

U. PORTO

FEUP **FACULDADE DE ENGENHARIA**
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 1, 2015

Jaime E. Villate

Porto, julho de 2015

Copyright © 2015, Jaime E. Villate

E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Conteúdo

1	Sumários	1
1.1	Cinemática	2
1.2	Cinemática vetorial	8
1.3	Movimento curvilíneo	10
1.4	Mecânica vetorial	18
1.5	Dinâmica dos corpos rígidos	25
1.6	Trabalho e energia	31
1.7	Sistemas dinâmicos	39
1.8	Mecânica lagrangiana	44
1.9	Sistemas lineares	51
1.10	Sistemas não lineares	59
1.11	Ciclos limite e dinâmica populacional	66
2	Exames	73
2.1	Exame de época normal	73
2.1.1	Enunciado	74
2.1.2	Resolução	76
2.2	Exame de época de recurso	79
2.2.1	Enunciado	80
2.2.2	Resolução	82
	Bibliografia	85

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 1.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

Ano académico 2014–2015, segundo semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Ascenso, Maria Helena Braga, Victor Hugo Granados Fernandez e Jaime E. Villate.

Número de alunos 197.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

Aula 2, 24/2/201

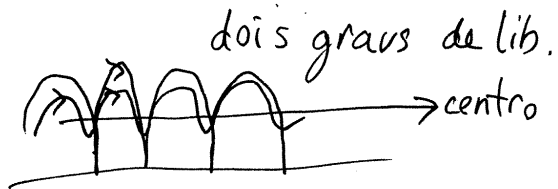
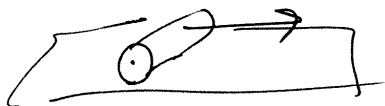
● **MOVIMENTO**

Mudança de posição.

A posição é diferente para dois observadores diferentes, mas se os dois observadores estão no mesmo REFERENCIAL, a mudança de posição é a mesma

→ Dif. referenciais → dif. movimento

TIPOS DE MOV.

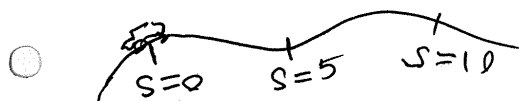


dois graus de lib.

mov. pendular → 1 grau de liberdade



MOVIMENTO COM 1 GRAU DE LIBERDADE



s → posição (na trajetória)

DESLOCAMENTO

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$

VELOCIDADE MÉDIA
(velocity along the trajectory)

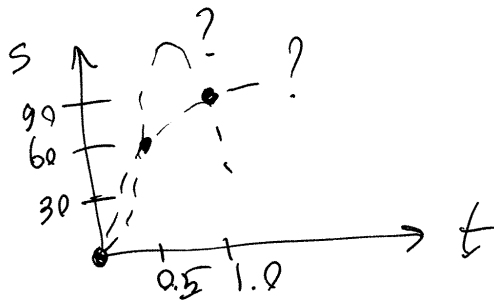
$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

RAPIDEZ
(speed)

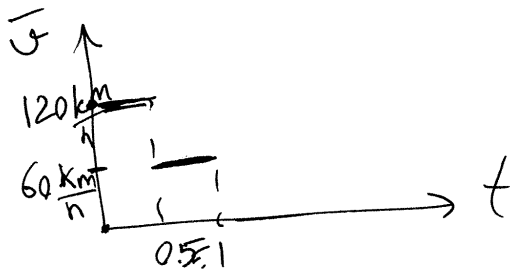
→ $|\bar{v}|$

Exemplo

t(h)	0	0.5	1.0
d(km)	0	60	90



$s(t)$ deve ser uma função contínua



$$s(t + \Delta t) = s(t) + \bar{v} \Delta t$$

$$60 + 60 \times 0.5 = 90 \quad \bar{v}_2 \Delta t$$

mas

$$60 + 120 \times 0.25 + 0 \times 0.25 = 90$$

$\bar{v}_i \quad \Delta t_i$

em geral: $s(t + \Delta t) = s(t) + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \Delta t_i$

$$\bar{v}_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \quad (\Delta t_1 + \dots + \Delta t_n = \Delta t)$$

Resultado exato: $n \rightarrow \infty \quad (\Delta t_i \rightarrow 0)$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \int_t^{t+\Delta t} v dt$$

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \int_t^{t+\Delta t} a dt$$

Exemplo. Um ciclista aplica os travões em $s=0$ e a sua velocidade diminui de acordo com a expressão $v = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}$ (SI) até parar em $s=10$.
 (a) $a_t(s)$? (b) Δt até parar?

(a) $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{-s v}{2 \sqrt{100 - s^2}} = -\frac{s}{4}$

Aula 3, 27/2/2015

EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

$$v = \dot{s} \quad a_t = \dot{v} \quad a_t = \ddot{s} \quad a_t = v \frac{dv}{ds}$$

Equação diferencial ordinária (EDO) $\rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

EDO de variáveis separáveis $\rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_0^x f(x) dx$$

\Rightarrow encontra-se a solução (expressão que relaciona y com x)

Para tornar uma das equações cinemáticas numa EDO, é necessário substituir uma das 3 variáveis por uma expressão que dependa das outras duas variáveis.

Exemplo. Voltando ao exemplo do ciclista,

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}$$

substituindo na equação $v = \dot{s}$,

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2} = \frac{ds}{dt} \quad (\text{EDO de variáveis separáveis})$$

$$dt = \frac{2 ds}{\sqrt{100 - s^2}}$$

é necessário saber s num instante inicial \rightarrow Arbitra-se $s(0) = 0 \Rightarrow s_{\text{final}} = 10$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^{10} \frac{2 ds}{\sqrt{100-s^2}} \quad (\text{integrate } (2/\sqrt{100-s^2}), (s, 0, 10))$$

$$\Rightarrow t = \pi \approx 3.141 \text{ s}$$

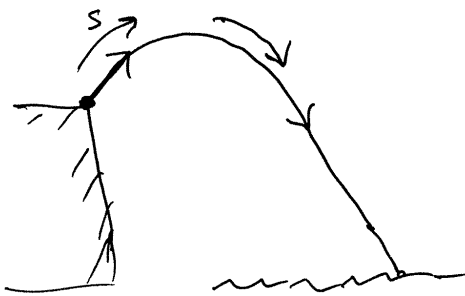
Observe-se que $a_t = -\frac{s}{4}$, e como s vai de 0 até 10, então $\bar{a}_t = -\frac{5}{4}$

$$\text{Mas } \bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{\bar{a}_t} = \frac{5 \text{ m/s}}{-5/4 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ s}$$

está errado porque a aceleração $-5/4$ é média em função da distância e não média em função de t !

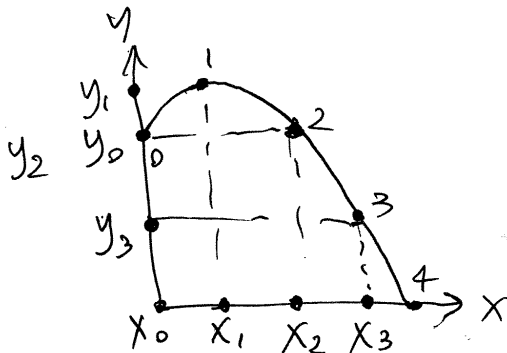
PROJEÇÃO DO MOVIMENTO NUM EIXO.

Exemplo. Lançamento de um projétil.



A trajetória é uma parábola.

É mais fácil analisar a projeção do movimento em dois eixos x e y :



Galileu observou que, quando a resistência do ar pode ser desprezada a aceleração do

movimento em x é nula e a aceleração do movimento em y é sempre $-9.8 \frac{m}{s^2}$ (para qualquer objeto)

Equações cinemáticas da projeção em x

$$v_x = \dot{x} \quad a_x = \dot{v}_x \quad a_x = \ddot{x} \quad a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$a_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{constante} = v_{0x} \\ \dot{x} = v_{0x} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_{0x} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_{0x} t}$$

Equações cinemáticas da projeção em y

$$v_y = \dot{y} \quad a_y = \dot{v}_y \quad a_y = \ddot{y} \quad a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$$

$$a_y = -9.8 \text{ (SI)} \quad (= -g)$$

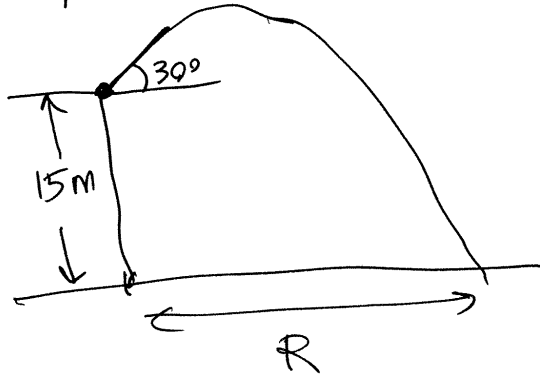
$$\Rightarrow dv_y = -g dt \Rightarrow \boxed{v_y = v_{0y} - g t}$$

$$-g dy = v_y dv_y \Rightarrow \boxed{v_y^2 = v_{0y}^2 - 2(y - y_0)g}$$

$$\Rightarrow v_{0y} - g t = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2}$$

em vez de memorizar essas expressões, que são válidas unicamente para aceleração constante, é melhor resolver sempre as equações cinemáticas.

Exemplo



$$v_0 = 30 \frac{m}{s}$$

inclinação 30°

a) h_{\max} ?

b) alcance horizontal R?

a) $\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_0 = 30 \sin 30^\circ = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = ? \\ v_y = 0 \end{cases} \quad a_y = -g$

$$a_y = v_y \frac{dv_y}{dy} \Rightarrow -9.8 \int_0^y dy = \int_{15}^0 v_y dv_y$$

$$-9.8y = -\frac{225}{2} \Rightarrow y = \frac{225}{19.6} = 11.48 \text{ m}$$

$$h_{\max} = 26.48 \text{ m}$$

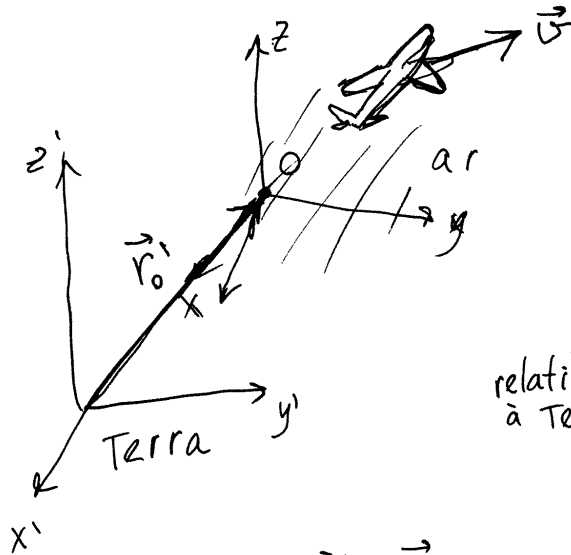
b) $\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 15 \\ v_0 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_y = ? \\ y = 0 \\ t = ? \end{cases}$

$$-9.8 = dv_y \dots \dots t = 3.855 \text{ s.}$$

$$R = 30 \cos 30^\circ \times 3.855 \text{ s} = \dots$$

Aula 5, 6/3/2013

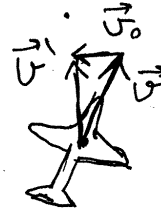
MOVIMENTO RELATIVO



posição do avião:

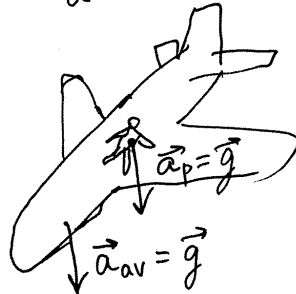
$$\vec{r}' = \vec{r}_0' + \vec{r}$$

↑ ↑ ↑
relativa do ar relativa
à Terra (vento) ao ar



$$\Rightarrow \vec{u}' = \vec{u}_0' + \vec{u}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}_0' + \vec{a}$$

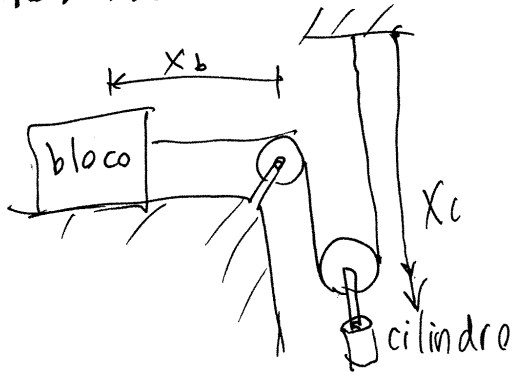


$$\vec{a}_p = \vec{a}_{av} + \vec{a}_{p/av}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{p/av} = \vec{a}_p - \vec{a}_{av} = 0$$

o passageiro flutua no avião

MOVIMENTOS DEPENDENTES



dois movimentos
retilíneos

⇒ duas variáveis

x, y

uma restrição
(comprimento do fio)

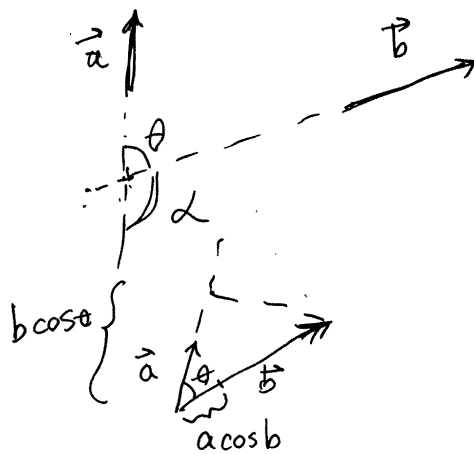
⇒ um único grau de liberdade

$$L = X_b + 2X_c + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{X}_b = -2\dot{X}_c \quad (v_b = -2v_c)$$

$$a_b = -2a_c$$

PRODUTO ESCALAR



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

θ ângulo para onde aponta $\vec{a} + \vec{b}$

propriedades:

$$\textcircled{a} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\textcircled{b} \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\textcircled{c} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a \times \text{projecção de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} \\ &= b \times \text{projecção de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} \end{aligned}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$$

em geral, $-ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab$

$$\pi < \theta < \pi/2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\Rightarrow \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

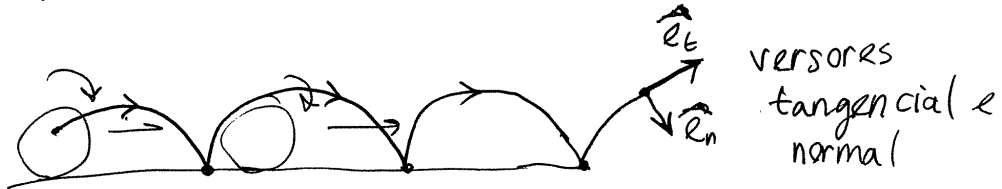
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

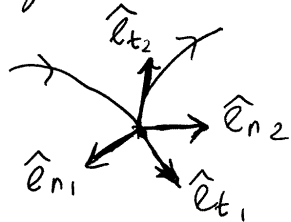
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Aula 6, 10/3/2015

MOVIMENTO CURVILÍNEO



no ponto onde $\vec{v} = \vec{0}$ pode haver 2 vetores tangenciais e dois normais (antes e depois do parar)



$\hat{e}_t \rightarrow$ sentido positivo de s
 $\hat{e}_n \rightarrow$ sentido da curvatura de s .

Em pontos onde $v \neq 0$,

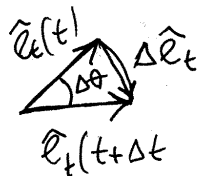
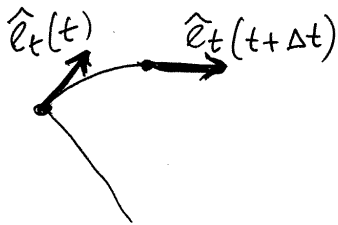
$$\vec{v} = v \hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \hat{e}_t + v \dot{\hat{e}}_t$$

Derivada de \hat{e}_t

A derivada de qualquer vetor com módulo constante é perpendicular ao vetor:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{const.} \Rightarrow 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \dot{\vec{a}}$$

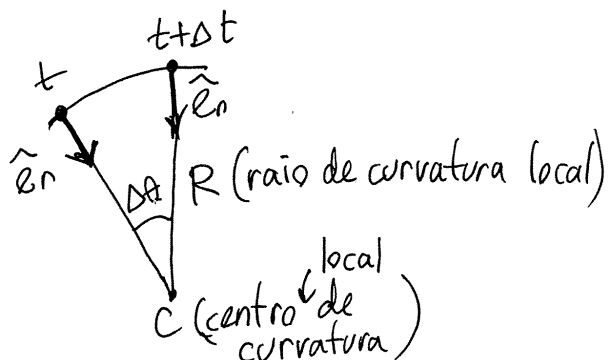


$$\left| \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} \right| \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

no limite $\Delta t \rightarrow 0$
 $\Delta \hat{e}_t$ é na direção e sentido de \hat{e}_n e:

$$\dot{\hat{e}}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \dot{\theta} \hat{e}_n$$

$\Delta\theta$ é também o ângulo entre $\hat{e}_n(t)$ e $\hat{e}_n(t+\Delta t)$



$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta s}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v} \hat{e}_t + \frac{v^2}{R} \hat{e}_n}$$

$a_t = \dot{v}$ = aceleração tangencial

$a_n = \frac{v^2}{R}$ = aceleração normal (ou centrípeta)

$\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R}$ = velocidade angular

Exemplo. $\vec{r}(t) = 5t \hat{i} + \frac{3}{2}t^2 \hat{j} + 2(1-t^2) \hat{k}$ (SI)

$$0 \leq t \leq 1$$

Determine: (a) $v(t)$ (b) $R(t)$ (c) $\dot{\theta}(t)$ (d) $\Delta S_{0,1}$

(e) descreva a trajetória

(a) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 5\hat{i} + 3t\hat{j} - 4t\hat{k}$

$$|v| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{25 + 25t^2} = 5\sqrt{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 5\sqrt{1+t^2}}$$

