

## UM ESQUEMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA ONDAS DISPERSIVAS UNIDIRECCIONAIS

**Paulo Avilez-Valente\*** e **Fernando J. Seabra-Santos\*\***

\* Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia  
Centro de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n  
P-4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: pvalente@fe.up.pt

\*\* Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil  
Instituto do Mar  
Pólo II — Pinhal de Marrrocos  
P-3030-290 Coimbra, Portugal  
e-mail: fseabra@dec.uc.pt

**Palavras-chave:** Equação RLW, Elementos Finitos, Ondas Dispersivas, Ondas Não Lineares, Onda Solitária, Onda de Choque.

**Resumo.** *Apresenta-se um Método de Elementos Finitos (MEF) com uma formulação de Petrov-Galerkin para a resolução numérica da equação Regularized Long Wave (RLW). O esquema proposto recorre à discretização por elementos finitos no espaço e no tempo. Introduce-se uma correcção da dispersão numérica bem como um mecanismo dissipativo altamente selectivo, através de termos adicionais upwind nas funções de peso. A integração no tempo recorre a um esquema do tipo predictor-corrector com três passos correctores. A formulação permite uma precisão de quarta ordem na forma linear, sendo condicionalmente estável. Ilustra-se a apresentação com três experiências numéricas, cujos resultados são comparados com casos similares presentes na literatura: propagação de uma onda solitária; colisão de duas ondas solitárias; propagação e break-up de um impulso de Maxwell. Conclui-se que o esquema possui boas propriedades conservativas e elevada precisão.*

## 1. INTRODUÇÃO

A equação RLW foi inicialmente proposta por Peregrine [1] para modelar a propagação unidireccional de ondas superficiais na água, fracamente não lineares e fracamente dispersivas. Posteriormente, Benjamin *et al.* [2] propuseram a utilização da equação RLW como uma alternativa vantajosa à equação de Korteweg-de Vries (KdV) [3], para modelar uma classe mais geral de fenómenos físicos. Abdulloev *et al.* [4] mostraram numericamente o comportamento inelástico da colisão entre duas ondas solitárias modeladas por esta equação. Este comportamento resulta do facto de apenas três grandezas serem conservadas pelo modelo RLW [5].

Vários autores propuseram soluções numéricas da equação RLW com base no Método das Diferenças Finitas [1, 6, 7, 8]. No que diz respeito ao Método dos Elementos Finitos (MEF) as formulações publicadas utilizam geralmente técnicas baseadas em *splines* [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Luo e Liu [17] propõem a uma formulação de elementos finitos mistos. Estas formulações do MEF recorrem usualmente a aproximações com continuidade  $C^1$ .

O esquema apresentado baseia-se numa formulação de Petrov-Galerkin, com discretização pelo MEF no espaço e no tempo, e com continuidade  $C^0$ . As funções peso são derivadas das propostas por Yu e Heinrich [18] para problemas de convecção-difusão. O método pode ser estendido às equações do tipo Boussinesq [19, 20].

Na Secção 2, descreve-se a equação RLW. Na Secção 3, apresenta-se a formulação de Petrov-Galerkin utilizada. Na Secção 4, descrevem-se e comentam-se três experiências numéricas: propagação de uma onda solitária; colisão de duas ondas solitárias; propagação e *break-up* de um impulso de Maxwell. A evolução temporal das grandezas conservadas, bem como das normas do erro, é comparada com as registadas na literatura. Finalmente na Secção 5 são enumeradas as conclusões.

## 2. O MODELO MATEMÁTICO

A equação RLW pode ser escrita como

$$u_t + \nu u_x + \delta u u_x - \mu^2 u_{xxt} = 0, \quad (1)$$

onde  $\nu$  é a celeridade assintótica das ondas longas, e  $\delta$  e  $\mu$  são respectivamente os coeficientes de não linearidade e de dispersividade. Uma versão adimensional da equação (1) pode ser obtida através da mudança de variáveis:

$$x \rightarrow \frac{x}{\kappa}, \quad t \rightarrow \frac{t}{\kappa \nu}, \quad u \rightarrow a u, \quad (2)$$

onde  $\kappa$  é o número de onda e  $a$  é a amplitude da onda. Redefinindo os parâmetros de não linearidade e de dispersividade, respectivamente, como  $\varepsilon = a \delta / \nu$  e  $\sigma = \kappa \mu$ , ter-se-á:

$$u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \sigma^2 u_{xxt} = 0. \quad (3)$$

Na equação (3), os dois primeiros termos são  $\mathcal{O}(1)$ , o terceiro termo é  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  e o quarto termo é  $\mathcal{O}(\sigma^2)$ . Considerar-se-ão apenas problemas fracamente não lineares e fracamente dispersivos, para os quais  $\varepsilon \sim \sigma^2 < 1$ .

### 3. ESQUEMA DE PETROV-GALERKIN

Seja  $Q = \Omega \times T$  o domínio espaço-temporal de interesse, onde  $\Omega = [0, L]$  é o domínio espacial e  $T = [0, +\infty[$  é o domínio temporal. Consideremos uma discretização de  $Q$  em elementos finitos, no espaço e no tempo. Seja  $\mathcal{V}$  um espaço funcional constituído por funções polinomiais contínuas, bilineares por bocados, e seja  $\mathcal{S}$  um espaço de funções polinomiais descontínuas, lineares por bocados no espaço e quadráticas por bocados no tempo. A formulação de Petrov-Galerkin do modelo (3) será: determinar a função  $\hat{u}(x, t) \in \mathcal{V}$ , tal que, qualquer que seja a função  $\hat{\psi}(x, t) \in \mathcal{S}$ , se tenha

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \hat{\psi} (\hat{u}_t + \hat{u}_x + \varepsilon \hat{u} \hat{u}_x - \sigma^2 \hat{u}_{xxt}) \, dx \, dt = 0. \quad (4)$$

A solução numérica  $\hat{u}$  é interpolada em cada elemento por:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \hat{u}_i, \quad (5)$$

onde  $\hat{u}_i$  são as variáveis nodais e  $N_i$  são as funções de forma, lineares no espaço e no tempo:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), & N_2 &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \\ N_3 &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, & N_4 &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Nas funções de forma (6),  $\bar{x}$  é a coordenada espacial local e  $\bar{t}$  é a coordenada temporal local. O elemento tem comprimentos  $\Delta x$  e  $\Delta t$ .

