Programação Linear e Algumas Extensões

Adília Oliveira Neves Rafael

Mestrado em Matemática para Professores

Departamento de Matemática

2014

Orientadora:
Maria do Carmo Miranda Guedes,
Professora Aposentada, FCUP

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

MSc

Agradecimentos

À minha orientadora, Doutora Maria do Carmo Miranda Guedes, não só por ter aceitado a orientação desta Dissertação, mas também pela constante ajuda e disponibilidade.

À minha família pela compreensão, apoio e incentivo.

A todos os professores e colegas deste mestrado, que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Nos mais diversos setores de atividade, como o comércio, a indústria, a gestão de recursos humanos, entre outros, há a procura, entre várias soluções possíveis para um dado problema, da solução ótima. Esta solução ótima satisfaz o objetivo, sendo condicionada pelas limitações das variáveis envolvidas no problema. A Programação Linear pode ser considerada uma técnica que permite otimizar funções lineares sujeitas a restrições igualmente lineares.

A *Programação Linear - breve introdução*, integra o programa, atualmente em vigor, do Ensino Secundário, sendo importante para o professor um aprofundamento e uma ampliação do conhecimento matemático nesta área. Assim, o objetivo desta dissertação é fazer um estudo, de modo acessível, da Programação Linear.

Neste trabalho são apresentados exemplos de problemas de Programação Linear, bem como a resolução algébrica, gráfica e computacional de alguns deles.

Para além disso, é estudado o método simplex, desenvolvido por Dantzig, para a resolução de problemas de Programação Linear e referidos alguns aspetos geométricos que permitem dar uma interpretação a estes problemas e às suas soluções.

Aborda-se a teoria da dualidade, incluindo propriedades dos problemas duais.

São também referidos os casos particulares dos modelos de transporte e afetação, apresentando-se algoritmos específicos para a resolução deste tipo de problemas.

Termina-se este trabalho com a apresentação de algumas conclusões.

Palavras-chave: Programação Linear, problemas de Programação Linear, método simplex, problemas duais, problema de transporte, problema de afetação.

Abstract

In various sectors of activity, such as of trade, industry, human resource management, among others, there is a demand of, among different possible solutions to a given problem, the optimal solution. This optimal solution satisfies the goal, being constrained by the limitations on the variables involved in the problem. Linear Programming can be considered a technique that allows optimising linear functions submitted to constraints also linear.

The *Linear Programming - brief introduction*, integrates the program, currently in use, of the Secondary Education, being important for the teacher a deepening and broadening of mathematical knowledge in this area. The objective of this dissertation is to make an accessible study of Linear Programming.

In this work, examples of linear programming problems are presented, as well as algebraic, graphical and computational resolution of some of them.

In addition, the simplex method developed by Danzig for solving linear programming problems is studied and some geometric aspects that allow an interpretation of these problems and their solutions are also mentioned.

The theory of duality is covered including properties of dual problems.

Models of transportation and assignment are also mentioned, being presented specific algorithms for solving such problems.

This work ends with the presentation of some conclusions.

Keywords: Linear Programming, Linear Programming problems, simplex method, dual problems, transportation problem, assignment problem.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento e objetivos

A Programação Linear integra o *Tema 1- Geometria no plano e no Espaço II*, do programa atual da disciplina de Matemática A do Ensino Secundário (11ºano), homologado em 2002.

A escolha do tema desta Dissertação teve por base, além do gosto pessoal, a necessidade de ampliar e consolidar os conhecimentos e, assim, contribuir, como professora, para uma melhoria do processo de ensino aprendizagem.

Para a elaboração deste trabalho, efetuou-se uma leitura cuidada de todos os documentos que integram a bibliografia, tendo sido selecionados os conteúdos a abordar. Assim, no subcapítulo 1.2, será produzida uma breve nota histórica, que tem como referência quase todos os livros que constam da bibliografia. No capítulo 2 vai ser descrito o modelo de Programação Linear e vão ser apresentados exemplos de problemas, bem como a sua resolução gráfica. O capítulo 3 vai ser dedicado ao método simplex e teve por base os elementos [1], [2] e [5] da bibliografia. A dualidade em Programação Linear vai ser tratada no capítulo 4, tendo sido baseada em [1] e [6]. No capítulo 5 vão ser apresentados modelos de transporte e afetação tendo por base [3] e [6]. Vai ser feita uma referência à Programação Linear Inteira no capítulo 6 essencialmente com base em [6]. Do capítulo 7 consta a resolução computacional de alguns problemas. No capítulo 8 vão ser apresentadas algumas conclusões deste estudo.

1.2 Breve introdução histórica

Uma tarefa básica de gestão é tomar decisões [5]. Pode dizer-se que a Investigação Operacional é uma abordagem científica na tomada de decisões que normalmente envolve o uso de modelos matemáticos. A Investigação Operacional surgiu para resolver com eficiência problemas de administração em organizações que trabalham com a afetação ótima de recursos escassos [7]. Os modelos de Programação Matemática fazem parte de um vasto conjunto de modelos de otimização e têm como finalidade maximizar ou minimizar uma determinada função objetivo sujeita a um conjunto de restrições. Nos modelos de Programação Matemática estão incluídos os modelos de Programação Linear e Programação não Linear. Estes modelos são determinísticos não dando lugar a estimativas ou previsões [2]. Por sua vez, os modelos de Programação Linear incluem modelos de Programação Linear Inteira, Programação Linear não Inteira e Programação Linear Mista [7].

A Programação Linear consiste no tratamento de problemas de maximização ou minimização de uma função linear satisfazendo um certo número de restrições que podem ser traduzidas por condições lineares [4].

Tal como outros ramos científicos atuais, a Programação Linear poderá ter a sua origem na Antiguidade Clássica, ou até mesmo na Antiguidade Oriental, uma vez que a procura do ótimo foi um tema que sempre interessou o Homem [5]. Durante mais de 2000 anos, foram estudados vários processos para resolver equações lineares; no entanto, só a partir da Segunda Grande Guerra, em meados do século XX, é que os sistemas de inequações lineares começaram a ser analisados [4].

O trabalho em Programação Linear deve o seu início, principalmente, a questões militares e económicas [4]. Um dos matemáticos que mais se aplicou na resolução de problemas de natureza económica foi o russo Leonid V. Kantorovich (1912-1986). Em 1939 escreveu um livro intitulado *Métodos Matemáticos de Organização e Planeamento da Produção,* onde expõe, de forma rigorosa, um problema de Programação Linear; porém, este trabalho não teve, nessa altura, o devido reconhecimento. Durante a Segunda Grande Guerra, surgiram problemas logísticos relacionados com deslocamento, alojamento e manutenção de grandes exércitos, que levaram ao estudo da Programação Linear. Na Força Aérea Americana, foi formado um grupo de trabalho SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*) do qual George Dantzig (1914-2005) fazia parte. Foi Dantzig que, em 1947, desenvolveu um processo de resolução de problemas de Programação Linear, que se designa por *método simplex* [5].

Embora seja possível resolver manualmente problemas simples de Programação Linear, não são os mais interessantes do ponto de vista das aplicações, mas sim os que envolvem um número muito elevado de variáveis e equações. Estes necessitam de alguma forma de tratamento computacional. A partir de 1947 foram desenvolvidas diversas técnicas computacionais com o intuito de serem usadas na resolução de problemas de Programação Linear, envolvendo centenas de variáveis e equações. Atualmente há problemas com muito mais variáveis [4].

Capítulo 2

O modelo de Programação Linear

2.1 Formulação matemática do modelo

Em presença de um problema concreto torna-se essencial a sua formulação matemática para que ele possa ser resolvido pelo processo mais adequado.

A forma geral de um problema de Programação Matemática pode ser dada por

$$\max\left\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S \subset R^n \right\}$$

sendo S a região admissível geralmente determinada por

$$S = \left\{ \mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i = 1,\dots,m \right\}$$

Esta forma não restringe o problema, uma vez que é possível escrever desta maneira qualquer problema de otimização de $f(\mathbf{x})$ sujeita a condições.

No caso em que as funções f e g_i para $i = 1,\dots,m$ são lineares, então o problema é de Programação Linear.

O problema típico tem a forma

$$\max\left\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

em que $\mathbf{c} \in R^n, \mathbf{b} \in R^m$ e $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$.

A função f designa-se por função objetivo, as condições a que vai ser sujeita designam-se por restrições e $\mathbf{x}$ é o vetor das variáveis de decisão.

Os problemas de otimização têm aplicação prática em áreas tão diversas como a Física, Engenharia e Economia.

De salientar que o modelo de Programação Linear não se pode aplicar a todas as situações. A formulação de um problema deste tipo está condicionada à verificação das hipóteses de proporcionalidade, divisibilidade, não negatividade, aditividade e linearidade da função objetivo assim como das restrições.

Nos casos em que a situação real não permite a aplicação do modelo de Programação Linear é geralmente possível simplificar ou alterar a sua descrição de modo a criar as condições da aplicabilidade desse modelo [2].

2.2 Exemplos de problemas de Programação Linear

Para ilustrar a natureza matemática dos problemas de Programação Linear e clarificar termos utilizados na descrição do modelo, vão ser apresentados alguns problemas simples. Admite-se que, nos problemas apresentados, são verificadas as hipóteses que assistem a um problema de Programação Linear.

Problema 1

Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 80 hectares. Pretende semear pelo menos 20 hectares de trigo e pelo menos 10 hectares de milho. Sabe-se que:

- *o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros,*
- *o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros,*

e que,

- *cada hectare de trigo dá um lucro de 700 euros,*
- *cada hectare de milho dá um lucro de 600 euros.*

Admitindo que o agricultor não pode investir mais do que 100 000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo a que tenha um lucro máximo?

Adaptado de Teste Intermédio de Matemática A do 11º Ano (2006)

Formalização do problema

Sejam x_1 e x_2 as variáveis de decisão, respetivamente, o número de hectares de trigo e de milho a produzir e z o lucro total proveniente da produção. Tem-se como objetivo determinar valores para as variáveis que maximizem

$$z = 700\ x_1 + 600\ x_2,$$

tendo em atenção as restrições impostas pela área de cultivo e pela capacidade financeira do agricultor.

Este problema traduz-se formalmente pelo seguinte modelo:

Maximizar $z = 700x_1 + 600x_2$

Sujeito a
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \le 80 \\ & x_1 \ge 20 \\ & x_2 \ge 10 \\ & 1500\ x_1 + 1000\ x_2 \le 100000 \end{aligned}$$

Problema 2

Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia elétrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: de origem convencional, maioritariamente da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período noturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40 MWh.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- *O preço por cada MWh é de 80 euros.*

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- *O preço por cada MWh é de 90 euros;*
- *O fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 MWh.*

Pretende-se determinar que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B (1ª fase de 2007)

Formalização do problema

Sejam as variáveis de decisão x_1 e x_2, respetivamente, o número de MWh de energia convencional e de energia eólica a consumir anualmente e z o custo resultante desse consumo. Pretende-se determinar valores para as variáveis que minimizem

$$z = 80x_1 + 90x_2,$$

tendo em atenção as restrições impostas pela cobertura de iluminação no período noturno e pelas questões ambientais.

A formulação deste problema traduz-se no seguinte modelo:

Minimizar $z = 80x_1 + 90x_2$

Sujeito a
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 40 \\ & x_2 \geq x_1 \\ & x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 3

Uma frutaria confeciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.

Bebida X: com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Bebida Y: com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confecionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 3 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 2 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confecionar por dia, para maximizar o lucro?

Adaptado de Teste Intermédio de Matemática A do 11º Ano (2008)

Formalização do problema

Considere-se as variáveis de decisão x_1 e x_2, respetivamente, o número de litros de bebida *X* e o número de litros de bebida *Y*. Pretende-se determinar valores para as variáveis que maximizem o lucro resultante da venda das bebidas, sendo este dado por

$$z = 3x_1 + 2x_2,$$

satisfazendo as restrições impostas pela quantidade de litros de sumo de laranja e de sumo de manga existentes diariamente na frutaria.

A formulação deste problema traduz-se no seguinte modelo:

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a $\frac{x_1}{2} + \frac{2x_2}{3} \le 12$

$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

Problema 4

Maximizar $z = x_1 + x_2$

Sujeito a $-2x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 - 2x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

Problema 5

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

Sujeito a $x_1 + x_2 \leq 20$

$3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

Problema 6

O proprietário de uma estufa pretende planificar o trabalho de fornecimento de flores para parques da cidade. Para o efeito vai usar tulipas, narcisos e arbustos floridos em três tipos de esquemas.