(pode arbitrar-se)
= v porque
 v não chega
a ser zero

$$\textcircled{b} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 3\hat{j} - 4\hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{5t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{25 - \frac{25t^2}{t^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(t^2+1)}{\frac{5}{\sqrt{t^2+1}}} = 5(t^2+1)^{3/2}$$

$$\textcircled{d} \dot{s} = v = 5\sqrt{t^2+1}$$

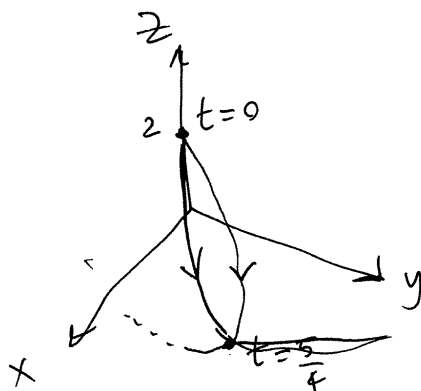
$$\Rightarrow \Delta S_{0,1} = \int_0^1 v dt = 5 \int_0^1 \sqrt{t^2+1} dt = \frac{5}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$$

$$\Delta S_{0,1} \approx 5.739$$

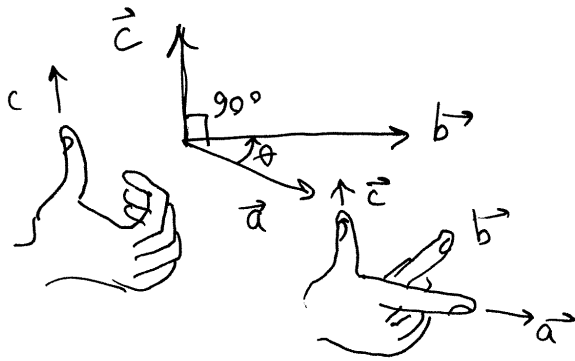
\textcircled{e} Como \vec{a} é constante, a trajetória é uma parábola. O vértice é o ponto onde

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 15 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5}{4}$$

$$\vec{r}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{4}\hat{i} + \frac{75}{32}\hat{j} - \frac{9}{8}\hat{k}$$



PRODUTO VETORIAL



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

propriedades

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$0 \leq |\vec{a} \times \vec{b}| \leq ab$$

ab , se, e se \vec{a} é perpendicular a \vec{b}

0, se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

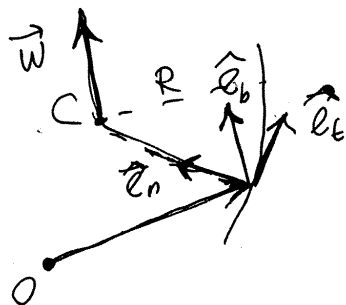
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Aula 7, 13/3/2015

VETORES VELOCIDADE ANGULAR E ACELERAÇÃO ANGULAR



versor binormal

$$\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$$

velocidade angular

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_b$$

aceleração angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \left(\begin{array}{l} \vec{R} = \text{posição relativa} \\ \text{ao centro de curvatura} \end{array} \right)$$

Equações cinemáticas: ~~...~~

CASOS ESPECIAIS

① \hat{e}_t constante \rightarrow movimento retilíneo (não existem \hat{e}_n nem \hat{e}_b)

② \hat{e}_b constante \rightarrow movimento plano

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \dot{\omega} \hat{e}_b$$

Equações cinemáticas: $\omega = \dot{\theta}, \alpha = \dot{\omega}, \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

③ \hat{e}_b e R constantes \rightarrow MOVIMENTO CIRCULAR

$$a_t = \vec{v} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}) = R\dot{\omega} = R\alpha \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

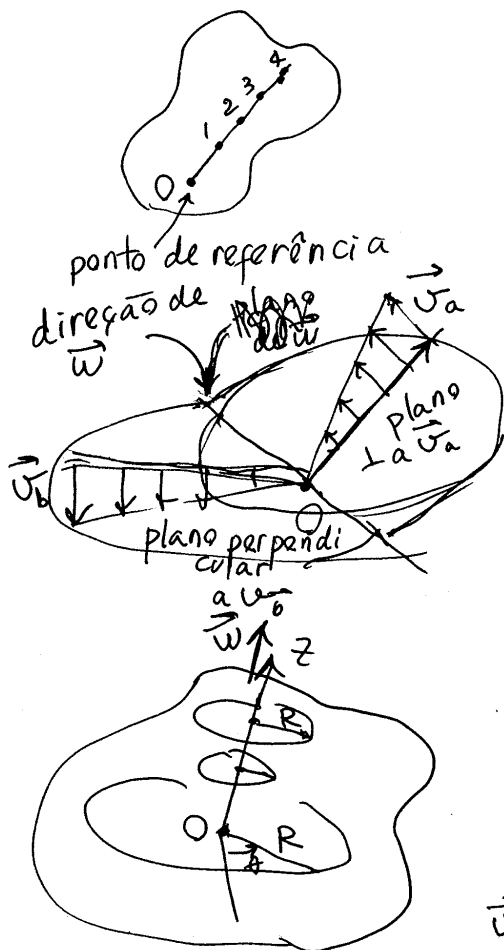
MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

R e $\vec{\omega}$ constantes ($\alpha=0$)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{período} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS



$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \text{ perpendicular a } \vec{r}$$

$$\vec{r}_+ = 4\vec{r}_i \Rightarrow \vec{v}_+ = 4\vec{v}_i$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

O eixo de rotação (eixo z) é a interseção dos planos perpendiculares a \vec{v}_a e \vec{v}_b .

Os pontos no eixo têm $\vec{v} = \vec{0}$.

coordenadas cilíndricas

$$(R, \theta, z)$$

O valor de z não interessa

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad v = R\omega$$

~~Rotação plana~~

Se mudarmos o ponto de referência para P,

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \vec{R}_Q, \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{R}_P \Rightarrow \vec{v}_{Q/P} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{R}_Q - \vec{R}_P)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{Q/P} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{Q/P}}$$

A velocidade angular $\vec{\omega}$ é a mesma, independentemente do ponto de referência



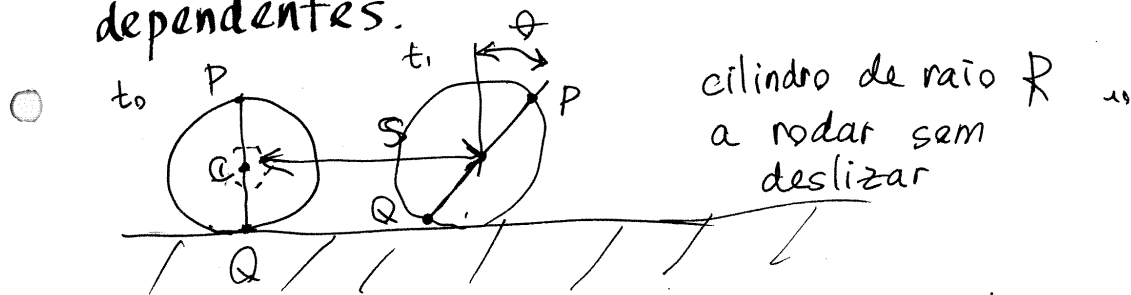
● Rotação plana dos corpos rígidos

- direção de $\vec{\omega}$ constante

$$\omega = \dot{\theta}, \quad \alpha = \dot{\omega}, \quad a_t = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}} \quad \boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

● Movimentos de translação e rotação dependentes.

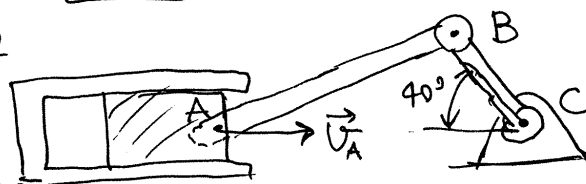


Duas variáveis, s e θ , mas uma relação entre elas: em t_0 , $v_Q = 0$

$$\Rightarrow v_C = R\omega \Rightarrow \dot{s} = R\dot{\theta}$$

- $\boxed{s = R\theta} \Rightarrow$ Um único grau de liberdade.

Exemplo



comprimento da biela (AB) = 200 mm

comprimento da manivela (BC) = 75 mm

$$v_A = 12 \text{ m/s}$$

- determine as velocidades angulares da biela e da manivela nesse instante

biela: $\vec{\omega}_b = \omega_b \hat{k}$ manivela: $\vec{\omega}_m = \omega_m \hat{k}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/C} + \vec{v}_C = \vec{v}_{B/C} = \vec{\omega}_m \times \vec{CB}$$

$$\vec{CB} = 75(-\cos 40^\circ \hat{i} + \sin 40^\circ \hat{j}) = -57.45 \hat{i} + 48.21 \hat{j} \quad (\text{mm})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_m \\ -57.45 & 48.21 & 0 \end{vmatrix} = -48.21 \omega_m \hat{i} - 57.45 \omega_m \hat{j}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A = \vec{\omega}_b \times \vec{AB} + \vec{v}_A$$

$$\vec{AB} = \sqrt{200^2 - 48.21^2} \hat{i} + 48.21 \hat{j} = 191.57 \hat{i} + 48.21 \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_b \\ 191.57 & 48.21 & 0 \end{vmatrix} + 12000 \hat{i} = (12000 - 48.21 \omega_b) \hat{i} + 191.57 \omega_b \hat{j}$$

igualando;

$$\begin{cases} 12000 - 48.21 \omega_b = -48.21 \omega_m \\ -57.45 \omega_m = 191.57 \omega_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_b = 56.85$$

$$\omega_m = -192.1$$

Aula 8, 17/3/2015

LEIS DE NEWTON

1ª Lei da Inércia.

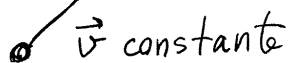
Quando não atuam forças sobre um corpo, este permanece num estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme

$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

(repouso)

$$\vec{F} = \vec{0}$$


 \vec{v} constante

movimento retilíneo e uniforme

Ou seja, se $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

Esta lei só é válida nos **referenciais inerciais**



comboio com \vec{v} constante

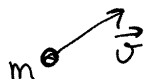


comboio numa curva

$$\vec{v}_{\text{ref1}} = \vec{v}_{\text{ref2}} + \vec{v}_{\text{ref2/ref1}}$$

se ref1 é inercial e $\vec{v}_{\text{ref2/ref1}}$ é constante
 \Rightarrow ref2 também é inercial

2ª lei


 m \vec{v}

quantidade de movimento

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

se $m = \text{constante}$,

$$\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

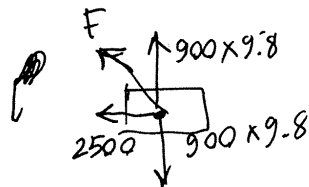
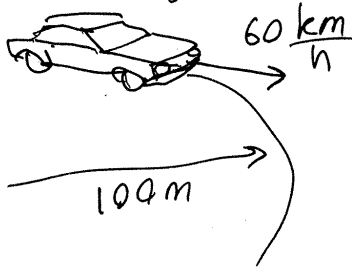
também

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_1} d\vec{p} \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt}_{\text{impulso}}$$

O impulso de uma força é igual ao aumento da quantidade de movimento que ela produz.

Exemplo 1

$m = 900 \text{ kg}$



$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

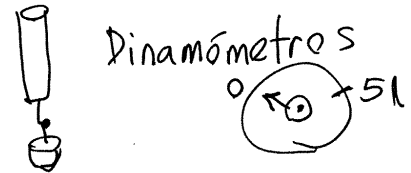
$$a = \frac{(50/3)^2}{100} = \frac{50}{2 \times 9} = \frac{25}{18} = 2.777... \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{900 \times 25}{18} = 2500 \text{ N}$$

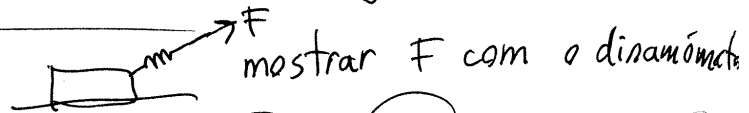
$$P = 900 \times 9.8 = 8820 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{8820^2 + 2500^2} = 9167 \text{ N}$$

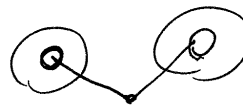
• O Peso $F = mg$



• Forças de contacto



• Forças num fio

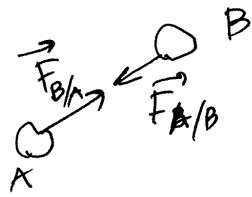


• Forças elásticas



3ª Lei de ação e reação

Qualquer objeto A que exerce uma força \vec{F} sobre outro objeto B sofre SEMPRE uma força $-\vec{F}$ exercida por B sobre ele.



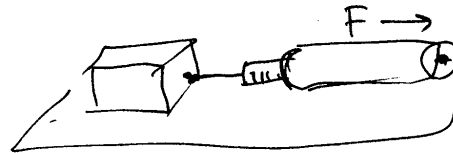
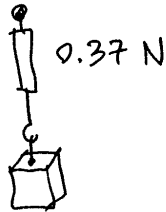
$$\vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{A/B} = \vec{0}$$

\Rightarrow As únicas forças que produzem aceleração são as forças externas

Aula 9, 20/3/2015

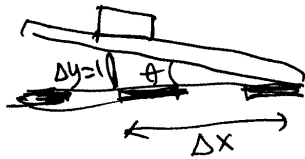
FORÇA DE ATRITO

○


 $0 < F < 0.41 \text{ N} \Rightarrow \text{estático}$

 movimento $\Rightarrow 0.08 \text{ N}$

○

Mais fácil. Plano inclinado


$$R_n = mg \cos \theta$$

$$F_a = mg \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{F_a}{R_n} = \tan \theta = \frac{1}{\Delta x}$$

$$\text{estático: } \frac{F_a}{R_n} \leq \frac{1}{3.8}$$

$$\text{cinético: } \frac{F_a}{R_n} = \frac{1}{4.5}$$

$$\mu_e = \frac{F_{a\text{máx}}}{R_n}$$

$$\mu_c = \frac{F_{a\text{cinético}}}{R_n}$$

No nosso exemplo:

$$\mu_e = \frac{0.11}{0.37} \approx 0.297$$

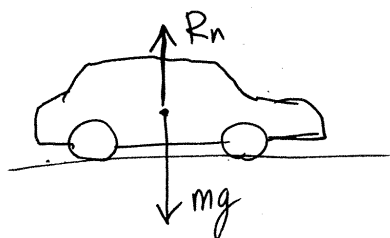
$$\frac{1}{3.8} \approx 0.263$$

○

$$\mu_c = \frac{0.08}{0.37} \approx 0.216$$

$$\frac{1}{4.5} \approx 0.222$$

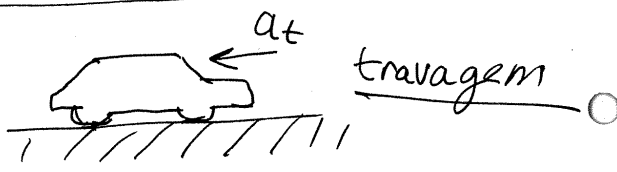
Automóvel numa estrada horizontal



$$R_n = mg$$

$$\Rightarrow F_{a\max} = \mu_e R_n = \mu_e mg$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = \mu_e g$$



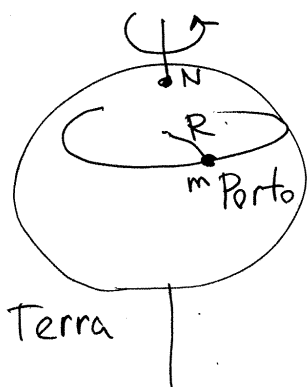
Curva



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{R a_{\max}} = \sqrt{R g \mu_e}$$

ACELERAÇÃO DE GRAVIDADE



$$F_{\text{grav.}} = G \frac{M_0 m}{R_0^2}$$

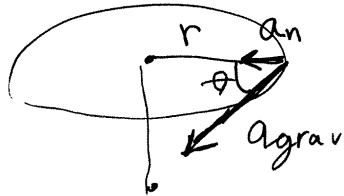
$$a_{\text{grav}} = \frac{F_{\text{grav.}}}{m} = \frac{G M_0}{R_0^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

$$M_0 = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_0 = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow a_{\text{grav}} = 9.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



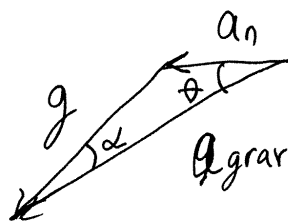
No porto,

$$\theta = 41.16^\circ$$

$$r = R \sin \theta = 4.19 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_n = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \right)^2 r$$

$$\Rightarrow a_n = 0.02217$$



$$g = \sqrt{a_n^2 + a_{grav}^2 - 2a_n a_{grav} \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a_n} = \frac{\sin \theta}{g} \Rightarrow \alpha = 2.085^\circ$$

FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS

Número de Reynolds

$$N_R = l v \left(\frac{\rho}{\eta} \right)$$

ρ = massa volúmica do fluido ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

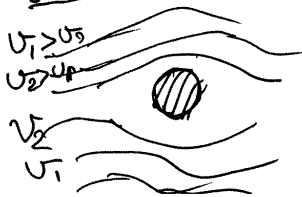
η = coeficiente de viscosidade do fluido ($\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$)

v = velocidade do corpo ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

l = tamanho do corpo (m)

@ $N_R \approx 0$ (muito menor que 100) fluxo laminar

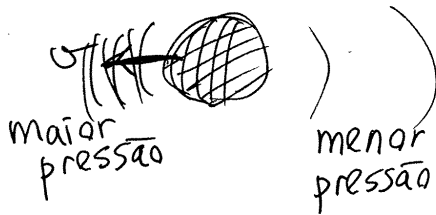
$v_2 = 0 \Rightarrow F_R$ proporcional a v e a η



O fluido "cola-se" ao corpo e a força é o resultado do atrito entre as camadas coladas ao corpo e as camadas em

⑥ N_R elevado (muito maior que 100)

\Rightarrow ~~F_R~~ F_R proporcional a U^2 e a ρ ○



a força é o resultado das diferenças de pressão, e a pressão é proporcional a U^2

Esfera de raio R ○

$$N_R \approx 0 \Rightarrow F_R = 6\pi\eta R U$$

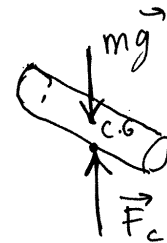
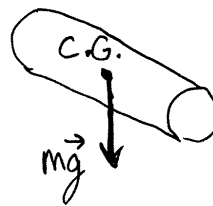
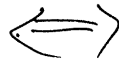
$$N_R \gg 100 \Rightarrow F_r = \frac{\pi}{4} \rho R^2 U^2$$

Aula 10, 24/3/2015

FORÇAS NUM CORPO RÍGIDO



Explicação



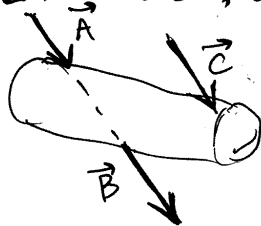
o peso e a força de contacto estão na mesma reta vertical

quando o peso e a força de contacto não podem estar na mesma reta vertical, não pode haver equilíbrio

\Downarrow

soma = $\vec{0}$

VETORES DESLIZANTES

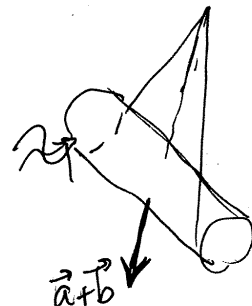
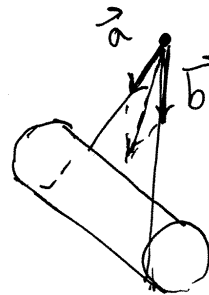
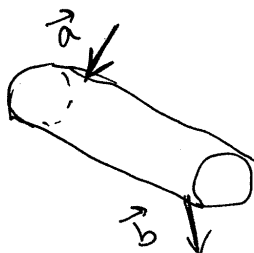


