U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 2, 2019

Jaime E. Villate

Porto, fevereiro de 2020

Conteúdo

1 Sumários **1**

1.1 Campo elétrico . . . 2

1.2 Voltagem e corrente . . . 11

1.3 Resistência . . . 19

1.4 Capacidade . . . 26

1.5 Circuitos de corrente contínua . . . 34

1.6 Fluxo elétrico . . . 42

1.7 Potencial . . . 49

1.8 Campo magnético . . . 58

1.9 Indução eletromagnética . . . 65

1.10 Processamento de sinais . . . 73

1.11 Circuitos de corrente alternada . . . 84

2 Exames **95**

2.1 Exame de época normal . . . 95

2.1.1 Enunciado . . . 96

2.1.2 Resolução . . . 98

2.1.3 Cotações . . . 100

2.2 Exame de época de recurso . . . 101

2.2.1 Enunciado . . . 102

2.2.2 Resolução . . . 104

2.2.3 Cotações . . . 106

Bibliografia **107**

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 2.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Primeiro semestre do segundo ano.

Ano académico 2019–2020, primeiro semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes Joana Espain de Oliveira, Luís Miguel Martelo e Jaime E. Villate.

Número de alunos 198.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

Aula 1. 2019-09-16

FÍSICA II - MIEIC - 2019/2020

Eletricidade, magnetismo e circuitos elétricos
Método semelhante à Física I.
Consulte: https://def.fe.up.pt/eic0014
Importância. Compreender o funcionamento dos dispositivos.

Capítulo 1. CAMPO ELÉTRICO

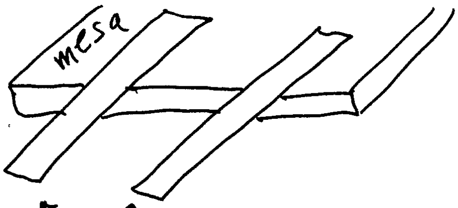
Carga elétrica. Fenómenos como o trovão ou o choque que sentimos ao tocar alguns objetos são devidos à passagem de cargas elétricas. A força que mantém uma película aderente a uma chávena é força elétrica entre objetos com carga.

Existem dois tipos de cargas elétricas que têm sido chamadas "positiva" e "negativa".

- Entre dois objetos com cargas do mesmo tipo: força elétrica repulsiva.
- Entre dois objetos com cargas de diferente tipo: força elétrica atrativa.
- Um objeto macroscópico sem carga e outro com carga de qualquer tipo: força elétrica atrativa
- Dois objetos sem carga: força elétrica nula.

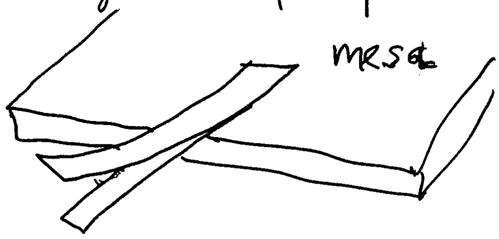
Experiência:

Cargas do mesmo tipo



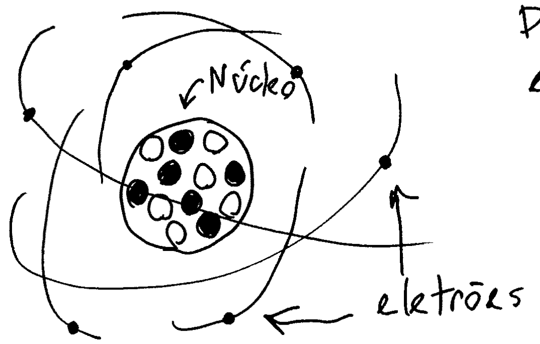
descolam-se dois pedaços de fita-cola de uma mesa, ficando com cargas do mesmo tipo.

Cargas de tipo oposto



Colam-se as duas fitas à mesa, uma por cima da outra. Descolam-se, juntas, lentamente, da mesa. A seguir descolam-se rapidamente entre elas.

ESTRUTURA DOS ÁTOMOS



Praticamente toda a massa está concentrada num núcleo de aproximadamente 10^{-15} m.

Em torno do núcleo há partículas muito mais pequenas e leves (eletrões) em órbitas de aproximadamente 10^{-10} m.

O núcleo está formado por **neutrões**, sem carga, e **protões**, com carga positiva. Os eletrões têm carga negativa com exatamente a mesma grandeza da carga dos protões, mas sinal oposto.

$q \rightarrow$ carga elétrica

$\boxed{e = \text{carga elementar}}$

$q_{\text{protão}} = e \qquad q_{\text{eletrão}} = -e$

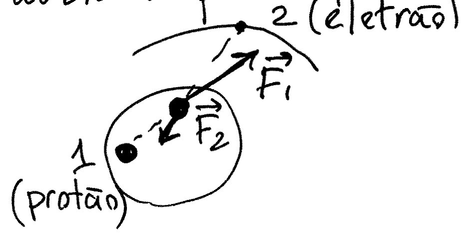
(constante fundamental da natureza)

Em unidades SI, q mede-se numa unidade chamada coulomb (C).

$$\boxed{e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$

Em situações "normais", existem o mesmo número de eletrões do que protões (átomo neutro). Uma partícula que esteja "longe" do átomo (distância muito maior do que 10^{-10} m), não sente forças elétricas do átomo, porque o átomo aparece como objeto sem carga líquida.

Dentro do átomo, uma partícula com carga, por exemplo um dos protões no núcleo, sente as forças produzidas pelos protões e eletrões



Um átomo ionizado negativamente, com n eletrões a mais, tem carga:

$$q = -ne$$

e um átomo ionizado positivamente tem n eletrões em falta e carga: $q = +ne$

Propriedades da carga:

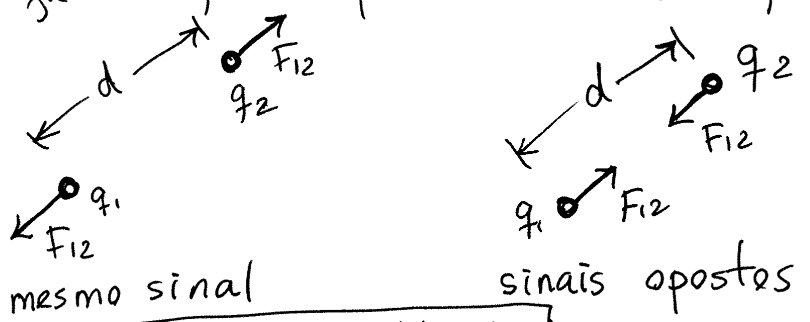
1- <u>Quantização</u>: todas as partículas conhecidas têm cargas elétricas que são múltiplos inteiros da carga elementar e. $q_{objeto} = ne$ (n pos. ou neg)

2 - <u>Conservação</u>: A carga de cada partícula é sempre a mesma. Quando uma partícula é desintegrada, dando origem a novas partículas, a carga total das novas partículas é igual à carga da partícula inicial.

Exemplo: Radiação beta, que são eletrões que saem do núcleo, devido à desintegração de um neutrão, dando origem a um protão, mais um eletrão, mais uma pequena partícula neutra (neutrino).
O novo átomo tem quase a mesma massa, pois as massas do neutrão e protão são semelhantes, mas tem mais uma carga positiva no núcleo.

LEI DE COULOMB

A força elétrica entre duas **cargas pontuais** (carga concentrada numa região muito pequena em comparação com a distância até o outro objeto), é diretamente proporcional à magnitude de cada carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.
A direção é na reta que passa pelas duas cargas pontuais, atrativa se os sinais das cargas forem diferentes, ou repulsiva se os sinais forem iguais.



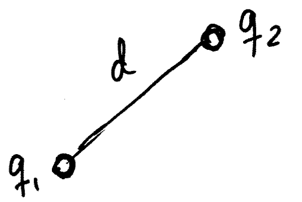
$$\boxed{F_{12} = k\,\frac{|q_1||q_2|}{d^2}}$$

k = constante de Coulomb. No sistema SI:

$$k = 8.998 \times 10^9\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

Aula 2. 2019-09-19

CAMPO ELÉCTRICO



A força $F_{12} = \dfrac{k|q_1||q_2|}{d^2}$

interpreta-se assim:

A carga q_1 modifica o espaço à sua volta, criando um **campo** com módulo:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} \qquad r_1 = \text{distância desde } q_1.$$

A carga q_2, colocada à distância $r_1 = d$, sente uma força devida à ação do campo E_1 sobre ela:

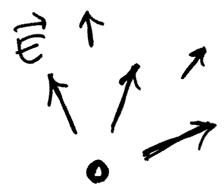
$$F_{12} = |q_2| E_1$$

De igual forma, a carga q_2 cria um campo com módulo: $E_2 = \dfrac{k|q_2|}{r_2^2}$ $\quad r_2 =$ distância desde q_2.

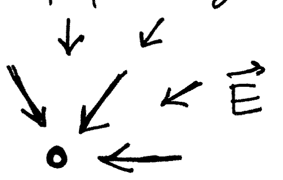
e a carga q_1 sente a ação desse campo E_2:

$$F_{12} = |q_1| E_2$$

O campo $\vec{E}$ produzido por uma carga pontual q é um vetor com módulo: $E = \dfrac{k|q|}{r}$ (r = distância desde q), na direção da reta que passa por q (direção radial), afastando-se de q, se q for positiva, ou aproximando-se dela, se q for negativa.

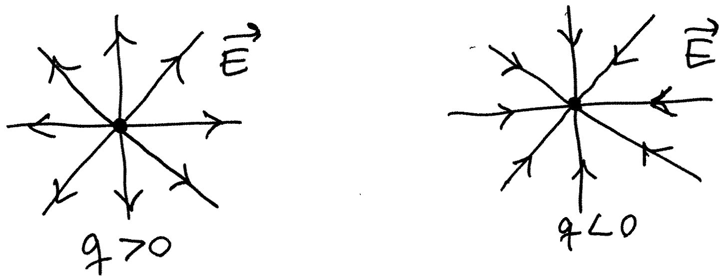


$q > 0$



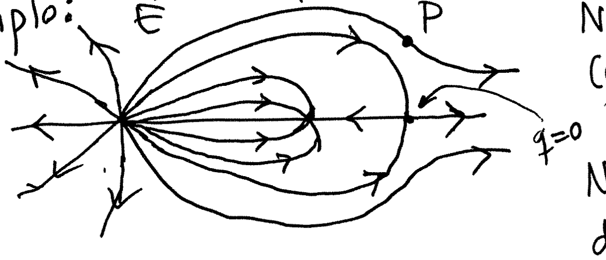
$q < 0$

uma representação simples consiste em usar linhas de campo:



Os campos $\vec{E}_i$ de várias cargas somam-se (vetorialmente), produzindo linhas de campo mais complicadas.

Exemplo:

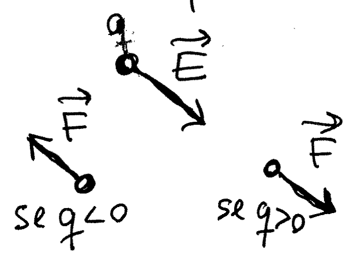


Nos pontos de equilíbrio (onde começam ou terminam linhas) o campo $\vec{E}$ é nulo. Neste exemplo há 3 pontos de equilíbrio, onde há uma carga positiva, uma carga negativa e nenhuma carga.

Em qualquer ponto do espaço onde existe campo elétrico $\vec{E}$, uma partícula de carga q, colocada nesse ponto, sente força elétrica $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$

(inclui-se o sinal de q)

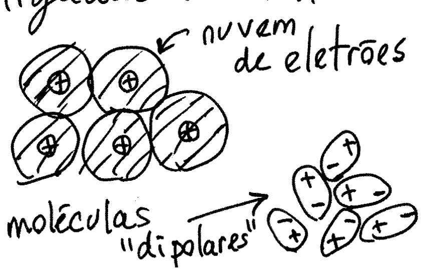
Exemplo: ponto P do exemplo anterior



Os materiais classificam-se em dois tipos:

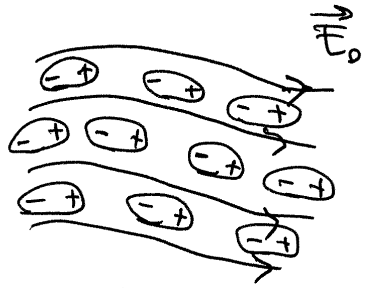
1. ISOLADORES (também chamados dielétricos)

As partículas com carga (eletrões e protões) permanecem ligadas às moléculas ou átomos no material



O campo $\vec{E}$ médio no isolador é nulo, porque as cargas estão centradas no mesmo ponto em cada molécula, ou as moléculas têm campos fracos distribuídos aleatoriamente.

quando existirem cargas externas que produzem campo $\vec{E}_0$, as moléculas <u>polarizam-se</u> com as cargas + no sentido de $\vec{E}_0$ e as cargas − no sentido oposto.



Isso dá origem a um campo interno $\vec{E}_p$ ← polarização, oposto a $\vec{E}_0$, mas $|\vec{E}_p| < |\vec{E}_0|$. O campo total

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \frac{\vec{E}_0}{K}$$

(K = constante dielétrica)

tem então as mesmas linhas de campo de $\vec{E}_0$, mas módulo $|\vec{E}|$ menor que $|\vec{E}_0|$ numa proporção $K > 1$, que depende do material. Como tal, o campo $\vec{E}$ produzido por uma carga q, com dielétrico à sua volta é:

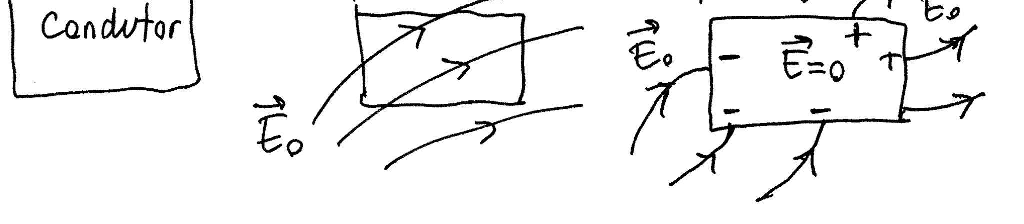
$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{k|q|}{K d^2}}$$

Exemplos de dielétricos:

- ar seco ($K \approx 1.00059$)
- óleo ($K \approx 2.24$)
- água destilada ($K \approx 80$, a 20°C)
- papel ($K \approx 3.7$)
- vidro ($K \approx 5.6$)

2. CONDUTORES. Possuem <u>cargas livres</u> (eletrões ou iões) que deslocam-se livremente no material. Exemplos: Metais (eletrões livres), Soluções (iões), Plasmas (ar ionizado). Um campo externo também polariza o condutor (mas o objeto tudo e não cada átomo)

ⓐ ⓑ aplica-se $\vec{E}_0$ ⓒ após algum instante



Eletrização por frição.

caneta esfregada no cabelo ⤳ passam eletrões entre o cabelo e a caneta, ficando um deles com carga negativa (excesso de eletrões) e o outro com a mesma carga mas positiva (falta de eletrões)

<u>Série triboelétrica</u>

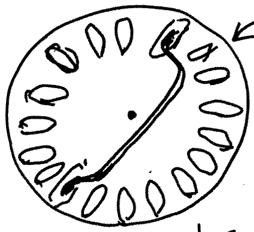
+ ↑ Cabelo humano
⋮
alumínio
⋮
− ↓ plástico

Os materiais acima na série são mais susceptíveis a perder eletrões. Como tal, a caneta (plástico) ficou com carga − e o cabelo com carga +.

Uma barra de alumínio, esfregada no cabelo, fica também com carga −. Mas se for esfregada com plástico, fica com carga +.

Eletrização por induçao. Método que permite induzir cargas muito elevadas nos condutores. Exemplo:

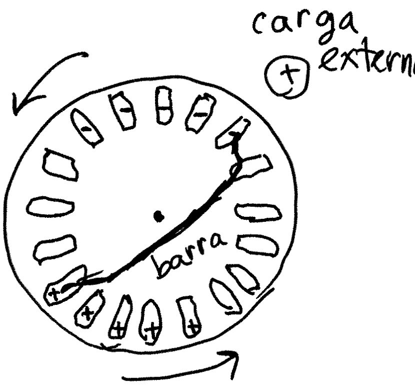
<u>Gerador de Wimshurst</u>:



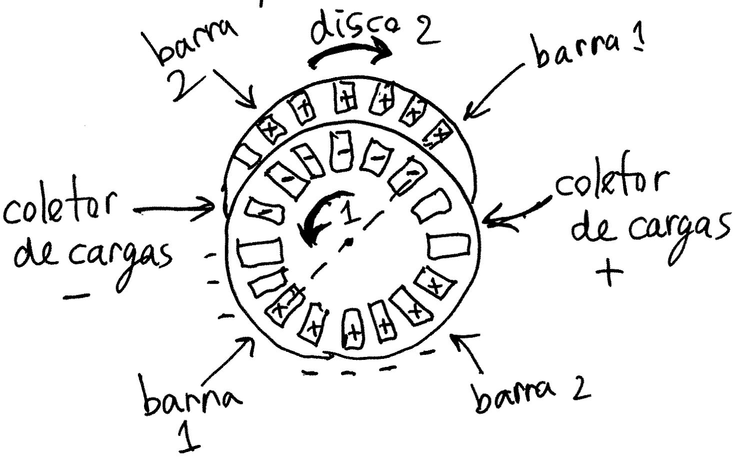
disco isolador, com lâminas metálicas coladas e uma barra metálica que liga duas lâminas opostas

Se, no instante em que duas lâminas no disco estão ligadas pela barra, aproxima-se duma das lâminas um carga +, a lâmina mais próxima fica com carga − e a lâmina mais afastada com carga +

A rotação do disco faz com que as lâminas percam o contacto, ficando as cargas + e − nas lâminas isoladas.

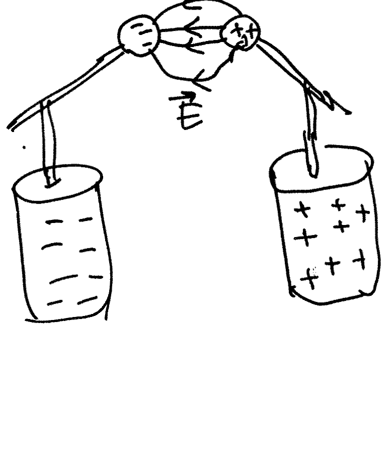


Pela sua vez, essas cargas induzem cargas num segundo disco que roda no sentido oposto



Antes de completar cada volta, as lâminas passam próximo de escovas metálicas (coletores) ligadas a duas garrafas metálicas, onde são coletadas as cargas das lâminas ficando descarregadas

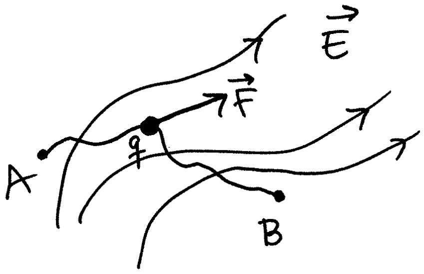
As cargas (+ e −) nas duas garrafas aumentam exponencialmente. O campo entre duas esferas metálicas ligadas às garrafas aumenta tanto que chega a ionizar o ar, produzindo descarga brusca das garrafas (tal como o trovão descarrega uma nuvem)



trabalho para casa: ler secção 1.7. do livro.

Aula 3. 2019-09-23

ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA



Força elétrica sobre uma carga pontual q:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Qualquer que seja o campo (eletrostático), é produzido por várias cargas pontuais.

A força produzida por cada carga pontual é **central** e, como tal, é conservativa (Física I).
Conclui-se que $\vec{F} = q\vec{E}$ é força conservativa:

> O trabalho realizado pela força elétrica, quando uma carga pontual desloca-se entre dois pontos A e B, numa região onde existe campo elétrico, não depende do percurso, e é igual à diminuição da **energia potencial elétrica**, U.

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_A - U_B}$$

integral de linha

qualquer que for o percurso desde A até B.

POTENCIAL ELÉTRICO

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B q\,\vec{E}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

como o integral de $\vec{F}$ não depende do percurso, então o integral de $\vec{E}$ também não. Isso permite-nos definir outra função da posição, V, chamada **potencial elétrico**

$$\boxed{V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

os valores de V_A e V_B podem ser arbitrários, mas $V_A - V_B$ não!

Unidade SI de potencial: volt (V)

$$1\,V = 1\,\frac{J}{C} \quad \text{(joule sobre coulomb)}$$

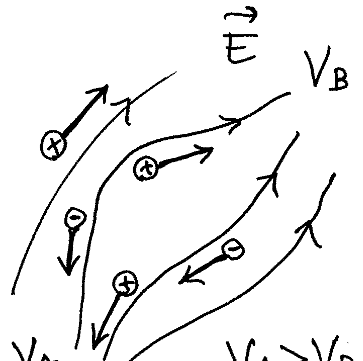
As cargas modificam o espaço à sua volta, criando um campo escalar V (cada ponto do espaço tem um determinado valor numérico V).

Uma carga pontual q, colocada num ponto P onde o potencial for V, terá energia potencial elétrica:

$$\boxed{U = qV}$$

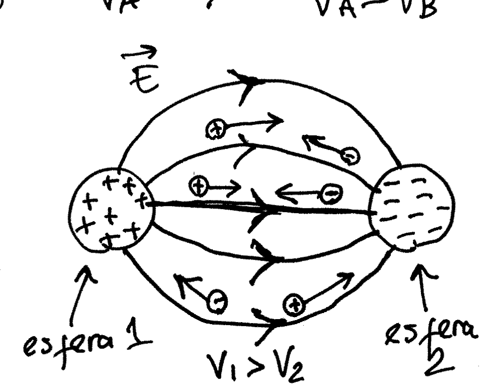
V → propriedade do espaço
U → propriedade da partícula

A definição $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ implica que V diminui na direção das linhas de campo. Quando a partícula acelera, pela ação da força elétrica, ganha energia cinética e, portanto, perde energia potencial elétrica. Ou seja, as partículas deslocam-se para onde a sua energia U diminui.



$U = qV$ implica que as cargas positivas deslocam-se para onde V for menor (no sentido das linhas de campo), e as cargas negativas deslocam-se para onde V for maior (sentido oposto às linhas de campo.

<u>Exemplo</u>: Faísca no gerador de Wimshurst; quando o campo $\vec{E}$ é muito elevado, produz iões positivos e negativos no ar:



Se a distância entre as esferas for 3cm, como o campo necessário para ionizar o ar é $3\times10^6 \frac{N}{C}$, então

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E\,ds \simeq \bar{E}\Delta s \approx \left(3\times10^6 \frac{N}{C}\right)\left(3\times10^{-2} m\right) \approx 90\,000\ V$$

(exemplos: $V_2=0$, $V_1=90000V$; $V_2=-90000V$, $V_1=0$,

CORRENTE ELÉTRICA

Carga transferida (Δq) durante um intervalo (Δt), por unidade de tempo: $I = \left|\frac{\Delta q}{\Delta t}\right|$

A corrente instantânea é: $\boxed{I = \left|\frac{dq}{dt}\right|}$ q = carga transferida, função de t.

unidade SI de corrente: ampere (A) $1A = 1\frac{C}{s}$

No exemplo da faísca no gerador de Wimshurst, se forem transferidas Δq cargas positivas de 1 para 2,

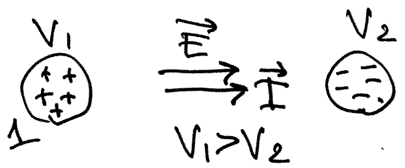
($\Delta q>0$) são também transferidas $-\Delta q$ cargas negativas de 2 para 1.

$I_+ = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ corrente devida aos íões +

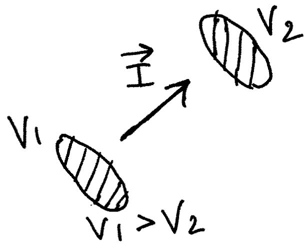
$I_- = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ corrente devida aos íões −

A corrente total é a soma das duas, e não a diferença porque ambas correntes produzem o mesmo efeito: descarregar as esferas 1 e 2 e diminuir as energias U_1 e U_2 das duas esferas (diminuir V_1-V_2).

Como tal, define-se o vetor corrente $\vec{I}$, no sentido do campo elétrico = sentido do movimento das cargas positivas = sentido contrário ao movimento das cargas negativas = sentido de maior para menor potencial.



POTÊNCIA ELÉTRICA



Se a corrente instantânea entre duas regiões com potenciais diferentes, V_1 e V_2, for $\vec{I}$, no intervalo de tempo dt é transferida carga positiva:

$$dq = |\vec{I}|\,dt \text{ de 1 para 2.}$$

(Ou, de forma equivalente, carga negativa, $-|\vec{I}|\,dt$ de 2 para 1; $+\frac{1}{3}|\vec{I}|\,dt$ de 1 para 2 e $-\frac{2}{3}|\vec{I}|\,dt$, de 2 para 1; etc.)

A energia potencial elétrica transferida de 1 para 2 é:

$$dU = dq\,V_1 - dq\,V_2 = dq\,(V_1 - V_2)$$

$\Delta V = |V_1 - V_2|$ chama-se diferença de potencial, ou **voltagem**.

$$\Rightarrow dU = (|\vec{I}|\,dt)\,\Delta V$$

a potência elétrica instantânea (energia transferida por unidade de tempo) é:

$$\boxed{P = \frac{dU}{dt} = |\vec{I}|\,\Delta V}$$

Aula 4. 2019-09-26

Unidades

Corrente: A (ampere)

Carga: $C = A \cdot s$, $A \cdot h = 3600\,C$, $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Campo elétrico: $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$ (força/carga, ou, ΔV/distância)

Potência: $W = \frac{J}{s} = V \cdot A$ (energia/tempo, ou, ΔV vezes corrente)

Energia: $J = W \cdot s = C \cdot V$ (carga vezes potencial)

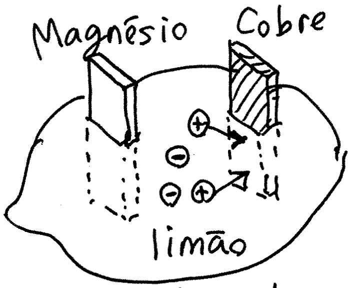
$eV = 1.602 \times 10^{-19} J$ (eletrão-volt)

$W \cdot h = 3600\ J$

PILHAS QUÍMICAS

Oxidação dos metais → reação com o oxigénio, formando um sal; são retirados eletrões do metal.

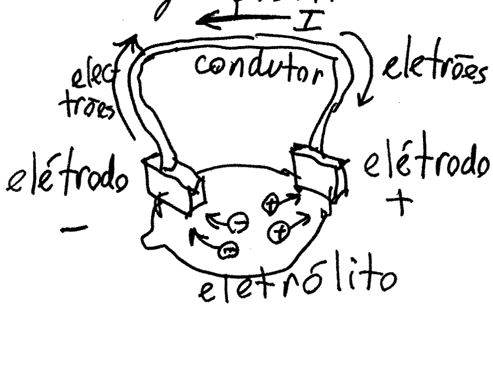
O cobre oxida-se mais facilmente que outros metais, por exemplo, magnésio (é necessária menos energia para retirar eletrões do cobre do que do magnésio).



Qualquer solução, por exemplo, no interior dum limão, tem iões positivos (catiões) e negativos (aniões).

Os iões ⊕ reagem com o cobre, extraindo eletrões. A barra de cobre fica coberta dum sal e com excesso de carga positiva.

Se for ligado algum dispositivo, condutor, entre as barras de cobre e magnésio, as cargas positivas



do cobre circulam pelo condutor até a barra de magnésio, onde atraem iões negativos do eletrólito; produzem-se reações de redução no magnésio (elétrodo −), deixando-o coberto de sal. O processo continua enquanto existam iões no eletrólito.