As funções de peso,  $\hat{\psi}$ , são descontínuas, lineares no espaço e quadráticas no tempo. Estas funções são definidas em cada elemento apenas para os nós 3 e 4, para os quais  $\bar{t} = \Delta t$ , sendo

$$\hat{\psi}_i(x, t) = \hat{\varphi}_i + \alpha \frac{\Delta x}{2} (\hat{\varphi}_i)_x + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} (\hat{\varphi}_i)_{xt}, \quad (7)$$

onde as funções base  $\hat{\varphi}_i$  são

$$\hat{\varphi}_3 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right) \quad \text{e} \quad \hat{\varphi}_4 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad (8)$$

Funções peso deste tipo foram originalmente propostas por Yu e Heinrich [18] para problemas de convecção-difusão. As funções  $\hat{\varphi}_3$  e  $\hat{\varphi}_4$ , e as suas derivadas parciais estão representadas na Figura 1.

O coeficiente  $\beta$  é escolhido por forma a eliminar o erro numérico dispersivo de mais baixa ordem, enquanto o coeficiente  $\alpha$  estabiliza o esquema introduzindo um termo numérico dissipativo de ordem elevada.

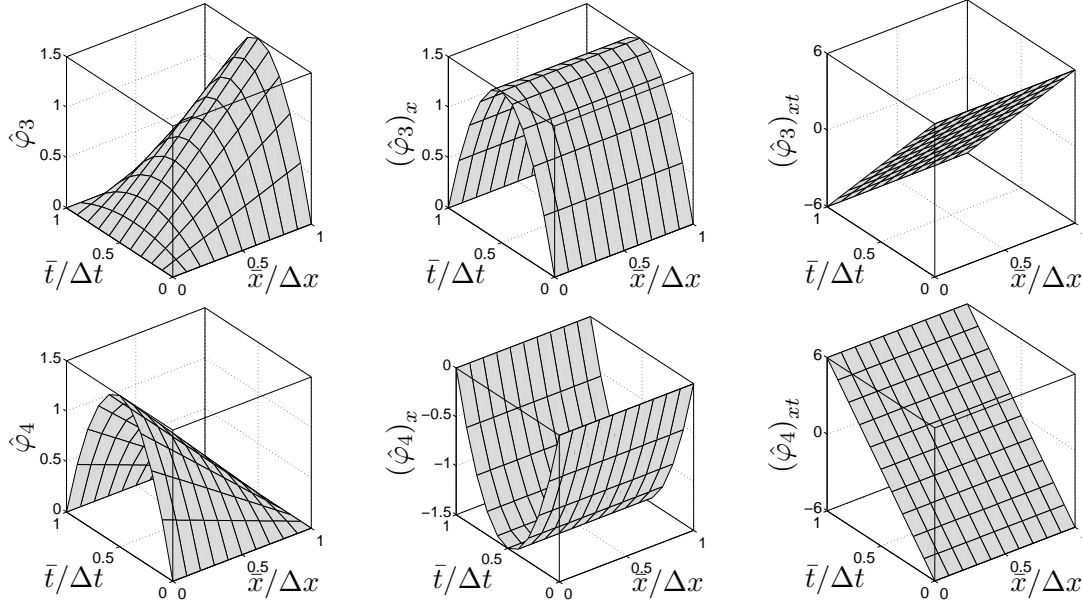


Figura 1. Funções de peso base  $\hat{\varphi}_3$  e  $\hat{\varphi}_4$ , e suas derivadas parciais.

Expandindo a função peso na expressão (4) conduz a

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \left[ \hat{\varphi} \hat{u}_t + \alpha \frac{\Delta x}{2} \hat{\varphi}_x \hat{u}_t + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \hat{\varphi}_{xt} \hat{u}_t + \hat{\varphi} (1 + \varepsilon \hat{u}) \hat{u}_x + \alpha \frac{\Delta x}{2} \hat{\varphi}_x (1 + \varepsilon \hat{u}) \hat{u}_x + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \hat{\varphi}_{xt} (1 + \varepsilon \hat{u}) \hat{u}_x - \hat{\varphi} \sigma^2 \hat{u}_{xxt} - \alpha \frac{\Delta x}{2} \hat{\varphi}_x \sigma^2 \hat{u}_{xxt} - \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \hat{\varphi}_{xt} \sigma^2 \hat{u}_{xxt} \right] dx dt = 0, \quad (9)$$

e após integração por partes e algum rearranjo algébrico, a formulação de Petrov-Galerkin torna-se: determinar a função  $\hat{u}(x, t)$  tal que

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L (\hat{\varphi} \hat{u}_t + \hat{\varphi} \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi} \hat{q}_x + \sigma^2 \hat{\varphi}_x \hat{u}_{xt}) dx dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \alpha \frac{\Delta x}{2} (\hat{\varphi}_x \hat{u}_t + \hat{\varphi}_x \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi}_x \hat{q}_x + \sigma^2 \hat{\varphi}_{xx} \hat{u}_{xt}) dx dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} (\hat{\varphi}_{xt} \hat{u}_t + \hat{\varphi}_{xt} \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi}_{xt} \hat{q}_x + \sigma^2 \hat{\varphi}_{xxt} \hat{u}_{xt}) dx dt \\ & - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sigma^2 \hat{\varphi} \hat{u}_{xt} + \alpha \frac{\Delta x}{2} \sigma^2 \varphi_x \hat{u}_{xt} + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \sigma^2 \hat{\varphi}_{xt} \hat{u}_{xt} \right]_0^L dt = 0, \quad \forall \hat{\varphi}, \quad (10) \end{aligned}$$

onde  $\hat{q} = \hat{u}^2/2$ , e no interior de cada elemento

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^4 N_i \frac{\hat{u}_i^2}{2}. \quad (11)$$

Tendo em conta que:

- (a) a segunda derivada espacial das funções,  $\hat{\varphi}_{xx}$ , é identicamente nula;
- (b) sendo  $\beta$ ,  $\Delta x$ , e  $\Delta t$  assumidos como constantes no interior de cada elemento, o integral do produto de duas derivadas parciais em ordem ao tempo é sempre nulo,

alguns dos termos no segundo, no terceiro e no quarto integral na equação (10) são sempre nulos. Desta forma, a formulação (10) pode ser substituída por: determinar a função  $\hat{u}(x, t)$  tal que

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L (\hat{\varphi} \hat{u}_t + \hat{\varphi} \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi} \hat{q}_x + \sigma^2 \hat{\varphi}_x \hat{u}_{xt}) \, dx \, dt \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \alpha \frac{\Delta x}{2} (\hat{\varphi}_x \hat{u}_t + \hat{\varphi}_x \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi}_x \hat{q}_x) \, dx \, dt \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} (\hat{\varphi}_{xt} \hat{u}_x + \varepsilon \hat{\varphi}_{xt} \hat{q}_x) \, dx \, dt \\
& - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sigma^2 \hat{\varphi} \hat{u}_{xt} + \alpha \frac{\Delta x}{2} \sigma^2 \varphi_x \hat{u}_{xt} \right]_0^L \, dt = 0, \quad \forall \hat{\varphi}. \tag{12}
\end{aligned}$$

### 3.1. Integração no tempo

O método dos elementos finitos no espaço e no tempo descrito, conduz a um esquema de integração no tempo a um passo. No entanto, devido à presença de um termo não linear na equação RLW, é necessário recorrer a um processo iterativo. Propõe-se um esquema do tipo predictor-corrector com três passos correctores.