$\vec{A} = \vec{B}$

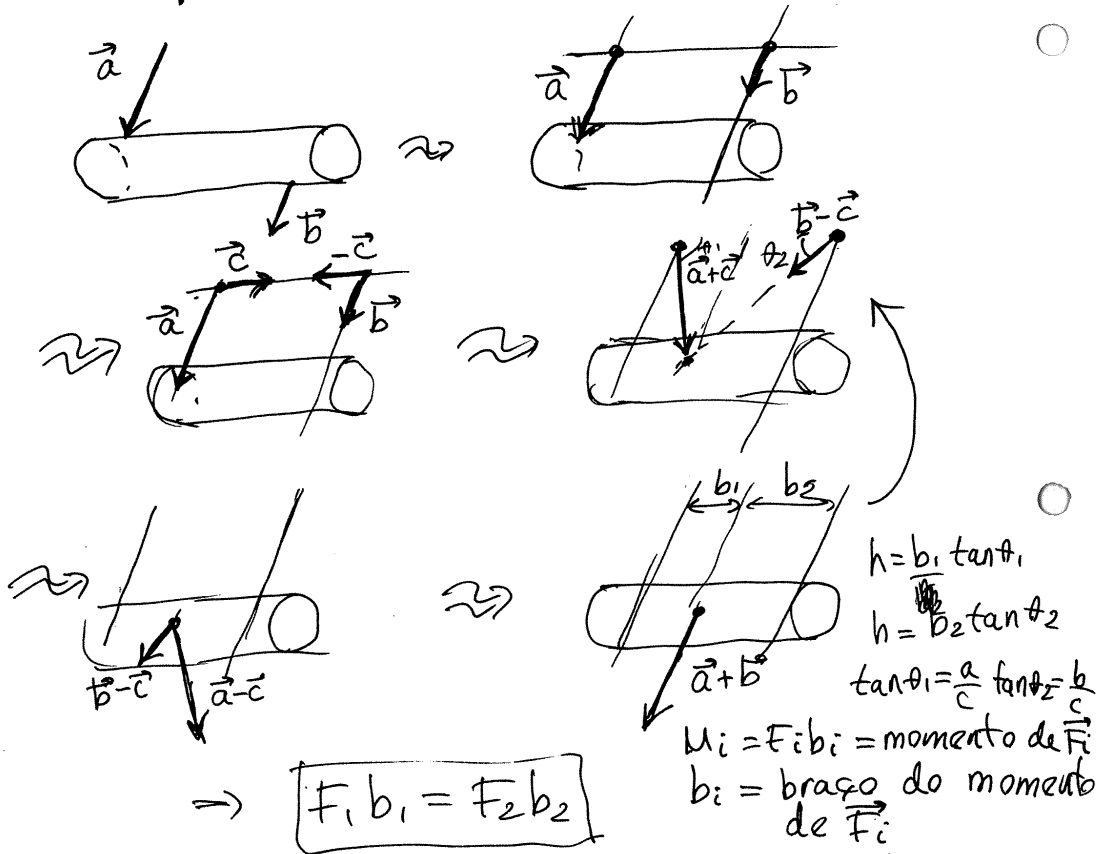
$\vec{A} \neq \vec{C}$

- módulo
- direção
- sentido
- linha de ação

adição

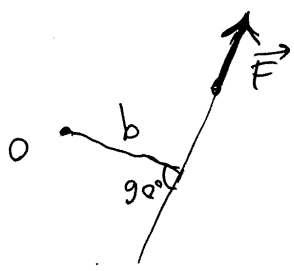


Forças paralelas $(\vec{a} \rightarrow \vec{F}_1, \vec{b} \rightarrow \vec{F}_2)$

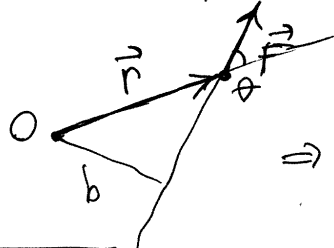


$\rightarrow F_1 b_1 = F_2 b_2$

VETOR MOMENTO



Momento de \vec{F} em relação a O = $M_O = b F$



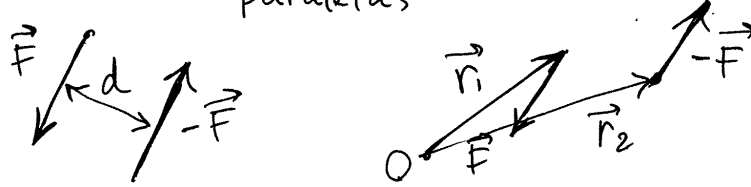
$b = r \sin \theta$
 $\Rightarrow M_O = r F \sin \theta$

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$|M_O| = |r| \times \text{projecção de } \vec{F} \perp \text{ a } \vec{r} = |F| \times \text{projec. de } \vec{r} \perp \text{ a } \vec{F}$

$\vec{M}_O = M_O \vec{k} \quad \left(M_O = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right)$

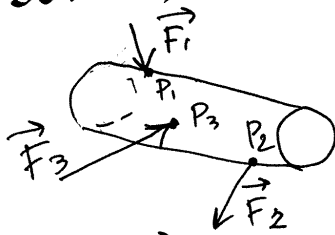
BINÁRIO. Duas forças iguais e opostas mas paralelas



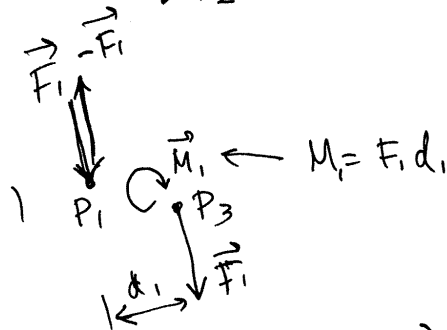
$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}$$

$\vec{M} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}$ independente do ponto de referência

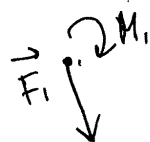
SOMA DE FORÇAS



- escolhe-se um ponto de referência (qualquer), por exemplo, P_3 .
- a cada força adiciona-se e subtrai-se um binário $(\vec{F}_i, -\vec{F}_i)$ desde P_i até P_3



- As forças \vec{F}_i e $-\vec{F}_i$ em P_i anulam-se, ficando \vec{F}_i em P_3 e o binário $M_i = F_i d$



- Faz-se o mesmo para todas as forças e ao final somam-se
- Se $\vec{M}_i \parallel \vec{F}_i$...

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

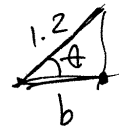
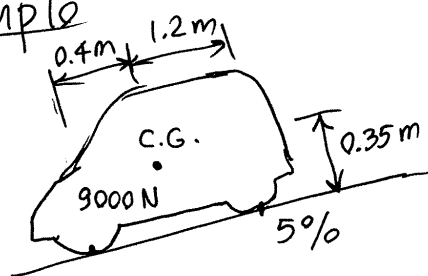
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO Aula 11. 27/3/2011

$$\vec{a} = \vec{0} \text{ e } \vec{L} = \vec{0} \quad (\vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ constantes})$$

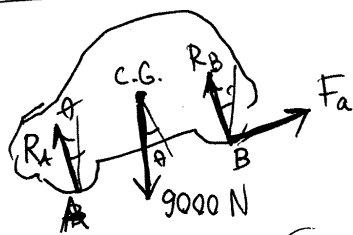
$$\Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases} \text{ (em relação a qualquer ponto)}$$

Exemplo



Determine as reações normais e a força de atrito nos pneus, quando o automóvel está parado e quando está em movimento com veloc. constante.

Resolução



$$\sum M_B: 1.6 R_A - 9000 \cos \theta = 0 \quad \times 1.2$$

$$\Rightarrow R_A = 9000 \left(\frac{100}{\sqrt{1025}} \right) \times 1.2$$

$$R_A = \frac{1.6 \cdot 3371}{3} = 6742 \text{ N} \quad \left(\frac{2809 \text{ N m}}{\text{cada pneu}} \right)$$

$$\sum M_A: 1.6 R_B - 0.4 \times 9000 \cos \theta = 0$$

$$R_B = \frac{0.4 \times 9000 \left(\frac{100}{\sqrt{1025}} \right)}{1.6} = \frac{R_A}{3} = 2247 \text{ N}$$

(1124 N m cada pneu)

$$\sum M_{CG}: 1.2 R_B + 0.35 F_a - 0.4 R_A = 0$$

$$B: M_p = \begin{vmatrix} -1.2 & 0.35 \\ -9000 \sin \theta & -9000 \cos \theta \end{vmatrix} = 1.2 \times 9000 \cos \theta + 0.35 \times 9000 \sin \theta$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{(1.2 \times 9000 + 5 \times 0.35 \times 9000) / \sqrt{1025}}{1.6} = 3420$$

$$\frac{R_A}{2} = 3420 \text{ N (em cada pneu)}$$

$$A: M_p = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -9000 \sin \theta & -9000 \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{(0.35 \times 5 - 40) 9000}{\sqrt{1025}}$$

$$R_B = \frac{(40 - 0.35 \times 5) 9000}{1.6 \sqrt{1025}} = 2149 \text{ N}$$

$$\frac{R_B}{2} = 1074 \text{ N}$$

$$CG: 1.2 R_B + 0.35 F_a - 0.4 R_A = 0$$

$$\Rightarrow F_a = \frac{0.4 R_A - 1.2 R_B}{0.35} = 449.4 \text{ N (nos 4 pneus??)}$$

~~Quando o automóvel está~~

Conferir: $R_A + R_B = 9000 \cos \theta$, $F_a = 9000 \sin \theta$

Quando o automóvel está em movimento, a resistência do ar faz diminuir F_a e o binário, em relação ao centro de gravidade, de $F_a + F_r$ é menor do que M_{F_a} em repouso

$\Rightarrow R_A$ diminui e R_B aumenta.

CENTRO DE MASSA

$$m = \int dm$$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$$

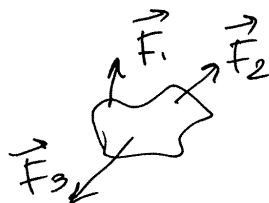
$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{v} dm$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{a} dm = \frac{1}{m} \int d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cm}}$$

TRANSLAÇÃO SEM ACELERAÇÃO ANGULAR

$\vec{\omega}$ varia, mas $\vec{w} = \text{constante}$



$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cm}$$

$$\sum M_{cm} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{em relação} \\ \text{a outros pontos} \end{array} \right)$$

ROTAÇÃO COM EIXO FIXO (eixo z)

$$\sum M_p = M_p(m\vec{a}_{cm})$$

$$d\vec{f} = (R\alpha \hat{e}_\theta - R\omega^2 \hat{R}) dm$$

coordenadas cilíndricas

$$dM_z = R|\hat{R} \times d\vec{f}| = R^2 \alpha dm$$

$$\rightarrow \int dM_z = \alpha \int R^2 dm$$

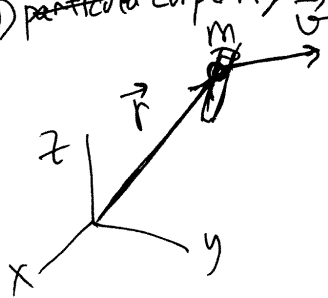
$$I_z = \int R^2 dm = \text{momento de inércia}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum M_{z,ext} = I_z \alpha}$$

Aula 12. 7/4/2015

TRABALHO E ENERGIA

1) partícula corpo rígido sem rotação



$$d\vec{r} = ds \hat{e}_t$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{s} \hat{e}_t$$

$$d\vec{v} = dv \hat{e}_t + v d\theta \hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n$$

Segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

\hat{e}_t resultante

$$\begin{cases} F_t = \vec{F} \cdot \hat{e}_t = ma_t \\ F_n = \vec{F} \cdot \hat{e}_n = ma_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = m(\vec{a} \cdot d\vec{r})$$

$$F_t ds = ma_t ds \quad \left(a_t = v \frac{dv}{ds} \right)$$

$$\Rightarrow F_t ds = m v \frac{dv}{ds} ds = m v dv$$

$$W_{12} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{integral de linha ao} \\ \text{longo da trajetória} \\ \text{uma curva qualquer} \end{array} \right)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{v_1}^{v_2} m v dv$$

$$W_{12}(\text{trajetória}) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

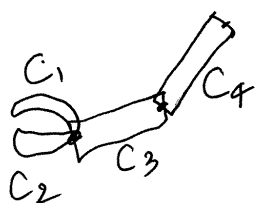
Teorema do trabalho e a energia cinética

- O trabalho realizado pela força resultante, ao longo da trajetória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.

ENERGIA CINÉTICA

• Partícula: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

• Sistema com vários corpos rígidos



$$E_c = \frac{1}{2} \int_{C_1} v^2 dm_1 + \dots + \frac{1}{2} \int_{C_+} v^2 dm_+$$

em cada corpo rígido:

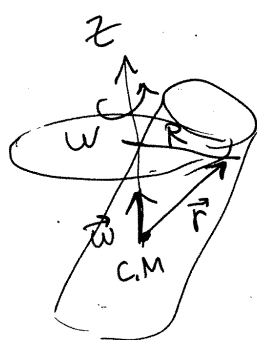
A diagram showing a rigid body rotating about a vertical axis with angular velocity $\vec{\omega}$. The center of mass is labeled C.M. and the velocity vector is \vec{U}_{CM} . The position vector from the center of mass to a point is \vec{R} . The velocity vector at that point is $\vec{U} = \vec{U}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{R}$. A note indicates that \vec{R} has its origin at the C.M.

$$\vec{U} = \vec{U}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

com origem no C.M.

$$\Rightarrow v^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = \vec{U}_{CM} \cdot \vec{U}_{CM} + (\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}) + 2 \vec{U}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$$= v_{CM}^2 + \omega^2 R^2 + 2 \vec{U}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

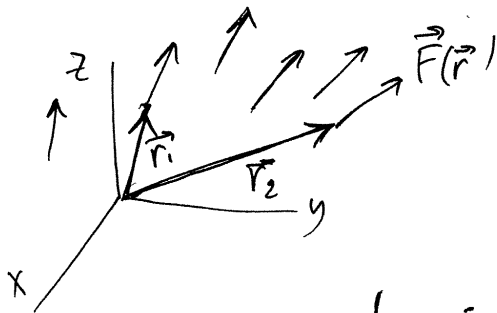


$$|\vec{\omega} \times \vec{R}| = \omega R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \int dm$$

Aula 13, 14/4/2015

FORÇAS CONSERVATIVAS



$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ não depende do percurso de integração}$$

Energia potencial, $U(\vec{r})$

- Escolhe-se um ponto de referência, \vec{r}_0 , onde

$$U(\vec{r}_0) = 0 \Rightarrow U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{U}(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

U tem unidades de força vezes distância (energia)

Exemplos

① O peso

$$\vec{P} = -mg\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg dz$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{P} \cdot d\vec{r} = - \int_{z_1}^{z_2} mg dz$$

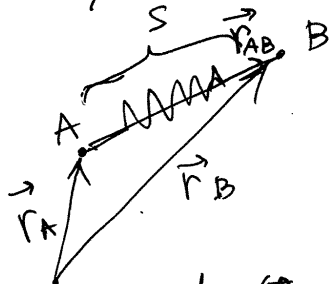
$$= +mg(z_1 - z_2)$$

\Rightarrow conservativa

$$U_g = + \int_{z_0}^z mg dz = +mgz$$

energia potencial gravítica = peso x altura

② Força elástica



$$\vec{F}_B = -k(|\vec{r}_B - \vec{r}_A| - l_0) \hat{e}_{AB}$$

$$\vec{F}_B = -s \hat{e}_s$$

$$\vec{F}_A = s \hat{e}_s \quad \leftarrow \text{alongamento}$$

$$dW_{\text{ext}} = \vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A + \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_B = \vec{F}_B \cdot (d\vec{r}_B - d\vec{r}_A)$$

$$= \vec{F}_B \cdot d(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

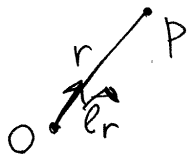
$$= \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_{AB}$$

$$= -k(s-s_0) ds$$

\Rightarrow conservativa

$$U_e = k \int_{s_0}^s (s-s_0) ds = k \int_0^{s-s_0} s' ds' = \frac{1}{2} k (s-s_0)^2$$

③ Forças centrais (gravitação universal, por exemplo)



$$\vec{F}_P = f(r) \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(r) dr \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \right)$$

\Rightarrow conservativa

$$U_{\infty}(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_c = - \int_{\infty}^r f(r) dr = -P(r) + P(\infty)$$

\uparrow
primitiva de r .

TEOREMA DE ENERGIA MECÂNICA

$$W_{12} = \int_1^2 \left(\sum_{\text{ext } k} \vec{F}_k \right) \cdot d\vec{r} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_{i,ext} \cdot d\vec{r} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$\underbrace{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m}_{\text{conservativas}}, \underbrace{\vec{F}_{m+1}, \dots, \vec{F}_n}_{\text{n\~{a}o-conservativas}}$$

$$\Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = W_{\text{conserv. n\~{a}o}} + \sum_{i=1}^m \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

$$= W_{\text{n\~{a}o-conserv.}} + \sum_{i=1}^m (U_{i1} - U_{i2})$$

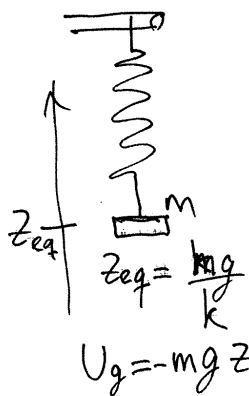
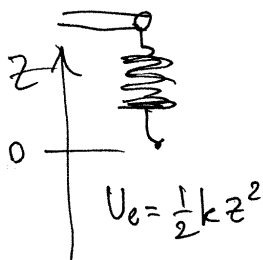
$$\Rightarrow (E_{c2} + \sum_i U_{i2}) - (E_{c1} + \sum_i U_{i1}) = W_{\text{n\~{a}o-cons.}}$$

Energia mec\~{a}nica $E_m = E_c + \sum_{i=1}^m U_i$

O aumento da energia mec\~{a}nica \u00e9 igual ao trabalho das for\u00e7as n\~{a}o conservativas ao longo da trajet\u00f3ria.

conserva\u00e7\~{a}o da energia mec\~{a}nica. Quando o trabalho das for\u00e7as n\~{a}o conservativas \u00e9 nulo, a energia mec\~{a}nica permanece constante.

