

PREVISÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE VIBRAÇÃO E AMORTECIMENTO DE UM LAMINADO COMPÓSITO

José Pedro Arteiro Reina*, J. F. Dias Rodrigues* e A. Torres Marques *

* Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua Dr. Roberto Frias
4200-465 Porto
e-mail: jreina@fe.up.pt, jdr@fe.up.pt, marques@fe.up.pt

Palavras-chave: Métodos Computacionais, Materiais Compósitos, Vibrações Amortecidas.

Resumo. *O recurso aos laminados compósitos na construção de estruturas como placas e cascas deve-se às suas propriedades mais atractivas como são a elevada rigidez e a extrema leveza. Porém, estes factores potenciam problemas de vibração que poderão ser minorados pela apregoada boa capacidade de dissipação de energia associada a estes materiais. No comportamento dinâmico amortecido dos laminados compósitos assumem primordial importância as tensões na direcção transversa, devido à heterogeneidade transversal típica das estruturas laminadas e à forte anisotropia ao nível da camada, $E_L/G_{LT} = 30$. Assim, será necessário analisar um estado tridimensional de tensão pelo que foi desenvolvida uma ferramenta numérica que recorre a um elemento finito baseado numa teoria de camada discreta, a GLPT (Generalized Laminated Plate Theory), que permite uma correcta descontinuidade das deformações transversas nas interfaces de camadas de diferentes características materiais. Com este modelo bidimensional, de uso relativamente fácil ao nível da definição da malha de elementos finitos, foi possível prever as características modais de vibração amortecidas de placas laminadas compósitas, recorrendo ao método energético MSE (Modal Strain Energy). O modelo GLPT foi comparado com um modelo mais simples e menos oneroso em termos computacionais como é o modelo de corte de 1ª ordem, FSDT (First Shear Order Theory).*

1. INTRODUÇÃO

Com o rápido avanço da ciência e da tecnologia, os materiais compósitos reforçados com fibras, devido, fundamentalmente, às suas características de resistência e de elasticidade específicas, têm sido alvo da preferência de uma indústria tecnologicamente evoluída como são as indústrias: automóvel, aeronáutica e a espacial. Algumas das aplicações destes materiais nestas indústrias são constituídas por placas laminadas compósitas, cuja inerente flexibilidade tem colocado problemas de vibrações e de ruído associado, e em cujo controlo passivo o amortecimento intrínseco do material poderá ter um papel crucial. Sendo a lâmina ou camada unidireccional o elemento macromecânico mais simples destas placas, interessa, após conhecer os parâmetros independentes que definem a sua capacidade de amortecimento específico, prever a capacidade de amortecimento de multilaminados compósitos obtidos por empilhamento de várias camadas com as fibras diferentemente orientadas.

Ungar e Kerwin [1], em 1962, recorreram ao método da energia de deformação para analisar o amortecimento compósito. Neste método, calcula-se a capacidade de amortecimento específico do compósito pelo cociente entre a energia dissipada e a energia armazenada pelo material. Adams e Bacon [2], em 1973, recorrendo à teoria clássica dos laminados, CLPT, propuseram pela primeira vez o modelo do elemento amortecido DEM (Damped Element Model), para previsão do amortecimento de placas laminadas do tipo “angle-ply”. Lin, Ni e Adams [3], em 1984, usando o modelo do elemento amortecido, introduziram a deformação de corte de 1ª ordem, FSDT (First Shear Deformation Theory) e a inércia por rotação. Foram obtidas numérica e experimentalmente as frequências e formas naturais, e pelo método da energia de deformação modal MSE foram calculadas as capacidades de amortecimento específico para cada modo próprio, SDC (Specific Damping Capacity), de placas laminadas compósitas, de fibras de vidro e de carbono, com todos os bordos livres. Pervez e Zabarar [4], em 1992, utilizaram um modelo de elemento finito baseado na deformação de corte transversal de ordem superior, HSDT (High Shear Deformation Theory). Estudaram os efeitos dos acoplamentos extensão/flexão e flexão/torção no comportamento dinâmico de vigas laminadas compósitas, pela decomposição da energia dissipada por componentes de tensão. Hwang e Gibson [5], em 1992, calcularam o SDC de placas laminadas compósitas, do tipo “angle-ply”, recorrendo à soma das contribuições das energias dissipada e acumulada em cada camada e por componentes do tensor tensão/deformação. Desta forma, usando um elemento finito tridimensional, constatou-se a importância que as tensões/deformações interlaminares representam para a dissipação de energia dos multilaminados compósitos.

Neste trabalho devido à importância que as tensões interlaminares representam para a dissipação de energia, recorreu-se a um modelo de elemento finito baseado na teoria de camada discreta, GLPT, [6, 7], que permite incluir, para além das deformações de corte transversal, a variação da deformação normal transversal. Utilizando o modelo de elemento amortecido DEM e o método da energia de deformação modal MSE, conseguimos obter as características de amortecimento das vibrações de placas laminadas compósitas.

2. MODELO DE PLACA BASEADO NA TEORIA DE CAMADA DISCRETA

O elemento finito baseado na DLT com inclusão da deformação/tensão normal transversa, permite que as tensões transversas sejam contínuas nas interfaces de camadas de material diferente.