No esquema do tipo 1 são utilizadas 30 tulipas, 20 narcisos e 4 arbustos floridos. No esquema do tipo 2 são utilizadas 10 tulipas, 40 narcisos e 3 arbustos floridos. No esquema do tipo 3 são utilizadas 20 tulipas, 50 narcisos e 2 arbustos floridos. O lucro líquido é de 50 euros para cada esquema do tipo 1, 30 euros para cada esquema do tipo 2 e 60 euros para cada esquema do tipo 3. O proprietário da estufa dispõe de 1000 tulipas, 800 narcisos e 100 arbustos floridos. Quantos esquemas de cada tipo deve usar para obter o máximo lucro?

Adaptado do problema 35 p.118 de [7]

Formalização do problema

Neste problema, as variáveis de decisão, x_1, x_2 e x_3 representam respetivamente, o número de esquemas do tipo 1, do tipo 2 e do tipo 3 que o proprietário da estufa vai utilizar e z o lucro total decorrente dessa utilização.

O objetivo é determinar valores para as variáveis que maximizem

$$z = 50x_1 + 30x_2 + 60x_3,$$

respeitando as restrições impostas pela quantidade existente de túlipas, narcisos e de arbustos floridos.

Este problema traduz-se formalmente pelo seguinte modelo:

Maximizar $z = 50x_1 + 30x_2 + 60x_3$

Sujeito a $30x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 1000$

$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 800$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2.3 Resolução gráfica de problemas

Resolução do problema 1

A interseção dos semiplanos definidos pelas inequações que exprimem as restrições é a região admissível. Neste problema, a região admissível tem 4 vértices: A, B, C e D. Dado que a função objetivo é

$$z = 700\,x_1 + 600\,x_2$$

desenha-se a reta de equação

$$7\,x_1 + 6\,x_2 = 0$$

e desloca-se esta reta paralelamente a si própria, no sentido de crescimento de z .

Verifica-se, assim, que e a solução ótima é atingida no vértice B (40,40), uma vez que é o último ponto de contacto com a região admissível. A solução ótima é então, $x_1 = x_2 = 40$ e $z = 52\,000$.

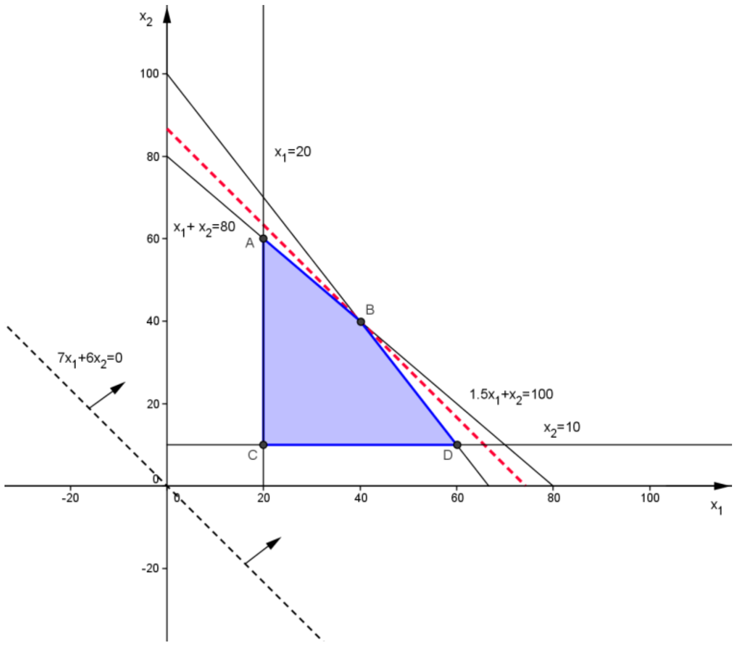

Figura 2.1: Representação gráfica do problema 1

Resolução do problema 2

Pode obter-se a região admissível por procedimento análogo ao utilizado no problema anterior. Neste caso, a região admissível tem 3 vértices: A, B e C. Como a função objetivo é

$$z = 80x_1 + 90x_2$$

traça-se, por exemplo, a reta de equação

$$8x_1 + 9x_2 = 720$$

e desloca-se esta reta paralelamente a si própria no sentido do decrescimento de z .

Desta forma, a solução ótima é atingida no vértice C (20,20) uma vez que é o último ponto de contacto com a região admissível. A solução ótima para este problema é $x_1 = x_2 = 20$ e $z = 3400$.

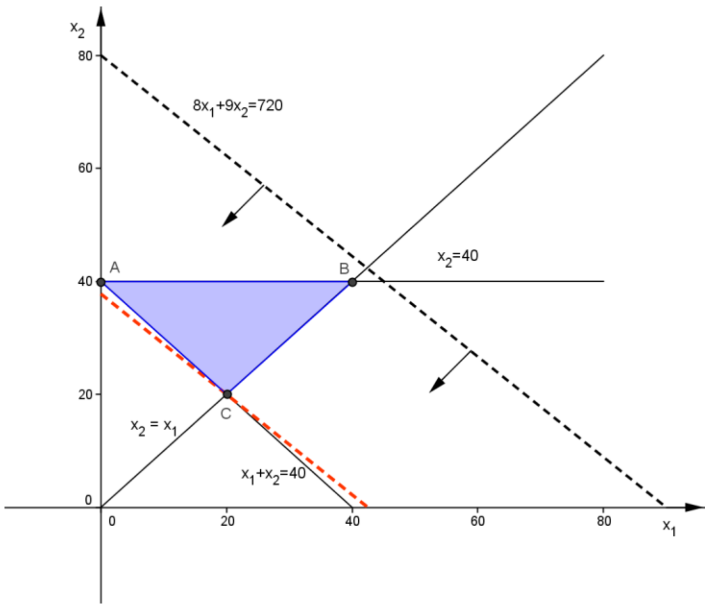

Figura 2.2: Representação gráfica do problema 2

Resolução do problema 3

Neste problema, a região admissível tem 4 vértices: A, B, C e O e foi encontrada da mesma forma que nos problemas anteriores. Uma vez que a função objetivo é

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

desenha-se a reta de equação

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

e desloca-se esta reta paralelamente a si própria, no sentido de crescimento de z.

Assim, a solução ótima é atingida quer no vértice B (20,0) quer no vértice C (16,6) e ainda em qualquer ponto da aresta [BC], sendo 60 o valor máximo da função objetivo. Esta situação resulta do facto da reta representativa da função objetivo ser paralela a uma das restrições. Dado que este problema apresenta mais do que uma solução ótima diz-se que se está em presença de *soluções ótimas alternativas* [2] ou solução ótima múltipla [5].

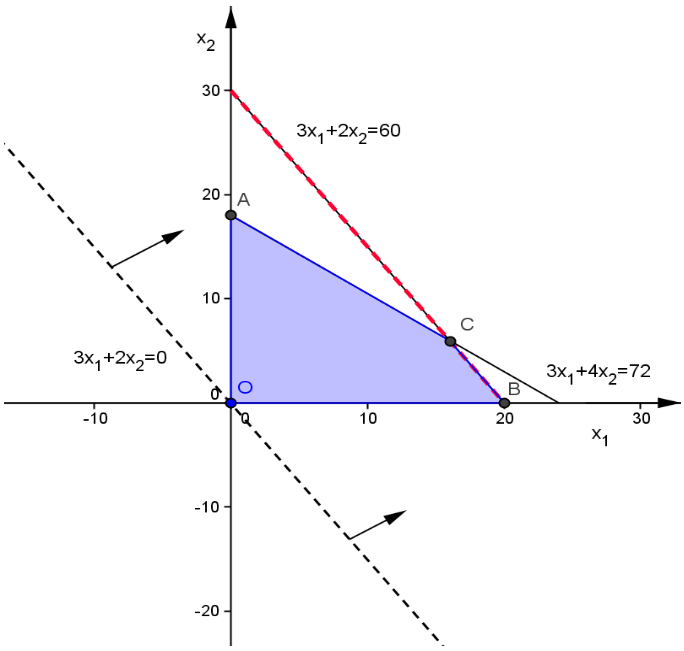

Figura 2.3: Representação gráfica do problema 3

Resolução do problema 4

Neste problema, a região admissível tem 3 vértices: A, B e O; porém, não é limitada. Dado que a função objetivo é

$$z = x_1 + x_2$$

traçando a reta de equação

$$x_1 + x_2 = 0$$

verifica-se que esta pode ser sempre deslocada paralelamente a si própria no sentido de crescimento de z e conter sempre pontos do conjunto das soluções admissíveis.

Assim, a função objetivo pode tomar valores arbitrariamente elevados e por consequência não existir um valor máximo finito para z. Quando se verifica esta situação diz-se que se está em presença de *solução não limitada* [5].

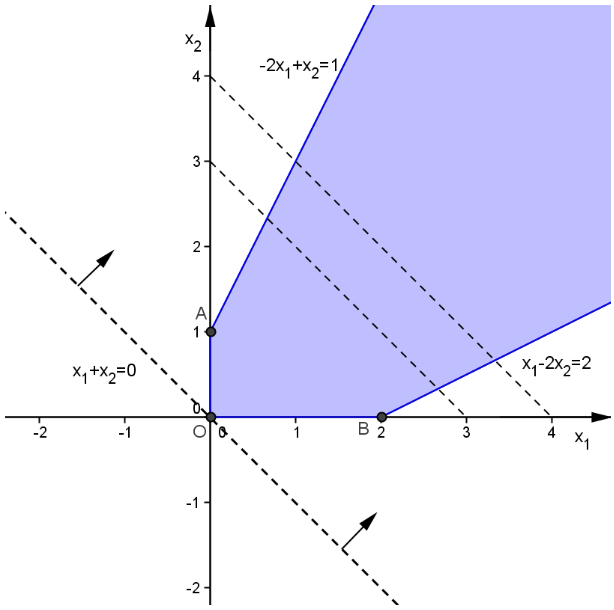

Figura 2.4: Representação gráfica do problema 4

Resolução do problema 5

A região admissível tem 3 vértices: A, B e O. Como a função objetivo é

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

desenha-se a reta de equação

$$5x_1 + 4x_2 = 0$$

Deslocando esta reta paralelamente a si própria no sentido de crescimento de z verifica-se que a solução ótima é atingida no vértice B (20,0) sendo 100 o valor máximo da função objetivo. O vértice B é um ponto de interseção de mais do que duas restrições. Quando ocorre esta situação, diz-se que se está em presença de uma *solução ótima degenerada* [5].

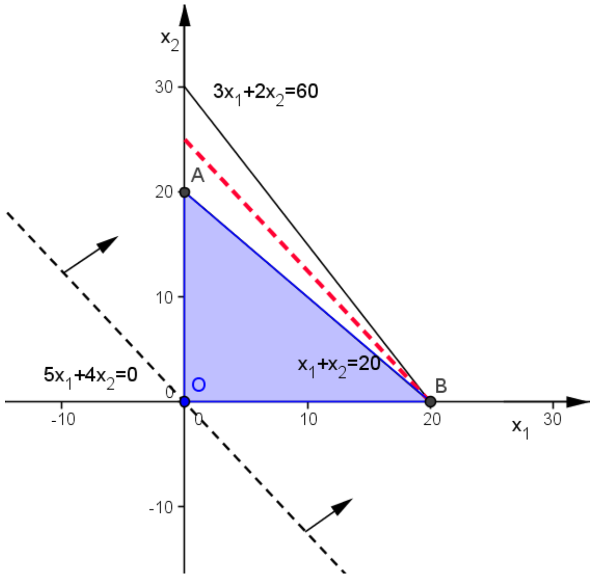

Figura 2.5: Representação gráfica do problema 5

Os exemplos apresentados ilustram algumas situações que podem ocorrer na resolução de problemas de Programação Linear, nomeadamente casos particulares como os que se verificaram nos problemas 3, 4 e 5. No próximo capítulo será feita uma abordagem algébrica destas situações.