OSCILADOR HARM\u00d3NICO SIMPLES



$$s = z - z_{eq}$$

$$U = U_e + U_g$$

$$= \frac{1}{2} k z^2 - mgz$$

$$= \frac{1}{2} k (s + z_{eq})^2 - mg(s + z_{eq})$$

$$= \frac{1}{2} k s^2 + k s z_{eq} + \frac{k}{2} z_{eq}^2 - mg s - mg z_{eq}$$

$$= \frac{1}{2} k s^2 + \text{constante}$$

Aula 15, 21/4/2015

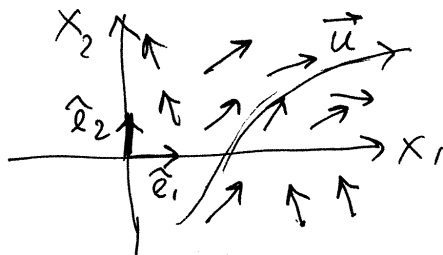
SISTEMAS DINÂMICOS

Em duas dimensões: Sistema descrito por duas variáveis de estado, $x_1(t), x_2(t)$ que são funções do tempo, e duas equações de evolução

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

f_1, f_2 são duas funções contínuas definidas em qualquer ponto do espaço de fase (x_1, x_2)

$\vec{u} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 =$ velocidade de fase
define o campo de direções



Pontos de equilíbrio: pontos do espaço de fase onde $f_1 = f_2 = 0$.

Em qualquer ponto que não seja ponto de equilíbrio, passa uma única curva de evolução.

Caso particular \rightarrow equação diferencial de 2ª ordem (autônoma)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

define-se $y = \dot{x}$. O espaço de fase é então

$$(x, y), \vec{u} = (y, f), \text{ eq. de evolução} = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS

Existe uma função $H(x_1, x_2)$ (hamiltoniana) que define todas as possíveis curvas de evolução
 $H(x_1, x_2) = \text{constante}$ (cada constante corresponde a uma possível curva de evol.)

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow f_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

\Rightarrow o vetor $(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2})$ é perpendicular a \vec{u}

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equações} \\ \text{de evolução} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

\Rightarrow Se um sistema dinâmico, com 2 dimensões, é conservativo, a sua divergência, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ é nula

Exemplo. Um objeto de massa 0,3 kg sujeito a uma força resultante $F_t = -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25$

$$\Rightarrow a_t = -\frac{5}{3}s^4 + \frac{40}{3}s^3 - 5s^2 - \frac{320}{3}s + \frac{250}{3} = \ddot{s}$$

torques \Rightarrow variáveis de estado: (s, v)

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\frac{5}{3}s^4 + \frac{40}{3}s^3 - 5s^2 - \frac{320}{3}s + \frac{250}{3} \end{cases}$$

velocidade de fase:

$$u = \left(v, -\frac{5}{3}s^4 + \frac{40}{3}s^3 - 5s^2 - \frac{320}{3}s + \frac{250}{3} \right)$$

Divergência = $0 + 0 = 0 \Rightarrow$ CONSERVATIVO

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial v} = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{5}{3}s^4 + \frac{40}{3}s^3 - 5s^2 - \frac{320}{3}s + \frac{250}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = \frac{5}{3} \frac{v^2}{2} + \frac{10}{3}s^4 + \frac{5}{3}s^3 + \frac{160}{3}s^2 - \frac{250}{3}s + h(v)$$

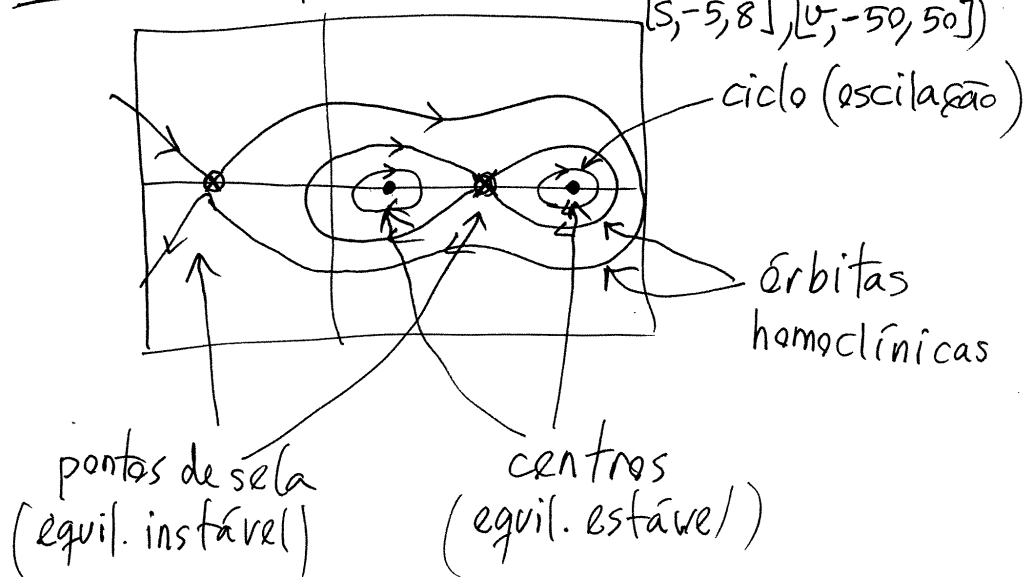
$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{dh}{dv} = v \Rightarrow h = \text{constante}^{v^2/2, +} \text{ (pode ser 0)}$$

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{3}s^4 - \frac{10}{3}s^3 + 5s^2 - \frac{250}{3}s + h(v) \quad \left(\begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{mecânica} \\ \text{por unidade} \\ \text{de massa} \end{array} \right)$$

Pontos de equilíbrio (4 pontos)

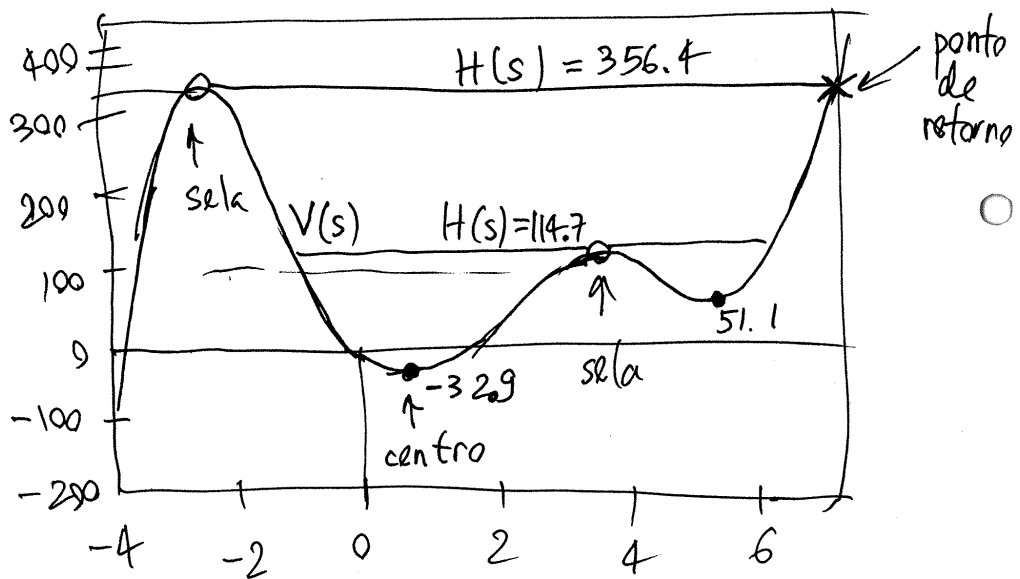
$$v=0 \quad e \quad (s=-2.65 \quad v \quad s=0.81 \quad v \quad s=3.95 \quad v \quad s=5.89)$$

Retrato de fase $\text{plot}(df([v, (-5*s^4 + \dots)/3], [s, v], [s, -5, 8], [v, -50, 50])$



mostrar trajetórias em: $(7.3571, 0) \leftarrow n=220$
 (e curvas de evolução $(6.6713, 0) \leftarrow n=65$ ○
 $(-0.9009, 0) \leftarrow n=108$

GRÁFICO DE ENERGIAS (fig. 7.3)



Aula 14 ANÁLISE GRÁFICA

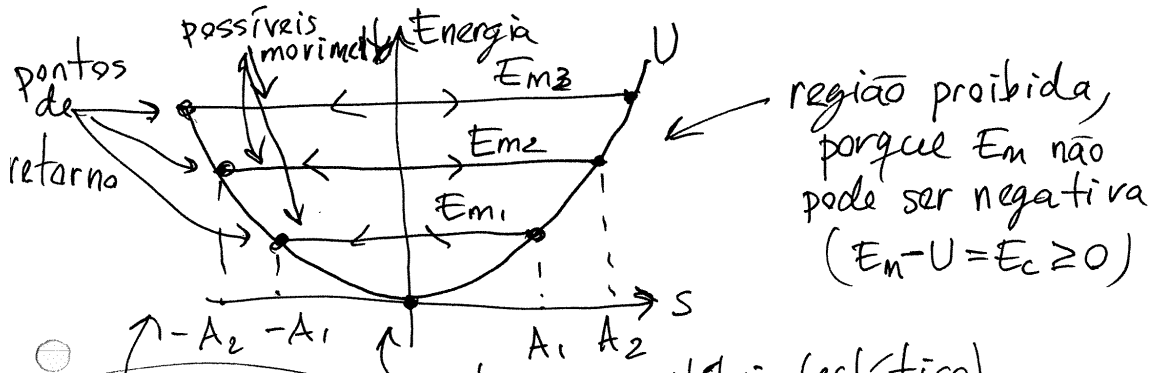
17/4/2015

~~GRÁFICO DE ENERGIAS~~

●

oscilador harmônico

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 \quad (\text{aproximadamente constante})$$



●

Gráfico de energias

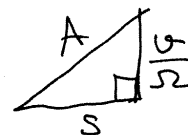
ponto de equilíbrio (estático)

Nos pontos de retorno

$$\begin{cases} v=0 \Rightarrow E_c=0 & E_m = U = \frac{1}{2} k A^2 \\ s=A & (\text{amplitude}) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

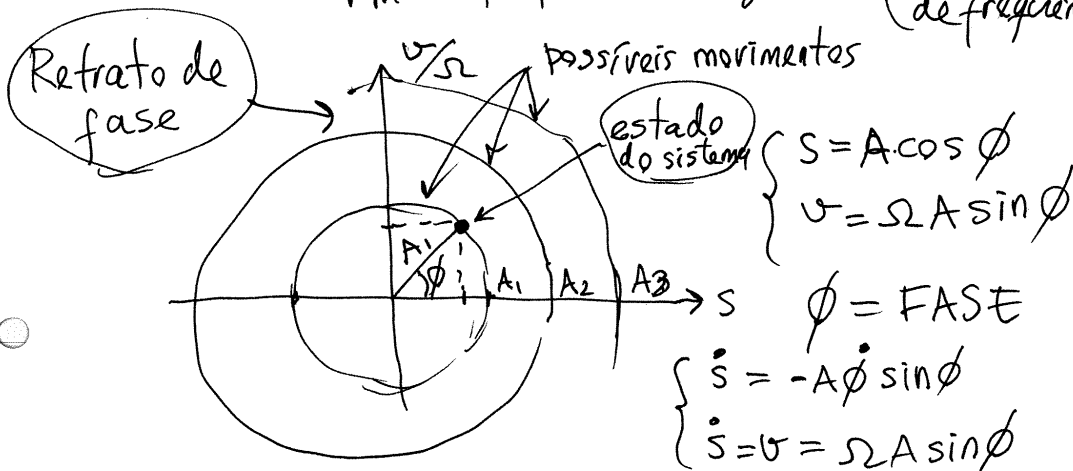
●

$$s^2 + \left(\frac{v}{\Omega}\right)^2 = A^2$$



onde $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = frequência angular (em unidades de frequência)

●



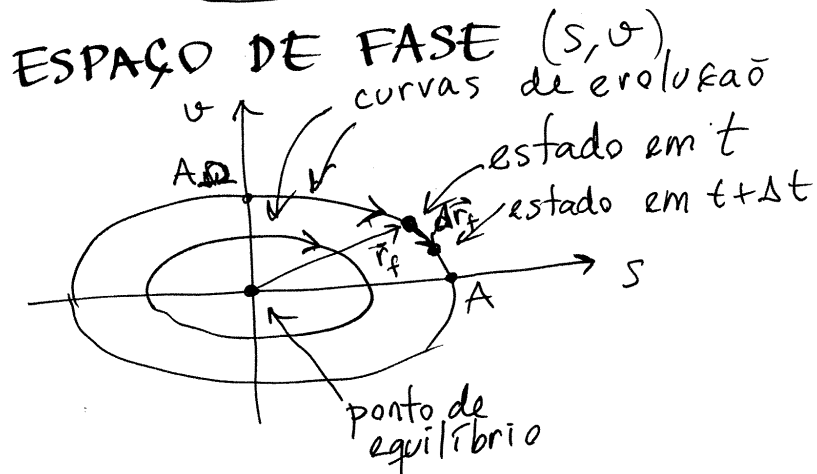
$$\Rightarrow \dot{\phi} = -\Omega = \text{constante}$$

O ponto que representa o estado do sistema roda numa circunferência de raio A , no sentido horário e com velocidade angular Ω constante.

arbitrando $t=0$ quando $\phi=0 \Rightarrow \phi = -\Omega t$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = A \cos(\Omega t) \\ v = -A\Omega \sin(\Omega t) \\ a_t = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) \end{cases}$$

solução do
O. H. S.



posição no espaço de fase: $\vec{r}_f = s\hat{e}_1 + v\hat{e}_2$

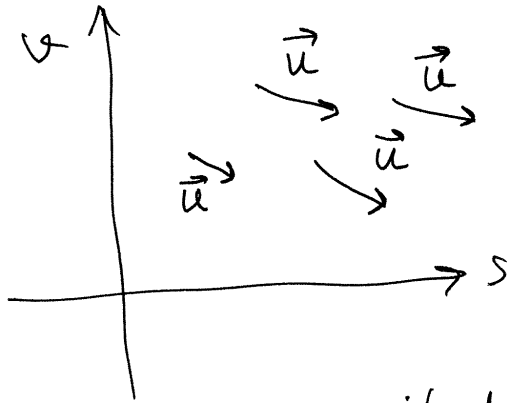
deslocamento no intervalo Δt : $\Delta\vec{r}_f = \Delta s\hat{e}_1 + \Delta v\hat{e}_2$

velocidade de fase:

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_f}{\Delta t} = \dot{s}\hat{e}_1 + \dot{v}\hat{e}_2$$

$$\vec{u} = v\hat{e}_1 + a_t\hat{e}_2$$

Campo de direções (sistemas autônomos)



basta saber
a expressão
de a_t em
função de
 s e v .

No caso do oscilador harmônico
simples:

$$U = \frac{1}{2}ks^2 \Rightarrow F_{res.} = -\frac{dU}{ds} = -ks$$

$$(= -kz - mg)$$

$$a_t = \frac{F_{res.}}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dU}{ds} = -\Omega^2 s$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = (v, -\Omega s)}$$

Oscilador harmônico amortecido

resistência do ar

$$F_{res.} = -ks - c v |v|$$

$$\Rightarrow a_t = -\Omega s - \frac{c}{m} v |v| \quad \boxed{\vec{u} = (v, -\Omega s - \frac{c}{m} v |v|)}$$

Num caso particular, $\Omega = 0.5$, $\frac{c}{m} = 0.01$,
o programa `plotdf` pode usar-se para
mostrar o campo de direções

$$\text{plotdf}([v, -0.5*s], [s, v])$$

$$\text{plotdf}([v, -0.5*s - 0.01*v*abs(v)], [s, v], [\text{direction}, \text{forward}])$$

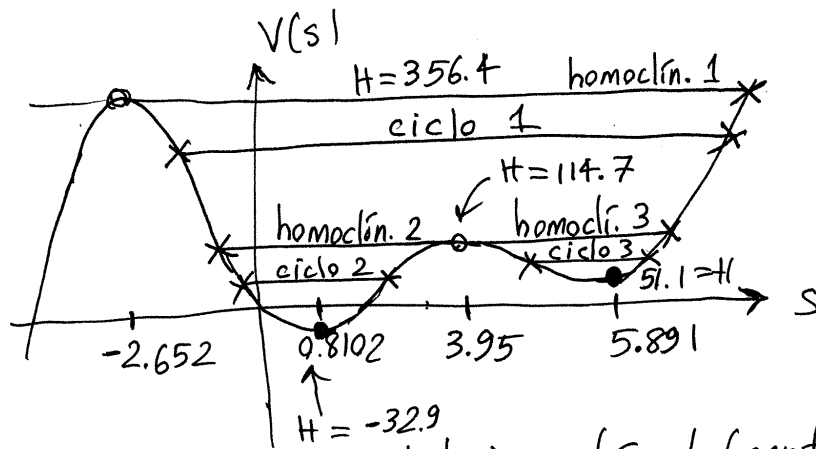
Aula 16, 2015-04-2

Exemplo da aula anterior

$$H(s, \dot{s}) = \frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{1}{3} (s^5 - 10s^4 + 5s^3 + 160s^2 - 250s) = \text{const.}$$

↑
energia cinética
por unidade de
massa

↖ energia potencial
por unidade de
massa = V(s)



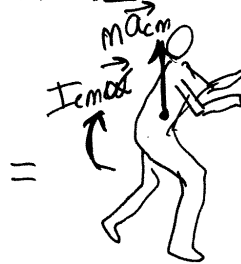
Nos mínimos → equilíbrio estável (centro)
Nos máximos → equilíbrio instável (ponto de sela)

MECÂNICA HAMILTONIANA

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \dot{s}} \\ \dot{\dot{s}} = -\frac{\partial H}{\partial s} \end{cases}$$

muito mais simples do
que a mecânica vetorial,
mas a segunda variável
de estado nem sempre é \dot{s}

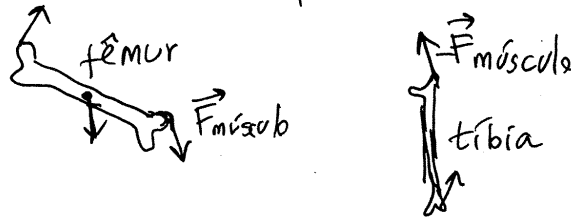
MECÂNICA VETORIAL



$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cm}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = I_{cm} \vec{\alpha}$$

- Limitações
- Algumas forças externas (R_n) são uma reação a alguma causa interna para descobri-las há que analisar cada parte interna por separado



- apenas válida em sistemas inerciais (em sistemas não inerciais há que introduzir pseudo forças)

MECÂNICA LAGRANGIANA

Coordenadas generalizadas:

$$\{q_1, q_2, \dots, q_n\} \quad n = \text{número de graus de liberdade.}$$

Variáveis necessárias para descrever a configuração do sistema a cada instante (q_i é função de t).

Velocidades generalizadas

A cada coordenada generalizada q_i está associada uma velocidade generalizada \dot{q}_i .

Estado do sistema (no espaço de fase de dimensão $2n$)

$$\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$$

Se o sistema é composto por vários corpos, cada corpo tem energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \text{função de } q_i \text{ e } \dot{q}_i$$

Equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

E_c = energia cinética total do sistema.

