Resumindo e concluindo...

TeleTextos de bolso e de trazer por casa, suavemente, suavemente

Os critérios de decisão MAP e ML

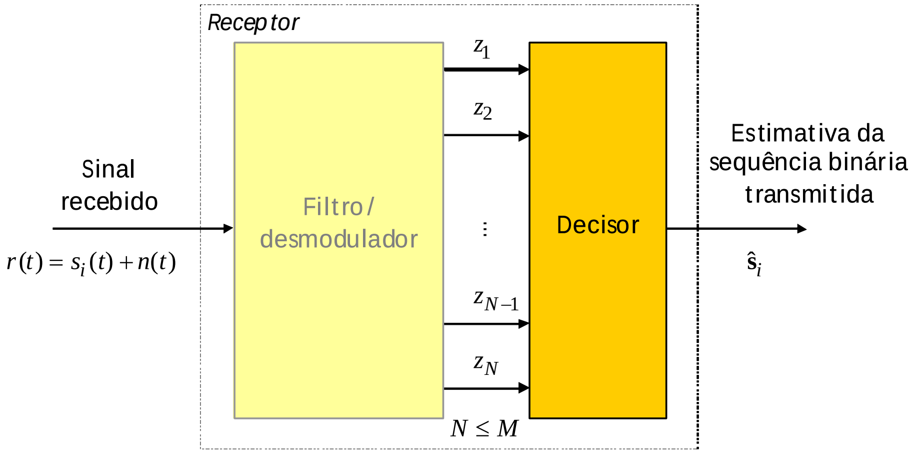
© Sílvio A. Abrantes
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto
Porto, Portugal
sam@fe.up.pt

Janeiro de 2009

Conteúdo

1. Introdução

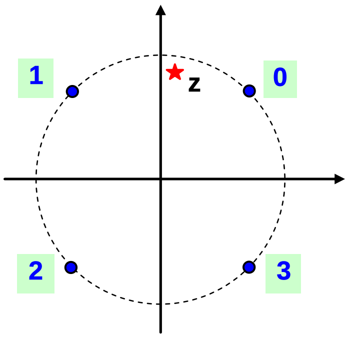
Uma sequência de *M* formas de onda $s_i(t)$, $0 \le t \le T$, representadas num espaço de sinal de $N \le M$ dimensões atravessa um canal de comunicação ruidoso e chega ao receptor, que a tenta estimar através de uma escolha realizada num bloco decisor (ver figura seguinte). Admitamos que em cada instante de amostragem o decisor recebe um conjunto de *N* valores, que encararemos como um vector-coluna $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & \ldots & z_N \end{bmatrix}^T$ no referido espaço de sinal de *N* dimensões. A dimensão do espaço depende do sinal enviado. Por exemplo, um sinal modulado em 16-QAM necessita de duas dimensões, ao passo que um sinal de 8-FSK precisa de oito e um sinal antipodal em banda-base só precisa de uma.



Sem ruído o vector **z** nos sucessivos instantes de amostragem apresenta-nos as coordenadas dos pontos da constelação. Com ruído já não obtemos esses pontos mas sim outros.

Sem ruído: $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix}=\mathbf{s}_i$ Com ruído: $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{i1}+n_1 \\ s_{i2}+n_2 \\ \vdots \\ s_{iN}+n_N \end{bmatrix}=\mathbf{s}_i+\mathbf{n}$

No vector anterior o ruído é representado pelo vector de amostras $\mathbf{n}=\begin{bmatrix} n_1 & \dots & n_N \end{bmatrix}$. A pergunta que fazemos é: como estimar o símbolo $\mathbf{s}_i$ a partir do vector recebido **z**? Por exemplo, se na figura seguinte recebermos o vector **z** assinalado que ponto da constelação devemos escolher? Deveremos escolher o símbolo 0? E por que não o símbolo 1?



Para responder às perguntas devemos ter em conta a estatística do ruído e as probabilidades de ocorrência dos símbolos, que no seu conjunto nos vão ajudar a estabelecer regiões de decisão, ou regiões de pertença: se o ponto recebido "cair" na região do sinal 2, por exemplo, o decisor escolhe esse símbolo. Como estabelecer regiões de decisão e suas fronteiras? Vamos abordar dois métodos.

