Nilson Moreira

Probabilidade de Ruína: Aproximação via processos de Lévy α-estáveis

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Julho de 2013

Nilson Moreira

Probabilidade de Ruína: Aproximação via processos de Lévy α-estáveis

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Matemática

Orientador: Professor Doutor José Abílio de Oliveira Matos

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Julho de 2013

Tese realizada no âmbito do mestrado em Engenharia Matemática

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

http://www.fc.up.pt/dmat/engmat

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer de uma forma muito especial ao Professor José Abílio de Oliveira Matos pela forma como me orientou durante este trabalho. Sempre que reunímos, seja por minutos ou por horas, eu saía cada vez mais motivado. Nos momentos críticos sempre conseguia fazer-me acreditar que é possível fazer um ótimo trabalho. Não consigo imaginar uma orientação melhor. Por isso, deixo aqui a minha profunda gratidão.

Aproveito também para agradecer ao Projeto Mundus ACP, enquadrado no Programa Erasmus Mundus e coordenado pela Universidade do Porto, pela oportunidade que me concedeu de fazer essa mobilidade.

Um agradecimento à minha família, em especial à minha mãe, que sempre me motivou, fazendo-me acreditar sempre de que é possível chegar ao bom porto.

Ao meu colega Crispiniano Furtado pelo seu enorme companheirismo demonstrado durante essa etapa, tanto académica como socialmente. Um obrigado de coração.

Um muito obrigado aos Professores do Mestrado em Engenharia Matemática pela contribuição na minha formação.

O meu sentimento de gratidão estende-se aos meus amigos e colegas da SPRU e da Residência Alberto Amaral pela forma como convivemos fazendo com que eu me sentisse sempre integrado tanto académica como socialmente.

Finalmente, um agradecimento à todas as pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para que essa caminhada seja um sucesso.

Resumo

Neste trabalho será apresentado o Modelo de Risco e mostrado que uma sequência de processos de risco sob determinadas condições converge fracamente para um processo de Lévy α-estável, através do qual se faz a aproximação da probabilidade de ruína. Um dos maiores problemas da Teoria da Ruína é encontrar uma expressão para o cálculo da probabilidade da ruína. Para tal, um dos métodos de cálculo, e que se tem utilizado muito, é a estimação dessa quantidade por meio de métodos numéricos. O objetivo principal desta dissertação é mostrar que é possível aproximar processos de risco por meio de um processo de risco utilizando distribuições Lévy α-estáveis, e consequentemente fazer a aproximação da probabilidade de ruína. Na parte referente à simulação numérica, será utilizada a distribuição de Pareto ($1 < \alpha < 2$) para as indemnizações no modelo de risco clássico para se estimar a probabilidade de ruína, e a correspondente aproximação usando ao processos de Lévy α-estáveis ($1 < \alpha < 2$). Um dos motivos para o uso da distribuição de Pareto é a exigência de que para se fazer a aproximação por meios de processos de Lévy α estáveis, a distribuição das indemnizações tem de pertencer ao domínio de atração de uma lei estável, e como se pode verificar no corpo do trabalho a distribuição de Pareto segue essa exigência. A estimação será feita usando o método de Simulação de Monte Carlo simples, na linguagem R.

Palavras-chave: Modelo de Risco, Distribuições α-estáveis, Distribuição de Pareto, Convergência Fraca, Probabilidade de Ruína, Método de Monte Carlo.

Abstract

This work is based on the Risk Model theory. The theory will be presented and we will study a particular case where it will be shown that a sequence of risk processes converge weakly to α-stable Lévy motion, under some conditions, where it is possible to do the approximation of ruin probability. One of the biggest problems in Ruin Theory is to find an expression for the evaluation of the ruin probability. One of the most used methods is the estimation of that quantity by means of numerical methods. The main goal of this dissertation is to show that it is possible to approximate the risk process by a process using a α-stable Lévy distribution, and to give approximate for the ruin probability. In the numerical simulation, we will use the Pareto distribution ($1 < \alpha < 2$) for the claims in the classical risk model to estimate the ruin probability and the corresponding approximation using α-stable Lévy motion ($1 < \alpha < 2$). To make the approximation using α-stable Lévy distribution it is required that the distribution of claims belongs to the domain of attraction of an α-stable law, a requirement that is fulfilled by Pareto distributions. The estimation is done using the simple Monte Carlo method implemented in the R language.

Key-words: Risk Model, α-Stable Léevy Distribution, Pareto Distribution, Weak Convergence, Ruin Probability, Simple Monte Carlo Method.

Conteúdo

Resumo v

Abstract vi

Índice de Tabelas ix

Índice de Figuras x

Introdução 11

1. Modelo de Risco 13

1.1. Conceitos básicos 13

1.2. Modelo de Risco Clássico 15

1.2.1. Descrição do Modelo 15

1.3. Probabilidade de Ruína 17

1.3.1. O Coeficiente ou Expoente de Lundberg 19

1.3.2. Desigualdade de Lundberg 19

1.3.3. Aproximação de Cramér-Lundberg 21

1.3.4. Probabilidade de Ruína para Indemnizações que seguem uma Distribuição Exponencial 22

2. Probabilidade de Ruína e os Processos de Lévy α-Estável 26

2.1. Distribuição Estável 26

2.2. Probabilidade de Ruína via aproximação de processos de risco por processos de Lévy α-estáveis 30
2.2.1. Convergência Fraca do Processo de Risco para Processos de Lévy α-estáveis 31
2.2.2. Probabilidade de Ruína no Processo de Risco Limite 34

3. Simulação **38**
3.1. Probabilidade de Ruína no Modelo Clássico em que as indemnizações seguem a Distribuição de Pareto 38
3.2. Aproximação da Probabilidade de Ruína através de Processos de Lévy α-Estáveis 45
3.2.1. Dedução do parâmetro σ' 47
3.3. Comparação dos resultados 51
3.4. Código usado para a simulação 52

Conclusão **54**

A. Código para estimação de $\psi(u,T)$ num processo de risco clássico e a correspondente aproximação $\psi_f(u,T)$ **58**

B. Exemplos de instruções para se obter alguns resultados **63**
B.1. Histograma 63
B.2. Probabilidade de Ruína 64

Lista de Tabelas

3.1. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.1$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$. 40

3.2. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.5$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$. 40

3.3. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.9$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$. 40

3.4. Probabilidade de ruína correspondente às figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. 44

3.5. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.1$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 600$ e $T = 1000$. 48

3.6. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.5$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 850$ e $T = 1000$. 49

3.7. Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.9$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 6000$ e $T = 1000$. 49

3.8. Majorantes para a probabilidade de ruína usando o teorema 2.2.5, com $T = 1000$ e $\lambda = 3$. 50

3.9. Majorantes para a probabilidade de ruína usando o teorema 2.2.6, com $T = 1000$ e $\lambda = 3$. 50

3.10. Erro relativo dos valores estimados. 51

Lista de Figuras

1.1. Processo reserva (R_t) e processo perda agregada (S_t) 17

3.1. Processo reserva (R_t) com $\alpha = 1.7$, $\kappa = 0.8$, reserva inicial $u = 25$, carga de segurança $\theta = 0.1$, intensidade de chegada das indemnizações $\lambda = 3$ (processo de Poisson) e o tempo limite $T = 100$. 39

3.2. Probabilidade de ruína em função da reserva inicial 41

3.3. Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 10$ 42

3.4. Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 1000$. 43

3.5. Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 10000$. 43

3.6. Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 100000$. 44

B.1. Histograma dos tempos da ruína 63

Introdução

A *probabilidade de ruína* é um dos assuntos que vem se destacando no campo da Teoria da Análise do Risco. Certamente que uma companhia de seguros faz o possível para que caso haja um incidente coberto no contrato com o segurado, ela venha a ter uma reserva suficiente para cobrir o que foi estabelecido no contrato, pagar a indemnização. Nessa ótica seria de todo importante que a seguradora tenha alguma ferramenta de controlo que lhe indicasse a situação dela num determinado tempo, para que por exemplo saber qual é a probabilidade da reserva ficar negativa daqui a 5 anos, ela tome as medidas adequadas para evitar tal inconveniência. Dito isto, a *probabilidade de ruína* pode ser vista como uma boa solução para contornar esse impasse. Com essa ferramenta, a seguradora pode avaliar o risco de ficar com reservas insuficientes para as indemnizações e ainda traçar estratégias que diminuam as possibilidades desse acontecimento vier a ocorrer.

Neste trabalho serão abordados os aspectos fundamentais da Teoria do Risco. O objetivo principal deste trabalho é estimar a *probabilidade de ruína* para processos de risco modelados por distribuições de Lévy α-estáveis. Para isso será mostrado a convergência fraca de processos de riscos para processos de Lévy α-estáveis. Para a estimação utilizou-se a técnica de simulação numérica, mais precisamente o método de Monte Carlo simples, na linguagem R.

Este trabalho encontra-se estruturado do seguinte modo: no primeiro capítulo encontra-se um breve resumo do modelo de risco de Cramér-Lundberg, que começa pela descrição dos conceitos básicos que o sustentam. Nesse mesmo capítulo introduz-se a noção da probabilidade de ruína, fala-se do coeficiente ou expoente de Lundberg e apresentam-se dois dos mais importantes resultados com as respetivas demonstrações, relativas à probabilidade de ruína: a desigualdade de Lundberg e a fórmula fechada para a probabilidade de ruína

quando as indemnizações seguem a distribuição exponencial. O segundo capítulo foca-se no objetivo principal do trabalho, onde se apresentam os fundamentos teóricos que sustentam a estimação da probabilidade de ruína via aproximação de processo de risco por processos de Lévy α-estáveis. No terceiro capítulo faz-se a estimação da probabilidade de ruína através da simulação numérica utilizando o método de Monte Carlo para modelos de risco clássico e a sua correspondente aproximação fraca. Na parte final apresentam-se algumas conclusões acerca do trabalho.

1. Modelo de Risco

Um modelo de risco é uma descrição matemática do comportamento de uma coleção de riscos gerados por um portfólio de seguros [4]. Cada modelo tem como base uma família de distribuições estatísticas. Tipicamente um modelo de risco coletivo de seguros tem duas componentes num período de tempo específico. Uma das componentes é a frequência (incidência) dos eventos e a outra é a quantidade (intensidade) da perda resultante de um evento [4]. A natureza estocástica tanto da frequência como da intensidade das indemnizações tornam essas componentes fundamentais para um modelo realista.

O modelo é construído supondo que uma coleção de apólices gera um número aleatório de indemnizações (ou sinistros) em cada período e em que cada indemnização é de montante aleatório.

1.1. Conceitos básicos

Nesta secção, introduzimos algumas notações e definições que são importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.1.1 (Processos Estocásticos) *Um* processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ *é uma coleção de variáveis aleatórias. Isto é, para cada* $t \in T$, X_t *é uma variável aleatória. O índice* t *é usualmente interpretado como* tempo, *e, como um resultado,* X_t *é referido como* estado *do processo no tempo* t. *O conjunto* T *é chamado de conjunto índice do processo. Quando* T *é um conjunto contável o processo estocástico é classificado como sendo um* processo em tempo discreto. *Se* T *é um intervalo de número reais, o processo estocástico é classificado como sendo um* processo em tempo contínuo.

Definição 1.1.2 (Processo de Contagem) *Um processo estocástico em tempo contínuo* $\{N_t : t \geq 0\}$ *é um* processo de contagem *se* N_t *representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo* $[0, t]$ *e se* $\forall\, t, s \geq 0$*:*

1. $N_0 = 0$

2. $N_t \in \mathbb{N}$

3. $N_t \leq N_{t+s}$

4. *para* $s < t$*,* $N_t - N_s$ *representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo* $[s, t]$

Um processo de contagem é dito ter *incrementos independentes* se o número de eventos que ocorre em intervalos de tempo disjuntos são independentes.