Carga máxima da pilha: $\boxed{Q_{máx} = eN_+ = |-eN_-|}$

$N_+ = N_-$ = número de iões positivos, ou negativos, no eletrólito

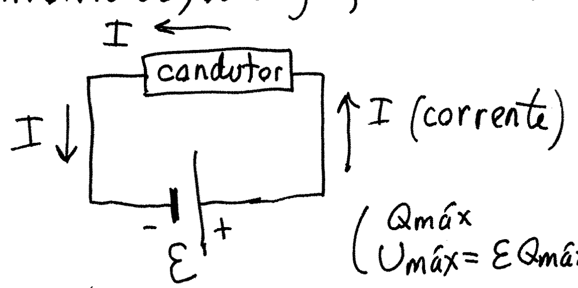
Nas reações de oxidação, no elétrodo +, liberta-se energia ΔU_+ e nas reações de redução, no elétrodo −, perde-se energia elétrica ΔU_- a energia total:

$$\Delta U = \Delta U_+ - \Delta U_-$$

é positiva, porque $\Delta U_+ > \Delta U_-$. Por cada eletrão extraido no cátodo (elétrodo +) e cada eletrão inserido no ânodo (elétrodo −), ΔU é da ordem dos eletrão-volt. Define-se a **força eletromotriz** da pilha: f.e.m. $= \mathcal{E} = \Delta U$ por cada carga elementar

$\mathcal{E}$ é uma constante, independente do tamanho da pilha ou do número de iões no eletrólito, que depende das reações químicas envolvidas, ou seja, dos metais e o eletrólito usado.

<u>Diagrama de circuito</u>



$\left(\begin{array}{l} Q_{máx} \\ U_{máx} = \mathcal{E} Q_{máx} \end{array}\right)$

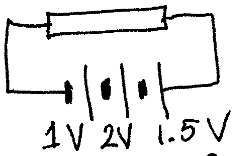
| (+) representa o cátodo (carga positiva; maior potencial) e ❙ representa o ânodo (carga −, menor potencial)

Na passagem pelo condutor, as cargas de condução perdem energia elétrica que é dissipada em calor, devido a colissões entre as cargas de condução e as cargas fixas. A potência elétrica dissipada é:

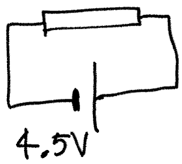
$$P = I(V_+ - V_-) = I\mathcal{E}$$

que é a mesma potência que a pilha fornece. Dentro da pilha os iões não se deslocam sob o efeito do campo elétrico; a energia que as cargas ganham é devida às reações químicas.

<u>Pilhas em série</u>



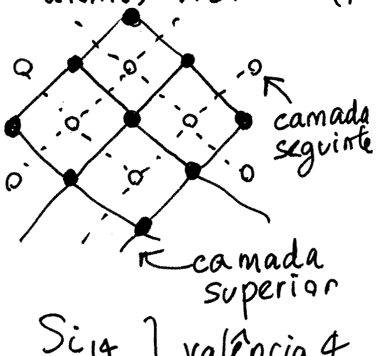
equivalente a



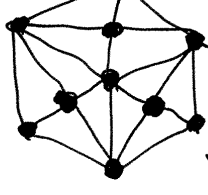
a carga disponível será a menor das cargas disponíveis das 3 pilhas

SEMICONDUTORES

Cristal de silício. Si tem 4 eletrões de valência, que ligam-se as eletrões de valência de outros 4 átomos vizinhos (forças magnéticas). — cada átomo de



Em 3d, a rede cristalina é a repetição de um cubo com 8 átomos nos vértices, mais 6 átomos nos centros das fases



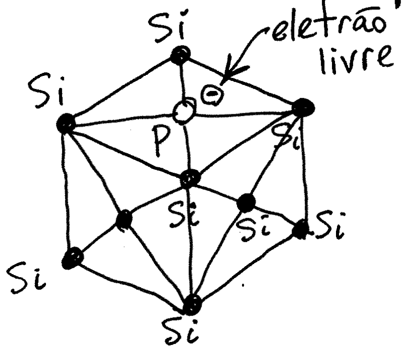
cristal FCC (face centered cubic).

← átomos de silício, ou germânio (valência 4)

Si_{14} } valência 4
Ge_{32}

Aula 5. 2019-09-30

Semicondutor tipo N



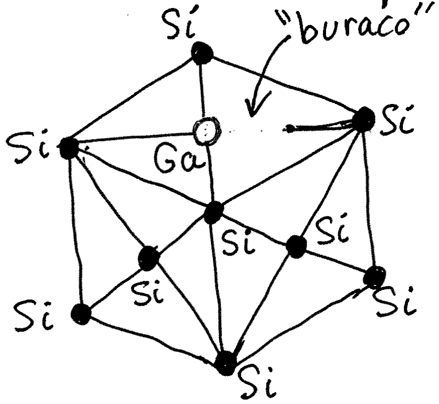
Impureraz de fósforo ou arsénio

P_{15} } valência 5
As_{33}

4 dos eletrões de valência ligados aos quatro vizinhos, ficando um eletrão livre

⟹ <u>cargas de condução negativas</u>

Semicondutor tipo P



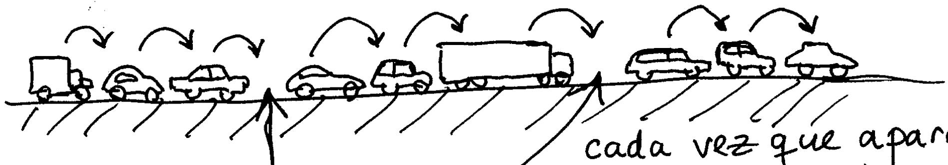
Impurezas de gálio ou índio

Ga_{31} } valência 3
In_{49}

os 3 eletrões de valência ligam-se a 3 vizinhos, deixando um dos vizinhos com um lugar livre para um eletrão (buraco).

⟹ <u>cargas de condução positivas</u> (buracos)

Analogia mecânica:

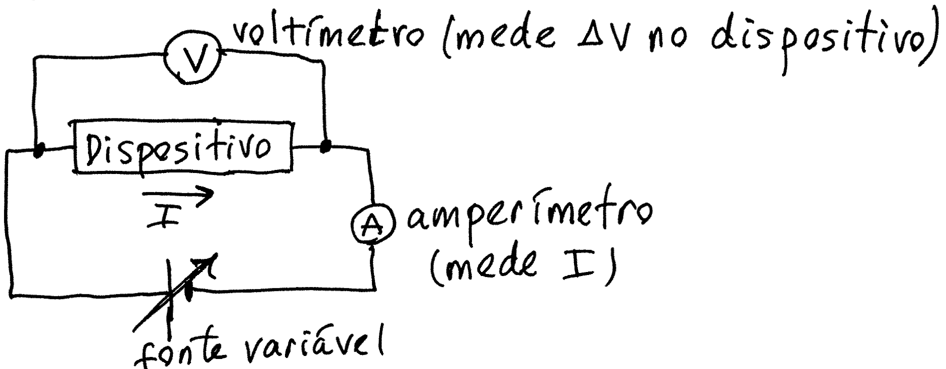


cada vez que aparece um buraco, os automóveis rapidamente o preenchem

buracos

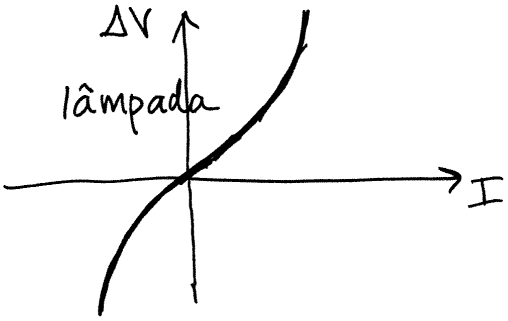
Não vemos os automóveis a andar muito, mas vemos buracos que passam rapidamente para a esquerda.

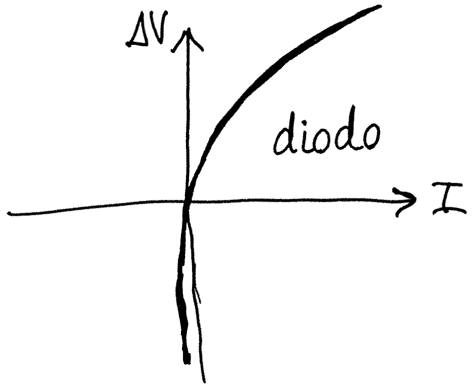
CURVAS CARATERÍSTICAS



Qualquer dispositivo tem uma curva caraterística, que relaciona a voltagem (ΔV) com a corrente (I). Se o dispositivo for passivo, quando $\Delta V=0$, a corrente I também é nula, e trocando os terminais da fonte, ΔV e I mudam ambos de sinal.

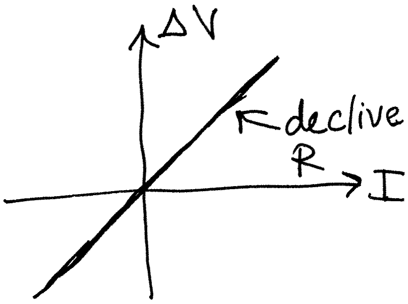
Alguns exemplos:





LEI DE OHM

Alguns condutores (metais, grafite, ...) apresentam uma curva caraterística reta:



$$\boxed{\Delta V = R\,I}$$ lei de Ohm

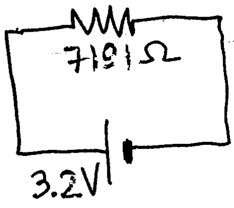
O declive, R, chama-se **resistência** (em inglês, resistance, Unidade SI de resistência: $1\,\Omega = 1\,\dfrac{V}{A}$ (ohm)

O condutor que verifica a lei de Ohm, chama-se ohmico, ou, simplesmente, "resistência" (em inglês, resistor)
A potência dissipada (em calor) numa resistência é:

$$P = I\Delta V = I(RI) = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

O símbolo usado nos circuitos para as resistências é —/\/\/\— .

Exemplo:



A voltagem na resistência é:

$$\Delta V = 3.2\ V$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{3.2}{7191}\,A = 0.445\,mA$$

(de esquerda para direita)

$$P = \frac{3.2^2}{7191}\,W = 1.424\,mW$$

RESISTIVIDADE

A lei de Ohm é consequência da existência de forças dissipativas (sobre os eletrões de condução) diretamente proporcionais à velocidade.

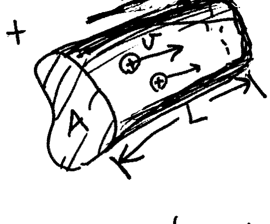
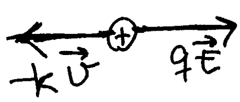


diagrama de forças:



$(\vec{a} = \vec{0})$

$$\Rightarrow kv = qE \Rightarrow v = \frac{q}{k}E$$

Num intervalo Δt, a nuvem de cargas de condução desloca-se: $\Delta s = v\Delta t$ (v constante)

$\Rightarrow$ ΔQ = carga por unidade de volume × volume da nuvem que passa por A.

Se houver n cargas de condução por unidade de volume,

$$\Delta Q = (nq)\times(A\Delta s) = nqA\,v\Delta t = \left(\frac{nq^2}{k}\right)AE\Delta t$$

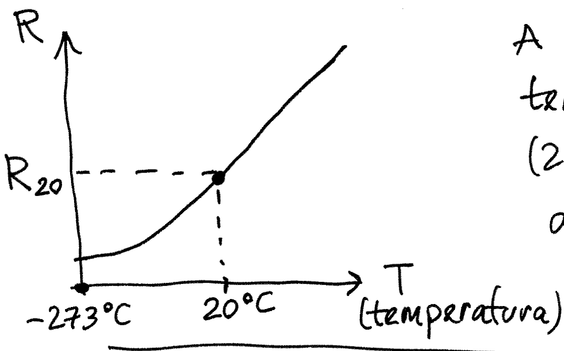
$$\Delta V = E\times L = \left(\frac{k}{nq^2}\right)\frac{L}{A}\,\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

O termo entre parêntesis é uma propriedade de cada material, chamada **resistividade** (ρ). $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ é a corrente I.

$$\Rightarrow \Delta V = RI\,,\ \text{onde}\ \boxed{R = \rho\frac{L}{A}}$$

RESISTÊNCIA E TEMPERATURA

O aumento da temperatura implica maior vibração das moléculas e, portanto, forças dissipativas maiores.
$\Rightarrow$ k aumenta com T $\Rightarrow$ ρ aumenta $\Rightarrow$ R aumenta.



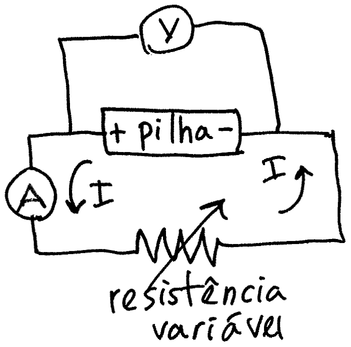
A temperaturas próximas da temperatura de referência (20°C), é suficiente usar uma aproximação linear:

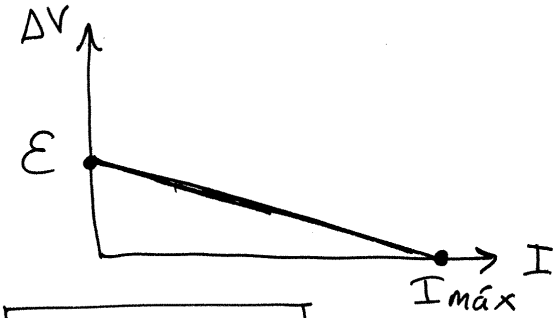
$$\boxed{R(T) = R_{20}\left(1+\alpha_{20}(T-20)\right)}$$

em que o **coeficiente de temperatura**, α_{20}, é uma constante com unidades de $^\circ C^{-1}$, que depende do material e pode ser medida experimentalmente. Observe-se que o declive da reta é $R_{20}\alpha_{20}$, e não α_{20}. Por isso, o valor de α depende da temperatura usada como referência.

Aula 6. 2019-10-03

CARATERÍSTICA DE UMA PILHA



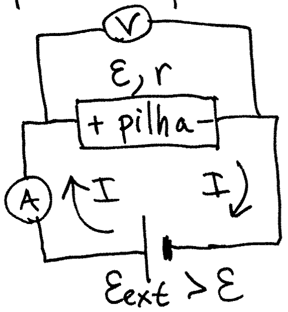


$$\boxed{\Delta V = \mathcal{E} - r I}$$

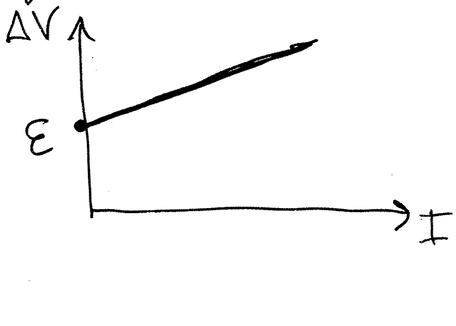
r = resistência interna (declive da recta)

As reações químicas na pilha fornecem potência $\mathcal{E} I$. Uma parte dessa potência, $r I^2$, é dissipada no eletrólito, e a restante, $\Delta V I$, é fornecida ao circuito ligado à pilha

Quando a pilha está descarregada, r aumenta e a corrente máxima, $I_{máx}$, (ou ΔV) pode não ser suficiente para o funcionamento do circuito.



Se a pilha for recarregável, uma fonte externa com fem $\mathcal{E}_{ext}$ maior que $\mathcal{E}$ pode usar-se para recarregar a pilha. O sentido da corrente agora é inverso e a caraterística é:



$$\boxed{\Delta V = \mathcal{E} + r I}$$

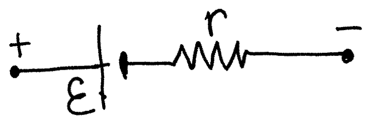
$(\Delta V \geq \mathcal{E})$

a pilha absorve potência $\Delta V I$. Uma parte, $r I^2$ é dissipada no eletrólito.

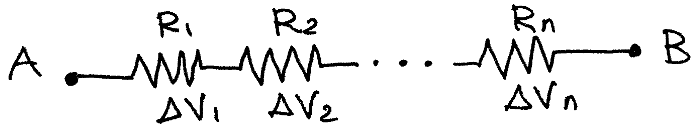
Modos de funcionamento de uma pilha

- **gerador.** I sai do elétrodo + e entra no −. $\Delta V \leq \varepsilon$
  $\Delta V = \varepsilon - rI$
  fornece energia
- **recetor.** I sai do elétrodo − e entra no +. $\Delta V \geq \varepsilon$
  $\Delta V = \varepsilon + rI$. Absorve energia.

Diagrama de circuito de uma pilha



RESISTÊNCIAS EM SÉRIE



Se $V_A > V_B \Rightarrow$ circula corrente I, de A para B, através de todas as resistências.

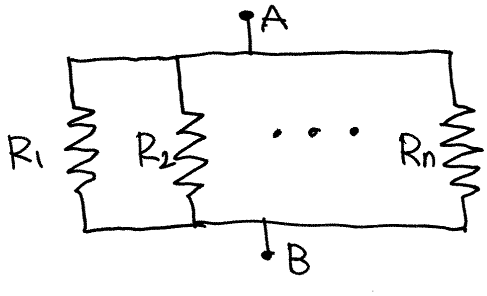
$$\Delta V = V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)\, I \quad \text{(lei de Ohm)}$$

circuito equivalente.

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$$

RESISTÊNCIAS EM PARALELO



Se $V_A > V_B$, circulam correntes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ pelas resistências, todas de A para B

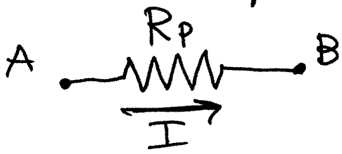
A corrente I que entra por A e sai por B é a soma de todas essas correntes. A diferença de potencial é igual em todas as resistências

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_n = V_A - V_B = \Delta V$$

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \cdots + \frac{\Delta V}{R_n}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)^{-1} I \quad \text{(lei de Ohm)}$$

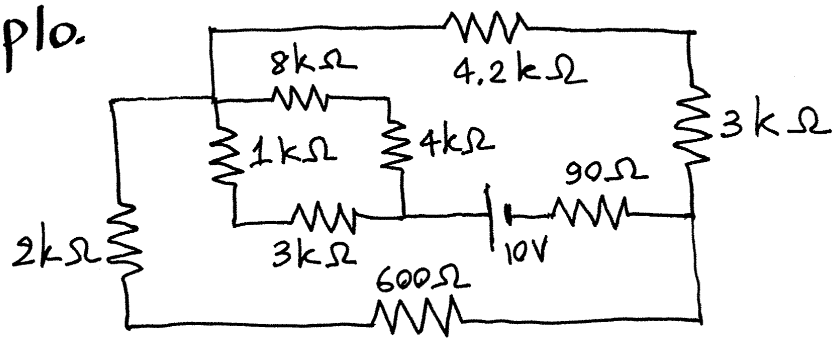
circuito equivalente.



$$\boxed{R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)^{-1}}$$

caso particular, $n = 2$: $\quad R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Exemplo.



Determine a voltagem e corrente em cada resistência.

Resolução. Usaremos unidades de kΩ para as resistências e volt para a f.e.m. Como tal, as correntes obtidas estarão em mA.
Simplifica-se o circuito em vários passos, combinando resistências em série ou paralelo, até ficar com apenas uma resistência. A seguir regressa-se passo a passo aos circuitos anteriores:

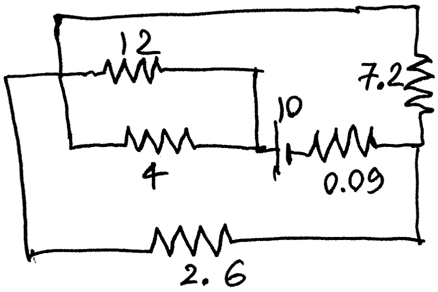
série (inicialmente não há nada em paralelo)

① $8+4=12$

$1+3=4$

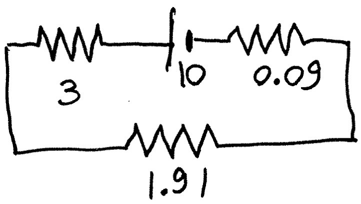
$4.2+3=7.2$

$2+0.6=2.6$

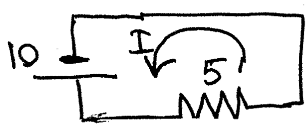


② $\dfrac{4\times 12}{4+12}=3$ (paralelo)

$\dfrac{2.6\times 7.2}{2.6+7.2}=1.91$ (paralelo)



③ $3+1.91+0.09=5$



⑦ $I_8=I_4=0.5$

$\Delta V_4=4\times 0.5=2,\ \Delta V_8=8\times 0.5=4$

$I_1=I_3=1.5$

$\Delta V_1=1\times 1.5=1.5,\ \Delta V_3=3\times 1.5=4.5$

$I_{4.2}=I_3=0.53$

$\Delta V_{4.2}=4.2\times 0.53=2.23,\ \Delta V_3=1.59$

$I_2=I_{0.6}=1.47$

$\Delta V_2=2\times 1.47=2.94,\ \Delta V_{0.6}=0.88$

⑥ $\Delta V_4=\Delta V_{12}=6$

$I_4=\frac{6}{4}=1.5,\ I_{12}=\frac{6}{12}=0.5$

$\Delta V_{2.6}=\Delta V_{7.2}=3.82$

$I_{2.6}=\frac{3.82}{2.6}=1.47,\ I_{7.2}=0.53$

⑤ $I_3=I_{0.09}=I_{1.91}=I=2$

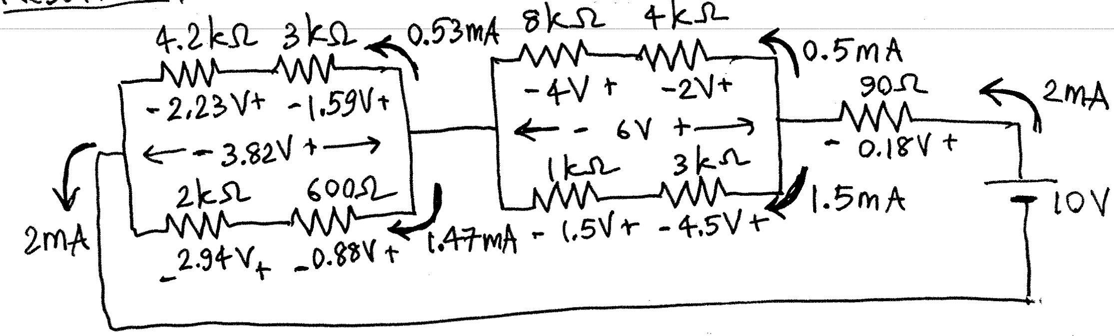
$\Delta V_3=3\times 2=6$

$\Delta V_{0.09}=0.09\times 2=0.18$

$\Delta V_{1.91}=1.91\times 2=3.82$

④ $I=\dfrac{10}{5}=2\ (mA)$

Resultado:

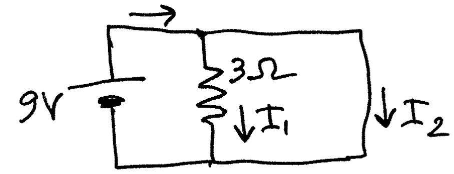


Aula 7. 2019-10-07

"curto-circuito": $R=0$

Note-se que $\Delta V = RI$ implica $\Delta V = 0$, se I for finita mas se $I \to \infty$, ΔV poderá ter qualquer valor.

Exemplo:



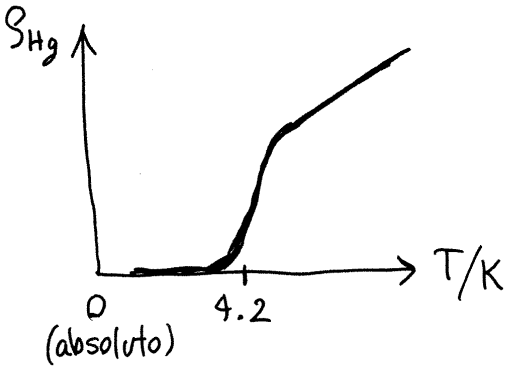
em $R = 3\,\Omega$:

$\Delta V = 9\,V$, $I_1 = 3A$

$I_2 = \infty$ $\quad I = I_1 + I_2 = \infty$

Este é um exemplo idealizado, mas cada vez estamos mais próximos de termos fontes ideais ($r=0$). e curto-circuitos ideais ($R=0$)

SUPERCONDUTIVIDADE

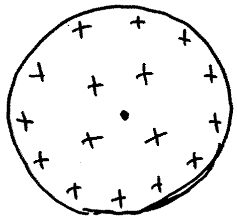


Em algus materias (supercondutores) a resistividade decresce abruptamente quando T for menor que uma temperatura crítica. No mercúrio, $T_{crítica} \approx 4.2$ K

CAPACIDADE ELÉTRICA

Num condutor isolado, com carga Q, o campo elétrico é diretamente proporcional a $|Q|$.

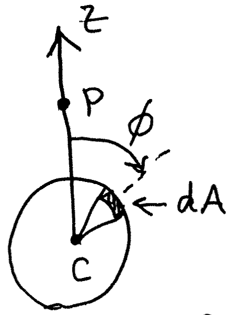
Campo de uma esfera condutora de raio R, com carga Q, isolada (apêndice B).



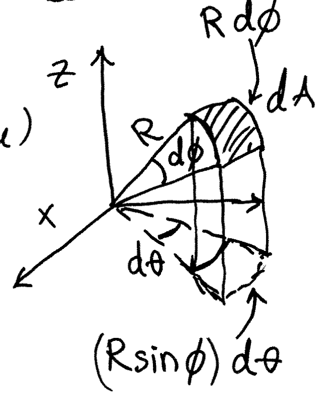
A mobilidade das cargas faz com que a carga fique distribuida na superfície, de forma uniforme, com carga superficial

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Para calcular o campo $\vec{E}$ num ponto P, escolhe-se o eixo dos z com origem no centro da esfera e passando por P. Divide-se a superfície da esfera em pedaços com área infinitesimal dA.



Em coordenadas esféricas,
ϕ = ângulo com o eixo dos z. (latitude)
θ = ângulo da projeção no plano xy com o eixo dos X (longitude)

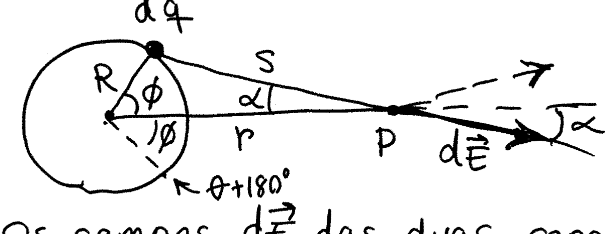


aumentando ϕ em $d\phi$ e θ em $d\theta$, obtem-se uma área infinitesimal na esfera: $dA = R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$

que terá carga: $dq = \dfrac{Q}{4\pi} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$

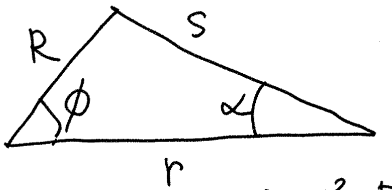
Admite-se que dq é carga pontual. Pela lei de Coulomb, o módulo do campo produzido por dq em P é:

$$dE = \frac{k\,|dq|}{s^2} = \frac{k|Q|}{4\pi} \, \frac{\sin\phi \, d\phi \, d\theta}{s^2}$$



Os campos $d\vec{E}$ das duas cargas em (ϕ, θ) e $(\phi, \theta + 180°)$ somam-se, produzindo um campo na direção de $\hat{k}$:

$$d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = dE\,\hat{k} \quad , \quad dE = \frac{k|Q|}{2\pi} \, \frac{\sin\phi \cos\alpha}{s^2} \, d\phi \, d\theta$$



lei dos cossenos:

$$\begin{cases} R^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha \\ s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{r^2+s^2-R^2}{2rs} \\ \cos\phi = \dfrac{r^2+R^2-s^2}{2rR} \end{cases}$$

derivada em ordem a ϕ:

$$-\sin\phi = -\frac{s}{rR}\frac{ds}{d\phi}$$

$$\Rightarrow dE = \left(\frac{k|Q|}{4\pi}\right)\left(\frac{r^2+s^2-R^2}{Rr^2s^2}\right) ds\, d\theta$$

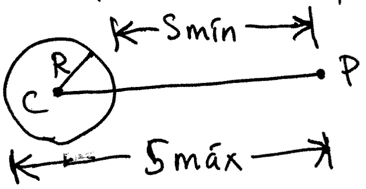
O campo total da esfera será o integral:

$$E = \int_0^{\pi}\int_{S_{mín}}^{S_{máx}} dE = \left(\frac{k|Q|}{4Rr^2}\right)\int_{S_{mín}}^{S_{máx}} \frac{r^2+s^2-R^2}{s^2}\, ds$$

$$E = \left(\frac{k|Q|}{4Rr^2}\right)\left((S_{máx}-S_{mín}) + (R^2-r^2)\left(\frac{1}{S_{máx}} - \frac{1}{S_{mín}}\right)\right)$$

Há dois casos (P fora ou dentro da esfera).