2. Os critérios de estimação MAP e ML

Suponhamos que o ruído aditivo tem média nula e que a sua função densidade de probabilidade (fdp) é $p_n(\mathbf{n})$, uma função de *N* variáveis visto o vector **n** ser composto de *N* elementos. Como estes são independentes uns dos outros a fdp conjunta $p_n(\mathbf{n})$ é igual ao produto das fdp de cada um:

$$p_n(\mathbf{n})=p_n(n_1)p_n(n_2)\dots p_n(n_N)=\prod_{j=1}^{N}p_n(n_j)\,.$$

Se transmitirmos o símbolo correspondente a $\mathbf{s}_i$ o decisor recebe uma amostra $\mathbf{z}=\mathbf{s}_i+\mathbf{n}$ de uma variável aleatória cuja fdp é $p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_i\right)=p_n(\mathbf{z}-\mathbf{s}_i)=\prod_{j=1}^{N}p_n(z_j-s_{ij})$. À função densidade de probabilidade condicional $p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_i\right)$ dá-se o nome de *verosimilhança* de $\mathbf{s}_i$. As verosimilhanças são conhecidas *a priori*, mesmo sem ainda termos recebido nada.

Se o ruído for gaussiano com média nula e variância σ^2 – isto é[1], $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ – a fdp da amostra de ruído n_j é dada por

$$p_n(n_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-n_j^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

[1] Para quem não sabe: $\mathcal{N}(\bar{X},\sigma^2)$ designa uma distribuição normal (gaussiana) de média $\bar{X}$ e variância σ^2.

e a verosimilhança da componente s_{ij} é igual a

$$p_n(z_j - s_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z_j - s_{ij})^2}{2\sigma^2} \right)$$

de modo que globalmente temos

$$\begin{aligned} p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_i\right) &= \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z_j - s_{ij})^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/2} \exp\left(-\frac{(z_1 - s_{i1})^2 + (z_2 - s_{i2})^2 + \ldots + (z_N - s_{iN})^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\left\| \mathbf{z} - \mathbf{s}_i \right\|^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Note-se que $\left\| \mathbf{z} - \mathbf{s}_i \right\| = d_i$ representa a distância do ponto recebido ao símbolo $\mathbf{s}_i$ pelo que poderíamos escrever também $p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_i\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/2} \exp\left(-\frac{d_i^{\,2}}{2\sigma^2} \right)$. Um caso muito frequente é o do espaço de sinal a duas dimensões. Aí é

$$p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_i\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\left\| \mathbf{z} - \mathbf{s}_i \right\|^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{d_i^{\,2}}{2\sigma^2} \right). \tag{3}$$

A estimativa do ponto enviado é feita de acordo com dois critérios de estimação de parâmetros: MAP e ML. Suponhamos, em primeiro lugar, que temos uma transmissão binária de pontos $\mathbf{s}_0$ e $\mathbf{s}_1$. Depois generalizaremos a situação para a transmissão não-binária de símbolos num espaço de sinal multidimensional.

2.1. Critério ML ("maximum likelihood")

Imagine-se que a probabilidade de se receber um dado vector *z* tendo-se enviado $\mathbf{s}_1$ é maior que a de receber o mesmo *z* se se tiver enviado $\mathbf{s}_0$. Se assim for somos inclinados a pensar que, provavelmente, foi enviado $\mathbf{s}_1$. Então uma maneira de escolher o ponto enviado é procurar aquele que está associado à maior das verosimilhanças $p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_0\right)$ e $p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_1\right)$. É por isso que se chama a esta opção de escolha *critério da máxima verosimilhança*, ou *critério ML*. As decisões são tomadas de acordo com

$$p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0) \qquad \textit{critério ML} \tag{4}$$

A expressão significa que se $p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1) > p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0)$ escolhemos a hipótese H_1 (símbolo $\mathbf{s}_1$), senão escolhemos a outra.

Embora possa não nos levar aos melhores resultados a detecção de máxima verosimilhança é a mais usada de todas.

2.2. Critério MAP ("maximum a posteriori probability")

Imaginemos agora que, tendo-se recebido um certo ponto *z*, a probabilidade de se ter enviado $\mathbf{s}_1$ é maior que a de se ter enviado $\mathbf{s}_0$. Então o nosso decisor "pensará", com certeza, que $\mathbf{s}_1$ foi enviado, isto é, escolherá o ponto associado à maior das probabilidades condicionais a posteriori $p\left(\mathbf{s}_0\middle|\mathbf{z}\right)$ e $p\left(\mathbf{s}_1\middle|\mathbf{z}\right)$. Por isso se chama a este tipo de escolha *critério da máxima probabilidade a* *posteriori*, ou *critério MAP*. Tínhamos acabado de ver que, pelo contrário, a estimação ML usa probabilidades a priori (as verosimilhanças).

