}}{\text{acidente}}$$

Taxa de serviço:

$$\mu = 0.5 \frac{\text{acidentes}}{\text{dia}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{300}{365}}{0.5} = \frac{600}{365} \approx 1.65$$

Número de servidores:

$$S = 3 \Rightarrow \text{Fila M/M/3}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{1.65}{3} = 0.55$$

P_0 (retirado da tabela para $\frac{\lambda}{\mu} = 1.65$ e $S = 3$):

$$0.1872 - \frac{0.1872 - 0.1460}{4} = 0.1769$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1769(1.65)^3 0.55}{3!(1-0.55)^2} = 0.3597$$

acidentes em fila de espera.

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.3597 + 1.65 = 2.00$$

acidentes em fila de espera e a serem investigados.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.3597}{\frac{300}{365}} = 0.4376$$

dias por acidente (espera).

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{\frac{300}{365}} = \frac{365}{150} = 2.43$$

dias por acidente (espera e investigação).

Problema 4

Tempo médio entre chegadas:

$$\frac{1}{\lambda} = 10 \frac{\text{minutos}}{\text{chegada}}$$

Taxa de chegada:

$$\lambda = 6 \frac{\text{chegadas}}{\text{hora}}$$

Tempo médio de serviço:

$$\frac{1}{\mu} = 3 \frac{\text{minutos}}{\text{chamada}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 20 \frac{\text{chamadas}}{\text{hora}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{20}$$

Número de servidores:

$$S = 1 \Rightarrow \text{Fila M/M/1}$$

(a) Probabilidade de ter de esperar:

$$1 - P_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = 0.3 = 30\%$$

P_0 – probabilidade de não estar ninguém a telefonar.

(b) Comprimento médio da fila:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{36}{20 \times (20 - 6)} = 0.129 \text{ pessoas.}$$

(c) Tempo médio de espera na fila: $W_q = 3$ minutos = 0.05 horas.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \iff \lambda = \frac{\mu^2 W_q}{1 + \mu W_q} = \frac{20^2 \times 0.05}{1 + 20 \times 0.05} = 10 \frac{\text{chegadas}}{\text{hora}}.$$

Justifica-se uma nova cabine se a taxa de chegada passar de 6 para 10 chegadas por hora.

Problema 5

Taxa de chegada:

$$\lambda = 7 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 10 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0.7$$

(a) Número de servidores:

$$S = 1 \Rightarrow \text{Fila M/M/1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.7$$

Probabilidade do sistema estar desocupado:

$$P_0 = 1 - \rho = 0.3$$

Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{49}{10 \times 3} = 1.63 \text{ clientes.}$$

Número médio de clientes no sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.33 \text{ clientes.}$$

Tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.63}{7} = 0.2329 \text{ horas.}$$

Tempo médio de espera no sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.33}{7} = 0.3328 \text{ horas.}$$

(b) Probabilidade de haver 3 clientes ou mais no sistema:

$$1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - (1 - \rho) - \rho(1 - \rho) - \rho^2(1 - \rho) = \rho^3 = 0.7^3 = 0.343$$

P_0 – probabilidade de estarem 0 clientes no sistema.

P_1 – probabilidade de estarem 1 clientes no sistema.

P_2 – probabilidade de estarem 2 clientes no sistema.

(c) Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S \times \mu} = 0.35$$

Probabilidade do sistema estar desocupado

$$P_0 = 0.4815$$

(retirado da tabela para $\frac{\lambda}{\mu} = 0.7$ e $S = 2$).

Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.4815(0.7)^2 0.35}{2!(1-0.35)^2} = 0.0977 \text{ clientes.}$$

Número médio de clientes no sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.7977 \text{ clientes.}$$

Tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0977}{7} = 0.0139 \text{ horas.}$$

Tempo médio de espera no sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{0.7977}{7} = 0.1139 \text{ horas.}$$

Problema 6

Taxa de chegada:

$$\lambda = 2.4 \frac{\text{doentes}}{\text{hora}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 3 \frac{\text{doentes}}{\text{hora}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0.8$$

(a) Número de servidores:

$$S = 1 \Rightarrow \text{Fila M/M/1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8$$

Probabilidade do médico estar ocupado:

$$1 - P_0 = \rho = 0.8$$

(b) Tempo médio de espera de um doente até ser atendido:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2.4}{3(3 - 2.4)} = \frac{4}{3} = 1.3333 \text{ horas}$$

(c) Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S \times \mu} = 0.40$$

Probabilidade do sistema estar desocupado:

$$1 - \rho = 0.6$$

O tempo dos médicos será utilizado a 40%.

(d)

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1 - \rho)^2} = \frac{0.4286(0.8)^2 0.40}{2!(1 - 0.40)^2} = 0.1524 \text{ doentes.}$$

Tempo médio de espera de um doente até ser atendido:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1524}{2.4} = 0.0635 \text{ horas.}$$

(e) Taxa de chegada:

$$\lambda = 2.4 \frac{\text{doentes}}{\text{hora}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 6 \frac{\text{doentes}}{\text{hora}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0.4$$

Número de servidores:

$$S = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Fila M/M/1}$$

Tempo médio de espera de um doente até ser atendido:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2.4}{6(6 - 2.4)} = 0.1111 \text{ horas}$$

(f) O sistema em (4) é muito mais flexível que o sistema em (5).

Problema 7

Taxa de chegada:

$$\lambda = 9 \frac{\text{chamadas}}{\text{dia}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 5 \frac{\text{chamadas}}{\text{dia}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Objecto do estudo: pretende-se verificar se a afirmação:
“sempre que chama um veterinário ele nunca vem no mesmo dia”
é verdadeira ou não.

Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S \times \mu} = \frac{1.8}{2} = 0.9$$

$$P_0 = 0.0528$$

Número médio de chamadas na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.0528(1.8)^2 0.9}{2!(1-0.9)^2} = \frac{0.1540}{0.02} = 7.7 \text{ chamadas.}$$

Finalmente, o tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{7.7}{9} = 0.8555 \text{ dias.}$$

Logo a afirmação de Edmundo Terra é incorrecta, dado que as chamadas estão menos de um dia à espera para serem atendidas.

Problema 8

Taxa de chegada:

$$\lambda = 33 \frac{\text{utilizadores}}{\text{hora}}$$

Tempo médio de serviço:

$$\frac{1}{\mu} = 3 \frac{\text{minutos}}{\text{utilizador}} = \frac{1}{20} \frac{\text{horas}}{\text{utilizador}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 20 \frac{\text{utilizadores}}{\text{hora}}$$

Custo de cada servidor (fotocopiadora) por hora:

$$\frac{12}{40} \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$$

(a) Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1111 - \frac{0.1111 - 0.0526}{4} = 0.0965$$

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{33}{2 \times 20} = 0.825$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.0965(1.65)^2 0.825}{2!(1-0.825)^2} = 3.5387 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio duma pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.5387}{33} = 0.1072 \text{ horas} = 6.4 \text{ minutos.}$$

Tempo médio duma pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.1072 + 0.05 = 0.1572 \text{ horas} = 9.4 \text{ minutos.}$$

- (b) • Com o número de fotocopiadoras existente (duas), o custo do serviço é de $2 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.6 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.1572 \times 1.8 = 9.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $9.9 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$

- Com três fotocopiadoras ...

Número de servidores:

$$S = 3 \Rightarrow \text{Fila M/M/3}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1872 - \frac{0.1872 - 0.1460}{4} = 0.1769$$

$$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = \frac{33}{3 \times 20} = 0.55$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1769(1.65)^3 0.55}{3!(1-0.55)^2} = 0.3597 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio duma pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.7994}{33} = 0.0109 \text{ horas.}$$

Tempo médio duma pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0109 + 0.05 = 0.0609 \text{ horas.}$$

Com 3 fotocopiadoras, o custo do serviço é de $3 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.9 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0609 \times 1.8 = 3.6175 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.5175 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$

- Com quatro fotocopiadoras ...