Capítulo 3

Método simplex

3.1 Definições e notação

Como se verificou no capítulo anterior, é possível resolver graficamente problemas de Programação Linear quando estes têm um número reduzido de variáveis. No entanto, é um procedimento com interesse meramente pedagógico. Torna-se necessário encontrar processos que sejam suficientemente abrangentes de modo a não colocarem entraves na resolução de problemas qualquer que seja a sua dimensão, quer ao nível do número de variáveis, quer ao nível do número de restrições envolvidas. Um desses processos, que se deve a Dantzing, é designado por método simplex. De salientar que o método simplex pode apresentar vários algoritmos, primal, dual e primal-dual, e estes podem ter várias formas (habitual, revista e lexicográfica) [5]. Neste capítulo, vai ser apresentada a forma habitual do algoritmo primal do simplex e será feita referência à sua forma revista.

Considera-se que um problema de Programação Linear está na forma padrão, se tiver a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz de m linhas e n colunas, com $m \leq n$. Os vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, e $\mathbf{x}$ devem ter a dimensão adequada para ser possível efetuar o cálculo indicado [1].

Para colocar na forma padrão um problema de Programação Linear que se encontra na forma típica apresentada em 2.1, é necessário transformar inequações em equações. Para o efeito, introduzem-se no problema inicial novas variáveis, não negativas, que são designadas por variáveis desvio ou variáveis auxiliares [5].

Seja $\mathbf{A_b}$ a matriz completa constituída por $\mathbf{A}$ e pelo vetor dos termos independentes, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A_b} = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

Relativamente ao sistema de equações lineares, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pode afirmar-se que:

- se $car(\mathbf{A}) = car(\mathbf{A_b})$, o sistema tem solução;
- se $car(\mathbf{A}) = r < m$ existem $m - r$ equações redundantes;
- se $car(\mathbf{A}) = m = n$, o sistema tem solução única;
- se $car(\mathbf{A}) = m < n$, o sistema tem uma infinidade de soluções.

Num problema de programação linear com $m < n$ e $car(\mathbf{A}) = m$, designa-se por:

- solução todo o $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;
- solução admissível todo o $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$;
- solução básica todo o $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com, no máximo, m componentes não nulas;
- solução básica admissível, uma solução básica com todas as componentes não negativas;
- solução básica degenerada, uma solução básica admissível com mais do que $n - m$ componentes nulas [1].

Pode entender-se a matriz $\mathbf{A}$ como sendo um vetor linha de vetores coluna $\mathbf{a}_j \in R^m$, $j = 1, \ldots, n$ isto é

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Seja $\mathbf{B}$ a matriz constituída por m colunas de $\mathbf{A}$ linearmente independentes. Definida deste modo a matriz $\mathbf{B}$ é uma base de R^m e pode, também, ser vista como um vetor linha de vetores coluna $\mathbf{b}_i \in R^m$, $i = 1, \ldots, m$, ou seja

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)$$

É possível representar uma qualquer das colunas $\mathbf{a}_j$ de $\mathbf{A}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathbf{B}$

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{b_1} + y_{2j}\mathbf{b_2} + \ldots + y_{mj}\mathbf{b}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{b}_i = \mathbf{By}_j \tag{3.2}$$

De (3.2) resulta que

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$$

Designando por $\mathbf{N}$ a matriz $m \times (n - m)$ constituída pelas $n - m$ colunas de $\mathbf{A}$ que não pertencem a $\mathbf{B}$ e admitindo que a matriz $\mathbf{B}$ é formada pelas primeiras m colunas de $\mathbf{A}$, é possível escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na forma

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \tag{3.3}$$

Em (3.3), fazendo $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ vem

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \tag{3.4}$$

De (3.4) resulta que

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Se os elementos do vetor coluna $\mathbf{x}_B$ forem todos não negativos então a base $\mathbf{B}$ será admissível, assim como a solução básica que lhe está associada. O valor da função objetivo, z, será dado por:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

3.2 Melhoria da solução

Depois de conhecida uma solução básica admissível associada a uma base $\mathbf{B}$, pretende-se, se for possível, determinar a partir dela uma nova solução básica admissível de modo a melhorar o valor da função objetivo. Para o efeito vão ser consideradas as soluções básicas admissíveis para as quais uma só coluna de $\mathbf{B}$ é alterada.

Seja $\mathbf{a}_j$ uma coluna de $\mathbf{A}$ de tal forma que $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$; então qualquer vetor $\mathbf{b}_i$, para o qual $y_{ij} \neq 0$, pode ser substituído por $\mathbf{a}_j$. O novo conjunto de vetores ainda forma uma base. No caso particular em que $i = r$, sendo $y_{rj} \neq 0$, tem-se

$$\mathbf{b}_r = \frac{\mathbf{a}_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \mathbf{b}_i \tag{3.5}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{m} x_{B_i}\mathbf{b}_i = \mathbf{b} \tag{3.6}$$

resulta de (3.5) e (3.6) que

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m}\left(x_{B_i} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}}x_{B_r}\right)\mathbf{b}_i + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}\mathbf{a}_j = \mathbf{b}$$

Uma vez que a nova solução básica tem de ser também admissível, então

$$x_{B_i} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}}x_{B_r} \geq 0, \quad i \neq r \tag{3.7}$$

e

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \geq 0 \tag{3.8}$$

Para que estas condições se verifiquem a escolha do vetor $\mathbf{b}_r$ não pode ser arbitrária. No caso em que $y_{rj} > 0$ e $y_{ij} < 0$, $i \neq r$ então (3.7) é imediatamente satisfeita. Nos casos em que $y_{ij} > 0$, $i \neq r$ é necessário que se verifique a condição

$$\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \geq 0, \quad i \neq r$$

Assim, *r* deve ser escolhido de tal forma que

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \min\left\{\frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\} = \theta \tag{3.9}$$

A nova base $\hat{\mathbf{B}}$ tem colunas $\hat{\mathbf{b}}_i, i = 1,\ldots,m$, sendo:

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{b}_i, \quad i \neq r$$

$$\hat{\mathbf{b}}_r = \mathbf{a}_j$$

Deste modo obtêm-se

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{b} \quad \text{sendo} \quad \hat{x}_{B_i} = x_{B_i} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}}x_{B_r}, \quad i \neq r$$

$$\hat{x}_{B_r} = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}$$

O valor da função objetivo para a nova solução básica admissível é dado por:

$$\hat{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(x_{B_i} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{B_r} \right) c_{B_i} + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j = \hat{\mathbf{c}}_B^T \hat{\mathbf{x}}_B$$

Sendo

$$\hat{c}_{B_i} = c_{B_i}, \quad i \neq r$$

$$\hat{c}_{B_r} = c_j$$

Uma vez que

$$c_{B_r} \left(x_{B_r} - \frac{y_{rj}}{y_{rj}} x_{B_r} \right) = 0$$

pode escrever-se

$$\hat{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(x_{B_i} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{B_r} \right) c_{B_i} + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j + c_{B_r} \left(x_{B_r} - \frac{y_{rj}}{y_{rj}} x_{B_r} \right) \tag{3.10}$$

De (3.10) resulta que

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij} + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j \tag{3.11}$$

Fazendo em (3.11)

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij} \qquad \text{e} \qquad \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \theta$$

vem

$$\hat{z} = z + \theta \left(c_j - z_j \right) \tag{3.12}$$

A expressão (3.12) relaciona o novo valor da função objetivo associado à nova solução básica admissível com o seu valor anterior e também com o valor que vai assumir a nova variável básica $\hat{x}_{B_r} = \dfrac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \theta$.

No caso em que $\theta(c_j - z_j) > 0$ então $\hat{z} > z$. Se a solução de que se parte for não degenerada então $\theta > 0$, logo para que $\hat{z} > z$ tem que ser $c_j - z_j > 0$. Assim, para que se verifique uma melhoria da função objetivo, a coluna $\mathbf{a}_j$ deve ser escolhida de tal forma que $c_j - z_j > 0$ e exista pelo menos um $y_{ij} > 0$. Teoricamente pode escolher-se qualquer coluna $\mathbf{a}_j$ a verificar as condições referidas pois a solução ótima, no caso de existir, será atingida. No entanto pode aplicar-se como critério de escolha, a coluna $\mathbf{a}_k$ de tal forma que

$$c_k - z_k = \max \{c_j - z_j, c_j - z_j > 0\}$$

Quando existe mais do que um índice *j* correspondente ao máximo, pode optar-se pelo menor *j* [5].

3.3 Teste de otimalidade

Considere-se um problema de Programação Linear, na forma padrão, em que não há degenerescência. Enquanto existir um vetor $\mathbf{a}_j$ fora da base verificando $c_j - z_j > 0$ e pelo menos um $y_{ij} > 0$, pode fazer-se a passagem de uma solução básica admissível para outra mudando um único vetor da base. Deste modo, cada vez que se altera a base, obtêm-se uma melhoria no valor da função objetivo. Este processo é finito porque o número de bases é finito. Assim, este processo termina de uma das seguintes formas:

i) Um ou mais $c_j - z_j > 0$, e para cada $c_j - z_j > 0$, $y_{ij} \leq 0$ para todo o $i = 1, \ldots, m$;

ii) Todos os $c_j - z_j \leq 0$ para as colunas de $\mathbf{A}$ que não pertencem à base.

Se o processo terminar por ocorrência de i) então há uma solução não limitada. No caso de ocorrer ii) o processo termina porque existe uma solução básica ótima [1].

3.4 Algoritmo do método simplex

Considere-se um problema de Programação Linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A resolução deste problema pode fazer-se pelo método simplex, cujo processo iterativo se vai descrever.

Após ser conhecida uma solução básica inicial associada a uma base $\mathbf{B}$, sendo z o correspondente valor da função objetivo e conhecidos os $c_j - z_j$ e y_j para todas as colunas $\mathbf{a}_j$, procede-se do seguinte modo:

1. Analisar $c_j - z_j$:

   a) Se todos os $c_j - z_j \leq 0$, a solução básica admissível é ótima.

   b) Se um ou mais dos $c_j - z_j > 0$ e para pelo menos um $\mathbf{a}_k$ para o qual $c_k - z_k > 0$, todos os $y_{ik} \leq 0$, existe uma solução não limitada.

   c) Se um ou mais dos $c_j - z_j > 0$ e cada um deles tem $y_{ij} > 0$ para pelo menos um i, escolher um dos destes vetores, seja $\mathbf{a}_k$, para entrar base.

2. No caso de se verificar 1 c), determina-se o vetor a sair da base usando o critério:

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\}$$

   Assim, a coluna $\mathbf{a}_k$ substitui $\mathbf{b}_r$ na base.

3. Calcular $\hat{\mathbf{x}}_B$, $\hat{z}$, $\hat{\mathbf{y}}_j$ e $c_j - \hat{z}_j$ para todo o j.

   Voltar em seguida ao passo 1.

Se não houver degenerescência, este processo iterativo permite encontrar uma solução básica admissível ótima para o problema, depois de um número finito de passos uma vez que o número de bases é finito.

Dado um problema de Programação Linear apresentado na forma padrão, é possível a sua resolução utilizando o algoritmo simplex, condensando os cálculos necessários para o seu desenvolvimento em quadros sucessivos. O processo tem início com a construção de um quadro contendo a informação relativa ao problema formulado e que corresponde a uma primeira solução. Esta solução, de iteração para iteração, vai sendo melhorada até se encontrar a solução ótima.

