

António Carlos Pinto Magalhães

# Modelo de otimização para o problema do despacho económico



Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
outubro de 2012

António Carlos Pinto Magalhães

# Modelo de otimização para o problema do despacho económico



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Matemática*

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Pedroso  
Co-orientadora: Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Viana

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
outubro de 2012

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e irmão por todo o apoio que me deram e por me proporcionar a realização desta etapa.

Aos meus colegas, a amigos e familiares por todos os contributos que direta e indiretamente se transformaram em fontes de inspiração para realização desta tese. Agradeço também todo o companheirismo nos momentos menos bons.

Aos professores Ana Viana e João Pedro Pedroso deixo uma palavra de agradecimento por toda a orientação prestada e pelo crescimento a nível pessoal que me proporcionaram.



# Resumo

O problema do despacho económico é o de definir o nível de produção de um grupo de geradores eléctricos, satisfazendo a procura prevista de energia, a custo mínimo, e satisfazendo um conjunto de restrições técnicas dos geradores.

Tradicionalmente o custo de combustível no problema do despacho económico é modelado através de uma função quadrática. Mas na realidade os geradores apresentam características não-lineares e descontinuidades devido a efeitos secundários tais como o efeito do ponto de válvula, que obrigam a desenvolver técnicas de resolução sofisticadas, pouco eficientes.

Este trabalho consiste na criação de um algoritmo baseado num método de aproximação linear para a resolução do problema do despacho económico, tendo em conta o efeito do ponto de válvula. Inicialmente, considera-se que para cada unidade geradora, cada intervalo entre pontos de válvula é particionado em 10 partes iguais e calculam-se os respetivos limites inferior (aproximação por baixo) e superior (valor exato da função). Se o erro relativo entre os limites for menor do que uma tolerância dada, o algoritmo para retornando a solução ótima. Caso contrário, o número de partições entre pontos de válvula duplica, efetuando-se novamente todo o processo anteriormente descrito.

O algoritmo desenvolvido converge para a solução ótima anteriormente desconhecida para os casos de estudo apresentados. Com este algoritmo é também possível analisar se alguns dos métodos heurísticos descritos na literatura atingem a solução ótima.

**Palavra-chave:** PROBLEMA DO DESPACHO ECONÓMICO, SISTEMA DE ENERGIA, SELEÇÃO MÚLTIPLA, COMBINAÇÃO CONVEXA



# Abstract

The Economic Load Dispatch problem is the problem of allocating power generation between the operational generating units of a given power system in order to comply with the existing constraints and with the goal of minimizing the fuel costs.

Traditionally, the Economic Load Dispatch problem is modeled by a quadratic function. But, in fact, this problem presents non-linear characteristics and discontinuities because of secondary effects, such as the valve-point effect, requiring sophisticated techniques to solve the issue.

The development of this work consists of the creation of an algorithm based on a linear approximation method for solving the Economic Load Dispatch problem, considering the valve-point effect. Initially it is considered that, for each generating unit, each of its valves is partitioned into 10 equal parts and the respective lower and upper bounds are calculated. If the relative error between these bounds falls within a user-specified tolerance, the algorithm stops and returns the optimal solution. Otherwise, the number of partitions between valve point doubles restarting the process all over again.

The developed algorithm provides the optimal solution, previously unknown, to every case of study presented. With this algorithm is also possible to examine whether some of the heuristic methods described in the literature achieve the optimal solution or not.

**Keywords:** ECONOMIC LOAD DISPATCH PROBLEM, POWER SYSTEM, MULTIPLE SELECTION, CONVEX COMBINATION



# Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Tabelas	xi
Índice de Figuras	xiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivo da Tese . . . . .	2
1.3 Estrutura da Tese . . . . .	3
<b>2 Descrição do Problema</b>	<b>5</b>
2.1 Problema do despacho económico . . . . .	5
2.2 Variantes do problema . . . . .	8
2.3 Formulação do problema do despacho económico . . . . .	9
<b>3 Método de aproximação linear por partes</b>	<b>13</b>
3.1 Formulação . . . . .	13
3.1.1 Formulação com a combinação convexa . . . . .	15
3.1.2 Formulação com Seleção Múltipla . . . . .	18
3.2 Aproximações lineares sucessivas . . . . .	22
3.2.1 Componentes do algoritmo . . . . .	22
3.2.2 Resumo do algoritmo em pseudocódigo e num fluxograma . . . . .	33
<b>4 Análise dos Resultados Computacionais</b>	<b>35</b>
4.1 Métodos utilizados para efetuar as comparações . . . . .	35
4.2 Apresentação e análise dos resultados computacionais . . . . .	36
<b>5 Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>49</b>
Referências	51



# Lista de Tabelas

4.1	Métodos utilizados na comparação com o método implementado . . . . .	35
4.2	Dados referentes ao sistema com 3 unidades geradoras . . . . .	36
4.3	Melhor resultado obtido pelo algoritmo proposto para o caso 1 . . . . .	37
4.4	Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 1 . . . . .	37
4.5	Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 1 . . . . .	38
4.6	Dados referentes ao sistema com 13 unidades geradoras . . . . .	39
4.7	Melhores resultados obtidos pelo algoritmo proposto para as duas instâncias do caso 2. . . . .	40
4.8	Alterações para a representação de outra solução ótima para caso de estudo 2	40
4.9	Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 2 . . . . .	41
4.10	Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 2 . . . . .	41
4.11	Dados referentes ao sistema com 40 unidades geradoras . . . . .	45
4.12	Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 3 . . . . .	45
4.13	Melhor resultado obtido pelo algoritmo proposto para o caso 3 . . . . .	46
4.14	Alterações para a representação de outra solução ótima para caso de estudo 3	46
4.15	Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 3 . . . . .	47



# Lista de Figuras

2.1	Fases de resolução para um problema de escalonamento e pré-despacho . . . .	7
2.2	N unidades geradoras comprometidas a produzir a carga $P_{load}$ . . . . .	7
2.3	Função de custos com efeito de ponto válvula e zonas de operação proibida .	10
2.4	Função de custos com e sem despacho efeito do ponto de válvula . . . . .	12
3.1	Aproximação linear por partes de $f(x)$ . . . . .	14
3.2	Uma função convexa e a combinação convexa de dois pontos . . . . .	15
3.3	Aproximação de uma função não convexa através de funções lineares por partes	17
3.4	Formulação com seleção múltipla para representar uma função não convexa através de segmentos lineares por partes . . . . .	19
3.5	Aproximação de uma função não convexa através de funções lineares por partes	21
3.6	Função do custo de combustível correspondente ao exemplo . . . . .	26
3.7	Função do custo de combustível correspondente ao exemplo com a repre- sentação dos pontos da aproximação . . . . .	27
3.8	Representação do valor UB na função original . . . . .	31
3.9	Representação do erro para o caso $n=2$ . . . . .	32
3.10	Fluxograma do algoritmo proposto . . . . .	34
4.1	Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso 1	38
4.2	Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 2 com $P^D=1800\text{MW}$ . . . . .	42
4.3	Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 2 com $P^D=2520\text{MW}$ . . . . .	42
4.4	Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 3 . . . . .	47



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Ao longo dos últimos anos, têm vindo a ser desenvolvidos inúmeros estudos acerca do problema do despacho económico, existindo dois tipos de modelação do problema nesses estudos: uma modelação aproximada e outra mais precisa.

Para a modelação mais simples, onde a função de custo é aproximada através de uma função quadrática, para além de métodos heurísticos existem algoritmos exatos para a resolução do problema que conseguem determinar a solução ótima.

No caso da modelação mais precisa, onde é considerado o efeito do ponto de válvula existente na função de custo de combustível, os métodos desenvolvidos até ao momento consistem em métodos heurísticos que apenas determinam um ótimo local, podendo não coincidir com a solução ótima.

A motivação para o desenvolvimento desta tese é a criação de um algoritmo exato, baseado em modelos matemáticos, para a resolução do problema do despacho económico considerando o efeito do ponto de válvula, ou seja, criar um algoritmo que possa fornecer a solução ótima associada à modelação mais precisa do problema.

## 1.2 Objetivo da Tese

O problema do despacho económico é um problema importante na otimização da operação de um sistema de energia, e tem como objetivo definir os níveis de produção entre as unidades operacionais, de forma a que restrições impostas sejam satisfeitas e os custos associados minimizados.

O problema pode ser modelado de diferentes formas. No caso em que é modelado através de uma aproximação quadrática a sua resolução torna-se mais simples, mas ao mesmo tempo ignoram-se características importantes do problema. Para que este seja modelado de forma mais precisa é necessário ter em conta o efeito do ponto de válvula existente no custo de combustível e consequentemente utilizar técnicas sofisticadas para a sua resolução.

Ao longo dos anos têm sido estudadas diferentes técnicas para a resolução do problema do despacho económico, mas estas por vezes revelam-se incapazes de fornecer uma solução ótima, ficando presas num ótimo local.

O objetivo da elaboração desta tese é desenvolver um algoritmo exato baseado num método de aproximação linear para a resolução do problema do despacho económico, modelando a presença do efeito do ponto de válvula na função de custo de combustível.

O algoritmo desenvolvido consiste em, para cada unidade geradora, dada a função de custo de combustível, particionar cada uma das suas válvulas em 10 partes iguais, calculando-se o limite inferior obtido através de uma aproximação linear por partes e o limite superior que corresponde ao valor exato da função numa solução admissível. Se o erro relativo entre os limites for menor que uma tolerância dada, o algoritmo para retornando a solução ótima. Caso contrário, o número de partições em cada válvula duplica efetuando-se novamente todo o processo anteriormente descrito. Por outras palavras, o algoritmo efetua sucessivas aproximações à função de custo considerando o efeito do ponto de válvula até que a solução ótima seja encontrada.

Para finalizar, dado que o algoritmo desenvolvido fornece uma solução que tende para o ótimo do problema do despacho económico, consideram-se três casos de estudo e determinam-se as respetivas soluções ótimas. Após a obtenção do valor ótimo, para cada um dos casos consideram-se alguns métodos heurísticos existentes na literatura e analisa-se quais destes conseguem atingir a solução ótima. Os três casos de estudo são um sistema de energia com 3, 13 e 40 unidades geradoras.

## 1.3 Estrutura da Tese

A estrutura desta tese, depois deste capítulo introdutório, passa pelos capítulos 2, 3, 4 e 5.

O capítulo 2 diz respeito à descrição do problema e é constituído por três secções. Na primeira secção apresenta-se a descrição do problema em estudo, o problema do despacho económico, uma breve descrição do problema de escalonamento de geradores dado que estes dois problemas estão interligados. Na segunda secção apresentam-se algumas variantes do problema do despacho económico e, por último, na terceira secção a formulação matemática do problema em estudo.

No capítulo 3 serão apresentadas as componentes teóricas necessárias para a elaboração do algoritmo, seguidas da descrição do algoritmo desenvolvido. Sendo assim, na secção 3.1 são apresentados dois tipos de formulação linear por partes. Na secção 3.2 é apresentada uma descrição detalhada do algoritmo desenvolvido, onde primeiramente são explicados todos os passos do raciocínio que compõem o algoritmo desenvolvido, seguidos de um pseudocódigo e de um fluxograma ilustrativo do algoritmo.

A informação contida no capítulo 4 refere-se aos resultados computacionais obtidos neste trabalho. Este capítulo é constituído por duas secções: na primeira secção, encontra-se um pequeno resumo para cada método encontrado na literatura, que irá ser avaliado e comparado com o algoritmo desenvolvido. A segunda secção corresponde à apresentação dos resultados obtidos através do método desenvolvido e à análise dos métodos anteriormente referidos.

Para finalizar, no Capítulo 5 encontram-se as conclusões finais do trabalho desenvolvido e os possíveis trabalhos futuros, que possam ser realizados por forma a dar continuidade a este projeto.



# Capítulo 2

## Descrição do Problema

Este capítulo consiste na descrição do problema do despacho económico que será estudado ao longo deste trabalho e é constituído por três secções. Primeiramente, na secção 2.1 será dada ênfase ao efeito do ponto de válvula existente na função de custos de combustível. Será também apresentada uma breve descrição do problema do escalonamento de geradores. Isto porque, em muitos casos, a resolução de um modelo de otimização nos sistemas de energia é constituída por duas fases: a primeira fase trata do problema do escalonamento de geradores e a segunda fase do problema do despacho económico. Na segunda secção são referidas algumas variantes do problema em estudo e, por último, na secção 2.3 apresenta-se a formulação matemática do problema do despacho económico.

### 2.1 Problema do despacho económico

O despacho económico pode-se definir como sendo um processo de atribuição de níveis de produção às unidades de produção de energia em operação, de tal forma que, a carga do sistema seja inteiramente satisfeita da forma mais económica possível. Sendo assim, o objetivo deste problema é minimizar os custos de geração de energia associados ao consumo de combustível.

Usualmente, num sistema de energia são implementados múltiplos geradores com o intuito de produzir a energia suficiente, para responder às necessidades de carga impostas pelos consumidores. Cada central tem custos operacionais incrementados de combustível e manutenção e, ainda, custos fixos associados à própria estação. Estes últimos custos podem ser muito relevantes no caso de se tratar por exemplo, de uma central de energia nuclear. A explicação de outros fatores associados a este tipo de problema, tais como as perdas de transmissão e as mudanças sazonais associadas às centrais hidroeléctricas, tornam toda a análise do problema complicada.

A maioria dos estudos efetuados para a resolução do problema do despacho económico, modelam a função de custo de combustível das unidades geradoras térmicas de uma forma que simplifica o problema e facilita a otimização, através de uma função quadrática. Mas, na

prática, existem determinados efeitos produzidos pela abertura de cada válvula de emissão que controla o calor fazendo com que existam variações na curva representativa da função de custo de combustível. Estas variações designam-se por efeito do ponto de válvula e fazem com que em rigor não seja muito apropriado utilizar uma função quadrática para representar a função dos custos de combustível.

Assim sendo, devido ao efeito do ponto de válvula, a curva de custo de combustível contém não-linearidades e descontinuidades. A forma mais precisa de a representar é através da junção da função quadrática com uma função periódica (a expressão matemática será apresentada na secção 2.3).

É importante referir que, para que o problema do despacho económico possa distribuir a energia total necessária pelas unidades geradoras operacionais de modo a minimizar os custos, é necessário que estas sejam previamente selecionadas segundo dadas restrições. Para isso, é necessário planear, previamente, o escalonamento de geradores, definindo as unidades geradoras que estarão operacionais num dado período de tempo.

Este problema consiste em selecionar quais os geradores elétricos que estão ligados/ desligados ao longo de um horizonte de planeamento (com duração de 1 dia a 2 semanas, geralmente divididos em períodos de 1 hora) de maneira a garantir os níveis de produção necessários, para os quais os custos de operação deverão ser minimizados. As unidades escalonadas (ligadas) devem satisfazer a carga do sistema prevista e os requisitos de reserva, a um custo operacional mínimo, estando sujeitas a um grande conjunto de restrições tecnológicas. O modelo clássico para o problema do escalonamento e pré-despacho de unidades térmicas (em inglês “unit commitment problem”, UCP) considera que as unidades geradoras são geridas centralmente de uma forma global, e tem como objetivo minimizar o custo total de produção, ao longo do horizonte de planeamento. Esse custo é dado pela soma dos custos de combustível (sendo a minimização destes custos o problema a tratar neste trabalho), de arranque e paragem (Viana et al., 2003).

Posto isto, o método de resolução do UCP consiste em duas fases, apresentadas na Figura 2.1. Primeiramente, para cada período de tempo, o problema de escalonamento de geradores vai decidir quais as unidades geradoras que vão estar ligadas/ desligadas. Na segunda fase, o problema é dividido em  $T$  subproblemas, em que  $T$  é o horizonte do planeamento. Para cada subproblema (isto é, para cada período de tempo) calculam-se os níveis de produção para cada unidade geradora que esteja operacional, de forma a satisfazer a carga prevista. Dada a dificuldade em resolver estes problemas de forma integrada, eles são muitas vezes resolvidos em duas fases: no planeamento é utilizada uma aproximação do modelo de despacho económico que é, posteriormente, já com as unidades escalonadas, resolvido da forma mais precisa.