1 P fora da esfera ($r > R$)



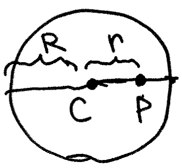
$S_{máx} = r+R$, $S_{mín} = r-R$

$S_{máx} - S_{mín} = 2R$

$$\frac{1}{S_{máx}} - \frac{1}{S_{mín}} = \frac{r-R-(r+R)}{r^2-R^2} = \frac{-2R}{r^2-R^2}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{k|Q|}{4Rr^2}\right)(2R+2R) \qquad \boxed{E = \frac{k|Q|}{r^2}}$$

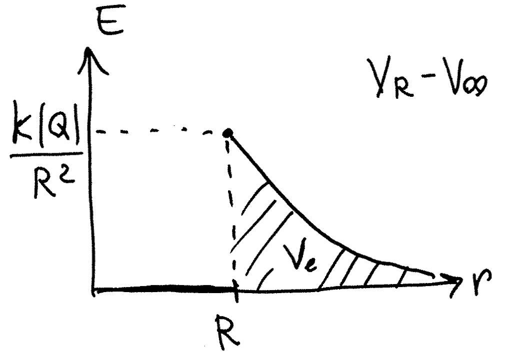
2 dentro ($r < R$)



$S_{máx} = R+r$, $S_{mín} = R-r$

$S_{máx} - S_{mín} = 2r$

$$\frac{1}{S_{máx}} - \frac{1}{S_{mín}} = \frac{R-r-(R+r)}{R^2-r^2} = -\frac{2r}{R^2-r^2} \Rightarrow \boxed{E=0}$$



$$V_R - V_\infty = \int_R^\infty E\,dr = \text{potencial } V_e \text{ na esfera}$$
(arbitrando $V=0$ em $r\to\infty$)

$$V_e = k|Q|\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{k|Q|}{R}$$

O potencial na esfera (e em qualquer condutor isolado) é diretamente proporcional à carga $|Q|$.
A constante de proporcionalidade, que depende do tamanho e forma geométrica do condutor, define a **capacidade** do condutor:

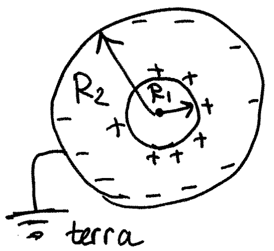
$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V}}$$

medida em coulomb sobre volt.
$1\,\text{F} = 1\,\frac{\text{C}}{\text{V}}$ (um farad).

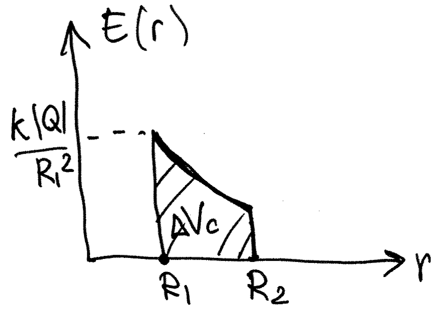
A capacidade da esfera de raio R é $\boxed{C_e = \frac{R}{k}}$

CONDENSADORES.

Se o integral sob a função $E(r)$ fosse menor, V seria também menor, e a capacidade C maior. Isso consegue-se colocando outro condutor perto do primeiro, ligado a terra ($V_{terra}=0$).



$$\Delta V = k|Q|\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = k|Q|\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

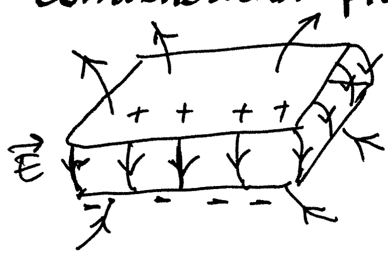


capacidade do condensador esférico:

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{R_1 R_2}{k(R_2-R_1)}}$$

Aula 8 . 2019-10-10

Condensador plano. Formado por duas armaduras planas, de área A, paralelas e separadas uma distância d. O campo elétrico entre as armaduras é muito maior que o campo fora. Como tal, uma boa aproximação é considerar o condensador plano como uma parte, de área A, num condensador esférico com raios muito elevados:

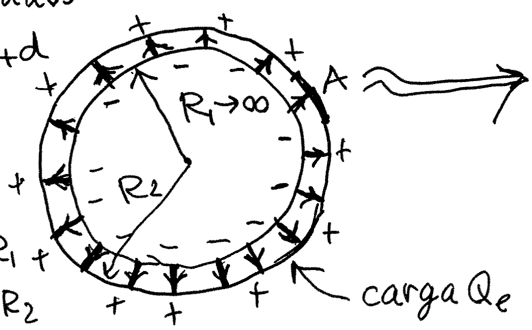


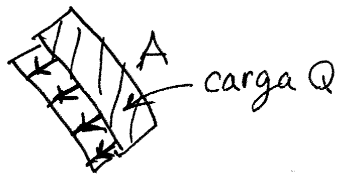
$R_2 = R_1 + d$

$R_1 \to \infty$

$Q_e \to \infty$

$$E = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ 0, & r > R_2 \\ \dfrac{k|Q_e|}{r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$





$$Q = \left(\frac{A}{4\pi R_1^2}\right) Q_e$$

$$\Longrightarrow E = \frac{k}{r^2}\left(\frac{4\pi R_1^2}{A}\right) Q$$

No limite $R_1 \to \infty \Longrightarrow R_2 \to \infty$ e $Q_e \to \infty$ (mas Q é finita e $d = R_2 - R_1$ também)

se: $R_1 \leq r \leq R_2 \Longrightarrow r \to R_1$

$$E \to \frac{k}{R_1^2}\left(\frac{4\pi R_1^2}{A}\right) Q = \frac{4\pi k Q}{A} \quad \text{(constante!)}$$

$$\Delta V = \int_0^d E\, ds = \frac{4\pi k d}{A} Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{C_{plano} = \frac{A}{4\pi k d}}$$

(usando $Q > 0$ e $\Delta V > 0$)

CONDENSADORES COM DIELÉCTRICO

Em qualquer condensador, com qualquer forma, se for inserido um material com constante dielétrica K entre as armaduras, o campo E entre as armaduras diminui num fator K:

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad (E_0 = \text{campo sem dielétrico})$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta V = \frac{\Delta V_0}{K} \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = K\left(\frac{Q}{\Delta V_0}\right)$$

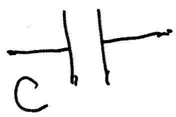
$$\Longrightarrow \quad \boxed{C = K C_0}$$

C_0 = capacidade sem dielétrico
C aumenta num fator K

O campo elétrico máximo (rigidez dielétrica) também é maior num dielétrico. Como tal, o uso do dielétrico também aumenta a voltagem máxima que o condensador suporta, sem descarregar:

$$\Delta V_{máx} = d\,E_{máx} \qquad (E_{máx} = \text{rigidez dielétrica})$$

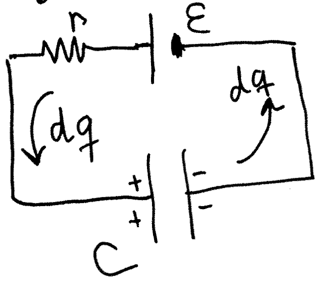
Diagrama de circuito dos condensadores:



a voltagem é diretamente proporcional à carga armazenada.

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{C}}$$

Energia elétrica num condensador



Quando o condensador, descarregado, for ligado a uma bateria, a cada intervalo infinitesimal, dt, o cátodo fornece carga dq numa armadura,

e o ânodo retira carga dq da outra armadura.
O condensador acumula carga que aumenta, até o instante em que $\Delta V = \frac{Q}{C}$ aumente até o valor da f.e.m. $\mathcal{E}$.
Se num instante houver já carga total q no condensador ($q < C\mathcal{E}$), a carga dq que entra na armadura com carga $+q$, mas a carga dq que sai da armadura com carga $-q$, acrescenta energia:

$$dU = V_+ dq - V_- dq = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

A energia que ficará armazenada no condensador, quando este atingir a sua carga final Q (estado estacionário) é:

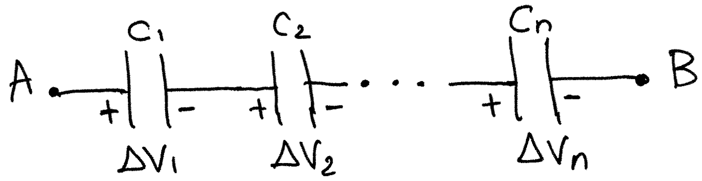
$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right)$$

que pode ser escrito também em função de ΔV:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V}$$

tal como uma pilha, o condensador armazena carga e energia que pode ser usada para alimentar circuitos.
A diferença das pilhas,
a energia do condensador é $\frac{1}{2} Q \Delta V$, e não $Q\mathcal{E}$ como nas pilhas, porque o condensador tem uma força eletromotriz que diminui proporcionalmente à carga armazenada Q. A vantagem é que o condensador carrega/descarrega rapidamente.

CONDENSADORES EM SÉRIE



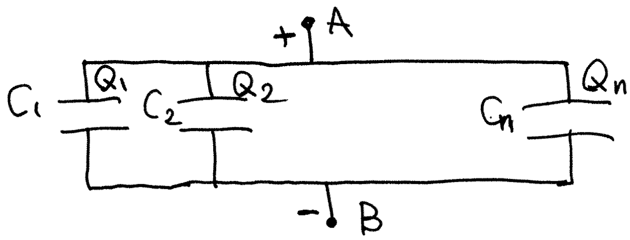
$$V_A - V_B = \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n$$

$\boxed{\text{A carga armazenada em todos os condensadores é a mesma } (Q)}$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) Q$$

$$\Rightarrow \boxed{C_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}}$$

CONDENSADORES EM PARALELO



$$\Delta V = V_A - V_B = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_n$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V + \cdots + C_n \Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

Nos circuitos com baterias e condensadores, pode encontrar-se ΔV e Q em cada condensador, usando o mesmo método usado nos circuitos com resistências.

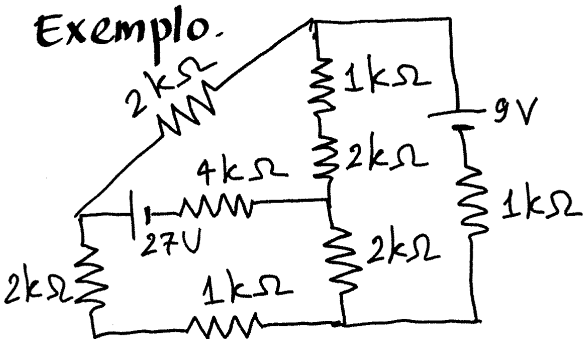
Em vez da lei de Ohm, usa-se $\Delta V = \dfrac{Q}{C}$

Aula 9. 2019-10-14

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

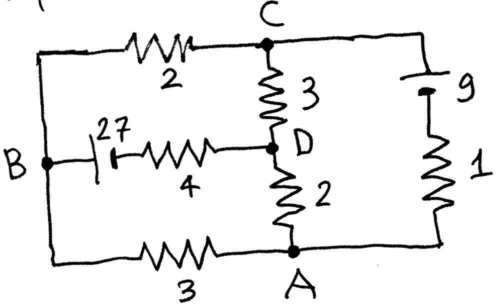
Com uma ou várias fontes com f.e.m. constante.
O objetivo é determinar ΔV e I em cada elemento.

Exemplo.



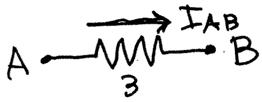
Unidades:
$\Delta V \to$ V
$R \to$ kΩ
$I \to$ mA

Após combinar as resistências em série:



O método do capítulo 3 falha, porque não há mais combinações em série ou paralelo.

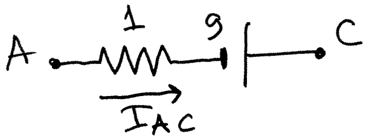
O circuito tem 6 **ramos**: AB, BC, AD, AC, BD e CD
(por conveniência, usaremos ordem alfabética, ou seja, AC e não CA)
Em cada ramo a lei de Ohm relaciona a voltagem e corrente

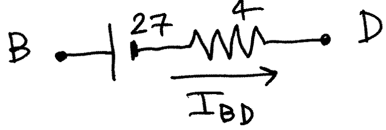


$V_{A/B} = V_A - V_B =$ potencial de A, relativo a B.
I_{AB} = corrente do ponto A para o ponto B

$V_{A/B} = 3 I_{AB}$, $V_{B/C} = 2 I_{BC}$, $V_{A/D} = 2 I_{AD}$, $V_{C/D} = 3 I_{CD}$

Nos dois ramos onde há fontes:





$V_{A/C} = I_{AC} - 9$ $\qquad$ $V_{B/D} = 4 I_{BD} + 27$

Temos 12 variáveis (voltagem e corrente em 6 ramos) e apenas 6 equações. As 6 equações que faltam são obtidas a partir das:

LEIS DE KIRCHHOFF

① Lei das malhas (voltagens): Em cada malha (percurso fechado no circuito), a soma algébrica das voltagens é nula.

No exemplo acima, as equações das malhas ABD, BCD e CAD são:

(é facil de corroborar, porque $V_{X/Y} = V_X - V_Y$)

$$\begin{cases} V_{A/B} + V_{B/D} - V_{A/D} = 0 \\ V_{B/C} + V_{C/D} - V_{B/D} = 0 \\ -V_{A/C} + V_{A/D} - V_{C/D} = 0 \end{cases}$$

② Lei do nós (correntes): Em cada nó (ponto comúm a três ou mais ramos), a soma algébrica das correntes é nula.

No exemplo, nos 3 nós A, B e C, e arbitranto $I>0$ se sair do nó e $I<0$ se entrar,

$$\begin{cases} I_{AB} + I_{AC} + I_{AD} = 0 \\ I_{BC} + I_{BD} - I_{AB} = 0 \\ I_{CD} - I_{AC} - I_{CB} = 0 \end{cases}$$

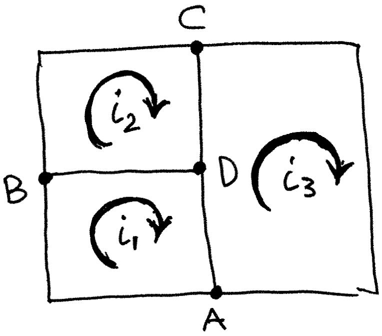
Podem escreverem-se mais equações de malha, e de nó, mas serão dependentes das 6 já escritas.

Em vez de resolvermos as 12 equações, com 12 variáveis, há um método que permite reduzir as equações a apenas 3, com 3 variáveis.

MÉTODO DAS MALHAS

As variáveis serão as correntes nos 3 ramos na periferia do circuito: $I_{AB} = i_1$, $I_{BC} = i_2$, $I_{AC} = -i_3$
(convém que sigam o mesmo sentido, neste caso contrário aos ponteiros do relógio.)

As correntes nos outros três ramos obtêm-se pelas leis dos nós:



$$I_{AD} = i_1 - i_3$$
$$I_{BD} = i_1 - i_2$$
$$I_{CD} = i_2 - i_3$$

As 6 expressões das correntes são fáceis de obter admitindo que i_1, i_2 e i_3 são **correntes de malha**, em cada uma das 3 malhas (todas no mesmo sentido). Num ramo que pertence a apenas uma malha, a corrente é a corrente dessa malha. Nos ramos entre duas malhas a corrente é a diferença entre as correntes dessas duas malhas.

As 3 equações das malhas, em função de (i_1, i_2, i_3), são:

$$\begin{cases} 3i_1 + 4(i_1 - i_2) + 27 + 2(i_1 - i_3) = 0 \\ 2i_2 + 3(i_2 - i_3) + 4(i_2 - i_1) - 27 = 0 \\ i_3 + 9 + 2(i_3 - i_1) + 3(i_3 - i_1) = 0 \end{cases}$$

que é um sistema linear. De forma matricial, o sistema é:

$$\boxed{\mathbb{R}\, \mathbb{i} = \mathcal{E}}$$

(forma matricial da lei de Ohm)

matriz 3×1, com valores de f.e.m.

matriz 3×3 com valores de resistências

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

e a sua solução é:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{-1}\,\mathcal{E}$$

Sem fazer a análise que fizemos, para obter as equações das malhas, as matrizes $\mathbb{R}$ e $\mathcal{E}$ podem ser escritas imediatamente, apenas olhando para o circuito:

- $R_{n,n}$ = soma de todas as resistências na malha n.
- $R_{n,m}$ $(n \neq m)$ = − soma de todas as resistências na fronteira das malhas n e m
- $\mathcal{E}_n$ = soma de todas as f.e.m. na malha n. Positiva, se i_n passa de ▮ para |, ou negativa, se passa de | para ▮

No nosso exemplo:

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -2 \\ -4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} -27 \\ 27 \\ -9 \end{bmatrix}$$

No Maxima, a solução do sistema obtém-se assim:

```
(%i1) invert(matrix([9,-4,-2],[-4,9,-3],[-2,-3,6])).[-27,27,-9];
```

ponto (produto matricial)

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$i_1 = -3, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = -2$

E com esses valores obtêm-se as voltagens e correntes.

Por exemplo: $I_{BD} = i_1 - i_2 = 4$ mA (corrente de B para D)

$V_{BD} = 4 I_{BD} + 27 = 43$ V $(V_B > V_D)$

Aula 10. 2019-10-17

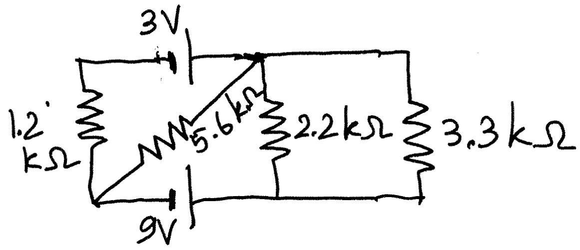
MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

Circuito com n f.e.m.s $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$. $\Rightarrow$ Resolvem-se n circuitos mais simples, em que o circuito j tem apenas uma das f.e.m., $\mathcal{E}_j$, e as outras foram desativadas ($\mathcal{E}_m = 0$, se $m \neq j$), ou seja, substituídas por um curto-circuito.

As voltagens/correntes no circuito original são as somas das voltagens/correntes nos n circuitos

Exemplo:

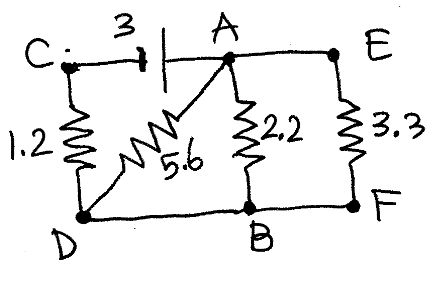
Determine as voltagens e correntes nos 6 elementos no circuito



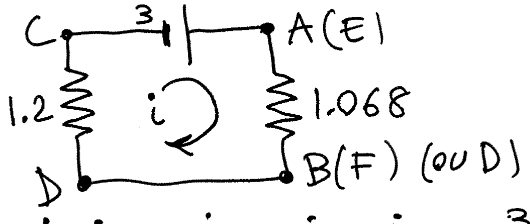
Resolução.

Unidades: $R \to k\Omega$, $\Delta V \to V$, $I \to mA$

① Circuito apenas com a f.e.m de 3V



$$R_{AD} = \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3}\right)^{-1} = 1.068$$



$$i = i_{AB} = i_{BD} = i_{DC} = i_{CA} = \frac{3}{1.2 + 1.068} = 1.323$$

$$V_{A/B} = V_{A/D} = V_{E/F} = 1.068\, i_{AB} = 1.413$$

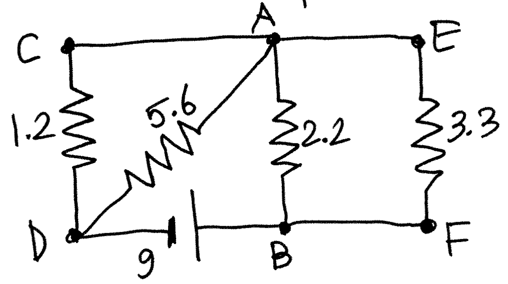
$$V_{D/C} = 1.2\, i_{DC} = 1.587$$

$$i_{AB} = \frac{V_{A/B}}{2.2} = 0.642$$

$$i_{AD} = \frac{V_{A/D}}{5.6} = 0.253$$

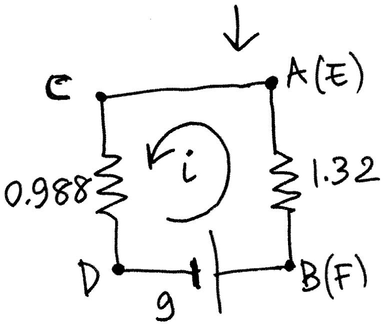
$$i_{EF} = \frac{V_{E/F}}{3.3} = 0.428$$

② Circuito apenas com a f.e.m. de 9V.



$$R_{AB} = \frac{2.2 \times 3.3}{2.2 + 3.3} = 1.32$$

$$R_{AD} = \frac{1.2 \times 5.6}{1.2 + 5.6} = 0.988$$



$$i = I_{BA} = I_{FE} = I_{CD} = I_{AD} = I_{DB}$$

$$= \frac{9}{0.988 + 1.32} = 3.899$$

$V_{C/A} = 0 \qquad V_{B/D} = 9$

$V_{B/A} = V_{F/E} = 1.32\, i = 5.147$

$V_{A/D} = V_{C/D} = 0.988\, i = 3.853$

circuito anterior:

$$i_{CD} = \frac{V_{C/D}}{1.2} = 3.211$$

$$i_{AD} = \frac{V_{A/D}}{5.6} = 0.688$$

$$i_{AC} = i_{CD} = 3.211$$

$$i_{B/A} = \frac{V_{B/A}}{2.2} = 2.339$$

$$i_{FE} = \frac{V_{F/E}}{3.3} = 1.560$$

$$i_{DB} = i = 3.899$$

	circuito 1		circuito 2		total	
RAMO (XY)	$V_{X/Y}$	i_{XY}	$V_{X/Y}$	i_{XY}	$V_{X/Y}$	I_{XY}
AB	1.413	0.642	−5.147	−2.339	−3.734	−1.697
EF	1.413	0.428	−5.147	−1.560	−3.734	−1.132
AD	1.413	0.253	3.853	0.688	5.266	0.941
CD	−1.587	−1.323	3.853	3.211	2.266	1.888
AC	3	−1.323	0	3.211	3	1.888
BD	0	1.070	9	−3.899	9	−2.829

CIRCUITOS COM CONDESADORES E RESISTEN.

① Admitindo que em $t=0$ todos os condensadores estão descarregados,

$Q_0 = 0 \Rightarrow \Delta V_0 = 0$, mas $I_0 = \frac{dQ}{dt}$ = qualquer valor (em cada condensador)

Cada condensador é equivalente a ~~um~~ curto-circuito (interruptor fechado), onde $\Delta V = 0$ mas há corrente.

② $t \to \infty$. O circuito atinge um **estado estacionário** em que cada condensador tem a carga máxima que pode ter nesse circuito.

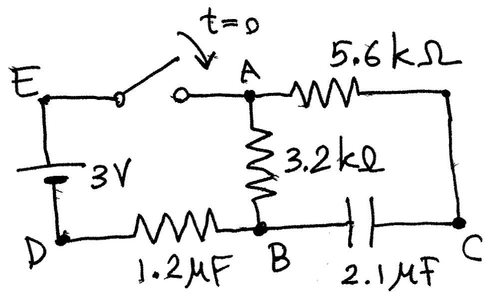
$\Rightarrow Q_\infty = \text{constante} \Rightarrow I_\infty = \frac{dQ}{dt} = 0$, mas ΔV_∞ = qualquer

Cada condensador é equivalente a um interruptor aberto.

③ Num tempo intermédio (**estado transitório**), $\Delta V \neq 0$ e $I \neq 0$ em cada condensador $(Q=0, Q \neq Q_{máx})$

Cada condensador é equivalente a uma f.e.m. com $\varepsilon = \frac{Q}{C}$

Exemplo: Em $t=0$, quando o condensador está descarregado, fecha-se o interruptor, e volta a abrir-se em

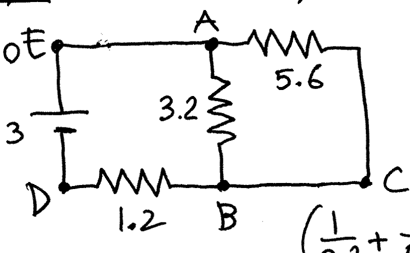


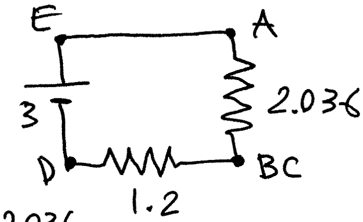
$t_1 \gg 0$ (muito tempo após $t=0$). Determine a corrente na resistência de 5.6 kΩ, em $t=0$ e $t=t_1$

Aula 11. 2019-10-21

Resolução: (R → kΩ, ΔV → V, I → mA)

(a) $t=0$



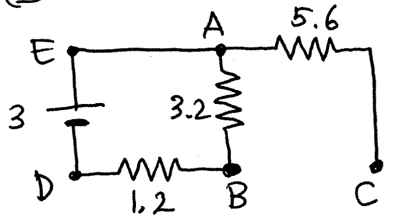


$$\left(\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.6}\right)^{-1}=2.036$$

$I_{DE}=I_{ABC}=I_{BCD}=\frac{3}{3.236}=0.927$ $V_{A/C}=2.036\,I_{ABC}=1.888$

corrente na resistência 5.6 kΩ: $\boxed{I_{AC}=\frac{V_{A/C}}{5.6}=0.337\text{ mA}}$

(b) $t\to t_1^-$ (t próximo de t_1, sem ser t_1)

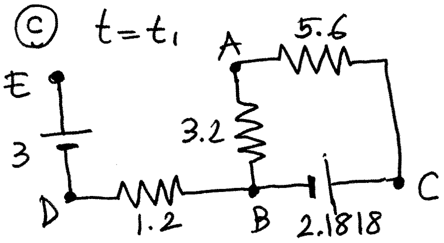


$\boxed{I_{AC}=0}$

$I_{AB}=\frac{3}{4.4}=0.618$

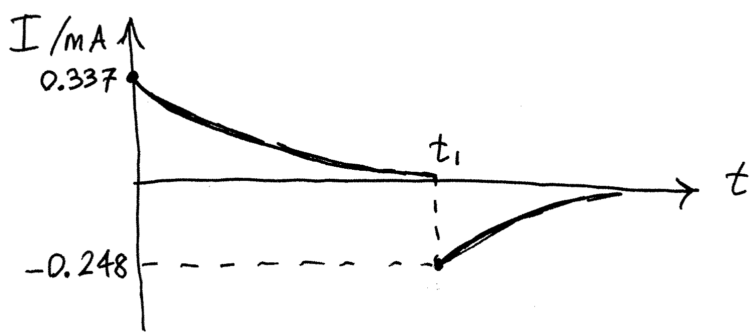
$V_{C/B}=V_{A/B}=3.2\,I_{AB}=2.1818$

(c) $t=t_1$



$\boxed{I_{AC}=-\frac{2.1818}{8.8}=-0.248\text{ mA}}$

Gráfico da corrente na resistência de 5.6 kΩ

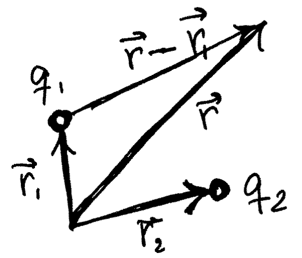


CAMPO ELÉCTRICO DE CARGAS PONTUAIS

n cargas pontuais

$q_1, q_2, \cdots, q_n$

nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$



A distância desde q_i até a posição $\vec{r}$ é $|\vec{r}-\vec{r}_i|$ e o versor na reta que passa por q_i e a posição $\vec{r}$ é $\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

O campo produzido por q_i, na posição $\vec{r}$, é:

$$\vec{E}_i = \frac{k\,q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right) = k\,\frac{q_i\,(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

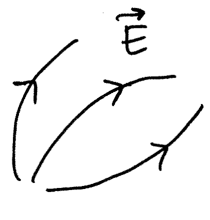
O campo total, das n cargas, na posição $\vec{r}$ é:

$$\boxed{\vec{E} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}}$$

$$E_x = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\,(x-x_i)}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{3/2}}$$

e formas semelhantes para E_y, E_z

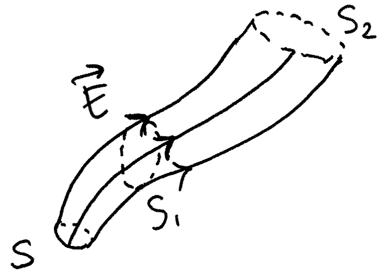
FLUXO ELÉTRICO



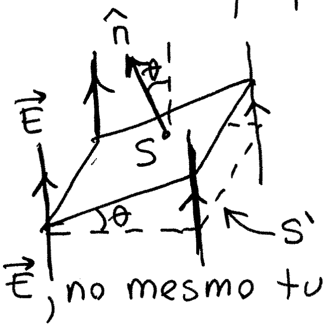
Admite-se que em cada ponto $\vec{E}$ é a velocidade do "fluido" elétrico. O fluxo elétrico, Φ_s, através de uma superfície S, é a quantidade de fluido elétrico que passa através de S, por unidade de tempo. Se $\vec{E}$ for constante (em S) e perpendicular a S, o fluxo é:

$$\Phi_s = E\,A \qquad (A = \text{área de } S)$$

Tubos de fluxo. Todas as linhas de campo que atravessam uma superfície S formam um volume chamado <u>tubo de fluxo</u> (de S). Em qualquer superfície obtida cortando o fluxo ($S_1, S_2, \ldots$) o fluxo é o mesmo: $\Phi_S = \Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \ldots$



Isso permite determinar o fluxo numa superfície S que não seja perpendicular às linhas de campo.