Sem o provar por enquanto, podemos contudo ir já adiantando:

A estimação MAP minimiza a probabilidade de erro.

Com base na amostra observada **z** as decisões MAP respeitam, portanto,

$$p(\mathbf{s}_1 \mid \mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\mathbf{s}_0 \mid \mathbf{z}) \qquad \textit{critério MAP} \tag{5}$$

Porém, temos um problema: não conhecemos as probabilidades $p(\mathbf{s}_0|\mathbf{z})$ e $p(\mathbf{s}_1|\mathbf{z})$. "Felizmente temos Bayes". De facto, sendo P_i a probabilidade de ocorrência do símbolo $\mathbf{s}_i$ o teorema de Bayes $p(A)p(B \mid A) = p(B)p(A \mid B)$ permite-nos escrever

$$\frac{p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_1)P_1}{p(\mathbf{z})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_0)P_0}{p(\mathbf{z})},$$

para logo a seguir nos desembaraçarmos do denominador comum $p(\mathbf{z})$ e obtermos a expressão final, uma razão de verosimilhanças:

$$\frac{p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1} \qquad \textit{critério MAP} \tag{6}$$

Se $P_0 = P_1$ então $p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_0)$. Mas... isto é o critério ML! Concluímos então que

Os critérios de estimação MAP e ML são equivalentes se os símbolos forem equiprováveis.

Resumindo um pouco:
- Na estimação MAP consideramos probabilidades a posteriori, isto é, probabilidades obtidas após observação da saída do canal.
- Na estimação ML consideramos probabilidades a priori (verosimilhanças), isto é, probabilidades já conhecidas antecipadamente. É um método mais simples e também o mais usado.
- Se as formas de onda $s_0(t)$ e $s_1(t)$ forem equiprováveis os dois critérios de estimação são equivalentes.
- A estimação MAP minimiza a probabilidade de erro. A estimação ML só minimiza a probabilidade de erro se os símbolos forem equiprováveis.
- Se não conhecermos as probabilidades de ocorrência dos símbolos o melhor é supor que são igualmente prováveis.

Exemplo 1:
Transmissão binária em espaço unidimensional

Consideremos a transmissão digital de uma sequência de bits representados por formas de onda $s_0(t)$ e $s_1(t)$ a que correspondem os pontos $\mathbf{s}_0$ e $\mathbf{s}_1$ da Fig. 1, onde $\psi_1(t)$ é uma função-base de energia unitária. Foi recebido o ponto z = 3,5.

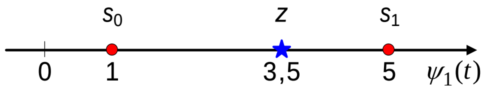
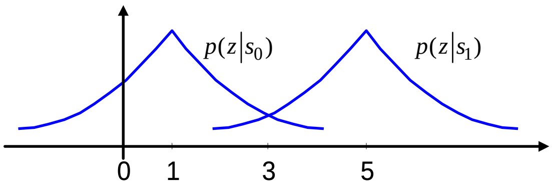


Fig. 1 Pontos enviados e ponto recebido.

Devemos escolher o ponto da Fig. 1 que estiver mais próximo do recebido (neste caso, $\mathbf{s}_1$)? A resposta correcta pode ser esta, mas também pode não ser. Qual é a resposta correcta afinal? Para responder precisamos de encontrar um *limiar de decisão* γ, um valor que divida a recta da figura em duas semi-rectas: se z estiver "à direita" do limiar escolhemos um ponto ($\mathbf{s}_1$, por exemplo), se estiver "à esquerda" escolhemos o outro. Exprimimos tal procedimento escrevendo $z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$ e para determinarmos γ teremos de nos servir das Eqs. (4) e (6).

P.: Admitamos que o ruído no canal tem função densidade de probabilidade $p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\sqrt{2}|n|/\sigma}$, em que $\sigma^2 = 9$ representa a potência. Se $P_0 = 2/3$ quais deverão ser os limiares de decisão MAP e ML e quais as respectivas estimativas do ponto enviado?

R.: As verosimilhanças de que necessitamos estão representadas na figura seguinte.