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \text{força generalizada}$$

\vec{r}_i = ponto de aplicação da força \vec{F}_i

- A vantagem é que não é necessário incluir forças de ligação, mas sim as forças internas
- As n equações de Lagrange permitem encontrar as n equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = f_1(q_i, \dot{q}_i) \\ \ddot{q}_2 = f_2(q_i, \dot{q}_i) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n = f_n(q_i, \dot{q}_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = v_1, \quad \dot{v}_1 = f_1(q_i, v_i) \\ \dot{q}_2 = v_2, \quad \dot{v}_2 = f_2(q_i, v_i) \\ \vdots \\ \dot{q}_n = v_n, \quad \dot{v}_n = f_n(q_i, v_i) \end{cases}$$

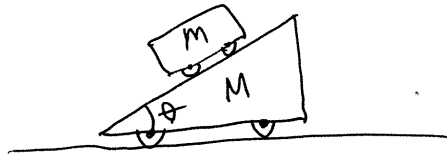
(em equações de evolução)

~~Exemplo~~ Forças conservativas

$$Q_j = \vec{F}_{\text{cons.}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = -\vec{\nabla} U \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

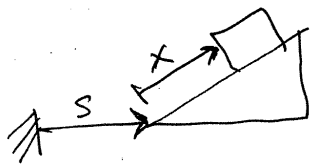
$$\Rightarrow \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_j^{\text{não cons.}} \right|$$

Exemplo 8.1



- Energia cinética das rodas desprezável
- Energia dissipada por atrito e resistência do ar desprezável.

Dois graus de liberdade: s, x



deslocamento horizontal do plano inclinado

deslocamento do carrinho sobre o plano inclinado

velocidades generalizadas: \dot{s} = velocidade do plano inclinado

\dot{x} = vel. do carrinho, relativa ao plano inclinado.

$$U = mgx \sin\theta \quad (+ \text{constantes})$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\text{plano}}^2 + \frac{1}{2} m v_{\text{carrinho}}^2 \quad (\text{apenas translações})$$

$$\vec{v}_{\text{plano}} = \dot{s} \hat{i}$$

$$\vec{v}_{\text{carr/plano}} = \dot{x} \cos\theta \hat{i} + \dot{x} \sin\theta \hat{j} \quad (|\vec{v}_{c/p}| = |\dot{x}|)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\text{carrinho}} = \vec{v}_{\text{carr/plano}} + \vec{v}_{\text{plano}} = (\dot{s} + \dot{x} \cos\theta) \hat{i} + \dot{x} \sin\theta \hat{j}$$

$$v_{\text{carrinho}}^2 = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta)$$

coordenada x :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = mg \sin \theta \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + \dot{s} \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} + m \ddot{s} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{s} \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

coordenada s :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = M \dot{s} + m \dot{s} + m \dot{x} \cos \theta$$

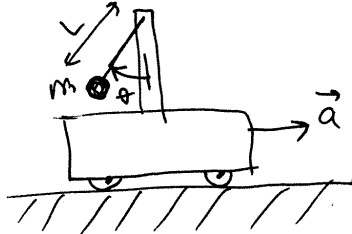
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) = M \ddot{s} + m \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \Rightarrow (M+m) \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \theta = 0$$

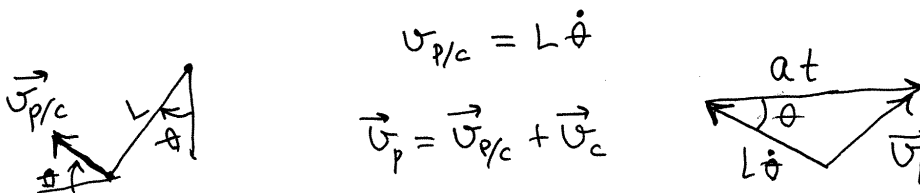
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = - \frac{(M+m) g \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} & (\text{constante e negativa}) \\ \ddot{s} = \frac{m g \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} & (\text{constante e positiva}) \end{cases}$$

Aula 17, 2015-04-28

Exemplo 8.4

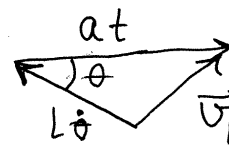


pêndulo simples, de massa m e comprimento L , num carrinho com aceleração horizontal constante \vec{a} .



$$v_{p/c} = L\dot{\theta}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{p/c} + \vec{v}_c$$



$$\Rightarrow v_p^2 = a^2 t^2 + L^2 \dot{\theta}^2 - 2aL\dot{\theta}t \cos\theta$$

energia da esfera de massa m :

$$E_c = \frac{m}{2} (a^2 t^2 + L^2 \dot{\theta}^2 - 2aL\dot{\theta}t \cos\theta)$$

$$U_g = -mgL \cos\theta$$

Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U_g}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (mL^2 \dot{\theta} - maLt \cos\theta) + mgL \sin\theta = 0$$

$$mL^2 \ddot{\theta} - maL \cos\theta + maL \dot{\theta} \sin\theta - maL \dot{\theta} \sin\theta + mgL \sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{a}{L} \cos\theta - \frac{g}{L} \sin\theta} \quad \text{equação de movimento}$$

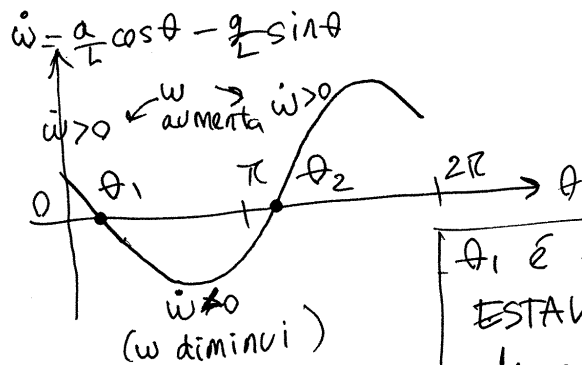
equações dinâmicas de evolução

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{a}{L} \cos\theta - \frac{g}{L} \sin\theta \end{cases}$$

pontos de equilíbrio

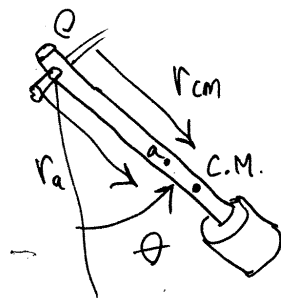
$$\begin{cases} \dot{w} = 0 \\ \frac{a}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{g} (> 0) \end{cases}$$

dois pontos, no 1º e 3º quadrantes



θ_1 é ponto de equilíbrio ESTÁVEL e θ_2 ponto de equilíbrio INSTÁVEL

EXEMPLO 8.5



pêndulo físico, incluindo a resistência do ar

$I_{cm} \ddot{\theta} = -m g r_{cm} \sin \theta$ (raio de giração)

$U_{cm} = r_{cm} \dot{\theta}$

força de resistência do ar $\vec{F}_r = -C (\vec{v}_{cm}) |\vec{v}_{cm}|$ atua no ponto a (centro aerodinâmico)

$$E_c = \frac{1}{2} m U_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (m r_{cm}^2 + I_{cm}) \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 \text{ (teorema de eixos paralelos)}$$

I_0 pode ser escrito:

$$I_0 = m r_g^2 \text{ onde } r_g = \text{raio de giração}$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot{\theta}^2$$

- No exemplo da aula TP7, $m = 293 \text{ g}$
 $r_{cm} = 63.5 \text{ cm}$
 $I_o = 0.1449 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 $\Rightarrow r_g = 70.3 \text{ cm}$

Energia potencial gravítica

$$U_g = -m g r_{cm} \cos \theta$$

Força generalizada

$$Q_\theta = \vec{F}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial \theta} \quad \begin{array}{c} \vec{r}_a \\ \theta \\ \partial s \end{array} \quad \vec{F}_r \cdot \partial \vec{r}_a = -c |\vec{v}| ds = -c |\vec{v}| r_a \partial \theta$$

$$\Rightarrow Q_\theta = -c |\vec{v}| r_a = -c r_{cm}^2 r_a |\dot{\theta}| \theta$$

Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U_g}{\partial \theta} = Q_\theta$$

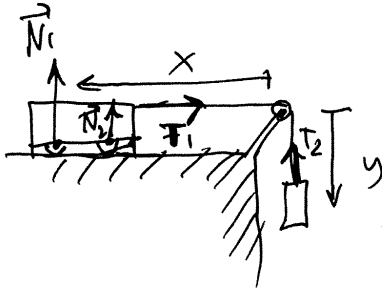
$$m r_g^2 \ddot{\theta} + m g r_{cm} \sin \theta = -c r_{cm}^2 r_a |\dot{\theta}| \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{(r_g^2/r_{cm})} \sin \theta - \frac{c}{m} \left(\frac{r_{cm}^2 r_a}{r_g^2} \right) |\dot{\theta}| \theta$$

eq.
de
moviments

Aula 18, 2015-05-12

FORÇAS DE LIGAÇÃO



As forças T_1, T_2, N_1 e N_2 são forças de ligação que fazem diminuir os graus de liberdade, ficando unicamente x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Para encontrar uma força de ligação, por exemplo T_1 e T_2 , há que escrever a respetiva condição de ligação igual a zero:

$$f = x + y - k = 0$$

admitir que as respetivas variáveis (x e y) são independentes e acrescentar um multiplicador de Lagrange às equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \leftarrow \text{Tensão } T_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \leftarrow \text{Tensão } T_2$$

Neste caso, como $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \Rightarrow T_1 = T_2 = \lambda$
(porque está a ser ignorada a soldana)

SISTEMAS LINEARES

A velocidade de fase é uma combinação linear das variáveis de estado.

Em duas dimensões, um sistema dinâmico geral é:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Um sistema linear é caracterizado por 4 variáveis reais $A_{11}, A_{12}, A_{21},$ e A_{22} :

$$\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2$$

$$\dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2$$

ou de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ainda pode ser considerada uma equação vetorial

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = A \vec{r}$$

onde $\vec{r} = (X_1, X_2)$ é a posição no espaço de fase e A é um operador linear $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

velocidade de fase

$$\vec{u} = A \vec{r} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

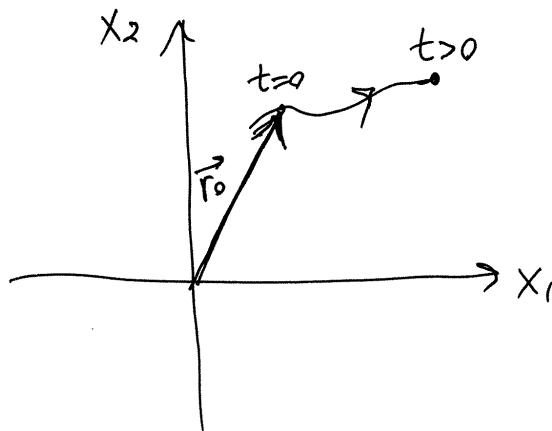
Pontos de equilíbrio

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

existe, pelo menos, a solução $X_1=0, X_2=0$.
Se $\det(A) \neq 0$, existem infinitas soluções.

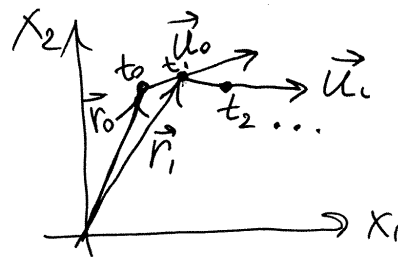
Como $\det(A) \neq 0$ pode ser considerado um sistema dinâmico em apenas uma dimensão e não duas, conclui-se: ~~o único ponto de equilíbrio num~~

Os sistemas dinâmicos lineares ~~é a origem~~ têm um único ponto de equilíbrio, na origem.



Se o estado inicial \vec{r}_0 for diferente de zero, então o sistema evolui seguindo uma curva de evolução.

Para calcular $\vec{r}(t)$, divide-se t em n intervalos $\Delta t = \frac{t}{n}$ e calcula-se \vec{r} , aproximadamente, em cada subintervalo.



$$\vec{r}_1 = \vec{r}\left(\frac{t}{n}\right) \approx \vec{r}_0 + \frac{t}{n} \vec{u}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 \approx \vec{r}_0 + \frac{t}{n} A \vec{r}_0$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}\left(\frac{2t}{n}\right) \approx \vec{r}_1 + \frac{t}{n} \vec{u}_1$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 \approx \vec{r}_1 + \frac{t}{n} A \vec{r}_1$$

$$\dots \vec{r}_n = \vec{r}(t) \approx \vec{r}_{n-1} + \frac{t}{n} A \vec{r}_{n-1}$$

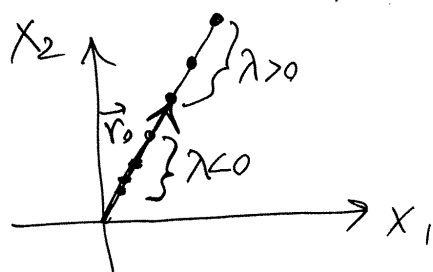
VETORES PRÓPRIOS

$$A \vec{r}_p = \lambda \vec{r}_p$$

\uparrow vetor próprio \nwarrow valor próprio

$A \vec{r}_p$ tem a mesma direção que \vec{r}_p (e o mesmo sentido, se $\lambda > 0$, ou sentido oposto, se $\lambda < 0$; $\lambda \neq 0$, porque $\vec{r}_p \neq \vec{0}$)

Se o estado inicial, \vec{r}_0 , for vetor próprio de A ,



$$\vec{r}_n \approx \vec{r}_{n-1} + \frac{t}{n} \lambda \vec{r}_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r}_n &\approx \left(1 + \frac{t}{n} \lambda\right) \vec{r}_{n-1} \\ &\approx \left(1 + \frac{t}{n} \lambda\right)^2 \vec{r}_{n-2} \\ &\vdots \\ &\approx \left(1 + \frac{t}{n} \lambda\right)^n \vec{r}_0 \end{aligned}$$

No limite $n \rightarrow \infty$, o resultado é exato:

$$\vec{r}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t\lambda}{n}\right)^n \vec{r}_0 = e^{\lambda t} \vec{r}_0$$

O estado evolui na mesma direção de \vec{r}_0 !
(mesmo sentido, se $\lambda > 0$, ou aproximando-se da origem, se $\lambda < 0$)

VALORES PRÓPRIOS

$$A\vec{r}_0 = \lambda\vec{r}_0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{r}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são existem soluções $\lambda \neq 0$ se:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - A_{11})(\lambda - A_{22}) + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - \text{tr}A \lambda + \det A = 0}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} A \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

VALORES PRÓPRIOS COMPLEXOS

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\Omega \\ \lambda_2 = \alpha - i\Omega \end{cases} \quad (\Omega > 0, \alpha \text{ positiva, negativa} \\ \text{ou zero})$$

Solução no plano complexo. Se \vec{z}_0 é vetor próprio,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{z} &= \vec{z}_0 e^{(\alpha + i\Omega)t} = (\vec{a}_0 + i\vec{b}_0) (e^{\alpha t} (\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t))) \\ &= e^{\alpha t} ((\vec{a}_0 \cos(\Omega t) - \vec{b}_0 \sin(\Omega t)) + i(\vec{a}_0 \sin(\Omega t) + \vec{b}_0 \cos(\Omega t))) \end{aligned}$$

As partes real e imaginária de \vec{z} também devem ser soluções do sistema. Como tal, existem duas soluções reais: linearmente independentes:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{a}_0 e^{\alpha t} \cos(\Omega t) - \vec{b}_0 e^{\alpha t} \sin(\Omega t) \\ \vec{r}_2 = \vec{a}_0 e^{\alpha t} \sin(\Omega t) + \vec{b}_0 e^{\alpha t} \cos(\Omega t) \end{cases}$$

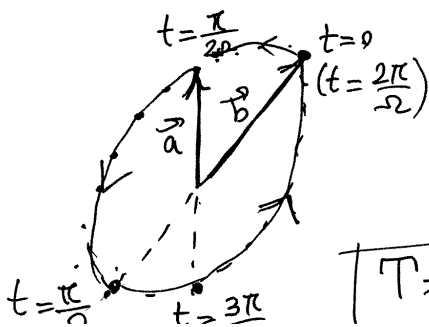
que são realmente a mesma solução, mudando o valor de t_0 , porque

$$\begin{cases} \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\Omega t) \\ \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\Omega t) \\ e^{\alpha t + \pi/2} = \text{constante} \times e^{\alpha t} \end{cases}$$

CENTROS

$$\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\Omega$$

solução geral: $\vec{r} = \vec{a} \sin(\Omega t) + \vec{b} \cos(\Omega t)$



As curvas de evolução são elipses com semieixos \vec{a} e \vec{b} ($\vec{a} + i\vec{b}$) é vetor próprio. Percorridas com período

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow \Omega = |\lambda| = \text{FREQUENCIA ANGULAR}$$

FOCOS

$$\lambda = \alpha \pm i\Omega$$

$$\vec{r} = e^{\alpha t} (\vec{a} \sin(\Omega t) + \vec{b} \cos(\Omega t))$$

$\Rightarrow \vec{r}$ = espiral com frequência angular Ω e amplitude crescente, se $\alpha > 0$, ou decrescente se $\alpha < 0$.

SISTEMAS LINEARES CONSERVATIVOS

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ \dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = A_{11} + A_{22} = \text{tr} A$$

$$\text{sistema linear conservativo} \iff \text{tr} A = 0$$

\Rightarrow O ponto de equilíbrio pode ser centro ou ponto de sela.

SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES

Com um grau de liberdade e eq. de movimento autônoma, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v) = C_x x + C_v v \end{cases} \quad (C_x \text{ e } C_v \text{ são constantes})$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_x & C_v \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \text{tr} A = C_v \\ \det A = -C_x \end{cases}$$

existem 2 sistemas lineares conservativos ($C_v = 0$)

(a) Oscilador Harmônico, $C_x = -\Omega^2 < 0$ (centro)

(b) Oscilador invertido, $C_x > 0$ (ponto de sela)

Aula 19, 2015-05-15

Exemplo. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 - 6 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} + \Delta \\ \lambda_2 = \frac{5}{2} - \Delta \end{cases} \leftarrow \text{discriminante}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{25}{4} - \Delta^2 = -2 \Rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{25}{4} + 2} > \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2} < 0 \end{cases}$$

VETORES PRÓPRIOS

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

basta resolver uma das equações, porque são equivalentes

(i) $\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$: $(1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2})x_1 + 2x_2 = 0$

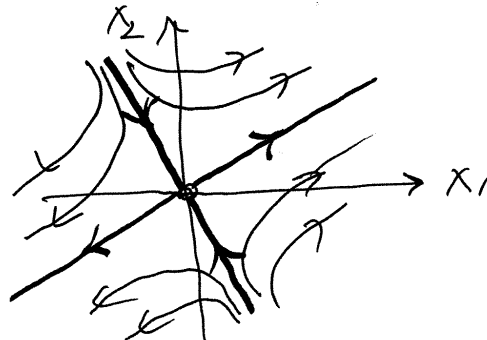
$$x_2 = \frac{\sqrt{33} + 3}{4} x_1 \quad (\text{reta com declive positivo que passa pela origem})$$

(ii) $\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$: $3x_1 + (4 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2})x_2 = 0$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{33} + 3}{6} x_2 \quad (\text{declive negativo no plano } (x_1, x_2))$$

Retrato de fase

$$\vec{r} = \vec{r}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{r}_2 e^{\lambda_2 t}$$

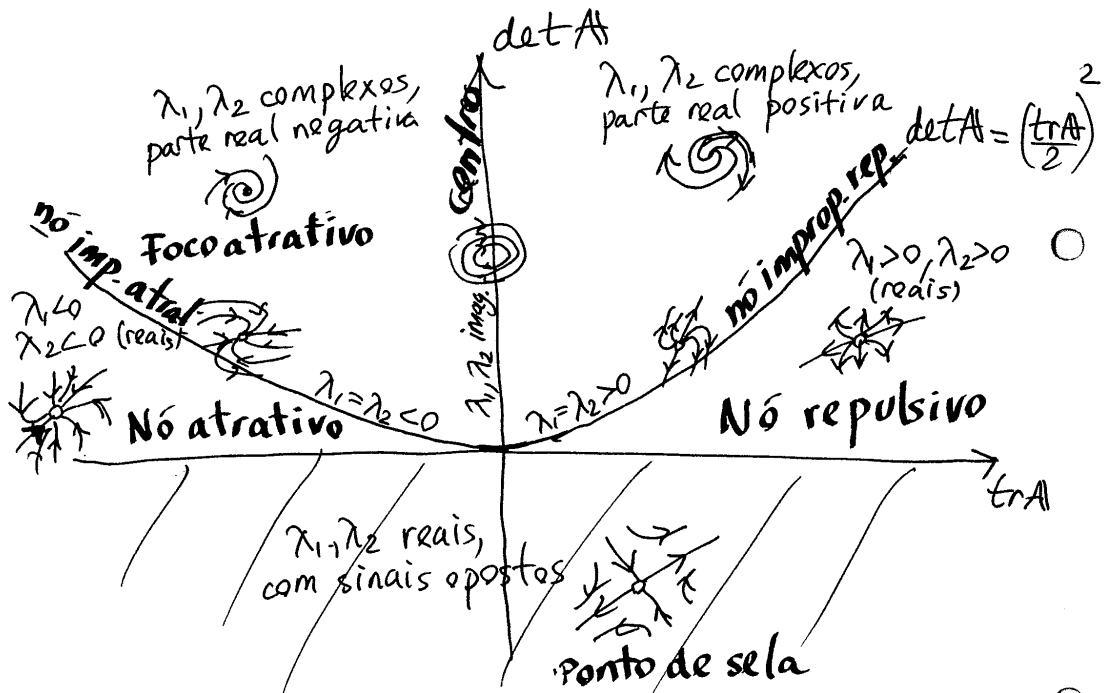


$$\lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}A}{2} + \Delta \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}A}{2} - \Delta \end{cases}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2 - \Delta^2 = \det A$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}$$

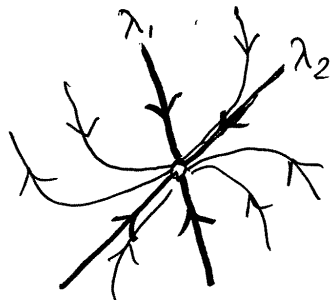


$\det A < 0 \Rightarrow$ ponto de sela

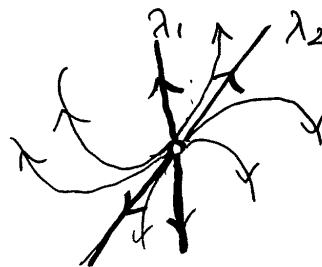
$(\det A > 0) \wedge (\text{tr}A \leq 0) \Rightarrow$ sistema estável

NÓS $\vec{r} = \vec{r}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{r}_2 e^{\lambda_2 t}$

(λ_1, λ_2 reais, com o mesmo sinal)



atrativo ($\lambda_1 > \lambda_2$)



repulsivo ($\lambda_1 > \lambda_2$)

Aula 20, 2015-05-19

OSCILADOR AMORTECIDO

$$\ddot{s} = -\Omega^2 s - \alpha \dot{s} \quad (\text{amortecimento viscoso})$$

$\alpha > 0$



amortecedor de automóvel.
Mola elástica com cilindro com pistão que se desloca dentro de óleo.

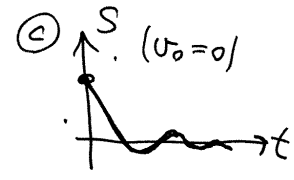
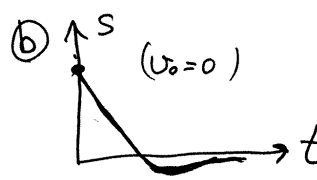
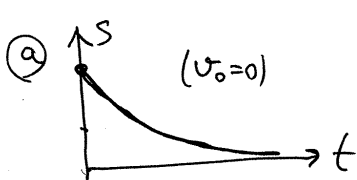
$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\Omega^2 s - \alpha v \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr} A &= -\alpha < 0 \\ \det A &= \Omega^2 \\ &(\text{sistema estável}) \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \Omega^2}$$

- Ⓐ $\frac{\alpha}{2} > \Omega$. Nó atrativo. Amortecimento forte
- Ⓑ $\frac{\alpha}{2} = \Omega$. Nó impróprio atrativo. Amortecimento crítico
- Ⓒ $\frac{\alpha}{2} < \Omega$. Foco atrativo. Amortecimento fraco



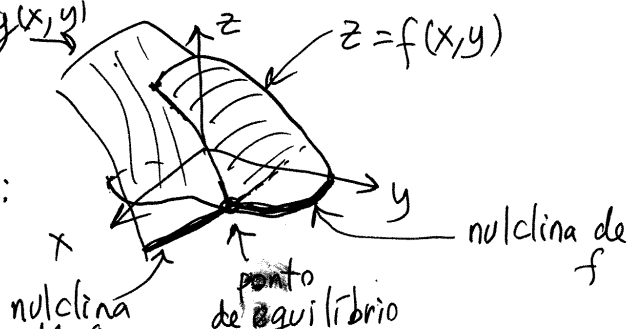
se s chega a ser zero, é tempo de mudar o amortecedor

SISTEMAS NÃO LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

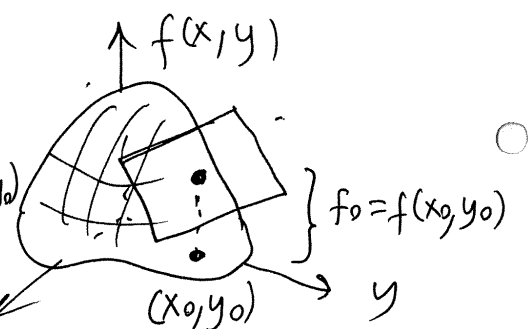
pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$



APROXIMAÇÃO LINEAR

Plano tangente

$$f(x, y) \approx f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$


A aproximação é melhor, quanto menor sejam $(y - y_0)$ e $(x - x_0)$

Se (x_0, y_0) for ponto de equilíbrio, $f_0 = f(x_0, y_0) = 0$

$$\Rightarrow f(x, y) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} X_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} X_2 \quad \begin{cases} X_1 = x - x_0 \\ X_2 = y - y_0 \end{cases}$$

o mesmo para g :

$$g(x, y) \approx \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} X_1 + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} X_2$$

Como $\dot{X}_1 = \dot{x}$ e $\dot{X}_2 = \dot{y}$, as equações de evolução são:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 \approx J_{11}(x_0, y_0) X_1 + J_{12}(x_0, y_0) X_2 \\ \dot{X}_2 \approx J_{21}(x_0, y_0) X_1 + J_{22}(x_0, y_0) X_2 \end{cases} \quad (\text{sist. linear})$$

Onde as funções $J_{ij}(x, y)$ são as componentes da **Matriz Jacobiana**:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Se houver n pontos de equilíbrio, (p_1, \dots, p_n) existirão n aproximações lineares com matrizes $J(p_1), \dots, J(p_n)$

Exemplo.
$$\begin{cases} \dot{x} = 6y(y^2+x^2-1)^2 - 3x^2y^2 \\ \dot{y} = 2xy^3 - 6x(y^2+x^2-1)^2 \end{cases}$$

$f: 6xy(y^2+x^2-1)^2 - 3x^2y^2$

$g: 2xy^3 - 6x(y^2+x^2-1)^2$

$p: \text{solve}([f, g]);$ (13 soluções, mas 4 complexas)

$p: \text{append}(\text{rest}(p, -6), \text{rest}(p, 11));$ (nove pontos)

$J: \text{jacobian}([f, g], [x, y]);$

$A: \text{makeList}(\text{subst}(q, J), q, p);$

→ A_1 corresponde a um centro (p_1 é um centro)
($\text{tr}A_1=0, \text{det}A_1>0$)

→ A_2, A_3, A_4 e A_5 tem determinante nulo.

Isso quer dizer que a aproximação linear em p_2, p_3, p_4 e p_5 não é suficiente. Seria necessário considerar termos quadráticos

⇒ p_2, p_3, p_4 e p_5 são **Pontos não hiperbólicos**
(nem focos, nem nós, nem centros, nem selas)

→ A_6 e A_7 têm determinante negativo

⇒ p_6 e p_7 são pontos de sela

→ A_8 e A_9 têm traço nulo e determinante positivo: ⇒ p_8 e p_9 ~~pontos de sela~~ ^{são centros}

• 3 centros: $(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$

• 4 pontos não hiperbólicos: $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$

• 2 pontos de sela:

Retrato de fase

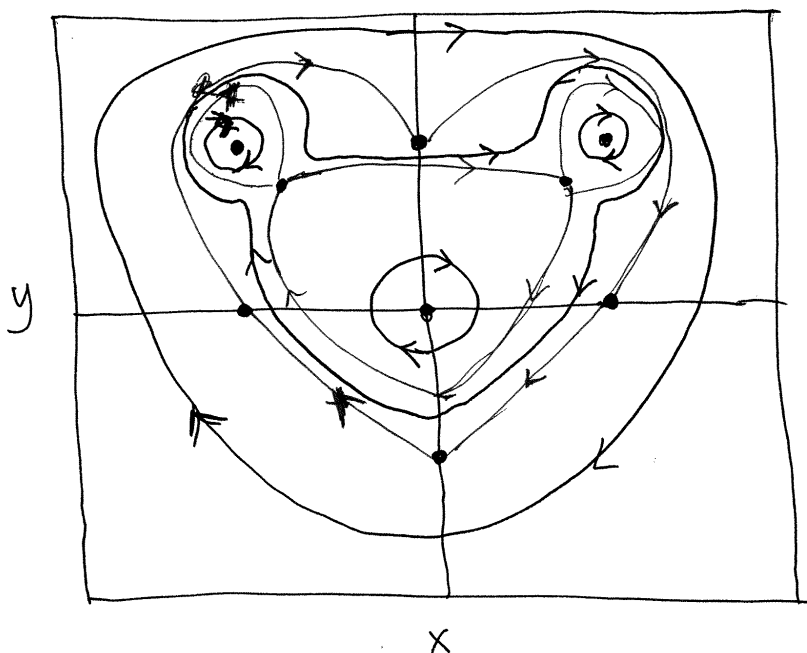
$\text{plotdf}([f,g],[x,y],[x,-2,2],[y,-2,2])$

Ⓐ no campo trajectory-at $\rightarrow 0.005 \ 1.005$ (órbita heteroclínica)

Ⓑ fieldlines \rightarrow black, trajectory-at $\rightarrow \begin{cases} 0 & 0.8 \\ 0 & 1.4 \\ 0 & 0.5 \\ 0.98 & 0.98 \\ -0.98 & 0.98 \end{cases}$ (5 ciclos)

Ⓒ fieldlines \rightarrow blue, trajectory-at $\rightarrow \begin{cases} 0.5773 & 0.6502 \\ -0.5773 & 0.6502 \end{cases}$ (2 órbitas homoclínicas)

Ⓓ field lines \rightarrow red, trajectory-at $\rightarrow 0.5179 \ 0.625$ (1 órbita heteroclínica)

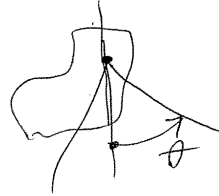


Aula 21, 22/5/2015

O PÊNDULO

$$\ddot{\theta} = -k \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \dot{w} = -k \sin \theta \end{cases} \quad (k > 0)$$



$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tr}(J) = 0$$

↓
sistema conservativo

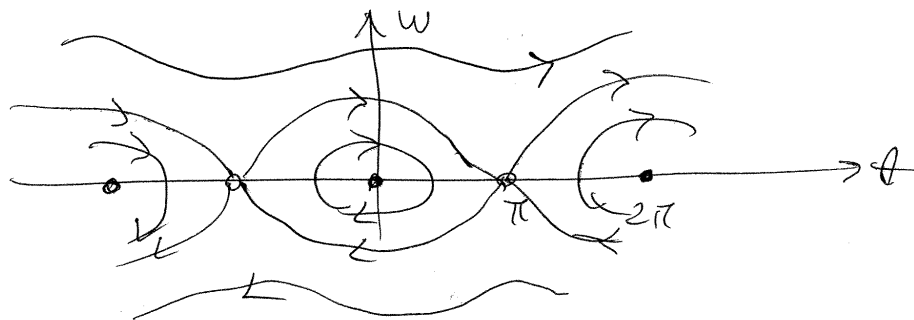
pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} w = 0 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

a) n par $\Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = k > 0 \Rightarrow \text{centros}$$

b) n ímpar $\Rightarrow \cos \theta = -1 \Rightarrow \det(A) = -k < 0$
 \Rightarrow pontos de sela



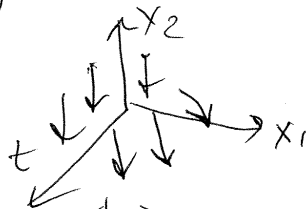
ESPAÇOS DE FASE COM 3 OU MAIS DIMENSÕES

Exemplo 1. Duas variáveis de estado, x_1, x_2
 e equações de evolução não autônomas

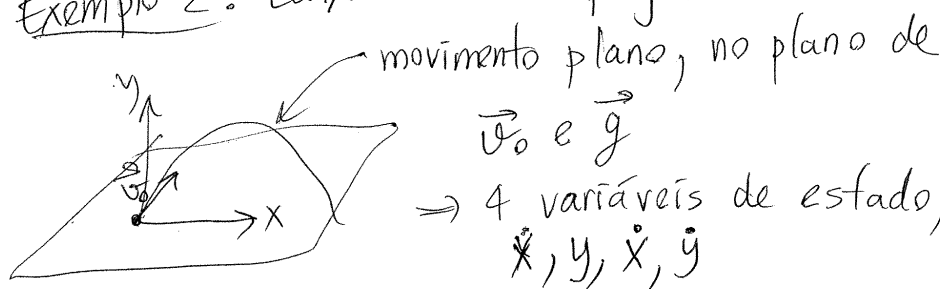
$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t)$$

⇒ Considera-se t como uma terceira variável de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad \vec{u} = (f_1, f_2, 1)$$



Exemplo 2. Lançamento de projéteis

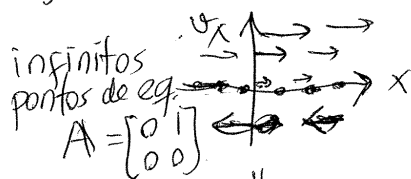


(a) Se a resistência do ar pode ser ignorada, pode separar-se em dois sistemas independentes

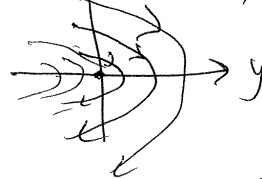
$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = 0 \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -9.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -9.8 \end{cases}$$



não tem pontos de equilíbrio

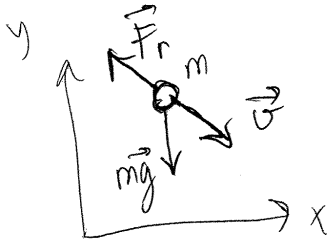


$$\begin{aligned} & \dot{x} = v_{x_0} \\ & x = v_{x_0}t + x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_y = v_{y_0} - gt \\ y = y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

se $v_{x_0} \neq 0$, não tem pontos de equilíbrio

④ Com resistência de ar e projétil = esfera de raio R e massa ~~volume~~ m



$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4} \rho R^2 |\vec{v}| \vec{v}$$

↑
massa volúmica do ar $\approx 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$a_x = -\frac{\pi \rho R^2}{4m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$a_y = -\frac{\pi \rho R^2}{4m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - 9.8$$

Programa rk

```
[vx0, vy0]: float(12 * [cos(%pi/4), sin(%pi/4)])$
```

```
c(R, m) := -%pi * 1.2 * R^2 / 4 / m$
```

```
v: sqrt(vx^2 + vy^2)$
```

bola de ténis $\rightarrow R = 3.25 \text{ cm}$ $m = 62 \text{ g}$

```
tr1: rk([vx, vy, c(0.0325, 0.062) * vx * v,
```

```
c(0.0325, 0.062) * vy * v - 9.8],
```

```
[x, y, vx, vy], [phi, phi, vx0, vy0],
```

```
[t, phi, 2, phi.0])$
```

```
first(sublist_indices(tr1, lambda([p], p[3] < 0)));
```

```
 $\rightarrow 167$ 
```

```
rk: makeList([tr1[i][2], tr1[i][3], i, 1, 166])$
```

Aula 22, 26/5/2015

Exemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-2x^2-3y^2) - y \\ \dot{y} = y(1-2x^2-3y^2) + x \end{cases}$$

$$f_x: x * (1 - 2 * x^2 - 3 * y^2) - y$$

$$f_y: y * (1 - 2 * x^2 - 3 * y^2) + x$$

Pontos de equilíbrio

$$\text{solve}([f_x, f_y]) \rightarrow (0, 0)$$

Aproximação linear

$$J: \text{jacobian}([f_x, f_y], [x, y]);$$

$$A: \text{subst}(\%03, J); \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

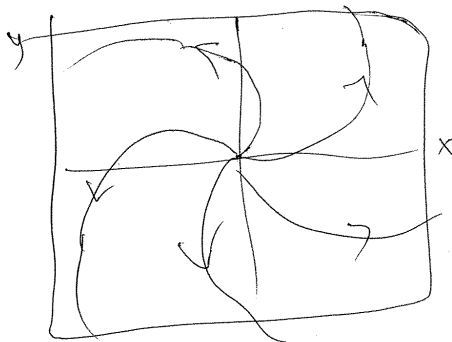
caracterização do ponto de equilíbrio

$$\text{eigenvalues}(A); \rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

\Rightarrow fo co repulsivo

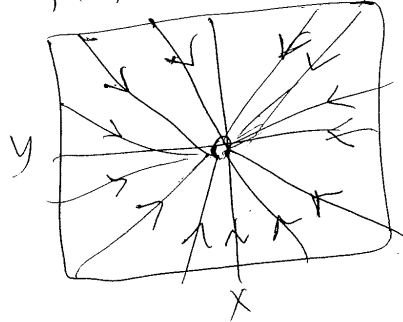
Retrato de fase

$$\text{plotdf}([f_x, f_y], [x, y], [x, -0.4, 0.4], [y, -0.4, 0.4]);$$

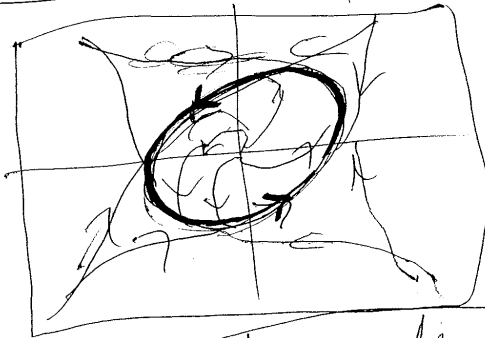


aparentemente é um sistema instável, mas na realidade é estável:

`plotdf([fx,fy],[x,y],[x,-40,40],[y,-40,40])`



CICLO LIMITE `plotdf([fx,fy],[x,y],[x,-1,1],[y,-1,1])`



Exemplos → Relógio de pêndulo
• Oscilação da corda de um violino.