O quadro simplex pode apresentar-se com a seguinte forma:

			c_1	c_2		c_k		c_n
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\cdots$	$\mathbf{a}_k$	$\cdots$	$\mathbf{a}_n$
c_{B_1}	x_{B_1}	y_{10}	y_{11}	y_{12}		y_{1k}		y_{1n}
c_{B_2}	x_{B_2}	y_{20}	y_{21}	y_{22}		y_{2k}		y_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_{B_r}	x_{B_r}	y_{r0}	y_{r1}	y_{r2}		y_{rk}		y_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_{B_m}	x_{B_m}	y_{m0}	y_{m1}	y_{m2}		y_{mk}		y_{mn}
	z	z_0	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$		$c_k - z_k$		$c_n - z_n$

Quadro 3.1: Quadro simplex

3.5 Exemplo prático

Considere-se o seguinte problema de Programação Linear na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 30 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 40 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

A apresentação do problema nesta forma permite a identificação imediata de uma solução básica inicial, sendo assim possível construir o quadro simplex que se segue:

			5	6	0	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
0 0 0	x_3 x_4 x_5	30 40 12	2 4 1	4 3 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1
	z	0	5	6	0	0	0

Quadro 3.2: 1º Quadro simplex do exemplo prático

Neste primeiro quadro pode identificar-se uma solução básica admissível inicial bem como a base que lhe está associada. No entanto, esta solução não é ótima dado que existem $c_j - z_j$ positivos. O maior é $c_2 - z_2 = 6$, pelo que $\mathbf{a}_2$ é o vetor selecionado para entrar na base. Atendendo ao critério definido em (3.9), o vetor a sair da base é $\mathbf{a}_3$ uma vez que $\min\left\{\frac{30}{4}, \frac{40}{3}, \frac{12}{1}\right\} = \frac{30}{4}$

Depois de efetuados os cálculos necessários, obtém-se assim o seguinte quadro simplex :

			5	6	0	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
6 0 0	x_2 x_4 x_5	$15/2$ $35/2$ $9/2$	$1/2$ $5/2$ $1/2$	1 0 0	$1/4$ $-3/4$ $-1/4$	0 1 0	0 0 1
	z	45	2	0	$-3/2$	0	0

Quadro 3.3: 2º Quadro simplex do exemplo prático

A solução básica admissível que se pode identificar no segundo quadro não é ainda a solução ótima, dado que $c_1 - z_1 = 2 > 0$. Assim, o vetor a entrar na base vai ser $\mathbf{a}_1$ e o vetor a sair da base vai ser $\mathbf{a}_4$, de acordo com o critério já utilizado na primeira iteração.

O novo quadro toma então a seguinte forma:

			5	6	0	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
6	x_2	4	0	1	$2/5$	$-1/5$	0
5	x_1	7	1	0	$-3/10$	$2/5$	0
0	x_5	1	0	0	$-1/10$	$-1/5$	1
	z	59	0	0	$-9/10$	$-4/5$	0

Quadro 3.4: 3º Quadro simplex do exemplo prático

Verifica-se no terceiro quadro que todos os $c_j - z_j$ são não positivos, pelo que a solução obtida é ótima, sendo $x_1 = 7, x_2 = 4, x_5 = 1,\ x_3 = x_4 = 0$ e $z = 59$.

3.6 Casos particulares

3.6.1 Solução ótima múltipla

Esta situação é identificada quando, em presença de uma solução básica admissível ótima, se verifica a existência de algum vetor $\mathbf{a}_j$ não pertencente à base, para o qual se tem $c_j - z_j = 0$ e pelo menos um $y_{ij} > 0$. Neste caso, o problema tem uma infinidade de soluções ótimas, sendo pelo menos duas delas básicas e, as restantes, podendo ser obtidas como combinação linear convexa daquelas [5].

Graficamente é possível identificar uma solução ótima múltipla, quando a restrição mais afastada no sentido da deslocação da função objetivo for paralela à reta que a representa [2].

Pode constatar-se este facto em 2.3 na resolução gráfica do problema 3. Verificou-se que o problema apresentava mais do que uma solução ótima. A mesma conclusão pode ser obtida por aplicação do método simplex.

Assim, recorde-se a formulação matemática do problema 3, apresentado em 2.2

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$\frac{x_1}{2} + \frac{2x_2}{3} \leq 12$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Desembaraçando de denominadores as inequações e incluindo no problema variáveis desvio para o transformar na forma padrão, vem:

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 72$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Considerando uma solução básica admissível tem-se o respetivo quadro simplex:

			3	2	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
0	x_3	72	3	4	1	0
0	x_4	60	3	2	0	1
	z	0	3	2	0	0

Quadro 3.5: 1º Quadro simplex do problema 3

Verifica-se que a solução obtida não é ótima, procedendo-se à iteração correspondente:

			3	2	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
0	x_3	12	0	2	1	-1
3	x_1	20	1	$2/3$	0	$1/3$
	z	60	0	0	0	-1

Quadro 3.6: 2º Quadro simplex do problema 3

Foi encontrada uma solução ótima, sendo $x_1 = 20, x_3 = 12, x_2 = x_4 = 0$ e $z = 60$.

No entanto, esta solução ótima não é única, dado que o vetor $\mathbf{a}_2$ está em condições de entrar na base, obtendo-se o seguinte quadro ótimo alternativo:

			3	2	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	a_1	a_2	a_3	a_4
2	x_2	6	0	1	$1/2$	$-1/2$
3	x_1	16	1	0	$-1/3$	$2/3$
	z	60	0	0	0	-1

Quadro 3.7: 3º Quadro simplex do problema 3

A solução ótima correspondente a este novo quadro é:

$x_1 = 16, x_2 = 6, x_3 = x_4 = 0$ e $z = 60$.

É possível obter outras soluções ótimas não básicas, por combinação linear convexa das soluções ótimas básicas já determinadas.

3.6.2 Solução não limitada

Esta situação ocorre, como já foi referido em 3.3, quando $c_j - z_j > 0$, e para cada $c_j - z_j > 0$, $y_{ij} \leq 0$ para todo o $i = 1, \ldots, m$. Neste caso o problema tem uma infinidade de soluções não básicas admissíveis, sem limite superior para o valor da função objetivo [5].

Em termos gráficos, uma condição necessária mas não suficiente para a existência de uma solução não limitada é que o conjunto das soluções admissíveis seja também não limitado [2].

Na resolução gráfica do problema 4 apresentada em 2.3 constatou-se que não existia um valor máximo finito para z. Este resultado pode também verificar-se por aplicação do método simplex.

Assim, retomando o problema 4 apresentado em 2.2

Maximizar $z = x_1 + x_2$

Sujeito a $-2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Incluindo variáveis desvio no problema para o colocar na forma padrão, vem:

Maximizar $z = x_1 + x_2$

Sujeito a $-2x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Considere-se uma solução básica admissível e o correspondente quadro simplex. Tem-se então:

			1	1	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
0	x_3	1	-2	1	1	0
0	x_4	2	1	-2	0	1
	z	0	1	1	0	0

Quadro 3.8: 1º Quadro simplex do problema 4

Uma vez que esta solução não é ótima, efetua-se a iteração respetiva, obtendo-se o quadro seguinte:

			1	1	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
0	x_3	5	0	-3	1	2
1	x_1	2	1	-2	0	1
	z	2	0	3	0	-1

Quadro 3.9: 2º Quadro simplex do problema 4

Verifica-se que a solução obtida não é ótima, podendo ser melhorada se o vetor $\mathbf{a}_2$ entrar na base. No entanto, de acordo com o critério de saída, não é possível fazer sair nenhum vetor da base. Assim, perante esta situação, pode concluir-se que o problema tem uma infinidade de soluções não básicas, sem limite superior para a função objetivo.

3.6.3 Solução degenerada

Se o valor de θ, definido em (3.9) não for único, a nova solução básica admissível será degenerada. No caso em que $x_{B_r} = 0$ então $\theta = 0$, nesta situação tem-se $\hat{x}_{B_i} = x_{B_i}$, para $i \neq r$ e $\hat{x}_{B_r} = 0$, sendo a nova solução também degenerada. No entanto, se a solução de que se parte for degenerada, não se pode concluir que a nova solução básica seja necessariamente degenerada.

Se $x_{B_r} = 0$, para manter a admissibilidade da nova solução é suficiente que $y_{rj} \neq 0$ podendo-se neste caso substituir $\mathbf{b}_r$ por $\mathbf{a}_j$.

De salientar que, caso a solução ótima seja degenerada, podem existir soluções igualmente ótimas a não verificarem o teste de otimalidade referido em 3.3 [1].

Em termos gráficos, as soluções degeneradas podem ser identificadas pelo facto de o ponto que as traduz ser definido por mais do que duas restrições [2].

Esta situação verificou-se em 2.3 na resolução gráfica do problema 5.

A aplicação do método simplex ao problema, permite também identificar a existência de soluções degeneradas.

Retome-se, na forma padrão, o problema 5 apresentado em 2.2

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

Sujeito a $x_1 + x_2 + x_3 = 20$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Considerando uma solução básica admissível, elabora-se o respetivo quadro simplex:

			5	4	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
0 0	x_3 x_4	20 60	1 3	1 2	1 0	0 1
	z	0	5	4	0	0

Quadro 3.10: 1º Quadro simplex do problema 5

Depois de verificar que a solução inicial não é ótima procede-se à respetiva iteração. O vetor $\mathbf{a}_1$ é candidato a entrar na base e constata-se que existe um empate no critério de saída, podendo sair qualquer um dos vetores $\mathbf{a}_3$ ou $\mathbf{a}_4$. Quando ocorre esta situação a solução obtida é necessariamente degenerada. Assim, fazendo por exemplo sair da base $\mathbf{a}_3$ obtém-se o quadro seguinte:

			5	4	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	a_1	a_2	a_3	a_4
5 0	x_1 x_4	20 0	1 0	1 -1	1 -3	0 1
	z	100	0	-1	-5	0

Quadro 3.11: 2º Quadro simplex do problema 5

A solução degenerada obtida é ótima, sendo $x_1 = 20$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e $z = 100$.

3.7 Variáveis artificiais

Para resolver um problema de Programação Linear pelo método simplex é necessário que exista uma solução básica admissível inicial. Para obter uma solução desse tipo pode ser preciso introduzir variáveis artificiais no problema inicial que terão de ser tratadas com vista à sua anulação.

Existem vários métodos para tratamento destas variáveis artificiais, nomeadamente o método das penalidades (ou do M grande) e o método das duas fases.

No método das penalidades as variáveis artificiais são forçadas a sair da base pela atribuição de um coeficiente de valor muito elevado, cujo sinal depende da função objetivo do problema inicial. Num problema de maximização, multiplica-se as variáveis artificiais por um coeficiente M tão grande quanto se queira e subtraem-se à função objetivo. Num problema de minimização, multiplica-se as variáveis artificiais por um coeficiente M de valor muito elevado e adicionam-se à função objetivo. A utilização do método simplex tenderá a eliminar da base as variáveis artificiais, dado que aquelas estão penalizadas com coeficientes arbitrariamente grandes [2].

A ideia geral do método das duas fases é a seguinte: na primeira fase, o objetivo que se pretende atingir é a anulação das variáveis artificiais podendo traduzir-se na minimização de uma função objetivo auxiliar z^* que é o somatório de todas as variáveis artificiais. Na segunda fase do método a resolução tem continuidade com a função objetivo do problema original.

A primeira fase do método termina quando se atingiu a solução ótima do problema auxiliar, podendo ocorrer uma das três situações seguintes:

i) $z^* > 0$, o que significa que um ou mais vetores artificiais aparecem na base e pelo menos uma das respetivas variáveis é positiva.
Nesta situação o problema original não tem solução admissível.

ii) $z^* = 0$ e não aparecem vetores artificiais na base.
Foi encontrada uma solução básica admissível para o problema original.

iii) $z^* = 0$ aparecendo um ou mais vetores artificiais na base e as respetivas variáveis são nulas.
Foi encontrada uma solução admissível para o problema inicial podendo no entanto existir redundância nas restrições iniciais.

3.8 Forma revista do método simplex

A forma revista do método simplex revela-se mais adequada à resolução de problemas de Programação Linear de grande dimensão, uma vez que em cada iteração se trata a informação estritamente necessária para continuar o algoritmo.

Esta forma explora também o facto de se poder obter o quadro do simplex respeitante a qualquer solução básica admissível partindo apenas do conhecimento da matriz inversa da base associada a essa solução. Assim, a passagem de uma solução básica admissível para outra, pode ser feita apenas por atualização da matriz inversa da base. Esta atualização é particularmente fácil quando a nova base difere da anterior apenas de um vetor como se verifica no método simplex [5].

Na forma revista do método simplex considera-se a função objetivo como qualquer outra restrição. Assim, a condição $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}$ toma a forma $z - \mathbf{c}_B^T\mathbf{x} = 0$. Deste modo, tem-se um sistema de $m+1$ equações lineares a $n+1$ incógnitas e pretende-se determinar uma solução para este sistema de modo que o valor de z, não restringido em sinal, seja o maior possível [1].

O problema revisto pode escrever-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} &\max \ z \\ &\text{sujeito a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} + (-z) = 0 \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.9 Aspetos geométricos

Considere-se um problema de Programação Linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz de m linhas e n colunas, com $m \leq n$ e $car(\mathbf{A}) = m$. Os vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, e $\mathbf{x}$ devem ter a dimensão adequada para ser possível efetuar o cálculo indicado.