2.1. Campos de deslocamentos

O campo de deslocamentos (u, v, w) do modelo foi definido relativamente ao sistema de coordenadas XYZ da placa, como mostra a figura 1, onde XY coincide com o plano médio da placa. Assim, os deslocamentos de um ponto genérico da placa definem-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N U^j(x, y, t) \phi^j(z) \\ v(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N V^j(x, y, t) \phi^j(z) \\ w(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N W^j(x, y, t) \phi^j(z) \end{aligned} \quad (1)$$

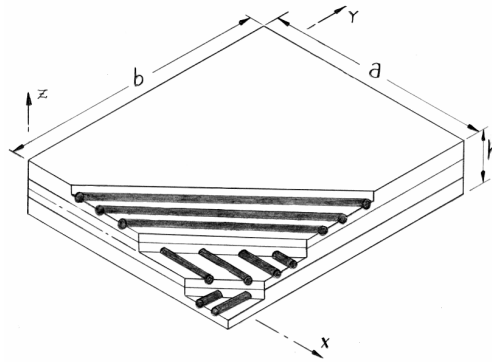


Figura 1. Sistema de coordenadas e geometria da placa laminada

onde (U^j, V^j, W^j) são deslocamentos nodais associados a nós distribuídos ao longo da espessura da placa e onde $\phi^j(z)$ são funções unidimensionais de interpolação de Lagrange, definidas localmente em domínios segundo a espessura, designados por *camadas numéricas*, de acordo com a figura 2. As funções $\phi^j(z)$, ditas de *suporte compacto*, são não nulas apenas no domínio local associado a uma ou duas subdivisões, dependendo se o nó j é um nó interior ou um nó fronteira da subdivisão. Estas funções impõem, automaticamente, continuidade do tipo C^0 dos deslocamentos ao longo da espessura do laminado, resultando em deformações transversas descontínuas na fronteira de duas camadas adjacentes. Deste modo abre-se a possibilidade da continuidade das tensões transversas na interface de duas camadas de diferentes características materiais, portanto de acordo com a realidade física. Devido à forma como o campo de deslocamentos foi definido, a discretização da placa no domínio bidimensional XY é feita na superfície média onde por cada nó da malha bidimensional ter-se-á um conjunto de graus de liberdade ao longo da espessura.

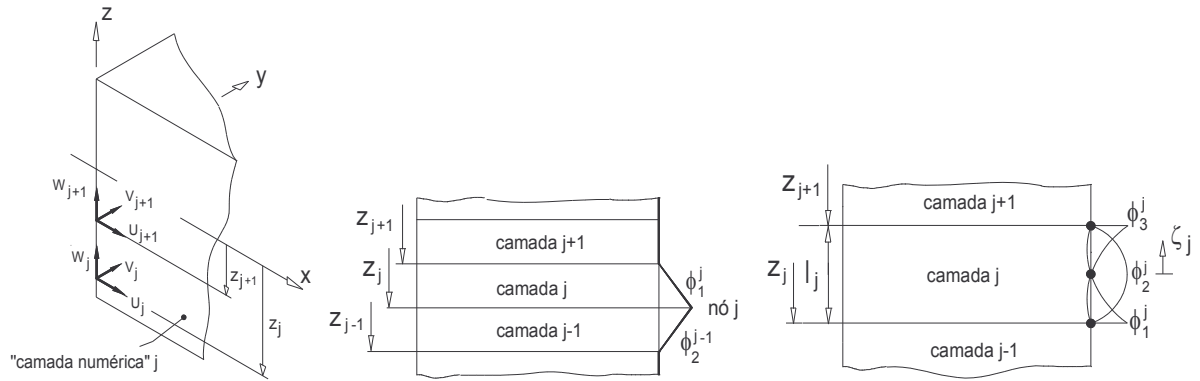


Figura 2. Deslocamentos nodais e funções de interpolação de Lagrange lineares e quadráticas

O número de nós de interpolação ao longo da espessura depende do grau p das funções de interpolação, de acordo com a expressão $NNOSZ = p \times NCZ + 1$ onde NCZ representa o número de camadas numéricas. Se $p=1$, função de interpolação linear, as funções de interpolação globais $\phi^j(z)$ são dadas pelas expressões

$$\phi^j(z) = \begin{cases} 0 & z < z_{j-1} \\ \phi_2^{j-1} = (z - z_{j-1})/l_{j-1} & z_{j-1} < z < z_j \\ \phi_1^j = (z_{j+1} - z)/l_j & z_j < z < z_{j+1} \\ 0 & z > z_{j+1} \end{cases} \quad (2)$$

onde l_j e l_{j-1} são as espessuras das camadas numéricas j e $j-1$. Neste trabalho para além da função de interpolação linear recorreremos à função de interpolação quadrática, $p=2$, tendo 3 pontos de interpolação por camada numérica, sendo um deles interior,

$$\phi^j(z) = \begin{cases} \phi_3^j(z) = \frac{1}{2} \zeta_j (\zeta_j - 1) \\ \phi_2^j(z) = 1 - \zeta_j^2 \\ \phi_1^j(z) = \frac{1}{2} \zeta_j (\zeta_j + 1) \end{cases} \quad (3)$$