Coordenadas polares

$$px : r * \cos(\theta)$$

$$py : r * \sin(\theta)$$

$$\text{grades}(r, t, u)$$

$$\text{grades}(\theta, t, w)$$

$$\text{eq1} : \text{subst}([x=px, y=py], \text{diff}(px, t) = fx);$$

$$\text{eq2} : \text{subst}([x=px, y=py], \text{diff}(py, t) = fy);$$

$$\text{solve}(\text{eq1}, \text{eq2}, [v, w])$$

subst(%o,[v,w]);

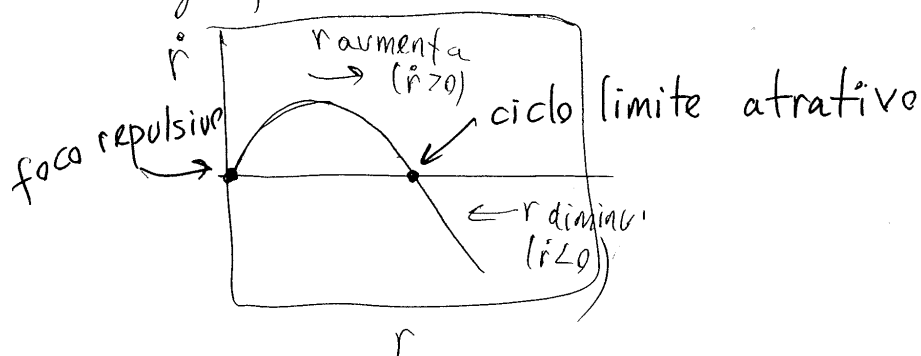
[fr,fg]: trigsimp(%o);

$$\begin{cases} \dot{r} = r + r^3(\cos^3\theta - 3) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

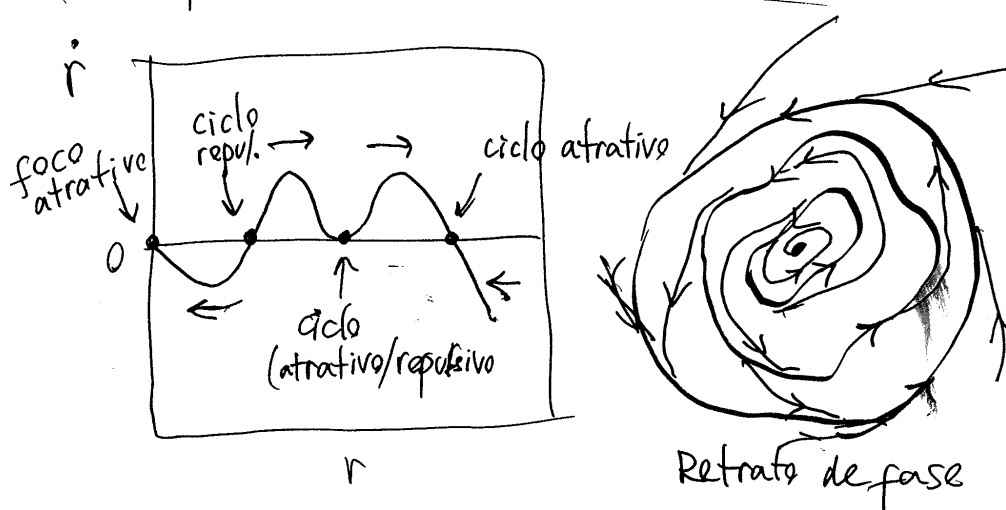
plotd(subst(q=phi,fr),[r,phi,1]);

↑ 1,3,4,... (radianos)

os gráficos são todos semelhantes:



Exemplo com 3 ciclos limite



Aula 23, 2015-05-29

DINÂMICA POPULACIONAL

$X(t)$ = população no instante t , admitindo que possa ter qualquer valor real.

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \begin{cases} X(0) > 0 \\ f(0, t) = 0 \\ \frac{f(x, t)}{x} = \text{taxa de } \begin{matrix} \text{aumento/diminuição} \\ \text{mortalidade} \\ \text{da população} \end{matrix} \end{cases}$$

(a) Modelo de Malthus

$$\frac{f(x, t)}{x} = a = \text{constante positiva}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = a dt$$

$$x = x_0 e^{at} \quad \begin{matrix} \text{aumento} \\ \text{exponencial} \end{matrix}$$

(b) Modelo logístico

$$\dot{x} = x(a - bx) \\ (a > 0, b > 0)$$

a = taxa de natalidade constante

bx = taxa de mortalidade (aumenta com a população)

pontos de equilíbrio

$$x(a - bx) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{a}{b} > 0 \end{cases}$$

Jacobiana

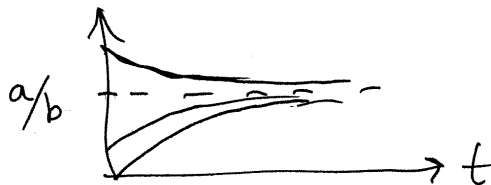
$$J(x) = \frac{df}{dx} = a - 2bx$$

aproximação linear

$$A_0 = a > 0$$

$$A_1 = a - 2a = -a < 0$$

$\Rightarrow x = 0$ é instável e $x = \frac{a}{b}$ é estável



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0, y) = 0 \\ g(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \circ$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \text{ taxas de aumento próprias de cada população}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow$ influência da espécie y na espécie x .
 $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$: a espécie y favorece o crescimento de x \circ
 $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$: a espécie y incrementa a extinção de x

(i) $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais opostos \rightarrow sistema predador presa

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas \rightarrow sistema com cooperação

(iii) $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas \rightarrow sistema com competição \circ

Modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases} \quad \begin{array}{l} a, b, c, d \text{ constantes} \\ \text{positivas} \\ x(t) \text{ e } y(t) \text{ positivas} \end{array}$$

Predadores $\rightarrow y$ presas $\rightarrow x$
 pontos de equilíbrio

$$p_1 = (0, 0)$$

$$p_2 = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c} \right)$$

- As presas crescem sem limite se não fosse pelos predadores
- Os predadores sobrevivem graças as presas. Se não houver presas, extingem-se \circ

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} a-y & cx \\ by & b_x-d \end{bmatrix}$$

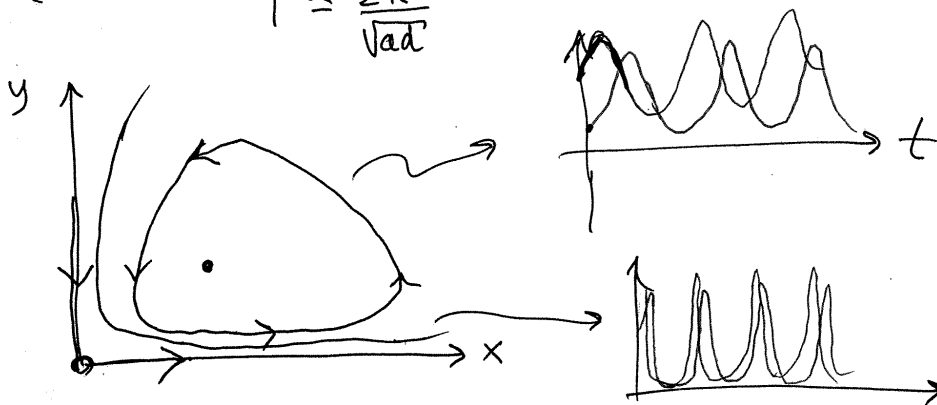
$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_1 = -ad < 0$$

\Rightarrow valores próprios, a e $-d$
 \Rightarrow ponto de sela

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & cd/b \\ ab/c & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tr } A_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\det A_2 = -ad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$$

$(\frac{d}{b}, \frac{a}{c})$ é um centro, com ciclos de período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$



Modelo de Holling-Tanner

$$\dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x}$$

$$\dot{y} = \frac{y}{5} \left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

presas $\rightarrow x$ predadores $\rightarrow y$
 (crescimento logístico para x e y)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6}{7+7x} < 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2}{10x^2} > 0$$

$\dot{x}=0, \dot{y}=0 \rightarrow (0,0), (7,0), (-7,-14), (1,2)$

⇒ 3 pontos de equilíbrio

$$p_1 = (0,0) \quad p_2 = (7,0) \quad p_3 = (1,2)$$

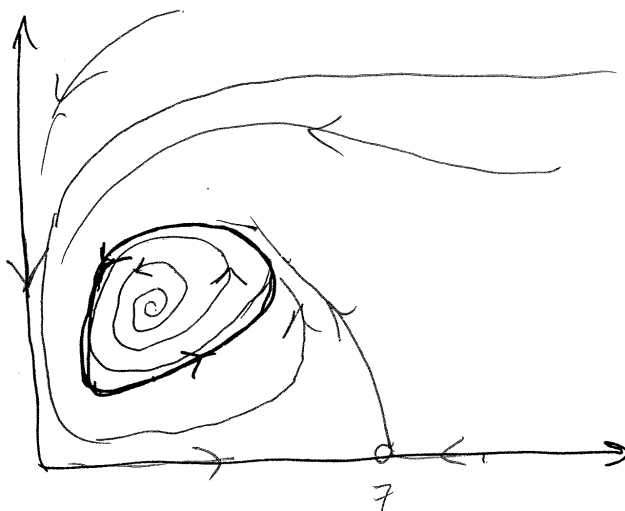
$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{7}x - \frac{6y}{7+7x} + \frac{42xy}{(7+7x)^2} & -\frac{6}{7+7x} \\ \frac{y^2}{10x^2} & \frac{1}{5} - \frac{y}{5x} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{tr } A_2 = -\frac{4}{5} \\ \text{det } A_2 = -\frac{1}{5} \quad (\text{ponto de sela})$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{ind.} \end{bmatrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{1}{5} \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{5} - \frac{y}{0} \right) \rightarrow -\infty$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{tr } A_3 > 0 \\ \text{det } A_3 > 0 \quad \text{e} \quad \text{det } A_3 > \left(\frac{\text{tr } A_3}{2} \right)^2$$

⇒ p_3 é foco repulsivo



este sistema
tem um ciclo
limite
atractivo.

Capítulo 2

Exames

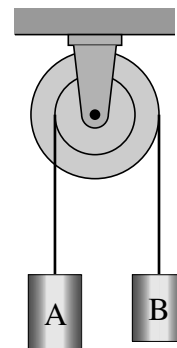
2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 26 de junho de 2015. Compareceram 123 estudantes e a nota média foi 9.2 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) Na figura, a massa do cilindro A é 36 gramas, a massa do cilindro B é 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é $4.43 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda. Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo.



2. (4 valores) No sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 10x + k(x + y) \end{aligned}$$

onde k é um parâmetro real que pode ter qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, determine para quais possíveis valores de k o ponto $(x, y) = (0, 0)$ é nó atrativo ou repulsivo, foco atrativo ou repulsivo, centro ou ponto de sela.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um cilindro de massa m e raio R roda sobre uma superfície plana, sem derrapar. Sabendo que o momento de inércia, em relação ao centro de massa, de um cilindro é dado pela expressão $\frac{1}{2} m R^2$, determine a expressão para a energia cinética, em função da velocidade v do centro de massa.
6. Um homem empurra um bloco de madeira sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco está pousado um livro. Considerando as forças seguintes:

- (A) $\frac{1}{2} m v^2$ (C) $\frac{3}{4} m v^2$ (E) $m v^2$
 (B) $\frac{1}{4} m v^2$ (D) $\frac{3}{2} m v^2$

1. Força de contato entre as mãos do homem e o bloco.
 2. Peso do livro.
 3. Força de atrito produzida pela superfície horizontal.

Quais dessas forças atuam sobre o bloco de madeira?

- (A) 2 e 3 (C) 1 (E) 1, 2 e 3
 (B) 1 e 2 (D) 1 e 3

Resposta:

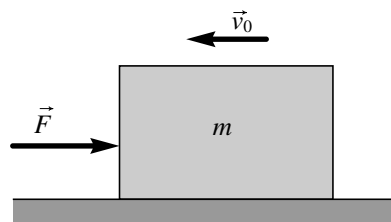
Resposta:

4. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 3 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são: $h_B = 10 \text{ cm}$ e $h_A = 100 \text{ cm}$. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

- (A) -41.5 J (C) -37.6 J (E) -45.4 J
 (B) -49.4 J (D) -53.3 J

Resposta:

7. O bloco na figura, com massa igual a 7 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial \vec{v}_0 , sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa \vec{F} , horizontal e constante, com módulo igual a 42 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



5. O vetor posição de um ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $2t^2 \hat{i} + (t^4 + 2) \hat{j}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

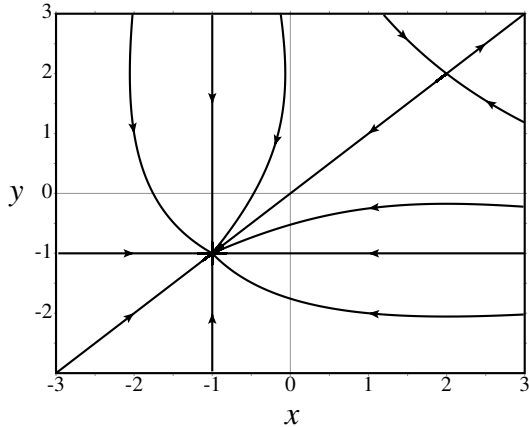
- (A) 23.8° (C) 4.5° (E) 18.1°
 (B) 14.7° (D) 11.3°

Resposta:

- (A) 24.85 m/s² (C) 8.45 m/s² (E) 6.0 m/s²
 (B) 59.15 m/s² (D) 3.55 m/s²

Resposta:

8. A figura mostra o retrato de fase de um sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em $(x, y) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (2, 2)$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto $(-1, -1)$?



- (A) $\dot{x} = -3y \quad \dot{y} = 3x$ (D) $\dot{x} = -3x \quad \dot{y} = -3y$
 (B) $\dot{x} = 3y \quad \dot{y} = -3y$ (E) $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = 3y$
 (C) $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = -3y$

Resposta:

9. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy . Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + r^2 - 2r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- (A) nó repulsivo (D) foco repulsivo
 (B) nó atrativo (E) foco atrativo
 (C) ponto de sela

Resposta:

10. A força tangencial resultante sobre um corpo é $F_t = s(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)$. Quantos pontos de equilíbrio instável tem este sistema mecânico?

- (A) 5 (C) 2 (E) 1
 (B) 4 (D) 3

Resposta:

11. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy . Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

- (A) 4 (C) 3 (E) 0
 (B) 2 (D) 1

Resposta:

12. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = -x - 4y \quad \dot{y} = 4x - y$$

Como variam x e y em função do tempo?

- (A) Oscilam com período π e amplitude crescente.

- (B) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
 (C) Oscilam com período π e amplitude decrescente.
 (D) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.
 (E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

Resposta:

13. A posição de um ponto ao longo de um percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $s = 30t - 5t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 4.5$ s.

- (A) 45 m (C) 11.25 m (E) 14.25 m
 (B) 78.75 m (D) 56.25 m

Resposta:

14. Calcule o momento de inércia de uma esfera com raio de 2 centímetros e massa 101 gramas, que roda à volta de um eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia de uma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2mR^2/5$.

- (A) $1.62 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (D) $8.08 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 (B) $3.23 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (E) $5.66 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 (C) $2.89 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Resposta:

15. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies, com competição?

- (A) $\dot{x} = x^2 + xy \quad \dot{y} = y^2 + xy$
 (B) $\dot{x} = xy - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
 (C) $\dot{x} = y^2 - xy \quad \dot{y} = x^2 - xy$
 (D) $\dot{x} = y^2 - xy \quad \dot{y} = x^2 + xy$
 (E) $\dot{x} = x^2 - xy \quad \dot{y} = y^2 - xy$

Resposta:

16. Calcule o raio de curvatura da trajetória dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é $5\hat{i} + 7\hat{j}$ e o vetor aceleração é $-2\hat{i} + 5\hat{j}$ (unidades SI).

- (A) 16.32 m (C) 25.46 m (E) 2.96 m
 (B) 1.9 m (D) 14.15 m

Resposta:

17. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 1.8 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

- (A) 279 rad/s² (C) 838 rad/s² (E) 182 rad/s²
 (B) 419 rad/s² (D) 209 rad/s²

Resposta:

2.1.2 Resolução

Problema 1. Método 1. Se h_A e h_B são as alturas dos dois cilindros, numa posição inicial, quando a roldana roda um ângulo θ , no sentido anti-horário, as alturas dos cilindros são:

$$y_A = h_A - 0.05\theta \quad y_B = h_B + 0.08\theta$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ . As expressões para as velocidades e acelerações dos cilindros são então:

$$\begin{aligned} v_A &= -0.05\omega & v_B &= 0.08\omega \\ a_A &= -0.05\alpha & a_B &= 0.08\alpha \end{aligned}$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da roldana e $\alpha = \ddot{\theta}$ é a sua aceleração angular. A expressão para a energia cinética do sistema é:

$$E_c = \frac{0.036}{2}(-0.05\omega)^2 + \frac{0.024}{2}(0.08\omega)^2 + \frac{4.43 \times 10^{-7}}{2}\omega^2 = 1.220215 \times 10^{-4}\omega^2$$

E a energia potencial gravítica, ignorando termos constantes, é:

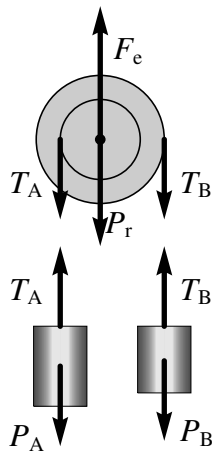
$$U = -0.036 \times 9.8 \times 0.05\theta + 0.024 \times 9.8 \times 0.08\theta = 1.176 \times 10^{-3}\theta$$

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se a aceleração angular:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 2.44043 \times 10^{-4}\alpha - 0 + 1.176 \times 10^{-3} = 0 \implies \alpha = -4.8188$$

O sinal negativo indica que a roldana acelera no sentido horário. Como tal, a aceleração do bloco A é para cima e a do bloco B é para baixo, e os seus valores absolutos são:

$$a_A = 0.05 \times 4.8188 = 0.2409 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_B = 0.08 \times 4.8188 = 0.3855 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



Método 2. A figura ao lado mostra os diagramas de corpo livre para a roldana e para cada um dos cilindros. Admitindo que a aceleração a_A do cilindro A é para cima, então a aceleração a_B do cilindro B é para baixo e a aceleração angular α da roldana é no sentido horário. As três equações de movimento são:

$$T_A - 0.036 \times 9.8 = 0.036 a_A$$

$$0.024 \times 9.8 - T_B = 0.024 a_B$$

$$0.08 T_B - 0.05 T_A = 4.43 \times 10^{-7} \alpha$$

junto com as duas equações:

$$a_A = 0.05 \alpha \quad a_B = 0.08 \alpha$$

tem-se um sistema de 5 equações lineares com 5 incógnitas, T_A , T_B , α , a_A e a_B . A solução desse sistema dá os mesmos valores já encontrados no método 1 para a_A e a_B , com sinais positivos, que indica que o sentido arbitrado para as acelerações foi o correto.