Definição 1.1.3 (Processo de Poisson) *Um processo de contagem* $\{N_t : t \geq 0\}$ *é um* processo de Poisson *com intensidade* λ *se:*

1. N_t *tem incrementos independentes.*

2. *O número de eventos em qualquer intervalo de tamanho* t *segue a distribuição de Poisson com média* λt*. Isto é,* $\forall s, t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Definição 1.1.4 (Processo de Poisson Composto) *Seja* $\{N_t : t \geq 0\}$ *um processo de Poisson com intensidade* λ *e* $\{X_i, i = 1, 2, 3, \ldots\}$ *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).*
Nessas condições, o processo $\{B_t,\, t \geq 0\}$*, definido como*

$$B_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

diz-se um Processo de Poisson Composto.

Teorema 1.1.1 (Teorema do Limite Central) *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância $\sigma^2 > 0$, ambas finitas. Então*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

onde $\xrightarrow{d}$ denota a convergência em distribuição.

1.2. Modelo de Risco Clássico

1.2.1. Descrição do Modelo

No *modelo clássico*, considera-se que a companhia seguradora tem um capital inicial, u, que é aumentado de acordo com os prémios que recebe dada pela função $c(t)$, e diminuído pelos pagamentos dos sinistros em instantes aleatórios. Em geral $c(t) = ct$ onde c é uma constante.

Para um instante de tempo t, fixo, a variável aleatória N_t representa o número de indemnizações que ocorreram no intervalo $[0, t]$ e segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt, com $\lambda > 0$.

A sequência de variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ representa as indemnizações individuais, sendo que cada X_i representa a quantia da i-ésima indemnização associada a um sinistro ocorrido.

Considera-se ainda que as indemnizações são independentes e identicamente distribuídas, com função distribuição F e $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, e independentes de N_t, o que quer dizer que a quantidade de indemnizações não tem impacto no valor das mesmas e nem os valores das indemnizações se influenciam entre si.

Sendo assim, o modelo clássico de risco para a atividade seguradora é um processo estocástico R_t, em que $t \geq 0$ e R_t é o valor da reserva no instante t, tal que:

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \tag{1.1}$$

onde, $u = R_0 \geq 0$ é o valor da reserva inicial, c é o prémio recebido por unidade de tempo e $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$ (Processo de Poisson Composto) são as indemnizações agregadas até ao instante t. A este modelo dá-se o nome de modelo de Crámer-Lundberg [2].

No caso de não haver nenhuma indemnização no intervalo $[0, t]$, o valor da indemnização agregada no tempo t é igual a zero, isto é,

$$N_t = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_t} X_i = 0.$$

O prémio, c, segue o princípio do valor esperado, isto é

$$c = (1 + \theta)\lambda E[X]$$

onde $\theta > 0$ é chamada de *carga de segurança relativa*, que pode ser entendida como um corretor para os possíveis desvios que possam ocorrer. É tipo uma garantia de sobrevivência da companhia seguradora, garantindo que em média a seguradora não dá prejuízo.

Definição 1.2.1 *Processo de Perda Agregada*

Ao processo, $\{S_t\}_{t\geq 0}$, em que $S_t = u - R_t$ chama-se processo de perda agregada. *É evidente que $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct$.*

A figura seguinte ilustra a conexão entre os dois processos: $\{R_t\}$ e $\{S_t\}$.

Pode-se constatar que o processo S_t é simétrico do processo R_t em relação à reta $R_t = \frac{u}{2}$. A figura ilustra o comportamento da reserva ao longo do tempo, que apresenta oscilações derivadas dos prémios recolhidos e das indemnizações pagas. Nota-se que a reserva cresce e num determinado instante o seu valor diminui fruto do pagamento das indemnizações. É desejável que após se terem pago as indemnizações, a companhia continue com a reserva positiva. No entanto, a ocorrência de uma indemnização pode levar a que a companhia fique com uma reserva negativa, como se pode constatar na figura 1.1 no instante $\tau(u)$. A este acontecimento dá-se o nome de *ruína*. Isso acontece somente quando ocorrer alguma indemnização pois é o único fator do modelo que faz com que a reserva decresça. Uma vez que o cálculo do prémio segue o princípio de valor esperado, a probabilidade que R_t passe para valores positivos é 1.

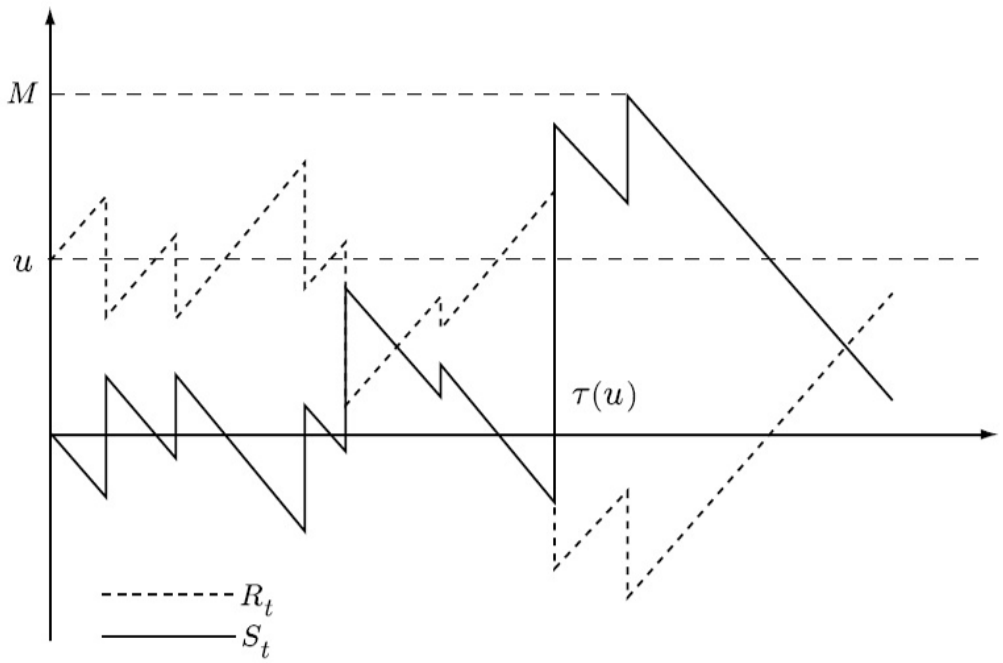

Figura 1.1.: Processo reserva (R_t) e processo perda agregada (S_t)

1.3. Probabilidade de Ruína

Uma seguradora precisa saber se irá "sobreviver"ao longo de um determinado período de tempo, ou seja, se irá ter reserva suficiente para cobrir as indemnizações. Caso isso não aconteça diz-se que a seguradora entrou em *ruína*. Para tentar controlar esta situação recorre-se muitas vezes a uma ferramenta de enorme valência: a *probabilidade de ruína*. Uma alta probabilidade serve como alerta de que a seguradora precisa de aumentar os prémios ou arranjar outras soluções que façam com que a situação se inverta. Nesta secção discorremos acerca dos aspectos teóricos e mostramos alguns caminhos que nos levam a valores aproximados da probabilidade de uma seguradora entrar em ruína num dado período de tempo [5].

Definição 1.3.1 *(Tempo da Ruína)*

Seja $\{R_t\}_{t\geq 0}$ *um processo de reserva de risco e* $u = R_0$.

O tempo da ruína é definido como

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S_t > u\}.$$

Ou seja, é o primeiro instante em que a companhia tem uma reserva negativa.

Por convenção,

$$\tau(u) = \infty \quad se \quad R_t \geq 0 \ , \forall\, t \geq 0.$$

Definição 1.3.2 *(Probabilidade da Ruína)*

Seja $\{R_t\}_{t\geq 0}$ *um processo de reserva de risco e* $u = R_0$.

A probabilidade $\psi(u)$ *da ruína num horizonte temporal infinito é dada por,*

$$\psi(u) = P\left(\tau(u) < \infty\right) = P\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 \,|\, R_0 = u\right) \tag{1.2}$$

e a probabilidade $\psi(u, T)$ *da ruína num horizonte temporal finito é dada por,*

$$\psi(u, T) = P\left(\tau(u) < T\right) = P\left(\inf_{0\leq t\leq T} R_t < 0 \,|\, R_0 = u\right). \tag{1.3}$$

Do ponto de vista prático, (1.3) tem mais interesse para as seguradoras, uma vez que permite saber o ponto de situação durante um determinado período de tempo.

Um dos resultados importantes é o facto de $\psi(u)$ satisfazer a equação integral de Volterra [16],

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\left[K(u) + \int_0^u \psi(u-x)H(x)dx\right], \tag{1.4}$$

onde,

$$H(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu} \qquad e \qquad K(u) = \int_u^\infty H(x)dx.$$

Através de 1.4 pode-se encontrar expressões fechadas para $\psi(u)$ para algumas classes de distribuições de indemnizações e ainda utilizar métodos numéricos para fazer a aproximação de $\psi(u)$.

1.3.1. O Coeficiente ou Expoente de Lundberg

Definição 1.3.3 *Supondo que $M_X(r)$ (função geradora dos momentos da variável aleatória X) existe, consideremos a função θ definida da seguinte forma:*

$$\theta(r) = \lambda(M_X(r) - 1) - cr,$$

*onde λ representa a intensidade de chegada das indemnizações, segundo um processo de Poisson e c é o prémio recebido por unidade de tempo no modelo clássico de risco. Consideremos agora, a equação (*equação de Lundberg*)*

$$\theta(r) = 0 \tag{1.5}$$

À primeira solução positiva da equação (1.5), se existir, chamamos de coeficiente de ajustamento *ou* expoente de Lundberg.

A seguir veremos o porquê do interesse da definição desta quantidade e algumas das suas aplicações.

1.3.2. Desigualdade de Lundberg

Uma das conexões entre o *expoente de Lundberg* e a probabilidade de ruína é apresentado através do seguinte teorema

Teorema 1.3.1 *Assumindo que o expoente de Lundberg R existe, então*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Demonstração

A demonstração será feita utilizando o princípio da indução. Para isso, define-se $\psi_n(u)$ como sendo a probabilidade de ruína antes ou na *n-ésima* indemnização. Será suficiente mostrar que

$$\psi_n(u) \leq \exp(-Ru), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

visto que

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u).$$

Hipótese:

Assume-se que para um valor fixo de n, $\psi_n(u) \leq \exp(-Ru)$, onde $n \geq 1$.

Considere-se que a primeira indemnização ocorre no tempo $t > 0$ e que a quantia dessa indemnização é x.

Se a ruína ocorrer antes ou na indemnização $(n+1)$, então

1. a ruína ocorre na primeira indemnização, o que implica que $x > u + ct$, ou
2. a ruína não ocorre na primeira indemnização, pelo que a reserva depois do pagamento desta indemnização, $u + ct - x$, é não-negativa e a ruína ocorre para esse processo de reserva numa das próximas n indemnizações.

As indemnizações ocorrem segundo um processo de Poisson, com parâmetro λ e considerando f a função densidade de probabilidade do montante das indemnizações. integrando sobre todos os possíveis tempos e quantias para a primeira indemnização, tem-se

$$\psi_n(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\psi_n(u+ct-x)dxdt \tag{1.6}$$

O primeiro integral representa a probabilidade de ruína na primeira indemnização e o segundo representa a probabilidade de ruína não ocorrer na primeira indemnização, mas sim de ocorrer numa das próximas n indemnizações.

Aplicando a hipótese da indução, tem-se

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt.$$

Pelo facto de que $\exp\left(-R\left(u+ct-x\right)\right) > 1$, para $x \geq u + ct$, então

$$\int_{u+ct}^\infty f(x)dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x)dx$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f(x)dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} M_X(R)dt.
\end{aligned}$$

Como a equação de Lundberg diz que $\theta(R) = 0 \Leftrightarrow \lambda + cR = \lambda M_X(R)$, segue-se que

$$\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} M_X(R)dt = 1$$

e portanto

$$\psi_{n+1}(u) \leq \exp(-Ru).$$

Falta apenas mostrar que $\psi_1(u) \leq \exp(-Ru)$.