e à função de interpolação cúbica, $p=3$, tendo 4 pontos de interpolação por camada numérica, sendo dois deles interiores,

$$\phi^j(z) = \begin{cases} \phi_4^j(z) = +\frac{9}{16} (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j + 1) \\ \phi_3^j(z) = -\frac{27}{16} (\zeta_j + 1) (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1) \\ \phi_2^j(z) = +\frac{27}{16} (\zeta_j + 1) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j - 1) \\ \phi_1^j(z) = -\frac{9}{16} (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j - 1) \end{cases} \quad (4)$$

onde ζ_j (ver figura 2) é uma função de z dada por

$$\zeta_j(z) = \frac{2}{l_j}(z - z_j) - 1 \quad (5)$$

2.2. Relações deformações/deslocamentos

As deformações de um ponto genérico da placa laminada, usando apenas as relações lineares deformações/deslocamentos escrevem-se da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \frac{\partial U^j}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \left(\frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_y &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \frac{\partial V^j}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \left(U^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} + \phi^j \frac{\partial W^j}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_z &= \sum_{j=1}^{NCZ} W^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \left(V^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} + \phi^j \frac{\partial W^j}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

2.3. Relações constitutivas de materiais compósitos

Simplificando o comportamento mecânico de um material compósito a um comportamento linear elástico, as relações constitutivas destes materiais, tendo em conta um estado tridimensional de tensões, são definidas pelas seguintes relações

$$\{ \sigma \}_{XYZ} = [\bar{Q}_{ij}] \{ \varepsilon \}_{XYZ} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez $[\bar{Q}_{ij}]$ são obtidos tendo em consideração o ângulo θ , de orientação das fibras relativamente ao sistema de coordenadas da placa, de acordo com a figura 3, através de expressões sobejamente conhecidas e que podem ser encontradas na bibliografia relativa a materiais compósitos [8].

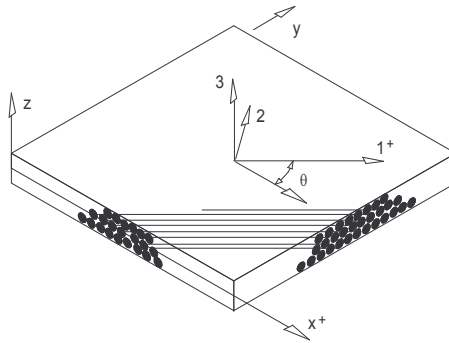


Figura 3. Posição do sistema de coordenadas material, 123, versus sistema de coordenadas da placa, XYZ.

2.4. Formulação variacional de Hamilton

O princípio variacional de Hamilton, para laminados compósitos, tendo em conta a teoria generalizada de placa laminada, é da forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \left[N_x^j \frac{\partial}{\partial x} (\delta U_j) + N_y^j \frac{\partial}{\partial y} (\delta V_j) + N_{xy}^j \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta V_j) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta U_j) \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + Q_x^j \frac{\partial}{\partial x} (\delta W_j) + Q_y^j \frac{\partial}{\partial y} (\delta W_j) + \tilde{Q}_x^j \delta U_j + \tilde{Q}_y^j \delta V_j + \tilde{N}_z^j \delta W_j \right] dx dy \right. \\
 - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} I^{jl} (\ddot{U}_j \delta U_l + \ddot{V}_j \delta V_l + \ddot{W}_j \delta W_l) dx dy \\
 \left. + \{ \delta u_i \}_K^T \{ p_i \}_K + \int_{\Gamma} \{ \delta u_r \}_K^T \{ T \}_K d\Gamma \right\} dt = 0
 \end{aligned} \quad (9)$$

onde

$$\begin{aligned}
 (N_x^j, N_y^j, N_{xy}^j, Q_x^j, Q_y^j) &= \sum_{k=1}^{nc} \bar{\epsilon}_{k-1}^k (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \phi^j dz \\
 (\tilde{N}_z^j, \tilde{Q}_x^j, \tilde{Q}_y^j) &= \sum_{k=1}^{nc} \bar{\epsilon}_{k-1}^k (\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{\partial \phi^j}{\partial z} dz
 \end{aligned} \quad (10)$$

são os esforços generalizados e

$$I^{jl} = \sum_{k=1}^{nc} \bar{\epsilon}_{k-1}^k \rho \phi^j \phi^l dz \quad (11)$$

são as inércias do elemento de placa generalizada e onde nc representa o número de camadas com diferente orientação das fibras. Substituindo na equação 10, as relações constitutivas e tendo em conta as relações deformações/deslocamentos, os esforços generalizados podem ser reescritos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} N_x^j \\ N_y^j \\ N_{xy}^j \\ Q_x^j \\ Q_y^j \end{array} \right\} &= \sum_{l=1}^{NCZ} \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{11}^{jl} & A_{12}^{jl} & A_{16}^{jl} & 0 & 0 \\ A_{21}^{jl} & A_{22}^{jl} & A_{26}^{jl} & 0 & 0 \\ A_{61}^{jl} & A_{62}^{jl} & A_{66}^{jl} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{44}^{jl} & A_{45}^{jl} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54}^{jl} & A_{55}^{jl} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} B_{13}^{jl} \\ B_{23}^{jl} \\ B_{63}^{jl} \\ \hline B_{44}^{jl} \\ B_{54}^{jl} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \partial U^l / \partial x \\ \partial V^l / \partial y \\ \partial V^l / \partial x + \partial U^l / \partial y \\ \partial W^l / \partial x \\ \partial W^l / \partial y \\ \hline W^l \\ U^l \\ V^l \end{array} \right\}
 \end{aligned} \quad (12)$$