Número de servidores:

$$S = 4 \Rightarrow \text{Fila M/M/4}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1953 - \frac{0.1953 - 0.1616}{4} = 0.1899$$

$$\rho = \frac{\lambda}{4\mu} = \frac{33}{4 \times 20} = 0.4125$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1899(1.65)^4 0.4125}{4!(1-0.4125)^2} = 0.0701 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio dum pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0701}{33} = 0.0021 \text{ horas.}$$

Tempo médio dum pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0021 + 0.05 = 0.0521 \text{ horas.}$$

Com 4 fotocopiadoras, o custo do serviço é de $4 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 1.2 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0521 \times 1.8 = 3.0962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.2962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.

- Com cinco fotocopiadoras ...

Número de servidores:

$$S = 5 \Rightarrow \text{Fila M/M/5}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.2014 - \frac{0.2014 - 0.1646}{4} = 0.1922$$

$$\rho = \frac{\lambda}{5\mu} = \frac{33}{4 \times 20} = 0.33$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização dum fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1922(1.65)^5 0.33}{5!(1-0.33)^2} = 0.0144 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio dum pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0144}{33} = 0.0004 \text{ horas.}$$

Tempo médio dum pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0004 + 0.05 = 0.0504 \text{ horas.}$$

Com 5 fotocopiadoras, o custo do serviço é de $5 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 1.5 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0504 \times 1.8 = 2.9938 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.4938 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.

- A quantidade de fotocopiadoras que minimiza o custo total da empresa é 4, com um custo de $4.2962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.

Problema 9

Taxa de chegada:

$$\lambda = \frac{60 \text{ chegadas}}{80 \text{ minuto}} = \frac{60^2 \text{ chegadas}}{80 \text{ hora}} = 45 \frac{\text{maquinas}}{\text{hora}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 1 \frac{\text{atendimento}}{\text{minuto}} = 60 \frac{\text{atendimentos}}{\text{hora}}$$

- Verificação das contas apresentadas no quadro:

Número médio de máquinas na fila:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 2.25 \text{ maquinas.}$$

Número médio de máquinas no sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3 \text{ maquinas.}$$

Tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{45}{60 \times (60 - 45)} = 0.05 \frac{\text{horas}}{\text{maquina}}.$$

Tempo médio de espera no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0667 \frac{\text{horas}}{\text{maquina}}.$$

Custo por dia dos funcionários = \$68.

Custo por dia de espera das máquinas = $W \times \lambda \times 8 \times 15 = \360

Custo total = \$428

- Com dois funcionários ...

Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = 0.75$$

$$P_0 = 0.4545$$

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = 0.375$$

Número médio de máquinas na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.4545(0.75)^2 0.375}{2!(1-0.375)^2} = 0.1227 \text{ maquinas.}$$

Tempo médio de uma máquina na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1227}{45} = 0.0027 \text{ horas.}$$

Tempo médio de uma máquina no sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0027 + \frac{1}{60} = 0.0194 \text{ horas.}$$

Custo por dia dos funcionários = $2 \times 68 = \$136$.

Custo por dia de espera das máquinas = $W \times \lambda \times 8 \times 15 = \104.7258

Custo total = $\$240.7258$

- Com três funcionários ...

Número de servidores:

$$S = 3 \Rightarrow \text{Fila M/M/3}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = 0.75$$

$$P_0 = 0.4706$$

$$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = 0.25$$

Número médio de máquinas na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.4706(0.75)^3 0.25}{3!(1-0.25)^2} = 0.0147 \text{ maquinas.}$$

Tempo médio de uma máquina na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0147}{45} = 0.0003 \text{ horas.}$$

Tempo médio de uma máquina no sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0003 + \frac{1}{60} = 0.0170 \text{ horas.}$$

Custo por dia dos funcionários = $3 \times 68 = \$204$.

Custo por dia de espera das máquinas = $W \times \lambda \times 8 \times 15 = \91.76475

Custo total = $\$295.7648$

A melhor opção é passar a ter dois funcionários no serviço de manutenção.