Analogamente ao processo utilizado atrás, tem-se

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi_n(u) \leq \exp(-Ru), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

□

1.3.3. Aproximação de Cramér-Lundberg

Teorema 1.3.2 *Supondo que o expoente de Lundberg existe e que* $\int_o^\infty xe^{Rx}\frac{\lambda}{c}(1-F(x))dx < 0$, *onde F é a função distribuição das indemnizações, então*

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u)e^{Ru} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M_X'(R) - c}. \tag{1.7}$$

Pode-se ver a demonstração em [18].

No caso em que as indemnizações seguem a distribuição exponencial, tem-se que $e^{Ru} =$

$(c\beta)^{-1}\lambda$, onde β é o parâmetro da distribuição das indemnizações. Com isso, a aproximação de Crámer-Lundberg torna-se exata. Por outro lado, assumindo que a aproximação de Crámer-Lundberg é exata, isto é, existe uma constante $a \geq 0$ tal que $\psi(u) = ae^{-Ru}$ $\forall u \geq 0$, então $a = \lambda\mu(c)^{-1}$ e $R = \mu^{-1} - \lambda c^{-1}$. Detalhes desses resultados podem ser encontrados em [18]. Pode-se ver uma abordagem mais completa na secção seguinte acerca das indemnizações que seguem uma distribuição exponencial.

A aproximação de Crámer-Lundberg é famosa não só pela sua beleza matemática, mas também por ser precisa, muitas vezes, para todo $u \geq 0$ e não só para valores grandes de u [2].

1.3.4. Probabilidade de Ruína para Indemnizações que seguem uma Distribuição Exponencial

Uma das poucas maneiras de se encontrar uma fórmula fechada para a probabilidade de ruína é quando as indemnizações seguem uma distribuição exponencial. De seguida apresenta-se tal expressão e a respetiva demonstração.

Teorema 1.3.3 *Para um processo de risco em que as indemnizações seguem uma distribuição exponencial de parâmetro β, tem-se*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1+\theta}\right). \tag{1.8}$$

Demonstração

Define-se $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ como sendo a probabilidade da ruína nunca ocorrer, conhecida como *probabilidade de sobrevivência*.

Utilizando (1.6) e considerando o tempo e a quantia da primeira indemnização, tem-se

$$\phi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\phi(u+ct-x)dxdt \tag{1.9}$$

Fazendo $s = u + ct$, vem

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda s/c} \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds \tag{1.10}$$

Derivando (1.10), tem-se a seguinte *equação integro-diferencial*:

$$\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx. \tag{1.11}$$

Como $F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \beta e^{-\beta x}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\phi(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \beta e^{-\beta x}\phi(u-x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\beta\lambda}{c}\int_0^u e^{-\beta(u-x)}\phi(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\beta\lambda}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta x}\phi(x)dx \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Derivando agora (1.12), segue-se que

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u) + \frac{\beta^2\lambda}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta x}\phi(x)dx - \frac{\beta\lambda}{c}\phi(u). \tag{1.13}$$

Multiplicando a equação (1.12) por β e adicionando membro a membro a equação (1.13), tem-se

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\frac{d}{du}\phi(u) = 0 \tag{1.14}$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem linear, cuja solução geral, válida para este problema, é dada por

$$\phi(u) = a + b\exp\left(-(\beta - \lambda/c)u\right), \tag{1.15}$$

com a e b constantes. Utilizando a desigualdade de Lundberg, tem-se que

$$\lim_{u\to\infty}\phi(u) = 1,$$

o que implica que $a = 1$. Logo,

$$\phi(0) = 1 + b,$$

que é o mesmo que dizer que

$$b = -\psi(0).$$

Portanto,

$$\phi(u) = 1 - \psi(0)e^{-(\beta-\lambda/c)u}.$$

A questão que agora se coloca é encontrar $\psi(0)$. Substituindo $\phi(u)$ por $1-\psi(u)$ na equação (1.11), vem

$$\frac{d}{du}\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}(1-F(x)) \tag{1.16}$$

Integrando (1.16) sobre $(0;\infty)$, tem-se

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^u f(x)\psi(u-x)dxdu - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(x))dx \tag{1.17}$$

Mudando a ordem de integração no integral duplo na equação (1.17), tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^u f(x)\psi(u-x)dxdu &= \int_0^\infty\int_x^\infty \psi(u-x)duf(x)dx \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \psi(y)dyf(x)dx \\ &= \int_0^\infty \psi(y)dy \end{aligned} \tag{1.18}$$

Portanto, os dois primeiros termos do lado direito da equação (1.17) anulam-se e fica então

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(u))\,du = \frac{\lambda\mu}{c}, \tag{1.19}$$

assumindo que a desigualdade de Lundberg se aplica. Uma vez que $F(x) = 1-e^{-\beta x}, \quad x \geq 0,$

tem-se que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 - F(u))\, du &= \int_0^\infty e^{-\beta u} du \\
&= -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty -\beta e^{-\beta u} du \\
&= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\psi(0) = \frac{\lambda}{\beta c} \tag{1.20}
$$

Daí conclui-se que

$$
\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c} \exp\left(-(\beta - \lambda/c)u\right) \tag{1.21}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{\lambda}{\beta c} \exp\left(-(\beta - \lambda/c)u\right) \\
&= \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\beta\theta u}{1+\theta}\right).
\end{aligned}
$$

□

Uma vez que para a distribuição exponencial de parâmetro β, $R = \beta - \frac{\lambda}{c}$, tem-se que

$$
\psi(u) = \psi(0) \exp(-Ru) \tag{1.22}
$$

Com este resultado, pode-se ver a importância da carga de segurança para a companhia de seguros, uma vez que caso não existisse faria com que $\psi(u) = 1$, ou seja, a companhia entraria em ruína com probabilidade 1.

2. Probabilidade de Ruína e os Processos de Lévy α-Estável

O modelo de risco utilizando uma distribuição α-estável foi proposto por Furrer, Michna e Weron (1997) [8] com o intuito de generalizar a aproximação por um processo de difusão, uma vez que apresenta maior flexibilidade. O facto de poderem existir indemnizações com valores grandes faz com que a distribuição das indemnizações tenha uma cauda pesada, o que poderá levar a problemas de modelação. Nesta ótica, as distribuições estáveis surgem como solução para este problema, uma vez que essas distribuições descrevem fenómenos de caudas pesadas, dando importância aos eventos raros, isto é, atribuem probabilidades significativas para esses eventos. A cauda das distribuições α-estáveis decresce como uma lei de potência. A taxa de decaímento depende principalmente do parâmetro $\alpha \in (0, 2]$. Quanto menor for o valor de α, mais lento é o decaimento e mais pesada é a cauda [11].
De seguida serão apresentados os fundamentos teóricos relativamente a esse modelo de risco e à correspondente probabilidade de ruína.

2.1. Distribuição Estável

As distribuições estáveis são uma rica classe de distribuições de probabilidades que permitem a assimetria e caudas pesadas e têm muitas propriedades matemáticas interessantes. A classe foi caracterizada por Paul Lévy nos seus estudos de somas de termos independentes e identicamente distribuídas em 1920 [13]. Para a definição que vamos ver, é conveniente introduzir a seguinte notação:

$$U \stackrel{d}{=} V \tag{2.1}$$

para indicar que as variáveis aleatórias U e V tem a mesma distribuição, isto é, têm a mesma lei de probabilidade. Assim, $U \stackrel{d}{=} aV + b$ significa que as distribuições de U e V diferem apenas nos parâmetros de escala e localização.

Definição 2.1.1 *Diz-se que uma variável aleatória X é* estável *se existirem um número positivo c_n e um número real d_n, tais que:*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad n \geq 2 \tag{2.2}$$

onde as variáveis aleatórias X_i são cópias independentes de X.

X é *estável em sentido estrito* se (2.2) mantém-se com $d_n = 0$.

Pode-se ainda dizer que uma variável aleatória X tem *distribuição estável*, do seguinte modo:

Definição 2.1.2 *Dizemos que uma variável aleatória* X *tem* distribuição estável *se existirem constantes $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$, $|\beta| \leq 1$ e μ tais que a função característica de* X *é dada por*

$$\ln \phi_X(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sinal}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], & se \quad \alpha \neq 1; \\ \\ it\mu - \sigma|t|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\text{sinal}(t)\ln(t)], & se \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

onde sinal(t) é a função sinal de t e

$$sinal(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0; \\ 0, & \text{se} \quad t = 0; \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

α é o índice de estabilidade,

σ é o índice (parâmetro) de escala,

β é o parâmetro de assimetria,

μ é o parâmetro de localização.

Em termos de interpretação dos parâmetros temos que:

α determina a massa de probabilidade nas caudas. Quanto menor for o seu valor maior é a concentração da massa probabilidade nas caudas.

β controla a simetria da distribuição: se $\beta \in (0, 1]$, a distribuição é assimétrica positiva sendo que o grau de assimetria é tanto maior quanto maior for o valor de β;
se $\beta \in [-1, 0)$, a distribuição é assimétrica negativa sendo que o grau de assimetria é tanto maior quanto menor for o valor de β;
se $\beta = 0$, a distribuição é simétrica.

σ pode ser considerado como um parâmetro de dispersão. Quando $\alpha < 2$ a variância é infinita e neste caso σ é um valor que define a escala, diferente da variância. No caso em que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (distribuição de Cauchy), σ é tido como semi-amplitude inter-quartis.

μ é tido como valor médio da distribuição quando $\alpha > 1$.

A notação $\mathbf{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ é usada para as classes de leis estáveis.
Pode-se ver em [13] que as definições 2.1.1 e 2.1.2 são equivalentes.

Apesar de existir uma fórmula fechada para a função característica das distribuições de Lévy α-estáveis, só existem 3 casos em que se podem escrever as expressões das densidades na forma fechada:

- Distribuição Normal

  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se a sua densidade for

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty.$$

  As distribuições que seguem leis normais são estáveis com $\alpha = 2$ e $\beta = 0$. Por outras palavras, $N(\mu, \sigma^2) = S_2(\sigma/\sqrt{2}, 0, \mu)$.

- Distribuição de Cauchy

  $X \sim Cauchy(\sigma, \mu)$ se a sua densidade for

  $$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

As distribuições que seguem as leis de Cauchy são estáveis para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, isto é, $Cauchy(\sigma, \mu) = S_1(\sigma, 0, \mu)$.

A função distribuição é dada por

$$P(X \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

- Distribuição de Lévy

  $X \sim Lévy(\sigma, \mu)$ se a sua densidade for

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right), \qquad \mu < x < \infty.$$

  São estáveis para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, ou seja, $Lévy(\sigma, \mu) = S_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu)$.

  A função distribuição é dada por

$$P(X \leq x) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)\right).$$

Teorema 2.1.1 *As seguintes propriedades mantém-se para uma distribuição estável:*

1. *Sendo X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e estáveis, com $X_i \sim S_{\alpha_i}(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, para $i = 1, 2$ então*

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

   com

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \qquad e \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

2. *$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e $a \in \mathbb{R}$ então $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$*

3. *$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e $a \in \mathbb{R}$*

   Tem-se que:

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, sinal(a)\beta, a\mu), & se\ \alpha \neq 1; \\ \\ S_1(|a|\sigma, sinal(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\log|a|)\sigma\beta), & se\ \alpha = 1. \end{cases}$$

4. *$\alpha \in (0,2)$ e $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ então $-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$.*

5. *Para $\alpha \in (0,2)$ e $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ então*

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha P(X > x) = C_\alpha (1+\beta)\sigma^\alpha$$

onde C_α é uma constante dependente de α.

6. *Para $\alpha \in (0,2)$ e $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ então*

   - $E|X|^p < \infty$ *se* $0 < p < \alpha$
   - $E|X|^p = \infty$ *se* $p \geq \alpha$.