com:

$$\begin{aligned}
 A_{rs}^{jl} &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \phi^j \phi^l dz & \text{com } r, s = 1, 2, 4, 5, 6 \\
 B_{rs}^{jl} &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \phi^j \frac{\partial \phi^l}{\partial z} dz & \text{com } r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned} \quad (13)$$

e ainda:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_z^j \\ \tilde{Q}_x^j \\ \tilde{Q}_y^j \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{NCZ} \begin{bmatrix} C_{31}^{jl} & C_{32}^{jl} & C_{36}^{jl} & 0 & 0 & D_{33}^{jl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{jl} & C_{45}^{jl} & 0 & D_{44}^{jl} & D_{45}^{jl} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}^{jl} & C_{55}^{jl} & 0 & D_{54}^{jl} & D_{55}^{jl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U^l / \partial x \\ \partial V^l / \partial y \\ \partial V^l / \partial x + \partial U^l / \partial y \\ \partial W^l / \partial x \\ \partial W^l / \partial y \\ \hline \bar{W}^l \\ U^l \\ V^l \end{Bmatrix} \quad (14)$$

com

$$\begin{aligned} C_{rs}^{jl} &= \sum_{K=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{r,s})_k \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \phi^l dz & \text{com } r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ D_{rs}^{jl} &= \sum_{K=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{r,s})_k \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \frac{\partial \phi^l}{\partial z} dz & \text{com } r, s = 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo os esforços generalizados, equação 12 e equação 14, na equação 9, obtemos o princípio variacional de Hamilton em forma compacta:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} [\{ \delta \varepsilon^j \}^T [A^{jl}] \{ \varepsilon^l \} + \{ \delta \varepsilon^j \}^T [B^{jl}] \{ \tilde{\varepsilon}^l \} + \{ \delta \tilde{\varepsilon}^j \}^T [B^{jl}] \{ \varepsilon^l \} + \{ \delta \tilde{\varepsilon}^j \}^T [D^{jl}] \{ \tilde{\varepsilon}^l \}] dx dy \right. \\ \left. - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} \{ \delta u^j \}^T I^j \{ \ddot{u}^l \} dx dy + \{ \delta u_i \}_K^T \{ p_i \}_K + \int_{\Gamma} \{ \delta u_r \}_K^T \{ T \}_K d\Gamma \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

onde:

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon^j \}^T &= \left\{ \frac{\partial U^j}{\partial x}, \frac{\partial V^j}{\partial y}, \frac{\partial V^j}{\partial x} + \frac{\partial U^j}{\partial y}, \frac{\partial W^j}{\partial x}, \frac{\partial W^j}{\partial y} \right\} \\ \{ \tilde{\varepsilon}^j \}^T &= \{ W^j, U^j, V^j \} \end{aligned} \quad (17)$$

2.2 Discretização por elementos finitos

Com o método dos elementos finitos, o domínio bidimensional de cada camada 'numérica' é discretizado num número finito de sub-domínios. A solução aproximada do problema, pode ser agora encontrada através de uma combinação linear de funções de interpolação de suporte compacto. Assim, para o plano de cota $z = z_j$, no interior de cada elemento finito, os deslocamentos U^j, V^j, W^j são expressos como combinações lineares de funções de forma N_i e dos deslocamentos nodais U_i^j, V_i^j, W_i^j da seguinte forma

$$\begin{aligned} U^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m U_i^j(t) N_i(x, y) \\ V^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m V_i^j(t) N_i(x, y) \\ W^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m W_i^j(t) N_i(x, y) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} U^j(x, y, t) \\ V^j(x, y, t) \\ W^j(x, y, t) \end{aligned}} \right\} \{ u^j \}_e = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^j(t) \\ V_i^j(t) \\ W_i^j(t) \end{Bmatrix} = [H^j] \{ a^j \}_e \quad (18)$$

onde m é o número de nós de cada elemento. Usando, a equação 18 e tendo em conta as relações deformações/deslocamentos, equação 6, o princípio variacional de Hamilton é reescrito da seguinte forma:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [\{\delta a^j\}_e^T [M^{jl}]_e \{\ddot{a}^l\}_e + \{\delta a^j\}_e^T ([K_A^{jl}]_e + [K_B^{jl}]_e + [K_C^{jl}]_e + [K_D^{jl}]_e) \{a^l\}_e - \sum_{j=1}^N \{\delta a^j\}_e^T \{f\}_e \right\} dt = 0 \quad (19)$$