Pretende-se dar uma interpretação geométrica a este problema e às suas soluções.

No espaço R^n o conjunto dos pontos que satisfaz a condição

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = z \tag{3.13}$$

define o hiperplano ortogonal ao vetor $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$. Assim, em Programação Linear o conjunto de todos os $\mathbf{x}$ que dão origem a um determinado valor da função objetivo constitui um hiperplano uma vez que a condição (3.13) se pode escrever na forma $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$.

Quando $z = 0$ o hiperplano passa pela origem, logo a condição $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ representa um hiperplano que passa pela origem.

Dois hiperplanos $\mathbf{c}_1^T\mathbf{x} = z_1$ e $\mathbf{c}_2^T\mathbf{x} = z_2$ são paralelos se $\mathbf{c}_1 = \lambda\mathbf{c}_2, \quad \lambda \neq 0$.

Um hiperplano $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ divide o espaço R^n em três conjuntos X_1, X_2 e X_3, disjuntos dois a dois e tais que $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = R^n$ sendo:

$$X_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^T\mathbf{x} < z\}, \quad X_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z\} \quad \text{e} \quad X_3 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^T\mathbf{x} > z\}$$

Os semiespaços X_1 e X_3 são conjuntos abertos. Os semiespaços X_4 e X_5 são conjuntos fechados, sendo:

$$X_4 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq z\} \qquad X_5 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq z\}$$

Os hiperplanos são conjuntos fechados uma vez que contêm a sua fronteira, assim $X_4 \cap X_5 = X_2$ é um conjunto fechado.

Um conjunto K diz-se convexo se quaisquer que sejam $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in K$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ se tem:

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in K$$

Um conjunto convexo é fechado se contém a sua fronteira. Um hiperplano é um conjunto convexo fechado, assim como a interseção de um conjunto finito de hiperplanos ou de semiespaços fechados, ou de ambos. Deste modo, pode afirmar-se que o conjunto das soluções admissíveis de um problema de Programação Linear, caso exista, é um conjunto convexo fechado limitado inferiormente, uma vez que $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Combinação linear convexa de um número finito de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ é um ponto $\mathbf{x}$ definido por

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \text{com} \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Um ponto de um conjunto convexo K que não pode ser obtido como combinação linear convexa positiva de outros pontos do conjunto diz-se um ponto extremo de K.

Chama-se poliedro convexo ao conjunto de todas as combinações lineares convexas de um número finito de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$. Em R^n, um poliedro convexo gerado por $n+1$ pontos designa-se por simplex.

Sendo K um conjunto convexo e $\mathbf{y}$ um ponto não pertencente a K, diz-se que $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ é um hiperplano de suporte em $\mathbf{y}$, se $\mathbf{c}^T\mathbf{y} = z$ e o conjunto K ficar totalmente contido num semiespaço fechado produzido pelo hiperplano. No caso de $\mathbf{y}$ ser um ponto de fronteira de um conjunto fechado existe, no mínimo um hiperplano de suporte em $\mathbf{y}$.

Num dado problema de Programação Linear, se $\mathbf{x}_0$ for uma solução ótima, então $\mathbf{x}_0$ será um ponto de fronteira do conjunto convexo das soluções admissíveis e se $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = z$ então $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ é um hiperplano de suporte em $\mathbf{x}_0$ do conjunto das soluções admissíveis.

Pode também afirmar-se que um conjunto convexo limitado inferiormente tem pontos extremos em todos os hiperplanos de suporte.

Geometricamente interpreta-se toda a solução básica admissível como sendo um ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e reciprocamente todo o ponto extremo como sendo uma solução básica admissível do conjunto das restrições.

Apresenta-se, em seguida, uma demonstração deste resultado.

Considere-se o vetor $\mathbf{x} \in R^n$, uma solução básica admissível de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Pretende-se mostrar que $\mathbf{x}$ é um ponto extremo ou seja que não existem outras soluções admissíveis $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, diferentes de $\mathbf{x}$ tais que

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ , \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{3.14}$$

Admita-se que existem soluções admissíveis $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ nessas condições, sendo

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

tendo os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ m componentes e os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ $n-m$ componentes.

Para as componentes $n-m$ tem-se

$$\mathbf{0} = \lambda \mathbf{v}_1 + (1-\lambda)\mathbf{v}_2 \tag{3.15}$$

Dado que $0 < \lambda < 1$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \geq \mathbf{0}$, a condição (3.15) apenas se verifica se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Assim

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{Bu}_1 = \mathbf{b} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{Bu}_2 = \mathbf{b}$$

Uma vez que b se exprime de forma única em termos dos vetores da base tem-se que

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$$

logo,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Donde se pode concluir que é $\mathbf{x}$ um ponto extremo pois não existem soluções admissíveis diferentes de $\mathbf{x}$ que verifiquem a condição (3.14).

Assim, toda a solução básica admissível é um ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Pretende-se agora mostrar que qualquer ponto extremo do conjunto convexo das soluções admissíveis é uma solução básica.

Seja $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ um ponto extremo do conjunto convexo das soluções admissíveis, vai-se provar que os vetores associados com as componentes positivas de $\mathbf{x}^*$ são linearmente independentes.

Sejam não nulas as primeiras *r* componentes de $\mathbf{x}^*$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}\,, \quad x_i > 0\,, \quad i = 1, \ldots, r$$

Considerando os vetores $\mathbf{a}_i$ linearmente dependentes então existem λ_i, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Seja

$$\varphi = \min_i \frac{x_i}{|\lambda_i|}\,, \quad \lambda_i \neq 0\,, \quad i = 1, \ldots, r$$

Uma vez que $\varphi > 0$, pode escolher-se um ε de tal forma que $0 < \varepsilon < \varphi$. Assim

$$x_i + \varepsilon \lambda_i > 0 \quad \text{e} \quad x_i - \varepsilon \lambda_i > 0\,, \qquad i = 1, \ldots, r$$

Seja $\boldsymbol{\lambda} \in R^n$ um vetor coluna, não nulo, com $\lambda_i \neq 0$ nas primeiras *r* componentes e zero nas restantes.

Considere-se os vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, não negativos, tais que

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{\lambda} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^* - \varepsilon \boldsymbol{\lambda} \tag{3.16}$$

Como $\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, tem-se que

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$$

De (3.16) resulta que

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$$

O que contradiz o facto de $\mathbf{x}^*$ ser ponto extremo. Assim têm de ser linearmente independentes as colunas de $\mathbf{A}$ associadas com as componentes não nulas de qualquer ponto extremo do conjunto convexo das soluções admissíveis. Logo, no máximo, só podem existir m colunas de $\mathbf{A}$ linearmente independentes. Conclui-se então, que um ponto extremo não pode ter mais do que m componentes positivas [1].

Capítulo 4

Dualidade em Programação Linear

4.1 Problemas duais

Qualquer problema de Programação Linear pode ser tratado sob dois pontos de vista dando origem a dois problemas distintos: o problema primal e o problema dual. A relacionar estes dois problemas estão várias propriedades teóricas assim como interpretações interessantes em contexto real, nomeadamente na área económica [2].

Considere-se um problema de Programação Linear na forma típica (problema primal)

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{4.1}$$

com $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$ e $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$.

Associado a este problema existe um outro que se designa por problema dual, dado por

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{4.2}$$

em que $\mathbf{w} \in R^m$, $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$ e $\mathbf{A}^T \in R^{n\times m}$.

Este par de problemas pode ser considerado o par típico de problemas duais [1].

4.2 Propriedades fundamentais dos problemas duais

Vão ser apresentadas algumas propriedades do par de problemas duais considerando a formulação que se enquadra no par típico.

Propriedade 1: O dual do dual é o primal.

Demonstração: Um dado problema de Programação Linear na forma (4.2) pode escrever-se na forma (4.1)

$$\begin{aligned} \max \quad & -Z = -\mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{sujeito a} \quad & -\mathbf{A}^T\mathbf{w} \le -\mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Tomando o dual deste problema tem-se

$$\begin{aligned} \min \quad & -z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & -\mathbf{A}\mathbf{x} \ge -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pode ainda escrever-se (4.3) na forma

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ou seja, o dual do dual é o primal.

Propriedade 2: Se $\mathbf{x}$ for uma qualquer solução admissível do primal e $\mathbf{w}$ for uma qualquer solução admissível do dual, então

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{w}$$

Demonstração: Sendo $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$ e $\mathbf{x}$ uma solução admissível de (4.1), então pode escrever-se

$$(\mathbf{Ax})_i \le b_i \quad , \quad i = 1,\ldots,m \tag{4.4}$$

Uma vez que $\mathbf{w}$ é uma solução admissível de (4.2), então $w_i \ge 0 \;,\quad i = 1,\ldots,m$; assim, partindo de (4.4), pode obter-se

$$w_i(\mathbf{Ax})_i \le w_i b_i \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

Donde resulta que

$$\sum_{i=1}^{m} w_i(\mathbf{Ax})_i \le \sum_{i=1}^{m} w_i b_i$$

Isto é,

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{w} \qquad (4.5)$$

Analogamente, sendo $\mathbf{w}$ uma solução admissível de (4.2) e $\mathbf{A}^T \in R^{n\times m}$, tem-se

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{w})_j \geq c_j \quad , \quad j = 1,\dots,n \qquad (4.6)$$

Dado que $\mathbf{x}$ é uma solução admissível de (4.1), então $x_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$, logo de (4.6) pode escrever-se

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{w})_j x_j \geq c_j x_j \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

Donde resulta que

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A}^T\mathbf{w})_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Isto é,

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{w})^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Ou ainda,

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \qquad (4.7)$$

Por fim, de (4.5) e (4.7) resulta que

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{w}$$

Propriedade 3: Se $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ são soluções admissíveis para os problemas primal e dual, respetivamente, tais que $\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{w}}$ então $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ são soluções ótimas do primal e do dual, respetivamente.

Demonstração: Admitindo, por hipótese, que $\hat{\mathbf{w}}$ é uma solução do dual, então, com base na propriedade 2, pode afirmar-se que

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{w}}$$

e, também por hipótese,

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{w}}$$

Donde se pode concluir que

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

Assim prova-se que $\hat{\mathbf{x}}$ é solução ótima do primal.

Analogamente, se por hipótese, $\hat{\mathbf{x}}$ é uma solução do primal, então, com base na propriedade 2, pode afirmar-se que

$$\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} \le \mathbf{b}^T\mathbf{w}$$

Como, por hipótese,

$$\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T\hat{\mathbf{w}}$$

resulta que

$$\mathbf{b}^T\mathbf{w} \ge \mathbf{b}^T\hat{\mathbf{w}}$$

Donde se conclui que $\hat{\mathbf{w}}$ é solução ótima do dual.

Propriedade 4: Para qualquer par de problemas duais, a existência de solução ótima finita para um deles garante a existência de solução ótima finita para o outro, sendo iguais os respetivos valores das funções objetivo.

Demonstração: Esta propriedade vai ser demonstrada construindo uma solução ótima para o dual partindo de uma solução ótima do primal.

Para resolver, pelo método simplex, um problema de Programação Linear que se encontra na forma (4.1) é necessário transformar as restrições em equações ficando o problema com a forma:

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{x}_d = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x}_d \ge \mathbf{0} \end{array} \tag{4.8}$$

Contendo $\mathbf{x}_d$ as variáveis desvio.

Admita-se que o problema (4.8) tem solução ótima finita, $\hat{\mathbf{x}}$, então

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{4.9}$$

Sendo $\hat{\mathbf{x}}_B$ o vetor formado pelas componentes de $\hat{\mathbf{x}}$ respeitante às variáveis básicas, $\mathbf{B}^{-1}$ a matriz inversa da base ótima e $\mathbf{b}$ o vetor dos termos independentes do primal.

Por outro lado, se $\hat{\mathbf{x}}$ é uma solução ótima, então $c_j - z_j \le 0$ para qualquer j, em particular para os vetores $\mathbf{a}_j$ de $\mathbf{A}$. Assim, atendendo à definição de z_j,

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \ge c_j\,, \quad j = 1,\ldots,n \tag{4.10}$$

em que $\mathbf{c}_B$ é o vetor dos coeficientes da função objetivo respeitantes às variáveis básicas e $\mathbf{a}_j$ é o vetor dos coeficientes da variável x_j.