7. *Sendo $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ um processo estocástico com uma distribuição estável, simétrica, de dimensão finita e índice da cauda α, então para qualquer $c > 0$ e $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$:*

$$(X_{ct_1}, X_{ct_2}, \ldots, X_{ct_n}) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{\alpha}} (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

2.2. Probabilidade de Ruína via aproximação de processos de risco por processos de Lévy α-estáveis

Nesta secção serão abordados as aproximações do processo de risco por processos de Lévy α-estáveis, com vista a obter fórmulas para probabilidades de ruína em horizontes de tempo finito e infinito. Será assumido que a distribuição das indemnizações tem cauda pesada. Para tal, estuda-se a probabilidade de ruína via aproximações de processos de risco $\{Q_{(n)}\}$ por processos de Lévy α-estáveis, com $1 < \alpha < 2$, para garantir a existência do valor esperado das indemnizações, como segue da propriedade 6 do teorema 2.1.1.

De notar que uma das consequências das propriedades é que se cada uma das indemnizações segue uma distribuição de Lévy α-estável então a soma agregada também segue uma distribuição de Lévy α-estável.

2.2.1. Convergência Fraca do Processo de Risco para Processos de Lévy α-estáveis

Definição 2.2.1 *Um processo estocástico* $Z_\alpha = \{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ *é chamado* processo de Lévy α-estável *se:*

1. $Z_\alpha(0) = 0$ *quase certamente*
2. Z_α *tem incrementos independentes.*
3. $Z_\alpha(t) - Z_\alpha(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$ *para* $0 \leq s < t < \infty$, $0 < \alpha \leq 2$ *e* $|\beta| \leq 1$

Daqui em frente, todos os processos estocásticos abordados serão assumidos como pertencentes ao espaço $D = D[0, \infty)$. O espaço $D[0, \infty)$ é o espaço de todas as funções, f, de valores reais sobre o intervalo $[0, \infty)$ que são contínuas à direita com limites à esquerda (*cadlag*), dotado com a topologia de Skorokhod.
Simbolicamente, tem-se:

1. $\forall t \in [0, \infty]$, $f(t^+) = \lim_{y \to t^+} f(y)$ existe e $f(t^+) = f(t)$.
2. $\forall t \in [0, \infty]$, $f(t^-) = \lim_{y \to t^-} f(y)$ existe.

Definição 2.2.2 *Uma sequência* $\left(X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ *de processos estocásticos é dita que converge fracamente na topologia de Skorokhod para um processo estocástico* X *se para qualquer funcional* f*, contínua e limitada sobre* D*, tem-se:*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\left[f(X^{(n)})\right] = \mathbf{E}\left[f(X)\right]. \tag{2.3}$$

Neste caso escreve-se $X^{(n)} \xrightarrow{f} X$.

A ideia é construir uma sequência de processos de risco que converge fracamente para o processo de Lévy α-estável.
Considere-se $Q_n(t)$ como sendo uma sequência de processos de risco, assim definido:

$$Q_n(t) = u_n + c_n t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, \tag{2.4}$$

onde u_n é a reserva inicial, c_n é o prémio recebido por unidade de tempo, $\{Y_k^{(n)} : k \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência que descreve as quantias das indemnizações consecutivas e $N^{(n)}(t)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é um processo de contagem do número de indemnizações. Assume-se ainda que as variáveis aleatórias representando as indemnizações são da forma

$$Y_k^{(n)} = \frac{1}{\varphi(n)} Y_k, \tag{2.5}$$

onde $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição F, valor esperado $\mathbf{E}[Y_k] = \mu$ e variância $Var[Y_k] = \sigma^2$. $\varphi(n) = n^{1/\alpha} L(n)$, onde L é uma função de variação lenta, isto é, $\forall t > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{L(tn)}{L(n)} = 1$. Assume-se ainda que as variáveis aleatórias Y_k pertencem ao domínio de atração de uma lei α-estável, isto é,

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \xrightarrow{w} Z_\alpha(1), \tag{2.6}$$

onde $Z_\alpha(t)$ é o processo de Lévy α-estável com parâmetro de escala σ', parâmetro de assimetria β e $1 < \alpha < 2$. No caso de $\alpha = 2$ verifica-se que $\sigma = \sqrt{2}\sigma'$. Por isso, é razoável admitir que $\sigma' = 2^{-1/\alpha}\sigma$ no caso geral [4].

Um dos propósitos é mostrar que $Q_n(t)$, com as hipóteses acima, converge fracamente para o processo de risco (*processo limite*) $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ dado por

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \qquad 1 < \alpha < 2 \tag{2.7}$$

onde u e c são constantes positivas e $\{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Lévy α-estável. A constante λ será especificada no teorema que se segue.

Teorema 2.2.1 *Considere a sequência $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$ como a referida acima e $\{N^n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de processos pontuais tais que*

$$\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\varphi(n)} \to 0, \qquad n \to \infty \tag{2.8}$$

em probabilidade na topologia de Skorokhod para alguma constante positiva λ.

Assume-se ainda que

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n - \lambda n \frac{\mu}{\varphi(n)} \right) = c \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Então

$$u_n + c_n t - \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} Y_k \xrightarrow{w} u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty, \tag{2.9}$$

na topologia de Skorokhod.

Para a demonstração do teorema acima enunciado, será necessário o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 *Considere $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de processos estocásticos, Z processos pertencentes ao espaço D e suponha que $Z_n \xrightarrow{w} Z$. Considere ainda $\{N_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de processos com trajetórias não decrescentes, começando em zero tal que $N_n \xrightarrow{w} \lambda I$, onde $\lambda > 0$ e I representa a função identidade sobre $[0, \infty[$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, Z_n e N_n são assumidos com sendo definidos num mesmo espaço de probabilidade. Então*

$$Z_n(N_n) \xrightarrow{w} Z(\lambda I), \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Demonstração do Teorema 2.2.1

Consideremos Q_n escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= u_n + c_n t - \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k \\ &= u_n + t\left(c_n - \lambda n \frac{\mu}{\varphi(n)}\right) - \mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\varphi(n)}\right) - \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} (Y_k - \mu). \end{aligned}$$

Da hipótese (2.8) obtém-se

$$\mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\varphi(n)}\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

na topologia de Skorokhod.

Da hipótese (2.6) segue que

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{[nt]} (Y_k - \mu) \xrightarrow{w} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty,$$

na topologia de Skorokhod.

Como

$$u_n + t\left(c_n - \lambda n \frac{\mu}{\varphi(n)}\right) - \mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\varphi(n)}\right)$$

converge para $u + ct$ em probabilidade na topologia de Skorokhod, fica assim concluída a demonstração.

$\square$

O Teorema 2.2.1 mostra que um processo de risco modelado por uma distribuição com caudas pesadas pode ser aproximada por um processo de tipo (2.7).

2.2.2. Probabilidade de Ruína no Processo de Risco Limite

Nesta parte será analisado a convergência das probabilidades de ruína no tempo finito e infinito para as probabilidades de ruína do processo limite. Será apresentado uma fórmula exata para a probabilidade de ruína em tempo infinito e um majorante para a probabilidade ruína em tempo finito [4].

Na sequência do que já foi abordado no capítulo 2, consideremos o *funcional* $T_n = T(Q_n)$, onde

$$T(X) = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\}, \tag{2.11}$$

representa o tempo de ruína relativo ao processo X.

O teorema que se segue, permite que se faça a comparação entre a probabilidade de ruína em tempo finito e a probabilidade de ruína da correspondente aproximação fraca.

Teorema 2.2.2 *Consideremos T o funcional definido em (2.11). Se $Q_n \xrightarrow{w} Q$, sendo Q o processo limite definido por 2.7, então*

$$T(Q_n) \xrightarrow{w} T(Q)$$

A demonstração pode ser vista em Furrer et al (1997) [8].

Observação 2.2.1

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q_n) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

Observação 2.2.2

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\le s\le t} Q_n(s) < 0\right\} = P\left\{\inf_{0\le s\le t} Q(s) < 0\right\}.$$

A proposição seguinte, faz referência a uma aproximação para o comportamento assintótico de $P\{T(Q) \le t\}$ quando a reserva inicial u se torna grande. A notação $f(x) \sim g(x)$, sendo f e g duas funções, significa que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposição 2.2.2 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável com parâmetro de assimetria $-1 < \beta \le 1$. Então*

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) \le t\right\} \sim C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t (u+ct)^{-\alpha}, \quad u \to \infty,$$

onde $C_\alpha = \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right)}$.

A seguir serão apresentados limites superiores para $P\{T(Q) \le t\}$, quando o processo de Lévy α-estável é simétrico.

Teorema 2.2.3 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável e $y \ge 0$, $z > 0$. Então*

$$P\left\{Z_\alpha(t) < z - y, \sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge z\right\} \le P\{Z_\alpha(t) > y + z\}.$$

A demonstração pode ser vista em Furrer et al (1997).

Corolário 2.2.1 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável e $z > 0$. Então*

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge z\right\} \le 2P\{Z_\alpha(t) > z\}.$$

Com os resultados atrás referidos, está-se em condições de encontrar majorantes para a probabilidade de ruína do processo Q, onde a componente estável Z_α é um processo de Lévy α-estável simétrico. Se $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$, denota-se por $F(x; \alpha, \beta)$ a função de distribuição de X. Escreve-se ainda $\overline{F} = 1 - F$.

Teorema 2.2.4 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável. Para valores positivos de u, c e λ tem-se*

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) \le t\right\} \le 2P\left\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\right\} = 2\overline{F}\left(\frac{u}{(\lambda t)^{1/\alpha}}; \alpha, 0\right).$$

Demonstração

Usando o corolário 2.2.1 tem-se

$$\begin{aligned}
P\left\{T\left(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)\right)>t\right\} &= P\left\{\inf_{0\le s\le t}\left(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)\right)\ge 0\right\}\\
&= P\left\{\sup_{0\le s\le t}\left(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)\right)\le 0\right\}\\
&= 1-P\left\{\sup_{0\le s\le t}\left(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)\right)>0\right\}\\
&\ge 1-P\left\{\sup_{0\le s\le t}Z_\alpha(s)\ge u\lambda^{-1/\alpha}\right\}\\
&\ge 1-2P\left\{Z_\alpha(t)>u\lambda^{-1/\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

□

Para o caso não simétrico será necessário o seguinte lema para se estabelecer um majorante:

Lema 2.2.1 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável, com $\alpha\neq 1$ e parâmetro de assimetria $|\beta|\le 1$. Então para $z>0$ tem-se*

1. $P\left\{Z_\alpha(t)>0\right\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi\alpha}\arctan\left(\beta\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)=:\rho$
2. $P\left\{\sup\limits_{0\le s\le t}Z_\alpha(s)\ge z\right\}\le\left(\dfrac{1}{\rho}\right)P\left\{Z_\alpha(t)>z\right\}$

O teorema que se segue estabelece um limitante superior para a probabilidade de ruína em tempo finito para o caso não simétrico.

Teorema 2.2.5 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável, com $\alpha\neq 1$ e parâmetro de assimetria $|\beta|\le 1$. Para valores positivos de u, c e λ tem-se*

$$P\left\{T\left(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)\right)\le t\right\}\le\frac{1}{\rho}P\left\{Z_\alpha(t)>u\lambda^{-1/\alpha}\right\}=\frac{1}{\rho}\overline{F}\left(\frac{u}{(\lambda t)^{1/\alpha}};\alpha,\beta\right).$$

Teorema 2.2.6 *Seja Z_α um processo de Lévy α-estável, com $\alpha \neq 1$ e parâmetro de assimetria $|\beta| \leq 1$ ou $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Para valores positivos de u, c e λ tem-se*

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) \leq t\right\} \leq \frac{\overline{F}\left(\frac{(u+ct)}{(\lambda t)^{1/\alpha}}; \alpha, \beta\right)}{\overline{F}\left(\frac{ct}{(\lambda t)^{1/\alpha}}; \alpha, \beta\right)}.$$

Tudo o que foi abordado acima tem a ver com o caso da probabilidade de ruína em tempo finito. Agora vamos considerar a probabilidade de ruína em tempo infinito para o processo de Lévy α-estável.