onde N_e é o número de elementos e

$$\begin{aligned} [M^{jl}]_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [H]^T I^{jl} [H] \det|J| d\xi d\eta \\ [K_A^{jl}]_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([H]^T [L]^T) [A^{jl}]_e ([L][H]) \det|J| d\xi d\eta \\ [K_B^{jl}]_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([H]^T [\tilde{L}]^T) [B^{jl}]_e ([\tilde{L}][H]) \det|J| d\xi d\eta \\ [K_C^{jl}]_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([H]^T [\tilde{L}]^T) [C^{jl}]_e ([L][H]) \det|J| d\xi d\eta \\ [K_D^{jl}]_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([H]^T [\tilde{L}]^T) [D^{jl}]_e ([\tilde{L}][H]) \det|J| d\xi d\eta \\ \{P\}_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [H]^T \{p\} \det|J| d\xi d\eta \\ \{T^j\}_e &= \int_{\Gamma_e} [H]^T \{T^j\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (20)$$

com:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^j \\ \varepsilon_y^j \\ \gamma_{xy}^j \\ \gamma_{zx}^j \\ \gamma_{yz}^j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \end{Bmatrix} = [L] \{u^j\} & \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^j \\ \tilde{\gamma}_{zx}^j \\ \tilde{\gamma}_{yz}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \end{Bmatrix} = [\tilde{L}] \{u^j\} \end{aligned} \quad (21)$$

Relacionando as variáveis nodais elementares com as variáveis nodais globais, através da *Matriz de Localização do Elemento* ou *Matriz de Compatibilidade*, onde N -número total de nós e m -número de nós de um elemento

$$\begin{aligned} \{a\}_e &= [T_{GL}] \{a\} \\ \{a\}_e &= \{U_1^1, V_1^1, W_1^1, \dots, U_1^n, V_1^n, W_1^n, \dots, U_m^1, V_m^1, W_m^1, \dots, U_m^n, V_m^n, W_m^n\}^T \\ \{a\} &= \{U_1^1, V_1^1, W_1^1, \dots, U_1^n, V_1^n, W_1^n, \dots, U_N^1, V_N^1, W_N^1, \dots, U_N^n, V_N^n, W_N^n\}^T \end{aligned} \quad (22)$$

obtemos as equações globais que regem o movimento do sistema

$$[M] \{\ddot{a}\} + [K] \{a\} = \{f\} \quad (23)$$

As características modais da vibração da placa laminada compósita foram obtidas do Problema Generalizado de Valores e Vectors Próprios, recorrendo ao método da Iteração de subespaços.

$$([K] - \lambda_i [M]) \{A\}_i = \{0\} \quad \text{onde} \quad \lambda_i = \omega_i^2 \quad (24)$$

2.3 Capacidade de amortecimento específico

Entre os vários mecanismos de dissipação de energia identificados nos materiais compósitos ideais (sem defeitos), vibrando a baixas amplitudes, tem sido apontado como sendo o mais significativo o da perda de energia por *comportamento viscoelástico*, [9]. O comportamento viscoelástico dos materiais compósitos pode ser definido pelo amortecimento hysterético, dependente da frequência de excitação e da temperatura ambiente. A capacidade de amortecimento específico de um material é definida por:

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} \quad (25)$$

onde ΔU é a energia dissipada durante um ciclo de tensão e U é a energia de deformação máxima. Adams e Bacon, propuseram um modelo amortecido que, basicamente, consiste em aproximar a energia dissipada numa lâmina deduzindo as suas propriedades de amortecimento, *factores de perda*, a partir das propriedades dissipativas de um material ortotrópico, obtidas experimentalmente usando provetes do tipo viga (com fibras orientadas a 0° , η_{11} e a 90° , η_{22}) e provetes cilíndricos orientados a 0° , η_{12} . Devido à dificuldade de obter correctamente o factor de perda η_{23} , toma-se $\eta_{23} = \eta_{12}$ porque mesmo para variações destes valores até 15% não se verificaram alterações nos resultados teóricos obtidos, [3]. Os factores de perda dependem da temperatura, da frequência e da amplitude das deformações. No presente estudo não foram consideradas as influências quer da temperatura quer da frequência e assumiu-se vibrações de pequenas amplitudes pelo que também a dependência das deformações foi desprezada. A energia dissipada de determinada camada de uma placa laminada, pode ser decomposta em seis componentes:

$$\begin{aligned} \Delta U^k &= \frac{1}{2} \int_A \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\eta_{11} \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \eta_{22} \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \eta_{22} \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \eta_{12} \tau_{12} \gamma_{12} + \eta_{12} \tau_{13} \gamma_{13} + \eta_{12} \tau_{23} \gamma_{23}) dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_A \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\varepsilon\}^T [\psi]_k \{\sigma\} dz dx dy \end{aligned} \quad (26)$$

onde:

$$[\psi]_k = \begin{bmatrix} \eta_{11} & & & & & \\ & \eta_{22} & & & & \\ & & \eta_{22} & & & \\ & & & \eta_{12} & & \\ & & & & \eta_{12} & \\ & & & & & \eta_{12} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Usando as relações constitutivas, Equação 8 e transpondo $[\psi]_k$ para o sistema de coordenadas da placa, a energia dissipada numa camada passa a ser definida por:

$$\Delta U^k = \frac{1}{2} \int_A \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\varepsilon\}^T [\bar{\psi}] [\bar{Q}] \{\varepsilon\} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\varepsilon\}^T [\hat{Q}] \{\varepsilon\} dz dA \quad (28)$$

onde $[\hat{Q}]$ é uma matriz assimétrica. A energia dissipada para toda a placa é dada por:

$$\Delta U = \sum_{K=1}^n \Delta U^K \quad (29)$$

Integrando segundo a espessura, obtemos:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_A [\{\varepsilon^j\}^T [\hat{A}^{jl}] \{\varepsilon^l\} + \{\varepsilon^j\}^T [\hat{B}^{jl}] \{\tilde{\varepsilon}^l\} + \{\tilde{\varepsilon}^j\}^T [\hat{B}^{jl}] \{\varepsilon^l\} + \{\tilde{\varepsilon}^j\}^T [\hat{D}^{jl}] \{\tilde{\varepsilon}^l\}] dA \quad (30)$$

onde $[\hat{A}^{jl}]$, $[\hat{B}^{jl}]$, $[\hat{C}^{jl}]$, $[\hat{D}^{jl}]$ são obtidas como as matrizes das Equações 12 e 14, mas usando $[\hat{Q}]$ em vez de $[Q]$. O processo de integração no plano segue o que se aplica no método dos elementos finitos, e no caso do modelo actual, a energia dissipada na placa laminada é dada pela expressão

$$\Delta U = \frac{1}{2} \{a\}^T [K_d] \{a\} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \{\delta a^j\}_e^T \left([\hat{K}_A^{jl}]_e + [\hat{K}_B^{jl}]_e + [\hat{K}_C^{jl}]_e + [\hat{K}_D^{jl}]_e \right) \{a^l\}_e \right\} \quad (31)$$

onde $[K_d]$ é a matriz associada à dissipação de energia relativa ao material. De uma forma análoga, podemos obter a energia de deformação máxima acumulada pela placa laminada e que é dada pela expressão

$$U = \frac{1}{2} \{a\}^T [K] \{a\} \quad (32)$$

sendo a matriz $[K]$ associada à acumulação de energia elástica. O método *MSE* permite calcular a capacidade de amortecimento específico da placa laminada, vibrando segundo um determinado modo próprio. Neste método, os vectores próprios $\{A\}_i$, por serem muito mais simples de obter, são os do problema não amortecido. Sendo assim, o *SDC* do modo i pode ser calculado pelo cociente

$$SDC_i = \frac{\{A\}_i^T [K_d] \{A\}_i}{\{A\}_i^T [K] \{A\}_i} \quad (33)$$

3. EXEMPLOS NUMÉRICOS

3.1. Placa laminada compósita ortotrópica

A placa laminada é a mesma que foi analisada por Lin et al.[3], sendo constituída por um empilhamento do tipo (0^8) e cujas propriedades materiais são apresentadas na tabela seguinte

Carbono - HMS/DX-210				
E_1	$E_3 = E_2$	$G_{23} = G_{13} = G_{12}$	$\nu_{23} = \nu_{13} = \nu_{12}$	ρ [Kg m ⁻³]
172,7 Gpa	7,2 Gpa	3,76 Gpa	0,3	1566
Factores de Perda				
η_1	$\eta_3 = \eta_2$	η_{12}	$\eta_{23} = \eta_{13} = \eta_{12}$	
0,0045	0,04322	0,0705	0,0705	

Tabela 1. Propriedades do material da camada usada na placa.

Esta placa quadrada apresenta de lado 178 mm e uma espessura de 1.58 mm e todos os seus bordos estão livres. Na análise desta placa foram utilizados os dois modelos, FSDT e GLPTZ, com a mesma malha de 6*6 elementos finitos, isoparamétricos quadráticos de Lagrange de 9 nós. No caso do modelo GLPTZ discretizou-se a espessura com 2 camadas numéricas usando funções de interpolação lineares. Os valores calculados pelos dois modelos para esta placa, fina ($a/h=112.6$), foram praticamente iguais pelo que se apresentam na tabela abaixo apenas os do modelo GLPTZ.













GLPT			Lin et Al.		
Freq. [Hz]	Forma modal	SDC (%)	Freq. (Hz)	Mode shape	SDC (%)
81.66		6.90	83.57 (81.5)		6.76 (7.0)
109.98		4.22	118.42 (107.4)		4.28 (4.9)
199.54		6.07	207.79 (196.6)		5.89 (5.4)
304.50		4.22	329.41 (295.5)		4.13 (4.7)
394.60		5.28	419.83 (382.5)		5.11 (4.8)
537.82		0.50	546.93 (531)		0.47 (-)

Tabela 2. Frequências, formas e SDC modais de uma placa laminada de (0°_8) , FFFF.

Os valores entre parênteses correspondem aos valores obtidos por via experimental. Como se pode verificar os valores encontrados pelo modelo GLPT são muito próximos dos valores analíticos obtidos por Lin et al. sendo a discrepância inferior ou igual a 3%, e próximos dos valores experimentais, variando a discrepância entre 0.1% para o 1º modo e 14% para o 2º modo.

3.2. Placa laminada simétrica do tipo *cross-ply*, $(0^{\circ}_{16}/90^{\circ}_{16})_s$.

Esta placa moderadamente espessa, apresenta características materiais ao nível da camada iguais às da placa anterior (tabela 1) e cujo empilhamento, condições fronteira e dimensões são os definidos na tabela 3

Empilhamento	$(0^{\circ}_{16}/90^{\circ}_{16})_s$
Condições fronteira	CCCC
Dimensões	$a/h=20$ $a=b=0.165$ m

Tabela 3. Dados da placa a analisar.