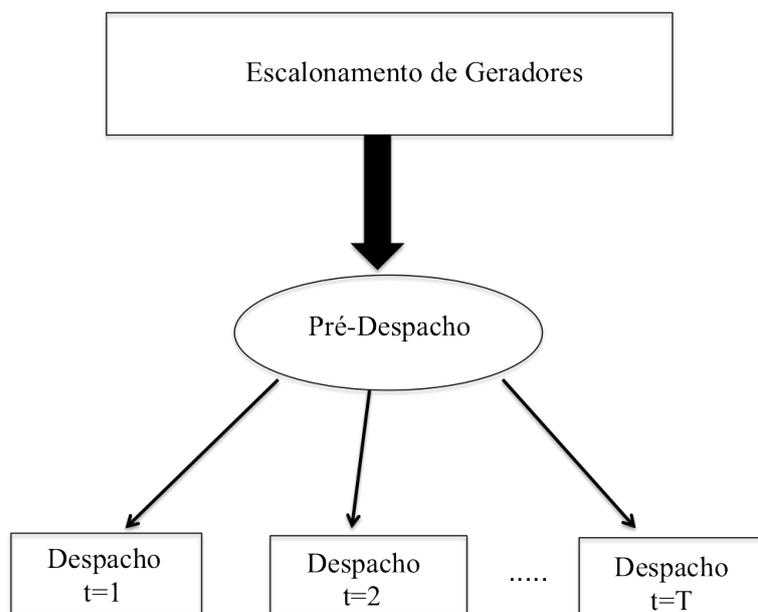


Figura 2.1: Fases de resolução para um problema de escalonamento e pré-despacho

Dado um dos subproblemas obtidos através da primeira fase, considerando as unidades geradoras que estão operacionais nesse subproblema (Wood and Wollenberg, 1996). Considera-se que as  $N$  unidades geradoras térmica estão ligadas a um único barramento que recebe uma carga  $P_{load}$  (carga prevista). A entrada para cada unidade, representada como  $F_i$ , representa a taxa de custo da unidade. A saída de cada unidade,  $P_i$ , é a potência eléctrica gerada por aquela unidade em particular. A taxa do custo total do subproblema é, evidentemente, a soma dos custos de cada uma das unidades individuais. A restrição essencial para a operação deste sistema é que a soma da potência gerada deve ser igual à carga prevista. Todo este processo pode ser visualizado na figura 2.2.

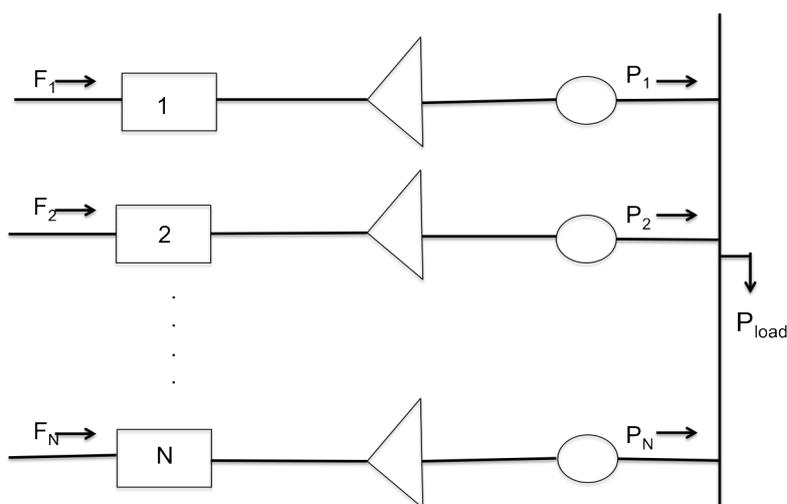


Figura 2.2:  $N$  unidades geradoras comprometidas a produzir a carga  $P_{load}$

O problema do despacho económico é um problema de optimização que pode ser resolvido através de um grande número de métodos existentes. Nos últimos anos, foram desenvolvidos alguns métodos utilizando programação matemática. Para estes a função de custo de combustível de cada gerador é aproximadamente representada por uma função quadrática, ignorando o efeito do ponto de válvula. Alguns dos métodos utilizados são: o método iterativo lambda (Chen and Wang, 1993), o método do gradiente (Dudu et al., 1972), a programação linear (Jabr et al., 2000), programação quadrática (Fan and Zhang, 1998) e a programação dinâmica (Pothiya et al., 2007). No entanto, estes métodos ficam presos num ótimo local e, conseqüentemente, por vezes não são capazes de fornecer uma solução ótima. Para além dos métodos referidos anteriormente têm vindo a ser recentemente desenvolvidos algoritmos de pesquisa estocástica como otimização de nuvem de partículas (PSO) (Jeyakumar et al., 2006), algoritmo genético (GA) (Alsumait et al., 2010) e (Chiang, 2005), pesquisa tabu (TS) (Lin et al., 2002), programação evolutiva (EP) (Sinha et al., 2003), arrefecimento simulado (SA) (Wong and Fong, 1993) e os algoritmos de evolução diferencial (DE) (Nomana and Iba, 2008). Estes algoritmos têm sido utilizados com sucesso para a resolução do problema sem nenhuma restrição sobre as suas características não convexas e não lineares da função de custo de combustível. Tal como nos casos anteriores os métodos de pesquisa acima mencionados determinam o ponto ótimo local, que pode não coincidir com a melhor solução. Em cada um destes algoritmos existem desvantagens, como por exemplo, o GA sofre de convergência prematura e, ao mesmo tempo, os esquemas de codificação e decodificação essenciais na técnica GA demoram mais tempo para atingir a convergência; no algoritmo SA há dificuldade em ajustar os parâmetros de controlo relacionados com o esquema de arrefecimento e pode ser muito lento quando aplicado ao problema; e, por último, no PSO e no DE, a convergência prematura pode prender o algoritmo num ótimo local, o que pode reduzir a sua capacidade de otimização quando utilizada para resolver o problema do despacho económico.

## 2.2 Variantes do problema

Neste trabalho é abordada a versão estática do problema do despacho económico. Ou seja, o caso onde se considera um intervalo de tempo simples. Existem, no entanto, outras variantes do problema que refletem diferentes restrições e características que podem ser consideradas para o problema. Por exemplo, a função objetivo do problema não ser apenas constituída pelo custo de combustível, mas também pelos custos de emissão e reserva (Hooshmand et al., 2012).

No que diz respeito às restrições, que podem ser adicionadas a este problema, estas podem ser: limites nas taxas de tomada e deslastre de carga (restrições de rampa), zonas proibidas, perdas de transmissão, limites de reserva, entre outras (Amjady and Sharifzadeh, 2010).

## 2.3 Formulação do problema do despacho económico

O problema do despacho económico é considerado como função essencial na operação de um sistema de energia. Pode ser descrito como um processo de otimização com o objetivo de minimizar os custos, sujeitos a restrições de operação do sistema: equilíbrio de carga, limites de geração, etc, apresentado em (Vlachogiannis and Lee, 2010) e (Zare et al., 2012)

### A. Restrição de Equilíbrio de carga

Tendo em conta o critério de equilíbrio de carga, esta restrição irá garantir o equilíbrio entre a produção e a carga prevista ( $P^D$ ):

$$\sum_{i=1}^N P_i - P^D = 0 \quad (2.1)$$

onde  $P_i$  é a potência gerada pelo gerador  $i$ ,  $P^D$  é a carga total (em MW) e por último  $N$  representa o número total de geradores no sistema.

### B. Limites de Geração

A potência produzida por cada uma das unidades geradoras tem de estar compreendida entre os limites máximos e mínimos. Esta restrição é representada por:

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (2.2)$$

onde  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$  são os limites inferiores e superiores de cada unidade  $i$ , respetivamente.

O problema do despacho económico em determinados estudos torna-se mais complexo (Amjady and Sharifzadeh, 2010),(Coelho and Mariani, 2008), pois, para além das restrições anteriormente apresentadas são consideradas as seguintes:

**1) Perdas de transmissão:** Quando são consideradas perdas de transmissão a carga produzida por uma unidade geradora tem de satisfazer a carga a produzir  $P^D$  e as perdas de transmissão  $P^L$ . A restrição do equilíbrio do sistema passa a ser:

$$\sum_{i=1}^N P_i - P^L - P^D = 0$$

Por sua vez  $P^L$  é dado por:

$$P^L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_i B_{i,j} P_j + \sum_{i=1}^N B_{0,i} P_i + B_{0,0}$$

onde  $B_{i,j}$  são os coeficientes de fluxo de energia.

**2) Zonas de operação proibidas das unidades geradoras:** Na prática as unidades geradoras têm zonas de operação proibidas (POZ): se um gerador trabalhar nessas zonas, algumas falhas podem ocorrer para as máquinas e acessórios, tais como bombas ou caldeiras. Portanto, para evitar esses problemas, o limite de geração de energia deve ser alterado de modo que satisfaça a restrição POZ. A figura 2.3 apresenta uma função de custo com zonas de operação proibidas, incluindo descontinuidades nas características de entrada-saída.

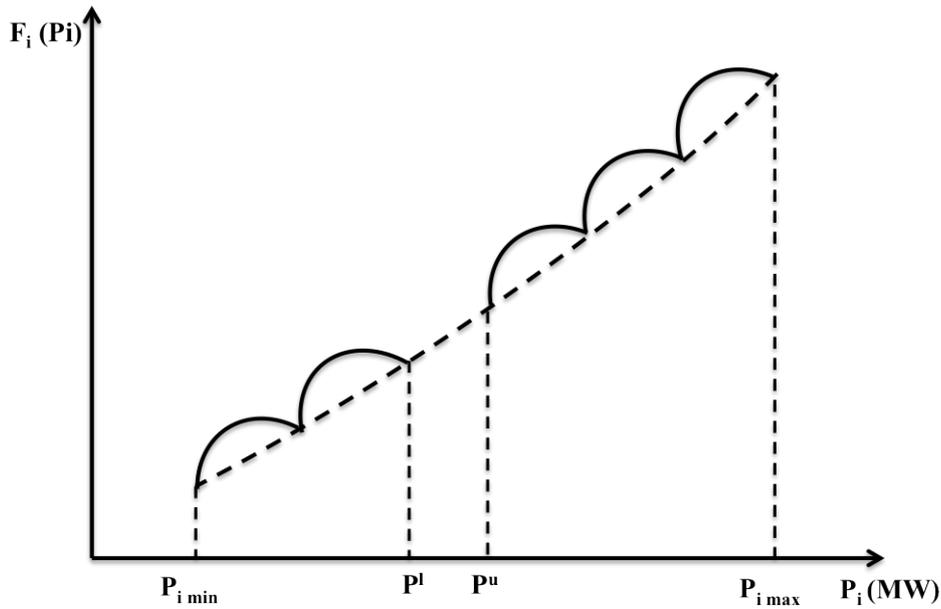


Figura 2.3: Função de custos com efeito de ponto válvula e zonas de operação proibida

As restrições POZ pode ser modeladas como se segue:

$$\begin{aligned} P_i^{min} &\leq P_i \leq P_i^{lower_1} \text{ ou} \\ P_i^{upper_{j-1}} &\leq P_i \leq P_i^{lower_j}, \quad j = 2, \dots, np_i \text{ ou} \\ P_i^{upper_{np_i}} &\leq P_i \leq P_i^{max}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $P_i^{lower_j}$  e  $P_i^{upper_j}$  são os limites inferior e superior da  $j$ -ésima zona proibida da unidade geradora  $i$  e  $np_i$  é o número de zonas proibidas da unidade  $i$ .

**3) Limites de rampa:** A potência produzida por um gerador  $i$  no período  $t$  é limitada pela produzida no período  $t-1$ . Essa limitação pode ser expressa da seguinte forma:

$$P_i^0 - P_i \leq D_i \quad (2.4)$$

$$P_i - P_i^0 \geq U_i \quad (2.5)$$

onde  $D_i$  e  $U_i$  são respetivamente o limite taxa de tomada e deslastre de carga do  $i$ -ésimo gerador e  $P_i^0$  é o ponto de operação anterior do  $i$ -ésimo gerador.

### C. Função objetivo

O problema do despacho económico tem como objetivo minimizar o custo total de combustível das unidades geradoras e representa-se pela seguinte equação:

$$\min_{P_i} F_c = \sum_{i=1}^N F_i(P_i) \quad (2.6)$$

onde  $F_i(P_i)$  é a função de custo de combustível para cada unidade geradora  $i$  com nível de produção  $P_i$ .

Existem diversas situações em que esta função objetivo sofre umas pequenas alterações. Dentro dessas situações estão as que serão apresentadas de seguida:

**1)** Uma forma de simplificar o problema do despacho económico, é considerar uma função objetivo  $F_i(P_i)$  como sendo uma função quadrática (Coelho and Mariani, 2008),(Vlachogiannis and Lee, 2010). Sendo assim, nesses casos a função objetivo é dada por:

$$F_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (2.7)$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são coeficientes do custo de combustível da unidade  $i$ .

**2)** No entanto, noutras situações as entradas e saídas possuem características de não linearidades e de descontinuidades devido a cargas pontuais da válvula, como ilustrado na figura

2.4.

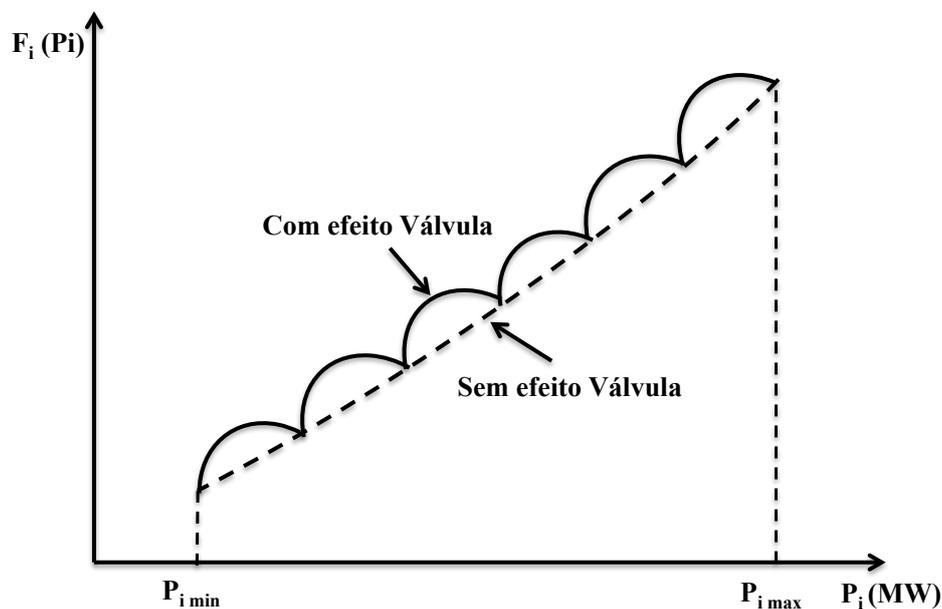


Figura 2.4: Função de custos com e sem despacho efeito do ponto de válvula

O efeito do ponto de válvula pode ser modelado através da adição do valor absoluto de uma função sinusoidal a uma função de custo quadrático. Sendo assim a função objetivo é dada pela seguinte expressão:

$$F_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + |e_i \sin(f_i(P_i^{\min} - P_i))| \quad (2.8)$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são os coeficientes do custo de combustível da unidade  $i$ , como dito anteriormente e,  $e_i$  e  $f_i$  descrevem o efeito do ponto de válvula.