A Eq. (4) diz-nos logo que o limiar de decisão ML está na intersecção das funções, isto é, 3. Já o confirmaremos. Quanto ao critério MAP, é expresso por $\frac{p(z\,|\,s_1)}{p(z\,|\,s_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$, que neste caso se escreve $\exp\left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(|z-1|-|z-5|\right)\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$. O desenvolvimento desta expressão conduz-nos sucessivamente a

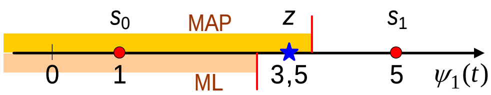
$$\exp\left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(z-1+z-5)\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1} \qquad \Rightarrow \qquad z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 3+\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\ln\frac{P_0}{P_1}$$

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 3{,}7352 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{MAP} = 3{,}7352$$

Ficámos a saber que, segundo o critério MAP, acima de 3,7352 decidimos uma coisa e abaixo decidimos outra.

O critério ML exprime-se fazendo $P_0 = P_1$ na expressão MAP $z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 3+\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\ln\frac{P_0}{P_1}$:

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 3 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{ML} = 3$$ (confirma o valor antecipado)



O valor recebido, z = 3,5, conduz-nos a duas decisões distintas:

MAP: escolhemos $\mathbf{s}_0$.

ML: escolhemos $\mathbf{s}_1$.

A primeira é uma melhor escolha.

2.3. Decisões binárias com ruído gaussiano branco aditivo

Sejam $d_0 = \|\mathbf{z}-\mathbf{s}_0\|$ e $d_1 = \|\mathbf{z}-\mathbf{s}_1\|$ as distâncias do ponto recebido **z** aos dois pontos $\mathbf{s}_0$ e $\mathbf{s}_1$, respectivamente, e suponhamos que o ruído tem distribuição normal $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. As verosimilhanças de que precisamos são as probabilidades gaussianas condicionais da Eq. (2),

$$p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_0\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z}-\mathbf{s}_0\|^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{d_0{}^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p\left(\mathbf{z}\middle|\mathbf{s}_1\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z}-\mathbf{s}_1\|^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{d_1{}^2}{2\sigma^2}\right).$$

Em função das distâncias quadráticas o critério MAP $\dfrac{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0)} \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \dfrac{P_0}{P_1}$ exprime-se assim, independentemente de *N*:

$$\exp\left(\frac{-d_1^2 + d_0^2}{2\sigma^2}\right) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$$

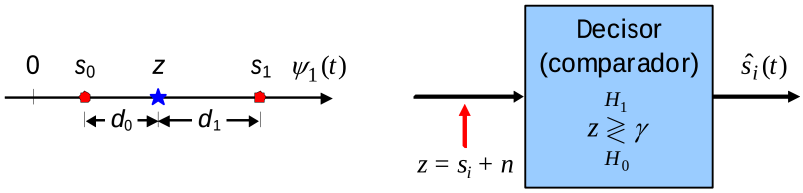
$$d_0^2 \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} d_1^2 + 2\sigma^2 \ln\frac{P_0}{P_1} \qquad \text{(MAP)} \qquad (7)$$

O critério da máxima verosimilhança $p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1) \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0)$, sempre mais simples, reduz-se a

$$d_0^2 \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} d_1^2 \qquad \text{(ML)}^{2} \qquad (8)$$

Note-se que a decisão de máxima verosimilhança não depende das probabilidades de ocorrência dos símbolos nem do ruído, só depende de distâncias: escolhe-se o ponto que estiver mais perto do recebido.

No caso particular de um espaço unidimensional (*N* = 1) o receptor deverá tomar uma decisão binária $z \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \gamma$. Quanto vale γ?



As verosimilhanças (mostradas na Fig. 2) são iguais a

$$p(z\,|\,s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-(z-s_0)^2 / 2\sigma^2\right] \qquad p(z\,|\,s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-(z-s_1)^2 / 2\sigma^2\right]$$

Basta usar a Eq. (7) com $d_0 = z - s_0$ e $d_1 = s_1 - z$ que logo chegamos a

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0 + s_1}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1 - s_0} \ln\frac{P_0}{P_1} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{MAP} = \frac{s_0 + s_1}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1 - s_0} \ln\frac{P_0}{P_1} \qquad \text{(MAP)}$$

---

[2] É tentador usar a distância em vez da distância quadrática (o resultado final seria o mesmo, evidentemente). No entanto... qual é mais fácil de calcular?

Daqui obtemos o limiar de decisão ML, que fica equidistante de **s**₀ e **s**₁: $\gamma_{ML} = \frac{s_0 + s_1}{2}$.