Pode escrever-se (4.10) na forma

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \qquad (4.11)$$

Fazendo, em (4.11), $\hat{\mathbf{w}}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$, vem

$$\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \qquad (4.12)$$

Donde se pode concluir que $\hat{\mathbf{w}}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ é uma solução do problema dual.

Considerando os $c_j - z_j$ para os vetores de desvio em (4.8), uma vez que o correspondente $c_j = 0$, vem

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} \geq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \geq \mathbf{0}$$

ou seja $\hat{\mathbf{w}}^T \geq \mathbf{0}$, logo $\hat{\mathbf{w}}^T$ é uma solução admissível do dual.

Sendo $\hat{z} = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{Z} = \mathbf{b}^T\hat{\mathbf{w}}$ e dado que são nulas as componentes de $\hat{\mathbf{x}}$ respeitantes às variáveis não básicas, vem

$$\hat{z} = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^T\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\hat{\mathbf{w}} = \hat{Z} \text{ ,}$$

isto é, são iguais os valores das funções objetivo correspondentes às duas soluções. Assim, pela propriedade 3, concluiu-se que $\hat{\mathbf{w}}$ é solução ótima do dual.

Analogamente se pode demonstrar que a existência de solução ótima para o dual garante a existência de solução ótima para o primal e também a igualdade dos valores das respetivas funções objetivo.

De salientar que o quadro ótimo do método simplex permite obter a solução ótima do problema dual na linha dos $c_j - z_j$, nas colunas correspondentes aos vetores desvio.

Propriedade 5: Complementaridade dos desvios

Considere-se o par típico de problemas duais na forma padrão

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{x}_d = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x}_d \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}^T\mathbf{w} - \mathbf{I}\mathbf{w}_d = \mathbf{c} \\ & \mathbf{w}, \mathbf{w}_d \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad (4.13)$$

Contendo $\mathbf{x}_d$ as variáveis desvio $x_{n+i}, i=1,\ldots,m$ do primal, e $\mathbf{w}_d$ as variáveis desvio w_{m+j}, $j=1,\ldots,n$ do dual.

Para cada par de soluções ótimas para os problemas (4.13), verifica-se que:

(i) $w_i\, x_{n+i} = 0, \quad i=1,\ldots,m$

(ii) $x_j w_{m+j} = 0, \quad j=1,\ldots,n$

Demonstração de **(i):** Multiplicando ambos os membros de $\mathbf{Ax}+\mathbf{Ix}_d = \mathbf{b}$ por $\mathbf{w}^T$, vem

$$\mathbf{w}^T\mathbf{Ax}+\mathbf{w}^T\mathbf{Ix}_d = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$$

Ou ainda

$$\mathbf{w}^T\mathbf{Ax}+\mathbf{w}^T\mathbf{x}_d = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$$

Admitindo que $\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_d\end{pmatrix}$ e $\mathbf{w}$ são soluções ótimas, respetivamente, para o primal e para o dual, então, sabe-se, pelas propriedades anteriores, que

$$\mathbf{b}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{w}^T\mathbf{Ax} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

E também que

$$\mathbf{b}^T\mathbf{w} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Então,

$$\mathbf{b}^T\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Logo,

$$\mathbf{w}^T\mathbf{x}_d = \sum_{i=1}^{m} w_i x_{n+i} = 0$$

Isto é,

$$w_i\, x_{n+i} = 0, \quad i=1,\ldots,m,$$

pois $w_i \geq 0$ e $x_{n+i} \geq 0$. Assim, se $x_{n+i} \neq 0$ então $w_i = 0$ e se $w_i \neq 0$ então $x_{n+i} = 0$. Pode ainda acontecer que $w_i = 0$ e $x_{n+i} = 0$.

A demonstração de **(ii)** é análoga à que foi apresentada para **(i)**.

A título de exemplo das propriedades relativas aos problemas duais, retome-se o problema de Programação Linear na forma padrão apresentado em 3.5

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sendo a forma padrão deste problema a seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 30 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 40 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

O problema dual, na forma típica, é dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = 30w_1 + 40w_2 + 12w_3 \\ \text{Sujeito a} & 2w_1 + 4w_2 + w_3 \geq 5 \\ & 4w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 6 \\ & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{array}$$

A forma padrão do problema dual é, então:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = 30w_1 + 40w_2 + 12w_3 \\ \text{Sujeito a} & 2w_1 + 4w_2 + w_3 - w_4 = 5 \\ & 4w_1 + 3w_2 + w_3 - w_5 = 6 \\ & w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0 \end{array}$$

Na resolução do problema primal foi utilizado o método simplex sendo o quadro ótimo o seguinte:

			5	6	0	0	0
$\mathbf{c}_B$	*Var. bás.*	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
6	x_2	4	0	1	$2/5$	$-1/5$	0
5	x_1	7	1	0	$-3/10$	$2/5$	0
0	x_5	1	0	0	$-1/10$	$-1/5$	1
	z	59	0	0	$-9/10$	$-4/5$	0

Quadro 4.1: Quadro simplex ótimo do exemplo prático

Neste quadro, além da identificação da solução ótima do problema primal é também possível identificar a solução ótima do problema dual.

A solução ótima do problema primal, já indicada em 3.5, é:

$x_1 = 7, x_2 = 4, x_5 = 1, \; x_3 = x_4 = 0$ e $z = 59$.

Atendendo às propriedades apresentadas pode dizer-se que a solução do problema dual é:

$w_1 = 9/10, w_2 = 4/5, w_3 = w_4 = w_5 = 0$ e $Z = 59$.

Também é possível verificar a complementaridade dos desvios. Assim:

$x_1 w_4 = 0$

$x_2 w_5 = 0$

$w_1 x_3 = 0$

$w_2 x_4 = 0$

$w_3 x_5 = 0$

4.3 Algoritmo simplex dual

O algoritmo simplex primal nem sempre é o mais eficiente para resolver problemas de Programação Linear, nomeadamente problemas de grande dimensão. Com o objetivo de reduzir o número de iterações necessárias na resolução de um problema pelo algoritmo simplex primal têm sido desenvolvidos outros métodos. O algoritmo simplex dual foi proposto por C. E. Lemke baseando-se em observações da aplicação do método simplex ao dual de um problema de Programação Linear.

O algoritmo simplex dual tem início com uma solução básica admissível do dual à qual corresponde uma solução básica não admissível do primal. Efetuam-se mudanças, de forma iterativa, nas soluções básicas até se obter um par de soluções admissíveis quer para o primal quer para o dual, sendo estas, com base na propriedade 4 apresentada em 2.2, as soluções ótimas. Caso o problema dual apresente uma solução não limitada, então o primal é impossível.

Este algoritmo é particularmente importante nos casos em que é mais fácil obter uma solução admissível para o dual do que para o primal. Também na análise de pós-otimização é muito útil evitando a resolução do problema desde o início quando se efetuam alterações aos parâmetros do modelo [1] e [6].

4.4 Algoritmo primal-dual

O algoritmo primal-dual, que foi desenvolvido por Dantzig, Ford e Fulkerson, trabalha simultaneamente com os problemas primal e dual. Este algoritmo surge para suprir a dificuldade que muitas vezes existe na obtenção de uma solução básica do primal que satisfaça o critério de ótimo (algoritmo dual) e também facilitar o tratamento das variáveis artificiais uma vez que pelo método das duas fases, frequentemente, no fim da 1ª fase a solução encontrada ainda se encontra muito distante da solução ótima (algoritmo primal).

O algoritmo primal-dual começa com uma solução admissível $\mathbf{w}$ para o dual e procura, iterativamente, uma solução admissível $\mathbf{x}$ para o primal que satisfaça a complementaridade dos desvios relativamente a $\mathbf{w}$. Se for encontrada uma solução primal nessas condições, então $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ são as soluções ótimas respetivamente para o primal e para o dual [1] e [6].

Capítulo 5

Modelos de transporte e de afetação

5.1 Problema de transporte

O problema de transporte surge quando se pretende deslocar um produto, que existe em quantidades limitadas, de um local para outro, da forma rápida e económica. Este problema é um caso particular de Programação Linear e, como tal, pode ser resolvido pelo método simplex, no entanto, dada a sua importância, foi desenvolvido um algoritmo específico para a sua resolução que permite obter a solução ótima de maneira mais eficaz. Muitos problemas de Programação Linear, tais como fornecimento de água, distribuição de energia elétrica, dimensionamento de redes de telecomunicações, entre outros, podem ser formulados como problemas de transporte.

Num problema típico de transporte pretende-se planear a distribuição de um produto idêntico que:

(i) Existe em m origens ou centros de oferta em quantidades fixas $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$;

(ii) É necessário em n destinos ou centros de procura em quantidades fixas $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$;

(iii) Tem de ser deslocado das origens para os destinos de maneira a esgotar as existências em cada origem e a satisfazer as necessidades de cada destino, ou seja, a procura total tem de igualar a oferta total.

Tendo como objetivo minimizar o custo total de expedição do produto supondo que os custos unitários c_{ij} de transporte de cada origem i para cada destino j não dependem das quantidades transportadas.

O quadro seguinte facilita a organização de todas as informações disponíveis com vista à resolução do problema.

Origem \ Destino	1	2	...	n	OFERTA
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
PROCURA	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Quadro 5.1: Quadro do problema de transporte

O problema de transporte pode ser formalizado matematicamente como problema de Programação Linear do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ &\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{5.1}$$

De salientar que a oferta total tem que ser igual à procura total, isto é:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Esta igualdade tem que ser sempre verificada mesmo que para isso seja necessário criar um destino fictício, caso a oferta total seja superior à procura total ou uma origem fictícia sempre que a procura total seja superior à oferta total.

O número de variáveis básicas do problema de transporte é $m+n-1$ que corresponde ao número de restrições de oferta mais o número de restrições de procura subtraindo uma unidade. Uma vez que o total da oferta é igual ao total da procura e as restrições estão na forma de igualdade, então uma das restrições é redundante, isto é, uma restrição é combinação linear das restantes. É possível provar que este problema tem sempre solução ótima finita.

O problema de transporte pode ser resolvido pelo método simplex com algumas variantes tendo em conta a sua especificidade. A resolução processa-se em três fases sucessivas:

1. Determinação de uma base inicial admissível;
2. Teste de otimalidade;
3. Melhoria da solução intermédia.

As duas últimas fases repetem-se até que seja atingida a solução ótima.

Existem vários métodos para a determinação de uma base inicial admissível sendo os mais utilizados: método do canto noroeste, método de Vogel e o método do custo mínimo.

Através do método do canto noroeste é possível obter facilmente uma solução básica admissível estabelecendo um plano de transporte entre as origens e os destinos com base num critério de localização, sem ter em conta os custos de transporte. Assim, é selecionada a variável que se encontra no canto superior esquerdo do quadro 5.1, ou seja x_{11}, como variável básica tomando o maior valor possível, depois é escolhida x_{12} ou x_{21} dependendo de se ter satisfeito totalmente a procura do destino 1 ou se ter esgotado a oferta da origem 1. Repete-se ordenadamente este processo até ser esgotado o produto existente em todas as origens e providas todas as necessidades dos destinos. No método de Vogel são tidos em conta os custos de transporte e são escolhidos os caminhos que apresentam o custo mais baixo relativamente à segunda melhor alternativa. Assim, neste método, o critério da escolha da variável a tomar como básica é o do menor custo de transporte da linha ou da coluna associada à maior das diferenças entre os dois menores custos de cada linha e de cada coluna. No método do custo mínimo é escolhida para variável básica a que apresente um menor custo. Habitualmente o método de Vogel fornece uma solução básica admissível mais próxima da solução ótima, no entanto o método do canto noroeste é o mais fácil de aplicar.

Depois de obtida uma solução básica admissível inicial é necessário testá-la para verificar se é ou não ótima e, caso não seja, passar para outra repetindo o processo até que a solução ótima seja encontrada. Existem vários métodos para tratar esta fase do problema, entre os quais o método do Stepping-Stone e o método de Dantzig sendo a maior diferença entre eles a forma de testar a otimalidade duma solução básica admissível.