# Capítulo 3

## Método de aproximação linear por partes

Ao longo deste trabalho vão ser utilizadas duas formulações diferentes para a aproximação linear por partes de funções não-lineares. Na primeira secção deste capítulo, irão ser descritos os dois tipos de formulação (Pedroso et al., 2012): a formulação com a combinação convexa de um conjunto de pontos, utilizando uma restrição associada a um conjunto especial ordenado do tipo II (em inglês: “special ordered set of type II” (Gurobi Optimization, Inc., 2012)) e a formulação com seleção múltipla, deduzida através de um modelo inicial. Na secção 3.2 será apresentada a descrição do algoritmo desenvolvido neste trabalho para resolução da aproximação, fazendo-se uma descrição das componentes e de todo o processo teórico envolvido.

### 3.1 Formulação

Em muitos dos casos para se modelar a realidade de forma apropriada, não podem ser utilizadas apenas funções lineares pois, na verdade, essas funções são muitas vezes utilizadas apenas para simplificar e poder resolver certas situações concretas. Quando não é possível a resolução do modelo de otimização de forma adequada, utilizando apenas funções lineares, é necessário recorrer a otimização não-linear. Para isso, tem-se como possibilidade a utilização de um resolvidor que possa tratar diretamente modelos não lineares, mas estes são em muitos dos casos menos robustos e menos eficientes do que os resolvidores lineares.

No caso de problemas em que as funções usadas são funções não lineares, a otimização linear inteira mista não suporta diretamente a solução do problema, mas muitas das vezes consegue-se modelar a situação se for efetuada a aproximação da função não linear através de funções lineares por partes. Isto é, em vez de utilizar a função não-linear original, utiliza-se um conjunto de linhas retas consecutivas. Estes problemas para o caso em que as funções só têm uma variável, e para o caso de funções separáveis, são particularmente simples de resolver. Nesta secção vamos analisar duas abordagens.

Considera-se uma variável independente  $x$ , os limites  $L$  e  $U$ , tais que  $L \leq x \leq U$ , e uma função  $f(x)$  que expressa a relação não linear. O intervalo  $[L, U]$  é dividido em  $K$  segmentos  $[a_k, a_{k+1}]$ , para  $k = 0, \dots, K-1$ , onde  $a_k$ , ( $k = 0, \dots, K$ ) é uma sequência de pontos que satisfaz a seguinte condição:

$$L = a_0 < a_1 < \dots < a_{K-1} < a_K = U. \quad (3.1)$$

Para cada  $a_k$  a função  $f$  é então avaliada com:

$$b_k = f(a_k), \quad k = 0, \dots, K. \quad (3.2)$$

A função  $f$  para cada segmento  $[a_k, a_{k+1}]$  é aproximada por um segmento que une os pontos  $[a_k, b_k]$  e  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ , como se pode observar na figura 3.1.

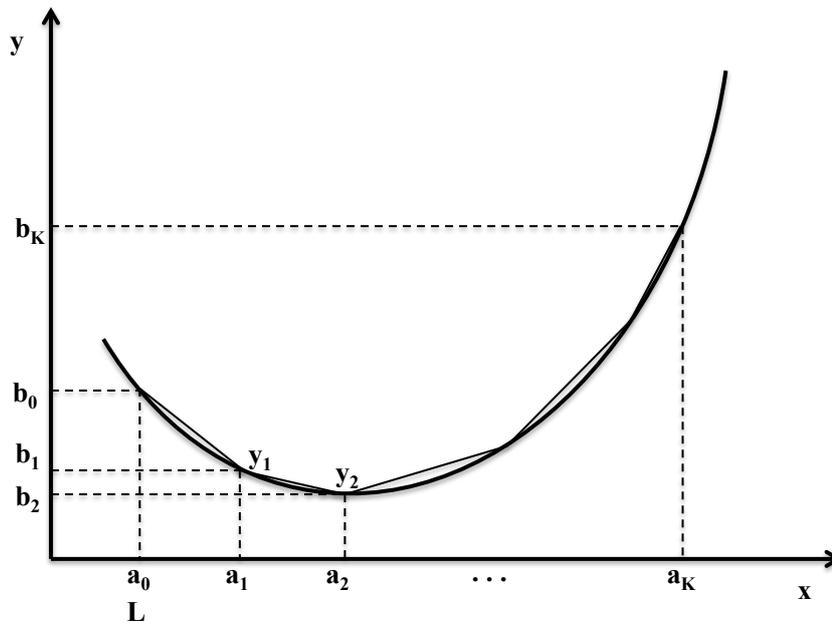


Figura 3.1: Aproximação linear por partes de  $f(x)$

Para as formulações que serão apresentadas ao longo desta secção são necessárias as seguintes definições:

**Definição 1:** • Um conjunto  $S$  é convexo se, e só se, o segmento de reta que une qualquer par de pontos em  $S$  está inteiramente contido em  $S$ .

**Definição 2:** • Uma função  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é convexa num conjunto convexo  $S$  se, e só se, para qualquer  $p \in S$  e  $q \in S$ ,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)q) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(q) \quad (3.3)$$

para  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

• Uma função  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é côncava num conjunto convexo  $S$  se, e só se, para qualquer  $p \in S$  e  $q \in S$ ,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)q) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(q) \quad (3.4)$$

para  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

### 3.1.1 Formulação com a combinação convexa

Nesta subsecção será apresentada a formulação para as funções convexas, uma vez que é através desta que se pode obter a formulação para funções não convexas.

A formulação apresentada é aplicada quando o problema tem como objetivo a minimização de uma função convexa  $f$  (como se pode verificar na figura 3.2). Para o caso em que o objetivo do problema é a maximização de uma função côncava, pode ser utilizada uma aproximação equivalente.

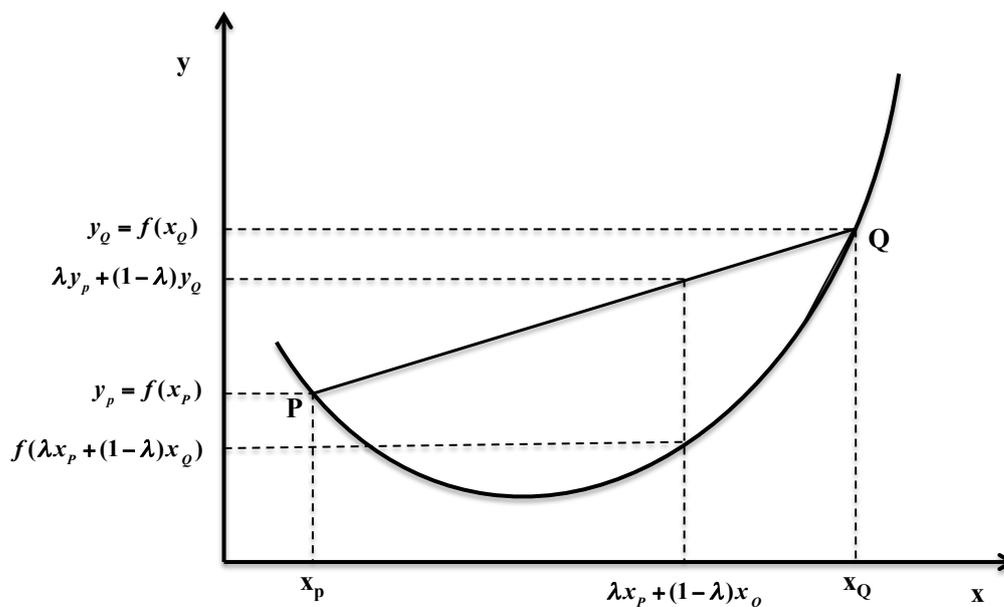


Figura 3.2: Uma função convexa e a combinação convexa de dois pontos

Ao considerar-se qualquer ponto  $x$  do segmento  $PQ$ , este pode ser representado por uma combinação convexa dos dois pontos extremos correspondentes:

$$x = \lambda x_P + (1 - \lambda)x_Q$$

$$y = \lambda y_P + (1 - \lambda)y_Q$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Com isto, ao substituir-se  $\lambda$  por  $w_k$  e  $1 - \lambda$  por  $w_{k+1}$ , pode ser escrito o ponto cuja abcissa está entre  $[a_k, a_{k+1}]$  da seguinte forma:

$$x = a_k w_k + a_{k+1} w_{k+1}$$

$$w_k + w_{k+1} = 1$$

$$w_k, w_{k+1} \geq 0$$

e para o intervalo  $a_k \leq x \leq a_{k+1}$  a aproximação linear de  $f(x)$  é dado por:

$$f(x) \approx b_k w_k + b_{k+1} w_{k+1}, \quad w_{k+1} \geq 0$$

Aplicando agora a formulação não apenas para um segmento, mas sim para o intervalo entre  $L$  e  $U$  que se divide em  $K$  segmentos (figura 3.3), a linha de referência que localiza o valor da abcissa pode ser escrita por:

$$X = \sum_{k=0}^K a_k w_k \tag{3.5}$$

e a ordenada correspondente à aproximação do valor de  $f(x)$  é determinada através de:

$$F = \sum_{k=0}^K b_k w_k. \tag{3.6}$$

Através da linha de convexidade limita-se o valor das variáveis  $w_k$ , de modo que as variáveis forcem  $X$  e  $F$  a serem uma combinação convexa entre dois pontos  $[a_k, b_k]$  e  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ , para algum  $k$ , em que  $0 \leq k \leq K$ :

$$w_k \geq 0, \quad \forall k = 0, \dots, K \quad (3.7)$$

$$\sum_{k=0}^K w_k = 1. \quad (3.8)$$

Essas restrições garantem também que  $a_0 \leq X \leq a_K$  e  $b_0 \leq Y \leq b_K$ .

Para que a abordagem acima mostrada seja válida, é necessário assegurar que no máximo dois valores de  $w_k$  adjacentes sejam diferentes de zero, de maneira a que a combinação convexa leve a um ponto que está sobre a reta que une os dois pontos consecutivos. Para o caso em que a formulação consiste em minimizar uma função convexa por partes lineares, o mínimo pode sempre ser apresentado como uma combinação convexa de dois pontos consecutivos  $k, k + 1$ , e por isso a propriedade de que é necessário assegurar no máximo dois valores de  $w_k$  adjacentes diferentes de zero é assegurada. No caso de minimizar funções não convexas é necessário assegurar que se utiliza apenas a combinação convexa de pontos consecutivos, para o que é importante introduzir variáveis binárias e restrições adicionais. Uma outra alternativa, é a utilização de um comando do *Gurobi* (Gurobi Optimization, Inc., 2012) que garante a propriedade anterior, declarando que o conjunto de variáveis  $w_k$  forma um chamado conjunto especial ordenado de restrições de tipo II (SOS2):

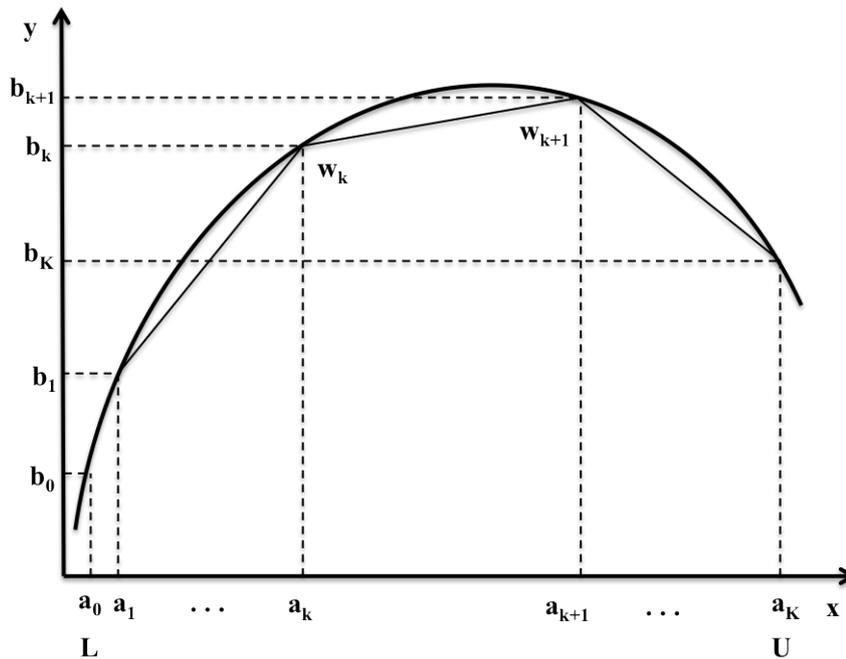


Figura 3.3: Aproximação de uma função não convexa através de funções lineares por partes

```
model.addSOS(GRB.SOS_TYPE2, [w[k] for k in range(K+1)])
```

Na otimização, um conjunto especial ordenado é um conjunto ordenado de variáveis, utilizadas como uma forma adicional de especificar as condições de integralidade num modelo de otimização.

As variáveis  $w_k$  anteriormente apresentadas passam a ser designadas por um conjunto especial ordenado de tipo II,  $w_1, w_2, \dots, w_K$ . Nesse conjunto de variáveis não mais do que duas variáveis adjacentes podem ser não nulas numa solução viável. Isto é, se um  $w_k$  for escolhido para estar na base apenas  $w_{k-1}$  ou  $w_{k+1}$  pode estar na base, enquanto que todas as outras variáveis tem de ser não básicas (e portanto fixadas a zero).

Os conjuntos especiais ordenados (SOS2s) foram introduzidos para tornar mais fácil a determinação de soluções ótimas globais de problemas, contendo aproximações lineares para uma função não-linear de um único argumento.

### 3.1.2 Formulação com Seleção Múltipla

Considera-se uma função não convexa  $f(x)$ , cujo o domínio é limitado por  $L \leq x \leq U$ . Como já foi dito anteriormente, será considerada uma divisão do intervalo  $[L, U]$  em  $K$  segmentos, que são dados por  $[a_k, a_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$ , onde as imagens correspondentes no eixo das ordenadas são dadas por  $b = f(a_k)$  para  $k = 0, \dots, K$ ; a função  $f(x)$  será aproximada através de funções lineares por partes, através de retas entre pontos consecutivos  $[a_k, b_k]$  e  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ , para cada segmento  $[a_k, a_{k+1}]$ . Na formulação com a seleção múltipla é apresentada uma equação que descreve a linha reta correspondente a cada segmento  $k$ , e para isso começa-se por calcular a inclinação de cada reta, como se pode verificar na figura 3.4 e é determinada por:

$$c_k = \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)},$$

e a sua interseção no eixo dos  $y$  é dada por:

$$d_k = b_k - c_k a_k.$$

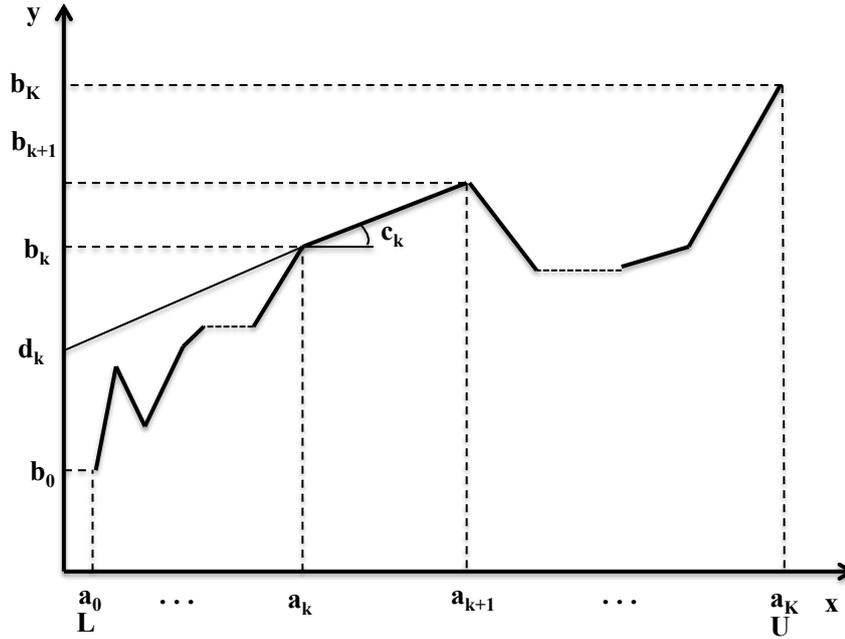


Figura 3.4: Formulação com seleção múltipla para representar uma função não convexa através de segmentos lineares por partes