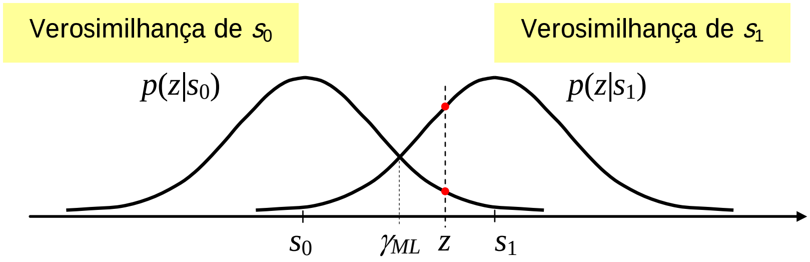


Fig. 2 As funções de verosimilhança gaussianas.

Exemplo 2:
Transmissão binária com ruído gaussiano em espaço bidimensional

Uma constelação binária é formada pelos dois pontos $\mathbf{s}_0 = [1 \quad 2]^T$ e $\mathbf{s}_1 = [5 \quad 0]^T$. A densidade espectral de potência do ruído gaussiano é $\sigma^2 = N_0/2$, com $N_0 = 3$, e os símbolos ocorrem com as probabilidades $P_0 = p(\mathbf{s}_0)$ e $P_1 = 1 - P_0$. O decisor recebeu o ponto $\mathbf{r} = [2 \quad -0{,}5]^T$.

Queremos determinar a equação da linha que separa as regiões de decisão de $\mathbf{s}_0$ e $\mathbf{s}_1$ segundo os critérios MAP e ML quando $P_0 = 0{,}5$ e $P_0 = 0{,}1$. Qual será a estimativa do ponto enviado se $P_0 = 0{,}1$?

R.: As distâncias quadráticas de um ponto recebido $\mathbf{r} = [x \quad y]^T$ a cada um dos símbolos são $d_0^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_0\|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ e $d_1^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^2 = (x-5)^2 + y^2$. Sabemos que $d_0^2 \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} d_1^2 + 2\sigma^2 \ln \frac{P_0}{P_1}$ (Eq. (7)) pelo que a região de decisão MAP de **s**₁ é definida por

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 > (x-5)^2 + y^2 + 2\sigma^2 \ln \frac{P_0}{P_1} \qquad \Rightarrow \qquad y < 2x - \frac{\sigma^2}{2} \ln \frac{P_0}{P_1} - 5$$

ou, tendo em conta que $\sigma^2 = N_0/2$, $y < 2x + \frac{N_0}{4} \ln \frac{1-P_0}{P_0} - 5$. Digamos, portanto, que

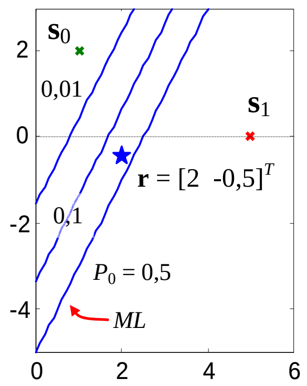
$$y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x + \frac{N_0}{4} \ln \frac{1-P_0}{P_0} - 5 .$$

A fronteira MAP é a recta $y = 2x + \frac{N_0}{4} \ln \frac{1-P_0}{P_0} - 5$, de declive 2 e que cruza o eixo dos *yy* em $\frac{N_0}{4} \ln \frac{1-P_0}{P_0} - 5$. Este cruzamento é tanto mais alto no eixo quanto maior for N_0 e quanto menos provável for **s**₀ (costuma ser assim, realmente: o limiar de decisão óptimo está mais próximo do símbolo menos provável). Substituindo os valores de P_0 obtemos:

$$P_0 = 0{,}5: \quad y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x - 5 .$$

$P_0 = 0{,}1: \quad y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x + \frac{3}{4} \ln \frac{0{,}9}{0{,}1} - 5 = 2x - 3{,}35$. (a recta está a "subir", aproximando-se de **s**₀)

A figura mostra as fronteiras para $N_0 = 3$ e três valores diferentes de P_0.



A fronteira estabelecida pela regra de decisão ML é obtida da regra MAP fazendo $P_0 = 0{,}5$: $y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x - 5$. A fronteira de decisão ML não depende do nível de ruído nem das probabilidades de ocorrência dos bits.

Como o ponto $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}^T$ fica abaixo da linha de fronteira $y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x - 3{,}35$ do critério MAP estimamos que foi transmitido o bit **s**$_1$. A linha divisória ML é outra, $y \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2x - 5$, e como **r** fica acima dela estimamos que foi transmitido o símbolo **s**$_0$.