Para $\beta = 1$ é possível dar uma fórmula exata para a probabilidade de ruína em tempo infinito. Furrer (1998) [7] mostrou que se Z_α for um processo de Lévy α-estável com $1 < \alpha < 2$ e $\beta = 1$ e parâmetro de escala σ', então para valores positivos u, c e λ

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) < \infty\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{\Gamma\{1 + (\alpha - 1)n\}} u^{(\alpha-1)n},$$

onde $a = c\lambda^{-1}(\sigma')^{-\alpha} \cos \dfrac{\pi(\alpha - 2)}{2}$.

Para um β arbitrário, pode-se obter um comportamento assintótico para a probabilidade de ruína com horizonte de tempo infinito quando a reserva inicial tende para infinito.

Seja Z_α um processo de Lévy α-estável com $1 < \alpha < 2$, $-1 < \beta \leq 1$ e parâmetro de escala σ'. Então para valores positivos u, c e λ tem-se (ver [4])

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) < \infty\right\} = \frac{A(\alpha, \beta)\lambda(\sigma')^\alpha}{\alpha(\alpha - 1)c} u^{-\alpha+1} + \mathcal{O}\left(u^{-\alpha+1}\right)$$

quando $u \to \infty$, onde

$$A(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\pi} \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \sin\left[\frac{\pi\alpha}{2} + \arctan\left[\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right].$$

Resta ver o caso em que $\beta = -1$. Seja Z_α for um processo de Lévy α-estável com $1 < \alpha < 2$, $-1 < \beta \leq 1$ e parâmetro de escala σ'. Então para valores positivos u, c e λ tem-se

$$P\left\{T\left(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) < \infty\right\} = \exp\left(-a^{1/(\alpha-1)} u\right)$$

onde a é a expressão definida anteriormente.

3. Simulação

Este capítulo aborda a simulação de processos de risco com o objetivo de estimar a probabilidade de ruína, quando as indemnizações seguem a distribuição de Pareto e a respetiva aproximação utilizando as distribuições α-estáveis. Tendo em conta que uma das condições para que se faça a aproximação através das distribuições α-estáveis é que a distribuição que as indemnizações seguem pertença ao domínio de atração da lei estável, serão apresentados alguns critérios para que tal aconteça. O método de simulação será o de Monte Carlo simples. Será utilizada a distribuição estável padronizada, isto é, o parâmetro de escala $\sigma = 1$ e o parâmetro de localização $\mu = 0$: $S_\alpha(1, \beta, 0)$.

3.1. Probabilidade de Ruína no Modelo Clássico em que as indemnizações seguem a Distribuição de Pareto

Definição 3.1.1 *Uma variável aleatória X segue uma distribuição de Pareto se a função distribuição for dada por*

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa + x}\right)^\alpha, \quad \kappa,\, \alpha > 0,\, x \geq 0 \tag{3.1}$$

O valor esperado da distribuição de Pareto é dado por

$$\mu = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{\kappa}{\alpha - 1}$$

Para a simulação considerou-se $1 < \alpha < 2$, para garantir a existência da média.

A figura 3.1 representa a simulação de um processo de risco em que as indemnizações seguem uma distribuição de Pareto.

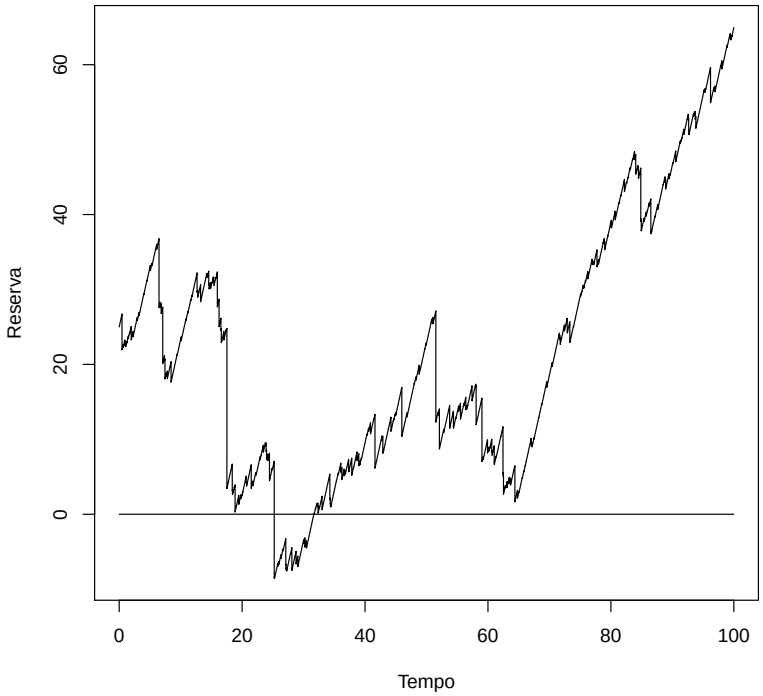

Figura 3.1.: Processo reserva (R_t) com $\alpha = 1.7$, $\kappa = 0.8$, reserva inicial $u = 25$, carga de segurança $\theta = 0.1$, intensidade de chegada das indemnizações $\lambda = 3$ (processo de Poisson) e o tempo limite $T = 100$.

No decorrer da análise numérica, fizeram-se várias simulações com o intuito de estimar a probabilidade de ruína para um Modelo de Risco Clássico em que as indemnizações seguem a distribuição de Pareto. Para isso, utilizou-se o Método de Monte Carlo. No decorrer dessas simulações fizeram-se variar alguns parâmetros tais como a reserva inicial, u, o índice da cauda, α. As tabelas que se seguem mostram os valores estimados a partir de 500000 simulações:

u	α	$\psi(u,T)$
10	1.1	4.286×10^{-1}
50	1.1	3.476×10^{-1}
100	1.1	3.048×10^{-1}
200	1.1	2.680×10^{-1}
500	1.1	2.126×10^{-1}
1000	1.1	1.639×10^{-1}

Tabela 3.1.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.1$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$.

u	α	$\psi(u,T)$
10	1.5	6.290×10^{-1}
50	1.5	4.034×10^{-1}
100	1.5	2.901×10^{-1}
200	1.5	1.790×10^{-1}
500	1.5	7.270×10^{-2}
1000	1.5	2.720×10^{-2}

Tabela 3.2.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.5$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$.

u	α	$\psi(u,T)$
10	1.9	5.132×10^{-1}
50	1.9	1.835×10^{-1}
100	1.9	7.950×10^{-2}
200	1.9	2.540×10^{-2}
500	1.9	5.400×10^{-3}
1000	1.9	1.700×10^{-3}

Tabela 3.3.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.9$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$ e $T = 1000$.

Os resultados obtidos estão de acordo com [8]. De acordo com estes resultados, para uma reserva inicial, u, constata-se o seguinte:

- Para um valor de u pequeno, a variação de α não faz que haja uma grande diferença relativamente aos valores estimados de $\psi(u, T)$, havendo oscilações entre esses valores estimados.

- No caso em que u é grande, a variação de α tem uma influência acentuada, fazendo com o valor de $\psi(u, T)$ seja maior, quanto menor seja o valor de α.

Este facto está relacionado com a natureza extrema da distribuição de Lévy α-estável, pois como se disse no capítulo 3, quanto menor for o valor de α, mais lento é o decaimento e mais pesada é a cauda, o que no contexto do modelo tem a ver com a presença de valores de indemnizações grandes que consequentemente aumentam a probabilidade da ruína ocorrer.

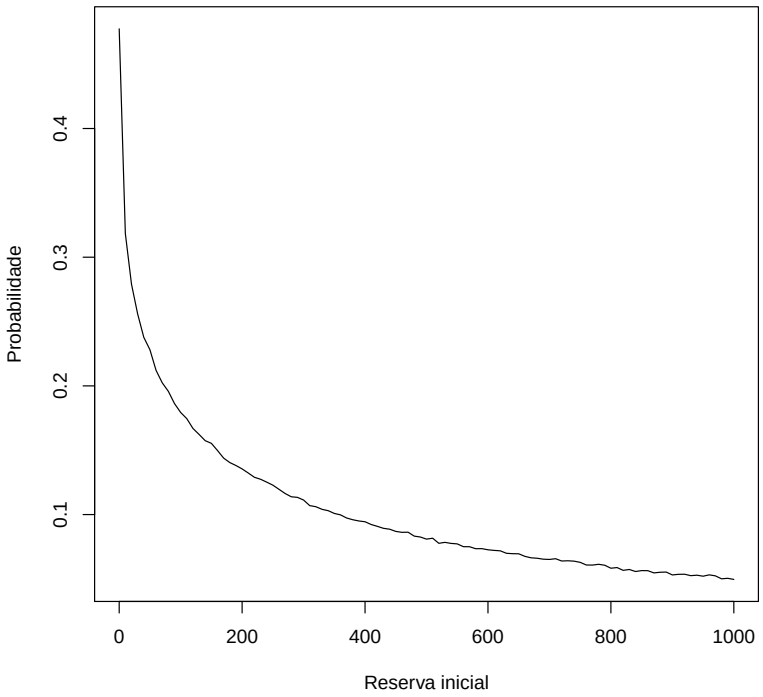

Figura 3.2.: Probabilidade de ruína em função da reserva inicial

.

A Figura 3.2 representa a evolução da probabilidade de ruína em função da reserva inicial. Foi utilizado uma sequência de reservas iniciais, mais precisamente $\{u_n\} = \{0, 10, 20, 30, \ldots, 1000\}$, uma carga de segurança $\theta = 0.1$, uma intensidade de chegada $\lambda = 3$, um tempo limite, $T = 100$ e os parâmetros da distribuição de Pareto, $\alpha = 1.1$ e $\kappa = 0.5$. Para cada valor u_n da reserva inicial fizeram-se 100000 simulações.

Como já se esperava, o gráfico mostra que quanto maior for a reserva inicial, menor é a probabilidade da ruína ocorrer, com tendência a convergir para zero.

Com vista a estudar o comportamento dos tempos da ruína ao longo das simulações, construíram-se alguns histogramas, fazendo variar a reserva inicial e fixando $\lambda = 3$, $\alpha = 1.1$ e $k = 0.5$. Nota-se que há maior probabilidade da ruína ocorrer nos primeiros instantes, quanto menor for a reserva inicial. Quando o valor da reserva inicial é grande a distribuição dos tempos da ruína aproxima-se da uniforme. As figuras seguintes ilustram essas situações.

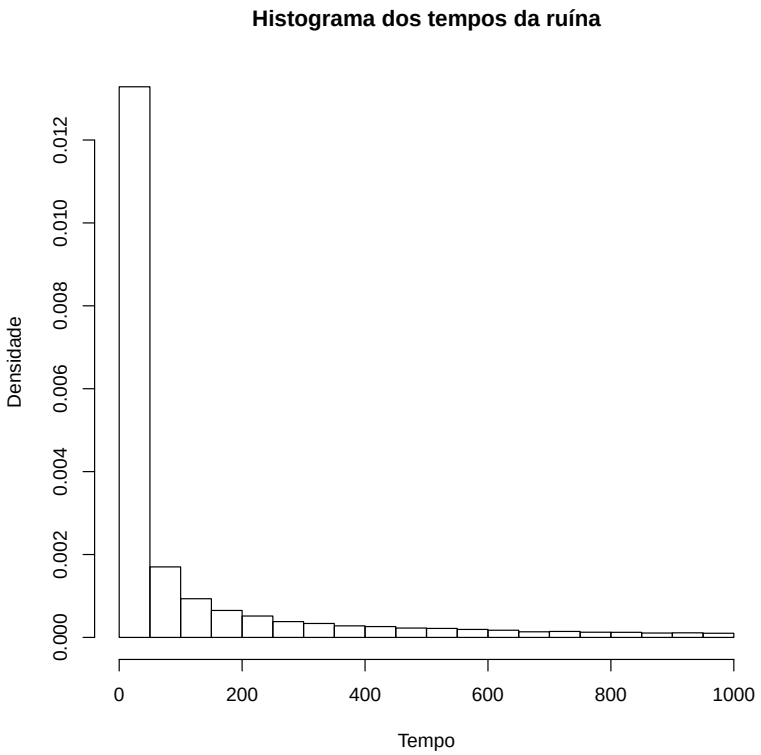

Figura 3.3.: Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 10$

.