Para um dado valor da abscissa  $x$ , o valor da ordenada correspondente a cada uma das linhas retas será dado por  $y = c_k x + d_k$ . No entanto, é necessário garantir que apenas um segmento  $k$  pode ser selecionado; para isso é criada uma variável binária  $z_k$  que terá valor 1 se o segmento  $k$  é selecionado, ou 0 caso contrário. Considerando, então, que o segmento  $k$  é selecionado, a abscissa  $w_k$  tem de estar no intervalo  $[a_k, a_{k+1}]$  e a sua ordenada será dada por  $d_k + c_k w_k$ . Por parte de todos os outros segmentos não pode haver nenhuma contribuição nem para a abscissa nem para a ordenada. Sendo assim, pode-se resumir toda esta formulação no seguinte modelo:

$$a_k z_k \leq w_k \leq a_{k+1} z_k, \quad \forall k = 0, \dots, K-1 \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} z_k = 1 \quad (3.10)$$

$$X = \sum_{k=0}^{K-1} w_k \quad (3.11)$$

$$F = \sum_{k=0}^{K-1} (d_k z_k + c_k w_k). \quad (3.12)$$

Uma outra forma de aproximação através da formulação com seleção múltipla pode ser deduzida através do modelo apresentado acima. De forma idêntica, considera-se uma

variável binária  $z_k$  que tem a mesma finalidade que a anterior, ou seja, é utilizada para garantir que apenas se seleciona um segmento  $k$ . No caso da variável real, em vez de considerar uma variável  $w_k$  entre  $a_k z_k \leq w_k \leq a_{k+1} z_k$ , considera-se uma variável  $s_k$  que está entre  $0 \leq s_k \leq z_k$ , e através de algumas transformações, verifica-se que  $w_k$  pode ser escrito à custa do  $s_k$ , como apresentado de seguida:

$$\begin{aligned} a_k z_k &\leq w_k \leq a_{k+1} z_k \\ \Leftrightarrow 0 &\leq w_k - a_k z_k \leq a_{k+1} z_k - a_k z_k \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{w_k - a_k z_k}{a_{k+1} - a_k} \leq z_k \end{aligned}$$

Sabendo que  $0 \leq s_k \leq z_k$ , pode-se então encontrar a expressão da variável  $w_k$  através de:

$$\begin{aligned} \frac{w_k - a_k z_k}{a_{k+1} - a_k} &= s_k \\ \Leftrightarrow w_k - a_k z_k &= (a_{k+1} - a_k) s_k \\ \Leftrightarrow w_k &= a_k z_k + (a_{k+1} - a_k) s_k \end{aligned}$$

Sendo assim, dada a nova expressão de  $w_k$ , a linha de referência passa a ser dada por:

$$X = \sum_{k=0}^{K-1} (a_k z_k + (a_{k+1} - a_k) s_k)$$

De uma forma análoga efetuando as substituições de  $d_k$ ,  $c_k$  e  $w_k$  pelas respetivas expressões e manipulando a linha de função  $F$ , apresentada pela Eq. 3.12, obtém-se uma outra forma de representar a linha de função. Todos os passos realizados nessa dedução são apresentados seguidamente:

$$\begin{aligned} d_k &= b_k - c_k a_k, \quad c_k = \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)}, \quad w_k = a_k z_k + (a_{k+1} - a_k) s_k \\ d_k z_k + c_k w_k &= \left( b_k - \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)} a_k \right) z_k + \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)} (a_k z_k + (a_{k+1} - a_k) s_k) \\ &= b_k z_k - \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)} a_k z_k + \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)} a_k z_k + \frac{(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1} - a_k)} (a_{k+1} - a_k) s_k \end{aligned}$$

$$= b_k z_k + (b_{k+1} - b_k) s_k, \quad k = 0, \dots, K + 1$$

Para finalizar, uma das formulações utilizadas para aproximação de funções não convexas através de funções lineares por partes é a formulação seleção múltipla deduzida pelos passos apresentados anteriormente. Essa formulação é resumida no seguinte esquema e visualizada na figura 3.5 (Robbie Morrison, 2008).

$$0 \leq s_k \leq z_k, \quad \forall k = 0, \dots, K - 1 \quad (3.13)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} z_k = 1 \quad (3.14)$$

$$X = \sum_{k=0}^{K-1} (a_k z_k + (a_{k+1} - a_k) s_k) \quad (3.15)$$

$$F = \sum_{k=0}^{K-1} (b_k z_k + (b_{k+1} - b_k) s_k). \quad (3.16)$$

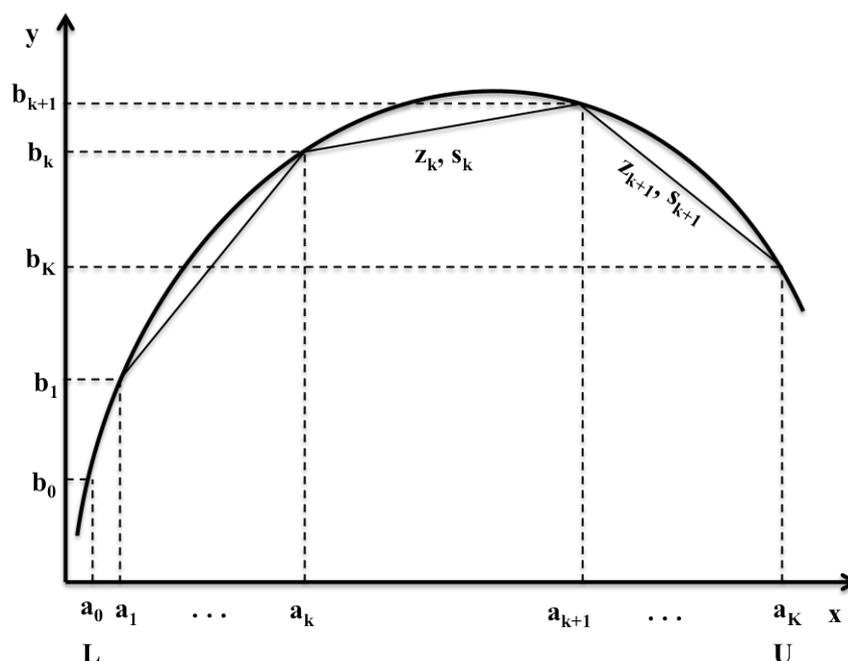


Figura 3.5: Aproximação de uma função não convexa através de funções lineares por partes

## 3.2 Aproximações lineares sucessivas

Nesta secção será apresentada uma descrição detalhada de todas as componentes que constituem o algoritmo desenvolvido assim como o pseudocódigo do algoritmo, seguido de um fluxograma ilustrativo da sua estrutura.

### 3.2.1 Componentes do algoritmo

Ao longo deste trabalho será desenvolvido para o problema do despacho económico um algoritmo utilizando as formulações apresentadas na secção 3.1 para a linearização por partes. Para cada uma das formulações existirá uma versão do algoritmo.

O objetivo do algoritmo é desenvolver uma abordagem que se revele melhor do que as existentes. Mais concretamente, o que se pretende com a construção deste algoritmo é criar uma ferramenta que seja capaz de encontrar a solução ótima para o problema do despacho económico. Deste modo, dado que se encontra a solução ótima pode-se efetuar uma análise sobre a eficiência dos métodos descritos na literatura. Esta análise consistirá em verificar quais os métodos que conseguem atingir a solução ótima, tendo em conta que podem existir métodos cujo valor da solução encontrada não seja exatamente igual ao valor ótimo devido a pequenos arredondamentos efetuados ao longo da execução do método.

#### \* Limite superior e limite inferior

Este algoritmo representa uma forma de solucionar este problema, com erro arbitrariamente baixo e é baseado numa aproximação linear designada por aproximação por baixo. A razão pela qual se utiliza esta aproximação linear deve-se ao facto de que os pontos de válvula delimitam as zonas em que a função de custo de combustível é côncava. Posto isto, ao avaliar-se a função em vários pontos obtém-se uma função linear constituída por segmentos secantes que ligam dois pontos de válvula. Esta função nunca é maior que a função exata e portanto, dado um nível de produção, esta representa um limite inferior para o valor ótimo. No caso do limite superior, este determina-se através da avaliação da função exata no mesmo nível de produção. Pode-se então concluir que, dada uma solução que satisfaça todas as restrições do problema do despacho económico, os limites superior e inferior para os valores da função objetivo podem ser determinados através da avaliação da função exata e da aproximação por baixo, respetivamente.

Uma outra possibilidade para a resolução do problema do despacho económico é considerar que a avaliação da própria função fornece o limite inferior para os valores da função objetivo de uma dada solução, enquanto que o limite superior é determinado por uma aproximação linear designada por aproximação por cima. Análogo ao algoritmo desenvolvido, utiliza-se uma aproximação linear porque os pontos de válvula delimitam a área em que a função de custo de combustível é côncava. A função linear para a aproximação linear por cima é constituída por retas tangentes que se obtêm através de vários pontos onde a função

original é avaliada. Esta função nunca é inferior à função exata. Logo, para um dado nível de produção a aproximação por cima e a avaliação da função exata representam o limite superior e inferior, respetivamente, para uma dada solução que satisfaça todas as restrições do problema.

#### \* Critério de paragem

O limite inferior LB (valor obtido pela aproximação por baixo) e o limite superior UB (valor obtido pela própria função) serão calculados iterativamente. Em cada iteração o número de partições duplica até que o valor de erro relativo entre os dois limites satisfaça um valor do erro fixado arbitrariamente baixo, encontrando, assim, a solução ótima.

#### \* Dados de entrada e descrição das etapas do algoritmo

O input deste algoritmo é constituído pelos parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $e_i$ ,  $f_i$ ,  $p_i^{min}$  e  $p_i^{max}$  para cada uma das unidades geradoras  $i$  que estejam operacionais num sistema de energia, e pela carga do sistema ( $P^D$ ). Através destes parâmetros obtém-se uma função expressa por  $a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + |e_i(\sin(f_i(P_i^{min} - P_i)))|$ , para cada uma das unidades, que corresponde à função que se pretende estudar.

Para a construção deste algoritmo foram criadas três etapas distintas. Para cada uma dessas etapas existe um programa computacional associado. As etapas criadas são:

- Determinação dos pontos que serão necessários para efetuar a aproximação;
- Implementação do método de aproximação linear por partes com inclusão das restrições do problema do despacho económico e obtenção do valor UB;
- Por último, cálculo do erro relativo entre os valores LB e UB.

### 1. Determinação dos pontos que serão necessários para efetuar a aproximação

Esta etapa consiste em, dada cada uma das válvulas e os seus pontos de válvula (que são pontos extremos das válvulas), efetuar para cada válvula uma partição em  $n$  partes iguais, sendo esta partição efetuada igualmente para todas as unidades em questão. O valor  $n$  irá variar até que o valor da aproximação respeite a condição imposta na etapa 3. Esta etapa é constituída por três passos: determinação do número de válvulas; determinação dos pontos de válvula; e determinação dos pontos que constituem a partição das válvulas.

#### Determinação do número de válvulas

O efeito do ponto de válvula aparece devido à existência da função seno na expressão da

função de custo combustível,  $a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + |e_i(\sin(f_i(P_i^{min} - P_i)))|$ .

Por definição sabe-se que,

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}_0,$$

portanto no caso da função em estudo tem-se que,

$$|\sin(f_i(P_i^{min} - P_i^{max}))| = 0 \Rightarrow f_i(P_i^{max} - P_i^{min}) = k\pi \Leftrightarrow k = \frac{f_i(P_i^{max} - P_i^{min})}{\pi},$$

onde  $k$  representa o número de válvulas existentes na função. É importante referir que, no caso de  $k$  ser fracionário (o que acontece quando a válvula final não é completa) considera-se o menor valor inteiro superior ao valor obtido.

### Determinação dos pontos de válvula

Dado o número de válvulas, através do cálculo

$$\frac{P_i^{max} - P_i^{min}}{k},$$

consegue-se calcular o intervalo que cada válvula possui. Consequentemente a posição no eixo do  $x$  (níveis de produção) dos pontos de válvula obtém-se através da expressão

$$P_i^{min} + \frac{(P_i^{max} - P_i^{min})}{k}i,$$

para  $i = 0, \dots, K - 1$ , com exceção de  $i = K$  que corresponde ao  $P_i^{max}$ . Esta exceção deve-se ao facto da última válvula poder não ser completa, logo a amplitude não é igual às outras.

### Determinação dos pontos que constituem a partição das válvulas

Inicialmente fixa-se os extremos da válvula em questão (pontos de válvula) e divide-se o intervalo contido entre os dois pontos extremos (ponto extremo inferior e ponto extremo superior denotados por left e right, respetivamente) em  $n$  segmentos, obtendo-se, assim, a amplitude que cada um dos segmentos possui. Dada essa amplitude, para obter as abcissas dos pontos correspondentes às partições, efetua-se o seguinte raciocínio: para cada válvula, dado o ponto extremo inferior correspondente, o ponto na posição  $i$  da partição é dado pela soma do ponto extremo inferior com  $i$  vezes a amplitude do segmento, em que  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Matematicamente este raciocínio traduz-se na seguinte expressão:

$$left + \frac{(right - left)}{n}i.$$

É importante referir que não se considera  $i = n$  porque com este valor de  $i$  iria-se obter o ponto extremo superior da válvula. No entanto, esse ponto coincide com o ponto extremo inferior da válvula seguinte que já é um valor avaliado.

Analogamente, este processo realiza-se para todas as restantes válvulas existentes na função com a exceção do ponto  $P_i^{max}$ , uma vez que este nunca é alcançado pelo processo descrito anteriormente. É necessário no final da realização de todo este processo, inserir o ponto  $P_i^{max}$  na lista das abcissas para que esta esteja completa. Após ter-se as abcissas para cada ponto, a obtenção das ordenadas correspondentes a essas abcissas resume-se, simplesmente, à substituição do valor da abscissa na função original (2.8). Com todo este procedimento, encontra-se o conjunto dos pontos  $(x, y)$  necessário para a criação dos segmentos secantes à função original, ou seja, a aproximação por baixo da função.