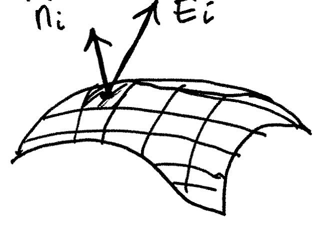
$\hat{n}$ = versor normal a S

θ = ângulo entre $\hat{n}$ e $\vec{E}$

S' = superfície perpendicular a $\vec{E}$, no mesmo tubo de fluxo de S. $\Longrightarrow \Phi_S = \Phi_{S'} = EA' = EA\cos\theta$

$\Longrightarrow \boxed{\Phi_S = (\vec{E}\cdot\hat{n})\,A}$ (se $\vec{E}$ for constante em S).

Para determinar o fluxo de um campo qualquer, através duma superfície qualquer, divide-se a superfície em m partes muito pequenas de área $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_m$ e admite-se $\vec{E}$ constante em cada uma delas

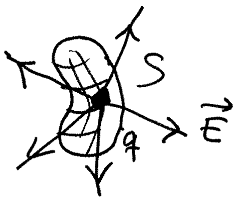


$$\Phi_S \approx \sum_{i=1}^{m} (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i)\,\Delta A_i$$

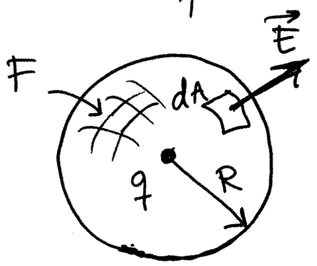
A aproximação é exata no limite $m \to \infty$ $(\Delta A_i \to 0)$, em que a soma passa a ser um integral com duas variáveis:

$$\Phi_S = \iint\limits_S (\vec{E} \cdot \hat{n})\, dA \qquad \begin{pmatrix} dA = dx\,dy = dx\,dz = \\ = r\,d\theta\,dr = \cdots \end{pmatrix}$$

LEI DE GAUSS



Fluxo de uma carga pontual q, através de uma superfície fechada S. Se q estiver dentro de S, todas as linhas de campo atravessam S e uma esfera, de raio arbitrário R, com centro em q.



$\Phi_S = \Phi_F$ (F = esfera com centro q)

Como $\vec{E}$ é perpendicular a F e o seu módulo é constante nela:

$$E_F = \frac{k|q|}{R^2}$$

$$\Rightarrow \Phi_F = E_F A_F = \left(\frac{k|q|}{R^2}\right)(4\pi R^2) = 4\pi k|q|$$

retira-se o valor absoluto de $|q|$ e usa-se a convenção de que fluxo negativo é fluxo a entrar na superfície fechada (campo atrativo) e fluxo positivo é fluxo a sair da superfície fechada (campo repulsivo)

$$\boxed{\Phi_S = 4\pi k q}$$

Se houver um dielétrico na superfície S, com constante K, divide-se por K.

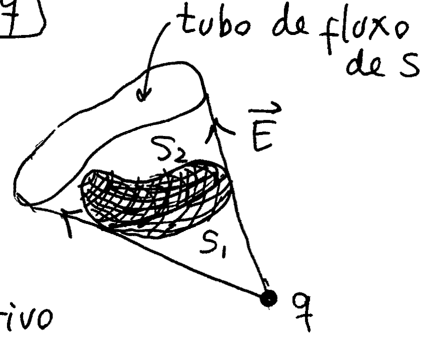
Aula 12. 2019-10-24

LEI DE GAUSS

S = superfície fechada. Φ_S = fluxo devido a uma carga pontual q.

ⓐ q dentro de S $\longrightarrow$ $\boxed{\Phi_S = 4\pi k q}$

ⓑ q fora de S.



Imaginando q como uma fonte de luz, S é dividida em duas partes, S_1, iluminada, e S_2, à sombra. Há fluxo negativo em S_1 e positivo em S_2 (se $q>0$). Mas como o valor absoluto dos dois fluxos é igual (estão no mesmo tubo de fluxo)

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi_S = 0}$$

Sistema com m cargas pontuais

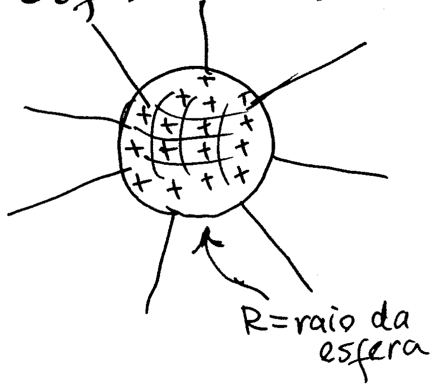
$$\Phi_S = \iint (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dA = \sum_{i=1}^{m} \iint (\vec{E}_i\cdot\hat{n})\,dA = 4\pi k \sum_{\substack{\text{interior}\\ \text{de S}}} q_i$$

$$\boxed{\Phi_S = 4\pi k\, q_{int}}$$

q_{int} = carga total dentro de S.

Exemplos de cálculo do campo usando a lei de Gauss

Esfera condutora, isolada, com carga Q



A carga distribui-se uniformemente na superfície.

$\Longrightarrow$ As linhas de campo são perpendiculares à esfera e o módulo do campo depende apenas da distância r até o centro da esfera.

S = esfera de raio r, concêntrica com a esfera condutora

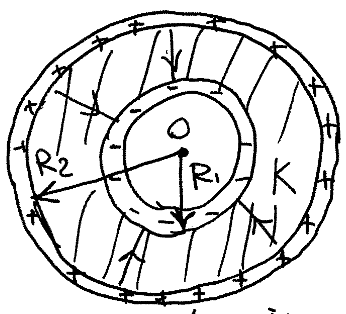
$$\Phi_S = \iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = E(r)\iint_S dA = 4\pi r^2 E(r)$$

pela lei de Gauss: $\Phi_S = 4\pi k q_{int} \Rightarrow E(r) = \dfrac{k q_{int}}{r^2}$

(a) $r > R \Rightarrow q_{int} = Q \Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{kQ}{r^2}}$

(b) $r < R \Rightarrow q_{int} = 0 \Rightarrow E = 0$

Condensador esférico



carga Q na esfera de raio R_2
carga $-Q$ na esfera de raio R_1
dielétrico com constante K entre as duas esferas.
A carga distribui-se uniformemente nas armaduras

S = esfera de raio r com centro em O $\Rightarrow \Phi_S = E(r)\iint_S dA = 4\pi r^2 E(r)$

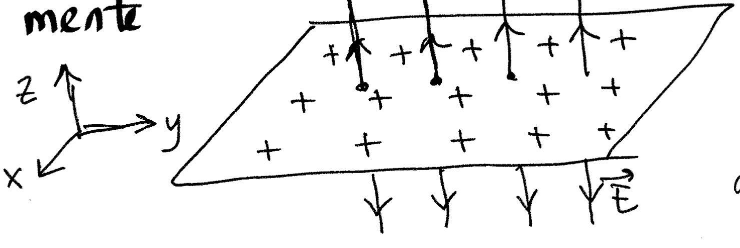
(a) $\Phi_S = \dfrac{4\pi k q_{int}}{K}$ (se $R_1 < r < R_2$)

$q_{int} = -Q \Rightarrow E(r) = \dfrac{kQ}{r^2}$

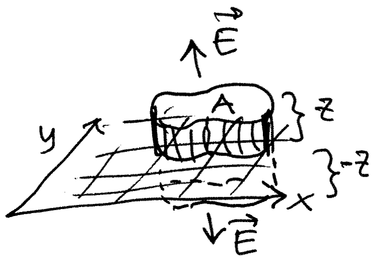
(b) $R_2 < r$ ou $r < R_1 \Rightarrow \Phi_S = 4\pi k q_{int}$

$q_{int} = 0$, nos dois casos, $\Rightarrow E(r) = 0$

Plano infinito com carga distribuída uniformemente



$\vec{E}$ perpendicular ao plano e depende apenas da distância, z) até o plano.



S = cilindro com tampas paralelas ao plano, nos dois lados e à mesma distância $|z| = |-z|$

$$\Phi_s = \Phi_{tampa1} + \Phi_{tampa2} + \Phi_{lateral} = EA + EA + 0$$

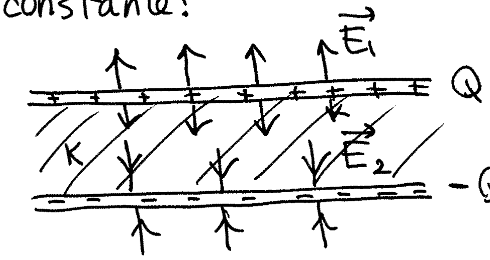
$$\Phi_s = 4\pi k q_{int} \Rightarrow 2EA = 4\pi k q_{int}$$

q_{int} = carga numa região de área A no plano

$$\boxed{E_{plano} = 2\pi k \sigma}$$

σ = carga superficial no plano constante!

Condensador plano.



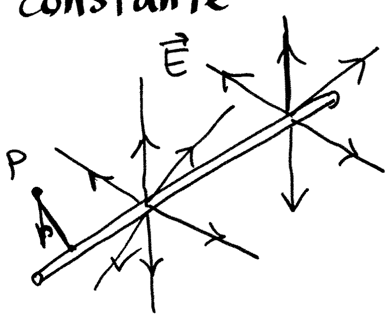
admitindo armaduras infinitas,

$$E_1 = \frac{2\pi k \sigma}{K} = E_2 \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

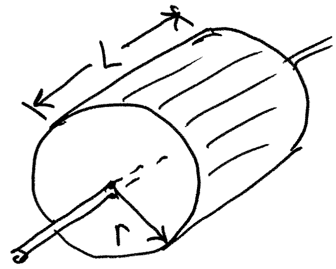
Fora do condensador, $\vec{E} = \vec{0}$, porque os dois campos anulam-se. Dentro do condensador:

$$\boxed{E_{cond.plano} = \frac{4\pi k Q}{KA}} \qquad \Delta V = \frac{4\pi k Q d}{KA}$$

Fio retilíneo, uniforme, com carga linear λ constante



As linhas de campo deverão ser perpendiculares ao fio, e E dependerá apenas da distância até o fio, r.



S = Cilindro de raio r, com eixo no fio e altura L

$$\Phi_S = \Phi_{\text{tampa 1}} + \Phi_{\text{tampa 2}} + \Phi_{\text{lateral}}$$

$$= 0 + 0 + E(2\pi r L)$$

$$\Phi_S = 4\pi k\, q_{int}$$

$$\Longrightarrow \quad E = \frac{2k\, q_{int}}{r L}$$

q_{int} = carga num pedaço de fio de comprimento L $\Longrightarrow$ $\frac{q_{int}}{L} = \lambda$ = carga linear

$$\boxed{E = \frac{2k\lambda}{r}}$$

Nos casos em que não existe simetria pode usar-se a forma diferencial da lei de Gauss, que resulta de aplicar a lei a uma superfície S = paralelepípedo de arestas dx, dy, dz (infinitessimais).

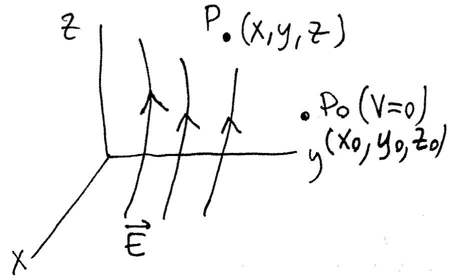
em cada ponto: $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi k \rho}{K}$ $\qquad \rho$ = carga volúmica no ponto.

Existem vários métodos para resolver essa equação, em alguns casos, e métodos numéricos mais gerais, mas não vamos entrar nesse tópico nesta cadeira.

Aula 13. 2019-11-4

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

O potencial V é uma função escalar, que a cada ponto P do espaço atribui um valor $V(x,y,z)$ definido pelo integral de linha do campo:



$$V(x,y,z) = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad (P_0 \text{ ponto onde arbitra-se que } V=0)$$

A diferença de potencial entre dois pontos (x,y,z) e $(x+\Delta x, y, z)$ é:

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x,y,z) = -\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Como o integral não depende do percurso ($\vec{E}$ é conservativo) usando um percurso reto entre os pontos, com $d\vec{r} = \hat{\imath}\,dx$, obtém-se:

$$V(x+\Delta x,y,z) - V(x,y,z) = -\int_{x}^{x+\Delta x} E_x\, dx = -\bar{E}_x \Delta x$$

onde $\bar{E}_x$ é o valor médio da componente E_x do campo, ao longo do percurso reto; no limite $\Delta x \to 0$, esse percurso é muito curto e $\bar{E}_x$ aproxima-se do valor de E_x no ponto (x,y,z). Como tal,

$$E_x(x,y,z) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x,y,z) - V(x,y,z)}{\Delta x}$$

que é a <u>derivada parcial</u> de V, em ordem a x, e denota-se:

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}}$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ calcula-se derivando V em ordem a x, enquanto y e z permanecem constantes.

De forma semelhante obtêm-se: $\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}}$ $\boxed{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$

E observe-se que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

E como $V(x,y,z)$ é função contínua, a ordem das duas derivadas não interessa; como tal:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}}$$

Que são as condições para que o campo $\vec{E}$ seja conservativo e são equivalentes a dizer que a sua matriz jacobiana

$$\mathbb{J}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

é simétrica
(= - hessiana de V)

Operador nabla: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

O campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

e, portanto, o seu rotacional é nulo:

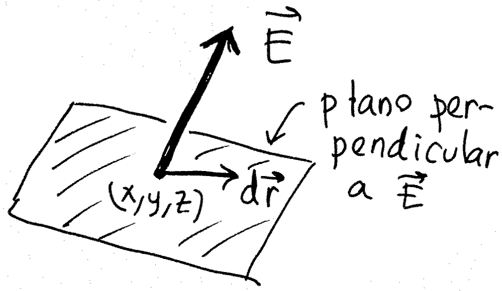
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

Num ponto (x,y,z) um deslocamento $d\vec{r}$ no plano perpendicular a $\vec{E}$ conduz a:

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

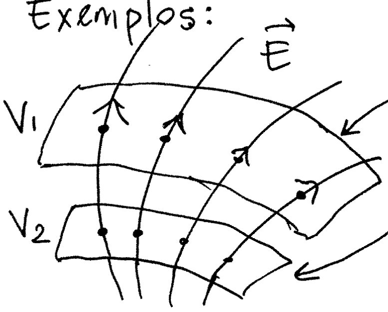


Como tal, não existe diferença de potencial entre os pontos na vizinhança de (x,y,z), no plano perpendicular a $\vec{E}$. Os pontos onde V tem o mesmo valor formam uma **superfície equipotencial** contínua, perpendicular às linhas de campo $\vec{E}$.

O valor máximo de $-\vec{E}\cdot d\vec{r}$ obtém-se quando $d\vec{r}$ apontar na direção de $\vec{E}$, mas no sentido oposto; ou seja:

$\vec{E}$ indica a direção e sentido em que o potencial decresce mais rapidamente

Exemplos:

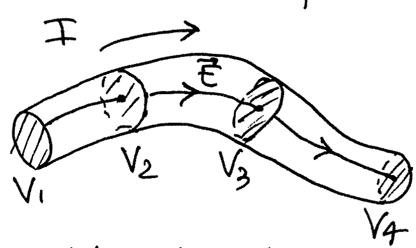


superfície equipotencial com $V=V_1$

superfície equipotencial com $V=V_2$

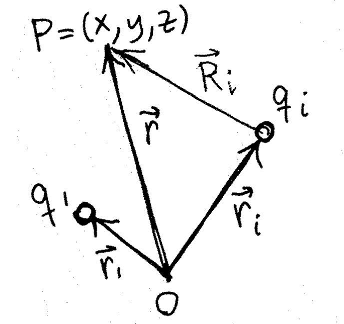
$\Rightarrow V_2 > V_1$ (as linhas de campo vão de V_2 para V_1)

Num fio com corrente I, (condutor) as equipotenciais são perpendiculares ao fio e com valores decrescentes no sentido da corrente.



$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$

POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS PONTUAIS



No ponto P na posição $\vec{r}=(x,y,z)$, a carga q_i produz campo:

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i \hat{R}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \qquad \hat{R}_i = \text{versor de } (\vec{r}-\vec{r}_i)$$

usando origem no ponto onde está q_i, $\vec{E}_i = \frac{k q_i}{R_i^2}\hat{R}_i \quad (\vec{R}_i=\vec{r}-\vec{r}_i)$

E arbitrando $V=0$ em $r\to\infty$, o potencial devido a q_i é:

$$V_i = -\int_\infty^P \vec{E}_i\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^{R_i} \frac{k q_i}{R^2}\,dR = \frac{k q_i}{R}\Big|_\infty^{R_i} = \frac{k q_i}{R_i}$$ (mesmo sinal de q_i)

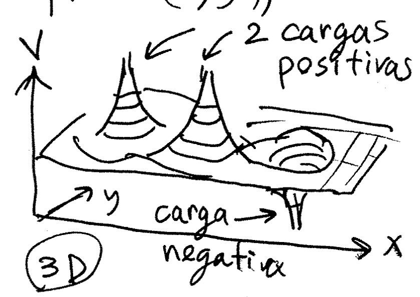
$d\vec{r}=\hat{R}\,dR$ (percurso de integração reto, direção $\hat{R}_i$)

Ou seja, o potencial do sistema de n cargas é:

$$V(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

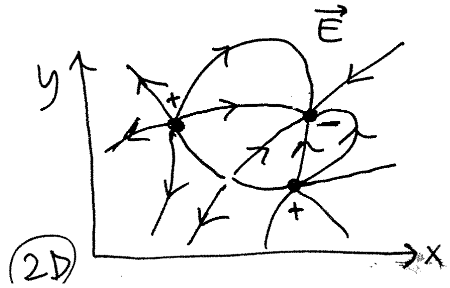
Cargas num plano. Se todas as cargas estiverem no mesmo plano, por exemplo, o plano (x,y),

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$



é uma função de duas variáveis, que pode ser representada num gráfico em 3D.

As equipotenciais passam a ser curvas no plano (x,y). (interseção das superfícies equipotenciais com o plano das cargas.)



Aula 14. 2019-11-07

Exemplo 1. Determine o potencial, no plano xy de 3 cargas no plano xy: $-4\,\mu C$ em $(20,10)$ (distâncias em cm), $3\,\mu C$ em $(10,-30)$ e $2\,\mu C$ em $(-30,0)$.

<u>Resolução</u>:

$$k = 9\times10^9\,\frac{\text{V}\cdot\text{m}}{\text{C}} = 9\times10^9\,\frac{\text{V}\cdot(10\,\text{dm})}{10^6\,\mu\text{C}} = 90\,\frac{\text{kV}\cdot\text{dm}}{\mu\text{C}}$$

$$\Rightarrow\ V(x,y) = -\frac{360}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} + \frac{270}{\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}} + \frac{180}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}$$

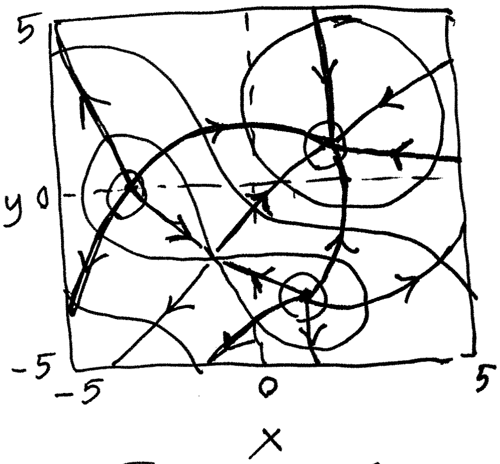
(x e y em dm, V em kV)

No Maxima:

```
norm(v):= sqrt(v.v)
q: [-4,3,2]$
p: [[2,1],[1,-3],[-3,0]]$
V: sum(90*q[i]/norm([x,y]-p[i]), i,1,3);
```

As curvas equipotenciais e linhas de campo elétrico podem ser traçadas com:

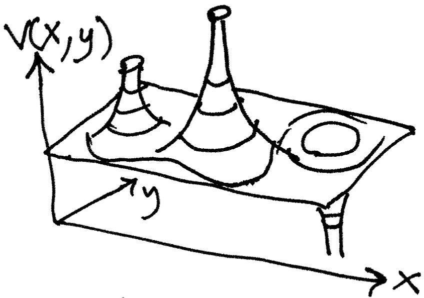
ploteq(V, [x,-5,5], [y,-5,5]);



Clica-se em alguns pontos para traçar equipotenciais.

Entrando no menu de configuração, apaga-se a cor no campo "curves", e seleciona-se uma cor no campo "fieldlines". Regressando ao gráfico, cada click num ponto agora traça uma linha de campo.

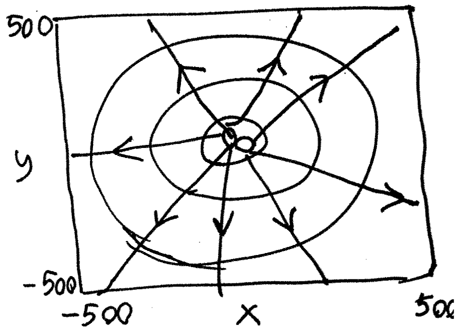
Pode também mostrar-se $V(x,y)$ num gráfico a 3D, em que a altura z é o valor do potencial



plot3d(V,[x,-5,5],[y,-5,5],[z,-800,800]);

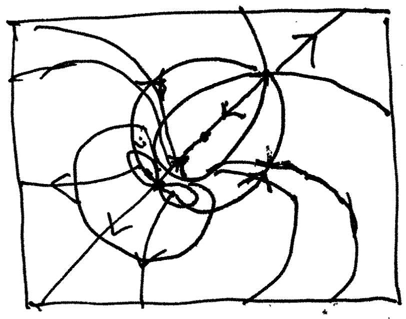
A carga total do sistema é $+1\,\mu C$. Como tal, visto de longe, o potencial asemelha-se ao de uma carga pontual de $+1\,\mu C$.

ploteq(V,[x,-500,500],[y,-500,500]);



Num domínio intermeio, descobre-se um segundo ponto de sela, aproximadamente em (24.5, 25.9) (decímetros).

ploteq(V,[x,-50,50],[y,-50,50]);



Exemplo 2. Determine o potencial de uma esfera de raio R e carga Q, distribuída uniformemente no seu volume.

<u>Resolução</u>. No problema 5 do capítulo 6, resolvido na aula TP6, encontrou-se a expressão do campo:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R^3}\,r & , r \le R \\[2ex] \dfrac{kQ}{r^2} & , r \ge R \end{cases}$$

arbitrando $V=0$ em $r \to \infty$, $V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)\,dr$

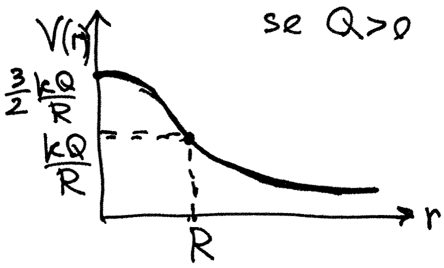
ⓐ $r \geq R$. $V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{kQ}{r^2}\,dr = -kQ\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}\right)$

$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{r}}$ igual a uma carga pontual no centro da esfera.

ⓑ $r \leq R$. $V(r) = -\int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{r^2}\,dr - \int_{R}^{r} \frac{kQ}{R^3} r\,dr$

$$= \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right)$$

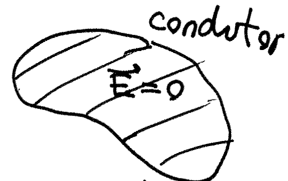
$$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)}$$



V e $\frac{dV}{dr}$ são contínuas, mas $\frac{d^2V}{dr^2}$ é descontínua em $r=R$

CONDUTORES EM EQULÍBRÍO ELETROSTÁTICO.

Num condutor isolado, em equilíbrio eletrostático, $\vec{E}=0$ em qualquer ponto dentro do condutor



ⓐ A diferença de potencial entre dois pontos P e Q, no condutor, é nula: $V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$

Todos os pontos no condutor estão ao mesmo potencial

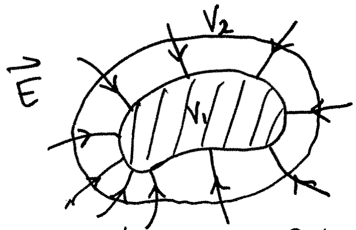
ⓑ Seja S = superfície fechada, dentro do condutor.

$\Rightarrow \Phi_S = 0$, porque $\vec{E}=0$, $\Rightarrow q_{int} = 0$

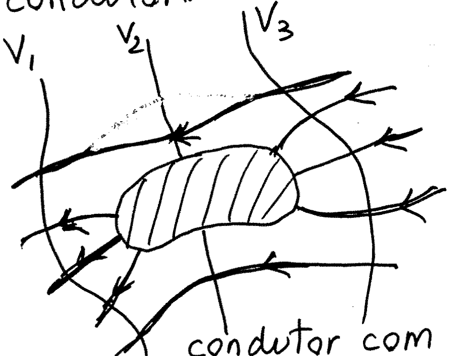
Não há carga em nenhum ponto dentro do condutor. Qualquer excesso de carga deposita-se na superfície do condutor.

ⓒ Como todos os pontos na superfície do condutor têm o mesmo potencial, então as linhas de campo elétrico, fora do condutor, são todas perpendiculares à superfície do condutor.