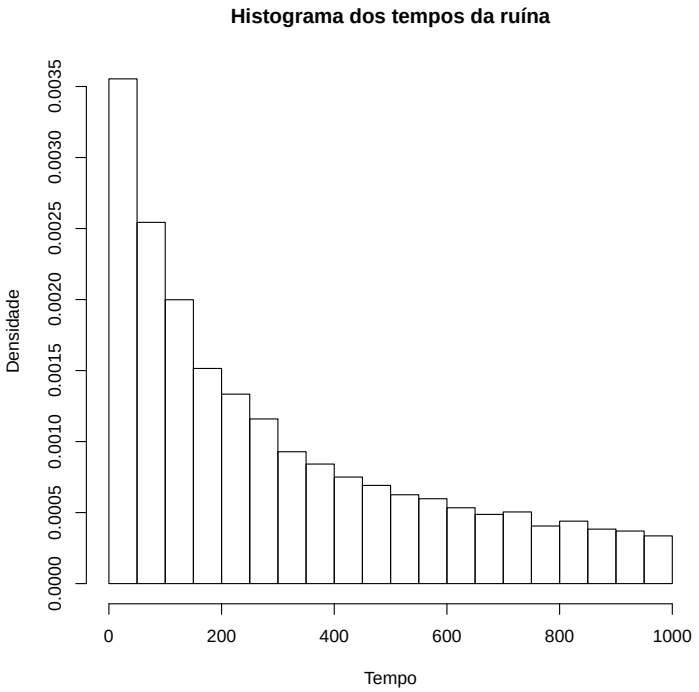

Figura 3.4.: Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 1000$.

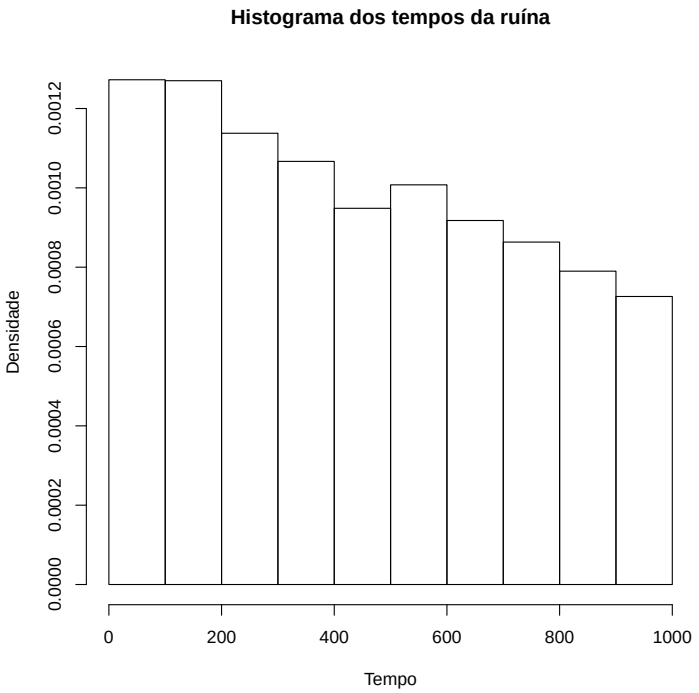

Figura 3.5.: Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 10000$.

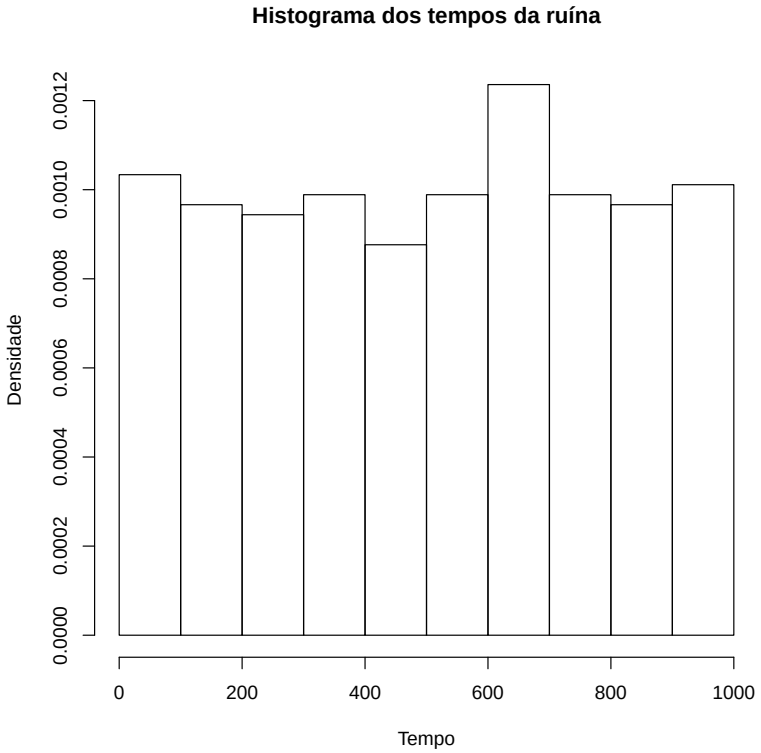

Figura 3.6.: Histograma dos tempos da ruína com uma reserva inicial $u = 100000$.

A tabela 3.1 indica os valores das probabilidades de ruína correspondente a cada uma das figuras anteriores. Foram utilizados os mesmos valores dos parâmetros que tinham sido utilizados para construção do gráfico representado na Figura 3.2, à exceção do tempo limite. Utilizou-se um tempo limite $T = 1000$.

Figura	3.3	3.4	3.5	3.6
u	10	1000	10000	100000
$\psi(u,T)$	4.2800×10^{-1}	1.6256×10^{-1}	4.1050×10^{-2}	4.4500×10^{-3}

Tabela 3.4.: Probabilidade de ruína correspondente às figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.

3.2. Aproximação da Probabilidade de Ruína através de Processos de Lévy α-Estáveis

Um dos pontos chaves para se aproximar a probabilidade de ruína através da distribuição estável é que a distribuição que as indemnizações seguem pertença ao domínio de atração de uma lei estável. Feller (1971) [6] apresenta o seguinte critério para que tal aconteça:

- Uma distribuição F pertence ao domínio de atração normal de uma distribuição U, se

$$x^{\alpha}\left[1-F(x)\right] \to Cp, \quad x \to \infty \tag{3.2}$$

$$x^{\alpha}F(-x) \to Cq, \quad x \to \infty \tag{3.3}$$

  onde $C > 0$ é constante, p e q representam os pesos das metades dos eixos positivo e negativo, $p + q = 1$.

Se $\alpha < 2$, a distribuição de Pareto pertence ao domínio de atração de uma distribuição estável com índice α [15].

De acordo com Furrer et al (1997) [8], se $\varphi(n) = n^{1/\alpha}$ então F pertence ao domínio de atração normal da lei estável.

Conjugando os pontos acima referidos, conclui-se que a distribuição de Pareto pertence ao domínio de atração normal de $S_{\alpha}(1,1,0)$, uma vez que $F(x)$ está definido para $x \geq 0$, o que faz com que (3.3) não seja aplicável, fazendo todo sentido pois $\beta = 1$ (distribuição deslocada para a direita). Pode-se ver que

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\left[1-F(x)\right] = x^{\alpha}\left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^{\alpha} = \kappa^{\alpha} > 0.$$

Agora vai-se expor a justificação teórica que permite fazer a aproximação da probabilidade de ruína num processo clássico por meio da convergência fraca de processos de risco para um modelo de risco que usa a distribuição α-estável, desenvolvida por Furrer et al [8]. Considere-se o modelo clássico de risco $R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, com distribuição das indemnizações F e o prémio dado por $c = (1+\theta)\lambda\mu$, com $\theta > 0$. Assume-se que F pertence ao domínio de

atração de $S_\alpha(1,\beta,0)$. Calculando a probabilidade de ruína em tempo finito para o processo R_t, tem-se:

$$\begin{aligned}
\psi(u,t) &= P\left(\inf_{0\le s\le t}\left(u+cs-\sum_{k=1}^{N_s}Y_k\right)<0\right)\\
&= P\left(\inf_{0\le s\le t}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{cs}{\varphi(n)}-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_s}Y_k\right)<0\right), \quad \textit{para cada } n\in\mathbb{N}\\
&= P\left(\inf_{0\le s\le \frac{t}{n}}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{cn}{\varphi(n)}s-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}Y_k\right)<0\right)
\end{aligned}$$

como $\theta=\frac{c}{\lambda\mu}-1$, segue que

$$\begin{aligned}
\psi(u,t) &= P\left(\inf_{0\le s\le \frac{t}{n}}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{(1+\theta)\lambda\mu n}{\varphi(n)}s-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}Y_k\right)<0\right)\\
&= P\left(\inf_{0\le s\le \frac{t}{n}}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{\theta\lambda\mu n}{\varphi(n)}s+\frac{\lambda\mu n}{\varphi(n)}s-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}Y_k\right)<0\right)\\
&= P\left(\inf_{0\le s\le \frac{t}{n}}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{\theta\lambda\mu n}{\varphi(n)}s+\frac{\lambda\mu n}{\varphi(n)}s-\frac{\mu N_{(ns)}}{\varphi(n)}-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}(Y_k-\mu)\right)<0\right)\\
&= P\left(\inf_{0\le s\le \frac{t}{n}}\left(\frac{u}{\varphi(n)}+\frac{\theta\lambda\mu n}{\varphi(n)}s+\mu\left(\frac{\lambda ns-N_{(ns)}}{\varphi(n)}\right)-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}(Y_k-\mu)\right)<0\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $\gamma=\frac{\theta\lambda n\mu}{\varphi(n)}$, $u_0=\frac{u}{\varphi(n)}$, $t_0=\frac{t}{n}$, vem que

$$\psi(u,t) = P\left(\inf_{0\le s\le t_0}\left(u_0+\gamma s+\mu\left(\frac{\lambda ns-N_{(ns)}}{\varphi(n)}\right)-\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{N_{(ns)}}(Y_k-\mu)\right)<0\right).$$

Uma vez que N_t é um processo de Poisson de parâmetro λ, então

$$\mu\left(\frac{\lambda ns-N_{(ns)}}{\varphi(n)}\right)\xrightarrow{P}0. \tag{3.4}$$

Conjugando com a hipótese de que F pertence ao domínio de atração de $S_\alpha(1, \beta, 0)$, chega-se à aproximação fraca:

$$\psi(u, t) \approx \psi_f(u_0, t_0). \tag{3.5}$$

No caso ainda de F pertencer domínio de atração normal da lei estável, isto é, $\varphi(n) = n^{1/\alpha}$, tem-se que

$$\psi_f(u_0, t_0) = P\left(\inf_{0 \le s \le t} \left(u + \lambda\mu\theta s - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)\right) < 0\right). \tag{3.6}$$

3.2.1. Dedução do parâmetro σ'

Como se referiu acerca do domínio de atração em relação à qual a distribuição das indemnizações deve pertencer no capítulo anterior (2.6), a distribuição α-estável tem o parâmetro de escala σ' que deve ser estimado. Segundo [4], é razoável admitir que $\sigma' = \sigma 2^{-1/\alpha}$. O problema resume-se então em encontrar o valor de σ.

[4] sugere pistas para estimar o valor de σ, falando do comportamento assintótico das distribuições α-estáveis. Utilizando esse comportamento, deduziu-se nesse trabalho uma expressão para σ no caso em que as indemnizações seguem uma distribuição de Pareto.