**Exemplo:** Para que se torne mais claro todo o desenvolvimento e o resultado final desta etapa segue-se um exemplo.

Considerando uma unidade de geradora de um sistema de energia com os seguintes dados de entrada:

$$\begin{array}{lll} a = 0.0028 & e = 300 & P^{max} = 680 \\ b = 8.1 & f = 0.035 & \\ c = 550 & P^{min} = 100 & \end{array}$$

A função de custo de combustível correspondente a esta unidade geradora é dada por:

$$F(p) = 0.0028p^2 + 8.1p + 550 + |300\sin(0.035(100 - p))|$$

que é representada graficamente pela figura 3.6:

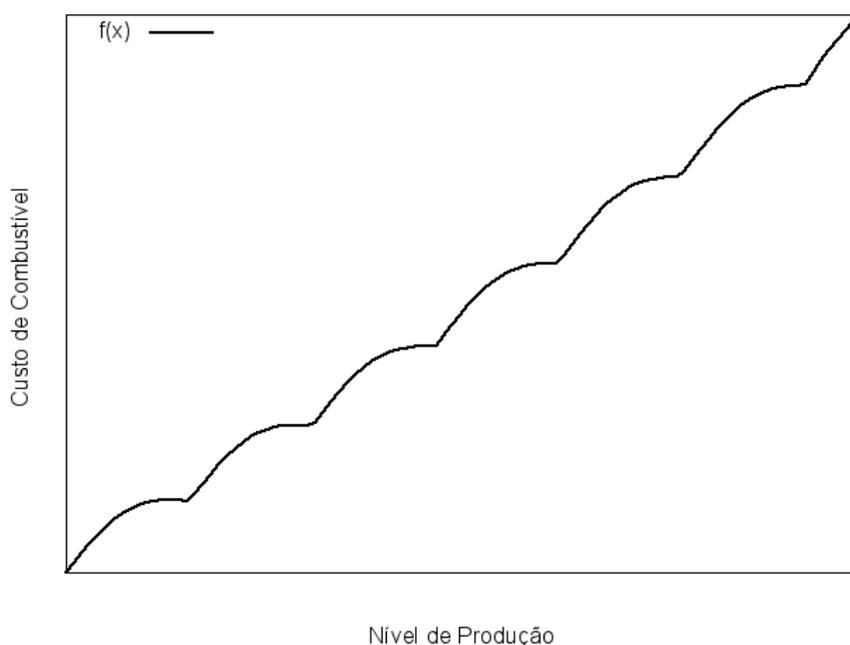


Figura 3.6: Função do custo de combustível correspondente ao exemplo

Aplicando todo o procedimento da etapa 1 à aproximação por baixo, considerando  $n=2$  (partições), a informação obtida é a seguinte:

- $nvalve = \frac{0.035(680 - 100)}{\pi} = 6.46$ , o número de válvulas existentes é então 7;
- $int = \frac{680-100}{6.46} = 89.78$ , distância entre dois pontos de válvula consecutivos;
- as abcissas dos pontos de válvula são dadas por  $pontos\_valvula = [100 + 89.78i, 680]$ , em que  $i = 0, \dots, 6$ , ou seja,  $pontos\_valvula = [100, 189.78, \dots, 680]$ ;
- fixando a primeira válvula, através de  $100 + \frac{189.78-100}{2} \times j$ , em que  $j=0, 1$ , encontram-se os dois primeiros valores das abcissas dos pontos de aproximação, nomeadamente 100 e 144.89. Este processo é análogo para as restantes válvulas;
- as ordenadas para os dois primeiros pontos de aproximação são dadas pelo valor da função nesses pontos, ou seja,  $0.0028 \times 100^2 + 8.1 \times 100 + 550 + |300\sin(0.035(100 - 100))| = 1388$  e  $0.0028 \times 144.89^2 + 8.1 \times 144.89 + 550 + |300\sin(0.035(100 - 144.89))| = 2082.39$ . Novamente, o processo é análogo para as restantes abcissas.

O conjunto total de pontos encontrados para a aproximação por baixo em questão, estão representados na figura 3.7.

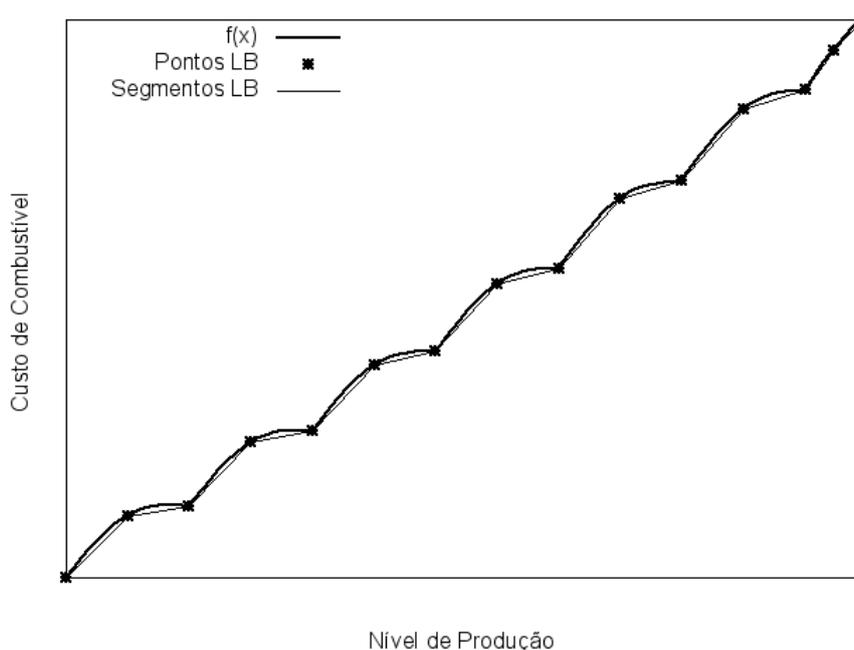


Figura 3.7: Função do custo de combustível correspondente ao exemplo com a representação dos pontos da aproximação

## 2. Implementação do método de aproximação linear por partes com inclusão das restrições do problema do despacho económico e obtenção do valor UB

Esta etapa consiste em, dado o valor da procura (carga do sistema) e as unidades geradoras que estão em operação, determinar os níveis de produção para cada unidade por forma a satisfazer a carga, minimizando os custos de combustível. Por último, após obter os níveis de produção para cada unidade prossegue-se para o cálculo do valor do limite superior (UB) da solução ótima.

### Formulação com seleção múltipla para a linearização por partes da função do problema

Dados os pontos obtidos através da etapa anterior, são criadas 4 variáveis, duas das variáveis são associadas a cada unidade, nomeadamente, as variáveis  $p_u$  e  $fuel_u$  que representam os níveis de produção e o custo de combustível, respetivamente. As outras duas estão relacionadas com a formulação utilizada, sendo que como referido na secção 3.1.2, neste tipo de formulação consideram-se duas variáveis, uma binária  $z_{u,i}$  e uma variável real  $s_{u,i}$  entre 0 e  $z_{u,i}$ . Estas duas variáveis são associadas a cada segmento  $i$  de cada unidade  $u$ .

Após criadas as variáveis, o modelo matemático que representa toda esta formulação é o seguinte:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{u=1}^N fuel_u \quad (3.17a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^{K-1} z_{u,i} = 1 \quad (\forall u \in U) \quad (3.17b)$$

$$\sum_{u=1}^N p_u - P^D = 0 \quad (3.17c)$$

$$P_u^{min} \leq p_u \leq P_u^{max} \quad (\forall u \in U) \quad (3.17d)$$

$$p_u = \sum_{i=1}^{K-1} (X_{u,i} z_{u,i} + (X_{u,i+1} - X_{u,i}) s_{u,i}) \quad (\forall u \in U) \quad (3.17e)$$

$$fuel_u = \sum_{i=1}^{K-1} (Y_{u,i} z_{u,i} + (Y_{u,i+1} - Y_{u,i}) s_{u,i}) \quad (\forall u \in U) \quad (3.17f)$$

A primeira restrição, refere-se ao facto de que para cada unidade  $u$  é selecionado exatamente um segmento (onde  $K$  representa o número de segmentos existentes).

As restrições 3.17c e 3.17d representam o equilíbrio de carga e limites de geração, respetivamente, que dizem respeito ao problema de despacho económico.

Por fim, tem-se as restrições que fornecem o valor dos níveis de produção e o custo de combustível, tendo em conta as restrições anteriormente impostas. No caso dos níveis de produção, para cada unidade geradora, após ser selecionado o segmento  $i$ , é obtido o nível de produção através da restrição 3.17e e, o custo de combustível obtém-se através da restrição 3.17f, onde  $i$  representa o segmento selecionado,  $X_{u,i}$  e  $X_{u,i+1}$  são abcissas e  $Y_{u,i}$  e  $Y_{u,i+1}$  são as ordenadas dos pontos adjacentes obtidos na etapa 1.

### **Formulação com a combinação convexa implementando a restrição SOS2 para a linearização por partes da função do problema**

Considerando os pontos obtidos pela etapa 1, são definidas 3 variáveis para a resolução do problema, em que duas são o  $p_u$  e  $fuel_u$  que representam os níveis de produção e o custo de combustível, respetivamente. A terceira variável corresponde a variável  $z_{u,i}$  pertencente ao intervalo  $[0, 1]$  associada a cada ponto  $k$  de cada unidade  $u$  para aproximação.

O modelo matemático que representa esta formulação é:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{u=1}^N fuel_u \quad (3.18a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^K z_{u,i} = 1 \quad (\forall u \in U) \quad (3.18b)$$

$$\{z_{u,1}, \dots, z_{u,K}\}, SOS \text{ tipo II} \quad (\forall u \in U) \quad (3.18c)$$

$$\sum_{u=1}^N p_u - P^D = 0 \quad (3.18d)$$

$$P_u^{min} \leq p_u \leq P_u^{max} \quad (\forall u \in U) \quad (3.18e)$$

$$p_u = \sum_{i=1}^K X_{u,i} z_{u,i} \quad (\forall u \in U) \quad (3.18f)$$

$$fuel_u = \sum_{i=1}^K Y_{u,i} z_{u,i} \quad (\forall u \in U) \quad (3.18g)$$

A restrição 3.18b juntamente com a implementação da restrição 3.18c associada a um conjunto especial ordenado do tipo II (SOS2) do software *Gurobi* (Gurobi Optimization, Inc., 2012), faz com que no máximo duas variáveis  $z_{u,i}$  adjacentes possam possuir valor não nulo. Por outras palavras, estas restrições garantem que para cada unidade geradora é selecionado exatamente um ponto de um possível segmento.

No que diz respeito às restrições 3.18d e 3.18e, estas representam as restrições do problema do despacho económico. Sendo que, a restrição 3.18d refere-se ao equilíbrio de carga, e a restrição 3.18e aos limites de geração.

Finalmente, o cálculo dos níveis de produção e dos custos de operação para cada unidade  $u$ , tendo em conta as características desta formulação, são dados pelas restrições 3.18f e 3.18g, na devida ordem. Onde  $i$  representa o ponto escolhido e  $X_{u,i}$  e  $Y_{u,i}$  são a abcissa e a ordenada dadas pelos pontos tirados na etapa anterior para cada unidade  $u$ .

### Cálculo do valor do limite superior (UB)

Relativamente ao limite superior (UB), o procedimento é análogo para as duas formulações, isto porque para obtenção do valor UB apenas é necessário a informação dos níveis de produção obtidos pela aproximação por baixo. Detalhadamente, este procedimento consiste em, dado para cada uma das unidades  $u$  os níveis de produção obtidos através da aproximação por baixo, efetuar o cálculo do valor da função original para esse nível de produção. No final, o valor UB corresponde ao somatório de todos os valores da função original determinados.

**Exemplo:** Considera-se novamente o exemplo apresentado na etapa anterior, com  $P^D = 628$ .

Com aplicação da formulação com seleção múltipla a informação obtida é:

- $p = 628$ , os níveis de produção têm de satisfazer a carga prevista;
- $100 \leq p \leq 680$ , o nível de produção tem de estar compreendido entre o limite superior e inferior;
- $z_{12} = 1$  e conseqüentemente  $0 \leq s_{12} \leq 1$ , enquanto os outros são todos nulos;
- $p = 593.679 + (638.559 - 593.679) \times 0.765 = 628$ , um exemplo para uma só unidade o nível de produção a produzir é o próprio  $P^D$ ;
- $fuel = 6645.67 + (6864.05 - 6645.67) \times 0.765 = 6812.67$ , em que este valor é o valor ótimo inferior (LB);

Com aplicação da formulação com a combinação convexa a informação é a seguinte:

- $p = 628$ , os níveis de produção têm de satisfazer a carga prevista;
- $100 \leq p \leq 680$ , o nível de produção tem de estar compreendido entre o limite superior e inferior;
- $z_{12} = 0.24$  e  $z_{13} = 0.76$ , enquanto os outros são todos nulos;
- $p = 593.679 \times 0.24 + 638.559 \times 0.76 = 628$ , um exemplo para uma só unidade o nível de produção a produzir é o próprio  $P^D$ ;
- $fuel = 6645.67 \times 0.24 + 6864.05 \times 0.76 = 6812.67$ , em que este valor é o valor ótimo inferior (LB);

Com o cálculo do valor o UB obtém-se que:

Dado o nível de produção obtido através da aproximação por baixo, 628, efetuando a substituição deste na função original obtém-se o seguinte valor UB:

- $0.0028 \times 628^2 + 8.1 \times 628 + 550 + |300 \sin(0.035(100 - 628))| = 6849.44$

De seguida, a imagem 3.8 ilustra a representação do valor UB na função original:

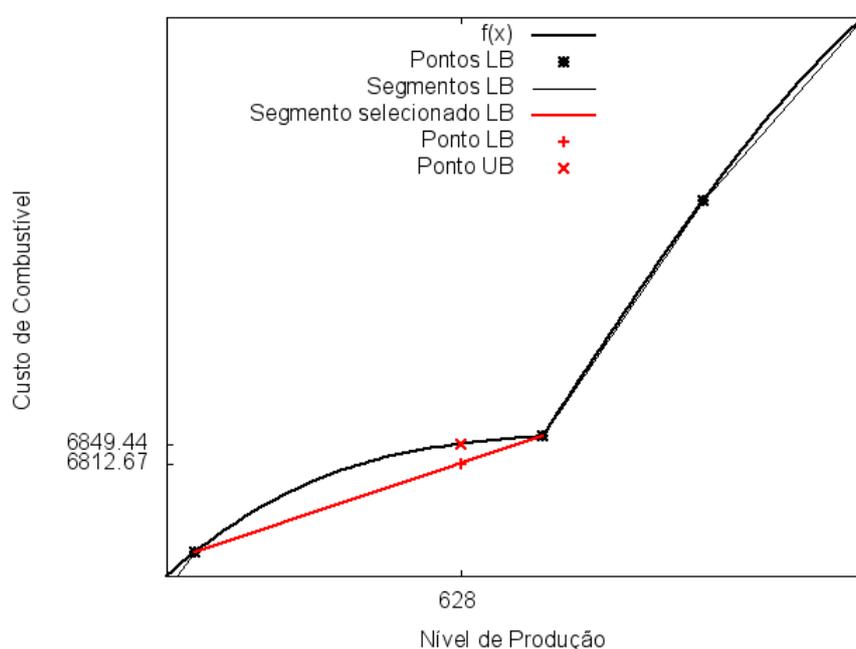


Figura 3.8: Representação do valor UB na função original

### 3. Cálculo do erro relativo entre os valores LB e UB

Nesta etapa, o procedimento desenvolvido consiste em recorrer iterativamente às etapas anteriores até que os limites superior e inferior respeitem o valor do erro fixado e consequentemente, seja encontrada a solução ótima do problema em questão. Contrariamente à etapa anterior, este processo é análogo para as duas formulações para a linearização por partes.

Inicialmente, considera-se que cada válvula é particionada em  $n$  partes iguais. Recorrendo às etapas anteriores calculam-se os respetivos limites superior e inferior e através destes obtém-se o valor do erro relativo. Este é expresso por:

$$erro = \frac{|UB - LB|}{LB},$$

sendo que  $UB$  e  $LB$  representam o valor exato da função e da aproximação por baixo, respetivamente. Enquanto o valor do erro for superior ao valor fixado, o número de partições é duplicado,  $n_{i+1} = 2 \times n_i$ , e repete-se novamente o processo anteriormente descrito.

**Exemplo:** Mais uma vez, considera-se o exemplo apresentado ao longo das diferentes etapas

e expõe-se a informação resultante da aplicação desta etapa a esse exemplo:

- Começando por calcular o erro para  $n=2$  (número de partições consideradas para o exemplo ao longo das etapas anteriores), tem-se que:

$$erro = \frac{|6849.44 - 6812.67|}{6812.67} = 0.0054,$$

como o erro é superior à tolerância dada ( $0.0054 > 1e^{-7}$ ), o número de partições duplica, isto é, passa a ser  $n=4$ .

A amplitude do erro obtido para  $n=2$ , pode ser visualizada graficamente na Figura 3.9, no qual também se pode verificar que esta partição não respeita a tolerância imposta, como já referido.