**Passo predictor:** reescrevendo a equação (12) numa forma matricial, não incluindo os termos de fronteira, no passo predictor haverá lugar à resolução da seguinte equação:

$$(\mathbf{M} + \sigma^2 \mathbf{K}) \Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}^n. \tag{13}$$

$\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa e difusão, respectivamente, enquanto  $\mathbf{f}^n$ , o vector solicitação no instante  $t_n$ , é dado por

$$\mathbf{f}^n = -\Delta t \mathbf{C} (\mathbf{u}^n + \varepsilon \mathbf{q}^n) - \alpha_0 \frac{\Delta t \Delta x}{2} \mathbf{K} (\mathbf{u}^n + \varepsilon \mathbf{q}^n), \tag{14}$$

onde  $\mathbf{u}^n$  é o vector dos valores nodais da função  $\hat{u}$ , calculados para o instante  $t_n$ , e  $\mathbf{q}^n$  é o vector dos valores nodais de  $\hat{u}^2/2$  para o mesmo instante. O vector dos incrementos nodais,  $\Delta \mathbf{u}_0$ , é

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^{n+1} - \mathbf{u}^n. \tag{15}$$

O índice  $_0$  indica os valores calculados no passo predictor.

**Passo corrector:** o sistema de equações a resolver no  $k$ -ésimo passo corrector é

$$(\mathbf{M} + \sigma^2 \mathbf{K}) \Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{f}^n, \tag{16}$$

onde

$$\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^{n+1} - \mathbf{u}^n. \quad (17)$$

Os vectores solicitação  $\mathbf{f}^n$  e  $\mathbf{f}^{n+1}$  para os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^n = & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} (\mathbf{u}^n + \varepsilon \mathbf{q}^n) + \left( \alpha_k \frac{\Delta x}{2} \mathbf{C}^T + \beta_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^n \\ & - \beta_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{q}^n - \alpha_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \mathbf{K} (\mathbf{u}^n + \varepsilon \mathbf{q}^n), \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{n+1} = & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} (\mathbf{u}_{k-1}^{n+1} + \varepsilon \mathbf{q}_{k-1}^{n+1}) - \left( \alpha_k \frac{\Delta x}{2} \mathbf{C}^T + \beta_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{k-1}^{n+1} \\ & + \beta_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{q}_{k-1}^{n+1} - \alpha_k \frac{\Delta t \Delta x}{4} \mathbf{K} (\mathbf{u}_{k-1}^{n+1} + \varepsilon \mathbf{q}_{k-1}^{n+1}), \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz convecção e o índice  $k$  indica os valores calculados no  $k$ -ésimo passo corrector.

As matrizes globais de massa, difusão e convecção são:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.1.1. Precisão e estabilidade do esquema

Num trabalho prévio, Avilez-Valente e Seabra-Santos [21] procederam a uma análise de estabilidade e precisão do esquema de elementos finitos descrito. Verificou-se que os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  devem assumir diferentes valores em cada iteração.

Assim e desde que  $\sigma \sim \Delta x$ , os autores mostraram que fazendo

$$\alpha_0 = Cr, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{1 - Cr^2 + 2\theta^2}, \quad \alpha_3 = 0, \quad (21)$$

e

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{Cr}{3}, \quad (22)$$

o esquema na sua forma linear tem uma precisão de quarta ordem e a sua estabilidade é garantida com um termo dissipativo de quinta ordem.

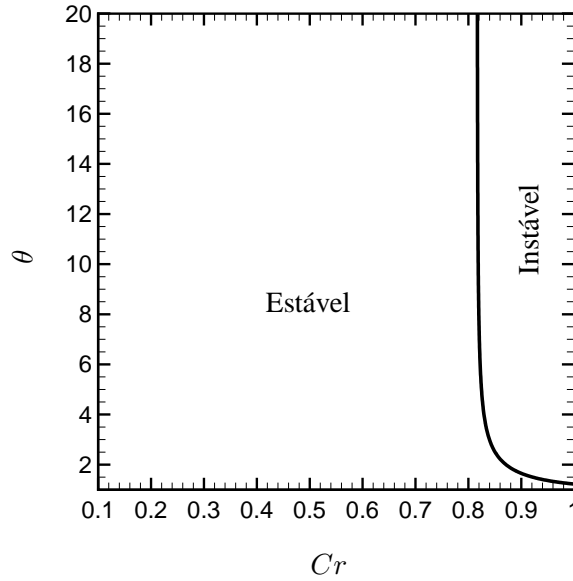


Figura 2. Região de estabilidade para o terceiro passo corrector.

Em (22),  $Cr$  é o número de Courant e  $\theta$  é uma razão entre a dispersividade do meio e a discretização espacial do domínio. Estes dois números adimensionais definem-se como

$$Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \theta = \sqrt{6} \frac{\sigma}{\Delta x}. \quad (23)$$

A estabilidade é no entanto condicional e só está garantida para as combinações de  $Cr$  e  $\theta$  tais que

$$\frac{2 + Cr^2 + 4\theta^2}{1 - Cr^2 + 2\theta^2} - 3Cr^3 > 0. \quad (24)$$

Pode-se mostrar que esta condição é satisfeita para todos os valores de  $\theta \geq 1$  desde que  $Cr \leq 0.8$  (cf. Figura 2).