A placa foi discretizada numa malha de 8*8 elementos quadráticos de 9 nós e no modelo GLPTZ a espessura da placa foi discretizada em 4 camadas numéricas coincidentes com as 4 camadas materiais, usando elementos lineares unidimensionais de Lagrange. Na tabela 4, apresentam-se os valores das capacidades de amortecimento modais, SDC, comparando os valores obtidos pelos FSDT e GLPTZ e verifica-se que existem diferenças que podem ser substanciais e que estas variam consoante o modo de vibração, por exemplo: 6% para o 1º modo e 28% para o 5º modo.







SDC [%]		
FSDT		GLPTZ
2,37		2,52
2,37		2,84
3,55		3,65
3,45		3,67
2,61		3,35
4,32		4,38

Tabela 4. SDC modais, de placa encastrada, obtidos respectivamente pelos modelos FSDT e GLPTZ.

3.3. Placa laminada ortotrópica especial, (+ θ°).

Esta placa laminada é constituída por camadas igualmente orientadas relativamente aos eixos do laminado com um ângulo $\theta \in]0^\circ, 90^\circ[$, sendo as características materiais ao nível da camada as apresentadas na tabela 1. Os dados sobre a placa estão definidos na tabela seguinte

Empilhamento	(0°160)
Condições fronteira	FFFF, SSSS, CCCC
Dimensões	a/h = 10 a = b = 0.2

Tabela 5. Dados da placa ortotrópica especial (θ°).

A placa foi discretizada numa malha com 8x8 elementos quadráticos de Lagrange no plano e 4 camadas numéricas segundo a espessura, cuja designação é *GLPTZ 8*8XYQ9-4ZL*. A influência da orientação das fibras quer nas frequências quer nas capacidades de amortecimento modais da placa, para diferentes condições fronteira, estão demonstradas nas tabelas 6, 7 e 8 e em particular para o modo fundamental representadas nas figuras 4 a), 4 b) e 4 c). Devido à simetria existente apenas metade dos valores foram apresentados nas tabelas.

Ângulo de orientação das fibras θ°										
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	$\omega a b (\rho / E_2 h^2)^{1/2}$									
Modo 1	4.538	4.559	4.619	4.705	4.808	4.913	5.008	5.082	5.129	5.145
Modo 2	6.295	6.298	6.311	6.343	6.406	6.506	6.638	6.776	6.883	6.924
Modo 3	10.792	10.812	10.854	10.888	10.917	10.954	11.014	11.094	11.169	11.200
Modo 4	16.617	16.624	16.640	16.642	16.552	16.295	15.889	15.447	15.108	14.980
	SDC [%]									
Modo 1	6.958	6.901	6.740	6.470	6.089	5.626	5.147	4.738	4.468	4.374
Modo 2	4.283	4.332	4.482	4.738	5.100	5.541	5.997	6.394	6.663	6.759
Modo 3	6.100	6.045	5.905	5.716	5.498	5.263	5.020	4.783	4.591	4.514
Modo 4	4.431	4.472	4.584	4.739	4.914	5.108	5.328	5.560	5.755	5.834

Tabela 6. Características modais versus ângulo θ , placa laminada quadrada, FFFF.

Ângulo de orientação das fibras θ°										
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	$\omega a b (\rho / E_2 h^2)^{1/2}$									
Modo 1	19.175	19.131	19.001	18.798	18.541	18.255	17.973	17.733	17.571	17.514
Modo 2	24.783	24.809	24.889	25.033	25.250	25.546	25.905	26.280	26.582	26.701
Modo 3	35.855	35.888	35.981	36.123	36.287	36.435	36.539	36.592	36.610	36.613
Modo 4	38.155	38.050	37.740	37.247	36.607	35.869	35.104	34.405	33.898	33.709
	SDC [%]									
Modo 1	4.961	4.955	4.938	4.910	4.874	4.833	4.792	4.756	4.732	4.724
Modo 2	5.057	5.058	5.061	5.068	5.082	5.104	5.136	5.175	5.211	5.226
Modo 3	5.159	5.168	5.196	5.237	5.285	5.331	5.366	5.387	5.397	5.400
Modo 4	5.597	5.593	5.580	5.559	5.528	5.486	5.434	5.378	5.330	5.310

Tabela 7. Características modais versus ângulo θ , placa laminada quadrada, CCCC.

Ângulo de orientação das fibras θ°										
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	$\omega a b (\rho / E_2 h^2)^{1/2}$									
Modo 1	12.477	12.474	12.471	12.477	12.500	12.543	12.604	12.673	12.730	12.752
Modo 2	17.413	17.537	17.902	18.478	19.196	19.951	20.635	21.160	21.480	21.587
Modo 3	27.934	28.093	28.545	29.215	29.970	30.659	31.064	30.473	30.069	29.925
Modo 4	33.878	33.777	33.484	33.021	32.424	31.747	31.186	31.548	31.767	31.843
	SDC [%]									
Modo 1	3.045	3.049	3.058	3.070	3.085	3.106	3.129	3.142	3.144	3.142
Modo 2	4.178	4.176	4.167	4.145	4.114	4.088	4.080	4.088	4.103	4.111
Modo 3	4.712	4.708	4.698	4.676	4.644	4.613	4.431	4.388	4.361	4.353
Modo 4	4.649	4.642	4.620	4.584	4.537	4.484	4.594	4.583	4.577	4.574

Tabela 8. Características modais versus ângulo θ , placa laminada quadrada, SSSS.