2.4. Extensão à transmissão não-binária em espaço multidimensional

Agora temos *M* símbolos passíveis de ser enviados e recebemos um vector **z** de *N* elementos. Consoante o tipo de estimação, ou escolhemos a maior de todas as verosimilhanças $p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right)$ (critério ML) ou a maior de todas as probabilidades a posteriori $p\left(\mathbf{s}_i|\mathbf{z}\right)$ (critério MAP). O primeiro critério exprime-se assim:

Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_K\right) = \max p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right), \quad i = 1,2,\ldots,M$ *critério ML*

Dado que a função logaritmo é crescente, o mesmo símbolo será escolhido se em vez da máxima verosimilhança $p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right)$ procurarmos a máxima *log-verosimilhança* $\ln p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right)$:

Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $\ln p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_K\right) = \max\left[\ln p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right)\right], \quad i = 1,2,\ldots,M$ *critério ML*

Quanto ao critério MAP faremos deste modo:

Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $p\left(\mathbf{s}_K|\mathbf{z}\right) = \max p\left(\mathbf{s}_i|\mathbf{z}\right), \quad i = 1,2,\ldots,M$ *critério MAP*

Socorremo-nos de novo de Bayes e escrevemos

$$p(\mathbf{s}_i \mid \mathbf{z}) = \frac{P_i\, p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_i)}{p(\mathbf{z})}$$

(ou seja, $p(\mathbf{s}_1 \mid \mathbf{z}) = \dfrac{P_1\, p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{z})}$, $p(\mathbf{s}_2 \mid \mathbf{z}) = \dfrac{P_2\, p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_2)}{p(\mathbf{z})}$, etc.). Como o denominador $p(\mathbf{z})$ é comum a todas as $p\left(\mathbf{s}_i|\mathbf{z}\right)$ tanto faz procurar a maior probabilidade $p\left(\mathbf{s}_i|\mathbf{z}\right)$ como o maior produto $P_i\, p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_i)$. Diremos então que

Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $P_K\, p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_K\right) = \max\left[P_i\, p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}_i)\right], \quad i = 1,2,\ldots,M$ *critério MAP* ou, aplicando logaritmos,

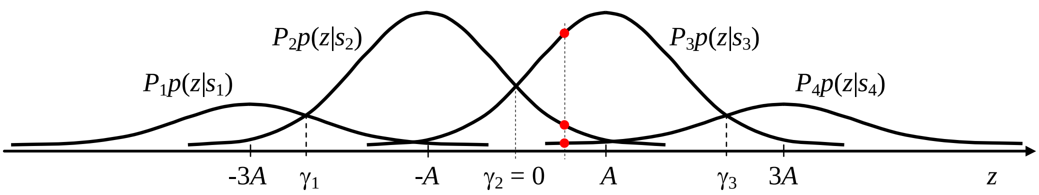
$$\textit{Escolhe-se } \mathbf{s}_K \textit{ se } \ln\left[P_K\, p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_K)\right] = \max \ln\left[P_i\, p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_i)\right],\ i = 1,2,\ldots,M \qquad \textit{critério MAP}$$

E se os símbolos forem equiprováveis? Nesse caso todas as probabilidades P_i são iguais e tanto faz procurar o máximo de $P_i\, p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_i)$ como o máximo de $p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_i)$. Mas... não é este o critério ML? Pois é! Voltámos a concluir que com equiprobabilidade os dois tipos de escolha são equivalentes.

Exemplo 3:
Transmissão quaternária com ruído gaussiano em espaço unidimensional

Uma constelação de sinal unidimensional é constituída pelos quatro pontos $s_1 = -3A$, $s_2 = -A$, $s_3 = A$ e $s_4 = 3A$. As suas probabilidades de ocorrência são $P_1 = P_4 = 1/8$ e $P_2 = P_3 = 3/8$ e o ruído é gaussiano aditivo com média nula e variância $\sigma^2 = A^2/\ln 3$. Vamos determinar os limiares de decisão MAP.

A figura seguinte apresenta os quatro produtos $P_i\, p(z\,|\,s_i) = P_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-s_i)^2/2\sigma^2}$, $i = 1,2,3,4$, necessários ao critério MAP; segundo este, deveremos escolher o símbolo para o qual $P_i\, p(z\,|\,s_i)$ seja o maior de todos.