### 3.2. Modelo RLW dimensional

Para a equação RLW dimensional (1), a formulação de Petrov-Galerkin é ligeiramente modificada. Neste caso escreve-se: determinar a função  $\hat{u}(x, t) \in \mathcal{V}$ , tal que, qualquer que seja  $\hat{\psi}(x, t) \in \mathcal{S}$ , se tenha

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^L \hat{\psi} (u_t + \nu u_x + \delta u u_x - \mu^2 u_{xxt}) \, dx \, dt = 0. \quad (25)$$

A função peso  $\hat{\psi}$  define-se para os nós 3 e 4 como

$$\hat{\psi}_i(x, t) = \hat{\varphi}_i + \alpha \frac{\Delta x}{2\nu} (\hat{\varphi}_i)_x + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4\nu} (\hat{\varphi}_i)_{xt}. \quad (26)$$

As funções base  $\hat{\varphi}_i$  não se alteram. O número de Courant e o parâmetro de discretização da

malha são redefinidos como

$$Cr = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \text{e} \quad \theta = \sqrt{6} \frac{\mu}{\Delta x}. \quad (27)$$

Finalmente, para o esquema predictor-corrector, as mesmas expressões (21) e (22) devem ser usadas para  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  respectivamente.

#### 4. EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Procedeu-se a três experiências numéricas: propagação de uma onda solitária; colisão de duas ondas solitárias; propagação e *break-up* de um impulso de Maxwell.

##### 4.1. Onda solitária

Com as condições fronteira  $u \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , a solução tipo onda solitária da equação (1) é

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[\kappa(x - vt - x_0)] \quad (28)$$

onde  $v = 1 + \delta c$  é a celeridade da onda, e  $\kappa$ , dado por

$$\kappa = \sqrt{\frac{\delta c}{4\mu^2 v}}, \quad (29)$$

é o número de onda.  $2\pi/\kappa$  representa um comprimento da onda.

O modelo RLW conserva apenas três grandezas: massa, quantidade de movimento e energia [5], as quais para a equação (1) são

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [u^2 + \mu^2 (u_x)^2] \, dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) \, dx. \quad (30)$$

A variação destas grandezas ao longo das simulações é registada para verificar as propriedades conservativas do algoritmo numérico. As normas  $L_2$  e  $L_\infty$ ,

$$L_2 = \|u^{\text{exact}} - u^n\|_2 = \left( \Delta x \sum_1^N |u_j^{\text{exact}} - u_j^n|^2 \right)^{1/2}, \quad (31a)$$

$$L_\infty = \|u^{\text{exact}} - u^n\|_\infty = \max_j |u_j^{\text{exact}} - u_j^n|, \quad (31b)$$

medem as diferenças média e máxima, respectivamente, entre as soluções analítica e numérica, mostrando a capacidade do esquema de elementos finitos para prever a amplitude e a posição da onda solitária, ao longo do tempo.

Para comparação com resultados anteriores [12, 13, 15, 16], tomou-se  $\nu = \delta = \mu^2 = 1$ . O domínio de cálculo é  $x \in [0, 100]$  com  $\Delta x = 0.125$  e  $\Delta t = 0.1$ , pelo que  $Cr = 0.8$  e  $\theta = 8\sqrt{6}$ . A condição inicial é dada pela expressão (28) com  $x_0 = 40$ , e  $c = 0.1$  pelo que a onda tem amplitude 0.3. A simulação estende-se até  $t = 20$ . Na Figura 3 regista-se a evolução da onda numérica e da sua primeira derivada espacial. É óbvia a não existência de oscilações de origem numérica, nem qualquer degradação do perfil da onda.



Método	Tempo	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	
MEF Petrov-Galerkin (proposto)							
$Cr = 0.8$	0	3.979927	0.8104625	2.579007	0.00000	0.00000	
	4	3.979944	0.8104625	2.579007	0.01549	0.00695	
	8	3.979947	0.8104625	2.579007	0.03000	0.01343	
	$\theta = 8\sqrt{6}$	12	3.979946	0.8104625	2.579007	0.04306	0.01868
	16	3.979939	0.8104625	2.579007	0.05464	0.02292	
20	3.979909	0.8104625	2.579007	0.06493	0.02643		
MEF mínimos cuadrados (cuadrático) [15]							
$Cr = 0.8$	0	3.97993	0.795990	2.57901	0.000		
	4	3.98182	0.801095	2.59677	0.089		
	8	3.98337	0.806211	2.61453	0.350		
	$\theta = 8\sqrt{6}$	12	3.98555	0.811733	2.63362	0.783	
	16	3.98807	0.817630	2.65395	1.397		
20	3.99046	0.823457	2.67399	2.157			
MEF mínimos cuadrados (linear) [13]							
$Cr = 1$	0	3.97993	0.810461	2.57901	0.002	0.007	
	4	3.98041	0.810111	2.57785	1.090	0.487	
	8	3.98085	0.809749	2.57666	2.109	0.892	
	$\theta = 10\sqrt{6}$	12	3.98128	0.809390	2.57547	3.049	1.224
	16	3.98169	0.809030	2.57428	3.905	1.510	
20	3.98203	0.808650	2.57302	4.688	1.755		
MEF Galerkin cuadrático com <i>B-splines</i> [12]							
$Cr = 1$	0	3.97992	0.810463	2.57901	0.000	0.000	
	4	3.97993	0.810464	2.57901	0.046	0.017	
	8	3.97993	0.810465	2.57901	0.090	0.036	
	$\theta = 10\sqrt{6}$	12	3.97992	0.810463	2.57901	0.135	0.054
	16	3.97992	0.810463	2.57901	0.179	0.071	
20	3.97989	0.810467	2.57902	0.220	0.086		
MC <i>B-splines</i> cúbicos [16]							
$Cr = 0.8$	0	3.979926	0.8104621	2.579007	0.00000	0.00000	
	4	3.979947	0.8104603	2.579000	0.05633	0.02293	
	8	3.979968	0.8104625	2.579009	0.10864	0.04575	
	$\theta = 8\sqrt{6}$	12	3.979982	0.8104610	2.579002	0.16235	0.06634
	16	3.979983	0.8104601	2.578999	0.21245	0.08553	
20	3.979958	0.8104596	2.578999	0.26086	0.10299		
MC <i>splitted B-splines</i> cúbicos [16]							
$Cr = 0.8$	0	3.979926	0.8104621	2.579007	0.00001	0.00001	
	4	3.979954	0.8104622	2.579005	0.04570	0.01783	
	8	3.979976	0.8104618	2.579007	0.09042	0.03583	
	$\theta = 8\sqrt{6}$	12	3.980005	0.8104624	2.579006	0.13554	0.05340
	16	3.980018	0.8104624	2.579006	0.17892	0.06960	
20	3.980016	0.8104624	2.579006	0.22050	0.08448		
MC <i>splitted B-splines</i> cuadráticos [16]							
$Cr = 0.8$	0	3.979926	0.8104646	2.579007	0.00000	0.00000	
	4	3.979930	0.8104626	2.578998	0.01757	0.00693	
	8	3.979924	0.8104606	2.578994	0.02249	0.00887	
	$\theta = 8\sqrt{6}$	12	3.979926	0.8104621	2.578997	0.03355	0.01072
	16	3.979918	0.8104624	2.578999	0.04075	0.01224	
20	3.979890	0.8104625	2.578999	0.04315	0.01321		

Tabela 1. Invariantes e normas do erro para uma onda solitária: amplitude = 0.3,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$ .