Como se constata da figura 4 a), para a placa com os bordos livres, *FFFF*, a *frequência fundamental* aumenta com o aumento do ângulo θ , até 45° , sendo a variação de 13.38%. Por sua vez, a *SDC fundamental* diminui de forma mais acentuada até aos 45° , sendo a diminuição de 37.14%. A placa com os bordos encastrados, *CCCC*, apresenta uma variação da *frequência*

fundamental que diminui com o aumento do ângulo θ até 45° , sendo a variação de 8.66%. Por sua vez a *SDC fundamental* também diminui com o aumento do ângulo θ até 45° , sendo a diminuição de 4.78%. No caso da placa com os bordos simplesmente apoiados, *SSSS*, a frequência fundamental aumenta apenas 2.20% com a variação do ângulo θ de 0° até 45° . Por sua vez, a *SDC fundamental* também sofre um ligeiro aumento de 3.19% quando o ângulo θ varia de 0° até 45° . Resumindo, a influência da orientação das fibras quer na frequência quer na *SDC fundamental* é mais importante na placa com os bordos livres.

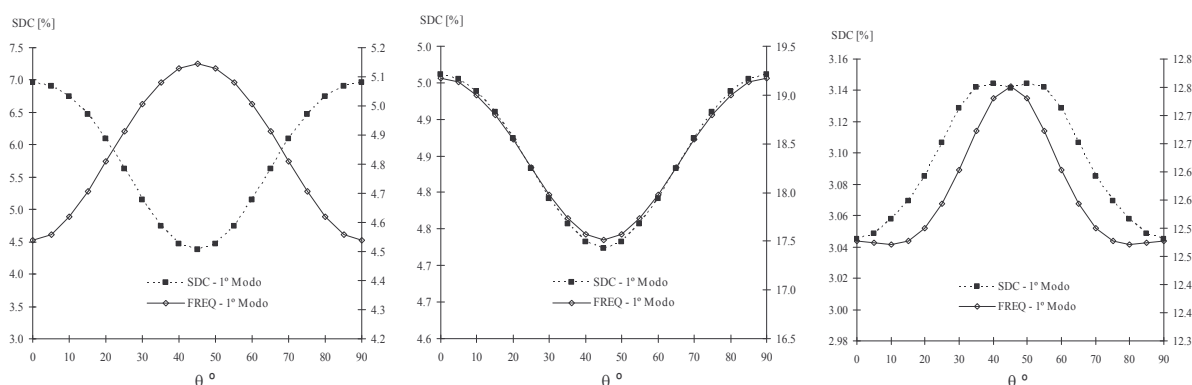


Figura 4 a), b), c). Frequência e *SDC* fundamentais versus ângulo θ , respectivamente *FFFF*, *CCCC* e *SSSS*.

4. Conclusões.

O modelo GLPTZ é um modelo que se mostrou apropriado para analisar situações em que as tensões/deformações transversas desempenham um papel importante na dissipação de energia de uma placa laminada compósita, como ficou demonstrado nos casos analisados, mostrando-se eficaz nas situações em que o modelo FSDT falhava, fundamentalmente nos casos de placas espessas e moderadamente espessas. O método *MSE* usado no cálculo das capacidades de amortecimento para os laminados compósitos mostrou ser eficaz e expedito. Ficou demonstrado que os materiais compósitos possibilitam o aumento do amortecimento final de uma placa laminada compósita por manipulação adequada da orientação das fibras.

REFERÊNCIAS

- [1] E. E. Ungar e E. M. Kerwin Jr., *J. Acoustical Society of America*, **34**(7), 954-958 (1962).
- [2] R. D. Adams e D. G. C. Bacon, Effect of fibre orientation and laminate geometry on the dynamics properties of CFRP, *J. Composite Materials*, **7**, 402-428 (1973).
- [3] X. D. Lin, R. G. Ni e R. D. Adams, Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastic plates, *J. Composite Materials*, **18**, 132-152 (1984).
- [4] T. Pervez e N. Zabaraz, Transient dynamic and damping analysis of laminated anisotropic plates using a refined plate theory, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**, 1059-1080 (1992).

- [5] S. J. Hwang e R. F. Gibson, Contribution of Interlaminar Stresses to Damping in Thick Laminated Composites Under Uniaxial Extension, *Composite Structures*, **20**, 29-35 (1992).
- [6] J. N. Reddy, J. Barbero e J. L. Teply, A plate bending element based on a generalized laminate plate theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 2275-2292, (1989).
- [7] D. H. Robbins e J. N. Reddy, Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**, 665-677, (1993).
- [8] J. R. Vinson e Chou, *Composite Materials and Their Use in Structures*, Appl. Sci. Publishers LTD, London (1975).
- [9] S. J. Hwang e R. F. Gibson, The use of strain energy-based finite element techniques in the analysis of various aspects of damping of composite materials and structures, *J. of Composite Materials*, **26** (17), 2585-2605 (1992).