Exemplos

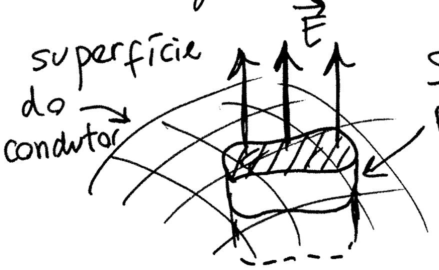


condutor com $Q<0$



condutor com $Q=0$, dentro de um campo $\vec{E}$ externo de direita para esquerda.

ⓓ Carga superficial σ (carga por unidade de área)



$S=$ pequena superfície fechada, com tampas de área dA, paralelas à superfície do condutor, por dentro e fora

$\Phi_S = E_c\, dA$ (E_c = valor do campo na superfície do condutor)

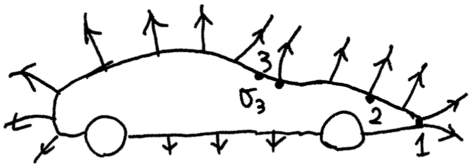
lei de Gauss: $\Phi_S = 4\pi k\, dq$ (dq carga na região dA na superfície do condutor)

$$\Longrightarrow \boxed{E_c = 4\pi k \sigma} \qquad \sigma = \frac{dq}{dA} = \text{carga superficial}$$

Aula 15. 2019-11-11

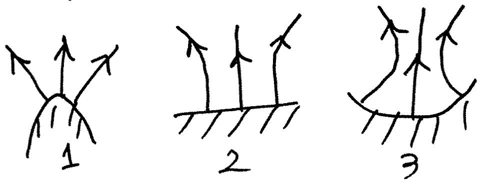
Carga e campo na superfície dos condutores isolados

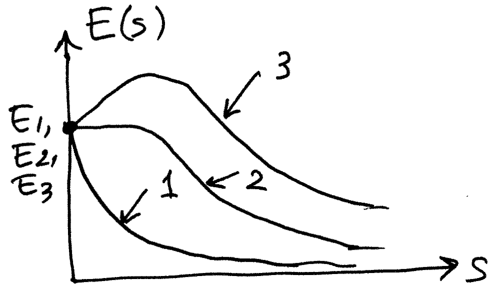
$E_{sup} = 4k\pi\sigma$



Se σ fosse constante na superfície, então
$E_1 = E_2 = E_3$

Em função da distância s desde a superfície, o campo nas regiões 1 (convexa), 2 (plana) e 3 (côncava) é o seguinte:

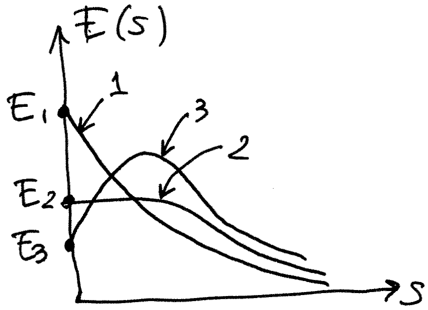




$$V_{superfície} = \int_0^\infty E\,ds = \text{área sob o gráfico de } E(s) \text{ vs } s.$$

$\Rightarrow V_1 < V_2 < V_3$

mas como o potencial deve ser igual em todos os pontos do condutor, conclui-se que E_1 deverá ser maior que E_2, e este maior que E_3.



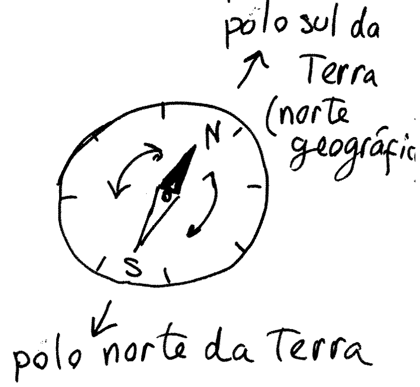
$\Rightarrow \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

"Poder das pontas": o campo, (e a carga superficial) é maior nas pontas do condutor. É o princípio do pára-raios.

FORÇA MAGNÉTICA

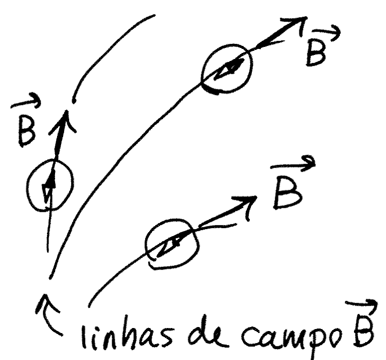
Força entre ímanes. Tal como a força elétrica, pode ser atrativa ou repulsiva. Todo íman tem um polo norte e um pólo sul. Polos diferentes sofrem forças atrativas e entre polos do mesmo tipo a força é repulsiva

A bússola é um pequeno íman, com polos norte e sul. A Terra é também um íman com polos norte e sul que fazem rodar a bússola

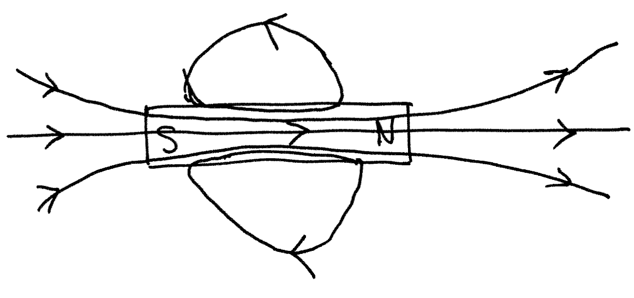


CAMPO MAGNÉTICO

A existência de um campo magnético determina-se com uma bússola. Se num ponto do espaço a bússola orienta-se numa direção e sentido específico, existe campo $\vec{B}$ nesse ponto ~~nessa~~ nessa direção e sentido

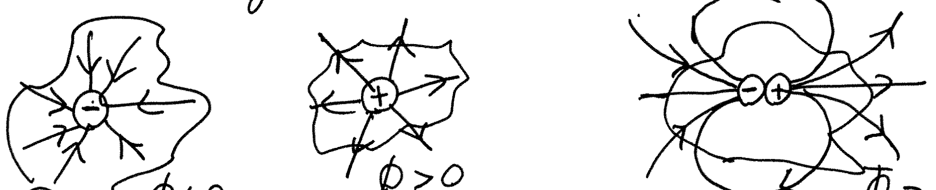


Exemplo: linhas de campo dum íman retangular:



Diferenças com o campo elétrico: existem linhas de campo $\vec{B}$ fechadas $\Longrightarrow$ $\vec{B}$ não é conservativo. Não existem monopolos magnéticos, ou seja, polos norte ou sul isolados. Se um íman for cortado ao meio, aparecem novos polos, sempre aos pares N e S.

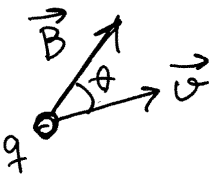
Monopolos elétricos (cargas) Dipolo elétrico



$\phi < 0$ $\phi > 0$ $\phi = 0$

$\Phi_{\text{magnético}} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ traço da jacobiana $= 0 \Rightarrow \vec{B}$ só tem pontos de sela e centro.

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PONTUAIS



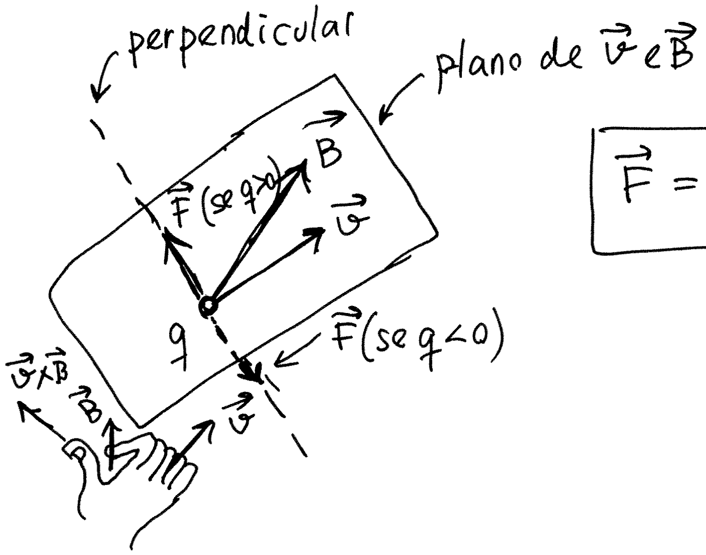
Se uma carga pontual q estiver em movimento dentro de um campo magnético, sofre força magnética $\vec{F}$.

O módulo da força, F, é diretamente proporcional a:

$|q|$, v, B

F é nulo se $\vec{v}$ e $\vec{B}$ tiverem a mesma direção ($\theta = 0$ ou $\theta = 180°$), e máximo se forem perpendiculares ($\theta = 90°$ ou $\theta = 270°$). Em geral: $F = |q| v B \sin\theta$

A direção de $\vec{F}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e no sentido da regra da mão direita, de $\vec{v}$ para $\vec{B}$, se $q > 0$ (oposto, se $q < 0$).



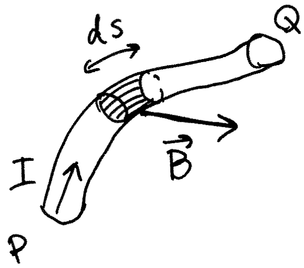
$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})}$$

UNIDADE SI DE CAMPO MAGNÉTICO

$$1\ \frac{N\cdot s}{C\cdot m} = 1\ \frac{N}{A\cdot m} = 1\,T \quad \text{(um tesla)}$$

outra unidade habitual: $10^{-4}\,T = 1\,G$ (um gauss)

FORÇA MAGNÉTICA EM CONDUTORES COM CORRENTE



$$d\vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\,ds$$

$$\vec{F}_{condutor} = \int_P^Q (\vec{I}\times\vec{B})\,ds$$

(percurso = condutor)

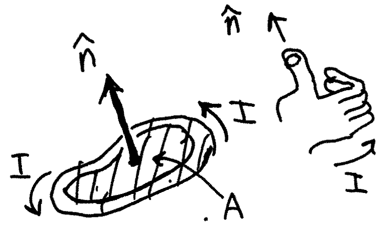
Caso particular: condutor retilíneo e $\vec{B}$ uniforme

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\int_P^Q ds \Rightarrow \vec{F} = (\vec{I}\times\vec{B})\,\ell$$

ℓ = comprimento do condutor

Aula 16. 2019-11-14

MOMENTO MAGNÉTICO

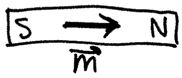


Espira: cabo condutor com forma de curva fechada plana.

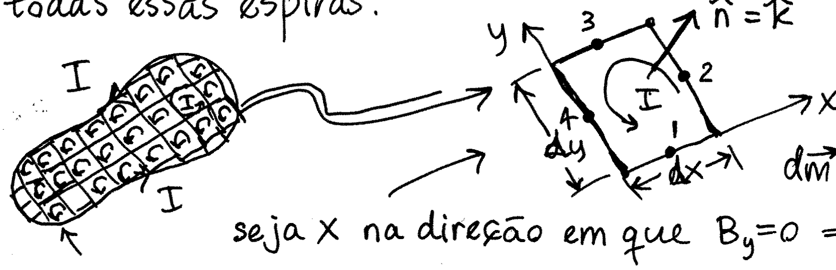
Quando houver corrente na espira, define-se o versor normal à espira, $\hat n$, no sentido da regra da mão direita.
E define-se o momento magnético da espira:

$$\boxed{\vec m = A I \hat n}$$ A = área delimitada pela espira

Nos ímanes, $\vec m$ é um vetor que aponta do polo sul para o polo norte



Binário magnético. O efeito do campo magnético sobre uma espira, determina-se dividindo a espira em várias espiras infinitesimalmente pequenas, todas com a mesma corrente, e somando as forças/binários em todas essas espiras.



$d\vec m = I\hat k\, dx\, dy$

seja x na direção em que $B_y = 0 \Rightarrow \vec B = B_x\hat\imath + B_z\hat k$

Forças em 4 fios retilíneos:

(1) $\vec I_1 = I\hat\imath$, $\ell_1 = dx$, $d\vec F_1 = (\vec I_1 \times \vec B)\,dx = -I B_z\, dx\, \hat\jmath$

(2) $\vec I_2 = I\hat\jmath$, $\ell_2 = dy$, $d\vec F_2 = (\vec I_2 \times \vec B)\,dy = +I B_z\, dy\, \hat\imath - I B_x\, dy\, \hat k$

(3) $\vec I_3 = -I\hat\imath$, $\ell_3 = dx$, $d\vec F_3 = (\vec I_3 \times \vec B)\,dx = +I B_z\, dx\, \hat\jmath$

(4) $I_4 = -I\hat\jmath$, $\ell_4 = dy$, $d\vec F_4 = (I_4 \times \vec B)\,dy = -I B_z\, dy\, \hat\imath + I B_x\, dy\, \hat k$

A força resultante, $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4$ é nula.
As componentes de $d\vec{F}_2$ e $d\vec{F}_4$ perpendiculares à espira, com módulo $I B_x dy$, atuam em linhas de ação paralelas, separadas dx. O resultado é um binário com momento $\vec{M}$ na direção de $\hat{\jmath}$:

$$\vec{M} = I B_x dy\, dx\, \hat{\jmath} = I\, dx\, dy\, (\hat{k} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$ faz rodar $\vec{m}$ na direção e sentido de $\vec{B}$

É o princípio de funcionamento dos motores elétricos a corrente numa bobina produz momento magnético, que roda no sentido do campo $\vec{B}$ dum íman. Quando $\vec{m}$ fica a apontar para $\vec{B}$, troca-se o sentido da corrente, de forma a trocar o sentido de $\vec{m}$.

Numa bobina: $\boxed{\vec{m}_{bobina} = N\, \vec{m}_{espira}}$ N = número de espiras.

LEI DE AMPÈRE

A corrente nos cabos condutores dá origem a campo magnético.
Em qualquer curva fechada C, verifica-se a lei de Ampère para o campo produzido pelas correntes:

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{int}}$$

$\oint_C$ → integral de linha, no percurso fechado C.

k_m = constante magnética $= 10^{-7}\ \dfrac{T \cdot m}{A}$ (no vácuo)

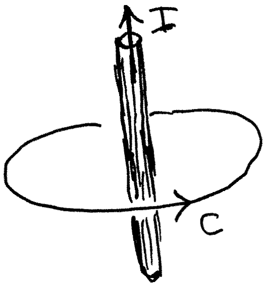
I_{int} = soma algébrica das correntes que atravessam a área delimitada por C.

O sentido em que C seja percorrida, determina o sinal das correntes, de acordo com a regra da mão direita.

Na figura acima, I_1 não atravessa C, I_2 atravessa no sentido negativo e I_3 no sentido positivo:

$$\Longrightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 4\pi k_m (I_3 - I_2)$$

Campo de um fio retilíneo com corrente.



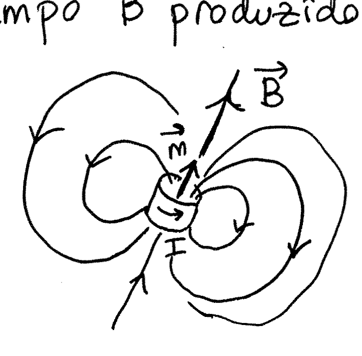
por simetria, as linhas de campo deverão ser circumferências perpendiculares ao fio e com centro nele.

Seja C uma dessas circumferências de raio r. $\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r B$

Se C for percorrida no sentido da regra da mão direita segundo I, então $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I$

$$\Longrightarrow \boxed{B_{fio} = \frac{2 k_m I}{r}}$$ no sentido da regra da mão direita.

Nas espiras e bobinas, o campo $\vec{B}$ produzido pela corrente é o campo de um dipolo, com $\vec{m}$ a apontar na direção em que o campo é mais forte.



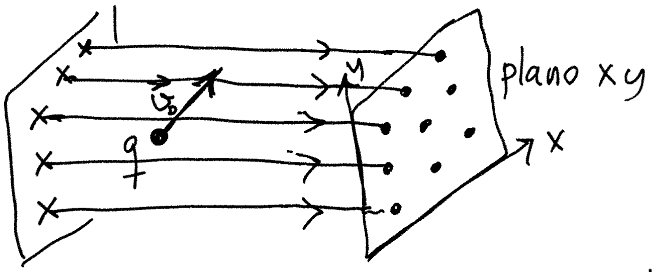
Movimento de cargas pontuais num campo magnético.

$$\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{F} \text{ perpendicular a } \vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = |q(\vec{v}\times\vec{B})| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} = 0 \Rightarrow v \text{ constante} \\ a_n = \dfrac{|q(\vec{v}\times\vec{B})|}{m} \end{cases}$$

A velocidade $\vec{v}$ muda de direção mas mantém módulo constante. A força magnética não realiza trabalho (energia cinética constante).

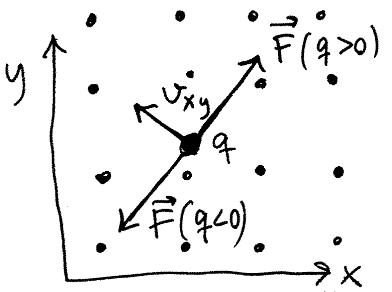
Campo $\vec{B}$ uniforme. Seja $\vec{B} = B\hat{k}$



$$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{B} = (v_y\hat{\imath} - v_x\hat{k})B$$

$$\Rightarrow F_z = 0 \Rightarrow v_z \text{ constante}$$

Movimento na projeção no plano xy:



$$F = |q|\, v_{xy} B$$

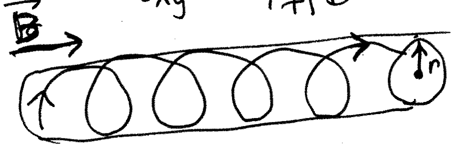
como $|\vec{v}|$ e v_z são constantes, v_{xy} também $\Rightarrow F = \text{constante}$

$\Rightarrow$ movimento circular uniforme de raio r.

$$F = m\frac{v_{xy}^2}{r} \qquad |q|\, v_{xy} B = \frac{m v_{xy}^2}{r}$$

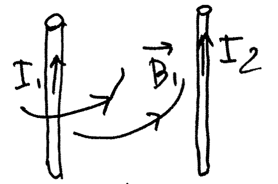
$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{m v_{xy}}{|q| B}} \qquad \text{período} = T = \frac{2\pi r}{v_{xy}} = \frac{2\pi m}{|q| B}$$

Em quanto v_{xy} roda no plano xy, a partícula segue movimento helicoidal



Aula 17 - 2019-11-18

FORÇA ENTRE CABOS RETOS COM CORRENTE



O cabo 1 produz campo magnético $\vec{B}_1$, que produz força magnética $\vec{F}_{1/2}$ no cabo 2.

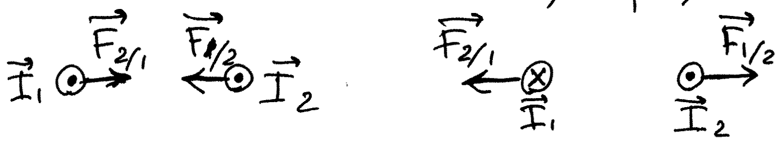
E o cabo 2 produz campo magnético $\vec{B}_2$ e força $\vec{F}_{2/1}$ no cabo 1.

Se os cabos são paralelos:

$$F_{1/2} = F_{2/1} = \frac{2 k_m \ell I_1 I_2}{d}$$

ℓ = comprimentos dos cabos
d = distância entre eles

Se as correntes I_1 e I_2 têm o mesmo sentido, a força é atrativa. Caso contrário, a força é repulsiva.

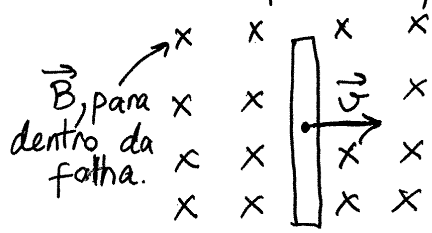


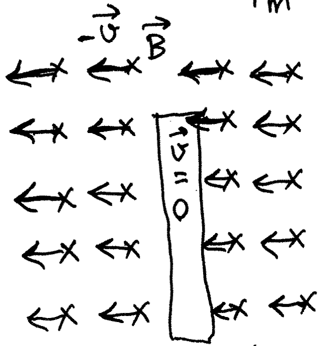
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

NUm condutor com velocidade $\vec{v}$, dentro de um campo magnético $\vec{B}$, as cargas de condução sofrem força magnética:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Exemplo: barra com velocidade $\vec{v}$ perpendicular a um campo $\vec{B}$ uniforme





as linhas de campo passam pela barra, com velocidade $-\vec{v}$.

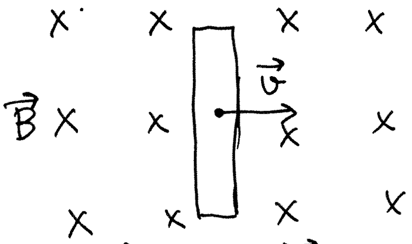
No referencial em que a barra está em repouso, observa-se a mesma força nas cargas de condução, mas não pode ser força magnética, porque as cargas de condução estão em repouso

O que acontece é que as forças elétrica e magnética são a manifestação do efeito dum campo eletromagnético em diferentes referenciais. É mais correto escrever:

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$ força de Lorentz

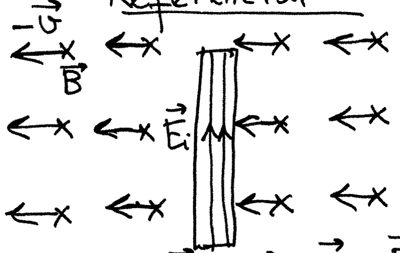
No referencial em que a barra se desloca com velocidade $\vec{v}$, $\vec{E} = 0$ e $\vec{B}$ é uniforme e estático.
No referencial em que a barra está em repouso, o movimento do campo $\vec{B}$, com velocidade $-\vec{v}$, produz campo elétrico induzido: $\boxed{\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}}$

Referencial 1



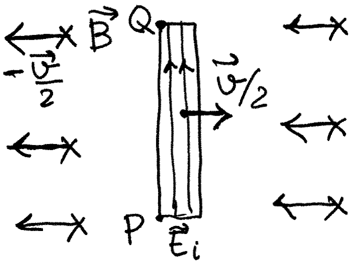
$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
$\mathcal{E}_i = 0$

Referencial 2



$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
$\mathcal{E}_i = vBl$ (l = comprimento da barra)

Referencial 3



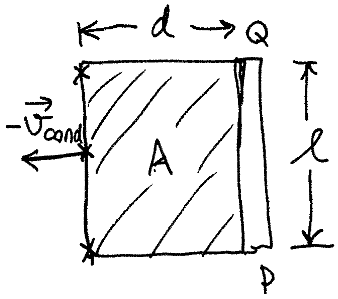
$$\vec{E}_i = \frac{\vec{v}}{2} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_i + \frac{\vec{v}}{2} \times \vec{B}\right) = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} vBl$$

F.E.M. induzida. $\mathcal{E}_i = \int_P^Q \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_P^Q (\vec{v}_{\text{condutor}} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$

$\vec{E}_i$ não é conservativo, mas não há problema na definição de $\mathcal{E}_i$, já que o integral é no condutor e não num percurso qualquer.



Observe-se que $\mathcal{E}_i$ é igual a B vezes a área A onde se encontram as linhas de campo $\vec{B}$ que passam pelo condutor, por unidade de tempo: $A = \ell d = \ell\, v_{cond}\, t$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}_i = BA$ = fluxo magnético que passa através do condutor, por unidade de tempo.

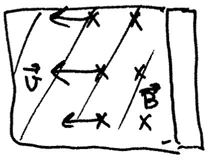
LEI DE FARADAY

fluxo magnético: $\Psi = \iint_S (\vec{B}\cdot\hat{n})\, dA$

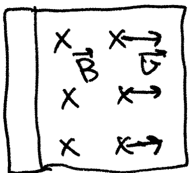
$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}}$$

Lei de Lenz: O sentido de $\vec{E}_i$ (e $\mathcal{E}_i$) é oposto à variação do fluxo magnético, segundo a regra da mão direita.

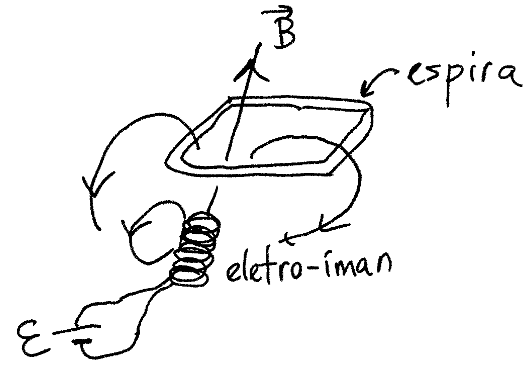
Exemplos.



O fluxo na região sombreada é para dentro da folha. Como aumenta, $\frac{d\Psi}{dt}$ é também para dentro; a direção oposta, para fora, implica sentido contrário aos ponteiros do relógio, na fronteira de A, ou seja, $\vec{E}_i$ para cima na barra.

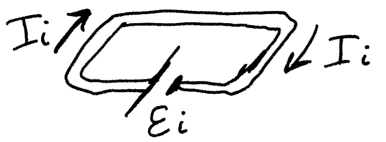


Se o movimento das linhas de campo fosse para a direita, $\frac{d\Psi}{dt}$ é ainda para dentro da folha, e o sentido oposto implica campo no sentido oposto aos ponteiros do relógio, na fronteira da região $\Rightarrow$ $\vec{E}_i$ para baixo na barra.

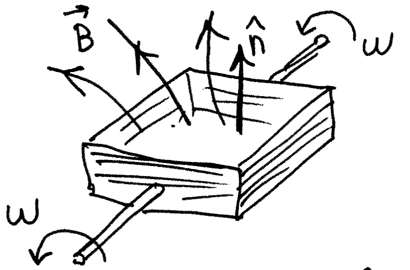


o campo do eletroíman produz fluxo Ψ para cima na espira. Enquanto a f.e.m. permanecer ligada, esse fluxo é constante e $\mathcal{E}_i = 0$

Quando a fonte for desligada, Ψ diminui até zero. Como tal $\frac{d\Psi}{dt}$ aponta para baixo; o sentido oposto, para cima, implica uma f.e.m. induzida que produz corrente no sentido indicado na figura ao lado



ALTERNADOR

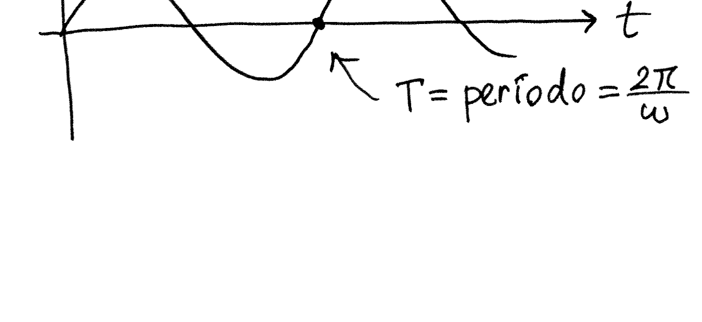


bobina com N espiras de área A, a rodar com velocidade angular ω num campo magnético $\vec{B}$

$$\Psi = N \iint_{\text{espira}} (\vec{B}\cdot\hat{n})\, dA = N\underbrace{\bar{B}}_{\text{campo médio}} \underbrace{\cos\theta}_{\text{ângulo entre } \vec{B} \text{ e } \hat{n}} \underbrace{\iint dA}_{\text{espira}}$$

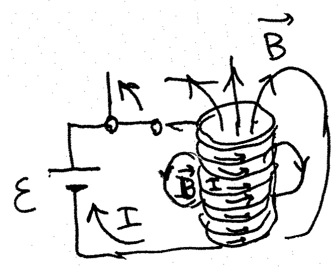
$$\Rightarrow \Psi = N\bar{B}A\cos\theta$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = (N\bar{B}A\sin\theta)\,\overset{\dot{\theta}}{\omega} \qquad \theta = \omega t + \theta_0$$



Aula 18. 2019-11-21

AUTO INDUÇÃO



bobina com corrente I

Em qualquer espira ou bobina, se a corrente muda, o campo magnético dentro dela também muda, e a variação de fluxo através da espira dá origem a f.e.m. induzida. Por exemplo, na bobina da figura, quando o interruptor for aberto, a diminuição da corrente dá origem a uma f.e.m. induzida que contraria a diminuição da corrente; como tal, a corrente não diminui instantaneamente até zero, mas o faz de forma gradual.