Proposição 3.2.1 ***(Comportamento assintótico da probabilidade na cauda)*** *Se $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e $\alpha \in (0, 2)$, então*

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha P\left(X > x\right) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha, \tag{3.7}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha P\left(X < -x\right) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha, \tag{3.8}$$

onde

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx\right)^{-1} = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \tag{3.9}$$

Usando a proposição anterior (3.2.1) para o caso da distribuição de Pareto, com $\beta = 1$, tem-se

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P\left(X > x\right) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha = C_\alpha \sigma^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx}{k+x}\right)^\alpha = C_\alpha \sigma^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad k^\alpha = C_\alpha \sigma^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{k}{C_\alpha^{1/\alpha}},$$

logo,

$$\sigma' = k\left(2C_\alpha\right)^{-1/\alpha}. \tag{3.10}$$

Com vista a estimar a probabilidade de ruína para esta aproximação fraca, à semelhança do caso do modelo de risco clássico em que as indemnizações seguem a distribuição de Pareto, fizeram-se algumas simulações numéricas utilizando o método de Monte Carlo. As tabelas 3.5, 3.6, 3.7 mostram os valores estimados, que se obtiveram fazendo variações de alguns parâmetros tais como a reserva inicial u e o índice de estabilidade α. Fizeram-se 10000 simulações com um limite de tempo $T = 1000$, uma intensidade das indemnizações $\lambda = 3$ e uma carga de segurança $\theta = 0.1$.

u	α	$\psi_f(u,T)$
10	1.1	2.952×10^{-1}
50	1.1	2.816×10^{-1}
100	1.1	2.815×10^{-1}
200	1.1	2.599×10^{-1}
500	1.1	2.186×10^{-1}
1000	1.1	1.804×10^{-1}

Tabela 3.5.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.1$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 600$ e $T = 1000$.

u	α	$\psi_f(u,T)$
10	1.5	5.780×10^{-1}
50	1.5	4.081×10^{-1}
100	1.5	3.037×10^{-1}
200	1.5	1.825×10^{-1}
500	1.5	7.190×10^{-2}
1000	1.5	3.100×10^{-2}

Tabela 3.6.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.5$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 850$ e $T = 1000$.

u	α	$\psi_f(u,T)$
10	1.9	1.639×10^{-1}
50	1.9	8.790×10^{-2}
100	1.9	5.9500×10^{-2}
200	1.9	2.8700×10^{-2}
500	1.9	7.8000×10^{-3}
1000	1.9	2.5000×10^{-3}

Tabela 3.7.: Probabilidade de ruína: $\alpha = 1.9$, $\theta = 0.1$, $\lambda = 3$, $\kappa = 0.5$, $n = 6000$ e $T = 1000$.

Os valores estimados para a probabilidade de ruína via aproximação de processos de Lévy α-estáveis mostraram-se bastante sensíveis relativamente ao parâmetro de estabilidade α. Nota-se claramente o efeito das distribuições de Lévy α-estável, uma vez que quanto maior foi o valor de α, menor é a probabilidade da ruína ocorrer.

Como já se viu no capítulo 2, existem limitantes superiores para a probabilidade de ruína dada pela aproximação de processos de Lévy α-estáveis. As tabelas 3.8 e 3.9 mostram esses valores para $\psi_f(u,T)$, dadas pelos teoremas 2.2.5 e 2.2.6, respetivamente. Esses valores foram calculados com o auxílio da função *pstable()* do pacote *stabledist* do R, para um tempo limite $T = 1000$ e uma intensidade de chegada $\lambda = 3$.

$\alpha \backslash u$	10	50	100	200	500	1000
1.1	0.6221	0.6148	0.6058	0.5880	0.5371	0.4616
1.5	0.5635	0.5113	0.4494	0.3410	0.1467	0.0502
1.9	0.4766	0.3199	0.1695	0.0360	0.0025	0.0006

Tabela 3.8.: Majorantes para a probabilidade de ruína usando o teorema 2.2.5, com $T = 1000$ e $\lambda = 3$.

$\alpha \backslash u$	10	50	100	200	500	1000
1.1	0.9988	0.9940	0.9880	0.9764	0.9427	0.8910
1.5	0.9720	0.8683	0.7563	0.5810	0.2969	0.1361
1.9	0.9024	0.5623	0.2759	0.0578	0.0056	0.0014

Tabela 3.9.: Majorantes para a probabilidade de ruína usando o teorema 2.2.6, com $T = 1000$ e $\lambda = 3$.

Analisando as tabelas 3.8 e 3.9, que contêm os limites superiores para a aproximação da probabilidade de ruína via processos de Lévy α-estáveis, nota-se que os majorantes dados pelo teorema 2.2.5 são todos inferiores aos majorantes homólogos do teorema 2.2.6. Portanto, o teorema 2.2.5 apresenta uma banda de mobilidade mais estreita para as aproximações. Isto ocorre pelo facto dos majorantes do teorema 2.2.6 serem expressos através de um quociente em que o numerador difere do denominador no fator u (reserva inicial). Quanto menor for o valor de u mais próximo ficam os majorantes de 1 e maior será a banda para os valores aproximados. De acordo com os valores calculados para os majorantes, é preferível a aplicação do teorema 2.2.5 para se ter uma melhor noção de como se comportam as probabilidades de ruína aproximadas via processos de Lévy α-estáveis.

No entanto, os valores aproximados respeitam esses majorantes, em geral, excetuando os dois últimos casos ($\alpha = 1.9$, $u = 500$ e $u = 1000$; $\alpha = 1.5$, $u = 10$). Nesses casos as aproximações ultrapassam ligeiramente os majorantes. Isso pode ser causado pelo facto da sensibilidade da distribuição de Lévy α-estável para valores grandes de α, conjugando com o facto das reservas iniciais serem também grandes, que faz com que a probabilidade seja

muito pequena.

3.3. Comparação dos resultados

Uma vez tendo sido feitas as simulações relativas ao modelo de risco clássico em que as indemnizações seguem a distribuição de Pareto e a respetiva aproximação fraca, utilizando as distribuições de Lévy α-estáveis, fizeram-se algumas comparações a fim de ver a fiabilidade desta aproximação e de tecer alguns comentários acerca dos dos valores estimados.

Na tabela 3.10 encontram-se os erros relativos, relativamente aos valores estimados no modelo clássico de risco na secção 3.1 e a respetiva aproximação por meio de processos de Lévy na secção 3.2.

Erro relativo $\left(\frac{\lvert\psi_f(u,T)-\psi(u,T)\rvert}{\psi(u,T)}\right)$ em %						
$\alpha\backslash u$	10	25	50	100	500	1000
1.1	31.12	18.99	7.64	3.02	2.82	10.07
1.5	8.11	1.17	4.69	1.955	1.10	13.97
1.9	68.06	52.10	25.16	12.99	44.44	47.06

Tabela 3.10.: Erro relativo dos valores estimados.

Nota-se que, em geral, para valores grandes de α, o erro relativo é maior. Furrer at al (1997) [8] justifica isso pelo facto da convergência de 2.8 ser mais rápida para valores pequenos de α.

Relativamente aos resultados obtidos nas simulações dos dois modelos pode-se notar que os modelos de risco que têm por suporte os processos de Lévy α-estáveis representam uma boa aproximação para os modelos de risco clássico, particularmente quando a distribuição das indemnizações tem cauda pesada.

3.4. Código usado para a simulação

Como já se referiu na introdução, foi utilizado a linguagem R para a programação/simulação. R caracteriza-se pela facilidade de manipulação dos dados, cálculos e exibição dos dados [20], além de ser um software livre.

Adicionalmente, apresentou-se um procedimento que permite desenhar o gráfico de um determinado processo de risco: *reserv.plot*(). Esses procedimentos podem ser encontrados no apêndice B.2.

O código desenvolvidos compõe-se essencialmente de 4 procedimentos e um ciclo que faz as simulações, a saber:

- **poisson.process()**

  Esse procedimento faz a geração dos instantes em que acontecem as indemnizações tendo em conta um tempo limite e a intensidade de chegada das indemnizações. Supõe-se que o número de indemnizações segue uma distribuição de Poisson, o que faz com que os instantes das chegadas das indemnizações sigam uma distribuição exponencial. Dito isto, para a geração desses instantes, será necessário indicar a intensidade de chegada e o instante limite das indemnizações. Consequentemente, *poisson.process*() é meio para se encontrar o número de indemnizações ocorridas até o instante limite estabelecido.

- **Stable.Dist()**

  Tem como objetivo gerar variáveis aleatórias de uma distribuição estável do tipo $S_\alpha(1, \beta, 0)$. Esse procedimento foi construído com base no algoritmo apresentado por Weron (1996) [21].

- **claims.generate.P()\claims.generate.S()**

  Os valores retornados por esse procedimento representam os valores das indemnizações. Como se disse na descrição do modelo de risco, as indemnizações constituem uma sequência de variáveis aleatórias e seguem uma determinada distribuição. Nesse procedimento, os *inputs* dependem dos parâmetros da distribuição que as indemnizações seguem.

- **ruin.time()**

Este é um procedimento que indica o instante em que a ruína ocorreu. Depende do modelo de risco e também dos instantes em que acontecem as indemnizações, ou seja, depende do procedimento *poisson.process*(). Dado um modelo de risco, *ruin.time*() verifica se existe algum instante que faz com que a reserva seja negativa. No caso de haver instante(s) que torna(m) a reserva negativa, retorna o menor desses instantes (definição do tempo da ruína). Caso contrário retorna Inf.

- **Simulação (Risk.Ruin.P()\Risk.Ruin.S())**

  Esta é a parte que junta os procedimentos acima descritos com vista a estimar a probabilidade de ruína. Primeiramente geram-se os instantes em que ocorrem as indemnizações (*poisson.process*()) com o fim de encontrar o número de indemnizações. De seguida geram-se os valores das indemnizações com o auxílio do procedimento *claims.generate*() e estabelece-se a lei que permite calcular o prémio que a seguradora vai receber. Com esses passos concluídos constrói-se o modelo de risco, que é utilizado para calcular o tempo da ruína, fechando assim o ciclo. Pode-se simular quantas vezes se quiser e depois estimar o valor da probabilidade da ruína com base no número de vezes em que a ruína ocorre nas simulações feitas.

Os resultados obtidos com o auxílio desse código mostram em comum acordo com os resultados encontrados na literatura.

Conclusão

Neste trabalho foi considerado o modelo de risco clássico com o intuito de estimar a probabilidade de ruína, e fazer a aproximação desses valores recorrendo aos processos de Lévy α-estáveis. Para isso, fez-se o levantamento dos fundamentos teóricos do modelo de risco clássico, dando ênfase à sua descrição, às suas restrições e também aos principais resultados, particularmente o caso da probabilidade de ruína. Mostraram-se também as bases teóricas relativamente à convergência fraca de uma sequência de processos de risco para processos de Lévy α-estáveis que consequentemente leva a convergência de funcionais do processo de risco como é o caso dos funcionais tempo de ruína e probabilidade de ruína. Foram apresentados limites superiores para a aproximação da probabilidade de ruína via processos de Lévy α-estáveis.

No último capítulo foi utilizado a distribuição de Pareto para estimar a probabilidade de ruína no modelo clássico e também se estimar a correspondente probabilidade via processos de Lévy α-estáveis. Implementaram-se simulações numéricas usando o método de Monte Carlo na linguagem R e constatou-se o facto das distribuições de Lévy α-estáveis serem uma ótima solução para se aproximarem probabilidades de ruína no modelo de risco clássico.

Para além da sua eficiência, o modelo de risco que usa a distribuição de Lévy α-estável para aproximar a probabilidade de ruína em modelos de risco clássico, surge como uma ferramenta de enorme valência uma vez permite modelar situações em que as indemnizações apresentam valores grandes (caudas pesadas) e fornece uma grande flexibilidade pois as distribuições dispõe de 4 parâmetros.