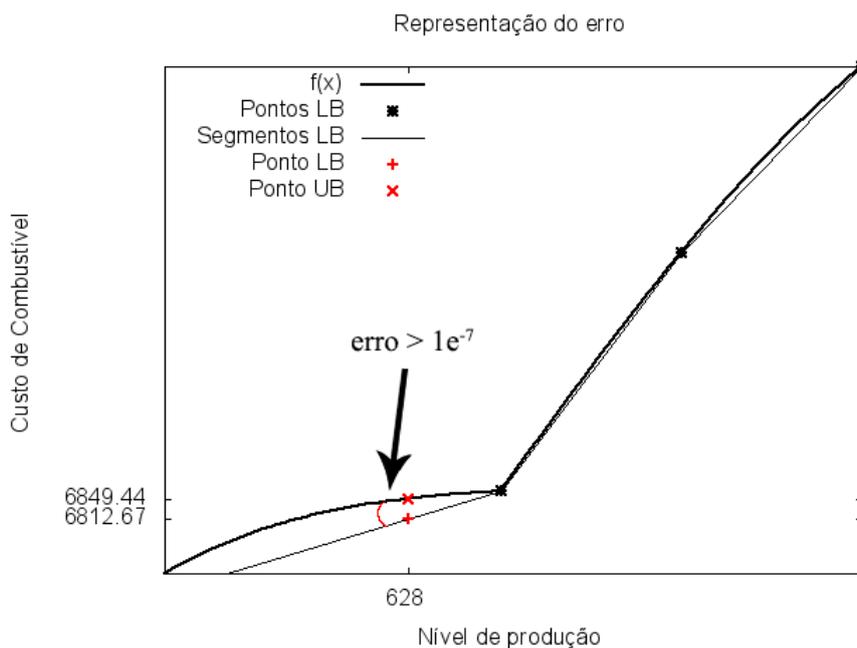


Figura 3.9: Representação do erro para o caso  $n=2$

- A duplicação do número de partições acontece iterativamente até que se atinja  $n=512$  que neste exemplo corresponde ao número de partições para as quais os valores UB e LB são 6849.43561095 e 6849.43526649, respetivamente. Para estes valores, o valor do erro é  $3.73e^{-8}$ , ou seja, inferior ao valor do erro fixado.

### 3.2.2 Resumo do algoritmo em pseudocódigo e num fluxograma

Por forma a resumir toda a informação apresentada, em detalhe acerca do algoritmo construído, de seguida apresenta-se um pseudocódigo associado ao algoritmo, bem como um fluxograma ilustrativo desse mesmo algoritmo.

**Entrada:** instâncias de Despacho Económico, tolerância e  $n$

**Saída:** uma solução da instância de entrada

**Passo 1:** Para cada unidade  $u \in U$ :

- Determina-se o conjunto dos pontos de válvula;
- Divide-se o intervalo de cada válvula em  $n$  segmentos e adicionam-se os pontos correspondentes ao conjunto de pontos de quebra, encontrando os pontos referentes à aproximação por baixo;

**Passo 2:**

- Resolve-se o problema aplicando o método linear por partes, para o conjunto de pontos referente à aproximação por baixo
- Dados os níveis de produção obtidos pelo aplicação do método à aproximação por baixo, substituindo estes na função original determina-se o valor UB.

**Passo 3:**

- Se  $\frac{|UB - LB|}{LB} \leq \varepsilon$ ,

retorna a melhor solução encontrada, UB, LB e  $n$ .

- Caso contrário:

o valor de  $n_{i+1} = 2 \times n_i$  e recalcula-se o problema novamente a partir do segundo ponto do passo 1.

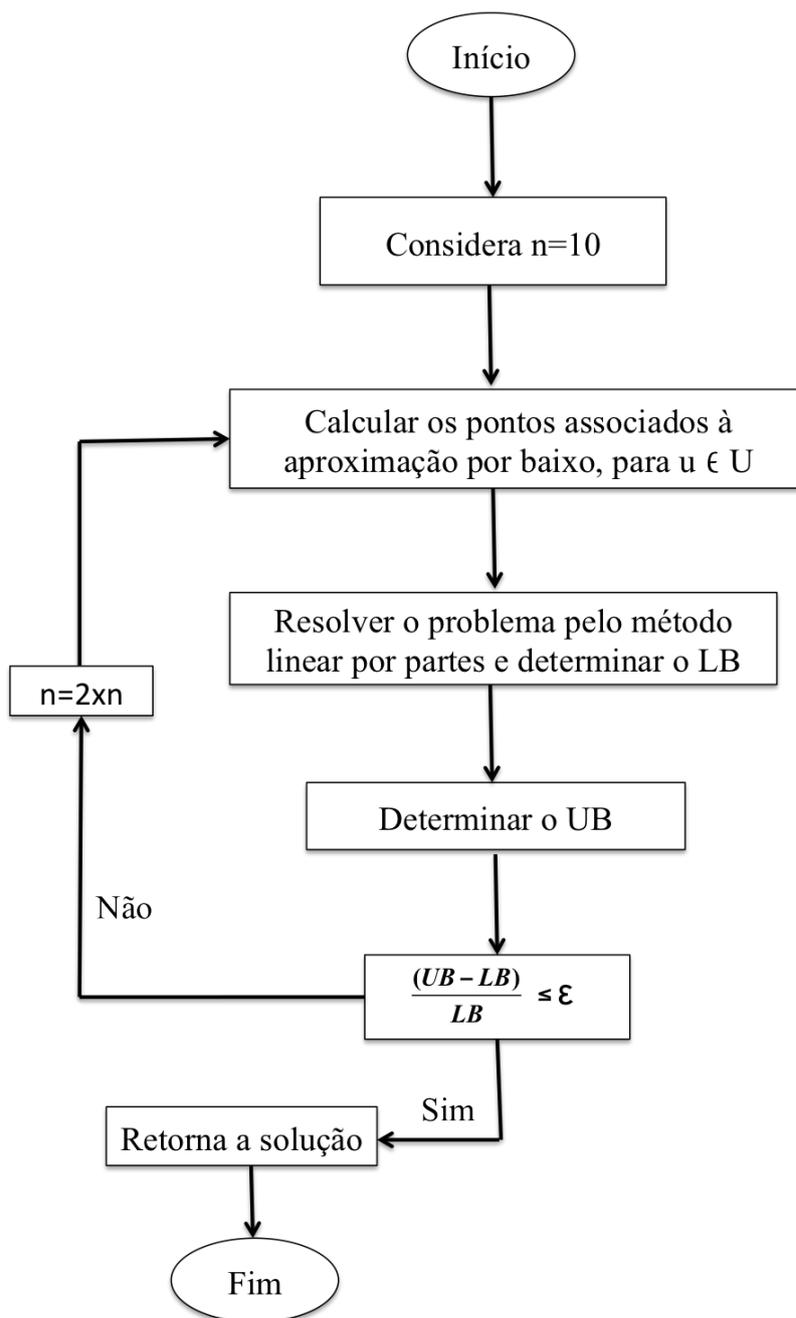


Figura 3.10: Fluxograma do algoritmo proposto

# Capítulo 4

## Análise dos Resultados Computacionais

Neste capítulo abordam-se os resultados computacionais obtidos e, é constituído por duas secções. Na primeira secção são apresentados numa tabela alguns dos métodos utilizados na literatura para a resolução deste problema com as respetivas referências. A segunda secção corresponde à apresentação dos resultados obtidos pelo método implementado e à análise dos métodos anteriormente expostos. No total, neste capítulo, são abordados três casos de estudo, nomeadamente um sistema de energia constituído por 3 unidades geradoras, outro com 13 e um último com 40 unidades geradoras. As características de cada um dos casos de estudo são apresentadas detalhadamente na secção 4.2 juntamente com as respetivas análises.

### 4.1 Métodos utilizados para efetuar as comparações

Tabela com as referências associadas a cada método:

<i>Método/Referência</i>	<i>Método/Referência</i>
<b>DE</b> /(Nomana and Iba, 2008)	<b>GA</b> /(Alsumait et al., 2010)
<b>GA-PS-SQP</b> /(Alsumait et al., 2010)	<b>HGA</b> /(He et al., 2008)
<b>HQPSO</b> /(Coelho and Mariani, 2008)	<b>ICA-PSO</b> /(Vlachogiannis and Lee, 2010)
<b>IFEP</b> /(Sinha et al., 2003)	<b>IGAMU</b> /(Chiang, 2005), (Chiang, 2007)
<b>MGSO</b> /(Zare et al., 2012)	<b>PSO-SQP</b> /(Victoire and Jeyakumar, 2004)

Tabela 4.1: Métodos utilizados na comparação com o método implementado

## 4.2 Apresentação e análise dos resultados computacionais

Esta secção apresenta os resultados computacionais referentes a três instâncias de teste frequentemente utilizadas na literatura, com 3, 13 e 40 unidades geradoras utilizadas para avaliar o desempenho do algoritmo implementado. Para simular o efeito ponto válvula é adicionada uma componente sinusoidal recorrente à função de custo de combustível. Neste projeto, para os 3 casos de estudo considera-se apenas as restrições de equilíbrio de carga (2.1) e limites de geração (2.2), visualizado na secção 2.3 e para verificar o desempenho do método implementado, este será aplicado aos três sistemas de energia referidos. O software foi escrito em Python (van Rossum, 1995), versão 2.6, utilizando o resolvidor comercial Gurobi5.0 (Gurobi Optimization, Inc., 2012) e executado num Macbook Pro com o sistema operativo Mac OS X 10.6.8 e com um processador Intel Core i5, 4GB de memória RAM. Os resultados dos custos de combustível serão usados para se comparar o algoritmo proposto neste trabalho, com os métodos referenciados na secção anterior.

Cada um dos casos de estudo será apresentado de seguida e separadamente, em conjunto com uma breve descrição das características do sistema de produção de energia em questão. Após apresentação dos resultados obtidos com a aplicação do método implementado, analisa-se qual a formulação que se revela mais eficaz do ponto de vista de CPU. Isto é, as duas versões do algoritmo desenvolvido representam o mesmo método de aproximação linear por partes, o que faz com que estes obtenham a mesma solução. Mas o tempo de execução que cada uma necessita é diferente. Depois, segue-se uma tabela com todos os valores dos métodos encontrados na literatura, uma representação gráfica destes mesmos valores e a respetiva análise.

### Caso 1:

No caso de estudo 1, existem três unidades geradoras para as quais se considera o efeito do ponto de válvula. A carga necessária a produzir pelo conjunto das três unidades é  $P^D = 850MW$ . Os dados do sistema de energia, para este caso, são apresentados na Tabela 4.2 e podem também ser encontrados em (Sinha et al., 2003).

Gerador	a	b	c	e	f	$P^{min}$	$P^{max}$
1	0.001562	7.92	561	300	0.0315	100	600
2	0.004820	7.97	78	150	0.063	50	200
3	0.001940	7.85	310	200	0.042	100	400

Tabela 4.2: Dados referentes ao sistema com 3 unidades geradoras

Os resultados obtidos com aplicação do método desenvolvido neste trabalho ao caso de estudo 1, estão representados na Tabela 4.3. Para este caso, o valor do erro fixado é  $1e^{-7}$  e o número de partições necessárias para satisfazer este valor é 80. Nesta tabela, para cada uma

das unidades geradoras e para cada uma das aproximações (aproximação por baixo e valor exato da função) são apresentados os níveis de produção e os respectivos custos. Pode-se verificar que o valor UB e o valor LB são iguais, o que mostra que estes representam o valor ótimo da função.

Gerador	níveis de produção	custos LB	custos UB
<b>1</b>	300.27	3087.51	3087.51
<b>2</b>	149.73	1379.44	1379.44
<b>3</b>	400.00	3767.12	3767.12
<b>total</b>	850.00	8234.07	8234.07

Tabela 4.3: Melhor resultado obtido pelo algoritmo proposto para o caso 1

Na tabela 4.4 podem ser visualizados os tempos de execução das duas versões implementadas do algoritmo. Conclui-se que a versão do algoritmo que possui a formulação com a combinação convexa implementando a restrição SOS2, revela-se mais rápida na resolução deste caso de estudo.

Métodos	Tempo CPU
<b>Seleção múltipla</b>	1.01s
<b>Combinação convexa-SOS2</b>	0.26s

Tabela 4.4: Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 1

Dado que a solução obtida através do método implementado neste trabalho converge para a solução ótima, a análise dos resultados irá consistir em verificar a eficiência de métodos anteriormente desenvolvidos. Para este caso de estudo os métodos que serão utilizados nas comparações são **GA**, **PSO-SQP**, **IFEP**, **GA-PS-SQP** e **MGSO**. Os respectivos valores da melhor solução e dos valores médios encontrados através de cada um deles, encontram-se na Tabela 4.5 e representados na figura 4.1 .

Métodos	Melhor custo com $P^D=850$	Custo Médio com $P^D=850$
GA	8222.07	8234.72
PSO-SQP	8234.07	8234.07
IFEP	8234.07	8234.16
GA-PS-SQP	8234.07	8234.10
MGSO	8234.07	8234.07
UB	8234.07	–
LB	8234.07	–

Tabela 4.5: Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 1

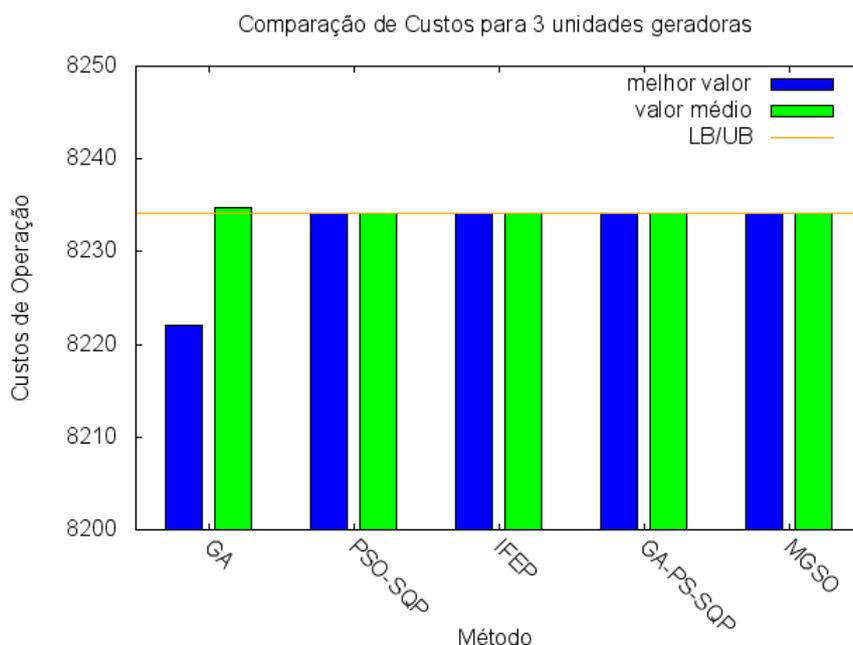


Figura 4.1: Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso 1

A informação referente ao valor médio dos custos de combustível será utilizada para tornar mais precisas as análises efetuadas entre o algoritmo proposto e os métodos apresentados na tabela 4.5. Isto porque, através desta informação é possível analisar se ao longo das diversas execuções o método retornou sempre um valor próximo do melhor valor, isto é, o comportamento do método foi estável. A outra situação que pode ocorrer é o valor médio ser distinto do melhor valor, devido a existência de casos em que o método retornou um valor significativamente superior ou inferior ao melhor valor.

Analisando a tabela 4.5 verifica-se que, todos os métodos com exceção do Algoritmo Genético, obtêm um valor de melhor custo e de custo médio de combustível igual ao valor do algoritmo

proposto.

No caso do Algoritmo Genético o melhor valor encontrado não atinge o valor ótimo, o que indica que este método não é eficaz para a resolução do caso de estudo.