O campo $\vec{B}$ produzido pela bobina é diretamente proporcional à corrente I e ao número de espiras, N:

$$\vec{B}(\vec{r}) = N I \vec{f}(\vec{r}) \qquad (\vec{f} = \text{função da posição}).$$

O fluxo magnético através da bobina é o fluxo total através das N espiras:

$$\Psi = N \iint\limits_{\text{espira}} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = N^2 I \iint\limits_{\text{espira}} \vec{f}\cdot\hat{n}\, dA$$

o integral de superfície de $\vec{f}$ é um número, K, que depende da forma e tamanho da espira (quanto maior for, maior K)

$$\Rightarrow \Psi = N^2 I K$$

Aplicando a lei de Faraday, a f.e.m. induzida é:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N^2 \dot{I} K$$

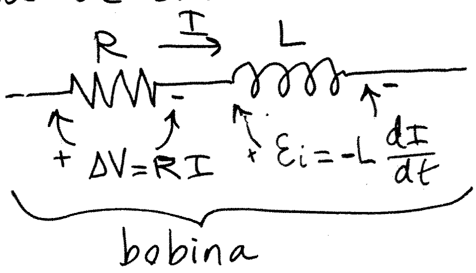
a constante $\boxed{L = N^2 K}$ chama-se **indutância** da bobina. Em geral, em qualquer dispositivo onde há fluxo magnético Ψ, o fluxo é proporcional a I : $\Psi = L I$

E a f.e.m. auto-induzida no dispositivo é:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt}}$$

L= indutância do dispositivo

Diagrama de circuito:



R representa o efeito Joule no condutor.
L representa a auto-indução no condutor

Unidade S.I. de indutância

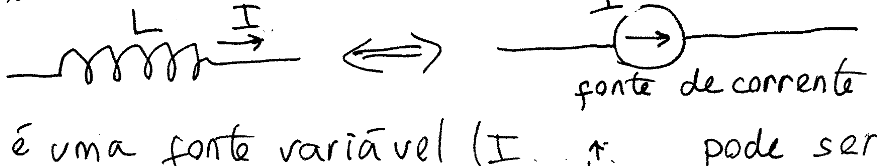
henry (H) $\quad 1\,H = 1\,\frac{V\cdot s}{A}$

CIRCUITOS D.C. COM INDUTORES

① I=0 no indutor. ⇒ Não há campo magnético, mas $\Delta V = -L\frac{dI}{dt}$ pode ter qualquer valor.
⇒ o indutor é equivalente a um interruptor aberto.

② Estado estacionário $\left(\frac{dI}{dt}=0\right)$ ⇒ $\Delta V = -L\frac{dI}{dt} = 0$
voltagem nula mas corrente com qualquer intensidade.
⇒ equivalente a um curto-circuito.

③ $I \neq 0$ e a mudar (estado não estacionário)
O indutor é equivalente a uma fonte de corrente I, ideal (resistência interna nula)

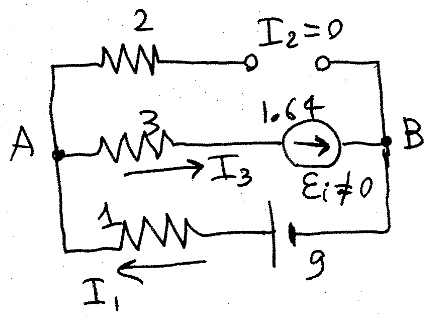


mas é uma fonte variável (I noutros instantes pode ser diferente de I).

(c) $t = t_2$

$I_2 = 0$

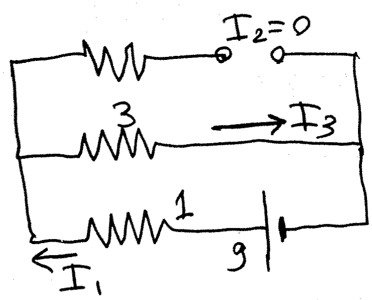
$I_1 = I_3 = I_{fonte} = 1.64\,\text{mA}$



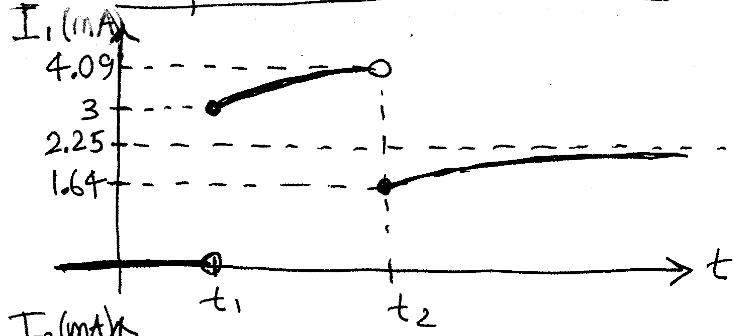
(d) $t \to \infty$. Indutor no estado estacionário.

$I_2 = 0$

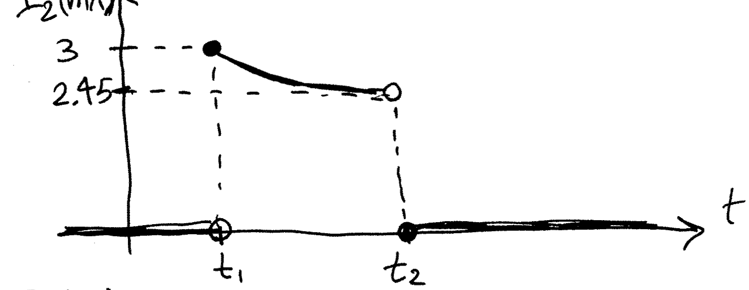
$$I_1 = I_3 = \frac{9}{3+1} = 2.25\,\text{mA}$$

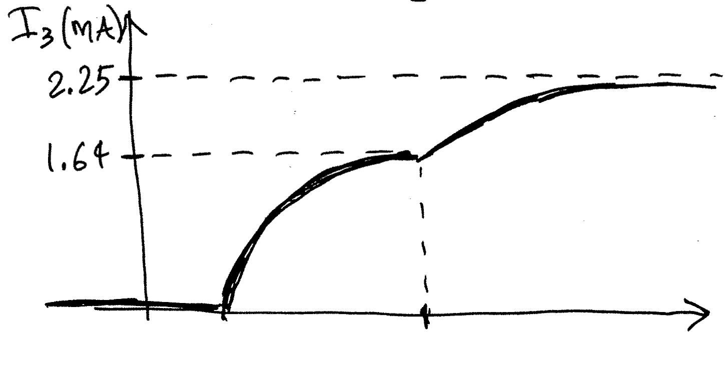


Gráficos das 3 correntes:



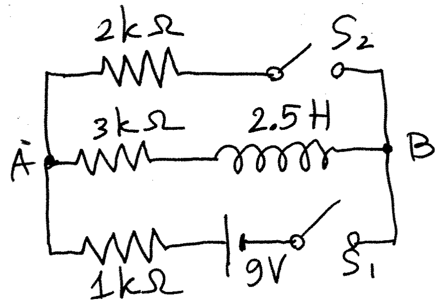
As correntes em $R_1 = 1k\Omega$ e $R_2 = 2k\Omega$ são descontínuas em t_1 e t_2.





A corrente em $R_3 = 3k\Omega$ tem de ser contínua porque é a mesma corrente no indutor, que é contínua, porque a sua derivada, $\frac{dI}{dt} = -\varepsilon_i$ existe

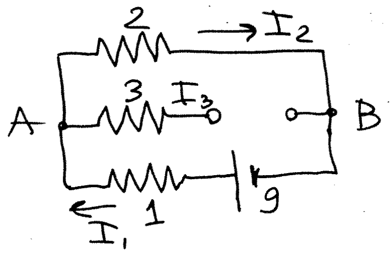
Exemplo.



Em $t < t_1$, os dois interruptores S_1 e S_2 estão abertos e não há corrente no indutor. Em t_1 fecham-se simultaneamente S_1 e S_2, e em t_2 (muito tempo depois de t_1), abre-se S_2, mantendo S_1 fechado. Determine as correntes nas três resistências em t_1, t_2 e $t \to \infty$.

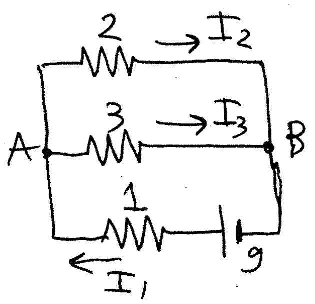
Resolução. Unidades: $R \to k\Omega$, $\Delta V \to V$, $I \to mA$.

(a) $t = t_1$. O indutor é equivalente a um interruptor aberto $\Rightarrow I_3 = 0$.



$$I_1 = I_2 = \frac{9}{2+1} = 3\text{ mA}$$

(b) $t \to t_2^-$. Indutor em estado estacionário (curto-circuito).



$$I_1 = \frac{9}{\left(1 + \frac{3\times 2}{3+2}\right)} = 4.09\text{ mA}$$

$$V_A - V_B = 4.09\left(\frac{3\times 2}{3+2}\right) = 4.91\text{ V}$$

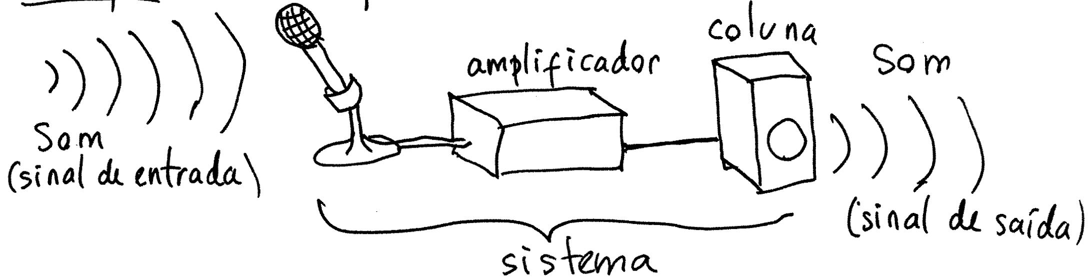
$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{2} = 2.45\text{ mA} \qquad (I_2 + I_3 = I_1)$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{3} = 1.64\text{ mA}$$

Aula 19. 2019-11-25

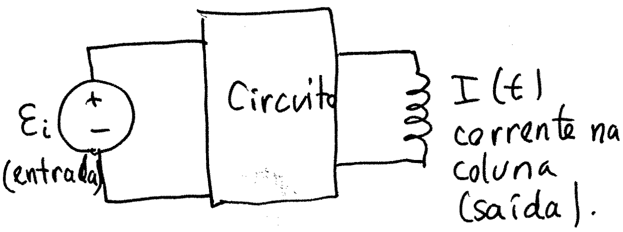
PROCESSAMENTO DE SINAIS

Exemplo:



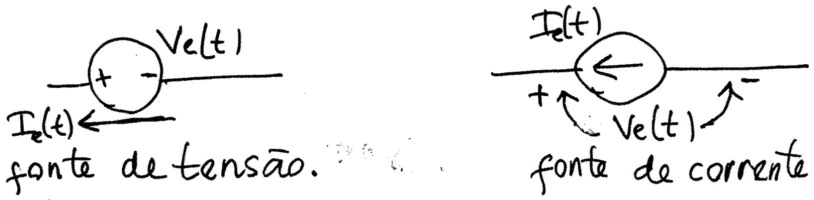
Este sistema é um circuito elétrico

f.e.m. induzida no microfone



Consideraremos circuitos com uma única fonte, que depende do tempo (entrada), em que pretende-se obter a corrente ou voltagem, em função de t, em alguma parte do circuito (saída).

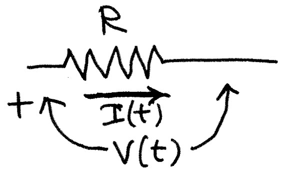
Entrada (elemento ativo):



O sentido indicado para I é o que corresponde aos intervalos em que Ve(t) e Ie(t) são positivas. Nesses intervalos o elétrodo "+" tem maior potencial do que o elétrodo "−". Em alguns intervalos Ve(t) e Ie(t) podem ser ambas negativas: o sentido de I é contrário à seta, e "+" tem menor potencial que "−". A fonte fornece sempre energia

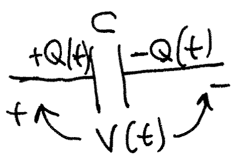
Elementos passivos:

① Resistências



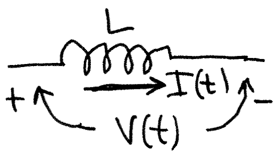
$$\boxed{V(t) = R\,I(t)}$$

② Condensadores



$$\boxed{Q(t) = C\,V(t)} \implies \boxed{I(t) = \dot{Q}(t) = C\,\frac{dV}{dt}}$$

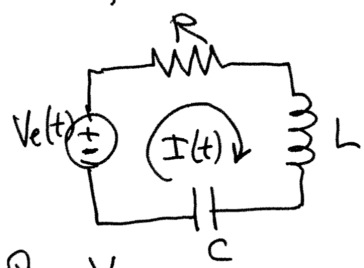
③ Indutores



$$\boxed{V(t) = L\,\frac{dI}{dt}}$$

positivo por estar a ser considerado elemento passivo, e não fonte com f.e.m. $\mathcal{E}_i$.

Exemplo 1. Circuito RLC, em série, com fonte $V_e(t)$ e saída igual à corrente $I(t)$ no circuito



<u>Regra da malha:</u>

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = V_e$$

Derivando os dois lados obtém-se:

$$\boxed{L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}_e}$$

equação diferencial linear, de coeficientes constantes.

Dada uma função $V_e(t)$ e condições iniciais I_0 e $\dot{I}_0$, em $t=0$, existe solução única $I(t)$, que pode ser determinada por vários métodos diferentes.

Método da transformada de Laplace:

transformada de $I(t)$: $\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\} = \int_0^\infty V_e(t)\, e^{-st}\, dt$

s = parâmetro real, com unidades de frequência

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{I}\} = s\tilde{I} - I_0 \qquad \Rightarrow \mathcal{L}\{\ddot{I}\} = s^2\tilde{I} - sI_0 - \dot{I}_0$$

transformando os dois lados da equação diferencial, obtém-se uma equação algébrica para $\tilde{I}(s)$:

$$L(s^2\tilde{I} - sI_0 - \dot{I}_0) + R(s\tilde{I} - I_0) + \frac{\tilde{I}}{C} = s\tilde{V}_e - V_{e0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tilde{I} = \frac{s\tilde{V}_e - V_{e0} + LsI_0 + L\dot{I}_0 + RI_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

polinómio caraterístico

a transformada inversa de $\tilde{I}$ conduz a $I(t)$.

Em vez de aplicar regras de Kirchhoff para $V(t)$ ou $I(t)$, para obter uma equação diferencial que será logo resolvida por transformada de Laplace, é mais fácil transformar as funções de t, no circuito para funções de s, e logo resolver o circuito.

Domínio da frequência

1. Fontes. $V_e(t) \longrightarrow \tilde{V}_e(s)$, $\quad I_e(t) \longrightarrow \tilde{I}_e(s)$

2. Resistências $\quad V(t) = RI(t) \longrightarrow \boxed{\tilde{V}(s) = R\tilde{I}(s)}$

3. Condensadores

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} \longrightarrow s\tilde{V} - V_0 = \frac{\tilde{I}}{C} \Longrightarrow \boxed{\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} + \frac{V_0}{s}}$$

fonte com $\varepsilon = V_0$ constan

4. Indutores

$$V = L\frac{dI}{dt} \longrightarrow \boxed{\tilde{V} = Ls\tilde{I} - LI_0}$$

fonte de corrente constante I_0, em paralelo com o indutor

IMPEDÂNCIA. Se $t=0$ for o instante em que não há fonte, então $V_0=0$, $I_0=0$ e as resistências, condensadores e indutores verificam a lei de Ohm (no domínio da frequência): $\boxed{\tilde{V}(s) = Z(s)\,\tilde{I}(s)}$

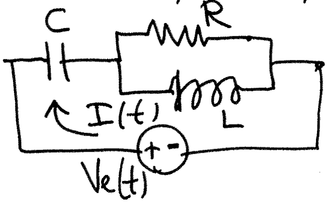
$$Z(s) = \underset{\text{(função de } s\text{)}}{\text{impedância}} = \begin{cases} R, \text{ nas resistências (função constante)} \\ \dfrac{1}{Cs}, \text{ nos condensadores } (\overset{\text{diminui}}{\cancel{\text{aumenta}}} \text{ com } s) \\ Ls, \text{ nos indutores } (\overset{\text{aumenta}}{\cancel{\text{diminui}}} \text{ com } s) \end{cases}$$

Z tem unidades de resistência: $\dfrac{1}{F\cdot Hz} = \dfrac{s}{F} = \Omega$

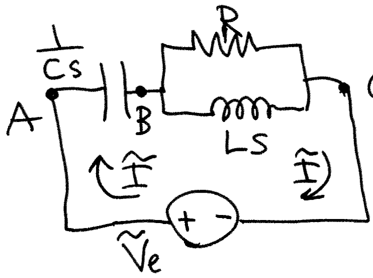
$$H\cdot Hz = \frac{H}{s} = \Omega$$

No domínio da frequência o circuito resolve-se tal como os circuitos do capítulo 3, com fontes contínuas e resistências.

Exemplo:



No domínio da frequência:



$$Z_{BC} = \frac{RLs}{Ls+R} \quad \text{(paralelo)}$$

$$Z_{AC} = \frac{1}{Cs} + \frac{RLs}{Ls+R} = \frac{RLCs^2+Ls+R}{CLs^2+RCs}$$

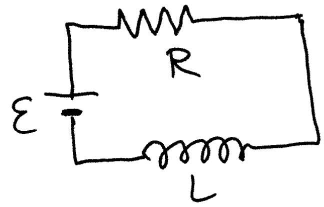
$$\boxed{\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{AC}} = \frac{\tilde{V}_e(CLs^2+RCs)}{RLCs^2+Ls+R}} \Longrightarrow (RLCs^2+Ls+R)\tilde{I} = \tilde{V}_e(CLs^2+RCs)$$

transf. inversa: $RLC\ddot{I}+L\dot{I}+RI = CL\ddot{V}_e+RC\dot{V}_e$

(eq. diferencial do sistema)

Aula 20. 2019-11-28

Exemplo 1 (Circuito RL)

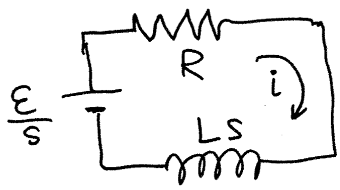


A fonte foi ligada em $t=0$, quando a corrente no indutor era nula. Determine a corrente no circuito, em função de t.

No Maxima, representaremos com Ve a voltagem da fonte no domínio do tempo, e com ve a sua transformada de Laplace, no domínio da frequência.

ve: laplace(E, t, s); $\longrightarrow \dfrac{E}{s}$

O circuito no domínio da frequência é:



E resolve-se como se as impedâncias fossem resistências;

Impedância da resistência e o indutor em série:

z: R+L*s;

transformada de Laplace da corrente:

i: ve/z; $\longrightarrow \quad i = \dfrac{E}{s(Ls+R)}$

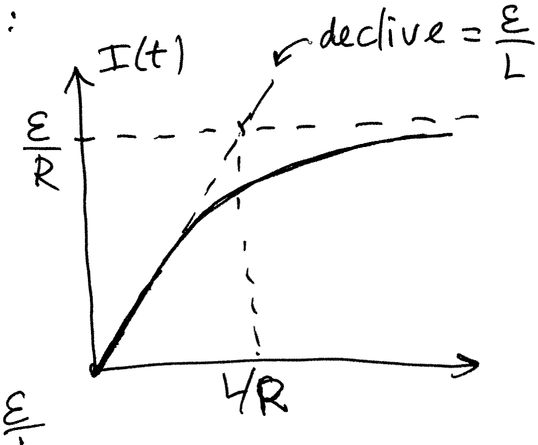
$I(t)$ é a transformada inversa, calculada com a função ilt do Maxima:

I: ilt(i, s, t);

$$\Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \dot{I}(0) = \frac{\varepsilon}{L}$$

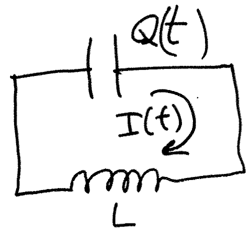


unidades de $L \rightarrow \frac{\text{impedância}}{\text{frequência}}$ unid. de $R \rightarrow$ impedância

unidades de $\frac{L}{R} \rightarrow \frac{1}{\text{frequência}} =$ tempo

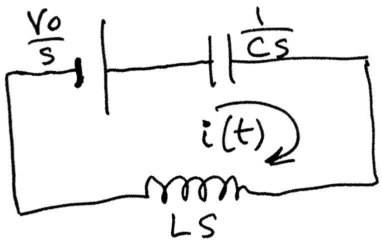
$\frac{L}{R}$ = constante de tempo = tempo que demorava o circuito a ficar no estado estacionário, se $\dot{I}$ mantivesse o seu valor inicial.

Exemplo 2 (circuito oscilador)



Um condensador, com carga inicial Q_0, liga-se a um indutor, com indutância L, em $t=0$. Determine $I(t)$ no circuito.

Circuito no domínio da frequência:



$V_0 = \frac{Q_0}{C}$

```
z: ratsimp(1/C/s + L*s);
i: ratsimp(Q0/C/z);
```

$\hookrightarrow Q_0/(CLs^2+1)$

```
assume(C>0, L>0)$
I: ilt(i,s,t);
```

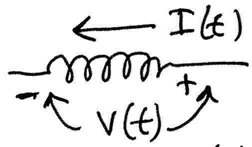
$\rightarrow I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$

$L \rightarrow \frac{\text{impedância}}{\text{frequência}}$ $C \rightarrow \frac{1}{\text{impedância} \times \text{frequência}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{CL}} \longrightarrow$ frequência

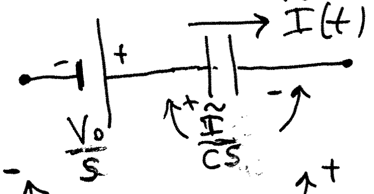
$I(t)$ é uma função senoidal, com frequência angular $\frac{1}{\sqrt{CL}}$.

voltagem no indutor:



$$V(t) = L\frac{dI}{dt} = \frac{Q_0}{C}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right) = V_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

voltagem no condensador:

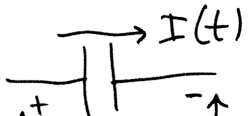


(domínio s)

$$\frac{V_0}{s} - \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{V_0}{s} + \frac{V_0}{s(CLs^2+1)} = \frac{V_0 CLs}{CLs^2+1}$$

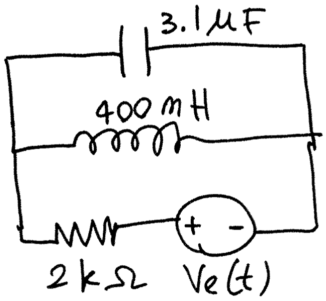
$$\Rightarrow V(t) = V_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right) \quad \text{(igual ao indutor)}$$

Ou, no domínio do tempo: $I(t) = C\dfrac{dV}{dt}$



$$V(t) = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = -V_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

Exemplo 3.



A voltagem da fonte é:

$$V_e(t) = 5(1-e^{-600t}) \quad \text{(SI)}$$

Sabendo que $Q(0)=0$, no condensador, e $I(0)=0$, no indutor, determine a expressão da voltagem na resistência, em função do tempo t.

Unidades: $V \rightarrow$ Volt, $R\ (e\ Z) \rightarrow k\Omega$

$\Rightarrow I \rightarrow mA$

se usarmos $C \rightarrow \mu F$, como a impedância de um condensador é $Z = \frac{1}{Cs}$, então $s \rightarrow \frac{1}{\text{capac.} \times \text{impedânc.}}$

$\Rightarrow s \rightarrow \frac{1}{\mu C \cdot k\Omega} = Hz$ e o tempo $t \rightarrow \frac{1}{\text{frequênci}}$

$\Rightarrow t \rightarrow ms$

Finalmente, como a impedância de um indutor é $Z = Ls$

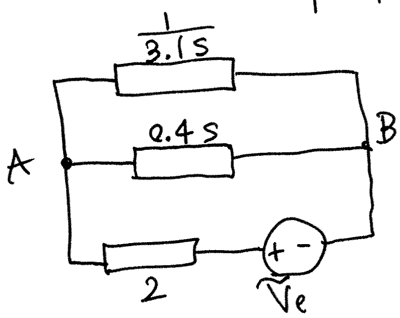
$\Rightarrow L \rightarrow \frac{\text{impedância}}{\text{frequência}} \rightarrow \frac{k\Omega}{kHz} = H$

passando $600t$ de segundos para t em ms, Ve fica:

$V_e(t) = 5\ (1 - e^{-0.6t})$ (em volts, se t estiver em ms)

$\tilde{V}_e(s) \rightarrow \begin{cases} \text{Ve: 5*exp(-0.6*t)\$} \\ \text{ve: laplace(Ve,t,s)\$} \end{cases}$

Domínio da frequência s:



impedância em paralelo, entre A e B:

zp: ratsimp(1/(3.1*s + 1/0.4/(s)));

impedância total:

z: zp+2;

A corrente na resistência é a mesma que na fonte, igual a: i:ve/z;

e a voltagem na resistência é:

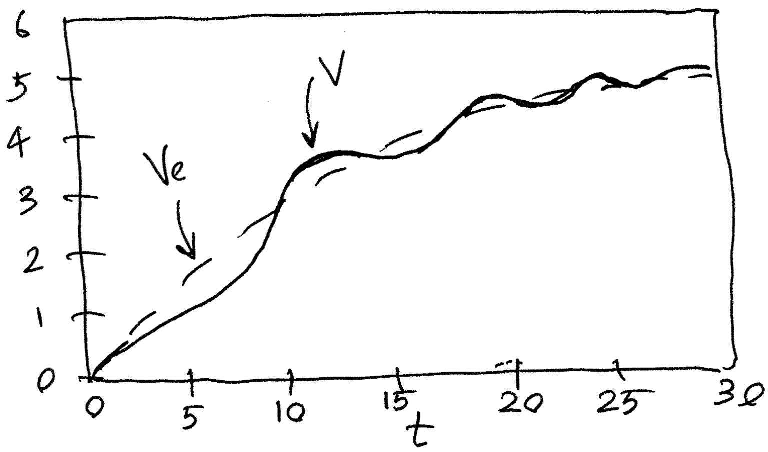
```
v: ratsimp(2*i);
```

E a transformada inversa dá a voltagem, V(t), na resistência:

```
V: ilt(v,s,t);
```

O resultado inclui varios termos com funções exponenciais, seno e cosseno.
É mais útil um gráfico de V(t), onde podemos incluir também o sinal de entrada, Ve(t):

```
plot2d([Ve,V], [t,0,30], [legend,false], [ylabel,"V"]);
```



V(t) oscila em torno de Ve(t), com amplitude decrescente.
(foco atrativo)

Aula 21. 2019-12-02

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

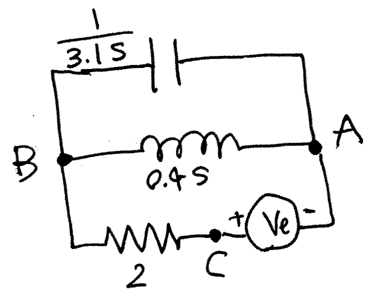
Num sistema linear, as transformadas de Laplace do sinal de entrada, $\tilde{f}_e(s)$, e do sinal de saída, $\tilde{f}(s)$, estão sempre relacionadas por:

$$\boxed{\tilde{f}(s) = H(s)\,\tilde{f}_e(s)} \qquad \tilde{f}_e \longrightarrow \underset{\text{sistema linear}}{\boxed{H(s)}} \longrightarrow \tilde{f}$$

em que $H(s)$ chama-se **função de transferência.**

Os circuitos com resistências, condensadores e indutores são sistemas lineares.