As curvas intersectam-se em $z = \gamma_1$, $z = \gamma_2 = 0$ e $z = \gamma_3$. Se $z < \gamma_1$ o valor de $P_1\, p(z\,|\,s_1)$ é maior que os outros três produtos e deveremos escolher o símbolo s_1; do mesmo modo, se $z \geq \gamma_3$ o valor de $P_4\, p(z\,|\,s_4)$ é o maior e deveremos escolher s_4, enquanto que s_2 e s_3 deverão ser escolhidos se $\gamma_1 \leq z < \gamma_2$ e $\gamma_2 \leq z < \gamma_3$, respectivamente. As intersecções indicam assim os limiares de decisão MAP. Já conhecemos um ($\gamma_2 = 0$) e, dada a simetria, sabemos que $\gamma_3 = -\gamma_1$. Determinemos γ_3, por exemplo:

$$P_3\, p(z\,|\,s_3) = P_4\, p(z\,|\,s_4) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{8\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\gamma_3 - A)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\gamma_3 - 3A)^2/2\sigma^2}$$

Tomando logaritmos obtemos

$$\ln 3 - \frac{(\gamma_3 - A)^2}{2\sigma^2} = -\frac{(\gamma_3 - 3A)^2}{2\sigma^2} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_3 = 2A + \frac{\sigma^2 \ln 3}{2A} = 2{,}5A$$

Em conclusão: no critério ML os limiares óptimos encontram-se nas intersecções de $p(z\,|\,s_i)$ ao passo que no critério MAP se encontram nas intersecções de $P_i\, p(z\,|\,s_i)$.

2.4.1. Decisões com ruído gaussiano branco aditivo

Seja $d_i = \|\mathbf{z} - \mathbf{s}_i\|$ a distância do ponto recebido $\mathbf{z}$ ao ponto genérico $\mathbf{s}_i$ e suponhamos que o ruído tem distribuição normal $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. A verosimilhança genérica é $p\left(\mathbf{z}|\mathbf{s}_i\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{d_i^2}{2\sigma^2}\right)$.

Comecemos pelo critério MAP, como de costume. Em vez de

$$\max\left[P_i\, p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_i)\right] = \max\left[P_i\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\frac{d_i^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

podemos usar $\max\left[P_i \exp\left(-d_i^2/2\sigma^2\right)\right]$ por causa do factor comum $\left(1/2\pi\sigma^2\right)^{N/2}$, e depois $\max\left(\ln P_i - d_i^2/2\sigma^2\right)$ após aplicarmos logaritmos. Mas procurar este máximo equivale a procurar o mínimo de $d_i^2/2\sigma^2 - \ln P_i$. Portanto,

Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $\dfrac{d_K^2}{2\sigma^2} - \ln P_K = \min\left(\dfrac{d_i^2}{2\sigma^2} - \ln P_i\right)$, $i = 1,2,\ldots,M$ *critério MAP*

Como é hábito, para obter o critério ML basta considerar que no critério MAP os símbolos são equiprováveis ($P_i = 1/M$). Logo, procurar $\min\left(d_i^2/2\sigma^2 - \ln P_i\right) = \min\left(d_i^2/2\sigma^2 + \ln M\right)$ equivale a procurar $\min(d_i^2/2\sigma^2)$ e também $\min d_i^2$. Assim,

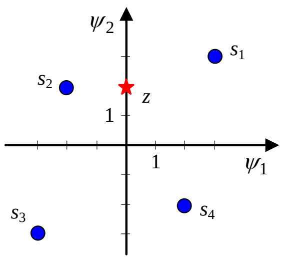
Escolhe-se $\mathbf{s}_K$ *se* $d_K^2 = \min d_i^2$, $i = 1,2,\ldots,M$ *critério ML*

A conclusão não é inesperada: tal como na transmissão binária, com símbolos equiprováveis devemos escolher o ponto enviado que estiver mais próximo do recebido.

Nota: a distância só serve como critério se o ruído for gaussiano.

Exemplo 4:
Constelação de 4 pontos no plano

P.: Os pontos $\mathbf{s}_i$ da constelação rômbica da figura têm coordenadas $\mathbf{s}_1 = [3 \quad 3]^T$, $\mathbf{s}_2 = [-2 \quad 2]^T$, $\mathbf{s}_3 = [-3 \quad -3]^T$ e $\mathbf{s}_4 = [2 \quad -2]^T$ e probabilidades de ocorrência $P_1 = P_3 = 1/8$ e $P_2 = P_4 = 3/8$. Se com ruído gaussiano com $\sigma^2 = N_0/2 = 5$ se tiver sido recebido o ponto $\mathbf{z} = [0 \quad 2]^T$ quais são as estimativas MAP e ML do ponto enviado?