### Caso 2:

O caso de estudo 2 inclui treze unidades geradoras, nas quais se considera o efeito do ponto de válvula. Para a carga são considerados dois valores distintos,  $P^D = 1800MW$  e  $P^D = 2520MW$ . Por outras palavras, para este caso de estudo são analisadas duas instâncias, cada uma delas referente a um dos valores da carga a produzir. Os dados do sistema de energia para este caso são apresentados na Tabela 4.6 e podem também ser encontrados em (Sinha et al., 2003).

Gerador	a	b	c	e	f	$P^{min}$	$P^{max}$
1	0.00028	8.1	550	300	0.035	0	680
2	0.00056	8.1	309	200	0.042	0	360
3	0.00056	8.1	307	200	0.042	0	360
4	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
5	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
6	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
7	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
8	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
9	0.00324	7.74	240	150	0.063	60	180
10	0.00284	8.6	126	100	0.084	40	120
11	0.00284	8.6	126	100	0.084	40	120
12	0.00284	8.6	126	100	0.084	55	120
13	0.00284	8.6	126	100	0.084	55	120

Tabela 4.6: Dados referentes ao sistema com 13 unidades geradoras

Da mesma forma que para o caso de estudo 1, a informação sobre os valores obtidos pela aplicação do método implementado é resumida numa tabela. As três primeiras colunas da tabela 4.7 apresentam os níveis de produção e os respetivos custos referentes a  $P^D = 1800MW$ , enquanto que as três colunas seguintes dizem respeito aos níveis de produção e custos de combustível associados a  $P^D = 2520MW$ . Quer para o caso em que  $P^D = 1800MW$  como para o caso  $P^D = 2520MW$  o valor do erro fixado é  $1e^{-7}$  e o número de partições necessárias para satisfazer este valor é 80. Analisando a tabela 4.7 verifica-se que para os dois casos referidos os valores UB e LB são iguais, o que significa que estes representam o valor ótimo da função.

Gerador	$P^D = 1800MW$			$P^D = 2520MW$		
	níveis de produção	custos LB	custos UB	níveis de produção	custos LB	custos UB
<b>1</b>	628.32	5749.92	5749.92	628.32	5749.92	5749.92
<b>2</b>	222.74	2154.90	2154.90	299.20	2782.65	2782.65
<b>3</b>	149.59	1531.29	1531.29	299.20	2780.65	2780.65
<b>4</b>	60.0 0	716.06	716.06	159.73	1559.00	1559.00
<b>5</b>	109.87	1129.48	1129.48	159.73	1559 .00	1559.00
<b>6</b>	109.87	1129.48	1129.48	159.73	1559 .00	1559 .00
<b>7</b>	109.87	1129.48	1129.48	159.73	1559 .00	1559 .00
<b>8</b>	109.87	1129.48	1129.48	159.73	1559 .00	1559 .00
<b>9</b>	109.87	1129.48	1129.48	159.73	1559 .00	1559 .00
<b>10</b>	40.0 0	474.54	474.54	77.4 0	808.65	808.65
<b>11</b>	40.0 0	474.54	474.54	77.4 0	808.65	808.65
<b>12</b>	55.0 0	607.59	607.59	87.69	940,51	940,51
<b>13</b>	55.0 0	607.59	607.59	92.41	944.89	944.89
<b>total</b>	1800.00	17963.83	17963.83	2520.00	24169.92	24169.92

Tabela 4.7: Melhores resultados obtidos pelo algoritmo proposto para as duas instâncias do caso 2.

Para o caso de estudo 2 existem várias soluções ótimas. A tabela 4.7 representa uma das soluções ótimas do caso de estudo em questão. Quando a carga é  $P^D = 1800MW$ , uma outra solução ótima admissível é dada por: para todas as unidades geradoras com exceção da 4 e da 6 os níveis de produção, os valores LB e UB são iguais aos apresentados na tabela 4.7; as unidades geradoras 4 e 6 sofrem uma troca entre si, isto é, os valores associados à unidade geradora 4 passam a corresponder à unidade gerador 6 e vice-versa, como se pode verificar na tabela 4.8. O mesmo acontece quando se considera a carga  $P^D = 2520MW$ , sendo que as unidades geradoras, para as quais a informação associada sofre uma troca, são a 12 e a 13, como se pode constatar na tabela 4.8.

Caso	Gerador	níveis de produção	custos LB	custos UB
$P^D = 1800MW$	<b>4</b>	109.87	1129.48	1129.48
	<b>7</b>	60.0 0	716.06	716.06
$P^D = 2520MW$	<b>12</b>	92.41	944.89	944.89
	<b>13</b>	87.69	940,51	940,51

Tabela 4.8: Alterações para a representação de outra solução ótima para caso de estudo 2

A tabela 4.9 representa o tempo de execução associada a cada uma das versões do algoritmo para os dois valores de carga. A versão que possui menor tempo de execução para os dois valores de carga é a que se utiliza formulação com a combinação convexa implementando a restrição SOS2.

Métodos	Tempos CPU	
	$P^D = 1800MW$	$P^D = 2520MW$
Seleção múltipla	5.68s	1255.17s
Combinação convexa-SOS2	3.68s	0.91s

Tabela 4.9: Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 2

A análise neste caso de estudo a fim de constatar a eficiência de cada método será feita entre o método implementado e os seguintes métodos: **DE**, **HGA**, **HQPSO**, **ICA-PSO**, **IFEP**, **IGAMU**, e **PSO-SQP**. A solução encontrada através de cada um deles situa-se na Tabela 4.10 e pode-se visualizar nas figuras 4.2 e 4.3.

Métodos	Melhor custo com $P^D=1800$	Custo Médio com $P^D=1800$	Melhor custo com $P^D=2520$	Custo Médio com $P^D=2520$
<b>DE</b>	17963.83	17965.48	24169.92	24169.92
<b>HGA</b>	17963.83	17988.04	24169.92	–
<b>HQPSO</b>	17963.95	18273.86	–	–
<b>ICA-PSO</b>	17963.88	–	–	–
<b>IFEP</b>	17994.07	18127.06	–	–
<b>IGAMU</b>	17963.98	–	24169.97	24385.41
<b>PSO-SQP</b>	17969.93	18029.99	24261.05	–
<b>UB</b>	17963.83	–	24169.92	–
<b>LB</b>	17963.83	–	24169.92	–

Tabela 4.10: Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 2

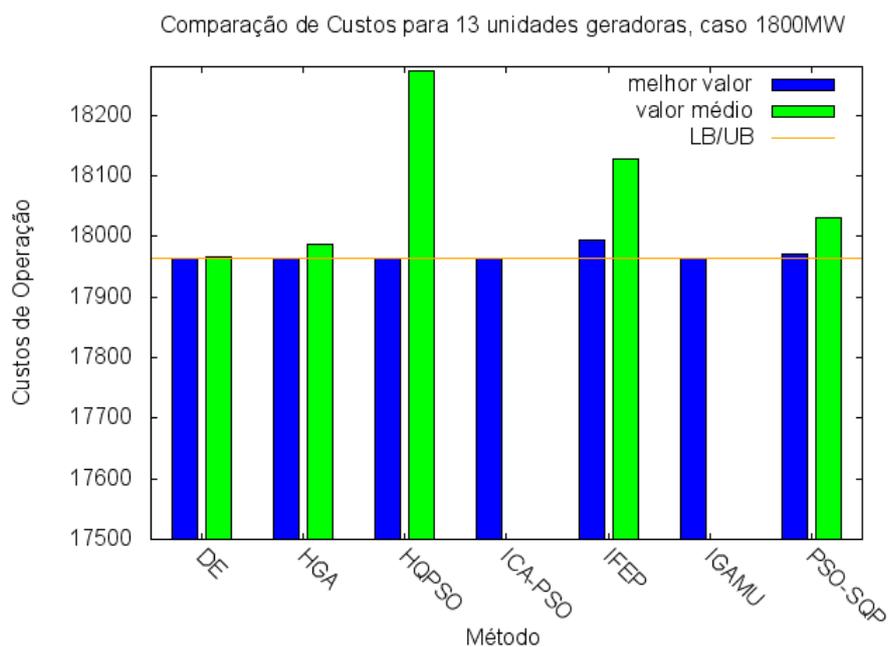


Figura 4.2: Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 2 com  $P^D=1800\text{MW}$

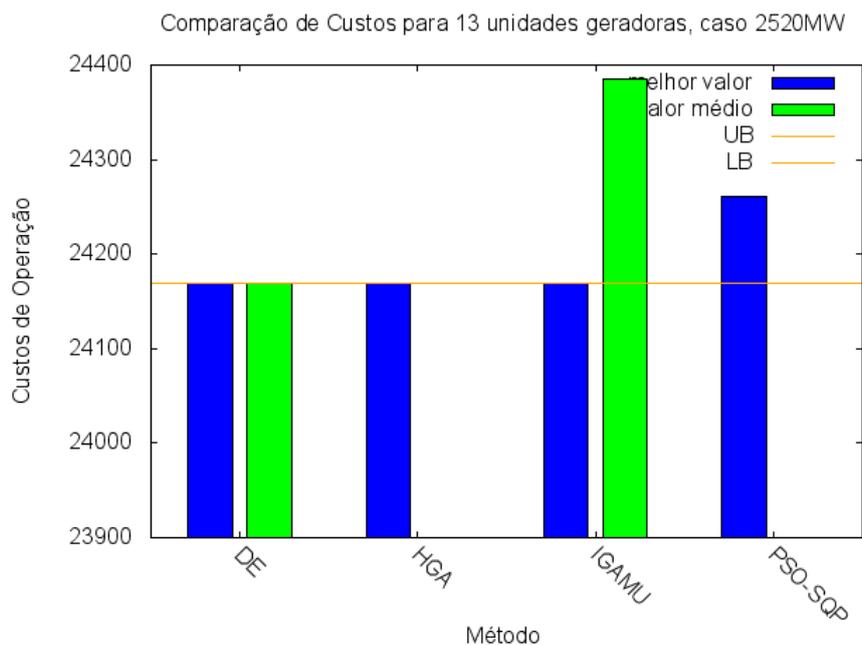


Figura 4.3: Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 2 com  $P^D=2520\text{MW}$

De forma analisar com mais precisão a eficiência dos métodos em questão, será utilizado a informação referente ao valor médio dos custos de combustível apresentado na tabela 4.10. Através desta informação é possível analisar se ao longo das diversas execuções o comportamento do método é estável, ou seja, mostra que o método retorna sempre um valor próximo do melhor valor. A outra situação que pode ocorrer é o valor médio ser distinto do melhor valor o que mostra que o método é instável, retornando valores superiores e inferiores ao melhor valor. Para alguns dos métodos não foi possível obter a informação relativa ao valor médio dos custos.

Carga  $P^D = 1800MW$

Ao analisar a coluna referente ao melhor valor de cada método apresentado na tabela 4.10, verifica-se que os métodos DE, HGA, HQPSO, ICA-PSO e IGAMU, salvaguardando pequenos arredondamentos efetuados ao longo da execução dos métodos, obtém-se um valor idêntico à solução ótima. Quando se analisa o valor médio de custos de combustível associados a estes métodos constata-se que os métodos HGA e HQPSO apresentam um valor médio consideravelmente superior à solução ótima. O que se traduz numa desvantagem destes métodos porque, existem situações em que quando estes são executados não atingem a solução ótima.

Em relação aos métodos ICA-PSO e IGAMU, não foi encontrada informação sobre o valor médio dos custos de combustível, pelo que para este método não é possível efetuar a análise detalhada de como se comporta o método em cada execução.

No caso do método DE, a média dos custos de combustível apresenta um valor próximo do ótimo o que faz com que se verifique que ao longo das diversas execuções não existam valores muitos superiores ao melhor valor. Sendo assim, verifica-se que este método se revela eficaz para resolução do problema de despacho económico, dado que todas as soluções obtidas através deste rodeiam a solução ótima do problema.

Por último, os métodos HQPSO, IFEP, IGAMU e PSO-SQP apresentam um valor de melhor custo superior ao valor ótimo, mostrando que estes não são tão eficazes para a resolução deste problema.

Carga  $P^D = 2520MW$

O melhor valor do custo de combustível para os métodos DE, HGA e IGAMU, salvaguardando pequenos arredondamentos efetuados ao longo da execução dos métodos, é idêntico ao valor ótimo. Constata-se assim que, estes métodos atingem a solução ótima.

Analisando os valores médios destes métodos, apresentados na tabela 4.10, verifica-se que no caso do método DE o valor médio do custo de combustível que este possui é praticamente igual ao melhor valor do custo de combustível associado a este. Ou seja, para este método, em todas as execuções efetuadas, o valor do custo de combustível obtido não varia significativamente em relação ao melhor valor. Contrariamente, o método IGAMU apresenta um valor da média bastante superior ao valor ótimo. O que indica que ao longo da execução deste

método obtiveram-se valores de custo de combustível superiores ao valor ótimo. Conclui-se, assim, que o método DE se revela mais vantajoso que o IGAMU. Pois, a maior parte das soluções obtidas através do método DE coincidem com a solução ótima, ao contrário do que acontece no método IGAMU. Para o método HGA não foi encontrada informação relativa ao valor médio dos custos de combustível, pelo que não é possível analisar com mais detalhe este método.

Para finalizar, o método PSO-SQP apresenta um valor do melhor custo de combustível consideravelmente superior ao valor ótimo, o que indica que este não consegue atingir o valor ótimo.

### **Caso 3:**

O caso de estudo 3 contém quarenta unidades geradoras com efeito ponto válvula. A carga do sistema é  $P^D = 10500MW$ . Os dados do sistema de energia para este caso são apresentados na Tabela 4.11 e podem também ser encontrados em (Sinha et al., 2003).

Gerador	a	b	c	e	f	$P^{min}$	$P^{max}$
1	0.00690	6.73	94.705	100	0.084	36	114
2	0.00690	6.73	94.705	100	0.084	36	114
3	0.02028	7.07	309.54	100	0.084	60	120
4	0.00942	8.18	369.03	150	0.063	80	190
5	0.0114	5.35	148.89	120	0.077	47	97
6	0.01142	8.05	222.33	100	0.084	68	140
7	0.00357	8.03	287.71	200	0.042	110	300
8	0.00492	6.99	391.98	200	0.042	135	300
9	0.00573	6.60	455.76	200	0.042	135	300
10	0.00605	12.9	722.82	200	0.042	130	300
11	0.00515	12.9	635.20	200	0.042	94	375
12	0.00569	12.8	654.69	200	0.042	94	375
13	0.00421	12.5	913.40	300	0.035	125	500
14	0.00752	8.84	1760.4	300	0.035	125	500
15	0.00708	9.15	1728.3	300	0.035	125	500
16	0.00708	9.15	1728.3	300	0.035	125	500
17	0.00313	7.97	647.85	300	0.035	220	500
18	0.00313	7.95	649.69	300	0.035	220	500
19	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	242	550
20	0.00313	7.97	647.81	300	0.035	242	550
21	0.00298	6.63	785.96	300	0.035	254	550
22	0.00298	6.63	785.96	300	0.035	254	550
23	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	254	550
24	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	254	550
25	0.00277	7.10	801.32	300	0.035	254	550

Gerador	a	b	c	e	f	$P^{min}$	$P^{max}$
26	0.00277	7.10	801.32	300	0.035	254	550
27	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150
28	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150
29	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150
30	0.01140	5.35	148.89	120	0.077	47	97
31	0.00160	6.43	222.92	150	0.063	60	190
32	0.00160	6.43	222.92	150	0.063	60	190
33	0.00160	6.43	222.92	150	0.063	60	190
34	0.0001	8.95	107.87	200	0.042	90	200
35	0.0001	8.62	116.58	200	0.042	90	200
36	0.0001	8.62	116.58	200	0.042	90	200
37	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110
38	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110
39	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110
40	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	242	550

Tabela 4.11: Dados referentes ao sistema com 40 unidades geradoras

A tabela 4.12 apresenta o tempo de execução associada às duas versões do algoritmo. A versão que possui menor tempo de execução é a que utiliza a formulação com a combinação convexa implementando a restrição SOS2.