Exemplo: exemplo 3 da aula anterior.



$V_e \to V$, $s \to \text{kHz}$, $z \to \text{k}\Omega$

entre A e B (paralelo):

$$z_{AB} = \frac{1}{3.1s + \frac{1}{0.4s}} = \frac{10}{31s + \frac{25}{s}} = \frac{10s}{31s^2+25}$$

$$z_{AC} = 2 + z_{AB} = \frac{62s^2+10s+50}{31s^2+25}$$

corrente na resistência: $\tilde{I} = \dfrac{\tilde{V}_e}{z_{AC}} = \dfrac{31s^2+25}{62s^2+10s+50}\tilde{V}_e$

voltagem na resistência:

$$\tilde{V} = 2\tilde{I} = \frac{31s^2+25}{31s^2+5s+25}\tilde{V}_e$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{31s^2+25}{31s^2+5s+25}} \longleftarrow \text{raízes: } -\frac{5}{62} \pm \frac{i5\sqrt{123}}{62} \quad \text{foco atrativo}$$

Equação diferencial: $(31s^2+5s+25)\tilde{V} = (31s^2+25)\tilde{V}_e$

$$\Longrightarrow \boxed{31\ddot{V} + 5\dot{V} + 25V = 31\ddot{V}_e + 25V_e}$$

IMPULSO UNITÁRIO (delta de Dirac)

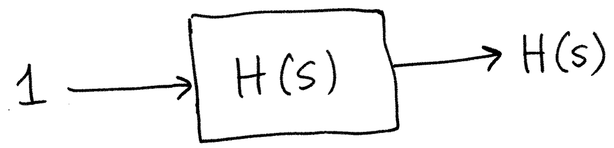
o qualquer valor positivo

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{mas} \quad \int_0^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\,dt = e^0 = 1$$

Como tal, se a entrada num sistema linear for um impulso unitário:



A saída será a função de transferência do sistema. Para determinar a função de transferência de um sistema linear, alimenta-se com um sinal $\delta(t)$, que pode ser aproximado:

e mede-se a saída.

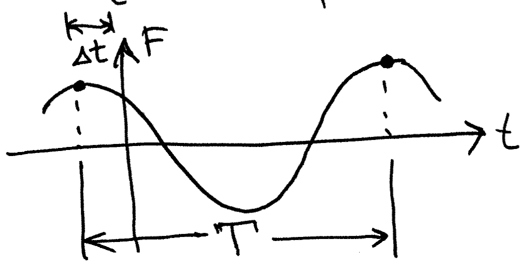
Exemplo: um pulso laser, muito curto, em direção de um satélite que o reflete de volta, permite determinar a função de transferência da atmosfera e reconstruir imagens de corpos celestes, deformadas pela atmosfera.

Aula 22. 2019-12-05

FUNÇÕES SINUSOIDAIS

$$F(t) = F_{máx} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} F_{máx} = \text{amplitude (valor máximo)} \\ \omega = \text{frequência angular} \\ \varphi = \text{desfasamento} \end{cases}$$



frequência: $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

período: $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\Delta t = \dfrac{\varphi}{\omega} = \left(\dfrac{\varphi}{2\pi}\right) T \quad (|\varphi| \le \pi)$

(em $t = -\Delta t$, $F(t) = F_{máx}$)

Outras formas de escrever $F(t)$:

ⓐ $F = F_{máx} \cos(\omega t) \cos\varphi - F_{máx} \sin(\omega t) \sin\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{F = F_r \cos(\omega t) - F_i \sin(\omega t)}$$

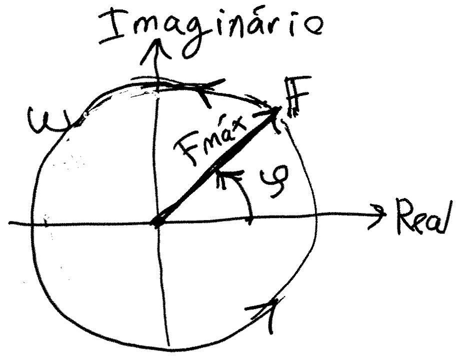
$$\begin{cases} F_r = F_{máx} \cos\varphi & \text{se } \varphi = 0 \Rightarrow (F_r = F_{máx},\ F_i = 0) \\ F_i = F_{máx} \sin\varphi & \text{se } \varphi = \frac{\pm\pi}{2} \Rightarrow (F_r = 0,\ F_i = \pm F_{máx}) \end{cases}$$

ⓑ $F = \text{parte real de}\left((F_r + iF_i)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\right)$
$= \text{Real}\left((F_r + iF_i)\, e^{i\omega t}\right)$

FASOR DE $F(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\mathbb{F} = F_r + iF_i = F_{máx}\, e^{i\varphi}}$

$F(t)$ é a projeção no eixo real de $\mathbb{F} e^{i\omega t}$

em $t=0$, $F(0)$ é a projeção de $\mathbb{F}$ no eixo real.



em $t \geq 0$, o produto por $e^{i\omega t}$ faz rodar $\mathbb{F}$ um ângulo ωt, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. $\mathbb{F}$ roda no plano complexo, com velocidade angular constante ω, e a sua projeção no eixo real é o valor de $F(t)$.

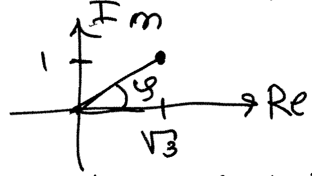
Cada função sinusoidal, com frequência angular ω, representa-se por um fasor que roda no plano complexo com velocidade angular ω.

<u>Exemplo</u>: O fasor de uma função sinusoidal com frequência 2 Hz é $\sqrt{3}+i$. Determine a expressão da função em ordem a t. <u>Resolução</u>:

$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

também costuma escrever-se

$$\boxed{2\angle\frac{\pi}{6}}$$



argumento: $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

módulo: $\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$

função de t:

$$\boxed{F(t) = 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

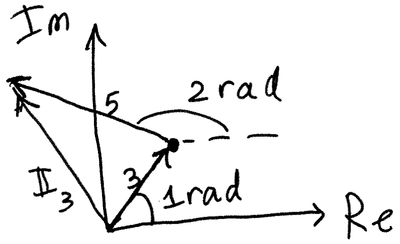
da mesma frequência

A soma de duas funções sinusoidais obtém-se somando os seus fasores (números complexos)

<u>Exemplo</u>. Num nó num circuito entram duas correntes: $I_1(t) = 5\cos(\omega t+2)$ e $I_2(t) = 3\cos(\omega t+1)$

Determine a corrente que sai desse nó.

<u>Resolução:</u> $\mathbb{I}_1 = 5\angle 2$, $\mathbb{I}_2 = 3\angle 1$



$$\mathbb{I}_1 = 5(\cos 2 + i \sin 2)$$

$$\mathbb{I}_2 = 3(\cos 1 + i \sin 1)$$

$$\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 = (5\cos 2 + 3\cos 1) + i\,(5\sin 2 + 3\sin 1)$$

No Maxima:

```
I1: 5*exp(%i*2);
I2: 3*exp(%i);
I3: I1 + I2;
float(cabs(I3)); → 7.086 (módulo)
float(carg(I3)); → 1.636 (argumento)
```

$$\Rightarrow \quad \mathbb{I}_3 = 7.086 \angle 1.636$$

$$I_3(t) = 7.086 \cos(\omega t + 1.636)$$

FUNÇÕES SINUSOIDAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

$$F(t) = F_{máx} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Real}\left(\mathbb{F} e^{i\omega t}\right) \quad (\mathbb{F} = F_{máx}\angle\varphi)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{F(t)\} = \text{Real}\left(\mathbb{F}\,\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}\right) = \text{Real}\left(\frac{\mathbb{F}}{s - i\omega}\right)$$

escreve-se: $\tilde{F}(s) = \dfrac{\mathbb{F}}{s - i\omega}$, ficando implícito que apenas interessa a parte real.

Se num sistema linear, com função de transferência $H(s)$, a entrada for uma função sinusoidal:

$$\tilde{f}_e(s) = \frac{\mathbb{F}_e}{s-i\omega} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow \tilde{f}(s) = \frac{\mathbb{F}_e H(s)}{s-i\omega}$$

A saída, $\tilde{f}(s)$, é uma função complexa com uma <u>singularidade</u> em $s = i\omega$. A singularidade diz-se ser um polo de primeira ordem se o limite $\lim\limits_{s\to i\omega} (s-i\omega)\tilde{f}$ existir.

Nesse caso a função pode escrever-se:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\mathbb{F}}{s-i\omega} + G(s)$$

onde $\mathbb{F}$ é um número complexo (resíduo de $\tilde{f}$ em $s=i\omega$)

$$\mathbb{F} = \lim_{s\to i\omega} (s-i\omega)\tilde{f}(s) = \lim_{s\to i\omega} \mathbb{F}_e H(s) = \mathbb{F}_e H(i\omega)$$

a saída

$f(t)$ será a transformada inversa de $\frac{\mathbb{F}}{s-i\omega}$, que é $F_{\text{máx}}\cos(\omega t + \varphi)$, mais a transformada inversa de $G(s)$.

$$f(t) = \underbrace{F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{resposta estacionária}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}}_{\text{resposta transitória}}$$

Geralmente (circuitos dissipativos) a resposta transitória aproxima-se de zero ($t \to \infty$). Considerando apenas a resposta estacionária, o sistema é:

$$\frac{\mathbb{F}_e}{s-i\omega} \longrightarrow \boxed{H(i\omega)} \longrightarrow \frac{\mathbb{F}_e H(i\omega)}{s-i\omega}$$

(função sinusoidal com a mesma freq. e fasor $H(i\omega)\mathbb{F}_e$)

Aula 23. 2019-12-09

FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

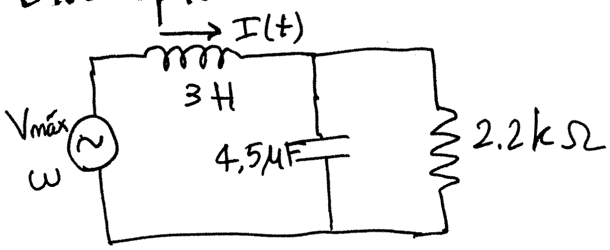
$$\tilde{f}_e \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow \tilde{f} = H\tilde{f}_e$$

Se a entrada for uma função sinusoidal, com fasor $\mathbb{F}_e$, e freq. angular ω no estado estacionário a saída será também sinusoidal, com fasor $H(i\omega)\mathbb{F}_e$

$$\mathbb{F}_e \longrightarrow \boxed{R(\omega)} \longrightarrow \mathbb{F} = R\,\mathbb{F}_e \qquad \begin{cases} |\mathbb{F}| = |R|\,|\mathbb{F}_e| \\ \angle\mathbb{F} = (\angle R) + (\angle \mathbb{F}_e) \end{cases}$$

$R(\omega) \doteq H(i\omega)$ = função complexa.

Exemplo 1.



Vmáx ω (~) representa uma fonte de tensão alternada:

$V(t) \doteq V_{máx}\cos(\omega t)$

<u>Resolução</u>. Unidades: $z \to k\Omega$, $\Delta V \to V \Rightarrow I \to mA$ $\left(I = \frac{\Delta V}{R}\right)$

$C \to \mu F \Rightarrow s \to kHz$ $\left(s = \frac{1}{zC}\right) \Rightarrow t \to ms$ $\left(t = \frac{1}{s}\right)$

$\Rightarrow L \to H$ $\left(L = \frac{z}{s}\right)$

No domínio da frequência:

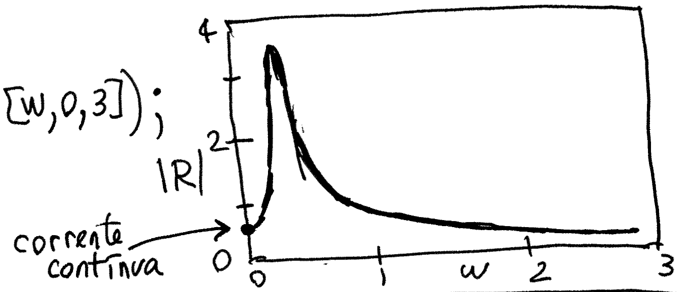
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{z_{total}} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{z_{total}}$$

$$H = \frac{1}{3s + \left(\frac{2.2\left(\frac{1}{4.5s}\right)}{2.2 + \frac{1}{4.5s}}\right)} = \frac{1}{3s + \left(\frac{2.2}{9.9s+1}\right)} = \frac{99s+1}{297s^2+3s+22}$$

$$R(\omega) = H(i\omega) = \frac{10 + i\,99\,\omega}{22 - 297\,\omega^2 + i\,30\,\omega}$$

módulo:

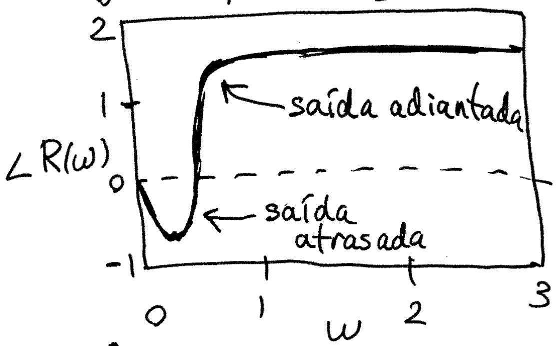
```
plot2d(cabs(R),[w,0,3]);
```



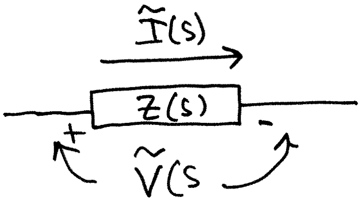
argumento:

```
plot2d(carg(R),[w,0,3])
```

2*%pi-



IMPEDÂNCIA COMPLEXA



$$\tilde{V}(s) = Z(s)\,\tilde{I}(s)$$

Se $I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_I)$

no estado estacionário,

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{V} = Z(i\omega)\,\mathbb{I}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} V_{\text{máx}} = |Z(i\omega)|\, I_{\text{máx}} \\ \varphi_V = \varphi_I + \angle Z(i\omega) \end{cases}$$

$$Z(i\omega) = \begin{cases} R, & \text{nas resistências} \\ i\omega L, & \text{indutores (reatância positiva)} \\ -\dfrac{i}{\omega C}, & \text{condensadores (reatância negativa)} \end{cases}$$

$$\angle Z(i\omega) = \begin{cases} 0, & \text{resistências} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{indutores} \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{condensadores} \end{cases} \qquad |Z(i\omega)| = \begin{cases} R, & \text{resistênc.} \\ \omega L, & \text{indutores} \\ \dfrac{1}{\omega C}, & \text{condens.} \end{cases}$$

Exemplo 2. Encontre $I(t)$ no exemplo 1, se $V(t)$ tiver $V_{máx} = 325\,V$ e $f = 50\,Hz$. (voltagem alternada usada em Portugal).

Resolução. $f = 0.050\,kHz \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{\pi}{10}$

$$\mathbb{I} = R\mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{I} = 325\left(\frac{10 + i\left(\frac{99\pi}{10}\right)}{22 - \frac{29\pi^2}{100} + i\,\frac{30\pi}{10}}\right)$$

$$= 890.1 \angle -0.97096$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = 890.1\cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.97096\right)} \qquad \begin{array}{l} I \to mA \\ t \to ms \end{array}$$

POTÊNCIA MÉDIA

Num dispositivo com voltagem $V(t)$ e corrente $I(t)$, a potência dissipada no instante t é:

$$P(t) = V(t)\,I(t)$$

se a corrente for alternada, com frequência angular ω, no estado estacionário a potência instantânea é:

$$P(t) = V_{máx}\,I_{máx}\cos(\omega t + \varphi_V)\cos(\omega t + \varphi_I)$$

usando a identidade: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right)$,

$$P(t) = \frac{1}{2}V_{máx}\,I_{máx}\left(\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)\right)$$

$$\varphi_V - \varphi_I = \angle Z(i\omega) \quad \text{(não depende de } t\text{)}$$

potência média dissipada:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{2}V_{máx}\,I_{máx}\cos(\angle Z)}$$

(o integral de $\cos(2\omega t + \ldots)$ é 0)

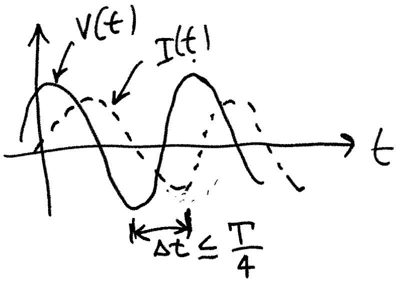
(fator de potência = cosseno do ângulo de Z)

Aula 24. 2019-12-12

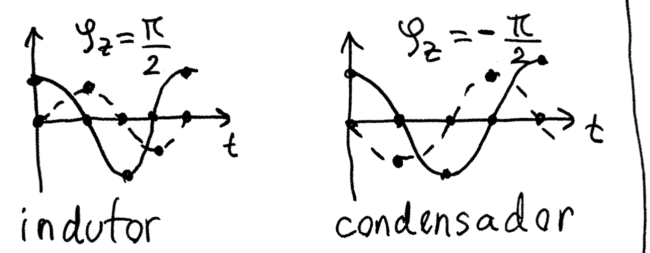
Num sistema com resistências ($Re(Z) > 0$), indutores ($Re(Z) = 0$) e condensadores ($Re(Z) = 0$), a impedância total tem sempre parte real positiva ou nula:

$$Z = |Z| \angle \varphi_Z \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_Z \leq \frac{\pi}{2}$$ (1º e 2º quadrantes do plano complexo)

$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I$ = desfasamento entre $V(t)$ e $I(t)$.



$$\Delta t = \frac{T}{4} \implies |\varphi_Z| = \frac{\pi}{2}$$



FATOR DE POTÊNCIA

$$0 \leq \cos \varphi_Z \leq 1$$

$\cos\varphi_Z = 1 \implies$ resistência
$\cos\varphi_Z = 0 \implies$ condensador ou indutor

potência média dissipada:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \cos \varphi_Z$$

numa resistência:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx}$$

Como num circuito de corrente contínua $P = VI$, definem-se: **voltagem eficaz** $= V_{ef} = \dfrac{V_{máx}}{\sqrt{2}}$

corrente eficaz $= I_{ef} = \dfrac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$

$$\implies \boxed{\bar{P} = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi_Z}$$ ($\bar{P} = V_{ef} I_{ef}$ numa resistência)

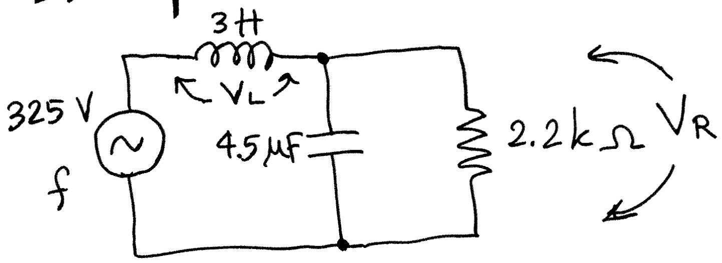
$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (V(t))^2 dt} \qquad I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I(t))^2 dt}$$

Em Portugal usa-se $V_{máx} = 325\ V \Rightarrow V_{ef} \approx 230\ V$

RESSONÂNCIA

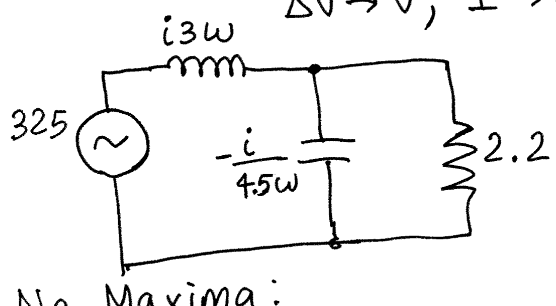
Efeito de amplificação da voltagem de uma fonte de tensão alternada, nos circuitos com indutores e condensadores.

Exemplo.



Determine as expressões de $V_{L_{máx}}$ e $V_{R_{máx}}$, em função da frequência angular $\omega = 2\pi f$.

<u>Resolução</u>. Unidades: $L \to H$, $C \to \mu F$, $R \to k\Omega$
$\Delta V \to V$, $I \to mA$, $t \to ms$, $\omega \to kHz$



No Maxima:

```
[zR,zL,zC]: [2.2, %i*3*w, -%i/4.5/w];
zp: zC*zR/(zC+zR);
z: zL + zp;
```

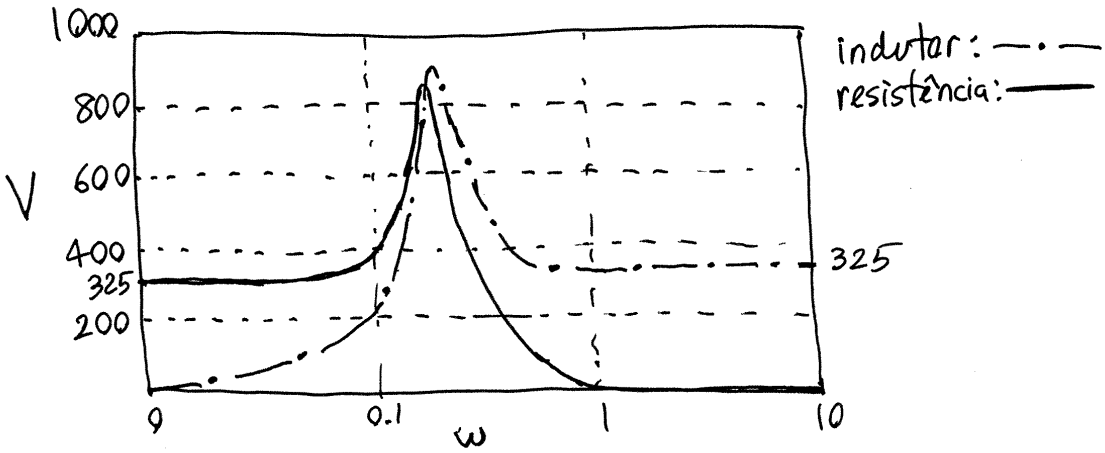
```
I: 325/z;
VL: zL*I;
VR: zp*I;
```

VLmax: ratsimp(cabs(VL)); $\longrightarrow$ $V_{Lmáx} = \dfrac{975\omega\sqrt{9801\omega^2+100}}{\sqrt{88209\omega^4-12168\omega^2+484}}$

VRmax: ratsimp(cabs(VR)); $\rightarrow$ $V_{Rmáx} = \dfrac{7150}{\sqrt{88209\omega^4-12168\omega^2+484}}$

Gráficos de $V_{Lmáx}$ e $V_{Rmáx}$ em função de ω:

```
plot2d([VLmax,VRmax],[w,0,10],[legend,"indutor","resistência"],
     logx);
```



$\omega = 0$ (corrente contínua): $V_{Lmáx} = 0$, $V_{Rmáx} = 325$ V

$\omega = 10$ kHz : $V_{Lmáx} \approx 325$ V, $V_{Rmáx} \approx 0$

Existe uma frequência de ressonância

$$\omega \approx 0.26 \text{ kHz}$$

em que $V_{Lmáx}$ e $V_{Rmáx}$ são ambas próximas de 900 V. $V_{Lmáx} + V_{Rmáx}$ é muito maior que a voltagem máxima da fonte! (325V)

ω em que $V_{L\text{máx}}$ tem valor máximo:

float(solve(diff(VLmax, w)=0)); $\rightarrow \omega \approx 0.2808$ kHz

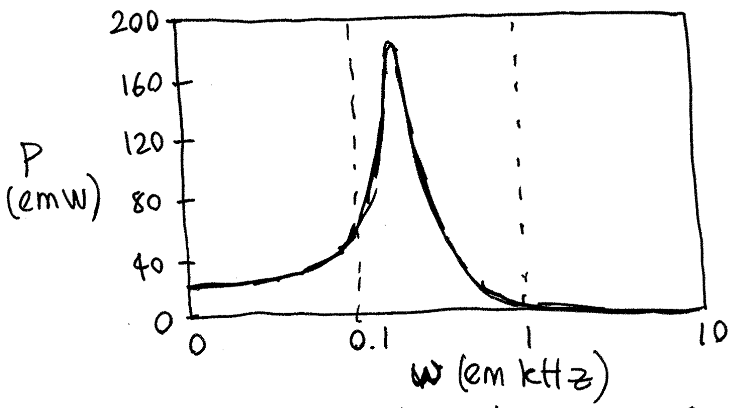
ω em que $V_{R\text{máx}}$ tem valor máximo:

float (solve (diff(VRmax ,w)=0)); $\rightarrow \omega \simeq 0.2626$ kHz

Potência média fornecida pela fonte:

P: 325 * cabs (I) * cos(carg (z))/2 ; (em mW)

plot2d (P, [w,0,10],[ylabel,"P"],logx);



frequência angular de ressonância:

float(solve(diff(P, w) =0)); $\longrightarrow \omega \simeq 0.2626$ kHz

se f=50 Hz $\rightarrow \omega = \frac{\pi}{10}$ kHz $\simeq 0.3141$ kHz

Capítulo 2

Exames

2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 16 de janeiro de 2020. Compareceram 156 estudantes e a nota média foi 10 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

U.PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

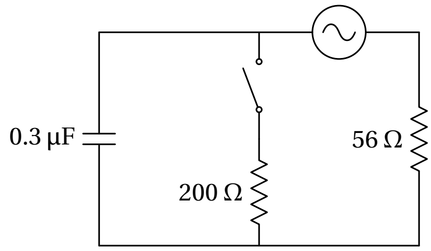
MESTRADO INTEGRADO EM ENG. INFORMÁTICA E COMPUTAÇÃO — 2019/2020

EIC0014 — FÍSICA II — 2º ANO, 1º SEMESTRE — 16 de janeiro de 2020

> Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez.

Li e compreendi o texto acima:____

1. (4 valores) A fonte no circuito representado no diagrama tem tensão eficaz de 100 V e frequência de 2 kHz. Calcule a corrente eficaz na resistência de 56 Ω, quando o interruptor estiver aberto e quando estiver fechado.



2. (4 valores) Um protão (massa 1.67×10^{-27} kg) encontra-se na origem, em $t = 0$, com velocidade $\vec{v} = 184\,\hat{\imath}$ (km/s), dentro de uma região onde há vácuo e campo magnético uniforme: $\vec{B} = -0.062\,\hat{\jmath}$ (T). Determine a posição do protão em $t = 0.85$ μs.

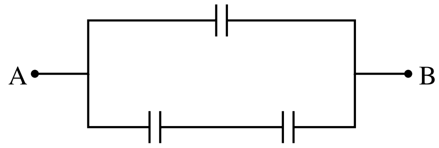
> **PERGUNTAS**. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Um condensador de 4 μF, inicialmente descarregado, e uma resistência de 50 kΩ, ligam-se em série a uma fonte de tensão variável. Se t representa o tempo, a partir do instante $t = 0$ em que são ligados os dispositivos, a expressão da tensão da fonte é $30\,t$, em unidades SI. Encontre a expressão para a voltagem na resistência, em função do tempo (em unidades SI).

(A) $6\left(t - e^{-5t}\right)$ **(D)** $6\,t\,e^{-5t}$
(B) $6\,e^{-5t}$
(C) $6\left(1 - e^{-5t}\right)$ **(E)** $6\left(t + e^{-5t}\right)$

Resposta: ☐

4. Cada um dos três condensadores na figura tem o mesmo valor da capacidade, C. Determine a capacidade equivalente entre A e B.



(A) $C/2$ **(C)** $C/3$ **(E)** $3C/2$
(B) $3C$ **(D)** $2C/3$

Resposta: ☐

5. Durante 8 segundos passaram 3×10^{16} eletrões de condução através de um condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V. Determine a energia fornecida pela pilha durante esse intervalo.