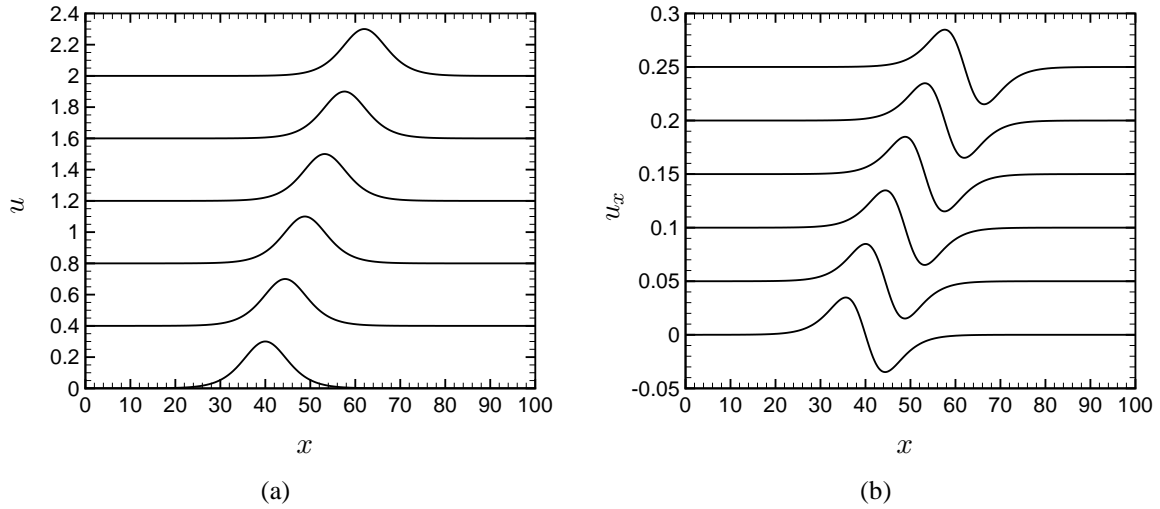


Figura 3. Evolução da onda solitária e da sua derivada espacial para  $t = 0, t = 4, t = 8, t = 12, t = 16$  e  $t = 20$ .

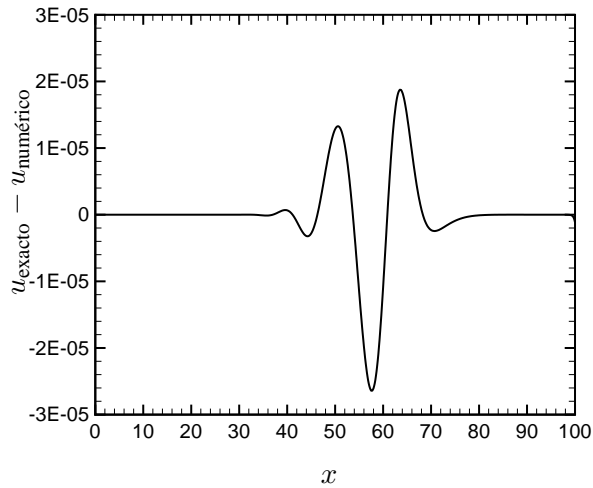


Figura 4. O erro = *solução exacta* – *solução numérica* para  $t = 20$ .

O erro absoluto para  $t = 20$  (cf. Figura 4) permanece abaixo de  $3 \times 10^{-5}$  em todo o domínio de cálculo mostrando uma boa captura da posição e da amplitude da crista da onda. É também cerca de 100 vezes menor que o mesmo erro para as formulações do MEF baseado em mínimos quadrados, lineares [13] e quadráticos [15].

Na Tabela 1, a evolução com o tempo dos invariantes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , e das normas do erro  $L_2$  e  $L_\infty$ , é comparada com trabalhos anteriores [12, 13, 16]. Pode-se notar que a formulação de Petrov-Galerkin do MEF apresentada, permite obter resultados superiores em termos de conservação e precisão: a variação de  $I_1$  para  $t = 20$  está abaixo de  $10^{-3} \%$ , enquanto  $I_2$  e  $I_3$  são exactos até ao último algarismo significativo registado; o erro máximo, norma  $L_\infty$ , toma o valor

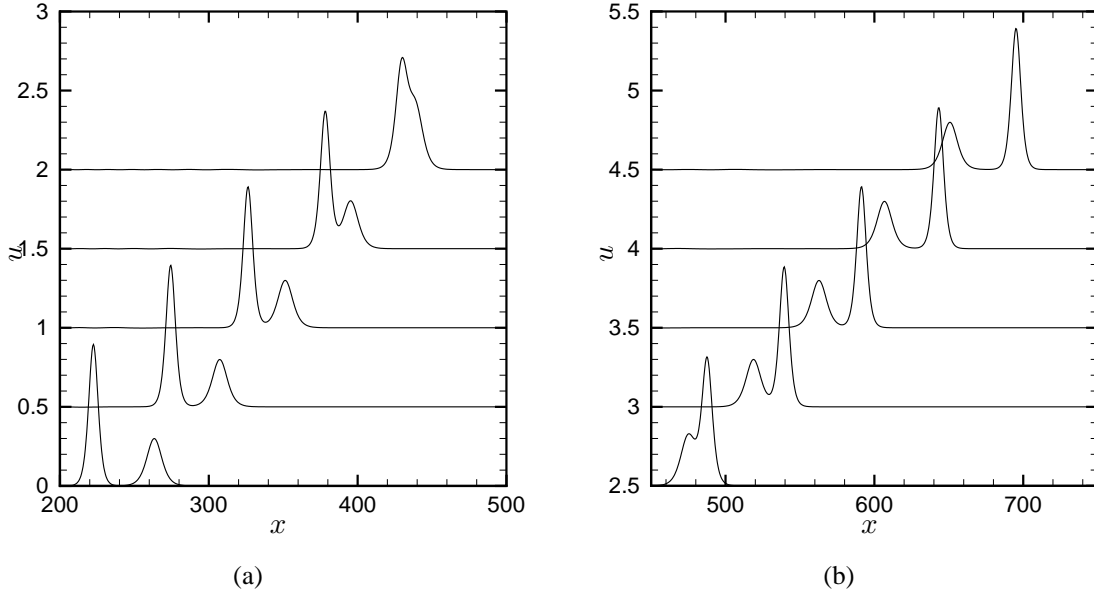


Figura 5. Colisão de duas ondas solitárias:  $t = 120, t = 160, t = 200, t = 240, t = 280, t = 320, t = 360, t = 400, t = 440$  e  $t = 480$ .