No método Stepping-Stone, depois de ser conhecida solução básica inicial à qual corresponde o custo total de transporte z, procede-se do seguinte modo:

1. Determina-se o impacto na função objetivo da ativação unitária de cada uma das variáveis não básicas, calculando $\Delta_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$ para cada variável não básica x_{ij};
2. No caso em que $\Delta_{ij} \leq 0$ para todas as variáveis não básicas, o processo termina, uma vez que a solução em presença é ótima. No caso contrário o processo prossegue.
3. Escolhe-se a variável a entrar na base de acordo com o critério
$$\max \{\Delta_{ij}, \Delta_{ij} > 0\}$$
4. Escolhe-se a variável a sair da base de acordo com o critério
$$\theta = \min \{x_{ij} \ , x_{ij} \text{ afetado de} - \text{no ciclo}\}$$
Se houver empate a escolha da variável a sair da base é arbitrária, no entanto a nova solução básica é degenerada.
5. Obtém-se a nova base admissível adicionando ou subtraindo às variáveis que formam o ciclo o valor θ consoante estejam afetadas de $+$ ou $-$ respetivamente. Ou seja:
$\hat{x}_{ij} = x_{ij} + \theta$ se x_{ij} afetado de $+$ no ciclo
$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \theta$ se x_{ij} afetado de $-$ no ciclo
$\hat{x}_{ij} = x_{ij}$ nos restantes casos
Sendo $\hat{z} = z - \theta \Delta_{ij}$

Voltar ao passo 1.

Note-se que $\Delta_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$ representam os correspondentes $z_j - c_j$ do método simplex num problema de minimização, uma vez que permitem avaliar o impacto na função objetivo da ativação unitária de cada variável não básica.

No problema de transporte, ativar uma variável não básica significa incluir um percurso alternativo no plano de transporte já existente. Esta inclusão tem de ser feita atendendo ao ciclo respetivo da variável não básica. Um ciclo é uma sequência de $+$ e $-$, correspondendo, no quadro 5.1, a uma sequência de quadrículas em que cada par adjacente pertence à mesma linha ou coluna, o início e o fim do ciclo formam um par adjacente e existem apenas duas quadrículas consecutivas em cada linha ou coluna.

No método de Dantizg a determinação dos valores $z_{ij} - c_{ij}$ do problema primal de transporte é feita com base na complementaridade dos desvios de problemas duais. Através da análise destes valores é possível concluir se a solução em presença é ou não ótima. No caso de não ser, pode obter-se uma nova solução por um processo análogo ao do método de Stepping-Stone [3] e [6].

5.2 Exemplo do problema de transporte

Uma empresa pretende abastecer quatro fábricas, F1, F2, F3 e F4 com uma matéria-prima disponível em três mercados, M1, M2 e M3. Pretende-se minimizar o custo total com o transporte da matéria-prima. Os elementos relativos a custos, necessidades e disponibilidades constam do quadro seguinte:

Mercados \ *Fábricas*	*F1*	*F2*	*F3*	*F4*	*Oferta*
M1	9	4	6	9	300
M2	2	8	5	7	900
M3	4	9	3	5	100
Procura	350	450	300	200	1300

Quadro 5.2: Custos de transporte, necessidades e disponibilidades

Adaptado de [6] p.181

O problema pode ser formalizado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \min \quad z = {} & 9x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{14} \\ & + 2x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 7x_{24} \\ & + 4x_{31} + 9x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 900 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 450 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 3; \; j = 1, \ldots, 4)$$

Para iniciar a resolução deste prolema é necessário obter uma solução básica admissível por qualquer um dos métodos já referidos. Assim, neste exemplo prático, foi utilizado o método do canto noroeste, sendo os resultados obtidos apresentados no quadro seguinte:

Mercados \ *Fábricas*	*F1*	*F2*	*F3*	*F4*	*OFERTA*
M1	9 300	4	6	9	300
M2	2 50	8 450	5 300	7 100	900
M3	4	9	3	5 100	100
PROCURA	350	450	300	200	1300

Quadro 5.3: 1º Quadro do exemplo do problema de transporte

A solução básica admissível obtida é

$x_{11} = 300,\ x_{21} = 50,\ x_{22} = 450,\ x_{23} = 300,\ x_{24} = 100,\ x_{34} = 100$ (variáveis básicas)

$x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0$ (variáveis não básicas)

Sendo o correspondente custo total de transporte 9100.

A resolução do problema tem continuidade com a utilização do método do Stepping-Stone. Assim, vão ser calculados os valores dos $\Delta_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$ para avaliar o impacto da ativação unitária de cada uma das variáveis não básicas.

$$\Delta_{12} = z_{12} - c_{12} = (9 - 2 + 8) - 4 = 11$$

Note-se que z_{12} representa o custo que se deixa de ter por transportar diretamente uma unidade do mercado *M1* para a fábrica *F2* e $\Delta_{12} = z_{12} - c_{12}$ é o valor líquido resultante da inclusão alternativa desse percurso.

Procedendo da mesma forma para as outras variáveis não básicas, tem-se:

$$\Delta_{13} = (9 - 2 + 5) - 6 = 6$$

$$\Delta_{14} = (9 - 2 + 7) - 9 = 5$$

$$\Delta_{31} = (5 - 7 + 2) - 4 = -4$$

$$\Delta_{32} = (5 - 7 + 8) - 9 = -3$$

$$\Delta_{33} = (5 - 7 + 5) - 3 = 0$$

Verifica-se que a base em presença não é ótima porque existem valores dos Δ_{ij} positivos. As variáveis, x_{12}, x_{13} e x_{14}, em que tal acontece são as candidatas a entrar na base. Atendendo aos critérios definidos para o método de Stepping-Stone, a variável a entrar na base é x_{12} uma vez que $\max\{11, 6, 5\} = 11$ e a variável a sair da base é x_{11} pois $\min\{300, 450\} = 300$.

Depois de efetuados os cálculos necessários, a nova solução básica admissível pode ser identificada no quadro seguinte:

Mercados \ Fábricas	F1	F2	F3	F4	OFERTA
M1	9	4 300	6	9	300
M2	2 350	8 150	5 300	7 100	900
M3	4	9	3	5 100	100
PROCURA	350	450	300	200	1300

Quadro 5.4: 2º Quadro do exemplo do problema de transporte

Calculando de novo os valores dos Δ_{ij} verifica-se que são todos não positivos, assim a solução básica admissível encontrada é ótima sendo:

$$x_{12} = 300,\ x_{21} = 350,\ x_{22} = 150,\ x_{23} = 300,\ x_{24} = 100,\ x_{34} = 100 \quad \text{e}$$

$$x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0$$

A que corresponde o custo total de transporte de 5800.

5.3 Problema de afetação

Tal como o problema de transporte, também o problema de afetação é um caso particular do problema de Programação Linear. O problema de afetação consiste em afetar n indivíduos a n tarefas, tendo por objetivo a minimização do custo total envolvido neste processo, de modo que cada indivíduo desempenhe uma e uma só tarefa e cada tarefa seja desempenhada por um e um só indivíduo. Este problema pode ser entendido como um problema de otimização combinatória, sendo $n!$ o número total de afetações possíveis. No entanto, esta abordagem do problema é muito trabalhosa.

O problema de afetação pode também ser formulado como um caso particular do problema de transporte. Assim, considerando

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ for afeto à tarefa } j \\ 0 & \text{se o indivíduo } i \text{ não for afeto à tarefa } j \end{cases}$$

a formalização matemática do problema de afetação pode ser

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$$

Note-se que na formalização do problema não é necessário considerar explicitamente $x_{ij} = 0$ ou 1, dado que as restrições por si só vão obrigar a que esta condição se verifique, desde que $x_{ij} \geq 0$.

Assim, o problema de afetação pode ser resolvido com o auxílio do quadro seguinte:

Indivíduo \ *Tarefa*	1	2	...	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	c_{n1} x_{n1}	C_{n2} x_{n2}	...	c_{nn} x_{nn}	1
	1	1	...	1	

Quadro 5.5: Quadro do problema de afetação

Um problema de afetação, à semelhança de um problema de transporte, tem $2n-1$ variáveis básicas; no entanto, cada solução básica admissível tem n variáveis iguais a 1 representando a afetação dos n indivíduos a cada uma das n tarefas. Assim, as restantes $n-1$ variáveis básicas são nulas sendo, portanto, uma solução altamente degenerada não sendo aconselhável a sua resolução pelo método simplex, ou como problema de transporte. Por este motivo foi desenvolvido um algoritmo específico para a resolução do problema de afetação que tem o nome de método húngaro. Este método tem por base a propriedade seguinte:

A solução ótima de um problema de afetação não se altera se uma constante for adicionada ou subtraída a qualquer linha ou coluna da matriz de custos.

Demonstração: Considere-se $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ e $b_j(j=1,2,\cdots,n)$ as constantes adicionadas ou subtraídas às i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz de custos $[c_{ij}]_{(n\times n)}$, respetivamente.

Os valores da nova matriz de custos, $[c^*_{ij}]_{(n\times n)}$ são

$$c^*_{ij} = c_{ij} \pm a_i \pm b_j$$

Sendo o valor da nova função objetivo dado por

$$\begin{aligned} z^* &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^*_{ij}\, x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} \pm a_i \pm b_j)\, x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \pm \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \pm \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \\ &= z \pm \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{j=1}^{n} b_j = z \pm \text{constante} \end{aligned}$$

Verificou-se que o mínimo de z difere do mínimo de z^* apenas de uma constante, independentemente do valor das variáveis, logo as soluções ótimas coincidem.

Esta propriedade pode ser utilizada para reduzir a matriz dos custos a um formato em que todos os seus elementos sejam não negativos e cada linha e cada coluna tenha pelo menos um zero.

O método húngaro de resolução de um problema de afetação consiste nos seguintes passos:

1. Aos elementos da cada linha da matriz dos custos subtrair o menor elemento dessa linha.

   Aos elementos de cada coluna da matriz resultante, subtrair o menor elemento dessa coluna.
2. Escolher uma das linhas com menor número de zeros, enquadrar um destes e cortar todos os restantes dessa linha e dessa coluna. Prosseguir até que todos os zeros estejam enquadrados ou cortados.

   Caso haja n zeros enquadrados, encontrou-se a solução ótima; no caso contrário, dar seguimento ao processo.
3. Cobrir os zeros enquadrados com o menor número de traços, procedendo-se do seguinte modo:
   i) Assinalar as linhas que não têm nenhum zero enquadrado;
   ii) Assinalar as colunas com pelo menos um zero cortado nas linhas assinaladas;
   iii) Assinalar as linhas com um zero enquadrado nas colunas assinaladas;
   iv) Repetir ii) e iii) até que não seja possível assinalar mais linhas ou colunas;
   v) Traçar as linhas não assinaladas e as colunas assinaladas.
4. Determinar o menor elemento da submatriz constituída pelos elementos não traçados, subtrair esse valor aos elementos da submatriz e adicioná-lo aos elementos que se encontram na interseção de dois traços.

   Voltar a 2.

Havendo um e um só zero escolhido por linha e por coluna é obtida a solução ótima em que os zeros correspondem ao melhor conjunto de afetação de i para j.

Genericamente este método consiste numa sequência de passos em que se aumenta o conjunto de possibilidades de afetação cada vez com menor exigência, em termos de custos, até ser atingida a situação em que se realizam todas as afetações pretendidas [3] e [6].

5.4 Exemplo do problema de afetação

Uma empresa tem quatro alternativas de transporte do mesmo produto para quatro destinos diferentes. Pretende-se determinar qual o transporte preferível para cada destino de forma a minimizar os tempos gastos. Os tempos apurados para cada percurso por cada meio são os constam do quadro seguinte

Destinos / *Transportes*	1	2	3	4
1	75	64	66	74
2	86	66	84	87
3	70	56	76	60
4	70	52	60	56

Quadro 5.6: Tempos apurados

Adaptado de [3], p. 270

Como problema de Programação Linear a sua formalização matemática pode ser dada por:

$$\begin{aligned}\min \quad z = {} & 75x_{11} + 64x_{12} + 66x_{13} + 74x_{14} \\ & + 86x_{21} + 66x_{22} + 84x_{23} + 87x_{24} \\ & + 70x_{31} + 56x_{32} + 76x_{33} + 60x_{34} \\ & + 70x_{41} + 52x_{42} + 60x_{43} + 56x_{44}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1\end{aligned}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 4)$$

Dado que se trata de um problema de afetação, a sua resolução pode ser feita pelo método húngaro.