(A) 13.68 mJ **(C)** 23.04 mJ **(E)** 7.2 mJ
(B) 2.16 mJ **(D)** 28.8 mJ

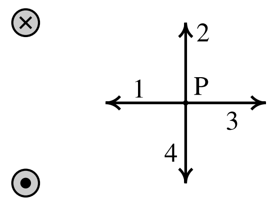
Resposta: ☐

6. Dentro do cubo definido por $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ e $0 \le z \le 3$ existe campo elétrico dado pela expressão $\vec{E} = (4 + x)\,\hat{\imath}$ (unidades SI). Como tal, pode afirmar-se que dentro do cubo:

(A) A carga interna é negativa.
(B) A carga interna é nula.
(C) Existe um ponto de sela do campo.
(D) A carga interna é positiva.
(E) O fluxo elétrico é nulo.

Resposta: ☐

7. Qual das setas representa a direção e sentido do campo magnético $\vec{B}$ no ponto P, produzido pelos dois fios retilíneos e paralelos com correntes da mesma intensidade, nos sentidos indicados na figura?



(A) Nenhuma, porque $\vec{B} = 0$ **(D)** 2
(B) 3
(C) 4 **(E)** 1

Resposta: ☐

8. Uma resistência de 1.2 kΩ e um indutor de 2.3 H ligam-se em série a uma fonte de tensão alternada com voltagem máxima de 30 V e frequência $f = 70$ Hz. Determine a corrente máxima no sistema.

(A) 18.41 mA **(C)** 25.0 mA **(E)** 19.11 mA
(B) 19.3 mA **(D)** 13.56 mA

Resposta: ☐

9. O valor da constante de Coulomb, k, em unidades
$\text{mN}\cdot\text{cm}^2/\text{nC}^2$
é aproximadamente:

(A) 0.09 **(C)** 90 **(E)** 9
(B) 0.009 **(D)** 9000

Resposta: ☐

10. Num nó dum circuito de corrente alternada encontram-se 3 ramos diferentes. As correntes que entram no nó pelos ramos 1 e 2 são $3.7\cos(\pi\,t + 0.432)$ e $1.9\cos(\pi\,t + 0.123)$. Determine a expressão da corrente que sai pelo terceiro ramo.

(A) $4.98\cos(\pi\,t + 0.271)$ **(D)** $5.28\cos(\pi\,t + 0.381)$
(B) $5.99\cos(\pi\,t + 0.252)$
(C) $5.54\cos(\pi\,t + 0.328)$ **(E)** $6.39\cos(\pi\,t + 0.265)$

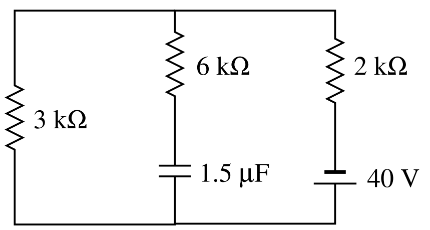
Resposta: ☐

11. Ligam-se em série duas resistências idênticas a uma bateria ideal (resistência interna desprezável) e observa-se que a potência dissipada pelas duas resistências é 80 W. Se as mesmas duas resistências fossem ligadas em paralelo à mesma bateria, qual seria a potência total que dissipavam nesse caso?

(A) 320.0 W **(C)** 160.0 W **(E)** 80.0 W
(B) 40.0 W **(D)** 20.0 W

Resposta: ☐

12. No circuito seguinte, determine a intensidade da corrente na resistência de 2 kΩ, no instante em que a carga no condensador é de 18 μC, com sinal positivo na armadura de cima.



(A) 14 mA **(C)** 10 mA **(E)** 5 mA
(B) 11 mA **(D)** 8 mA

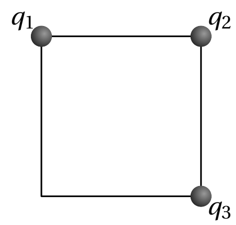
Resposta: ☐

13. Se a resistência de uma barra de chumbo for 65 Ω a 20°C, qual será a resistência dessa mesma barra a 56°C? (O coeficiente de temperatura do chumbo a 20°C, é igual a 0.0043).

(A) 70.0 Ω **(C)** 85.1 Ω **(E)** 90.2 Ω
(B) 77.1 Ω **(D)** 75.1 Ω

Resposta: ☐

14. Três cargas pontuais, $q_1 = 4 \times 10^{-8}$ C, $q_2 = -5 \times 10^{-8}$ C e $q_3 = 2 \times 10^{-8}$ C encontram-se em 3 dos vértices dum quadrado com 4 cm de aresta, tal como mostra a figura. Determine o módulo da força elétrica resultante na carga q_2.



(A) 113.2 mN **(C)** 4.19 mN **(E)** 62.89 mN
(B) 12.58 mN **(D)** 2.52 mN

Resposta: ☐

15. Liga-se uma bobina com indutância de 5.6 mH a uma fonte ideal de 1.5 V. Após 1.5 segundos, a corrente na bobina é igual a 4.7 mA. Calcule a força eletromotriz média induzida na bobina durante esse intervalo.

(A) 17.55 μV **(C)** 8.77 μV **(E)** 0.75 V
(B) 1.0 V **(D)** 3.13 mV

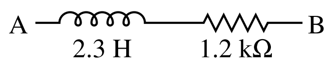
Resposta: ☐

16. A carga total numa superfície condutora esférica de raio 5 cm é 4 nC. Uma segunda superfície condutora esférica, de raio 7 cm e concêntrica com a primeira, tem carga total 1 nC. Encontre o valor do potencial num ponto a 6 cm do centro das esferas, arbitrando potencial nulo no infinito.

(A) 729 V **(C)** 600 V **(E)** 1500 V
(B) 150 V **(D)** 750 V

Resposta: ☐

17. Determine o módulo da impedância complexa entre os pontos A e B para uma tensão alternada com frequência $f = 60$ Hz.



(A) 1.7 kΩ **(C)** 1.2 kΩ **(E)** 2.07 kΩ
(B) 1.66 kΩ **(D)** 1.48 kΩ

Resposta: ☐

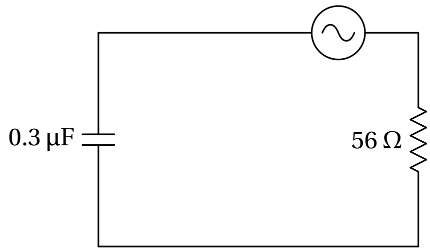
2.1.2 Resolução

Problema 1. Em qualquer sistema com impedância complexa Z, a relação entre a tensão eficaz e a corrente eficaz é a seguinte:

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{|Z|}$$

Como a corrente eficaz através da resistência de 56 Ω é igual à corrente eficaz fornecida pela fonte, será igual à voltagem eficaz da fonte, sobre o módulo da impedância total equivalente entre os terminais da fonte ($100/|Z_\text{t}|$).

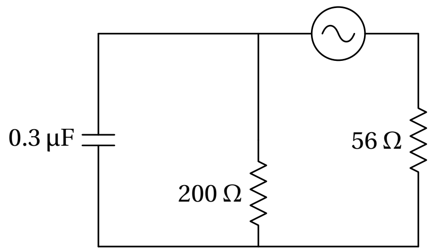
Quando o interruptor estiver aberto, a resistência de 56 Ω estará em série com o condensador, tal como mostra o diagrama à direita. Como tal, em unidades SI,



$$Z_\text{t} = 56 - \frac{\text{i}}{2\,\pi \times 2000 \times 0.3 \times 10^{-6}} = 56 - \text{i}\,265.3$$

$$|Z_\text{t}| = \sqrt{56^2 + 265.3^2} = 271.1 \quad\Longrightarrow\quad I_{\text{ef}} = \frac{100}{271.1} = 0.369\,\text{A}$$

Quando o interruptor estiver fechado (diagrama à direita), a resistência de 56 Ω estará em série com o conjunto do condensador em paralelo com a resistência de 200 Ω. Em unidades SI,



$$Z_\text{t} = 56 + \left(\frac{1}{200} + \text{i}\,2\,\pi \times 2000 \times 0.3 \times 10^{-6}\right)^{-1}$$

$$Z_\text{t} = 56 + \frac{1}{0.005 + \text{i}\,0.00377} = \frac{1.28 + \text{i}\,0.2111}{0.005 + \text{i}\,0.00377} \quad\Longrightarrow\quad |Z_\text{t}| = \frac{\sqrt{1.28^2 + 0.2111^2}}{\sqrt{0.005^2 + 0.00377^2}} = 207.2$$

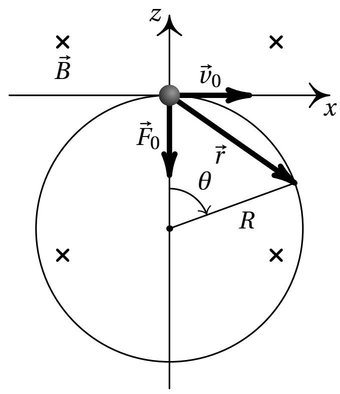
E a corrente eficaz é:

$$I_{\text{ef}} = \frac{100}{207.2} = 0.483\,\text{A}$$

Problema 2. Em $t = 0$, a força magnética sobre o protão é (unidades SI):

$$\vec{F}_0 = 1.602 \times 10^{-19} \left(184 \times 10^3\,\hat{\imath} \times (-0.062\,\hat{\jmath})\right) = -1.8276 \times 10^{-15}\,\hat{k}$$

Observe-se que o peso do protão, 1.637×10^{-26} N, é 11 ordens de grandeza inferior e, como tal, pode ser ignorado e não é necessário saber a direção da vertical.



Em $t = 0$, o protão será desviado na direção negativa do eixo dos z; mais tarde, a força terá outra direção diferente, mas sempre no plano xz (plano perpendicular a $\vec{B}$). Como tal, a trajetória do protão estará no plano xz. Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade, o módulo desta não muda e o módulo da força normal (magnética) permanece constante. O resultado é um movimento circular uniforme, no plano xz, com centro no semieixo negativo dos z, tal como mostra a figura ao lado.
Basta uma variável para descrever a posição do protão, que pode ser o ângulo $\theta(t)$ indicado na figura, com $\theta = 0$ em $t = 0$. O vetor posição em qualquer instante $t \geq 0$ é:

$$\vec{r} = R\left(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{k}\right) - R\,\hat{k} \tag{2.1}$$

O raio da trajetória determina-se igualando o módulo da força magnética à massa vezes a aceleração normal:

$$1.8276\times10^{-15} = 1.67\times10^{-27}\left(\frac{184000^2}{R}\right) \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{5.654\times10^{-17}}{1.8276\times10^{-15}} = 0.03094\text{ m}$$

E a velocidade angular (constante) é igual a,

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{184000}{0.03094} = 5.947\times10^{6}\text{ s}^{-1}$$

O ângulo em $t = 0.85$ µs obtém-se integrando a equação diferencial:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\,t} \quad\Longrightarrow\quad 5.947\times10^{6}\int\limits_{0}^{0.85\times10^{-6}}\mathrm{d}\,t = \int\limits_{0}^{\theta}\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \theta = 5.947\times0.85 = 5.055$$

Finalmente, o vetor posição encontra-se substituindo R e θ na equação 2.1 (resposta em metros):

$$\vec{r} = -0.02914\,\hat{\imath} - 0.02055\,\hat{k}$$

Perguntas

6. C
7. E
8. E
9. D
10. E
11. E
12. A
13. C
14. A
15. B
16. D
17. B
18. A
19. A
20. D

2.1.3 Cotações

Problema 1

- Cálculo da impedância total com o interruptor aberto ______ 0.8
- Módulo dessa impedância ______ 0.4
- Cálculo da corrente eficaz com o interruptor aberto ______ 0.4
- Cálculo da impedância total com o interruptor fechado ______ 1.6
- Módulo dessa impedância ______ 0.4
- Cálculo da corrente eficaz com o interruptor fechado ______ 0.4

Problema 2

- Determinação do plano da trajetória ______ 0.4
- Identificação do movimento circular uniforme e posição do centro da trajetória 0.8
- Cálculo do raio da trajetória ______ 0.4
- Cálculo da velocidade angular ______ 0.4
- Cálculo do ângulo no instante final ______ 0.4
- Expressão para o vetor posição e cálculo desse vetor no instante final ______ 1.6

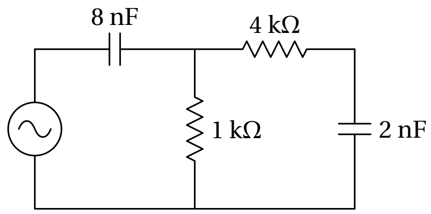
2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 5 de fevereiro de 2020. Compareceram 93 estudantes e a nota média foi 10.2 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez.

Li e compreendi o texto acima:____

1. (4 valores) A fonte no circuito representado no diagrama tem voltagem máxima 9 V e frequência angular $\omega = 125$ kHz. Determine a voltagem máxima no condensador de 2 nF.



2. (4 valores) Um protão (massa 1.67×10^{-27} kg) passa pela origem, em $t = 0$, com velocidade $(3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath})$ Mm/s, dentro de uma região onde há vácuo e campo elétrico uniforme, $\vec{E} = E\,\hat{\jmath}$. Determine o valor que deverá ter E para que o protão atravesse o eixo dos x em $x = 85$ cm. (O peso do protão pode ser desprezado neste caso).

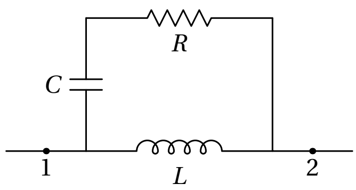
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Três cargas pontuais estão fixas no eixo do x, a primeira carga, de 32 nC, encontra-se em $x = 0$, a segunda, de 8 nC está em $x = 6$ m, e a terceira carga, com valor desconhecido q, está em $x = 3$. Determine o valor de q, sabendo que o campo elétrico em $x = 8$ m tem módulo 15.3 N/C, e aponta no sentido positivo do eixo dos x.

(A) -10 nC **(C)** 25 nC **(E)** 5 nC
(B) 15 nC **(D)** -20 nC

Resposta: ☐

4. Calcule a impedância equivalente entre os pontos 1 e 2.



(A) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2 + L\,s}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s + 1}$

(B) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2 + L\,s + R}{R\,C\,s + 1}$

(C) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2 + R}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s + 1}$

(D) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2 + L\,s + R}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s}$

(E) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2 + L\,s + R}{L\,C\,s^2 + 1}$

Resposta: ☐

5. Numa região onde há vácuo e campo magnético uniforme, os eletrões (massa 9.109×10^{-31} kg) com velocidade perpendicular ao campo descrevem movimento circular uniforme com período 5.2 ns. Determine o módulo do campo magnético (o peso pode ser desprezado).

(A) 344 G **(C)** 34 G **(E)** 618 G
(B) 69 G **(D)** 52 G

Resposta: ☐

6. Selecione a afirmação correta. A energia potencial elétrica de uma partícula com carga positiva:

(A) É sempre menor que a energia de uma partícula com carga negativa no mesmo ponto.
(B) É maior nos pontos onde o potencial é menor.
(C) É sempre positiva.
(D) É sempre maior que a energia de uma partícula com carga negativa no mesmo ponto.
(E) É maior nos pontos onde o potencial é maior.

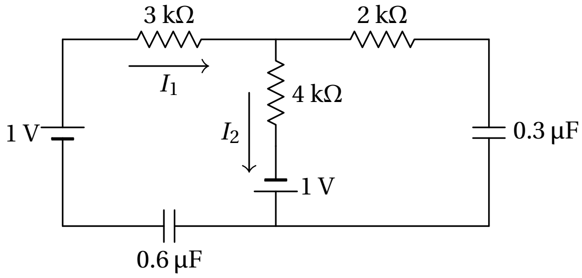
Resposta: ☐

7. A resistência de uma bobina é 50 Ω e a sua indutância 34 mH (consideram-se em série). Determine o desfasamento (em radianos) entre a voltagem e a corrente na bobina, quando for ligada a uma fonte de tensão alternada com frequência de 60 Hz.

(A) 0.251 **(C)** 0.301 **(E)** 0.376
(B) 0.427 **(D)** 0.125

Resposta: ☐

8. Num determinado instante, as correntes no circuito do diagrama são $I_1 = 349$ μA e $I_2 = 315$ μA. Determine o valor da carga no condensador de 0.3 μF nesse mesmo instante.



(A) 19.2 nC **(C)** 230.4 nC **(E)** 518.4 nC
(B) 57.6 nC **(D)** 288.0 nC

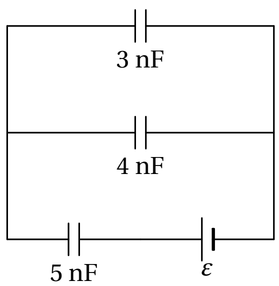
Resposta: ☐

9. Existe carga elétrica distribuída uniformemente no interior do paralelepípedo definido por $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$ e $0 \le z \le 5$ (em metros). O fluxo elétrico produzido pelo paralelepípedo, através da esfera com centro na origem e raio igual a 9 m, é igual a 5193 N/(C·m^2). Determine a carga volúmica dentro do paralelepípedo, em unidades de nC/m^3.

(A) 0.2126 **(B)** 0.3673 **(C)** 0.574 **(D)** 0.7653 **(E)** 1.7006

Resposta:

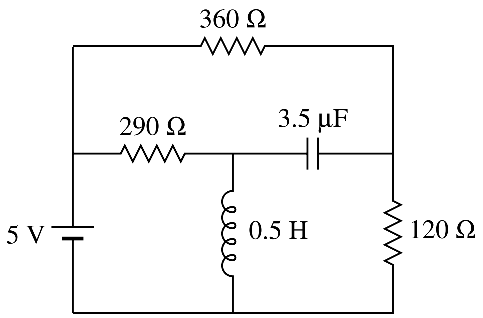
10. No circuito do diagrama, sabendo que a carga armazenada no condensador de 3 nF é igual a 15 nC, calcule o valor da f.e.m. ε.



(A) 4 V **(B)** 15 V **(C)** 7 V **(D)** 12 V **(E)** 5 V

Resposta:

11. Determine a carga acumulada no condensador, após um tempo suficientemente elevado para que o indutor e o condensador estejam em estado estacionário.



(A) 3.22 µC **(B)** 2.27 µC **(C)** 1.32 µC **(D)** 8.36 µC **(E)** 4.38 µC

Resposta:

12. Três fios retilíneos e muito compridos, paralelos ao eixo dos z, transportam correntes de 1 A, 2 A e 3 A, todas no sentido positivo do eixo dos z. O fio com 1 A passa pelo ponto (2, 1) no plano xy (todas as distâncias em cm), o fio com 2 A passa pelo ponto (4, 2) e o fio com 3 A passa pelo ponto (2, 4). Calcule o integral de linha do campo magnético no triângulo, no plano xy, com vértices nos pontos $(x, y) = (1, 0)$, (3, 1) e (1, 3).

(A) 0.8π (G·cm) **(B)** 0.4π (G·cm) **(C)** 1.2π (G·cm) **(D)** 2.0π (G·cm) **(E)** 1.6π (G·cm)

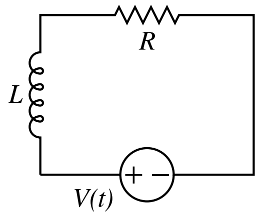
Resposta:

13. A carga positiva num dipolo elétrico é 4.8×10^{-19} C e encontra-se a uma distância de 6.4×10^{-10} m da carga negativa. Determine o valor do potencial elétrico num ponto que se encontra a 9.2×10^{-10} m de cada uma das cargas.

(A) 9.4 V **(B)** 1.7 V **(C)** 5.1×10^9 V **(D)** 4.2 V **(E)** zero

Resposta:

14. A expressão da voltagem da fonte no circuito do diagrama é $V(t) = \mathrm{e}^{-t}$ (unidades SI e $t \ge 0$) e a expressão da corrente é $I(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}}{8}$. Sabendo que o valor da resistência é $R = 12\ \Omega$, encontre o valor da indutância L.



(A) 2 H **(B)** 5 H **(C)** 1 H **(D)** 3 H **(E)** 4 H

Resposta:

15. Liga-se um condutor com resistência de 750 Ω a uma pilha com fem de 8.5 V. Sabendo que a resistência interna da pilha é de 148 Ω, calcule a corrente no condutor.

(A) 11.3 mA **(B)** 9.5 mA **(C)** 80.1 mA **(D)** 68.8 mA **(E)** 20.8 mA

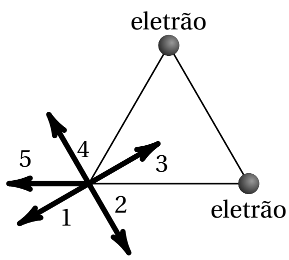
Resposta:

16. A expressão do campo elétrico numa região do espaço é $\vec{E} = 6x^2\,\hat{\imath}$ (unidades SI). Calcule a diferença de potencial $V(2) - V(1)$ entre os pontos $x = 2$ m e $x = 1$ m, sobre o eixo dos x.

(A) -12 V **(B)** -14 V **(C)** -18 V **(D)** -24 V **(E)** -6 V

Resposta:

17. Dois eletrões encontram-se em dois dos vértices de um triângulo equilátero, tal como mostra a figura. Qual dos 5 vetores representa melhor o campo elétrico no terceiro vértice?



(A) 4 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 1 **(E)** 3

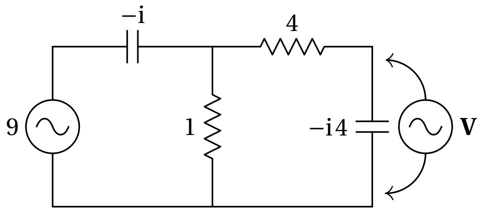
Resposta:

2.2.2 Resolução

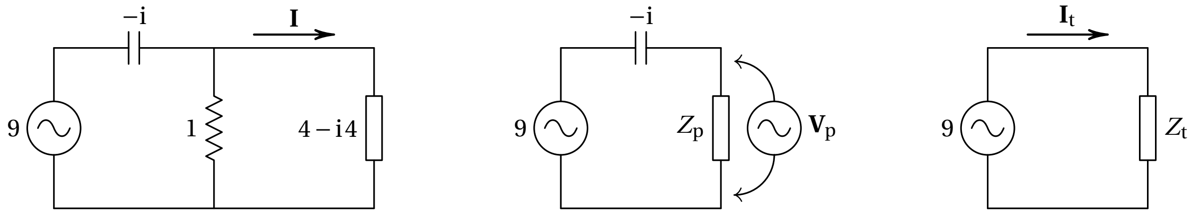
Problema 1. As impedâncias complexas dos dois condensadores são, em Ω,

$$Z_1 = \frac{-\mathrm{i}}{125\times 10^3\times 8\times 10^{-9}} = -\mathrm{i}\,1000 \qquad Z_2 = \frac{-\mathrm{i}}{125\times 10^3\times 2\times 10^{-9}} = -\mathrm{i}\,4000$$

Como tal, com as impedâncias em kΩ e as voltagens em V, o circuito é o seguinte:



Para determinar o fasor **V**, usam-se circuitos equivalentes mais simples, da forma seguinte:



Onde a impedância em paralelo e a impedância total são:

$$Z_\mathrm{p} = \frac{4-\mathrm{i}4}{5-\mathrm{i}4} \qquad\qquad Z_\mathrm{t} = -\mathrm{i} + \frac{4-\mathrm{i}4}{5-\mathrm{i}4} = \frac{9}{4+\mathrm{i}5}$$

O fasor da corrente total é (em mA),

$$\mathbf{I}_\mathrm{t} = \frac{9}{\dfrac{9}{4+\mathrm{i}5}} = 4+\mathrm{i}5$$

O fasor da voltagem na impedância Z_p é:

$$\mathbf{V}_\mathrm{p} = \left(\frac{4-\mathrm{i}4}{5-\mathrm{i}4}\right)(4+\mathrm{i}5) = 4+\mathrm{i}4$$

E os fasores da corrente e da voltagem no condensador de 2 nF são:

$$\mathbf{I} = \frac{4+\mathrm{i}4}{4-\mathrm{i}4} = \mathrm{i} \qquad\qquad \mathbf{V} = -\mathrm{i}4\times\mathrm{i} = 4$$

Ou seja, a voltagem máxima nesse condensador é igual a 4 V.

Problema 2. A força elétrica sobre o protão e a sua aceleração, ambas constantes, são:

$$\vec{F} = e E\, \hat{\jmath} \qquad\qquad \vec{a} = \frac{e E}{m}\, \hat{\jmath}$$

As duas componentes da equação de movimento são (unidades SI):

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 9.593 \times 10^7\, E$$

A primeira equação implica que v_x permanece constante, ou seja, igual à componente x da velocidade inicial: $v_x = 3$ Mm/s. Como a projeção y do movimento é com aceleração constante, a trajetória será uma parábola no plano xy.

O tempo que o protão demora até atravessar o eixo dos x, em $x = 85$ cm é:

$$\Delta t = \frac{0.85}{3 \times 10^6} = 2.833 \times 10^{-7}\ \text{s}$$

Observe-se que o potencial elétrico tem o mesmo valor em todo o eixo dos x; como tal, quando o protão atravesse o eixo dos x, terá a mesma energia mecânica e potencial elétrica do instante inicial. A energia cinética nesse instante será igual à energia cinética inicial, o qual implica que o protão atravessará o eixo dos x com $v_y = -2$ Mm/s. Separando variáveis e integrando a segunda equação de movimento, obtém-se:

$$\int\limits_{2\times 10^6}^{-2\times 10^6} \mathrm{d}v_y = 9.593 \times 10^7\, E \int\limits_{0}^{2.833\times 10^{-7}} \mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad E = -\frac{4 \times 10^6}{9.593 \times 10^7 \times 2.833 \times 10^{-7}}$$

O resultado é $E = -1.47 \times 10^5$ N/C.

Perguntas

3. D
4. A
5. B
6. E
7. A
8. B
9. D
10. D
11. E
12. B
13. E
14. E
15. B
16. B
17. E

2.2.3 Cotações

Problema 1

- Impedância em série do condensador e a resistência do ramo da direita ____ 0.4
- Impedância da alínea anterior, em paralelo com a resistência no meio ____ 0.4
- Impedância total entre os terminais da fonte ____ 0.4
- Fasor da corrente total que sai da fonte ____ 0.4
- Fasor da voltagem na impedância da segunda alínea ____ 0.8
- Fasor da corrente no ramo da direita ____ 0.8
- Fasor da voltagem no condensador da direita e valor máximo dessa voltagem 0.8

Problema 2

- Observação que a trajetória é parabólica, no plano xy ____ 0.4
- Cálculo das componentes da aceleração ____ 0.4
- Resolução das duas componentes das equações de movimento ____ 2.4
- Cálculo do tempo que demora a atravessar o eixo dos x ____ 0.4
- Obtenção do valor de E, com o sinal correto ____ 0.4

Bibliografia

Adams, S., & Allday, J. (2000). *Advanced physics.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros.* Lopes da Silva Editora: Porto, Portugal.

Blinchikoff, H. J., & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains.* Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.

Brito, L., Fiolhais, M., & C, P. (1999). *Campo Electromagnético.* Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.

Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Feynman, P. R., Leighton, R. B., & M, S. (1964). *The feynman lectures on physics.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

Hecht, E. (1991). *Óptica.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Hecht, E. (1994). *Physics.* Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.

Henriques, A. B., & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo.* Lisboa, Portugal: IST Press.

Lévy-Leblond, J. M., & A, B. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas.* Lisboa, Portugal: Gradiva.

Maxima Development Team. (2019). *Maxima Manual* (5.43.0 ed.). Disponível em: http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.pdf

Mendiratta, S. K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo.* Lisboa, Portugal: Lisboa, Portugal.

Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2.* McGraw-Hill: New York, NY, USA.

Scherz, P., & Monk, S. (2013). *Practical electronics for inventors* (3a ed.). McGraw-Hill: New York, NY, USA.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2004). *Physics* (5a ed.). New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.

Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Villate, J. E. (2019). *Eletricidade, magnetismo e circuitos* (3a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.

Walker, J. (1975). *O grande circo da Física*. Gradiva: Lisboa, Portugal.