$0.026 \times 10^{-3}$  enquanto a norma  $L_2$  vale  $0.065 \times 10^{-3}$ . A formulação de Galerkin quadrática do MEF [12] e o método de colocação (MC) com  $B$ -splines cúbicos [16] tem propriedades de conservação similares, mas com erros, normas  $L_2$  e  $L_\infty$ , de grandeza mais elevada, o que poderá indicar uma menos eficiente resolução da celeridade da onda. Somente o método de colocação *splitted* com  $B$ -splines quadráticos [16] consegue resultados similares em termos de propriedades de conservação, registrando simultaneamente erros de menor grandeza.

## 4.2. Colisão de duas ondas solitárias

A equação RLW não tem soluções analíticas para 2 ou mais solitões [22]. De facto, devido à não existência de mais do que três leis de conservação, conjectura-se sobre a não elasticidade da colisão entre duas ondas solitárias governadas pela equação RLW. Abdulloev et al. [4] verificaram a existência de uma cauda oscilatória de amplitude  $\sim 10^{-3}$  na colisão de duas ondas solitárias de grande amplitude ( $\sim 10$ ), o que foi confirmado por Gardner e Gardner [11]. Por outro lado, Eilbeck e McGuire [7] não encontraram evidência desta inelasticidade. Alexander e Morris [9] relatam a produção de uma terceira onda solitária na colisão entre duas ondas solitárias, mas a sua condição inicial não são duas ondas solitárias distintas, pelo que as suas conclusões não são correctas.

Nesta experiência, estuda-se a colisão de duas ondas solitárias, regidas pela equação RLW (1) com  $\nu = \delta = \mu^2 = 1$ . A condição inicial é

$$u(x, t) = 3c_1 \operatorname{sech}^2[\kappa_1(x - x_1)] + 3c_2 \operatorname{sech}^2[\kappa_2(x - x_2)], \quad (32)$$

com  $c_1 = 0.3$  e  $c_2 = 0.1$ ,  $x_1 = 16/\kappa_1$  e  $x_2 = 22/\kappa_1 + 6/\kappa_2$ . O domínio de cálculo é

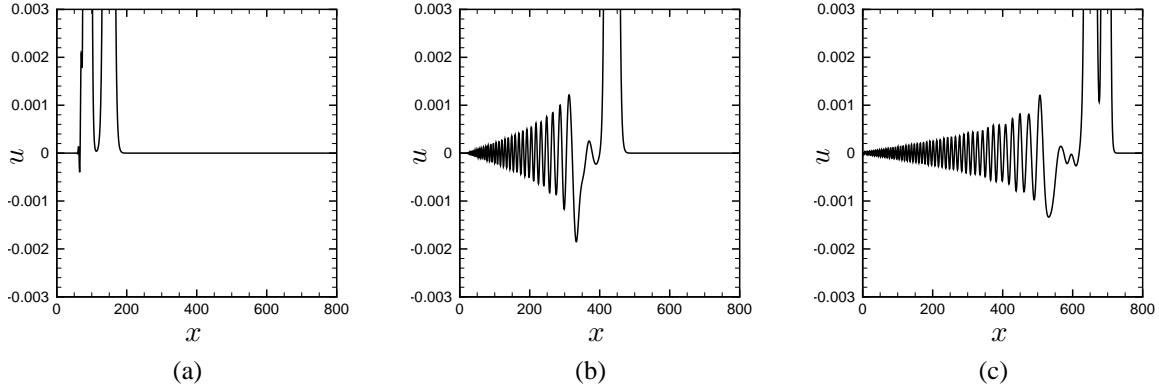


Figura 6. Colisão de duas ondas solitárias — cauda oscilatória para  $t = 16$ ,  $t = 280$  e  $t = 480$ .

$x \in [0, 1000]$ , com  $\Delta x = 0.5$  e  $\Delta t = 0.4$ , resultando  $Cr = 0.8$  e  $\theta = 2\sqrt{6}$ . A simulação prolongou-se até  $t = 600$ . Na Figura 5 mostra-se a evolução das ondas durante a colisão entre os instantes  $t = 120$  e  $t = 480$ . As ondas parecem recuperar a sua forma original, mas uma ampliação do perfil das ondas mostra a existência de uma cauda oscilatória de amplitude final  $\sim 10^{-3}$ . A formação desta onda é praticamente coincidente com o início da colisão (cf. Figura 6). Na Tabela 2 regista-se a evolução do valor numérico dos três invariantes. Verifica-se que  $I_1$  é constante até cinco algarismos significativos, enquanto  $I_2$  e  $I_3$  sofrem uma redução relativa inferior a  $5 \times 10^{-5}$ .

Parâmetros	Tempo	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	11.4740	5.51438	19.3056
$Cr = 0.8$	50	11.4740	5.51222	19.2969
	100	11.4740	5.50991	19.2880
$\theta = 2\sqrt{6}$	150	11.4740	5.50760	19.2790
	200	11.4740	5.50543	19.2704
	250	11.4740	5.50525	19.2677
	300	11.4740	5.50881	19.2768
	350	11.4740	5.50186	19.2559
	400	11.4740	5.49885	19.2450
	450	11.4739	5.49652	19.2359
	500	11.4740	5.49423	19.2270
	550	11.4739	5.49194	19.2181
	600	11.4739	5.48965	19.2092

Tabela 2. Invariantes para a colisão de duas ondas solitárias.