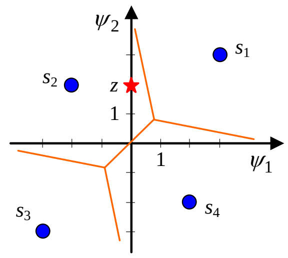


R.: Na escolha ML procura-se a menor distância quadrática $d_i^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{s}_i\|^2$ e na escolha MAP o menor valor $\dfrac{d_i^2}{2\sigma^2} - \ln P_i$:

$d_1^2 = (0-3)^2 + (2-3)^2 = 10$ $\qquad d_2^2 = 4$ $\qquad d_3^2 = 34$ $\qquad d_4^2 = 20$

$\dfrac{d_1^2}{2\sigma^2} - \ln P_1 = 3{,}08$ $\qquad \dfrac{d_2^2}{2\sigma^2} - \ln P_2 = 1{,}38$ $\qquad \dfrac{d_3^2}{2\sigma^2} - \ln P_3 = 5{,}48$ $\qquad \dfrac{d_4^2}{2\sigma^2} - \ln P_4 = 2{,}98$

A escolha ML é o símbolo **s**$_2$ e a escolha MAP também. A figura seguinte mostra as regiões de decisão de máxima verosimilhança, que confirmam que o ponto **z** está situado na região de **s**$_2$.



3. Minimização da probabilidade de erro

Afirmou-se atrás: "A estimação MAP minimiza a probabilidade de erro". Vamos ver porquê, cingindo-nos à transmissão binária.

A probabilidade de erro numa decisão binária entre os símbolos s_0 e s_1 é calculada através da média ponderada $P_e = P_0 P(erro|s_0) + P_1 P(erro|s_1)$. É sabido que o limiar óptimo γ_0, aquele para o qual P_e atinge o valor mínimo, é determinado pela relação

$$\frac{p(\gamma_0|\mathbf{s}_1)}{p(\gamma_0|\mathbf{s}_0)} = \frac{P_0}{P_1},$$

em que $p(\gamma_0|\mathbf{s}_0)$ e $p(\gamma_0|\mathbf{s}_1)$ são os valores das verosimilhanças $p(z|\mathbf{s}_i)$ para $z = \gamma_0$. Olhando para a relação MAP $\frac{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$ vemos que o seu limiar de decisão é obtido quando $\frac{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}_0)} = \frac{P_0}{P_1}$, ou melhor, quando $\frac{p(\gamma_{MAP}\,|\,\mathbf{s}_1)}{p(\gamma_{MAP}\,|\,\mathbf{s}_0)} = \frac{P_0}{P_1}$. Ora não quer isto dizer que $\gamma_{MAP} = \gamma_0$?

O limiar γ_{ML} só é óptimo quando os símbolos são equiprováveis.

Um pequeno exemplo vai mostrar a diferença. Seja então $P_0 = 3/4$, $s_1 = -s_0 = 3$ e $\sigma^2 = 6$, a que correspondem os limiares $\gamma_{ML} = 0$ e $\gamma_{MAP} = \ln 3 = 1{,}1$. Não será difícil de obter as correspondentes probabilidades de erro previstas:

ML: $$P_e = P(erro|s_0) = Q\left(\frac{\gamma_{ML} - s_0}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0{,}11$$

MAP: $$P_e = P_0 P(erro|s_0) + P_1 P(erro|s_1) = P_0 Q\left(\frac{\gamma_{MAP} - s_0}{\sigma}\right) + P_1 Q\left(\frac{s_1 - \gamma_{MAP}}{\sigma}\right) = 0{,}09$$

O que é melhor?

Exemplo 5:
Probabilidade de erro em transmissão quaternária unidimensional

Retomemos o Exemplo 3 para calcular a probabilidade de erro resultante da escolha dos limiares de decisão óptimos $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 = -\gamma_1 = 2{,}5A$:

$$
\begin{aligned}
P_e &= P_1 P(erro|s_1) + P_2 P(erro|s_2) + P_3 P(erro|s_3) + P_4 P(erro|s_4) = \\
&= \frac{1}{8} Q\left(\frac{\gamma_1 + 3A}{\sigma}\right) + 2 \times \frac{3}{8}\left[Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{\gamma_3 - A}{\sigma}\right)\right] + \frac{1}{8} Q\left(\frac{3A - \gamma_3}{\sigma}\right) = \\
&= \frac{1}{4} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + \frac{3}{4}\left[Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3A}{2\sigma}\right)\right] = \\
&\approx 0{,}12
\end{aligned}
$$

A escolha de outros limiares de decisão conduzirá a uma probabilidade de erro superior a esta.