Problema 2. Existem várias formas possíveis de resolver este problema; um método simples é o seguinte. Trata-se de um sistema linear com matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10+k & k \end{bmatrix}$$

com traço, t , e determinante, d ;

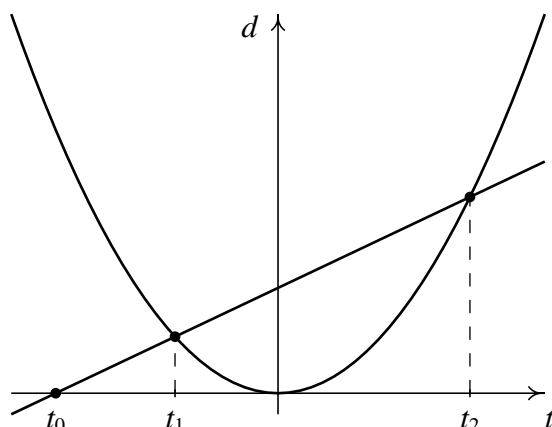
$$t = k \quad d = k + 10$$

A relação entre o traço e o determinante é $d = t + 10$. Num plano em que o eixo das abcissas representa o traço t e o eixo das ordenadas representa o determinante d , esta relação é uma reta com declive igual a 1, que corta o eixo das abcissas em $t_0 = -10$.

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola $d = t^2/4$, que corta a reta $d = t + 10$ nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2t - 20 = 0 \implies t = 2 \pm \sqrt{44} \implies t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \quad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:



O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que t_0 , nó atrativo, se o traço estiver entre t_0 e t_1 , foco atrativo, se o traço estiver entre t_1 e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e t_2 ou nó repulsivo, se o traço for maior que t_2 . Tendo em conta que k é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se $k < -10$
- Nó atrativo, se $-10 < k \leq 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se $k = 0$
- Foco repulsivo, se $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se $k \geq 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando $k = -10$, o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, que não corresponde a nenhuma das categorias acima. Quando $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$, o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima.

Perguntas

- | | | |
|------|-------|-------|
| 3. C | 8. D | 13. D |
| 4. D | 9. E | 14. E |
| 5. D | 10. D | 15. E |
| 6. D | 11. E | 16. A |
| 7. C | 12. D | 17. B |

2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 14 de julho de 2015. Compareceram 67 estudantes e a nota média foi 9.3 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 pontos) Um homem com 72 kg empurra uma caixa de madeira com 8 kg sobre um chão horizontal, exercendo uma força horizontal nela que a faz deslizar no chão. Sobre a caixa está pousado um livro com 0.6 kg. O homem, a caixa e o livro deslocam-se conjuntamente, com aceleração igual a 0.5 m/s^2 . Determine o valor das forças de atrito entre o chão e a caixa, entre a caixa e o livro e entre o chão e os pés do homem, ignorando a resistência do ar e sabendo que os coeficientes de atrito estático (μ_e) e atrito cinético (μ_c) são: entre o chão e a caixa, $\mu_e = 0.25$ e $\mu_c = 0.2$; entre a caixa e o livro, $\mu_e = 0.35$ e $\mu_c = 0.28$; entre o chão e os pés do homem, $\mu_e = 0.4$ e $\mu_c = 0.3$.

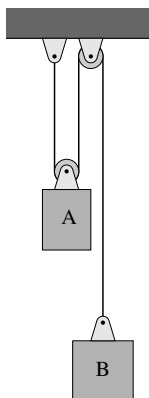
2. (4 pontos) O sistema dinâmico:

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$$

tem um ponto de equilíbrio na origem. Use as substituições $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para transformar as equações de evolução para coordenadas polares. Encontre as expressões para \dot{r} e $\dot{\theta}$ em função de r e θ . Explique (con argumentos válidos) que tipo de ponto de equilíbrio é a origem e quantos ciclos limite existem.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. No instante em que o bloco B desce com velocidade 18 cm/s, com que velocidade se desloca o bloco A para cima?



- (A) 36 cm/s (C) 54 cm/s (E) 9 cm/s
(B) 6 cm/s (D) 18 cm/s

Resposta:

4. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 7\hat{i} + 5t\hat{j}$ (SI). Se a velocidade do objeto em $t = 0$ for $3\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s, calcule a velocidade em $t = 6$ s.

- (A) $21.0\hat{i} + 45.0\hat{j}$ (D) $45.0\hat{i} + 94.0\hat{j}$
(B) $24.0\hat{i} + 19.0\hat{j}$ (E) $24.0\hat{i} + 49.0\hat{j}$
(C) $24.0\hat{i} + 45.0\hat{j}$

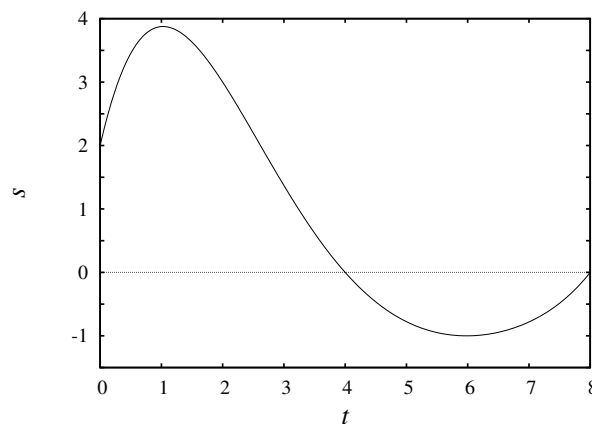
Resposta:

5. Um primeiro cilindro, com massa 30 g, fica em equilíbrio a uma altura de 40 cm quando é pendurado de uma mola vertical. Substituindo o primeiro cilindro por outro de massa 31 g, este fica em equilíbrio a uma altura de 34 cm. Determine o valor da constante elástica da mola.

- (A) 17 mN/m (C) 82 mN/m (E) 33 mN/m
(B) 163 mN/m (D) 327 mN/m

Resposta:

6. A figura mostra o gráfico da posição de um ponto ao longo da sua trajetória em função do tempo. Se a_1 e a_6 representam a aceleração tangencial nos dois instantes $t = 1$ e $t = 6$, qual das afirmações é correta?



- (A) $a_1 > 0, a_6 > 0$ (D) $a_1 = 0, a_6 = 0$
(B) $a_1 < 0, a_6 > 0$ (E) $a_1 > 0, a_6 < 0$
(C) $a_1 < 0, a_6 < 0$

Resposta:

7. A componente tangencial da força resultante sobre uma partícula de massa 2 (unidades SI) é dada pela expressão $4s + 7v$, onde s é a posição na trajetória e v o valor da velocidade. Qual das matrizes na lista é a matriz do respetivo sistema dinâmico linear?

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7/2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7/2 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta:

8. A aceleração tangencial de um objeto verifica a expressão $a_t = 4s^2$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso em $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade em $s = 2$ m.

- (A) 3.57 m/s (C) 4.99 m/s (E) 4.32 m/s
 (B) 5.66 m/s (D) 2.83 m/s

Resposta:

9. Um piloto de corridas de aviões, com 100 kg, executa um loop vertical de 400 m de raio, com velocidade constante em módulo. Sabendo que a força vertical exercida no piloto pela base do assento do avião é igual a 2450 N, no ponto mais baixo do loop, calcule a mesma força no ponto mais alto do loop.

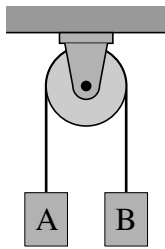
- (A) 2450 N (C) 1470 N (E) 490 N
 (B) 980 N (D) 245 N

Resposta:

10. Numa máquina de Atwood penduram-se dois blocos A e B nos extremos de um fio que passa por uma roldana; o bloco A, mais pesado, desce com aceleração constante e o bloco B, mais leve, sobe com o mesmo valor da aceleração. Considerando as forças seguintes:

1. Força de contacto no eixo da roldana.
2. Peso do bloco A.
3. Peso do bloco B.

Quais dessas forças atuam sobre a roldana?



- (A) 1 e 2 (C) 1 (E) 2 e 3
 (B) 1 e 3 (D) 1, 2 e 3

Resposta:

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem um único ponto de equilíbrio na origem e um ciclo limite. Qual poderá ser a matriz jacobiana do sistema na origem?

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Resposta:

12. O momento de inércia de um cilindro de massa m , raio R e densidade constante, em relação ao seu eixo, é $mR^2/2$. Quando esse cilindro roda sem derrapar num plano inclinado de altura h , partindo do repouso, chega ao fim

do plano com velocidade $2\sqrt{\frac{gh}{3}}$. Um segundo cilindro, com o mesmo raio e massa mas densidade que depende da distância ao eixo, atinge uma velocidade $\sqrt{\frac{10gh}{7}}$ no mesmo plano inclinado, partindo do repouso e rodando sem derrapar. Qual é a expressão do momento de inércia do segundo cilindro, em relação ao seu eixo?

- (A) $\frac{2}{5} m R^2$ (C) $\frac{3}{4} m R^2$ (E) $\frac{1}{3} m R^2$
 (B) $\frac{3}{5} m R^2$ (D) $\frac{2}{3} m R^2$

Resposta:

13. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

- (A) $\dot{y} = x + xy^2$ (D) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$
 (B) $\dot{y} = 2y - 5y^2$ (E) $\dot{y} = -5xy + 2y$
 (C) $\dot{y} = 6y - y^2$

Resposta:

14. A equação diferencial:

$$\ddot{x} - x^2 - 3x - 2 = 0$$

é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase (x, \dot{x}) . Qual dos pontos na lista é um ponto de equilíbrio do sistema?

- (A) (1, 0) (C) (-3, 0) (E) (3, 0)
 (B) (0, 0) (D) (-1, 0)

Resposta:

15. Lança-se um projétil desde uma janela a 4.2 m de altura, com velocidade de 14 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

- (A) 14.2 m (C) 6.7 m (E) 9.2 m
 (B) 5.5 m (D) 11.7 m

Resposta:

16. Calcule o valor da componente tangencial da aceleração dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é $2\hat{i} + 4\hat{j}$ e o vetor aceleração é $-5\hat{i} + 8\hat{j}$ (unidades SI).

- (A) 22.0 m/s² (C) 9.39 m/s² (E) 8.05 m/s²
 (B) 36.0 m/s² (D) 4.92 m/s²

Resposta:

17. Num sistema que se desloca no eixo dos x , a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio instável?

- (A) -1 (C) -2 (E) 2
 (B) 3 (D) 1

Resposta:

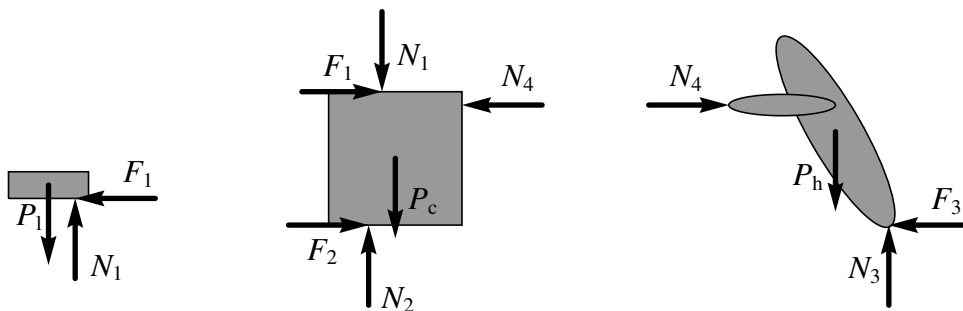
2.2.2 Resolução

Problema 1. Existem quatro pontos de contacto entre corpos rígidos:

1. Entre a base do livro e a tampa da caixa.
2. Entre a base da caixa e o chão.
3. Entre os pés do homem e o chão.
4. Entre as mãos do homem e a parede lateral direita da caixa (admitindo que está a ser empurrada para a esquerda).

Em 1 há reação normal, N_1 , vertical, e força horizontal, F_1 , de atrito estático porque o livro não está a deslizar sobre a caixa. Em 2 há força de reação normal, N_2 , vertical, e força horizontal, F_2 , de atrito cinético, porque a caixa desliza sobre o chão. Em 3 há reação normal, N_3 , vertical, e força horizontal, F_3 , de atrito estático porque os pés do homem não derrapam sobre o chão (se derrapassem, a caixa não acelerava). Em 4 há apenas reação normal, N_4 , porque o enunciado diz que a força que o homem exerce na caixa é horizontal.

A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre do livro, da caixa e do homem.



A força de atrito estático F_1 deve atuar sobre o livro de direita para esquerda, para que o livro acelere para a esquerda. O mesmo acontece com a força de atrito estático F_3 atuando no homem. Essas duas forças não podem ultrapassar o valor máximo, $\mu_e N$, mas podem ter qualquer valor entre 0 e esse valor máximo. A força de atrito cinético F_2 é no sentido oposto ao movimento da caixa e tem módulo igual a $F_2 = \mu_c N_2 = 0.2 N_2$. Os pesos do livro, da caixa e do homem são: $P_1 = 5.88$ N, $P_c = 78.4$ N e $P_h = 705.6$ N.

As duas equações de movimento de translação do livro são (unidades SI):

$$N_1 = 5.88$$

$$F_1 = m_l a = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

As equações de movimento de translação da caixa são:

$$N_2 = 78.4 + N_1 = 84.28$$

$$N_4 - F_1 - F_2 = m_c a \quad \Rightarrow \quad N_4 = 8 \times 0.5 + 0.3 + 0.2 \times 84.28 = 21.156$$

E as equações de movimento de translação do homem são:

$$N_3 = 705.6$$

$$F_3 - N_4 = m_h a \quad \Rightarrow \quad F_3 = 72 \times 0.5 + 21.156 = 57.156$$

O valor máximo que pode ter F_1 é $0.35 N_1 = 2.058$ e o valor máximo possível de F_3 é $0.4 N_3 = 282.24$. Como os resultados obtidos não ultrapassam esses valores máximos, esses resultados são válidos e a resposta é: a força de atrito entre a caixa e o livro é 0.3 N , a força de atrito entre a caixa e o chão é $0.2 \times 84.28 = 16.856 \text{ N}$ e a força de atrito entre o chão e os pés do homem é 57.156 N .

Problema 2. As derivadas das expressões $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ são:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

Substituindo nas equações de evolução, obtêm-se as equações de evolução em coordenadas polares:

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = r \sin \theta + r^3 \cos \theta$$

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = -r \cos \theta + r^3 \sin \theta$$

que são duas equações lineares para \dot{r} e $\dot{\theta}$. Aplicando qualquer método de resolução de equações lineares, obtêm-se essas duas expressões. Por exemplo, o método de eliminação; multiplicando a primeira equação por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$,

$$\dot{r} \cos^2 \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = r \sin \theta \cos \theta + r^3 \cos^2 \theta$$

$$\dot{r} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = -r \sin \theta \cos \theta + r^3 \sin^2 \theta$$

e somando as duas equações obtêm-se a expressão para \dot{r}

$$\dot{r} = r^3$$

Multiplicando a primeira equação de evolução por $\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$,

$$\dot{r} \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta} \sin^2 \theta = r \sin^2 \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta$$

$$\dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta = -r \cos^2 \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta$$

e subtraindo a primeira equação da segunda obtêm-se a expressão para $\dot{\theta}$

$$r \dot{\theta} = -r \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -1 \quad (\text{se: } r \neq 0)$$

Fora da origem, r é positiva e, como tal, $\dot{r} = r^3$ é sempre positiva. Ou seja, o estado do sistema afasta-se sempre da origem (r aumenta). Enquanto o estado se afasta da

origem, dá várias voltas no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio), porque $\dot{\theta}$ é igual a -1 . Isso implica que a origem é um foco repulsivo e não existe nenhum ciclo limite.

As expressões para \dot{r} e $\dot{\theta}$ também podem ser obtidas no Maxima com os seguintes comandos:

```
(%i1) x: r*cos(q)$
(%i2) y: r*sin(q)$
(%i3) gradef(r,t,v)$
(%i4) gradef(q,t,w)$
(%i5) e1: diff(x,t) = y+(x^2+y^2)*x;
(%o5)      cos(q) v - sin(q) r w = cos(q) r (sin^2(q) r^2 + cos^2(q) r^2) + sin(q) r
(%i6) e2: diff(y,t) = -x+(x^2+y^2)*y;
(%o6)      cos(q) r w + sin(q) v = sin(q) r (sin^2(q) r^2 + cos^2(q) r^2) - cos(q) r
(%i7) trigsimp(solve([e1,e2],[v,w]));
(%o7)      [ [ v = r^3 , w = -1 ] ]
```

Perguntas

- | | |
|-------|-------|
| 3. E | 11. E |
| 4. E | 12. A |
| 5. B | 13. E |
| 6. B | 14. D |
| 7. A | 15. C |
| 8. E | 16. D |
| 9. E | 17. D |
| 10. C | |

Bibliografia

- Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática*. Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.
- Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir: Moscovo, Rússia.
- Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods*. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.
- Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México, DF, México: International Thomson Editores.
- Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective*. México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.
- Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. USA: Westview Press.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.
- Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução*. São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.
- French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics*. New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.
- Galilei, G. (1638). *Dialogue Concerning Two New Sciences*. Itália: Publicado em: http://galileoandstein.physics.virginia.edu/tns_draft/. (Tradução de 1914,

por H. Crew e A. de Salvio)

- Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.
- Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.
- Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology*. The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.
- Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.
- Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE*. Boston, MA, USA: Birkhäuser.
- Maxima Development Team. (2014). *Maxima Manual* (5.35.1 ed.).
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física.
- Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics*. Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.
- Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)
- Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macysma ODE lab book*. Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.
- Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA: Addison-Wesley.

- Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics*. Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis*. New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.
- Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books.
- Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. Sausalito, CA, USA: University Science Books.
- Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.
- Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com máxima*. Porto, Portugal: Edição do autor.
- Villate, J. E. (2015). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (3a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.