Métodos	Tempo CPU
Seleção múltipla	10.20s
Combinação convexa-SOS2	2.91s

Tabela 4.12: Tempo de execução das duas versões do algoritmo para o caso 3

Os resultados obtidos para o caso de estudo 3 estão representados na tabela 4.13. Para obtenção destes resultados foi considerado um erro de  $1e^{-7}$  e o número de partições efetuadas de forma a satisfazer o valor do erro é 80. Como nos casos de estudo anteriores, a tabela 4.13 é constituída pelos níveis de produção e os respetivos custos associados a cada uma das quarenta unidades geradoras. Relativamente aos valores UB e LB encontrados, salvaguardando pequenos arredondamentos efetuados ao longo da execução do método, representam o valor ótimo da função.

Gerador	níveis produção	custos LB	custos UB	Gerador	níveis produção	custos LB	custos UB
<b>1</b>	110.80	925.09	925.09	<b>22</b>	523.28	5071.29	5071.29
<b>2</b>	110.80	925.09	925.09	<b>23</b>	523.28	5057.22	5057.22
<b>3</b>	97.4 0	1190.55	1190.55	<b>24</b>	523.28	5057.22	5057.22
<b>4</b>	179.73	2143.55	2143.55	<b>25</b>	523.28	5275.09	5275.09
<b>5</b>	87.8 0	706.50	706.50	<b>26</b>	523.28	5275.09	5275.09
<b>6</b>	140.00	1596.46	1596.46	<b>27</b>	10.00	1140.52	1140.52
<b>7</b>	259.60	2612.88	2612.88	<b>28</b>	10.00	1140.52	1140.52
<b>8</b>	284.60	2779.84	2779.84	<b>29</b>	10.00	1140.52	1140.52
<b>9</b>	284.60	2798.23	2798.23	<b>30</b>	87.8 0	706.50	706.50
<b>10</b>	130.00	2502.07	2502.07	<b>31</b>	190.00	1643.99	1643.99
<b>11</b>	94.00	1893.31	1893.31	<b>32</b>	190.00	1643.99	1643.99
<b>12</b>	94.00	1908.17	1908.17	<b>33</b>	190.00	1643.99	1643.99
<b>13</b>	214.76	3792.07	3792.07	<b>34</b>	164.80	1585.54	1585.54
<b>14</b>	394.28	6414.86	6414.86	<b>35</b>	194.40	1985.42	1985.43
<b>15</b>	394.28	6436.59	6436.59	<b>36</b>	200.00	2043.73	2043.73
<b>16</b>	394.28	6436.59	6436.59	<b>37</b>	110.00	1220.17	1220.17
<b>17</b>	489.28	5296.71	5296.71	<b>38</b>	110.00	1220.17	1220.17
<b>18</b>	489.28	5288.77	5288.77	<b>39</b>	110.00	1220.17	1220.17
<b>19</b>	511.28	5540.93	5540.93	<b>40</b>	511.27	5540.93	5540.93
<b>20</b>	511.28	5540.91	5540.91				
<b>21</b>	523.28	5071.29	5071.29	<b>total</b>	10500	121412.53	121412.54

Tabela 4.13: Melhor resultado obtido pelo algoritmo proposto para o caso 3

Existem várias soluções ótimas para o mesmo caso de estudo. A tabela 4.13 representa uma das soluções ótimas do caso de estudo 3. Uma outra solução ótima admissível é dada por: para todas as unidades geradoras com exceção da 35 e da 36 os níveis do produção, os custos LB e os custos UB são iguais aos apresentados na tabela 4.13; as unidades geradoras 35 e 36 sofrem uma troca entre si, isto é, os valores associados à unidade geradora 35 passam a corresponder à unidade geradora 36 e vice-versa, como se pode verificar na tabela 4.14.

Gerador	níveis de produção	custos LB	custos UB
<b>35</b>	200.00	2043.73	2043.73
<b>36</b>	194.40	1985.42	1985.43

Tabela 4.14: Alterações para a representação de outra solução ótima para caso de estudo 3

Os métodos para os quais será analisada a eficiência de execução para o sistema de energia,

constituído pelas quarentas unidades geradoras anteriormente apresentadas, são os seguintes: **DE**, **HGA**, **ICA-PSO**, **IFEP**, **IGAMU**, **MGSO** e **PSO-SQP**. Na tabela 4.15, para cada um dos métodos são apresentados os respectivos melhor valor e valor médio da solução. A informação anteriormente referida também se pode visualizar na figura 4.4.

Métodos	Melhor custo com $P^D=10500$	Custo Médio com $P^D=10500$
<b>DE</b>	121416.29	121422.72
<b>HGA</b>	121418.27	121784.04
<b>ICA-PSO</b>	121422.10	–
<b>IFEP</b>	122624.35	123382.00
<b>IGAMU</b>	121819.25	–
<b>MGSO</b>	121412.56	–
<b>PSO-SQP</b>	122094.67	122245.25
<b>UB</b>	121412.54	–
<b>LB</b>	121412.53	–

Tabela 4.15: Valores referentes aos métodos analisados, no caso de estudo 3

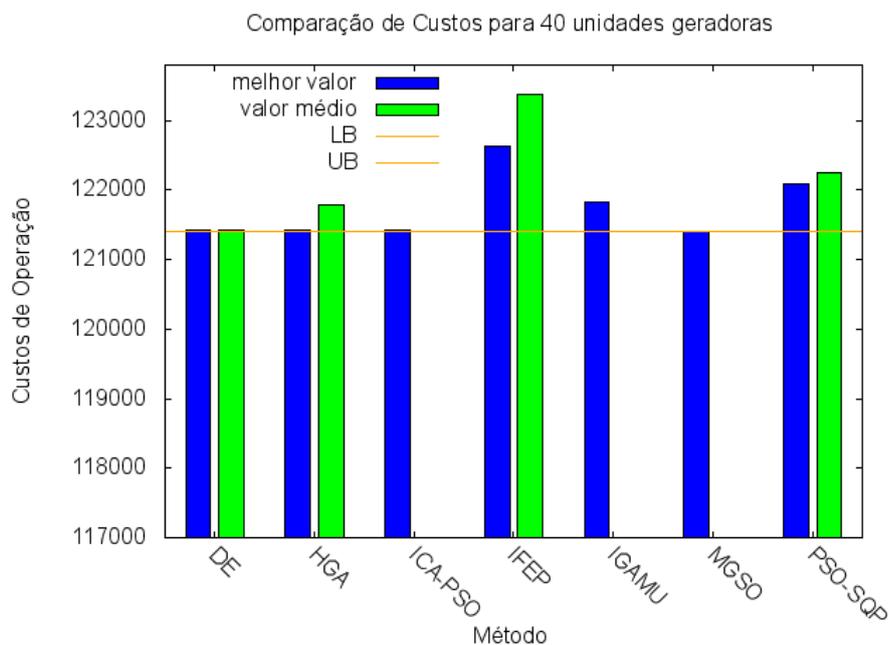


Figura 4.4: Apresentação do melhor valor e do valor médio de cada método para o caso de estudo 3

Análogo ao caso de estudo anterior, para analisar de forma mais precisa a eficiência dos métodos em questão, será também considerado, além do melhor valor do custo de combustível o valor médio do custo de combustível, obtido na execução do método. Novamente, existem casos em que não foi possível encontrar a informação sobre o valor médio do custo.

Analisando os valores descritos na tabela 4.15, constata-se que os métodos DE e MGSO apresentam um valor de melhor custo de combustível aproximado ao valor da solução ótima obtido no algoritmo proposto. Perante esta situação, pode-se dizer que os métodos são eficientes para a resolução do caso de estudo em questão, apesar da solução obtida não ser exatamente a solução ótima devido a arredondamentos que surgem ao longo do método.

Relativamente ao valor médio do custo para estes métodos, pode-se verificar que no caso do método DE o valor médio associado a este possui uma diferença considerável em relação ao valor ótimo. O que evidencia que existem valores de custo de combustível consideravelmente superiores ao valor ótimo. Isto traduz-se numa desvantagem da utilização deste método, visto que para determinar a solução ótima pode ser necessário efetuar um elevado número de execuções. No caso do método MGSO, não é possível analisar com mais detalhe a eficiência do método, porque não foi encontrada informação sobre o valor médio do custo de combustível.

Os restantes métodos indicados na tabela 4.4, nomeadamente HGA, ICA-PSO, IFEP, IGAMU e PSO-SQP apresentam resultados superiores ao valor ótimo, o que revela que não são eficazes para a resolução deste problema.

# Capítulo 5

## Conclusão e Trabalhos Futuros

A principal contribuição desta tese é a criação de um algoritmo para resolver o problema do despacho económico, considerando o efeito do ponto de válvula.

Na realização do trabalho expostos, foi possível retirar diversas conclusões relativas à eficiência do algoritmo desenvolvido e à dos métodos existentes na literatura.

O algoritmo desenvolvido atingiu os objetivos definidos, isto porque através dele foi possível resolver o problema do despacho económico utilizando instâncias referenciadas na literatura, para as quais a solução ótima não era conhecida. Como era de esperar, a versão do algoritmo que apresentou menor tempo de execução para os três casos de estudo é a que contém a formulação com a combinação convexa, utilizando uma restrição associada ao conjunto especial ordenado do tipo II (SOS2).

Relativamente às análises efetuadas aos três casos de estudo propostos, as conclusões retiradas irão ser apresentadas separadamente para cada caso. No caso de estudo referente a um sistema de energia com 3 unidades geradoras, conclui-se que os métodos PSO-SQP, IFEP, GA-PS-SQP e MGSO revelam ser eficazes para a resolução deste caso, contrariamente ao que acontece com o algoritmo genético.

No caso de estudo em que o sistema de energia possui 13 unidades geradoras e carga  $1800MW$ , os métodos DE, HGA, HQPSO e IGAMU atingem o valor ótimo e os métodos IFEP e PSO-SQP revelam-se incapazes de atingir o valor ótimo para este caso de estudo. No caso em que a carga  $2520MW$ , os métodos DE, HGA e IGAMU alcançam o valor ótimo, enquanto que o método PSO-SQP não é capaz de obter o valor ótimo. Para ambos os casos, alguns dos métodos que atingem o valor ótimo possuem um valor médio de custo de combustível superior ao valor ótimo, tornando-se menos vantajosos para a resolução deste problema.

Para o caso em que existem 40 unidades geradoras no sistema de energia, os métodos HGA, ICA-PSO, IFEP, IGAMU e PSO-SQP mostraram que não conseguem alcançar o valor ótimo. Por outro lado, os métodos DE e MGSO atingem o valor ótimo, mas existem novamente métodos que possuem um valor médio do custo de combustível significativamente superior ao valor ótimo.

Uma vez que existe o método exato desenvolvido ao longo deste trabalho, os métodos existentes na literatura, apesar de alguns deles apresentarem uma solução idêntica à solução ótima, deixam de ser necessários. Pois, estes métodos apenas apresentam aproximações da solução do problema.

Para finalizar, uma exploração futura seria a adaptação do algoritmo desenvolvido a este problema considerando restrições adicionais, tais como, perdas de transmissão, zonas de operação proibidas das unidades geradoras, etc. Por outro lado, dado que o problema do despacho económico representa apenas a segunda fase de resolução de um problema de um sistema de energia, uma outra possibilidade de um trabalho futuro é a aplicação do algoritmo proposto a todo o processo de resolução, incluindo a fase de escalonamento.

# Referências

- Alsumait, J., Sykulski, J., and Al-Othman, A. (2010). A hybrid ga-ps-sqp method to solve power system valve-point economic dispatch problems. *Applied Energy*.
- Amjady, N. and Sharifzadeh, H. (2010). Solution of non-convex economic dispatch problem considering valve loading effect by a new modified differential evolution algorithm. *Electrical Power and Energy Systems*, page 893–903.
- Chen, C.-L. and Wang, S.-C. (1993). Branch-and bound scheduling for thermal generating units. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 8(2):184–189.
- Chiang, C.-L. (2005). Improved genetic algorithm for power economic dispatch of units with valve-point effects and multiple fuels. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 20(4):1690–1699.
- Chiang, C.-L. (2007). Genetic-based algorithm for power economic load dispatch. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 1(2):261–269.
- Coelho, L. S. and Mariani, V. C. (2008). Particle swarm approach based on quantum mechanics and harmonic oscillator potential well for economic load dispatch with valve-point effects. *Energy Conversion and Management*, page 3080–3085.
- Dudu, J., Martin, P., Marlin, A., and Pouget, J. (1972). An optimal formulation and solution of short-range operating problems for a power system with flow constraints. *Proceedings of the IEEE*, 60(1):54–63.
- Fan, J. and Zhang, L. (1998). Real-time economic dispatch with line flow and emission constraints using quadratic programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(2):320–325.
- Gurobi Optimization, Inc. (2012). Gurobi optimizer reference manual, version 5.0. <http://www.gurobi.com>.
- He, D., Wang, F., and Mao, Z. (2008). A hybrid genetic algorithm approach based on differential evolution for economic dispatch with valve-point effect. *Electrical Power and Energy Systems*.
- Hooshmand, R.-A., Parastegari, M., and Morshed, M. J. (2012). Emission, reserve and economic load dispatch problem with non-smooth and non-convex cost functions using the hybrid bacterial foraging-nelder-mead algorithm. *Applied Energy*, page 443–453.

- Jabr, R., Coonick, A., and Cory, B. (2000). A homogeneous linear programming algorithm for the security constrained economic dispatch problem. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 15(3):930–937.
- Jeyakumar, D., Jayabarathi, T., and Raghunathan, T. (2006). Particle swarm optimization for various types of economic dispatch problems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 28(1):36–42.
- Lin, W.-M., Cheng, F.-S., and Tsay, M.-T. (2002). An improved tabu search for economic dispatch with multiple minima. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 17(1):108–112.
- Nomana, N. and Iba, H. (2008). Differential evolution for economic load dispatch problems. *Electric Power Systems Research*, page 1322–1331.
- Pedroso, J. P., Rais, A., Kubo, M., and Muramatsu, M. (2012). *Mathematical Optimization: Solving Problems with Gurobi and Python*. Internet book, Portugal, Japan. <http://www.dcc.fc.up.pt/jpp/GurobiBook>.
- Pothiya, S., Ngamroo, I., and Kongprawechnon, W. (2007). Application of multiple tabu search algorithm to solve dynamic economic dispatch considering generator constraints. *Energy Conversion and Management*, 49(6):506–516.
- Robbie Morrison (2008). Sos2 constraints in glpk. [http://winglpk.sourceforge.net/media/glpk-sos\\_202.pdf](http://winglpk.sourceforge.net/media/glpk-sos_202.pdf).
- Sinha, N., Chakrabarti, R., and Chattopadhyay, P. K. (2003). Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 7(1):83–94.
- van Rossum, G. (1995). Python reference manual.
- Viana, A., Sousa, J. P., and Matos, M. (2003). Using grasp to solve the unit commitment problem. *Annals of Operations Research*, page 117–132.
- Victoire, T. A. A. and Jeyakumar, A. E. (2004). Hybrid pso–sqp for economic dispatch with valve-point effect. *Electric Power Systems Research*, page 51–59.
- Vlachogiannis, J. G. and Lee, K. Y. (2010). Economic load dispatch—a comparative study on heuristic optimization techniques with an improved coordinated aggregation-based pso. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 25(1):991–1001.
- Wong, K. and Fong, C. (1993). Simulated annealing based economic dispatch algorithm. *IEE PROCEEDINGS-C*, 140(6):509–515.
- Wood, A. J. and Wollenberg, B. F. (1996). *Power Generation, Operation, and Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- Zare, K., Haque, M. T., and Davoodi, E. (2012). Solving non-convex economic dispatch problem with valve point effects using modified group search optimizer method. *Electric Power Systems Research*, page 83–89.