Considere-se a matriz dos tempos apurados

75	64	66	74
86	66	84	87
70	56	76	60
70	52	60	56

Quadro 5.7: Matriz 1 do exemplo do problema de afetação

Para realizar o passo 1 do método húngaro, subtrai-se a cada linha o respetivo mínimo obtendo-se a matriz

11	0	2	10
20	0	18	21
14	0	20	4
18	0	8	4

Quadro 5.8: Matriz 2 do exemplo do problema de afetação

Procedendo da mesma forma as colunas vem

0	0	0	6
9	0	16	17
3	0	18	0
7	0	6	0

Quadro 5.9: Matriz 3 do exemplo do problema de afetação

O passo 2 consiste em averiguar se a solução obtida é ótima. Para esse efeito enquadra-se um zero e cortam-se os restantes da linha e coluna correspondentes. Este processo tem início na linha com menor número de zeros.

$\boxed{0}$	0	0	6
9	$\boxed{0}$	16	17
3	0	18	$\boxed{0}$
7	0	6	0

Quadro 5.10: Matriz 4 do exemplo do problema de afetação

Como não existem quatro zeros enquadrados não se obteve a solução ótima. Assim, dando continuidade ao algoritmo traça-se a primeira linha, a segunda e a quarta coluna,

$\boxed{0}$	0	0	6
9	$\boxed{0}$	16	17
3	0	18	$\boxed{0}$
7	0	6	0

Quadro 5.11: Matriz 5 do exemplo do problema de afetação

Para realizar o passo 4 do algoritmo subtrai-se aos elementos não traçados o menor deles e adiciona-se aos elementos na interseção dos dois traços,

0	3	0	9
6	0	13	17
0	0	15	0
4	0	3	0

Quadro 5.12: Matriz 6 do exemplo do problema de afetação

Voltando ao segundo passo e procedendo em conformidade vem,

0	3	$\boxed{0}$	9
6	$\boxed{0}$	13	17
$\boxed{0}$	0	15	0
4	0	3	$\boxed{0}$

Quadro 5.13: Matriz 7 do exemplo do problema de afetação

Dado que existem quatro zeros enquadrados obteve-se a solução ótima, sendo:

$x_{13} = x_{22} = x_{31} = x_{44} = 1$ e o tempo mínimo 258.

Capítulo 6

Modelo de Programação Linear Inteira

6.1 Aplicações da Programação Linear Inteira

Quando o modelo de Programação Linear inclui variáveis inteiras tem-se um problema de Programação Linear Inteira que pode ser Programação Linear Inteira Pura se incluir apenas variáveis inteiras ou Programação Linear Inteira Mista se incluir variáveis inteiras e variáveis contínuas.

Muitos problemas da vida real só fazem sentido com variáveis inteiras como por exemplo o número de máquinas. No entanto existem problemas cujas soluções têm de ser necessariamente inteiras mas que podem ser resolvidos com recurso à Programação Linear utilizando variáveis contínuas, sendo os valores obtidos arredondados para os inteiros mais próximos. Este procedimento tem muitas vantagens computacionais sem contudo alterar de modo relevante o objetivo a atingir.

De salientar que as aplicações mais importantes da Programação Linear Inteira resultam do facto de ser possível formular quase todos os problemas combinatórios em termos da Programação Linear Inteira. São exemplos destes problemas: a escolha de projetos de investimento, a localização de fábricas, a sequência de tarefas em máquinas, a organização de horários das tripulações de voo, entre outros [6].

6.2 Métodos de resolução de problemas

Existem vários algoritmos de resolução de problemas de Programação Linear Inteira tais como o algoritmo de Gomory ou o algoritmo de partição e avaliação sucessiva (Branch And Bound).

Os três princípios básicos em que assentam estes e outros métodos de resolução de problemas de Programação Linear Inteira são: relaxação, partição e sondagem. Uma das formas de relaxação de um problema é eliminar as restrições de integralidade verificando-se que qualquer solução do problema original é também solução do problema relaxado. A partição consiste em dividir o problema original em vários problemas de modo a que qualquer solução admissível do problema original é apenas solução de um dos problemas obtidos após a divisão e que qualquer solução admissível de um problema obtido após a divisão seja solução admissível do problema original. Diz-se que o problema foi sondado, interrompendo-se a partição, quando ocorre uma das situações seguintes:

i) O problema seja impossível;
ii) Não seja possível obter uma solução cujo valor da função objetivo seja melhor do que os valores anteriormente obtidos;
iii) Seja encontrada a solução ótima do problema original.

Note-se que o tratamento de problemas de Programação Linear Inteira envolvendo um elevado número de variáveis é muito mais demorado do que o tratamento de problemas de Programação Linear. Assim, a modelação dos problemas de Programação Linear Inteira tem de ser cuidadosamente ponderada nomeadamente no que diz respeito à sua dimensão [6].

Capítulo 7

Resolução computacional de alguns problemas

Na atualidade, a informática é um auxiliar precioso para a resolução de problemas, pois torna todo o processo mais rápido e eficaz.

O desenvolvimento da Programação Linear nos últimos anos deve-se, em parte, à evolução de *software* para modelação e resolução de problemas. Desses *software* destacam-se a ferramenta *Solver* do *Excel* e o programa *Lindo*. Ambos podem ser usados para resolver problemas de Programação Linear, Programação não Linear e Programação Inteira.

A ferramenta *Solver* do *Excel* tem-se revelado muito eficaz em problemas de pequena e média dimensão e tem a vantagem de estar disponível em praticamente todos os computadores, uma vez que faz parte do pacote *Microsoft Office*. Várias das funções algébricas do *Excel* são aceites na formulação dos problemas o que facilita a sua utilização.

O programa *Lindo* é de fácil acesso, uma vez que pode ser instalado gratuitamente no computador. A formulação do problema é escrita como texto o que pode simplificar a sua aplicação. Comparativamente ao *Solver* do *Excel,* tem a vantagem de ser mais eficiente em problemas de grande dimensão.

A análise de sensibilidade de um problema de Programação Linear faz-se determinando o intervalo de valores, dentro do qual um dado parâmetro, definido inicialmente, poderá variar, sem que haja uma alteração da estrutura da solução ótima já encontrada. A ferramenta *Solver* do *Excel* bem como o programa *Lindo* permitem obter informações relativas à análise de sensibilidade.

Assim, a título de exemplos, apresenta-se a resolução dos problemas 1 e 6, formulados no capítulo 2, utilizando a ferramenta *Solver* do *Excel* e também o programa *Lindo*.

Problema 1

Recorde-se a formulação matemática do problema 1

Maximizar $z = 700\,x_1 + 600\,x_2$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 80$$
$$x_1 \geq 20$$
$$x_2 \geq 10$$
$$1500\;x_1 + 1000\;x_2 \leq 100\,000$$

Resolução do problema 1 utilizando o *Solver* do *Excel*

Problema 1: Produção de cereais

Tipos de cereais	Trigo	Milho			Recursos disponíveis
Restrição 1	1	1	80	$\leq$	80
Restrição 2	1	0	40	$\geq$	20
Restrição 3	0	1	40	$\geq$	10
Restrição 4	1500	1000	100000	$\leq$	100000
Lucro	700	600	52000		
Solução	40	40			

Quadro 7.1: Implementação do *Solver* do *Excel* ao problema 1

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
B9	Solução Trigo	40	0	700	200	100
C9	Solução Milho	40	0	600	100	133,3333333

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
D4	Restrição 1	80	400	80	10	10
D6	Restrição 3	40	0	10	30	1E+30
D5	Restrição 2	40	0	20	20	1E+30
D7	Restrição 4	100000	0,2	100000	15000	10000

Quadro 7.2: Análise de sensibilidade relativa ao problema 1

Resolução do problema 1 utilizando o programa *Lindo*

```
Max 700x1+600x2
St

x1+x2<=80
x1>=20
x2>=10
1500x1+1000x2<=100000



LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      52000.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        40.000000          0.000000
       X2        40.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000        400.000000
       3)        20.000000          0.000000
       4)        30.000000          0.000000
       5)         0.000000          0.200000

NO. ITERATIONS=       2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      X1      700.000000       200.000000       100.000000
      X2      600.000000       100.000000       133.333328

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2       80.000000        10.000000        10.000000
       3       20.000000        20.000000         INFINITY
       4       10.000000        30.000000         INFINITY
       5   100000.000000     14999.999023     10000.000000
```

Quadro 7.3: Implementação do programa *Lindo* ao problema 1

Problema 6

Retomando a formulação matemática do problema 6,

Maximizar $z = 50x_1 + 30x_2 + 60x_3$

Sujeito a $30x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 1000$

$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 800$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolução do problema 6 utilizando o *Solver* do *Excel*

Problema 6: Esquemas de flores

Tipos de esquemas	Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3			Recursos disponíveis
Restrição 1	30	10	20	787,5	≤	1000
Restrição 2	20	40	50	800	≤	800
Restrição 3	4	3	2	100	≤	100
Lucro	50	30	60	1512,5		
Solução	21,25	0	7,5			

Quadro 7.4: Implementação do *Solver* do *Excel* ao problema 6

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$B\$8	Solução Esquema 1	21,25	0	50	70	26
\$C\$8	Solução Esquema 2	0	-29,375	30	29,375	1E+30
\$D\$8	Solução Esquema 3	7,5	0	60	65	35

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$E\$4	Restrição 1	787,5	0	1000	1E+30	212,5
\$E\$6	Restrição 3	100	8,125	100	30,90909091	68
\$E\$5	Restrição 2	800	0,875	800	1700	300

Quadro 7.5: Análise de sensibilidade relativa ao problema 6

Resolução do problema 6 utilizando o programa *Lindo*

```
Max 50x1+30x2+60x3
St

30x1+10x2+20x3<=1000
20x1+40x2+50x3<=800
4x1+3x2+2x3<=100


LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      1512.500

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        21.250000          0.000000
       X2         0.000000         29.375000
       X3         7.500000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)       212.500000          0.000000
       3)         0.000000          0.875000
       4)         0.000000          8.125000

NO. ITERATIONS=       2


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        50.000000        70.000000        26.000000
      X2        30.000000        29.375000         INFINITY
      X3        60.000000        65.000000        35.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2      1000.000000         INFINITY       212.500000
       3       800.000000      1700.000000       300.000000
       4       100.000000        30.909090        68.000000
```

Quadro 7.6: Implementação do programa *Lindo* ao problema 6

Capítulo 8

Algumas conclusões

Nesta Dissertação fez-se uma abordagem da Programação Linear apresentando diversos tópicos que permitem um bom conhecimento sobre este tema.

O papel, cada vez mais relevante, que a Programação Linear tem desempenhado no tratamento de problemas envolvendo as mais diversas áreas, ficou patente neste trabalho com a apresentação de alguns exemplos práticos.

A formalização matemática e a resolução gráfica de problemas de pequena dimensão foram o elo de ligação com o programa atual do Ensino Secundário.

O estudo de aspetos relacionados com método simplex permitiu o aprofundamento de conhecimentos matemáticos na área da Álgebra Linear.

A facilidade com que se pode, atualmente, resolver problemas de Programação Linear com recurso a meios informáticos, utilizando ferramentas de fácil acesso, ficou demonstrada com os dois exemplos apresentados.

Muito mais haveria ainda a dizer sobre Programação Linear, em particular, sobre a análise de sensibilidade de um problema ou sobre Programação Linear Inteira. Estas extensões da Programação Linear poderão ser abordadas em estudos futuros.

Bibliografia

[1] Guedes, M. C. M., *Apontamentos de Programação Matemática*.

[2] Hill, M. M. e M. M. Santos (2009), *Investigação Operacional: Programação Linear,* Volumes 1 e 2*.* Edições Sílabo.

[3] Hill, M. M., M. M. Santos, e A. L. Monteiro (2008), *Investigação Operacional: Transportes, Afectação e Optimização de Redes,* Volume 3*.* Edições Sílabo.

[4] Katz, V. J. (2010), *História da Matemática.* Edição da Fundação Calouste Gulbenkian.

[5] Ramalhete, M., J. Guerreiro e A. Magalhães (1984), *Programação Linear,* Volume I. Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.

[6] Ramalhete, M., J. Guerreiro e A. Magalhães (1985), *Programação Linear,* Volume II. Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.

[7] Winston, W. L. e M. Venkataramanan (2003), *Introduction to Mathematical Programming*. Brooks/Cole –Thomson Learning (Fourth Edition).