### 4.3. Impulso de Maxwell

Estuda-se a propagação de um impulso de Maxwell e a sua transformação num conjunto de ondas solitárias, para diversos valores do coeficiente de dispersividade,  $\mu^2 = 0.04; 0.01; 0.001$ ;

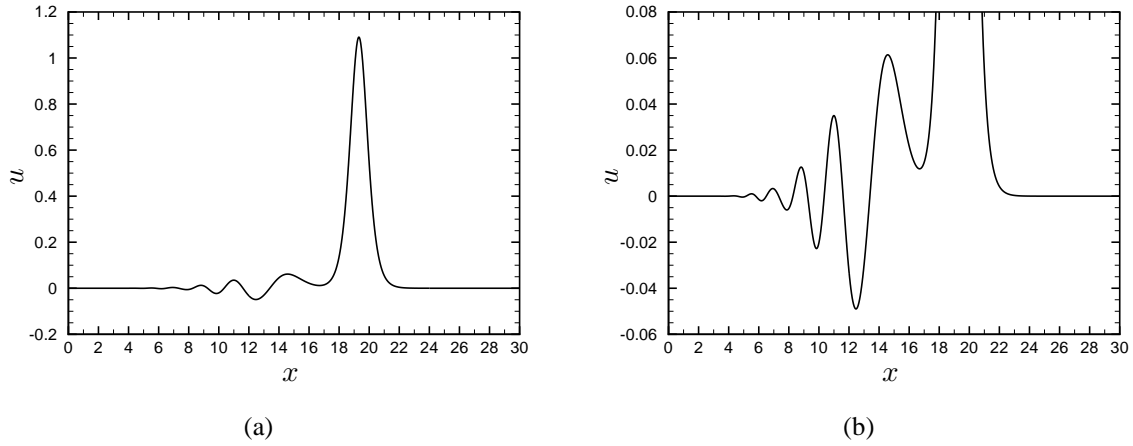


Figura 7. Impulso de Maxwell com  $\mu^2 = 0.04$  — solução para  $t = 9$ .

com  $\nu = 1$  e  $\delta = 1$ . A condição inicial é

$$u(x, 0) = e^{-(x-7)^2}. \quad (33)$$

O domínio computacional tem comprimento 30, para  $\mu^2 = 0.04$  e  $\mu^2 = 0.01$ , e comprimento 60 para  $\mu^2 = 0.001$ . Em qualquer dos casos utilizou-se  $\Delta x = 0.01$  e  $\Delta t = 0.008$ , logo  $Cr = 0.8$ . A evolução do valor numérico dos invariantes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  está registada na Tabela 3, onde é comparada com a registada na referência [11].

Para  $\mu^2 = 0.04$ , e portanto  $\theta = 20\sqrt{6}$ , a experiência decorreu até  $t = 9$ . Verificou-se que o impulso se transformou numa onda solitária (cf. Figura 7(a)), com uma pequena cauda dispersiva cuja amplitude máxima é de cerca de 0.06 para  $t = 9$  (cf. Figura 7(b)). O invariante  $I_1$  manteve um valor constante, enquanto  $I_2$  e  $I_3$  têm variações relativas inferiores a  $10^{-5}$ . Para o mesmo caso, Gardner e Gardner [11] apresentam variações relativas um pouco inferiores a  $10^{-4}$  para qualquer um dos três invariantes.

Para  $\mu^2 = 0.01$ , logo  $\theta = 10\sqrt{6}$ , prolongou-se a experiência até  $t = 12$ . O impulso de Maxwell desdobra-se em três ondas solitárias (cf. Figura 8(a)). Tal como verificado por Gardner e Gardner [11], verifica-se a presença de uma cauda dispersiva com uma amplitude máxima de cerca de 0.015 (cf. Figura 8(b)). Quanto aos invariantes,  $I_1$  permanece constante durante toda a simulação, enquanto  $I_2$  e  $I_3$  têm uma variação relativa de cerca de  $10^{-4}$ . O método de *splines* cúbicos [11] regista variações relativas entre  $10^{-5}$  e  $5 \times 10^{-5}$  nos três invariantes.

Finalmente, para  $\mu^2 = 0.001$  e  $\theta = 3.16\sqrt{6}$ , a experiência decorre até  $t = 25$ . O impulso inicial deu origem a nove ondas solitárias (cf. Figura 9(a)). Os resultados são consistentes com os de Gardner e Gardner [11], incluindo a presença de uma pequena esteira dispersiva (cf. Figura 9(b)). No entanto, a amplitude da esteira é menor no presente trabalho, o que poderá indicar uma dependência do método numérico ou da discretização utilizada. No que concerne à evolução dos invariantes,  $I_1$  permanece constante, enquanto  $I_2$  e  $I_3$  sofrem uma diminuição monotónica cujo valor relativo é inferior a  $5 \times 10^{-3}$ , a qual pode ser devida ao carácter dissipativo do esquema

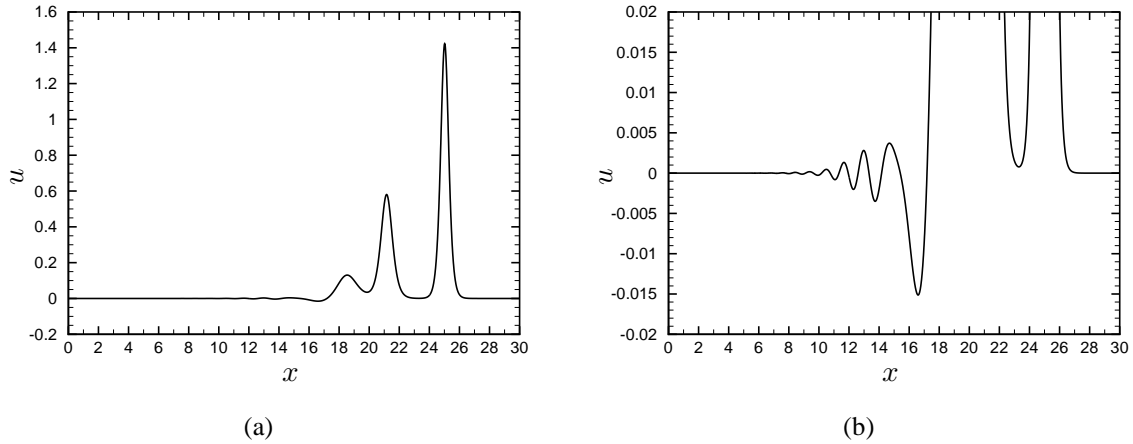


Figura 8. Impulso de Maxwell com  $\mu^2 = 0.01$  — solução para  $t = 12$ .