De uma forma geral, os argumentos teóricos apresentados no capítulo 2 mostraram-se em perfeita comunhão com os resultados obtidos na simulação numérica. Realça-se a importância do índice da estabilidade α, que sempre esteve em conformidade com o que se esperava, onde para valores grandes correspondia a um valor pequeno da probabilidade, para valores não pequenos da reserva inicial.

Bibliografia

[1] Albrecher, H., Kortschak, D. *On ruin probability and aggregate claim representations for Pareto claim size distributions*, Insurance: Mathematics and Economics, 45, 362-373, 2009

[2] Asmussen S., Ablrecher, H. *Ruin Probabilities*, (2nd edition), Advanced Series on StatisticalScience and Applied Probability, World Scientific, Volume 2, 2010

[3] Bowers, N. L., JR., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries ,1997.

[4] Čížek, P., Härdle W. and Weron, R. *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer, 2005

[5] Dickson, D. C. M. *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, 2005

[6] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley and SONS, INC, New York, Vomule 2, 1971

[7] Furrer, H. *Risk Processes Perturbed by αStable Motion*, Scandinavian Actuarial Journal, 10, $23 - 35$

[8] Furrer, H., Michna, Z. and Weron, A. *Stable Lévy motion Approximation in Collective Risk Theory*, Insurance: Mathematics and Economics, 20, 97-114, 1997

[9] Janicki, A. Weron, A. *Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, INC, 1994

[10] Kaas,R.,Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M. *Modern Actuarial Risk Theory Using R*, (2.nd edition), Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2008

[11] Morales, M. *Generalized Risk Processes and Lévy Modeling in Risk Theory*, (2003)

[12] Nolan, J. P. *Modeling Financial Data with Stable Distributions*, 2005

[13] Nolan, J. P. *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Birkhauser, 2010

[14] Nualart, D. *Stochastic Processes*, Universitat de Barcelona, 2003

[15] Politis, D. N., Romano. J. P., Wolf, M. *Subsampling*, Springer Series in Statistics, Springer, 1999

[16] Ramsay, C. M. *A solution to the ruin problem for Pareto distributions*, Insurance: Mathematics and Economics, 33, 109-116, 2003

[17] Ramsay, C. M., Usabel, M. A. *Calculating Ruin Probabilities via Product Integration*, Astin Bulletin, Volume 27, 2, 263-271, 1997

[18] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, 1998

[19] Vuchaikin, V. V., Zolotarev, V. M. *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*, Modern Probability and Statistics, VSP, Volume 3, 1999

[20] Venables, W. N., Smith, D. M. *An Introduction to R: Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*, Version 3.0.1, R Core Team, 2013

[21] Weron, R. *On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables*, Statistics & Probability Letters, Volume 28, Issue 2, Pages $165-171$, 15 June 1996

A. Código para estimação de $\psi(u,T)$ num processo de risco clássico e a correspondente aproximação $\psi_f(u,T)$

```
###### Geração dos instantes das indemnizações

poisson.process <- function(lambda, tmax){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   lambda = intensidade de chegada das indemnizações
#   tmax   = tempo limite

# PARÂMETRO DE SAÍDA
#   Um vetor, T, dos instantes das indemnizações

  n = 100
  E = c()

  repeat {
    E = c(E, rexp(n, lambda))

    if (sum(E) >= tmax) break;

    n <- n* 2
  }

  T = cumsum(E)
  T = c(0, T[T < tmax], tmax)

  return (T)
}

###### Gráfico do processo de risco

reserve.plot <- function(T, R, claims){


# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   T = Intanstes das indemnizações
#   R = Reserva em cada instante das indemnizações
#   claims = Valores das indemnizações
```

```
# PARÂMETRO DE SAÍDA:
#   Gráfico do processo de risco

  n = length(T)
  t = seq(2*n)
  u = seq(2*n)

  t[seq(1,2*n,2)] = T
  t[seq(2,2*n,2)] = T

  u[seq(1,2*n,2)] = R + claims
  u[seq(2,2*n,2)] = R


  #pdf("two.pdf")
  plot(t, u, type="l", xlab="Tempo", ylab="Reserva")
  lines(T, rep(0, length(T)))
}

####### Geração das indemnizações (distribuição de Pareto)

claims.generate.P <- function(n, alpha, ka){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:

  # n = número de valores aleatórios retornados
  # alpha = parâmetro da forma (Pareto)
  # ka = parâmetro de escala (Pareto)

# PARÂMETRO DE SAÍDA

  # n valores aleatórios seguindo uma distribuição de Pareto,
     representando as indemnizações

    n = n - 2
    library(actuar)
    return (c(0, rpareto(n, alpha, ka), 0))
}

###### Geração de variáveis alpha-estáveis

Stable.Dist <- function(n, alpha, beta){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   n = número de valores aleatórios retornados
#   alpha = índice de estabilidade
#   beta = parâmetro de assimetria

# PARÂMETRO DE SAÍDA:
#   n valores alpha-estáveis

  V = runif(n, -pi/2, pi/2)
  W = rexp(n, 1)
  B = atan(beta*tan(pi*alpha/2))/alpha
  S = (1 + beta^2*(tan(pi*alpha/2)^2))^(1/(2*alpha))
```

```
  X = S*((sin(alpha)*(V+B))/(cos(V))^(1/alpha))*((cos(V-alpha*(V+B)))/(W))
     ^((1-alpha)/alpha)

  return(X)

}

####### Geração das indemnizações (distribuições alpha-estáveis)

claims.generate.S <- function(n, alpha){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   n = número de valores aleatórios retornados
#   alpha = índice de estabilidade

# PARÂMETRO DE SAÍDA
#   n valores aleatórios seguindo uma distribuição alpha-estável,
    representando as indemnizações

    n = n - 2
    library(stabledist)
    #return (c(0, rstable(n, alpha, beta=1, gamma = 1, delta = 0), 0))
    return (c(0, Stable.Dist(n, alpha, beta=1), 0))
}

######## Tempos da ruína

ruin.time <- function(T, R){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   T = intanstes das indemnizações
#   R = Reserva em cada instante das indemnizações

# PARÂMETRO DE SAÍDA:
#   Tempos da ruína

  if (all(R >= 0)) return (Inf)
  return (T[min(which(R < 0))])
}

########## Simulação para o cálculo da probabilidade de ruína usando uma
    distribuição de Pareto no modelo clássico

Risk.Ruin.P <- function(u, theta, lambda, alpha, ka, tmax, n, N){

# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#   u = reserva inicial
#   theta = carga de segurança
#   lambda = intensidade de chegada das indemnizaçoes
#   alpha = parâmetro da forma (Pareto)
#   ka = parâmetro de escala da distribuição (Pareto) das indemnizações
#   n = valor inteiro suporte da aproximação
#   tmax = tempo limite para o cálculo da probabilidade de ruína
#   N = número de simulações

# PARÂMETRO DE SAÍDA:
#   Probabilidade de ruína
#   Tempos da ruína
```

```
  ruin.sims = rep(0, N)

  P = 0

  for (i in 1:N) {

    T = poisson.process(lambda, tmax)/n
    claims = claims.generate.P(length(T), alpha, ka)
    Tclaims = cumsum(claims)
    mu = ka/(alpha-1)
    c = (1+theta)*lambda*mu

    R = u/n^(1/alpha) + c*n*T/n^(1/alpha) - n^(-1/alpha)*Tclaims

    #reserve.plot(T, R, claims)
    ruin.sims[i] = ruin.time(T, R)

  }

  P = sum(ruin.sims != Inf)/N

  return(list("P" = P,"ruin.sims" = ruin.sims))

}



######### Simulação para o cálculo da probabilidade de ruína usando as
    distribuições de Lévy alpha-estáveis

Risk.Ruin.S <- function(u, theta, lambda, alpha, ka, n, tmax, N){

# PARÂMETRO DE ENTRADA
#   u = reserva inicial
#   theta = carga de segurança
#   lambda = intensidade de chegada das indemnizaçoes
#   alpha = índice de estabilidade
#   ka = parâmetro de escala da distribuição das indemnizações
#   n = valor inteiro suporte da aproximação
#   tmax = tempo limite para o cálculo da probabilidade de ruína
#   N = número de simulações


# PARÂMETRO DE SAÍDA:
#   Probabilidade de ruína
#   Tempos da ruína

  ruin.sims = rep(0, N)
  P = 0
  u0 = u/n^(1/alpha)
  t0 = tmax/n

  for (i in 1:N) {


    mu = ka/(alpha-1)
    C_alpha = (1-alpha)/(gamma(2-alpha)*cos(pi*alpha/2))
```

```
    sigma = ka*C_alpha^(-1/alpha)
    sigma0 = sigma*2^(-1/alpha)

    T = poisson.process(lambda, t0)
    claims = claims.generate.S(length(T), alpha)

    R = u0 + lambda*mu*theta*T - sigma0*(lambda^(1/alpha))*T^(1/alpha)*
        claims

    #reserve.plot(T, R, claims)
    ruin.sims[i] = ruin.time(T, R)

  }

  P = sum(ruin.sims != Inf)/N

  return(list("P" = P,"ruin.sims" = ruin.sims))

}
```

B. Exemplos de instruções para se obter alguns resultados

B.1. Histograma

```
h1=Risk.Ruin.P(1000,0.1,3,1.1,0.5,1000,1,10000)
pdf("Histograma_dos_tempos_da_ruina1000.pdf")
hist(h1$ruin.sims, freq = FALSE, xlab="Tempo",ylab="Densidade", main=paste
    ("Histograma dos tempos da ruína"))
dev.off()
```

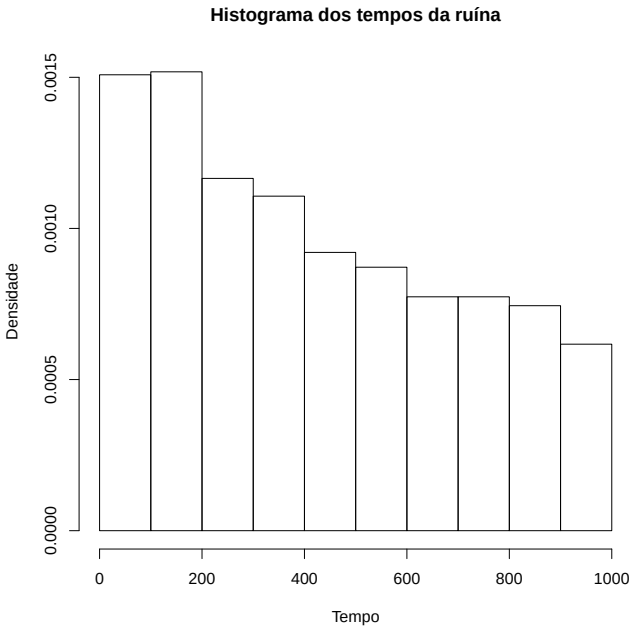

Figura B.1.: Histograma dos tempos da ruína

.

B.2. Probabilidade de Ruína

```
# Instruções para o cálculo das probabilidades da Tabela 3.2. (Modelo clássico com distribuição de Pareto)

PR = Risk.Ruin.P(10,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P

PR = Risk.Ruin.P(50,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P

PR = Risk.Ruin.P(100,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P

PR = Risk.Ruin.P(200,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P

PR = Risk.Ruin.P(500,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P

PR = Risk.Ruin.P(1000,0.1,3,1.5,0.5,1000,1,10000)
PR$P
```

```
#Instruções para o cálculo das probabilidades da Tabela 3.6. (Aproximação via processos de Lévy)

PRS=Risk.Ruin.S(10,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P

PRS=Risk.Ruin.S(50,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P

PRS=Risk.Ruin.S(100,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P

PRS=Risk.Ruin.S(200,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P

PRS=Risk.Ruin.S(500,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P

PRS=Risk.Ruin.S(1000,0.1,3,1.5,0.5,850,1000,10000)
PRS$P
```