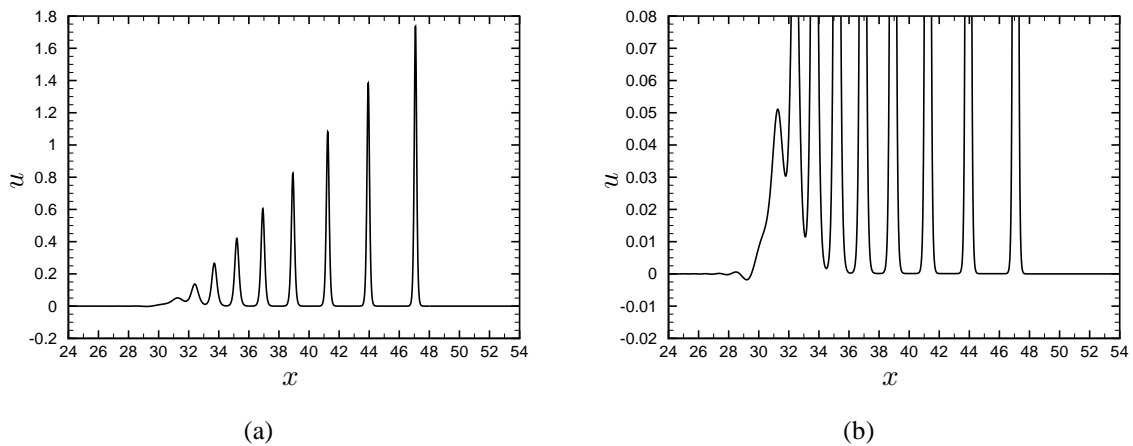


Figura 9. Impulso de Maxwell com  $\mu^2 = 0.001$  — solução para  $t = 25$ .

numérico. O método dos *splines* cúbicos [11] regista variações relativas inferiores a  $10^{-5}$  para  $I_1$  e  $I_2$  e uma variação relativa máxima de  $3 \times 10^{-4}$  para  $I_3$ .

## 5. CONCLUSÕES

Apresentou-se um esquema de elementos finitos com uma formulação de Petrov-Galerkin para a equação RLW. Esta formulação é condicionalmente estável, mas apresenta características superiores de precisão e estabilidade. Combina precisão linear de quarta ordem com um mecanismo numérico de dissipação de quinta ordem. As experiências numéricas efectuadas permitiram verificar que os resultados obtidos comparam favoravelmente com outros presentes na literatura, tanto em termos de precisão como em termos de propriedades conservativas.

Tempo	MEF Petrov-Galerkin			MEF Galerkin <i>B-splines</i> cúbicos [11]		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	1.77245	1.30345	4.78326	31.7725	34.8484	40.1006
2	1.77245	1.30344	4.78325	31.7730	34.8492	40.1019
4	1.77245	1.30344	4.78324	31.7733	34.8501	40.1029
6	1.77245	1.30344	4.78324	31.7737	34.8507	40.1037
8	1.77245	1.30344	4.78324	31.7739	34.8509	40.1039
0	1.77245	1.26585	4.78326	31.7725	34.8108	40.1006
2	1.77245	1.26579	4.78308	31.7725	34.8108	40.1010
4	1.77245	1.26572	4.78287	31.7724	34.8106	40.1011
6	1.77245	1.26571	4.78283	31.7721	34.8102	40.1006
8	1.77245	1.26571	4.78282	31.7719	34.8097	40.1000
10	1.77245	1.26571	4.78282	31.7718	34.8095	40.0996
12	1.77245	1.26571	4.78282	31.7718	34.8094	40.0994
0	1.77245	1.25457	4.78326	31.7725	34.8016	40.1426
4	1.77245	1.25270	4.77671	31.7724	34.8016	40.1426
8	1.77245	1.25192	4.77335	31.7724	34.8017	40.1439
12	1.77245	1.25127	4.77039	31.7724	34.8016	40.1423
16	1.77245	1.25063	4.76746	31.7724	34.8016	40.1469
20	1.77245	1.25000	4.76455	31.7725	34.8017	40.1540
24	1.77245	1.24937	4.76164	31.7725	34.8018	40.1477

Tabela 3. Invariantes para o impulso de Maxwell.

**Agradecimento:** Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto POCTI/ECM/41800/2001.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. H. Peregrine, Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, **25**, 321–330 (1966).
- [2] T. B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A272**, 47–78 (1972).
- [3] D. J. Korteweg e G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag. and J. of Science*, **39**, 422–443 (1895).
- [4] Kh. O. Abdulloev, I. L. Bogolubsky e V. G. Makhankov, One more example of inelastic soliton interaction, *Physics Letters*, **56A**, 427–428 (1976).
- [5] P. J. Olver, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 143–160 (1979).
- [6] J. C. Eilbeck e G. R. McGuire, Numerical study of the Regularized Long-Wave equation. I: numerical methods, *J. Comput. Physics*, **19**, 43–57 (1975).
- [7] J. C. Eilbeck e G. R. McGuire, Numerical study of the Regularized Long-Wave equation. II: interaction of solitary waves, *J. Comput. Physics*, **23**, 63–73 (1977).
- [8] P. C. Jain, R. Shankar e T. V. Singh, Numerical solution of Regularized Long-Wave equation, *Comm. Numer. Methods Eng.*, **9**, 579–586 (1993).

- [9] M. E. Alexander e J. Ll. Morris, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *J. Comput. Physics*, **30**, 428–451 (1979).
- [10] J. M. Sanz-Serna e I. Christie, Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves, *J. Comput. Physics*, **39**, 94–102 (1981).
- [11] L. R. T. Gardner e G. A. Gardner, Solitary waves of the Regularized Long-Wave equation, *J. Comput. Physics*, **91**, 441–459 (1990).
- [12] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner e I. Dag, A B-spline finite element method for the Regularized Long Wave equation, *Comm. Numer. Methods Eng.*, **11**, 59–68 (1995).
- [13] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner e A. Dogan, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Comm. Numer. Methods Eng.*, **12**, 795–804 (1996).
- [14] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, F. A. Ayoub e N. K. Amein, Modelling an undular bore with B-splines, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **147**, 147–152 (1997).
- [15] Ī. Ďag, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **182**, 205–215 (2000).
- [16] Ī. Ďag, A. Dođan e B. Saka, B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, *Intern. J. Computer Math.*, **80**, 743–757 (2003).
- [17] Z. Luo e R. Liu, Mixed finite element analysis and numerical solitary solution for the RLW equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **36**, 89–104 (1998).
- [18] C.-C. Yu e J. C. Heinrich, Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **23**, 883–901 (1986).
- [19] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, A 2DH finite element method for the propagation of water waves around coastal structures, in *Coastal Structures'99*, (ed. I. Losada), 159–167, Balkema, NL (2000).
- [20] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, A finite element method for the 1-term weakly nonlinear Beji-Nadaoka wave model, in *Ocean Wave Measurements and Analysis, Proc. of the 4th Int. Symp. Waves 2001*, (eds. B. L. Edge e J. M. Hemsley), 874–883, ASCE, New York, NY (2002).
- [21] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation, *Computational Mechanics* (2004), in press.
- [22] J. M. Dye e A. Parker, An inverse scattering scheme for the regularized long-wave equation, *J. Math. Phys.*, **41**, 2889–2904 (2000).